

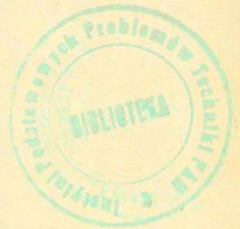
' 7.77 — naprężenia cieplne

Z. Śloderbach, T. Sawicki

**EFEKT SPRZEŻENIA
TERMOMECHANICZNEGO
W PRZYPADKU
GRUBOŚCIENNEJ KULI I RURY
ODCIĄŻONYCH CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM**

16/1983

P. 269

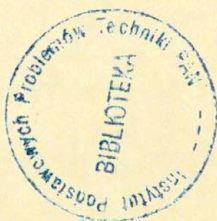


WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 listopada 1982 r.

57021



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 2 . Ark. druk. 2,75.

Oddano do drukarni w kwietniu 1983 r.

Nr zamówienia 368/83 M-13 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Zdzisław Śloderbach, Tadeusz Sawicki
Zakład Teorii Konstrukcji

EFEKT SPRZEŻENIA TERMOMECHANICZNEGO
W PRZYPADKU GRUBOŚCIENNEJ KULI I RURY
OBCIĄŻONYCH CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM

Wstęp

W pracy analizuje się wpływ efektu sprzężenia termomechanicznego - efektu rozszerzalności cieplnej, spowodowanej dysypacją mocy odkształcenia plastycznego, na rozkład: naprężeń, deformacji, temperatury, przyłożonego ciśnienia wewnętrznego oraz naprężeń reszkowych pozostających w grubościennej kuli i rurze po zdjęciu obciążenia ciśnieniem wewnętrznym, w procesie czysto sprężystego odciążania.

Analizę przeprowadza się na przykładzie rozwiązania analitycznego dla grubościennej kuli i rury obciążonych quasistatycznie wzrastającym ciśnieniem wewnętrznym, dla przypadku procesu lokalnie adiabatycznego. Ponieważ obciążenie ciśnieniem wewnętrznym ma charakter quasistatyczny, zatem pomijanie przepływu ciepła może prowadzić do pewnych ilościowych zmian w rozkładzie naprężeń, deformacji, temperatury oraz przyłożonego ciśnienia wewnętrznego. Okazuje się jednak, że zmiany te w rozważanych przypadkach nie mają praktycznego znaczenia. Mianowicie, założenie lokalnie adiabatycznego procesu obciążenia powoduje to, że otrzymane rozwiązania /rozkłady naprężeń, deformacji etc./ ograniczać będą od dołu /dolna ocena/ rozwiązania ścisłe tzn. uwzględniające przepływ ciepła. Z kolei rozwiązując ten sam problem dla izotermicznego procesu obciążania dostaniemy wyniki będące górną oceną rozwiązania ścisłego. Jak się okaże, obie oceny leżą stosunkowo blisko siebie. Tak więc poszukiwanie rozwiązań /znacznie bardziej złożonych/ uwzględniających przepływ ciepła i leżących pomiędzy obiema ocenami /por. na przykład [16]/ mogłoby mieć jedynie znaczenie poznawcze. Należy

też dodać, że możemy mieć czasami do czynienia z przypadkiem, kiedy to prędkość propagacji strefy sprężysto-plastycznej jest porównywalna z prędkością przewodnictwa cieplnego. Wówczas to, rozwiązanie dla procesu lokalnie adiabatycznego można byłoby uznać za ścisłe.

W pracy stosuje się równania konstytutywne materiału typu sprężysto-plastycznego z liniowym - izotropowym wzmocnieniem, tzw. "isotropic-linear strain hardening materials". W porównaniu z pracą [1] /przypadek kuli grubościennej/, w niniejszej pracy w obu przykładach uwzględnia się dodatkowo wpływ ukrytej energii deformacji plastycznej /por. np. [2-7]/ na proces adiabatycznego plastycznego odkształcania. Ukryta energia deformacji plastycznej, jest jak wiadomo częścią pracy /mocy/ odkształcania plastycznego nie wydzielonej w postaci ciepła lecz zatrzymanej w ciele. Badanie ukrytej energii deformacji plastycznej jest ostatnio przeprowadzane od strony doświadczalnej także w naszym Instytucie, por. np. [8].

Aby uprościć obliczenia, w obu przykładach przyjmuje się, że wszystkie stałe materiałowe sprężystości oraz granica plastyczności ϵ_0 są niezależne od temperatury. Uproszczenie to można uzasadnić stosunkowo niewielkim wzrostem temperatury /rzędu kilkudziesięciu stopni/ spowodowanej dysypacją mocy odkształcania plastycznego. Warto tu również dodać, że przykładowo dla stali miękkiej zmiany modułu Younga oraz granicy plastyczności są rzędu 15% dla temperatur bliskich 400°C /por. np. rys. 29 z [43]/.

W analizie rozważanego problemu sprężenia termomechanicznego wykorzystuje się teorię małych odkształceń, która w rozważanych przypadkach słuszna jest w stosunkowo dużym zakresie obciążeń, por. np. [1]. Rozwiązania analityczne problemu otrzymano w postaci uwikłanej. Dlatego też należało przeprowadzić obliczenia numeryczne, celem określenia /w sposób dyskretny/ jawnej postaci otrzymywanych zależności. Wyniki przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów i tabel.

Oznaczenia i skróty

- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ - składowe tensora naprężenia odpowiednio: promieniowe, obwodowe, poosiowe
- ξ_r, ξ_θ, ξ_z - składowe tensora odkształcenia odpowiednio: promieniowe, obwodowe, poosiowe
- ρ_0 - gęstość właściwa materiału
- K - współczynnik przewodnictwa cieplnego
- C_ξ - ciepło właściwe przy stałym odkształceniu
- C_σ - ciepło właściwe przy stałym naprężeniu
- k - współczynnik dyfuzyjności
- T - temperatura
- T_1 - temperatura w stanie początkowym /temperatura otoczenia/
- E - moduł sprężystości Younga
- E_T - moduł wzmocnienia plastycznego
- ν - współczynnik Poissona
- α - współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej
- σ_0 - początkowa granica plastyczności
- σ_e - naprężenie zredukowane - zastępcze
- A, B, D - stałe materiałowe
- \bar{A}, A^* - stałe materiałowe związane z ukrytą energią deformacji plastycznych
- r - promień bierzący
- r_c - promień strefy sprężysto-plastycznej
- P - ciśnienie wewnętrzne kuli
- R_i - wewnętrzny promień kuli
- R_o - zewnętrzny promień kuli
- t - czas
- u - przemieszczenie
- symbole bezwymiarowe
- σ - naprężenie promieniowe
- $\bar{\sigma}$ - naprężenie obwodowe
- σ_3 - naprężenie poosiowe
- θ - temperatura
- η - czas
- ζ - promień bierzący
- p - ciśnienie wewnętrzne

- m - stosunek promienia zewnętrznego do promienia wewnętrznego /parametr geometrii/
 ζ_c - promień strefy sprężysto-plastycznej
 δ - parametr sprężenia termomechanicznego związany z mocą odkształceń plastycznych
 γ - parametr sprężenia termomechanicznego związany z ukrytą energią deformacji plastycznych
 a, b - parametry materiałowe
 $\epsilon, \bar{\epsilon}$ - składowe tensora deformacji odpowiednio promieniowe i obwodowe
- wskaźniki górne
- p - plastyczne
 e - sprężyste
- wskaźniki dolne
- R - odnoszący się do rury
 r - promieniowy
 θ - obwodowy
 r - poosiowy

Rozdział I

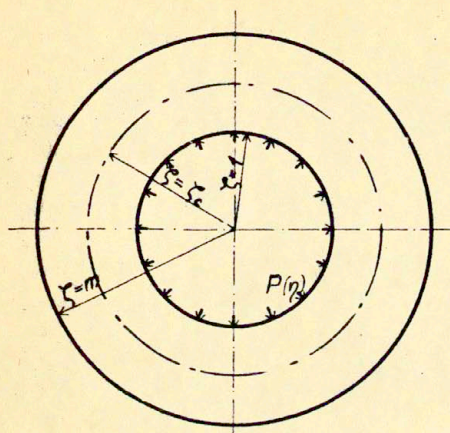
Pozwiazanie problemu - przypadek kuli grubościennej

1. Wstęp

Pozwaza się kulę grubościenna, wydrążona w środku i poddana obciążeniu w postaci quasistatycznie wzrastającego ciśnienia wewnętrznego. Wzrasta ono do momentu uplastycznienia połowy grubości ścianki kuli.

Materiał kuli przyjęto jako sprężysto-plastyczny z liniowym-izotropowym wzmocnieniem. Spełnia on warunek plastyczności H-M-H. Równania konstytutywne odkształceń plastycznych, są przyrostowymi równaniami typu Prandtla-Reussa, które w przypadku obciążenia quasistatycznego, droga całkowania stają się równaniami typu deformacyjnego.

W zadaniu korzysta się z opisu we współrzędnych sferycznych, zatem przy symetrii kulistej warunek plastyczności H-M-H oraz Treski mają tą samą postać.



$P(\eta)$ - ciśnienie wewnętrzne

$\zeta = 1$ - promień wewnętrzny

$\zeta = \zeta_c$ - promień granicy sro-
żysto-plastycznej

$\zeta = m$ - promień zewnętrzny

Rys. 1 Wydrążona grubościenna kula obciążona ciśnieniem wewnętrznym

Podobny problem sprzężenia termomechanicznego był już badany, por. np. [1], jednak nie uwzględniano tam wpływu ukrytej energii deformacji plastycznej, co czyni się w niniejszej pracy. Otrzymał się tu też dodatkowo rozkład ciśnienia wewnętrznego oraz naprężeń reżankowych.

2. Analityczne rozwiązanie problemu

2.1 Podstawowe założenia i równania wyjściowe

Równanie równowagi dla przypadku symetrii kulistej ma postać następującą

$$\frac{d \sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

natomiast związki geometryczne

$$\varepsilon_r = du/dr \quad , \quad \varepsilon_\theta = u/r = \varepsilon_\phi \quad , \quad (2.2)$$

gdzie u jest przemieszczeniem promieniowym.

Warunek nierozdzielności odkształceń wygląda następująco :

$$\frac{d \xi_{\theta}}{dr} + \frac{\xi_{\theta} - \xi_r}{r} = 0 \quad (2.3)$$

Związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami są następujące, por.np. [9 - 11] ,

$$\begin{aligned} \xi_r &= \frac{1}{E} / \sigma_r - 2\nu \sigma_{\theta} / + \xi_r^P + \alpha T \\ \xi_{\theta} &= \frac{1}{E} [/ 1 - \nu / \sigma_{\theta} - \nu \sigma_r] + \xi_{\theta}^P + \alpha T \end{aligned} \quad (2.4)$$

Warunek nieściśliwości plastycznej materiału ma postać

$$\xi_r^P = - 2 \xi_{\theta}^P \quad (2.5)$$

Intensywność naprężenia dla warunku plastyczności H-M-H jest następująca

$$\sigma_e = | \sigma_r - \sigma_{\theta} | \quad (2.6)$$

a warunek początkowego plastycznego płynięcia wg. H-M-H wygląda .

$$\sigma_0 = | \sigma_r - \sigma_{\theta} | \quad (2.7)$$

Dla przypadku symetrii kulistej i dla warunku nieściśliwości , zastępczy przyrost deformacji plastycznej wynosi

$$d \xi^P = | d \xi_r^P | \quad (2.8)$$

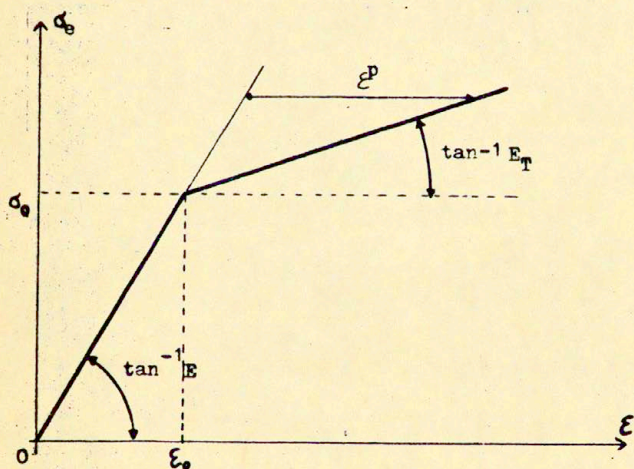
Równania plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa w powyższym przypadku są postaci, por.np. [11] ,

$$d \xi_r^P = - 2 d \xi_{\theta}^P = d \xi^P \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{|\sigma_r - \sigma_{\theta}|} = d \xi^P \operatorname{sgn} / \sigma_r - \sigma_{\theta} / \quad (2.9)$$

Ponieważ obciążenie ciśnieniem wewnętrznym, w rozpatrywanym przypadku zmienia się quasistatycznie, zakładamy więc, że quasistatycznie zmieniają się również odkształcenia. Zatem równanie (2.9) może być scałkowane bezpośrednio, dając postać [11] ,

$$\varepsilon_T^p = \varepsilon^p \frac{\sigma_r - \sigma_0}{|\sigma_r - \sigma_0|} = \varepsilon^p \operatorname{sgn}(\sigma_r - \sigma_0) \quad (2.10)$$

Równanie konstytutywne materiału sprężysto-plastycznego z liniowym - izotropowym wzmocnieniem - rys. 2 ,



Rys. 2 Krzywa naprężenie-odkształcenie plastyczne zastępcze dla liniowego wzmocnienia

zapisać można w następującej formie :

$$\sigma_e = \sigma_0 + \frac{E_T \cdot E}{E - E_T} \varepsilon^p \quad (2.11)$$

2.2 Wyprowadzenie podstawowych równań i zależności

a/ Strefa plastyczna - $R_1 \leq r \leq r_c$, $|1 \leq \zeta \leq \zeta_c|$

Wykorzystując równania (2.4) , (2.5) , (2.10) , (2.11) i biorąc pod uwagę fakt, że w przypadku obciążenia ciśnieniem wewnętrznym, σ_θ jest prawie zawsze dodatnie, natomiast σ_r prawie zawsze ujemne, czyli $\sigma_r - \sigma_\theta < 0$, [11] , po przekształceniach otrzymamy :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \sigma_r - 2\nu \frac{\sigma_\theta}{E} + \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] \sigma_\theta + \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] / \sigma_r - \sigma_\theta / + \alpha T \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [1 - \nu] / \sigma_\theta - \sigma_r - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] \sigma_\theta - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] / \sigma_r - \sigma_\theta / + \alpha T$$

Ponieważ proces obciążania ma charakter quasistatyczny, więc zaniedbuje się efekty sprzężenia termomechanicznego w strefie odkształceń sprężystych i korzysta się z niesprężonych równań quasistatycznej termosprężystości, por. np. [9-11] , [17] .

Równanie dla pola temperatur dla założonego adiabatycznego procesu, można zapisać następująco, por. również [14-16] . [18-21] ,

$$\rho_0 \cdot c_\theta \cdot \dot{T} = \dot{W}^P - \rho_0 \cdot \dot{U}^P \quad , \quad (2.13)$$

gdzie \dot{W}^P jest prędkością pracy plastycznej, natomiast \dot{U}^P prędkością utajonej energii deformacji plastycznych. Kropka oznacza pochodną po czasie. Warto dodać , że dla przyjętego procesu lokalnie adiabatycznego, nie ma przewodnictwa ciepła, więc współczynnik przewodnictwa cieplnego K przyjmuje wartość równa zero. Ukryta energia deformacji plastycznych U^P jest rozumiana jako część pracy elastycznej, która nie wydzieliła się w postaci ciepła, lecz pozostaje wewnątrz ciała w jednorodnym izotermicznym procesie odkształcenia. Należy, więc ją odróżnić od

energii resztkowych naprężeń i okształceń sprężystych powstałych w ciele w którym zaistniały procesy niejednorodnych deformacji plastycznych, por. np. [22 - 23]. Jej rząd jest stosunkowo szeroki i waha się w granicach od kilku do nawet kilkudziesięciu procent pracy plastycznej /nawet 30% / por.np. [2-7] i wielkość ta zależy od wielu czynników jak np. : stopnia deformacji plastycznej, temperatury ciała, stanu naprężenia, struktury krystalograficznej, prędkości deformacji, temperatury homologicznej, historii deformacji, historii prędkości deformacji, historii temperatury i jej prędkości, składu chemicznego i.t.p. W metalach jest ona związana z tworzeniem się różnego rodzaju defektów sieci krystalograficznej jak np. jej zniekształcenie, zmiana jej orientacji, defekty ziaren i granic ziaren. Odpowiedzialna jest ona także za tworzenie się zmian w strukturze wewnętrznej metalu w postaci przemian fazowych. Jest ona także częściowo związana z procesami typu kinematycznego zachodzącymi w metalach plastycznie zdeformowanych tak, że kosztem tej energii następuje w metalach nawrót własności fizycznych i rekrytalizacja. Można zatem powiedzieć, że ukryta energia deformacji plastycznych jest w dużej mierze zmianą wewnętrznej energii ciała powstała na wskutek jednorodnych deformacji plastycznych. Istnieją różne teorie opisujące zależność wielkości tej energii na gruncie wielkości makroskopowych lub mikroskopowych. W pracy ogranicza się tylko do opisu makroskopowego wyrażeniem typu

$$\rho_0 U^D = \bar{A} / \sigma_e^2 - \sigma_0^2 / \dots \quad (2.14)$$

lub formalnie typu

$$\rho_0 U^D \cong A^* W^D \quad ,$$

gdzie W^D jest pracą plastyczną, a wielkości \bar{A} i A^* są parametrami materiałowymi. Dla przypadku materiału z liniowym wzmocnieniem, który przyjęto w pracy oba opisy są równoważne i między stałymi materiałowymi zachodzi następująca relacja,

$$A^* = \frac{2 \cdot \bar{A} \cdot E_T \cdot E}{E - E_T} \quad (2.15)$$

Podstawiając równania (2.12) do równania nierozdzielności odkształceń (2.5) oraz wykorzystując równanie równowagi otrzymane po przekształceniach następującą zależność [1]

$$r^2 \frac{\partial^2 \zeta_r}{\partial r^2} + 4r \frac{\partial \zeta_r}{\partial r} = A - Br \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.16)$$

gdzie

$$A = \frac{6/1 - \frac{E_T}{E} / \zeta_0}{2/1 - \nu / \frac{E_T}{E} + /1 - \frac{E_T}{E}}$$

$$B = \frac{4 E_T \alpha}{2/1 - \nu / \frac{E_T}{E} + /1 - \frac{E_T}{E}}$$

Podstawiając natomiast do równania (2.13) jedną z zależności (2.14), wykorzystując przy tym (2.15) oraz uwzględniając prawa symetrii kulistej, po żmudnych przekształceniach otrzymamy następujące równanie

$$\theta_0 C_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = / D - \frac{\bar{A}}{4} / \frac{\partial}{\partial t} \left[r^2 / \frac{\partial \zeta_r}{\partial r} /^2 \right] \quad (2.17)$$

gdzie

$$D = \frac{1}{8} / 1 - \frac{E_T}{E} / \frac{1}{E_T}$$

Równania (2.16) i (2.17) są jak widać równaniami różniczkowymi wzajemnie sprzężonymi, co fizycznie oznacza, że pole naprężeń zależy od pola temperatur a pole temperatur zależy od pola naprężeń. Są to zarazem dwa podstawowe równania służące do rozwiązania przyjętego zagadnienia, słuszne w strefie plastycznej. Równanie (2.17) w przeciwieństwie do równania tego rodzaju otrzymanego w pracy [1] zawiera dodatkowy stały człon - $\bar{A}/4$, który uwzględnia ukrytą energię deformacji plastycznej.

Wprowadza się następujące wielkości bezwymiarowe analogicznie jak w pracy [1], a mianowicie :

$$\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad \theta^* = b \frac{\pi}{T_1}, \quad \eta = \frac{k \cdot t}{R_0^2}, \quad k = \frac{K}{\rho_0 C_\sigma}$$

$$p = \frac{p}{\sigma_0}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_r E}{\sigma_0}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_\theta E}{\sigma_0}, \quad \zeta = \frac{r}{R_1} \quad (2.18)$$

$$\zeta_c = \frac{r_c}{R_1}, \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\zeta}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{R_1^2} \frac{d^2}{d\zeta^2}$$

Po uwzględnieniu wielkości bezwymiarowych (2.18) w równaniach różniczkowych (2.16) i (2.17), przyjmą one postać

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \zeta^2} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = \frac{a}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \theta^*}{\partial \zeta} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \gamma - \gamma / \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\zeta^2 / \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \right]^2 \quad (2.20)$$

gdzie

$$a = \frac{A}{\sigma_0}, \quad b = \frac{B \cdot T_1}{\sigma_0}$$

oraz

$$\delta = \frac{1 - \frac{E_T}{E}}{2 \left[2/1 - \nu / \frac{E_T}{E} + 1/1 - \frac{E_T}{E} \right]} \cdot \frac{\alpha \sigma_0}{\rho_0 C_\sigma} = B D \frac{\sigma_0}{\rho_0 C_\sigma} \quad (2.21)$$

$$\gamma = \frac{\frac{E_T}{E}}{\left[2/1 - \nu / \frac{E_T}{E} + 1/1 - \frac{E_T}{E} \right]} \cdot \frac{\alpha \sigma_0 \bar{A}}{\rho_0 C_\sigma} = \frac{\bar{A}}{4} \frac{\delta}{D}$$

Powyższe parametry δ oraz γ reprezentują sprzężenie termomechaniczne, związane odpowiednio z dysypacją pracy odkształceń plastycznych i z ukrytą energią deformacji plastycznych.

Dla większości metali parametr sprzężenia termomechanicznego δ jest mały, rzędu 10^{-3} , [1], natomiast γ jeszcze mniejszy, bo

związany z częścią pracy plastycznej reprezentowana przez ukryta energie deformacji plastycznych, por. (2.14)₂. Gdy w procesie δ , jest równe zero, wówczas problem staje się niesprężony i mamy do czynienia z niesprężoną teorią termoplastyczności, [9 - 11], [14 - 17], [24].

Wykorzystując następujące warunki brzegowo-początkowe w równaniach (2.19), (2.20):

$$\sigma|_1, \eta|_1 = -p, \quad \sigma|_m, \eta|_m = 0 \quad T|_1, \theta|_1 = 0, \quad \left. \frac{\partial \sigma / \partial \zeta}{\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_c} = 2, \quad (2.22)$$

oraz uwzględniając fakt, że na granicy sprężysto-plastycznej: naprężenia, doformacje, przemieszczenia, temperatura są ciągłe i postępując analogicznie jak w dodatku pracy [1], po przekształceniach można otrzymać następujące wyrażenie

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - 12/\delta - \gamma/\sigma + 4a/\delta - \gamma/\ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + 16/\delta - \gamma/2 + 8/\delta - \gamma/1 - 8/\delta - \gamma/1 - \frac{\zeta_c^3}{m^3}} \\ & + 1 + \frac{2}{3}a/\delta - \gamma/\ln \left[-1 - \frac{2}{3}a/\delta - \gamma/1 + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - 12/\delta - \gamma/\sigma + 4a/\delta - \gamma/\ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + 16/\delta - \gamma/2 + 8/\delta - \gamma/1 - 8/\delta - \gamma/1 - \frac{\zeta_c^3}{m^3}} \right] = \\ & = -3 \ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + \sqrt{16/\delta - \gamma/2 + 8/\delta - \gamma/1 + 1} + \\ & + 1 + \frac{2}{3}a/\delta - \gamma/\ln \left[-1 - \frac{2}{3}a/\delta - \gamma/1 + \sqrt{16/\delta - \gamma/2 + 8/\delta - \gamma/1 + 1} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Powyższe wyrażenie jest podobne w formie do wyrażenia otrzymanego w pracy [1].

Wartość naprężenia na granicy strefy sprężysto-plastycznej jest następująca [1], [10 - 11], [13]

$$\sigma \Big|_{\zeta = \zeta_c} = -\frac{2}{3} / 1 - \frac{\zeta_c^3}{m^3} \quad (2.24)$$

Aby wyznaczyć naprężenie dla problemu niesprężonego $\delta=0, \gamma=0$,

należy do wyrażenia (2.23) zastosować regułę L'Hospitala [1] i otrzyma się następujące równanie,

$$\sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{a \ln \frac{\xi}{\xi_c}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{\xi_c^3}{\xi} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{m} \frac{\xi_c^3}{\xi} \quad (2.25)$$

Jest to rozwiązanie zgodne z rozwiązaniem Mandelsona [11] wyrażone jednak w innej formie i w innych niezależnych parametrach.

Równanie dla temperatury ϑ^* otrzymane z równania (2.20) na drodze analogicznej jak w [1] wygląda następująco ,

$$\vartheta^* / \xi, \eta / = 1/\delta - \delta / \left[\xi^2 / \frac{\partial \delta}{\partial \xi} / \xi^2 - \xi_c^2 / \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_c} \right] \quad (2.26)$$

Równania (2.23-2.26) wraz z podstawowymi równaniami z punktu 2.1, tworzą poszukiwany układ równań, za pomocą którego można obliczyć wielkości charakterystyczne dla problemu w strefie plastycznej rozpatrywanej kuli. Rozkład bezwymiarowych naprężeń promieniowych σ określimy więc z zależności (2.23) i (2.25), a następnie obwodowych z równania równowagi (2.1) po uwzględnieniu w nim odpowiednich wielkości bezwymiarowych (2.18). Rozkład temperatury w strefie plastycznej znajdziemy następnie z równania (2.26). Z zależności (2.12) można obliczyć rozkład deformacji odpowiednio promieniowych ϵ i obwodowych $\bar{\epsilon}$ po uwzględnieniu odnośnych wielkości bezwymiarowych (2.18). Rozkład przyłożonego bezwymiarowego ciśnienia wewnętrznego w zależności od zasięgu strefy sprężysto-plastycznej ξ_c zostanie określona także z równań (2.23) i (2.25), dla promienia $\xi = 1$, warunku brzegowego (2.22), - przy zadanym parametrze geometrii kuli m . Naprężenia resztkowe w procesie sprężystego odciążenia, znajdziemy z następujących związków, [10 - 11], [25 - 27],

$$\sigma' = \sigma + \sigma'' \quad , \quad \bar{\sigma}' = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}'' \quad (2.27)$$

gdzie:

$$\sigma'' = \frac{\xi^3 - m^3}{\xi^3/m^3 - 1} \sigma \Big|_{\xi=1} \quad , \quad \bar{\sigma}'' = \frac{2\xi^3 + m^3}{2\xi^3/m^3 - 1} \sigma \Big|_{\xi=1} \quad (2.28)$$

Wyprowadzone w tym punkcie równania, mogą być również użyte w zagadnieniu pustki kulistej o promieniu jednostkowym, obciążonej ciśnieniem i znajdującej się w przestrzeni z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym-izotropowym wzmocnieniem. Należy wówczas w odpowiednich równaniach przejść do granicy, gdy współczynnik geometrii kuli m dąży do nieskończoności $/m \rightarrow \infty/$. Wyprowadzone równania będą również słuszne dla materiału bez wzmocnienia w przypadku, gdy w odpowiednich wyrażeniach przejdziemy do granicy, dla modułu wzmocnienia plastycznego E_m dążącego do zera $/E_m \rightarrow 0/$.

b/ Strefa sprężysta $r_c \leq r \leq R_0$, $/\zeta_c \leq \zeta \leq m/$

Jak wspomniano wcześniej, w strefie sprężystej rozpatruje się zagadnienie niesprężonej termosprężystości przy stałej temperaturze. Równania tego typu znajdują się w standardowych podręcznikach np. [9 - 11], [17] lub w publikacjach np: [24], [25 - 27].

Obecnie przedstawi się ogólne rozwiązanie termosprężystych równań, a następnie zaniedba się efekty termiczne zakładając, że $\Theta^* = 0$.

Równanie analogiczne do (2.19), w strefie sprężystej jest następujące [1]:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = - \frac{\delta^e}{\zeta} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \zeta} \quad (2.29)$$

gdzie

$$\delta^e = \frac{2/1-\nu/ + / \frac{E}{E_m} - 1/}{2/1-\nu/}$$

jest odpowiednim parametrem materiałowym kuli.

Gdy $\Theta^* = \text{const.}$ wówczas z równania (2.29) po jego scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych (2.22)₂ i (2.24), otrzyma się zależność [1], [11]:

$$\sigma = \frac{2}{3} / \frac{\zeta^3 - m^3}{\zeta^3 m^3} \zeta^3 / \quad (2.30)$$

Rozkład bezwymiarowych naprężeń promieniowych określi się więc z (2.30) a obwodowych z równania równowagi (2.1) po uwzględnieniu w nim odpowiednich wielkości z (2.18). Z zależności (2.4) obliczyć można rozkład odpowiednich deformacji przy uwzględnieniu, że w strefie sprężystej wielkości ξ_r^p i ξ_θ^p są równe zero oraz, że zachodzi związek (2.30)₂.

Na granicy sprężysto-plastycznej istnieje także ciągłość odkształceń i przemieszczeń.

Rozkład naprężeń rezidualnych w procesie czystego sprężystego odciażania, określa się także z równań typu (2.27) i (2.28), przy czym naprężenia $\sigma \pm \bar{\sigma}$ należy w procesie obciążania brać odpowiednio ze strefy sprężystej.

3. Analiza otrzymanych wyników

Na rys.3 przedstawiono rezultaty obliczeń numerycznych, naprężeń promieniowych σ i obwodowych $\bar{\sigma}$ dla niesprężonych $\delta = 0$, $\gamma = 0$ i sprzężonych równań termoplastyczności odpowiednio bez uwzględniania $\delta = 1$, $\gamma = 0$ i z uwzględnieniem ukrytej energii deformacji plastycznej $\delta = 1$, $\gamma = 0.15$ /, dla przypadku gdy strefa plastyczna osiągnęła promień $\zeta_c = 1.5$. Obliczenia przeprowadzono dla przyjętego za [1] dużego parametru sprężenia $\delta = 1$, aby poglądowo zilustrować wpływ tego efektu sprężenia, gdy granica strefy sprężysto-plastycznej $\zeta_c = 1.5$, współczynnik geometrii kuli $m=2$, $E_T/E=0.4$ oraz współczynnik Poissona $\nu = 0.25$. Na rys. 4, przedstawiono rozkład bezwymiarowej temperatury w strefie plastycznej dla przypadku sprężenia z uwzględnieniem i bez uwzględnienia ukrytej energii deformacji plastycznej.

Rozkład całkowitych deformacji pokazano na rysunku 5.

Zmianę przyłożonego ciśnienia wewnętrznego w zależności od stosunku wielkości zasięgu strefy sprężysto-plastycznej do jej maksymalnej wartości ($\zeta_c = 1.5$), przedstawia się na rysunku szóstym.

Na rysunku 7, pokazano rezultaty obliczeń naprężeń resztkowych po procesie czystego sprężystego odciażania dla wartości /rys.6/ maksymalnego ciśnienia p , gdy $\zeta_c=1.5$. Warunek aby odciażenie miało charakter sprężysty jest następujący [11],[27]:

$$|\sigma' - \bar{\sigma}'| \leq |\sigma - \bar{\sigma}| \quad (2.31)$$

gdzie σ' oraz $\bar{\sigma}'$ są określone wzorami (2.27). Zakładając na podstawie [11], [25 - 27], że podczas odciażania pierwsze lokalne plastyczne płynięcie pojawi się na wewnętrznej powierzchni kuli, warunek (2.31) przekształca się do następującego prostego związku,

$$p_{cr} = \frac{4/m^3 - 1/}{3m^3} |\bar{\sigma} - \sigma| \Big|_{\zeta=1} \geq p \quad (2.32)$$

gdzie p_{cr} oznacza największą wartość ciśnienia jaką należy przyłożyć do wewnętrznej powierzchni przy odciażaniu, aby miało ono charakter czysto sprężysty.

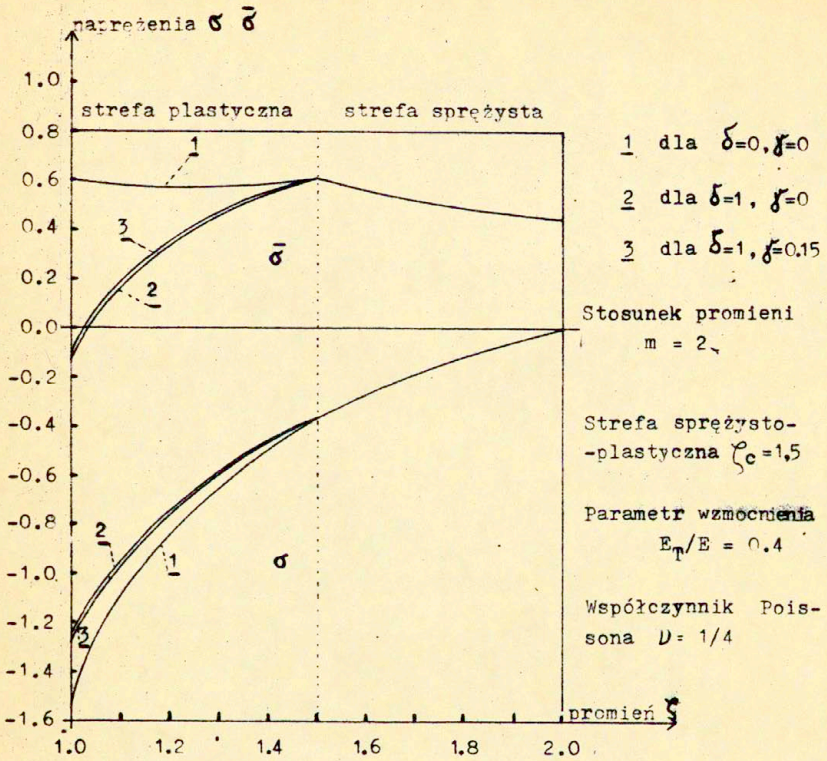
W tabeli 1, podaje się przykłady obliczeń dla trzech wybranych możliwości, a mianowicie dla problemu niesprężonego, sprężonego, bez i z ukrytą energią deformacji plastycznych. Wartości ciśnień p oraz p_{cr} otrzymano odpowiednio z wzorów (2.22)₁ i (2.32), dla zadanych wartości parametru geometrii kuli $m=2$ i odpowiednich stałych materiałowych.

Tabela 1

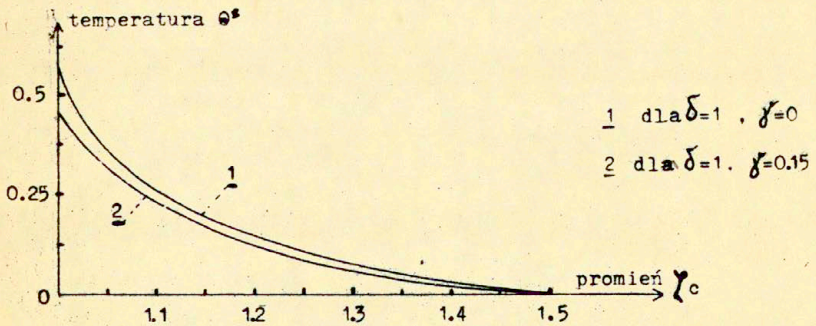
$m = 2$		$\nu = 0,25$	$E_m/E = 0,4$	$\zeta_c = 1,5$
δ	γ	p_{cr}		p
$\delta = 0$	$\gamma = 0$	2,553		1,583
$\delta = 1$	$\gamma = 0$	1,319		1,248
$\delta = 1$	$\gamma = 0,15$	1,341		1,255

Z powyższej tabeli wynika, że dla przyjętych wartości m , E_m/E , ν , oraz ζ_c we wszystkich przypadkach proces odciażania ma charakter sprężysty.

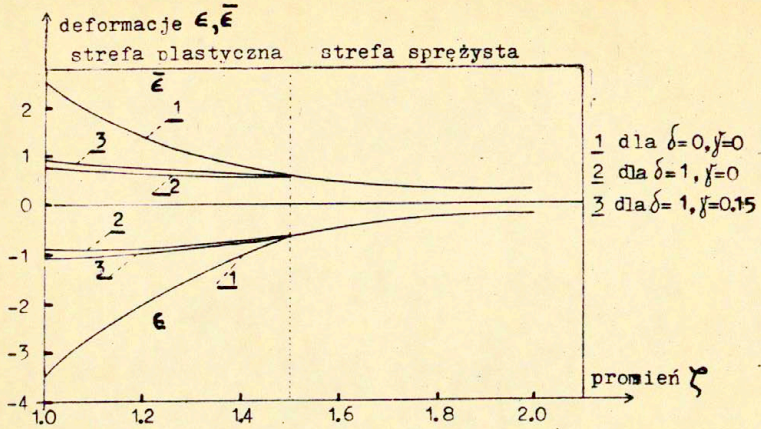
Wymiarowe ciśnienie p z (2.18)₆ odpowiadające punktom A, B, C z rysunku 6, wynoszą odpowiednio :



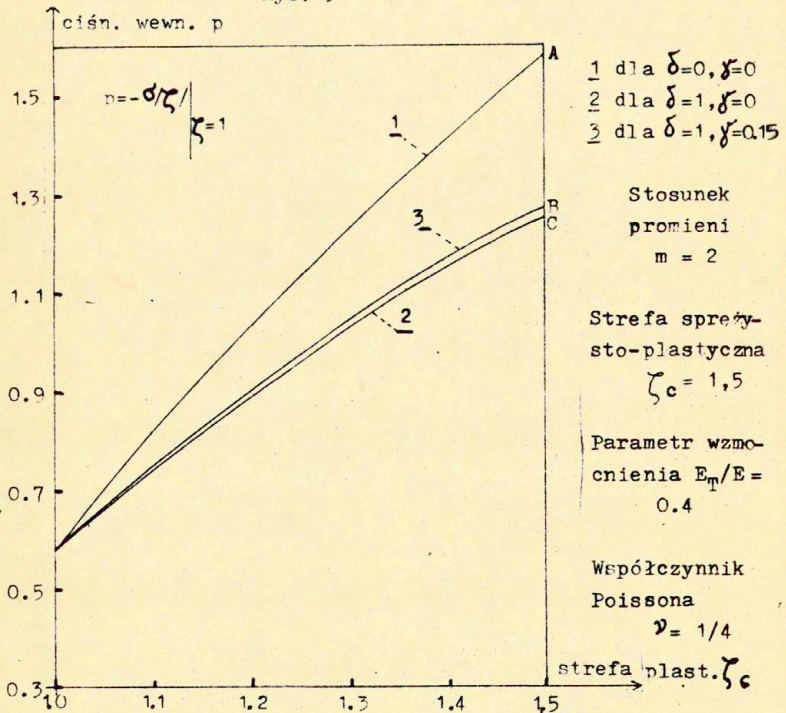
Rys. 3



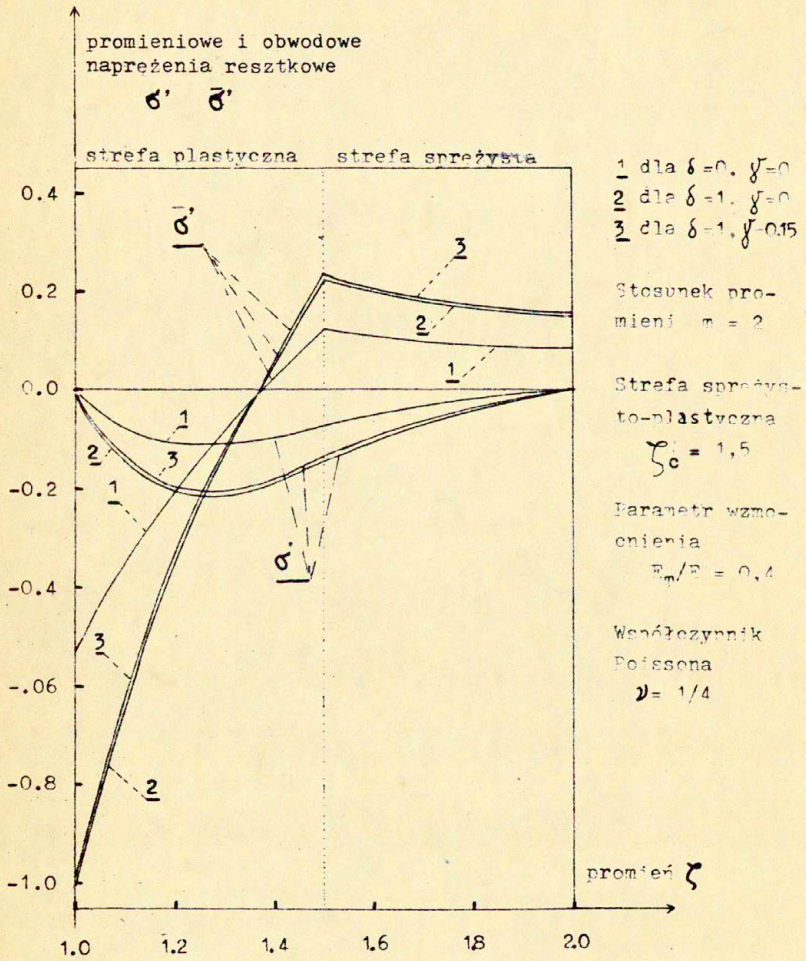
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

$P = 633,2 \text{ MPa}$	dla	A	$\delta = \gamma = 0$
$P = 499,2 \text{ MPa}$	dla	B	$\delta = 1, \gamma = 0$
$P = 502,0 \text{ MPa}$	dla	C	$\delta = 1, \gamma = 0,15$

dla przyjętej wartości $\sigma_0 = 4000 \text{ kg/cm}^2$.
Wymiarowe temperatury T odpowiadające temperaturom θ^* z
rys. 4 , mierzone na wewnętrznej powierzchni kuli, określono z
wyrażenia (2.18)₃ i wynoszą one :

$T = 74,71 \text{ }^\circ\text{C}$	dla	$\delta = 1$	$\gamma = 0$
$T = 63,97 \text{ }^\circ\text{C}$	dla	$\delta = 1$	$\gamma = 0,15$

gdzie :

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} , \quad \sigma_0 = 4000 \text{ kg/cm}^2 , \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

4. Wnioski

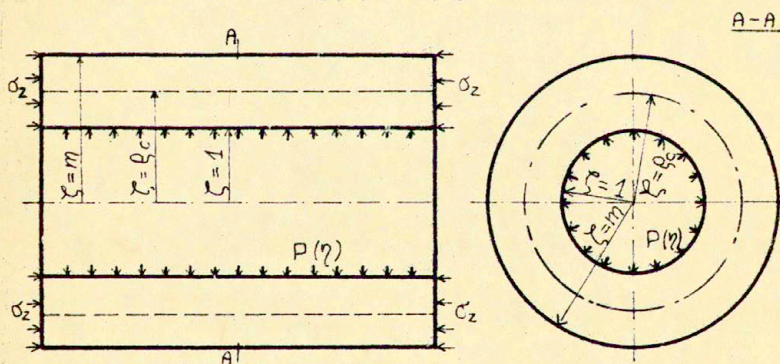
Z otrzymanych rezultatów wynika, że rozpatrywany w pracy efekt sprzężenia termomechanicznego /efekt liniowej rozszerzalności cieplnej spowodowany dysypacją mocy odkształceń plastycznych/, reprezentowany przez parametr sprzężenia δ , jest bardzo mały dla δ rzędu 10^{-3} /tyle wynosi parametr δ dla większości metali, [1] /. Przyjęta do analizy kuli wartość $\delta = 1$, wpływa znacznie na zmianę rozkładu : naprężeń, deformacji oraz przyłożonego ciśnienia wewnętrznego, por. rys. 3+7 . Maksymalny przrost temperatury jest rzędu 70°C . Nieznaczny jest natomiast wpływ ukrytej energii deformacji plastycznej. Jeżeli przyjąć, że $\gamma = 0,15$, co oznacza, że 15% mocy dysypacji ukrywane jest w ciele, to zmiana rozkładu naprężeń, deformacji, temperatury i przyłożonego ciśnienia wewnętrznego jest rzędu od ułamka procenta do kilku procent. Jest to więc wpływ procentowo niewielki w porównaniu do 15% pracy plastycznej zatrzymanej w ciele w postaci ukrytej energii deformacji plastycznej. Cytowane powyżej procentowe zmiany w rozkładzie obliczonych wielkości, są określane na promieniu wewnętrznym badanej kuli, ponieważ na promieniu tym występują ich największe różnice, por. rys. 3 + 7 .

Rozdział II

Analityczne rozwiązanie problemu dla
przypadku rury grubościennej

5. Wstęp

Rozważmy rurę grubościenną - rys. 8, która poddana jest działaniu quasistatycznie wzrastającego ciśnienia wewnętrznego. Niech wzrost ciśnienia trwa do chwili uplastycznienia połowy grubości ścianki. Rura znajduje się w płaskim stanie odkształcenia i wykonana jest z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym-izotropowym wzmocnieniem /por. rys. 2 /. Jako warunek plastyczności zostaje przyjęty warunek Treski, a prawa płynięcia plastycznego są stowarzyszone. W rozwiązaniu korzysta się z opisu we współrzędnych cylindrycznych - r, θ, z .



Rys. 8 Grubościenne rura znajdująca się w płaskim stanie odkształcenia obciążona ciśnieniem wewnętrznym

W rozważanym przykładzie, podobnie jak w poprzednim, rozpatruje się trzy warunki w procesie plastycznego odkształcania, mianowicie: rozpatruje się niesprężony problem sprężysto-plastyczny, sprzężony problem bez uwzględniania ukrytej energii deformacji plastycznych oraz sprzężony problem z uwzględnianiem ukrytej energii deformacji plastycznych. Otrzymane rozwiązania w postaci uwikłanej

i obliczone na drodze numerycznej przedstawia się w postaci wzorów, wykresów i tabel, gdzie określono : rozkład naprężeń, rozkład całkowitych deformacji, rozkład temperatur i ciśnienia wewnętrznego, oraz rozkład naprężeń resztkowych w procesie czystego sprężystego odciażania po zdjęciu obciążenia ciśnieniem wewnętrznym.

6. Analityczne rozwiązanie problemu

6.1 Podstawowe równania wyjściowe

Wykorzystując prawa symetrii osiowej, równania zapiszemy we współrzędnych cylindrycznych : promieniowych r , obwodowych θ , i osiowych z , uwzględniając jednocześnie, że $\varepsilon_z = 0$.

Równania równowagi, nierozdzielności odkształceń, oraz związki geometryczne są następujące :

$$\frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad , \quad (6.1)$$

$$\frac{d \varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad , \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad . \quad (6.3)$$

Równania konstytutywne wiążące naprężenia i odkształcenia zapiszemy w formie, [11] :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[\sigma_r - \nu / \sigma_\theta + \sigma_z / \right] + \varepsilon_r^p + \alpha T \quad ,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[\sigma_\theta - \nu / \sigma_z + \sigma_r / \right] + \varepsilon_\theta^p + \alpha T \quad , \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu / \sigma_r + \sigma_\theta / \right] + \varepsilon_z^p + \alpha T \quad ,$$

gdzie $\varepsilon_z = 0$.

Zakłada się nieściśliwość plastyczną materiału, czyli

$$\varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \quad (6.5)$$

Wykorzystując fakt pokazany przez Koitera [28], że w powyższym zagadnieniu istnieją nierówności $\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$, słuszne dla szerokiego zakresu zmian obciążania ciśnieniem wewnętrznym, warunek plastyczności Treski można wówczas zapisać następująco :

$$\sigma_e = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (6.6)$$

natomiast warunek początkowej granicy plastyczności wyglądać będzie odpowiednio :

$$\sigma_0 = \sigma_e \quad (6.7)$$

Ze stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia wynika, że

$$\varepsilon_z^p = 0 \quad (6.8)$$

natomiast z (6.5) i (6.8) otrzymamy następującą relację

$$\varepsilon_r^p = - \varepsilon_\theta^p \quad (6.9)$$

Zastępcze /zredukowane/ odkształcenia plastyczne są po uwzględnieniu (6.8) i (6.9) następującej postaci

$$\varepsilon^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \varepsilon_r^p \right| \quad (6.10)$$

Uwzględniając warunki płaskiego stanu odkształcenia w zależności (6.4)₃ i po uwzględnieniu w niej związków (6.5), (6.8), oraz (6.9) otrzymano

$$\sigma_z = \nu / \sigma_r + \sigma_\theta / - E \alpha T \quad (6.11)$$

Równania konstytutywne materiału sprężysto-plastycznego z linio-

wym wzmocnieniem są analogiczne jak w przypadku kuli, i określone są równaniem (2.11), rys. 2.

6.2 Wyprowadzenie podstawowych równań i zależności

a/ Strefa plastyczna - $R_i \leq r \leq r_c$, $1 \leq \xi \leq \xi_c$

Wykorzystując równania (6.4) i uwzględniając w nich (2.11), (6.8 - 6.10) oraz korzystając z faktu podanego w pracach [11], [28], że w przypadku obciążenia ciśnieniem wewnętrznym rury grubościennej, σ_θ jest prawie zawsze dodatnie, natomiast σ_r prawie zawsze ujemne /to znaczy, że $\sigma_r - \sigma_\theta < 0$ /, po przekształceniach otrzymamy

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] \sigma_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] (\sigma_r - \sigma_\theta) + \alpha T \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] \sigma_\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right] (\sigma_r - \sigma_\theta) + \alpha T$$

Równanie dla pola temperatur, przy przyjętych założeniach, można zapisać analogicznie jak w przypadku kuli grubościennej, [14 - 16], [18 - 21], tzn.,

$$\rho_0 c_0 \dot{T} = \dot{w}^D - \rho_0 \dot{U}^D \quad (6.13)$$

gdzie, podobnie jak poprzednio \dot{w}^D jest prędkością /mocą/ pracy plastycznej, a \dot{U}^D prędkością utajonej energii deformacji plastycznej. Wyrażenie (6.13) otrzymuje się z ogólnego równania na pole temperatur, por. np. [14 - 16], przy założeniu, że proces deformacji ma charakter lokalnie adiabatyczny oraz, że pomija się efekt piezokaloryczny.

Podstawiając równania (6.12) do równania nierozdzielności odkształceń (6.2) oraz wykorzystując równanie równowagi (6.1) i zależność (6.11), po przekształceniach otrzymano:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + 3 \cdot r \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = A_R - B_R \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (6.14)$$

gdzie:

$$A_R = \frac{2\sqrt{3}/1 - \frac{E_T}{E} / \sigma_0}{2/1 - \nu^2 / \frac{E_T}{E} + \sqrt{3}/1 - \frac{E_T}{E} /}, \quad B_R = \frac{2/1 + \nu / \alpha E_T}{2/1 - \nu^2 / \frac{E_T}{E} + \sqrt{3}/1 - \frac{E_T}{E} /}$$

Podstawiając dalej do równania (6.13) jedną z zależności (2.14), wykorzystując odpowiednio związek (2.15) oraz uwzględniając prawa symetrii osiowej i wyrażenia (6.8) po żmudnych przekształceniach otrzymano:

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = / D_R - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A}{r} / \frac{\partial}{\partial t} \left[r^2 / \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} /^2 \right], \quad (6.15)$$

gdzie:

$$D_R = \frac{\sqrt{3}}{4} / 1 - \frac{E_T}{E} / \frac{1}{E_T}$$

Równania różniczkowe (6.14) oraz (6.15), są podobnie jak w przypadku kuli równaniami wzajemnie sprzężonymi. Są to zarazem dwa podstawowe równania służące do rozwiązania postawionego problemu w strefie plastycznej.

Analogicznie jak w rozdziale pierwszym niniejszej pracy, wprowadza się te same wielkości bezwymiarowe (2.18) - jak w przypadku symetrii kulistej, oprócz (2.18)₃, oraz dodatkowo :

$$\zeta_3 = \frac{\sigma_z}{\sigma_0} \quad , \quad \epsilon_3 = -\frac{\epsilon_z E}{\sigma_0} \quad ; \quad \theta^* = b_R \frac{T}{T_1} \quad . \quad (6.16)$$

Po uwzględnieniu odpowiednich wielkości bezwymiarowych (2.18) i (6.16)₃ równania różniczkowe (6.14) i (6.15) można przedstawić w następującej postaci :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \frac{a_R}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} \quad , \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = \delta_R - \delta_R / \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\zeta^2 / \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} / \zeta^2 \right] \quad , \quad (6.18)$$

gdzie $a_R = A_R / \sigma_0$, $b_R = B_R T_1 / \sigma_0$, oraz

$$\delta_R = \frac{\sqrt{3}/1 - \frac{E_\pi}{E} / 1 + \nu /}{2 \left[2/1 - \nu^2 / \frac{E_\pi}{E} + \sqrt{3}/1 - \frac{E_\pi}{E} / \right]} \frac{\alpha \sigma_0}{\rho_0 c_0} = B_R \cdot D_R \cdot \frac{\sigma_0}{\rho_0 c_0} \quad , \quad (6.19)$$

$$\delta_R^* = \frac{\sqrt{3}/1 + \nu / \cdot E_\pi}{2/1 - \nu^2 / \frac{E_\pi}{E} + \sqrt{3}/1 - \frac{E_\pi}{E} /} \frac{\alpha \sigma_0 \bar{A}}{\rho_0 c_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{A}}{D_R} \delta_R \quad .$$

Powyższe parametry δ_R i δ_R^* są parametrami sprzężeń termomechanicznych i są związane odpowiednio z dysypacją pracy odkształcenia plastycznego i z ukrytą energią deformacji plastycznej. Z wyrażenia (6.19)₂ oraz na podstawie (2.14)₂, wynika, że parametr δ_R^* jest pewną funkcją parametru δ_R , co ma jasne uzasadnienie fizyczne, ponieważ ukryta energia deformacji plastycznej reprezentuje część pracy plastycznej i która równa jest $\bar{A}^* v^D$. Postępując analogicznie jak w dodatku

pracy [1] i wykorzystując następujące warunki brzegowo-początkowe,

$$\sigma / 1, \eta / = -p, \quad \sigma / m, \eta / = 0, \quad T / \zeta, 0 / = 0, \quad \zeta_c \frac{\partial \sigma / \zeta /}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_c} = 1, \quad (6.20)$$

po rozwiązaniu równania (6.18) dostaniemy następujące wyrażenie na bezwymiarową temperaturę θ^* ,

$$\theta^* / \zeta, \eta / = / \delta_R - \gamma_R / \left[\zeta^2 / \frac{\partial \gamma /}{\partial \zeta} / ^2 - \zeta_c^2 / \frac{\partial \sigma /}{\partial \zeta} / ^2 \Big|_{\zeta = \zeta_c} \right] \quad (6.21)$$

Podstawiając następnie (6.18) do (6.17), po przekształceniach otrzymamy się następującą zależność,

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta^2} + 3 \zeta \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = a_R - / \delta_R - \gamma_R / \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 / \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} / ^2 \right] \quad (6.22)$$

Wykorzystując warunki (6.20) oraz fakt, że na granicy sprężysto-plastycznej naprężenia, deformacje oraz temperatura są ciągłe, postępując analogicznie jak w pracy [1], równanie (6.22) można rozwiązać w sposób analityczny, otrzymując,

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - 8 / \delta_R - \gamma_R / \sigma + 4 a_R / \bar{\alpha}_R - \gamma_R / \ln / \frac{\zeta}{\zeta_c} / + 4 / \delta_R - \gamma_R / ^2 + 4 / \delta_R - \gamma_R / -} \\ & - 4 / \delta_R - \gamma_R / \cdot / 1 - \frac{\zeta_c^2}{m} / ^2} + \left[1 + a_R / \delta_R - \gamma_R / \right] \ln \left[-1 - a_R / \delta_R - \gamma_R / + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - 8 / \delta_R - \gamma_R / \sigma + 4 a_R / \delta_R - \gamma_R / \ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + 4 / \delta_R - \gamma_R / ^2 + 4 / \delta_R - \gamma_R / - 4 / \delta_R - \gamma_R / / 1 - \frac{\zeta_c^2}{m} / ^2} \right] \\ & = - 2 \ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + \sqrt{4 / \delta_R - \gamma_R / ^2 + 4 / \delta_R - \gamma_R / + 1} + \quad (6.23) \\ & 1 + a_R / \delta_R - \gamma_R / \ln \left[-1 - a_R / \delta_R - \gamma_R / + \sqrt{4 / \delta_R - \gamma_R / ^2 + 4 / \delta_R - \gamma_R / + 1} \right] \end{aligned}$$

Wartość naprężenia promieniowego na granicy strefy sprężysto-pla-

stycznej jest następująca por. np. [1], [11], [13],

$$\sigma_{\zeta=\zeta_c} = -\frac{1}{2} / 1 - \frac{\zeta_c^2}{m^2} / \quad (6.24)$$

Aby określić naprężenia dla niesprężonego problemu $\delta_R=0$, $\delta_R^r=0$, należy do otrzymanego wyrażenia (6.23) zastosować regułę Hospitala por. np. [1], otrzymując w ten sposób:

$$\sigma_{\zeta=0} = \frac{a_R}{2} \ln \frac{\zeta}{\zeta_c} + \frac{1}{2} / 1 - \frac{a_R}{2} / \cdot / 1 - \frac{\zeta_c^2}{\zeta^2} / - \frac{1}{2} / 1 - \frac{\zeta_c^2}{m^2} / \quad (6.25)$$

Równanie analogiczne do powyższego przedstawione jednak w innej formie i w innych parametrach, otrzymano we wcześniejszych pracach jak np. [11], [30]. Można go również otrzymać na innej drodze, a mianowicie poprzez podstawienie do równania (6.22) wartości $\delta_R=0$, $\delta_R^r=0$, a następnie przeprowadzając analogiczne postępowanie jak w przypadku równania (6.22) oraz wykorzystując nadal słuszne warunki brzegowe (6.20)₄ i (6.24).

Wyprowadzony w tym punkcie układ równań (6.21), (6.23-6.25), wraz z podstawowymi równaniami wyjściowymi z punktu 6.1, jest pełnym układem równań za pomocą którego, obliczyć można wielkości charakterystyczne dla rozpatrywanej grubościennej rury w strefie plastycznej. Rozkład bezwymiarowych naprężeń σ określimy z zależności (6.23) i (6.25) a następnie naprężeń obwodowych i osiowych odpowiednio z równania równowagi (6.1) i z równania (6.11), po uwzględnieniu w nich odpowiednich wielkości bezwymiarowych (2.18) i (6.16). Rozkład bezwymiarowej temperatury w strefie plastycznej otrzymać można z równania (6.21). Z zależności (6.12) obliczymy rozkład deformacji odpowiednio promieniowych ϵ i obwodowych $\bar{\epsilon}$, po uwzględnieniu odnośnych wielkości bezwymiarowych (2.18) i (6.16). Rozkład bezwymiarowego ciśnienia wewnętrznego w zależności od propagacji strefy sprężysto-plastycznej ζ_c , znajdziemy z równań (2.23) i (2.25) dla promienia wewnętrznego $\zeta=1$, uwzględniając warunek brzegowy (6.21)₁, przy zadanym parametrze geometrii kuli m .

Naprężenia resztkowe w procesie sprężystego odciążenia określi się z następujących związków por.np. [10 -11] ,

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma + \sigma'' & , \\ \bar{\sigma}' &= \bar{\sigma} + \bar{\sigma}'' & , \\ \sigma'_3 &= \nu / \sigma' + \bar{\sigma}' / , \text{ por. wyrażenie (6.11) ,} \end{aligned} \quad (6.26)$$

gdzie :

$$\sigma'' = \frac{\zeta^2 - m^2}{\zeta^2/m^2 - 1} \sigma \Big|_{\zeta=1} , \quad \bar{\sigma}'' = \frac{\zeta^2 + m^2}{\zeta^2/m^2 - 1} \bar{\sigma} \Big|_{\zeta=1}$$

Wyprowadzone w tym punkcie równania mogą być użyte do zagadnienia wydrążonego cylindrycznego otworu o promieniu wewnętrznym $\zeta=1$, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym i znajdującego się w przestrzeni z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem.

Należy wówczas jak poprzednio w odpowiednich równaniach przejść do granicy, gdy współczynnik geometrii rury m dąży do nieskończoności $/m \rightarrow \infty/$. Natomiast aby otrzymać z wyprowadzonych równań zależności słuszne w zagadnieniu rury lub cylindrycznego otworu w przestrzeni, dla materiału bez wzmocnienia, należy w odpowiednich równaniach przejść także do granicy, gdy moduł wzmocnienia plastycznego E_T dąży do zera $/E_T \rightarrow 0/$.

b/ Strefa sprężysta $r_c \leq r \leq R_0$, $/\zeta_c \leq \zeta \leq m/$

Jak wspomniano we wstępie pracy, w strefie sprężystej rozpatruje się zagadnienie niesprężystej termosprężystości, przy stałej temperaturze. Równania opisujące takie zagadnienie znajdują się w standardowych podręcznikach np. [9 -11] , [17] a odniesione do problemu grubościennych rur np. w publikacjach [28 - 37]. Obecnie, podobnie jak w przypadku grubościennej kuli z rozdziału I, przedstawi się ogólne rozwiązanie termosprężystości dla przypadku grubościennej rury, a następnie zaniedba się efekty termiczne zakładając, że $\theta^* = 0$.

Równania apalogiczne do (6.17) , w strefie sprężystej posiada

następującą postać

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = - \frac{\delta_R^e}{\xi} \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \quad , \quad (6.27)$$

gdzie

$$\delta_R^e = \frac{2/1 - \nu^2 / + \sqrt{3} / \frac{E}{E_p} - 1 /}{2/1 - \nu^2 /} \quad ,$$

jest odpowiednim parametrem materiałowym rury.

Gdy uwzględni się w równaniu (6.27), że $\theta^* = 0$, wówczas po jego scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych (6.20)₁ i (6.24), otrzymamy następującą zależność [11],

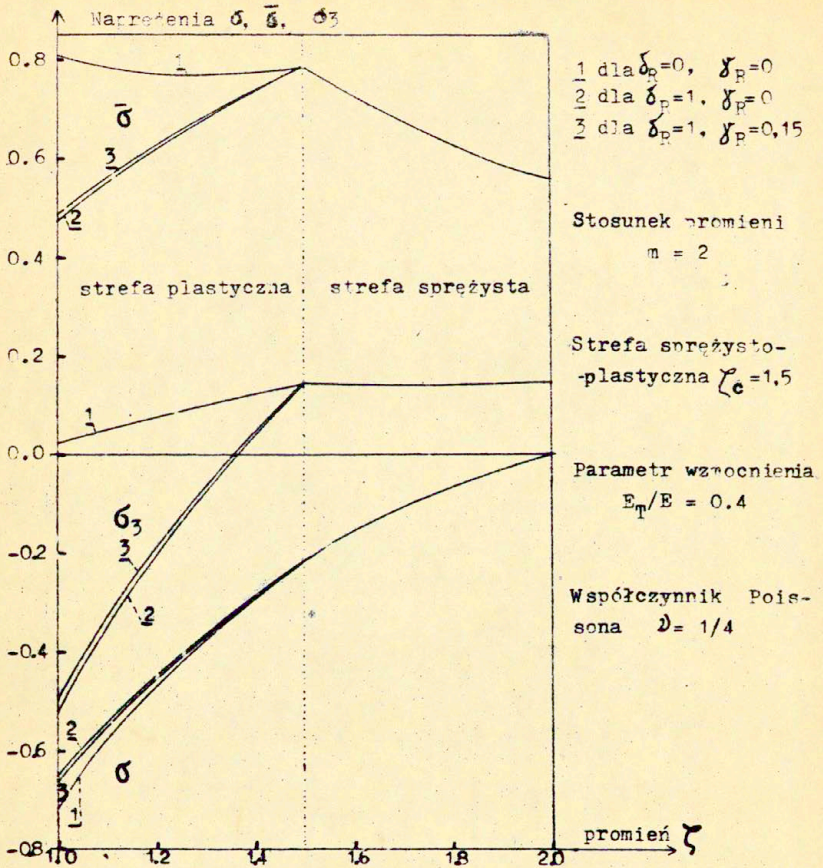
$$\sigma = \frac{1}{2} / \frac{\xi^2 - \frac{m^2}{2}}{\xi^2 \frac{m^2}{2}} / \xi_c^2 \quad (6.28)$$

Rozkład bezwymiarowych naprężeń promieniowych określi się więc z (6.28), a obwodowych i poosiowych σ_3 odpowiednio z równania równowagi (6.1) i równania (6.11), po uwzględnieniu w nich odpowiednich wielkości bezwymiarowych z (2.18) i (6.16). Z zależności (6.4)_{1,2} obliczy się rozkład odpowiednich deformacji przy uwzględnieniu, że w strefie sprężystej wielkości ξ_R^p i ξ_θ^p są równe zero oraz, że $\theta^* = 0$. Na granicy sprężysto-plastycznej istnieje także ciągłość odkształceń oraz przemieszczeń.

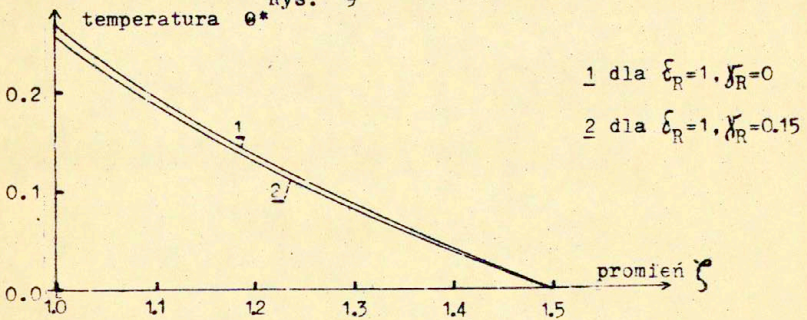
Rozkład naprężeń resztkowych w procesie czystego sprężystego odciążania określi się także z równań (6.26), przy czym naprężenia σ i $\bar{\sigma}$ należy wziąć w procesie obciążania odpowiednio ze strefy sprężystej.

7. Analiza otrzymanych wyników

Na rys. 9 przedstawiono rezultaty obliczeń numerycznych naprężeń promieniowych σ , obwodowych $\bar{\sigma}$, i poosiowych σ_3 dla niesprężonych / $\delta_R = 0$, $\bar{\delta}_R = 0$ / i sprężonych równań termoplastyczności, odpowiednio bez uwzględniania / $\delta_R = 1$, $\bar{\delta}_R = 0$ / i z



Rys. 9



Rys. 10

uwzględnieniem ukrytej energii deformacji plastycznej $\sqrt{\delta_R} = 1, \sqrt{\delta_R} = 0,15\%$, dla przypadku gdy promień strefy sprężysto-plastycznej ζ_c , osiągnął wartość $\zeta_c = 1,5$. Obliczenia przeprowadzono dla przyjętego, jak w kuli za [1], dużego parametru sprężenia $\sqrt{\delta_p} = 1$, aby poglądowo zilustrować wpływ tego efektu sprężenia, gdy granica strefy sprężysto-plastycznej $\zeta_c = 1,5$, współczynnik geometrii rury $m=2$, $E_p/E = 0,4$, współczynnik Poissona $\nu = 0,25$. Na rys.10 przedstawia się rozkład bezwymiarowej temperatury θ^* po promieniu w strefie plastycznej dla przypadku sprężenia, bez i z uwzględnieniem ukrytej energii deformacji plastycznej. Zmianę przyłożonego ciśnienia wewnętrznego w zależności od propagacji strefy sprężysto-plastycznej, do maksymalnej jej wartości $\zeta_c = 1,5$ użytej w pracy, przedstawia się na rysunku 11. Rozkład całkowitych deformacji pokazano na rys.12. Wyniki obliczeń naprężeń resztkowych po procesie czystego sprężystego odciążenia dla maksymalnej wartości ciśnienia p /rys.11/, gdy $\zeta_c = 1,5$, pokazano na rys. 13. Warunek, aby odciążenie miało charakter sprężysty, jest następujący [10]; [27],

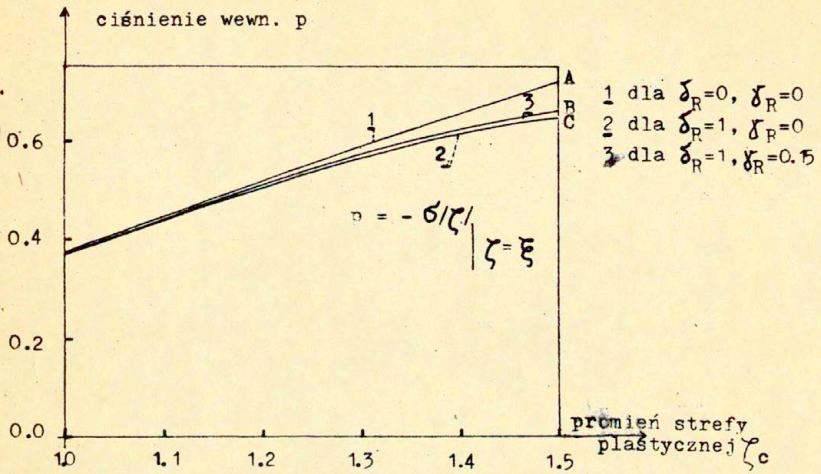
$$|\sigma' - \bar{\sigma}'| \leq |\sigma - \bar{\sigma}| \quad (6.20)$$

gdzie wartości σ' i $\bar{\sigma}'$ określone są wzorami (6.26). Zakładając na podstawie analizy [10 - 15], [28], [30], że najszybciej podczas odciążania może pojawić się lokalne plastyczne pęknięcie na wewnętrznym promieniu rury, warunek (6.20) przekształca się do następującego wyrażenia

$$p_{cr} = \frac{m^2 - 1}{m^2} / \bar{\sigma} - \sigma / \zeta = 1 \geq p \quad (6.30)$$

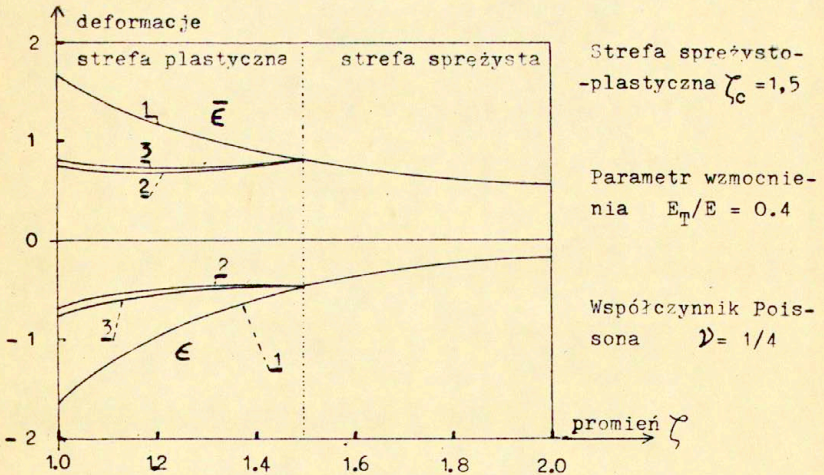
gdzie, p_{cr} oznacza największą wartość ciśnienia jaka należy przyłożyć do wewnętrznego powierzchni aby odciążenie miało charakter czysto sprężysty.

W tabeli 2, podaje się przykłady obliczeń dla trzech przypadków, a mianowicie dla problemu niesprężonego, sprężonego bez uwzględniania i z uwzględnianiem ukrytej energii deformacji plastycznej. Pokazano wartości p z wyrażenia (6.20), i p_{cr} z

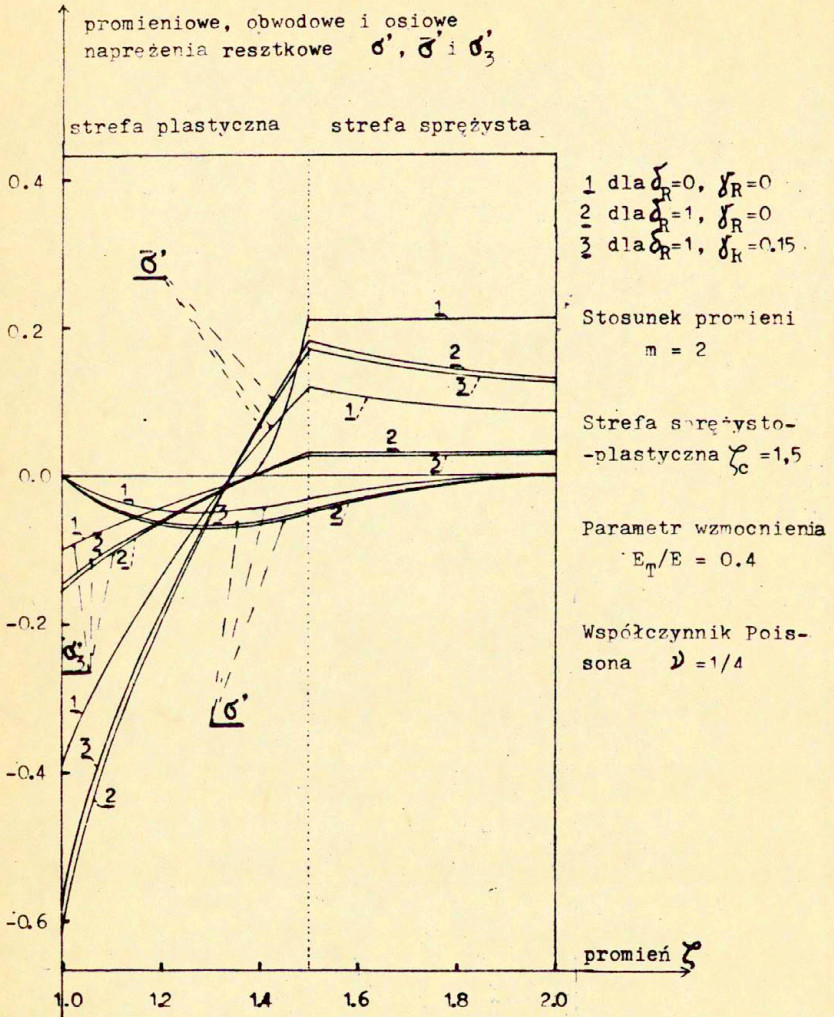


Rys. 11

Stosunek promieni
 $n = 2$



Rys. 12



Rys. 13

wyrażenia (6.30) dla zadanych wartości parametru geometrii m i odpowiednich stałych materiałowych.

Tabela 2

$m = 2$	$\nu = 0,25$	$E_T/E = 0,4$	$\zeta_c = 1,5$
δ_r	γ_r	P_{cr}	P
$\delta_R = 0$	$\gamma_R = 0$	1,143	0,716
$\delta_R = 1$	$\gamma_R = 0$	0,843	0,649
$\delta_R = 1$	$\gamma_R = 0,15$	0,855	0,652

Z powyższej tabeli wynika, że dla przyjętych wartości m , E_T/E , ν , ζ_c , we wszystkich trzech przypadkach proces odciażania ma charakter sprężysty. Wymiarowe ciśnienia P z $(2.18)_6$, odpowiadające punktom A, B, C, na rys. 11, wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}
 P &= 286,4 \text{ MPa} && \text{dla A } / \delta_R = \gamma_R = 0 / , \\
 P &= 250,4 \text{ MPa} && \text{dla B } / \delta_R = 1 \quad \gamma_R = 0 / , \\
 P &= 260,8 \text{ MPa} && \text{dla C } / \delta_R = 1 \quad \gamma_R = 0,15 / ,
 \end{aligned}$$

dla przyjętej wartości $\delta_0 = 4000 \text{ kg/cm}^2$. Wymiarowe temperatury T , odpowiadające temperaturom σ^* , z rys. 10 i mierzone na wewnętrznej powierzchni rozpatrywanej grubościennej rury, określono z wyrażenia $(6.16)_3$ i wynoszą one:

$$\begin{aligned}
 T &= 40,96 \text{ }^\circ\text{C} && \text{dla } \delta_R = 1, \quad \gamma_R = 0 \\
 T &= 39,46 \text{ }^\circ\text{C} && \text{dla } \delta_R = 1, \quad \gamma_R = 0,15,
 \end{aligned}$$

dla $\zeta_0 = 4000 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

7. Wnioski

Z otrzymanych rezultatów podobnie jak w przypadku kuli wynika, że rozpatrywany w pracy efekt sprężenia termomechanicznego, reprezentowany przez parametr sprężenia δ_R jest bardzo mały

/dla $\delta_P = 10^{-3}$ /. Przyjęta do analizy rury wartość $\delta_P = 1$, znacznie wpływa na rozkład : naprężeń, deformacji i ciśnienia wewnętrznego. Maksymalny przyrost temperatury jest rzędu 40°C . Nieznaczny jest natomiast wpływ parametru δ_R , na rozkład naprężeń promieniowych. Duże różnice w rozkładzie naprężeń osiowych δ_3 , spowodowane są m. in. przyjęciem płaskiego stanu odkształcenia.

Podobnie jak w przypadku kuli, nieznaczny jest wpływ ukrytej energii deformacji plastycznej. Jeżeli przyjąć, że $\delta_R = 0,15$, co oznacza, że 15% mocy plastycznej jest zatrzymywane w ciele i nie wydziela się w postaci ciepła, to zmiana w rozkładzie naprężeń, deformacji, temperatur i przyłożonego ciśnienia wewnętrznego jest rzędu od części procenta do kilku procent. Jest to podobnie jak w przypadku kuli wpływ mały w porównaniu do 15%, jaka jest przypisana wielkości ukrytej energii deformacji plastycznej. Podobnie jak w przypadku grubościennej kuli por.p.4, powyższe procentowe zmiany obliczonych wielkości, są największe na promieniu wewnętrznym grubościennej rury por.rys. 9 + 13.

Uwagi końcowe

W pracy analizowano wpływ efektu sprzężenia termomechanicznego - efektu rozszerzalności cieplnej spowodowanej dysypacją mocy odkształcenia plastycznego, na zachowanie się grubościennej sprężysto-plastycznej kuli i rury obciążonych monotonicznie wzrastającym ciśnieniem wewnętrznym. Materiał kuli i rury przyjęto jako sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem. Rozpatrzono trzy przypadki w procesie obciążania, a mianowicie : problem niesprężony, problem sprężony bez i z uwzględnieniem ukrytej energii deformacji plastycznej. Wyprowadzony parametr δ , uwzględniający wspomniany efekt sprzężenia termomechanicznego, jest dla większości metali bardzo mały, rzędu 10^{-3} , stąd też, efekt ten w rzeczywistości nie odgrywa istotnej roli. W pracy, do analizy przyjęto wartość parametru $\delta = 1$, aby obrazowo, na wykresie pokazać kierunek wpływu tego efektu sprzężenia termomechanicznego. W pracy pomija się także efekt piezokaloryczny, co można uczynić dla ograniczonych zakresów temperatur i średnich ciśnień hydrostatycznych, [14 + 16].

Rozpatrywane problemy grubościennych kul i rur można rozszerzyć dodając np. do obciążenia ciśnieniem wewnętrznym także obciążenie termiczne i ciśnienie wewnętrzne, oraz uwzględniając zależność granicy plastyczności od temperatury. Wówczas to problem staje się bardzo złożony i wszystkie obliczenia należy przeprowadzić metodami numerycznymi. Należałoby również w dalszych badaniach określić wpływ parametru m , na badane wielkości rozciągając jednocześnie zasięg strefy plastycznej na całą kulę czy rurę.

W pracy uwzględniono wpływ ukrytej energii deformacji plastycznej, której prawidłowy opis pozwolić może, lepiej zrozumieć procesy plastycznego płynięcia i związane z tym zjawiska wzmocnienia lub osłabienia oraz pomóc może w wyjaśnieniu procesów niestateczności i zniszczenia metalu. Ostatnio w naszym Instytucie podjęto także badania, nad określeniem ukrytej energii deformacji plastycznej, wykorzystując przy tym nowe metody badań doświadczalnych [8]. Należałoby także rozwinąć na gruncie teorii termoplastyczności, nowe metody teoretyczne, służące do opisu ukrytej energii a bazujące na pojęciach termodynamiki procesów nieodwracalnych i wykorzystujące koncepcję makroskopowych parametrów wewnętrznych. Opis ukrytej energii od strony dyslokacji bazuje na metodach badań rentgenograficznych. Badania takie były już podjęte i są cytowane w literaturze, por. np. [6-7].

Literatura

1. H.A. NIED, S.C. BATTERMAN, On Coupled Thermoplasticity : An Exact Solution for a Spherical Domain, Israel Journal of Technology, Vol. 9, No. 1-2, pp. 37-46, 1971 .
2. G.T. TAYLOR, H. QUINNEJ , The latent energy remaining in a metal after cold working, Proc. Roy. Soc. , A, 1934, vol. 143, p. 307 .
3. M.A. BOISZANINA, W.E. PANIN, Skrytą Energia Deformacji, w książce "Issledowania po fizykie twierdowo tieła", Izd. A.N. CCCP, 1957, 194-233. .
4. N.S. PASTOW, Energia Iskaziennoj Kristalliczeskoj Vesziетки, Prob. Metalloved. i Fiziki Metallow, 4 Symp. Gosu. Nauczno-Techn. Liter. Izdat. po Czernoi i Cwietnoj Metailurgii, Moskwa, 1955 , 377.
5. L.M. CLAREBROUGH, M.E. HARGREAVES, D. MICHEL, G.W. WEST, The determination of the energy stored in a metal during plastic deformation, Proceedings Royal Society , 1952, A 215, p. 307.
6. R.E. REED HILL, Physical metalurgy principles, D. Van. Nostrand Company, Inc. Toronto , London 1964.
7. M.B. BEVER, D.L. HOLT, Al. TITCHENER, Stored Energy of Cold Work; Progress in Material Sciences, Vol. 17, Pergamon Press, 1973 .
8. S.P. GADAJ, E. GAŁKOWSKA, J. KACZMAREK, W. OLIFERUK, Wyznaczenie energii zmagazynowanej w metalu podczas procesu rozciągania, Prace IPPT-PAN , Warszawa, 1981 .
9. B.A. BOLEY, J.H. WEINER, Theory of Thermal Stress, Wiley, New York, 1960 .
10. W. JOHNSON, P.M. MELLOR, Plasticity for Mechanical Engineers, Van Nostrand, Princeton, New York, 1962 .
11. A. MANDELSON, Plasticity : Theory and Application, The Mc Millan Company, New York, 1968 .
12. I.S. TUBA, Elastic-Plastic Analysis for Hollow Spherical Media Under Uniform Radial Loading, J. Franklin Inst. 280, 1965, 343-355.

13. R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, London 1950 .
14. B. RANIECKI, Jednoznaczność i zasady wariacyjne w termoplastyczności, w tomie "Termoplastyczność", Ossolineum, Wrocław, 1973, str. 175-222 .
15. B. RANIECKI, A. SAWCZUK, Thermal Effects in Plasticity, Part II : Uniqueness and Applications, ZAMM 55, 7/8, 1975, 363-371.
16. B. RANIECKI, Zagadnienia stosowanej termoplastyczności, Praca habilitacyjna. Prace IPPT-PAN, Warszawa 1977 .
17. W. NOWACKI, Thermoelasticity, Pergamon Press , Oxford 1962 .
18. G.W. DILLON JR., Coupled Thermoplasticity, J.Mech. Phys. Solids 11, 21-33, 1963 .
19. G.W. DILLON JR., Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity, ASME Trans., E87, 378-382, 1965 .
20. G.W. DILLON JR., A thermodynamic basis of plasticity, Acta Mechanica, 3, 182-195, 1967 .
21. Z. GABRYSZEWSKI, W. SRODKA, Wykorzystanie zjawiska sorzeżenia między polem odkształcenia a polem temperatury w mechanice doświadczalnej, VIII Symp. Dośw. Badań w Mech. Ciała Stałego, Warszawa 1978, 229-239 .
22. N.S. FASTOW, Wydzielienie ciepła pri plasticzeskom dieformirowanii, Technicheskaja Fizika, DAN-CCCP, 1952, Tom LXXXIII, No. 6, 851-854 .
23. G.S. SZAPIRO, Ob opriedielenii potencjalnoj energii ostatocznych dieformaczi, Inst. Mech. AN-CCCP, PMM, Tom XVII , 1953, 114-116 .
24. B. RANIECKI, A quasi static, spherically symmetric - problem of thermoplasticity, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech. 13, 91-100, 1965 .
25. F. DRABBLE, W. JOHNSON, The development of the Zones of Yielding in Thick-Walled Spherical Shells of Non-work-hardening Material Subjected to a Steady State Radial Temp. Gradient and on Internal or External Pressure, Conf. on Thermal Loading and Creep, Paper 19, Inst. Mech. Engrs., 1964 .

26. M.G. DERRINGTON, W. JOHNSON, The Onset of Yield in a Thick Spherical Shell Subject to Internal Pressure and a Uniform Heat Flow, Appl. Sci. Research, Series A, 7, 1973 .
27. W. JOHNSON, P.B. MELLOR, Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work hardening material subject to a Steady State Radial Temperatures Gradient, Int. J. of Mech. Sciences, vol. 4, 147 March-April 1962 .
28. W.F. KOITEP, On Partially plastic thick-Walled Tubes, Biezono Anniversary Volume in Applied Mechanics, N. V. De Technische Uitgeverij H. Stam, Haarlem, 1953, 232-251.
29. B.PANTECKI, A. SAWCZUK, Thermal Effects in Elasticity. Part I: Coupled Theory, ZAMM 55 , 6, 1975, 333-341 .
30. D.R. BLAND, Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients, J. Mech. Phys. Solids 4., 209-229.
31. M. SOKOŁOWSKI, Naprężenia cieplne w powłoce kulistej oraz cylindrycznej w przypadku materiałów o własnościach zależnych od temperatury. Rozprawy Inżynierskie, Tom VIII, Zeszyt 4, 641-669.
32. H.G. LANDAU, E.E. ZWICKY /JR/, Transient and residual thermal stress in elastic-plastic cylinders, J. Appl. Phys., 27, 1961, 481 .
33. P.D. SCHWEIBERT, Elastic-plastic and creep deformations of long thick-walled cylinders of work-hardening materials subjected to transient thermal and mechanical loading, Int.J. Mech. Sci., 7, 1965, 115 .
34. E.T. ONAT, S. YAMANTÜRK, On thermally stressed elastic-plastic shells, J. Appl. Mech., 29, 1962 .
35. B.M. MA, Plastic stresses and strains in cylindrical reactor pressure vessels, First Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Techn., Berlin, 1971, Paper g 1/5 .
36. L.M. KACHANOV, Foundation of the Theory of Plasticity, Amsterdam : North-Holland , 1971 .

37. M.C. STEELE, Partially plastic thick-walled cylinder theory, J. Appl. Mech. , 19, 1952, pp. 133-140 .
38. D.N. de G. ALLEN, D.G. SOPWITH, The Stress and Strains in a Partially Plastic Thick-Tube Under Internal Pressure and end load, Proc. Roy. Soc. /London/, A.205, 1951, 69-83 .
39. R. HILL, E.H. LEE, S.J. TUPPER, The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a Thick Tube Under Internal Pressure, Proc. Roy. Soc. /London/, A.191, 1947, 278-303.
40. W.I. DANILOWSKAJA, Uprugo-płastyczieskaja simietricznaja deformacija tołstostiennoj truby s ucziem nierawnomiernosti rozpriedielenija tiempieratury wdol radjusa, Prikl. Meehan. AN-YCCP, 1, 1965, No. 6,8 .
41. W.K. STRJUK, Tiermouprugo-płastyczieskoje naprjažennoje sotojanije tołstostiennowo cilindra koniecznoj dliny, W. sd. Tiepłowyje naprjaženija elementow konstrukcij, Kijew : Naukowa dumka, 1970 , wyp. 10, s. 57 .
42. J. BETTEN, On the behaviour of an elastic-plastic, thick-walled circular cylindrical tube subjected to internal pressure, Symp. on Mechanics of Inelastic Media and Structures, Warsaw, 1978 .
43. A. SAWCZUK, M. JANAS, J.A. KONIG, Analiza plastyczna konstrukcji. Ossolineum, Wrocław 1972 .