QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SÉRIES ORTHOGONALES LACUNAIRES

Par J. Marcinkiewicz, Wilno

1. Dans une note récente [1]) j'ai démontré le

Théorème 1. *Soit* $\{\varphi_n\}$ *un système orthogonal et normal dans l'intervalle* (0,1) *vérifiant la condition*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\, dx > 0. \tag{1.1}$$

Il existe une suite $\{n_i\}$ *telle que la convergence presque partout d'une série de la forme*

$$\sum_i a_i \varphi_{n_i}(x) \tag{1.2}$$

équivaut à l'inégalité

$$\sum a_i^2 < \infty. \tag{1.3}$$

Dans une autre note [2]) j'ai amélioré une partie de ce théorème en démontrant le

Théorème 2. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que la relation*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_1^{n_\nu} a_i \varphi_{n_i}(x) > -\infty \tag{1.4}$$

verifiée presque partout entraîne (1.3).

---

[1]) Marcinkiewicz 2, *cf*. aussi Marcinkiewicz 3 et Menchoff 5 et 6.

[2]) Marcinkiewicz 4.

La démonstration que j'ai donné pour ces théorèmes est très longue. Le but de cette note est de les démontrer d'une façon plus courte et plus simple. Ma nouvelle démonstration sera basée sur le

Théorème 3. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que l'on a pour des nombres* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *arbitraires*

$$A\Big(\sum_1^n a_n^2\Big)^{p/2} \leqslant \int_0^1 \Big|\sum_1^n a_\nu \varphi_{n_\nu}(x)\Big|^p dx \leqslant \Big(\sum_1^n a_\nu^2\Big)^{p/2} \qquad (0<p\leqslant 2), \tag{1.5}$$

où A *désigne une constante positive* [3].

2. ***Lemme 1.*** *Soient* $\{\omega_\nu\}$ *le système orthogonal et normal de M.* ***Walsh*** [4], $\{n_i\}$ *une suite de nombres entiers telle que*

$$n_{i+1}/n_i \geqslant 2 \tag{2.1}$$

et f

$$f = \sum c_\nu \omega_\nu \tag{2.2}$$

une fonction de la classe L^p $(p>1)$.

La série

$$\sum_\nu \Delta_\nu; \qquad \Delta_\nu = \sum_{2^\nu - 1}^{2^{\nu+1}} c_\mu \omega_\mu \tag{2.3}$$

converge presque partout et on a l'inégalité

$$A_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx \leqslant \int_0^1 |f|^p dx \leqslant B_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} \tag{2.4}$$

où $A_p > A$ *dès que* $\frac{3}{2} \leqslant p \leqslant 2$.

Ce résultat est connu, il est dû à R. Paley [5].

3. ***Lemme 2.*** *Soit*

$$\int_0^1 |\psi_\nu|\, dx > \Delta, \qquad \int_0^1 \psi_\nu^2 dx < 1. \tag{3.1}$$

---

[3]) Une inégalité analogue pour $p \geqslant 2$ a été considerée par M. S. Banach. Voir Banach 1.

[4]) Walsh 8. [5]) Paley 7.

On a pour toute suite $\{a_\nu\}$ *et tout* $p \leqslant 2$

$$(\sum a_\nu^2)^{p/2} \leqslant 4\Delta^{-2} \int_0^1 (\Sigma a_\nu^2 \psi_\nu^2)^{p/2}. \tag{3.2}$$

Nous pouvons supposer évidemment $\sum a_\nu^2 = 1$. Posons $\sigma^2 = \sum a_\nu^2 \psi_\nu^2$ et désignons par A et B les ensembles dans lesquels on a réspectivement $\sigma \geqslant 1$ et $\sigma \leqslant 1$. On a tantôt $|A| \geqslant \Delta^2/4$ tantôt $|A| \leqslant \Delta^2/4$. Le premier cas est banal. Dans le deuxième on a

$$\int_0^1 |\psi_\nu|\, dx \leqslant \left\{\int_B \psi_\nu^2\, dx\right\}^{1/2} + |A|^{1/2},$$

d'où l'on déduit

$$\int_B \psi_\nu^2\, dx \geqslant \Delta^2/4,$$

$$\int_0^1 \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^2 dx \geqslant \sum a_\nu^2 \int_B \psi_\nu^2 dx \geqslant \Delta^2/4,$$

ce qui démontre le lemme.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 3. En changeant les notations, on peut admettre que l'on a

$$\int_0^1 |\varphi_\nu|\, dx \geqslant 2\Delta. \tag{3.3}$$

Soit

$$\varphi_\nu = \sum a_{\nu,\mu}\, \omega_\mu.$$

Posons $m_0 = 0$, $n_1 = 1$ et désignons par m_1 un nombre satisfaisant à la condition

$$\sum_{n_1}^{\infty} a_{1,\mu}^2 \leqslant \Delta^4/4. \tag{3.4}$$

Supposons $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ définis. Choisissons pour n_{k+1} un nombre assez grand pour que l'on ait

$$\sum_1^{m_k} |a_{n_{k+1},\mu}| < [A_p \Delta^2]^{2/p}/4^k, \qquad n_{k+1} > n_k \tag{3.5}$$

et ensuite pour m_{k+1} un nombre satisfaisant aux inégalités

$$m_{k+1} > 2m_k; \qquad \sum_{m_{k+1}}^{\infty} a_{n_{k+1},\mu}^2 \leqslant [A_p \Delta^2]^{2/p} / 4^{k+1}. \tag{3.6}$$

On a

$$\varphi_{n_\nu}(x)=\sum_{1}^{m_{\nu-1}} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu+\sum_{m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu+\sum_{m_\nu+1}^{\infty} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu=\varepsilon_\nu+\psi_\nu+\varrho_\nu,$$

où

$$(3.7)\qquad |\varepsilon_\nu|\leqslant\frac{A\varDelta^2}{16}2^{-\nu};\qquad \int_0^1 \varrho_\nu^2 dx\leqslant\varDelta^2 4^{-\nu};\qquad \int_0^1 |\psi_\nu| dx>\varDelta.$$

Soit $3/_2\leqslant p\leqslant 2$. On a

$$\left\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varphi_{n_\nu}|^p dx\right\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\psi_\nu|^p dx\right\}^{1/p}-\left\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varepsilon_\nu|^p dx\right\}^{1/p}-\left\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varrho_\nu|^p dx\right\}^{1/p}=I_1-I_2-I_3.$$

D'après (2.4) et (3.2), on a $I_1^p\geqslant\frac{1}{4}A_p\varDelta^2 s^{p/2}$ où $s=\sum a_\nu^2$. L'inégalité (3.7) donne $I_2\leqslant[A_p\varDelta^2]^{1/p}s^{1/2}/16$ et $I_3^p\leqslant A_p\varDelta^2 s^{p/2}/16$, ce qui entraîne

$$\left\{\int_0^1 |\sum a_i\varphi_{n_i}|^p dx\right\}^{1/p}\geqslant cs^{1/2}.$$

Le théorème se trouve démontré pour $\frac{3}{2}\leqslant p\leqslant 2$. Soit donc $p<\frac{3}{2}$. Désignons par A et B les ensembles où $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\geqslant 1$ et $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\leqslant 1$. Lorsque $|A|>\mu$, on a $\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant\mu$ $(\sigma=\sum a_\nu^2\varphi_{n\nu}^2)$. Dans le cas contraire, on trouve

$$\int_0^1 \sigma^{3/4}dx=\int_A+\int_B\leqslant\mu^{1/4}+\int_B \sigma^{p/2}dx;\qquad \int_0^1 \sigma^{3/4}dx\geqslant C,$$

d'où

$$\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant C-\mu^{1/4}\geqslant c/2$$

et il en vient dans tous les cas

$$\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant c/2.$$

L'inégalité $\int\limits_0^1 \sigma^{p/2}\,dx \leqslant 1$ étant évidente, il en résulte le théorème. En s'appuyant sur ce résultat, on peut démontrer le

Théorème 4. *Sous la condition* (1.1), *on peut choisir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *telle que l'on ait pour toute suite* $\{a_i\}$ *et tout ensemble* A, $|A|>1-\varepsilon_p$

$$\int\limits_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx \geqslant C_p (\sum a_\nu^2)^{p/2}. \tag{3.8}$$

En effet, en supposant l'inégalité (1.4), on a

$$\int\limits_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx = \int\limits_0^1 - \int\limits_{CA} \geqslant A_p(\sum a_i^2) - |CA|^{2-p/p}(\sum a_i^2)^{p/2}.$$

4. Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 2. Soient $\{\varphi_{n_i}\}$ les fonctions choisies dans le théorème 3. Supposons (1.4) verifiée et

$$\sum a_i^2 = \infty.$$

Il existe un nombre M tel que la relation

$$\sum_1^\nu a_i \varphi_{n_i}(x) > -M \qquad \nu=1,2,..$$

est vérifiée dans un ensemble E, $|CE|<\varepsilon_1, \varepsilon_1$ étant le même que dans le théorème 4. On a [6])

$$\int\limits_E |S_\nu|\,dx \leqslant \int\limits_E |S_\nu + M| + M \leqslant \int\limits_E S_\nu + 2M = 2M + \sum_1^\nu a_i \xi_i$$

où $S_\nu = \sum\limits_1^\nu a_i \varphi_{n_i}$, $\xi_i = \int\limits_E \varphi_{n_i}(x)\,dx$.

Or, de la relation $\sum \xi_i^2 \leqslant 1$ on conclut facilement que

$$\int\limits_E |S_\nu|\,dx = O(\sum_1^\nu a_i^2)^{1/2},$$

ce qui est en contradiction avec (3.8).

---

[6]) Comparer Zygmund 9.

Le théorème 1 résulte du théorème 2 et du lemme 1. En effet, le théorème 2 montre que (1.2) entraîne (1.3). D'autre part, posons comme dans le lemme 2 $\varphi_{n_\nu}=\varepsilon_\nu+\psi_\nu+\varrho_\nu$. L'inégalité (1.3) entraîne

$$\sum a_i \varphi_{n_i} \epsilon L^2,$$

d'où résulte d'après le lemme 1 la convergence presque partout de la série

$$\sum a_\nu \psi_\nu.$$

La convergence de la série $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ étant évidente, il reste à démontrer la convergence de la série $\sum a_\nu \varrho_\nu$, mais elle résulte immediatement de la relation

$$\sum \int_0^1 |a_\nu \varrho_\nu| \, dx < \infty.$$

TRAVAUX CITÉS.

1. S. Banach, *Sur les séries lacunaires*, Bull. Ac. Pol. 1933, p. 149-154.

2. J. Marcinkiewicz, *Sur les séries lacunaires*, Stud. Math. 8.

3. J. Marcinkiewicz, *Sur la convergence de séries orthogonales*, Stud. Math. 6 (1936), p. 39-45.

4. J. Marcinkiewicz, *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Math. Pol. 16 (1937), p. 84-96.

5. A. Menchoff, *Sur la convergence et la sommation des séries orthogonales*, Bull. Soc. Math. France 64 (1937), p. 1-24.

6. A. Menchoff, *Sur la sommation des série othogonales par les méthodes linéaires* (en russe) Bull. Ac. Sc. U. R. S. S. (1937), p. 203-229.

7. R. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions I*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 241-264.

8. J. Walsh, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. 69 (1910), p. 331-371.

9. A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Trans. Americ. Math. Soc. 34 (1932), p. 435-446.