

7.72 — nośność graniczna, zniszczenie  
7.74 — materiały kruche, ośrodki rozdrobnione

**Jerzy Podgórski**

**OGÓLNY WARUNEK STANU GRANICZNEGO  
DLA MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH**

**17/1983**

p. 269



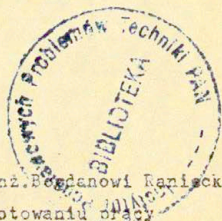
**WARSZAWA 1983**

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 marca 1983 r.

Praca wykonana podczas stażu naukowego  
w Zakładzie Teorii Konstrukcji  
Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN



Autor pragnie podziękować doc.dr hab.inż. Bogdanowi Raniżkiemu  
za zachętę i pomoc w przygotowaniu pracy

57020



N a p r a w a c h   r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 130 egz. Ark.wyd. 1 . Ark.druk. 1,5 .  
Oddano do drukarni w maju 1983 r.  
Nr zamówienia 338/83      M-13.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Jerzy Podgórski  
Instytut Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej  
Politechnika Lubelska

OGÓLNY WARUNEK STANU GRANICZNEGO  
DLA MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH

1. Wstęp

Dla dużej grupy materiałów /np. metale/, których przejście z obszaru zachowań sprężystych do obszaru sprężysto-plastycznego nie zależy w sposób istotny od średniego ciśnienia, problem określenia warunku tego przejścia /warunku plastyczności/ znalazł w zasadzie rozwiązanie w postaci powszechnie stosowanych kryteriów Tresca' i Hubera-Misesa.

Dla materiałów kruchych i ośrodków rozdrobnionych, gdzie podobną rolę pełni warunek stanu granicznego, brak jest niestety tak prostych i zgodnych z doświadczeniem kryteriów.

Najczęściej stosowanym do materiałów tej grupy jest warunek Coulomba-Mohra, który jednak prowadzi do rozbieżności z doświadczeniem sięgających kilkunastu a nawet kilkudziesięciu procent, a także w skomplikowany sposób wyraża się przez niezmienniki tensora naprężenia, co bardzo utrudnia rozważania teoretyczne.

Rozbieżności te próbuje się usunąć wprowadzając dodatkowe ograniczenia /np. "tension cutoffs" Paul'a [15] / co jeszcze bardziej komplikuje stosowanie tego kryterium, obrazem którego w przestrzeni naprężeń jest ostrosłup, lub w modyfikacji Paul'a [15] ostrosłup przenikający się z sześcianiem.

Podobne zastrzeżenia można mieć do kryterium Griffith'a i jego modyfikacji zaproponowanej przez McClintock'a i Walsh'a /por. [13] / polegającej na uwzględnieniu tarcia wewnętrznego.

Jak wykazały eksperymenty przeprowadzone ze skalami, betonem, zaprawą cementową, gliną i piaskiem / [2] , [3] , [4] , [7] ,

[9] , [10] , [11] , [16] , [17] , [18] /, odległość punktów powierzchni granicznej od osi ciśnień hydrostatycznych w istotny sposób zależy nie tylko od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia, ale także od trzeciego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia.

Kryteria uwzględniające ten fakt były formułowane przez wielu badaczy/[6] , [8] , [10] , [11] , [14] , [20] /. Wśród zaproponowanych warunków wyróżnić można warunek Ottosena [14] , jako najbardziej zgodny z danymi doświadczalnymi dla betonu i warunek Lade'a [8] , jako najprostszy i dosyć dobrze oddający zachowanie się ośrodków sypkich.

W niniejszej pracy będzie podana nowa postać warunku stanu granicznego, która mimo swej stosunkowej prostoty pozwala wiernie opisać zachowanie wielu różnych materiałów izotropowych. Sformułowanie tak uniwersalnego kryterium stało się możliwe dzięki zależnej od dwóch parametrów funkcji opisującej przekrój powierzchni granicznej płaszczyzną stałych ciśnień.

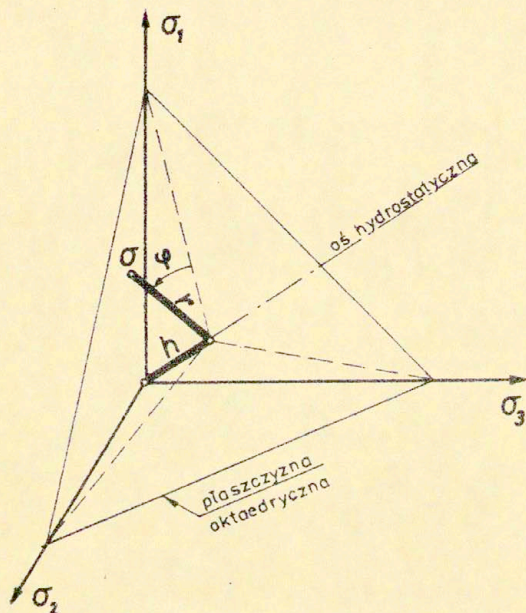
## 2. SPOSÓB OPISU POWIERZCHNI GRANICZNEJ

W celu możliwie prostego opisu powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń używany będzie walcowy układ współrzędnych  $(r, \varphi, h)$  Haigh'a - Westergarda rys.1 powiązany z "kartezjańskim" układem naprężeń głównych zależnościami:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2 J_2} = \tau_0 \sqrt{3} , \\ \cos 3\varphi &= J = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} , \\ h &= \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sigma_0 \sqrt{3} , \end{aligned} \quad /1/$$

gdzie  $I_1 = \sigma_{ii}$  jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia,  $\sigma_0$  oznacza średnie naprężenie normalne,  $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$  oznacza drugi niezmiennik dewiatora tensora naprężenia,  $\tau_0$  jest oktaedrycznym naprężeniem stycznym, a

$J_3 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$  trzecim niezmiennikiem dewiatora tensora naprężenia.



Rys. 1 .

Dwa układy współrzędnych w przestrzeni naprężeń.

### 3. OBRAZ KRYTERIUM NA PŁASZCZYZNIE OKTAEDRYCZNEJ

Wyniki eksperymentów wykazały, że kształt przekroju powierzchni granicznej płaszczyzna dewiatorową jest niezwykle istotnym elementem, który wręcz decyduje o zgodności kryterium z doświadczeniem.

Fakt ten był powodem proponowania przez różnych badaczy różnych funkcji opisujących kształt tego przekroju, funkcje te

w postaci  $r = r(\varphi)$  nazywane dalej będą funkcjami kształtu. Jedną z najprostszych jest funkcja zaproponowana przez Mills'a i Zimmerman'a [17] w postaci

$$/2/ \quad r = r_0 + J,$$

gdzie  $r_0 = \text{const}$ , która jednak bardzo ogranicza obszar zastosowań, gdyż dla  $r_0 < 10$ , równanie /2/ opisuje już krzywą wklęsłą. Willam i Warnke [20] posługują się równaniem elipsy:

$$/3/ \quad r = \frac{2(1 - \lambda^2) \cos\varphi + (2\lambda - 1) \sqrt{4(1 - \lambda^2) \cos^2\varphi + 5\lambda^2 - 4\lambda}}{4(1 - \lambda^2) \cos^2\varphi + (2\lambda - 1)^2},$$

gdzie  $\lambda$  jest pewną stałą równą stosunkowi promienia  $r$  przy  $\varphi = 0^\circ$  do  $r$  przy  $\varphi = 60^\circ$ ,

$$/4/ \quad \lambda = \frac{r(\varphi = 0^\circ)}{r(\varphi = 60^\circ)}.$$

Oczywiste jest, że dla wszystkich funkcji wypukłych musi być  $\lambda \geq 1/2$ .

W warunkach Ottosena [14] i Lade'a [6], [8] występuje funkcja kształtu określona następującym równaniem:

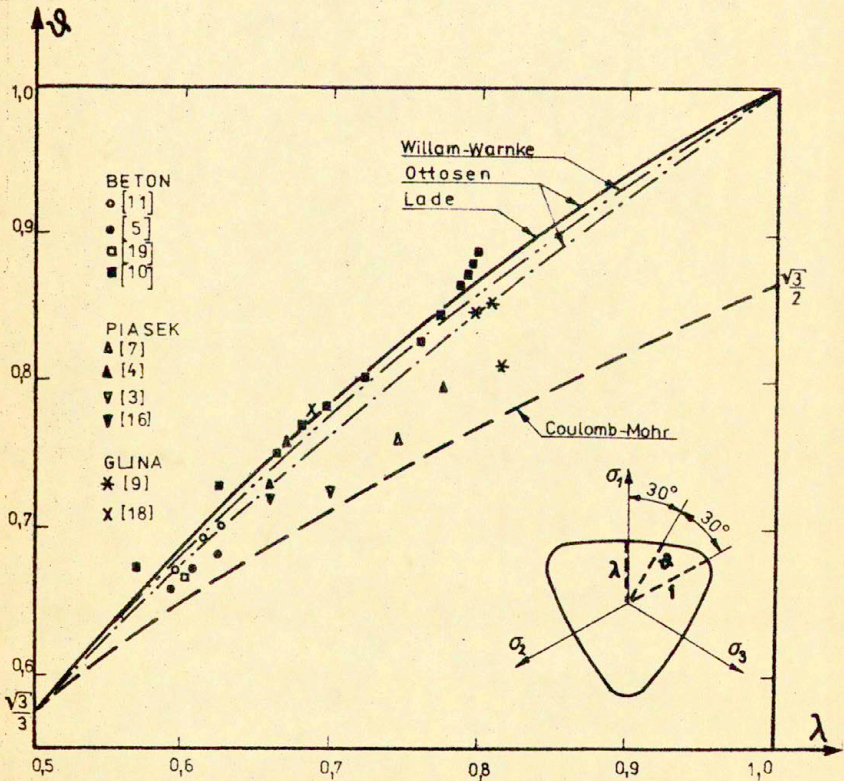
$$/5/ \quad r = \left[ \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \alpha J\right) \right]^{-1},$$

gdzie  $\alpha$  jest pewną stałą, spełniającą warunek  $0 < \alpha < 1$ . Funkcje kształtu /2/, /3/, /5/ nie prowadzą do kryterium zupełnie zgodnego z doświadczeniem, gdyż wszystkie są zależne od jednego parametru, który pozwala opisać zgodną z doświadczeniem tylko jedną charakterystykę kształtu przekroju np. stosunek  $\lambda$  określony równaniem /4/, inna natomiast charakterystyka np. stosunek  $\delta$  określony za pomocą równania /6/ jest już zależny od  $\lambda$ .

/8/

$$\vartheta = \frac{r(\varphi = 30^\circ)}{r(\varphi = 60^\circ)}$$

Na rys. 2 pokazano zmienność  $\vartheta$  w zależności od  $\lambda$  dla podanych powyżej funkcji kształtu, oraz porównano uzyskane krzywe z danymi eksperymentalnymi.



Rys. 2  
Porównanie zależności  $\beta - \lambda$  dla kryteriów Lade'a [8], Willama-Warnke [20], Ottosena [14] i Coulomba-Mohra z wynikami eksperymentów.

Porównanie to pozwala na wyciągnięcie wniosku, że do określenia warunku stanu granicznego zgodnego z eksperymentem niezbędna jest funkcja kształtu zależna od dwóch parametrów.

Spełniająca powyższe wymogi funkcja może być opisana następującym równaniem:

$$/7/ \quad r = \frac{1}{P(J)}, \quad P(J) = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \alpha J - \beta\right),$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są stałymi spełniającymi warunki

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{6}.$$

Równanie to opisuje krzywą wypukłą względem punktu  $r=0$  ( $\tau_0=0$ ) co również jest niezbędnym wymogiem stawianym funkcjom kształtu, ze względu na ich dalszą przydatność w zastosowaniach.

W pewnym obszarze (por. rys.4) złożona postać równania /7/ może być uproszczona do następującego, wygodnego w zastosowaniach wzoru:

$$/8/ \quad r = \frac{1}{P'(J)}, \quad P'(J) = 1 + c\sqrt{d+J}.$$

Stałe  $c$  i  $d$  występujące w tym wzorze winny spełniać warunek wypukłości

$$/9/ \quad c \leq \frac{2\sqrt{d+1}}{7-2d},$$

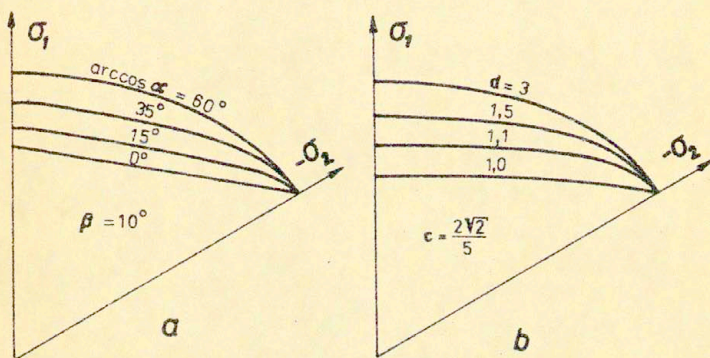
a  $d \geq 1,0$ , gdyż wyrażenie występujące w równaniu /8/ pod pierwiastkiem nie może być ujemne.

Uproszczona postać /8/ funkcji kształtu posiada jeszcze jedną ważną cechę, pozwala mianowicie powiększyć obszar zastosowań kryterium (por. rys.4) w stosunku do funkcji określonej równaniem /7/.

Na rys. 3 przedstawiono kształty krzywych opisanych równaniami /7/ i /8/ na rys 4 ich charakterystyki  $\vartheta-\lambda$ .



Jak widać na podstawie porównań rys. 2 i rys. 4 zaproponowane funkcje kształtu pozwalają uzyskać bardzo dobrą zgodność kryterium z danymi doświadczalnymi dla wielu różnych materiałów np. betonu, zaprawy cementowej, piasku i gliny.



Rys. 3

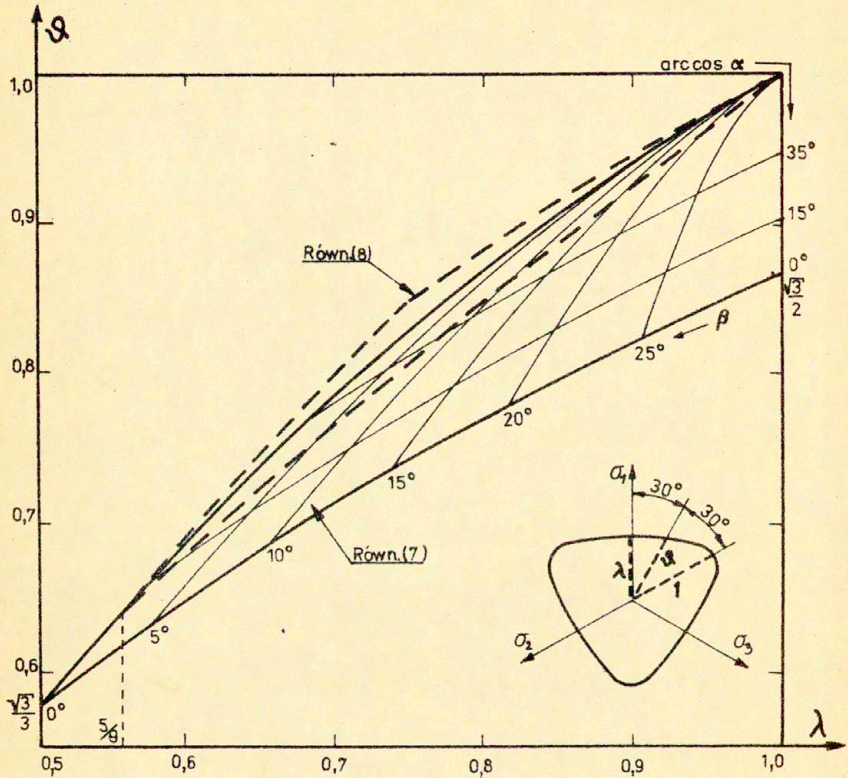
Wykresy funkcji kształtu, a - funkcja opisana równaniem /7/, b- funkcja w/g równania /8/.

Parametry  $\alpha$  i  $\beta$  występujące w równaniu /7/ można wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń korzystając z następujących związków

$$\alpha = \cos 3x \quad ,$$

$$/10/ \quad \operatorname{tg} x = \frac{\lambda \cos \beta - \cos \left( \frac{\pi}{3} - \beta \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{3} - \beta \right) - \lambda \sin \beta} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \lambda \cos x - \sqrt{3} \lambda}{\beta - 2 \lambda \sin x} \quad .$$



Rys. 4

Charakterystyki  $\beta$ - $\lambda$  proponowanych funkcji kształtu, linią ciągłą zaznaczono obszar opisany równaniem /7/, a przerywaną równaniem /8/.

Początkową wartość parametru  $\beta$  można przyjąć równą zero, lub też na podstawie rys. 4, który można potraktować jak nomogram pozwalający dla danych  $\lambda$  i  $\beta$  odczytać przybliżone wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Występujące w równaniu /8/ stałe  $c$  i  $d$  obliczyć można na

podstawie następujących związków :

$$d = 1 + \frac{e^2 - 2}{3 - 2e} ,$$

/11/

$$e = \frac{(1 - \lambda)\vartheta}{2(1 - \vartheta)\lambda} + \frac{(1 - \vartheta)\lambda}{(1 - \lambda)\vartheta} ,$$

$$c = \frac{1 - \lambda}{\lambda\sqrt{d + 1} - \sqrt{d - 1}} .$$

Wartości charakterystycznych stosunków  $\lambda$  i  $\vartheta$  występujące w równaniach /10/ i /11/ należy wyznaczyć na podstawie eksperymentu.

#### 4. KRYTERIUM STANU GRANICZNEGO

Kryterium osiągnięcia stanu granicznego można napisać w następującej ogólnej postaci:

/12/

$$A_0 + A_1\tau_0 + A_2\tau_0^2 = 0 ,$$

gdzie  $A_0$  jest funkcją tylko średniego ciśnienia  $\sigma_0$ , zaś  $A_1$  i  $A_2$  zależą od funkcji kształtu /7/ lub /8/.

Ogólna postać kryterium /12/ umożliwia generowanie wielu szczególnych warunków stanu granicznego, poniżej podano najbardziej charakterystyczne formy tych warunków.

a - Zakładając  $A_0 = -k = \text{const}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ , otrzymamy warunek Hubera-Misesa  $\tau_0 - k = 0$ .

b - Przyjmując  $A_0 = C_0 - \sigma_0$ ,  $A_1 = C_1$ ,  $A_2 = 0$ , gdzie  $C_0$  i  $C_1$  są stałymi, otrzymamy warunek Drucker'a - Prager'a

$$C_1\tau_0 = C_0 - \sigma_0 .$$

c - Gdy założymy że,  $A_0 = C_0$ ,  $A_1 = P(J)$ ,  $A_2 = 0$ , gdzie  $C_0 = \text{const}$ .

a  $P(J)$  jest funkcją kształtu /7/, to otrzymamy całą rodzinę powierzchni granicznych leżących pomiędzy powierzchnią Tresca'i i powierzchnią Hubera-Misesa w zależności od wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Dla  $\alpha = 0$  otrzymamy walec Hubera-Misesa, a dla  $\alpha = 1$ ,  
 $\beta = \frac{\pi}{6}$ , graniastosłup Tresca'i,

- d - Gdy przy założeniach z punktu "c" przyjmiemy  $A_0 = \sigma_0 - C_0$ , otrzymamy rodzinę powierzchni zawierającą m.in. kryteria Drucker'a - Prager'a, Coulomba-Mohra i Lade'a [8]/por. p. 5,2/
- e - Dla  $A_0 = \sigma_0 - C_0$ ,  $A_1 = C_1 P(J)$ ,  $A_2 = C_2$  gdzie  $C_0, C_1, C_2$  są stałymi, otrzymamy paraboloidę o zmiennym przekroju, która w szczególnym przypadku  $\beta = 0$  pokrywa się z powierzchnią Ottosena [14].
- f - Gdy przyjmiemy  $A_0 = \sigma_0 - C_0$ ,  $A_1 = C_1 P(J)$ ,  $A_2 = C_2 [P(J)]^2$ , powierzchnią graniczną będzie paraboloida o stałym przekroju zbliżona do powierzchni proponowanych przez Willama i Wernke [20] oraz Lade'a [6].

## 5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ KRYTERIUM

### 5.1. - Warunek zniszczenia dla betonu.

W przypadku betonu najwłaściwszym będzie przyjęcie warunku /12/ w postaci zaproponowanej w punkcie 4 e.

Powierzchnia zniszczenia spełnia wtedy warunki sformułowane przez K. Newmana i J.E. Newmana [12] i Ottosena [14], które można skrótkowo wyrazić następująco:

- powierzchnia zniszczenia jest wypukła, zakrzywiona i gładka,
- promień  $r$  przekroju powierzchni płaszczyzną dewiatorową, rośnie ze wzrostem ciśnienia,
- charakterystyka  $\lambda$  przekroju powierzchni płaszczyzną dewiatorową zmienia się od wartości  $\lambda \geq 0,5$  (dla  $\tau_0 \rightarrow 0$ ) do wartości  $\lambda = 1$  (dla  $\sigma_0 \rightarrow \infty$ ).

Zgodnie z powyższym otrzymamy równanie zawierające pięć parametrów  $C_0, C_1, C_2, \alpha, \beta$ :

$$/13/ \quad \sigma_0 - C_0 + C_1 P \tau_0 + C_2 \tau_0^2 = 0,$$

$$P = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \cos \alpha J - \beta\right).$$

Wartości tych parametrów wyznaczmy na podstawie danych doświadczalnych, wybierając pewne charakterystyczne punkty powierzchni zniszczenia, mianowicie:

- wytrzymałość na rozciąganie jednoosiowe ,  $R_t$  ;
- wytrzymałość na ściskanie jednoosiowe ,  $R_c$  ;
- wytrzymałość na ściskanie dwuosiowe ,  $R_{oc} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 \right)$  ,
- wytrzymałość na ściskanie dwuosiowe ,  $R_{oc} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2 \right)$  ,
- wytrzymałość na trójosiowe rozciąganie, zgodnie z hipotezą Paul'a (tension cutoffs) przyjęto równą  $R_t$  .

Na podstawie wyników badań [1] , [5] , [19] , przyjęto następujące zależności :

$$R_{oc} = 1,1R_c \quad , \quad R_{oo} = 1,25 R_c \quad ,$$

przy których dla różnych wartości stosunku  $\kappa = R_t/R_c$  określono parametry  $\lambda$  i  $\vartheta$  oraz na ich podstawie z równań /10/ wyliczono parametry  $\alpha$  i  $\beta$  . Uzyskane wyniki zawarte są w tabeli 1.

Tabela 1

Charakterystyki  $\lambda$  i  $\vartheta$  oraz wartości parametrów  $\arccos \alpha$  i  $\beta$  w zależności od stosunku  $\kappa = R_t/R_c$  .

$\kappa$	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
$\lambda$	0,51375	0,51567	0,51748	0,51917	0,52074	0,52219	0,52351
$\vartheta$	0,59182	0,59386	0,59581	0,59764	0,59936	0,60097	0,60246
$\arccos \alpha$ /deg/	2,034	2,339	2,635	2,922	3,197	3,462	3,717
$\beta$ /deg/	0,235	0,261	0,283	0,300	0,313	0,321	0,325

Wartości stałych  $C_0$  ,  $C_1$  ,  $C_2$  wyliczyć można ze związków:

$$C_0 = R_t \quad ,$$

/14/

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{P_0} \left[ 1 - \frac{3(R_t/R_{00})}{2(R_{00}/R_t - 1)} \right] \quad ,$$

$$C_2 = \frac{9}{2} \frac{R_t/R_{00}}{R_{00} - R_t} \quad ,$$

gdzie  $P_0 = P(\varphi=0) = \cos(1/\sqrt{3} \arccos \alpha - \beta)$  .

Na rys. 5 pokazano krzywą zniszczenia w przypadku płaskiego stanu naprężenia dla betonu o  $R_t/R_0 = \kappa = 0,1$  , a na rys.6 przekrój powierzchni zniszczenia płaszczyzną  $\varphi = 0$  , oraz porównano te krzywe z wynikami eksperymentów oraz krzywymi Ottosena [14] i Lade'a [6] .

## 5.2. Warunek stanu granicznego dla ośrodków rozdrobnionych.

Powierzchnie graniczne materiałów rozdrobnionych mogą być zwykle z dostateczną dokładnością opisane za pomocą liniowej wersji równania /12/:

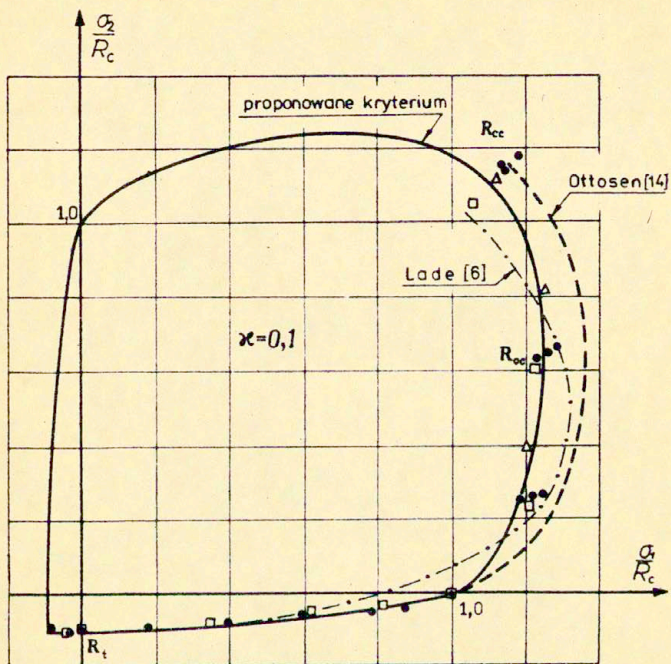
$$/15/ \quad \sigma_0 - C_0 + C_1 P \tau_0 = 0 \quad ,$$

$$/15' \quad \text{lub} \quad \sigma_0 - C_0 + C_1 P' \tau_0 = 0 \quad .$$

W równaniach powierzchni granicznych dla piasków zagęszczonych i gliny może być z powodzeniem użyta uproszczona postać funkcji kształtu, która bardzo ułatwia wszelkie obliczenia. Dla tej postaci wzór /15'/ wygodnie jest przekształcić do następującego równania:

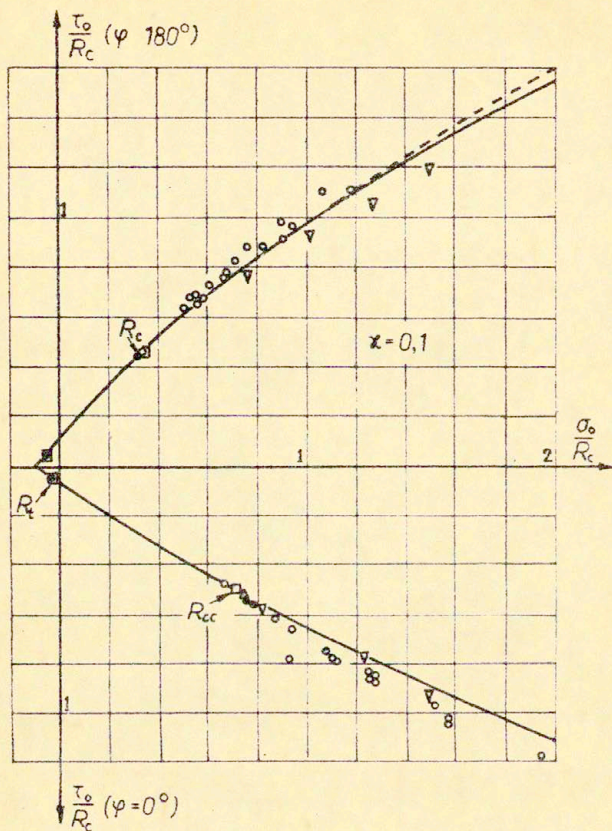
$$/16/ \quad \tau_0 = \frac{a - b \sigma_0}{1 + c \sqrt{d+J}} \quad ,$$

gdzie a, b, c, d są pewnymi stałymi, które należy wyznaczyć z



Rys. 5

Krzywa zniszczenia dla betonu w piaskim stanie naprężenia. Na rysunku zaznaczono wyniki badań: ● -Kupfera [5], ▲ -Andenaesa i in. [1], □ -Tasuji i in. [19].



Rys. 6

Przekrój powierzchni zniszczenia płaszczyzną  $\varphi = 0$ . Linia przerywana zaznaczono średnią z wielu badań eksperymentalnych w/g [12]. Wyniki badań:

- - Mills i Zimmerman [11], ● - Kupfer [5],
- - Tasuji i in. [19], △ - Andenaes i in. [1],
- ▽ - Schiekert i Winkler [17].



danych doświadczalnych.

Dla przykładu wyznaczmy wartości tych parametrów dla piasku badanego przez P.V.Lade i J.M.Duncan'a (Dense Monterey No 0 Sand) [7].

Otrzymane przez nich wyniki badań zawiera tabela 2

Tabela 2

Wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\phi$  w chwili zniszczenia w zależności od kierunku w przestrzeni naprężeń w/g [7].

$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$	0,0	0,15	0,5	0,75	0,9	1,0
$\phi$	60°	52°	30°	13,9°	5,2°	0,0°
$\phi = \arcsin \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$	48,5°	56,3°	57,5°	57,8°	57,6°	57,1°

Jeżeli dołączymy do tych danych warunek znikania kohezji :

$\tau_0 = 0$  dla  $\sigma_0 = 0$ , to będziemy mogli obliczyć wartości parametrów charakterystycznych przekroju powierzchni granicznej na podstawie poniższych równań :

$$\lambda = \frac{3/\sin \phi_c - 1}{3/\sin \phi_t + 1} ,$$

/17/

$$\delta = \frac{\sin \phi_0}{2\sqrt{3}} \left( \frac{3}{\sin \phi_c} - 1 \right) ,$$

gdzie  $\phi_c$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_t$  oznaczają odpowiednio kąty tarcia wewnętrznego przy trójosiowym ściskaniu ( $\phi = 60^\circ$ ,  $J = -1$ ), trójosiowym ścinaniu ( $\phi = 30^\circ$ ,  $J = 0$ ), trójosiowo rozciąganiu ( $\phi = 0^\circ$ ,  $J = 1$ ).

Znajomość wartości  $\lambda$  i  $\delta$  pozwala na podstawie związków /11/ obliczyć parametry c i d występujące w równaniu /16/.

Założenie zerowej kohezji prowadzi do zerowania się stałej a w tym równaniu, tak więc do wyznaczenia pozostała tylko stała b, którą można obliczyć na podstawie danych z tabeli 2 posługując się następującymi równaniami:

$$b = 2\sqrt{2} \frac{1 + c\sqrt{d+1}}{1 + 3/\sin \phi_t}$$

/16/

lub

$$b = 2\sqrt{2} \frac{1 + c\sqrt{d-1}}{3/\sin \phi_c - 1}$$

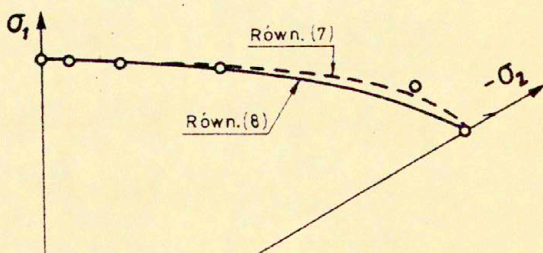
gdzie  $\phi_t$  i  $\phi_c$  są podobnie jak w równaniach /17/ kątami tarcia wewnętrznego odpowiednio przy trójosiowym rozciąganiu i trójosiowym ściskaniu.

Dla danych z tabeli 2 otrzymamy:

$$\lambda = 0,6572, \quad \vartheta = 0,7318, \quad d = 1,00047163, \quad c = 0,37761, \\ b = 0,94883.$$

Na rys. 7 pokazano przekrój powierzchni granicznej płaszczyzną  $\sigma_0 = \text{const}$ , oraz zaznaczono rzuty środkowe punktów uzyskanych doświadczalnie przez Lade'a i Duncan'a [7], a także pokazano krzywą odpowiadającą funkcji kształtu określonej równaniem /7/. Widoczna jest na tym rysunku dobra zgodność proponowanego kryterium z danymi doświadczalnymi.

Na marginesie dodać można, że dla uzyskania identyczności warunku Lade'a dla płasku [8] ze wzorem /15/ należy przyjąć  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = \sqrt{2}/\alpha$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \sqrt{(K_1 - 27)/K_1}$ , gdzie  $K_1$  jest stałą występującą w warunku Lade'a  $I_1^3/I_3 = K_1$ . Również uproszczona postać funkcji kształtu może dla  $\lambda \geq 5/9$  z dobrą dokładnością przybliżać wzór Lade'a, gdy w równaniu /16/ przyjmiemy  $a=0$ , a w równaniach /17/  $\vartheta = \lambda/\sqrt{K_1 - \lambda + 1}$ , pozostałe zaś stałe występujące w warunku /16/ wyliczymy jak uprzednio.



Rys. 7

## 6. WNIOSKI KOŃCOWE

Zaproponowane kryterium zależne od trzech niezmienników tensora naprężenia, jest ogólnym warunkiem stanu granicznego dla bardzo szerokiej klasy materiałów izotropowych zawierającej m.in. metale, skały, beton, grunty.

Jako szczególne przypadki tego kryterium można rozpatrywać klasyczne kryteria Hubera-Misesa, Tresca'ego, Coulomba-Mohra i Drucker'a - Frager'a, a także szereg proponowanych później warunków stanu granicznego dla materiałów kruchych i gruntów np. kryteria Willama i Warnke [20], Ottosena [14], Lade'a [8]. Uniwersalność kryterium umożliwia ujednoczony opis różnych grup materiałów, dla których do tej pory należało stosować zupełnie odmienne postaci warunku stanu granicznego. Pięcioparametrowa postać warunku zniszczenia dla betonu rozpatrywana w niniejszej pracy mimo swej złożoności jest prostsza od analogicznej postaci warunku Willama i Warnke [20], a poza tym pozwala osiągnąć o wiele lepszą zgodność z eksperymentem.

Zaprezentowane powyżej zalety kryterium wynikają z przeważającej mierze z wprowadzenia nowej dwuparametrowej postaci funkcji kształtu przekroju powierzchni granicznej płaszczyzna oktaedryczna, co pozwoliło dostosować ten kształt do danych doświadczalnych. Zdefiniowane w pracy dwie charakterystyki przekroju -  $\lambda$  i  $\beta$  systematyzują analizę wielu różnych warunków stanu granicznego i umożliwiają określenie cech powierzchni granicznej, co będzie z pewnością pomocne przy interpretacji wyników badań doświadczalnych.

LITERATURA

- [1] E. ANDENAES, H. GERSFLE, H.Y. KO, Response of Mortar and Concrete to Biaxial Compression, J.Eng.Mech.Div. Proc. ASCE, Vol.103, No EM4, Aug.1977.
- [2] W.F. BRACE, Brittle Fracture of Rock, in "State of Stress in the Earth's Crust" An Int.Conf. Santa Monica, Calif.1963, W.R. JUDD- ed., Elsevier, New York, 1964.
- [3] G.E. GREEN, A. W. BISHOP, A Note on the Drained Strength of Sand Under Generalized Strain Conditions, Geotechnique, Vol.XIX, No1, March 1969.
- [4] H.Y. KO, R.P. SCOTT, Deformation of Sand at Failure, J. Soil Mech. Found. Div.,Proc.ASCE, Vol.94, No SM4, July 1968.
- [5] H. KUPFER, Das Verhalten des Betons Unter Mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Berlin 1973.
- [6] P.V. LADE, Three - Parameter Failure Criterion for Concrete, J. Eng. Mech. Div.,Proc.ASCE, Vol.108, No EM5, Oct.1982.
- [7] P.V. LADE, J.M. DUNCAN, Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil, J. Soil Mech. Found. Div.,Proc.ASCE, Vol.99, No SM10, Oct. 1973.
- [8] P.V. LADE, J.M. DUNCAN, Elastoplastic Stress - Strain Theory for Cohesionless Soil, J. Geo. Eng. Div.,Proc.ASCE, Vol.101, No GP10, Oct. 1975.
- [9] P.V. LADE, H. MUSANTE, Three-Dimensional Behavior of Remolded Clay, J. Geo. Eng. Div.,Proc.ASCE, Vol.104, No GT2, Feb.1978.
- [10] P. LAUNAY, H. SACHON, P. POITEVIN, Deformation et Resistance Ultime du Beton sous Streinte Triaxiale, Ann. de L'Inst. Techn. du Bat. et Trav. Pub., No 269, Mai 1970.
- [11] L.L. MILLS, R.M. ZIMMERMAN, Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions, Journ. ACI, Oct. 1970, No 10, Proc.V67.
- [12] R. NEWMAN, J. B. NEWMAN, Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete, in "Structure, Solid Mechanics and Engineering Design", M. TE'ENI - ed., Wiley-Interscience, London 1971.

- [13] L. OBERT, Brittle Fracture of Rock, in "Fracture An Advanced Treatise", H. LIEBOWITZ - ed., Vol. VII, Academic Press, New York, London, 1972.
- [14] N.S. OTTOSEN, A Failure Criterion for Concrete, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 103, No EM4, Aug. 1977.
- [15] B. PAUL, Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture, in "Fracture An Advanced Treatise", H. LIEBOWITZ - ed., Vol. II, Academic Press, New York, London, 1968.
- [16] D.C. PROCTER, L. BARDEN, "Correspondence on Green and Bishop: A Note on the Drained Strength of Sand Under Generalized Strain Conditions", Geotechnique, Vol. XIX, No 3, 1969.
- [17] G. SCHICKERT, H. WINKLER, Results of Test Concerning to Multiaxial Compressive Stresses, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 277, Berlin 1977.
- [18] T. SHIBATA, D. KARUBE, Influence of the Variation of the Intermediate Principal Stress and the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays, Proc. 6-th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Montreal, 1965.
- [19] E. TASUJI, F.O. SLATE, A.H. NILSON, Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading, Journ. ACI, July 1978, No 7, Proc. V75.
- [20] K.J. WILLAM, E.P. WARNKE, Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete, Int. Ass. Bridge Str. Eng. Colloquium Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, 1974, p. III 1.