3.31 — pobudzanie, propagacja fal elektromagnetycznych, falowych

1.11 — równania różniczkowe

Włodzimierz Laprus

FALE W LINII TRANSMISYJNEJ Z NIELINIOWĄ DYSPERSJĄ

14/1985

WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 grudnia 1984 r.

IPPT PAN

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd.0,5 Ark.druk. 1
Oddano do drukarni w marcu 1985 r.
Nr zamówienia 174/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Włodzimierz Laprus
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

FALE W LINII TRANSMISYJNEJ Z NIELINIOWĄ DYSPERSJĄ

1. WPROWADZENIE

Linia transmisyjna jest układem przewodników o symetrii cylindrycznej takim, że w płaszczyźnie poprzecznej do osi symetrii, powiedzmy osi x, przekroje przewodników są ograniczone. W przypadku doskonałych przewodników umieszczonych w próżni problem początkowo-brzegowy dla równań Maxwella rozpada się na dwa problemy: brzegowy dla równania Laplace'a i początkowy dla układu dwóch równań cząstkowych pierwszego rzędu /są to tzw. równania transmisyjne/. Pole elektromagnetyczne $\underline{E}$, $\underline{H}$ jest poprzeczne względem osi x, a jego rozkład w płaszczyźnie prostopadłej do osi x jest określony przez równanie Laplace'a . Zmienność pola wzdłuż osi x jest określona przez równania transmisyjne. W szczególności dla linii transmisyjnej złożonej z dwóch przewodników pola $\underline{E}$, $\underline{H}$ są proporcjonalne odpowiednio do napięcia $u(t,x)$ między przewodami i do prądu $i(t,x)$ płynącego w przewodach /jest on taki sam w obydwu przewodach i przeciwnie skierowany/. Równania transmisyjne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

po eliminacji jednej ze zmiennych zależnych dają po prostu równanie falowe z prędkością propagacji $c = (LC)^{-1/2}$; L i C są odpowiednio indukcyjnością i pojemnością na jednostkę długości linii.

Dopuszczenie skończonej przewodności przewodów lub stratności ośrodka, w którym umieszczone są przewody, powoduje dość radykalną zmianę sytuacji. Przede wszystkim pojawiają się podłużne składowe pola $\underline{E}$ i $\underline{H}$, a zatem pojęcie napięcia między przewodami traci sens. Ponadto prąd w przewodach nie wiąże się już bezpośrednio z polem $\underline{H}$. Mimo to, jak pokazuje praktyka, równania /1 .1/ wciąż są użyteczne, jeśli tylko przewodność przewodników jest dostatecznie duża i stratność ośrodka dostatecznie mała. Przybierają one teraz postać

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} + \alpha u = 0, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x} + \beta i = 0,$$

gdzie $\alpha = G/C$ i $\beta = R/L$; G jest upływnością /odwrotnością oporności/ między przewodami na jednostkę długości linii, R jest opornością przewodów na jednostkę długości linii. Po wyeliminowaniu prądu i otrzymuje się tzw. równanie telegrafistów /patrz R. Courant, D. Hilbert [1]/, które, co ciekawe, jest historycznie wcześniejsze niż równania Maxwella. Fakt ten znajduje proste wyjaśnienie w teorii obwodów elektrycznych. Otóż można pokazać, że równania /1.2/ opisują napięcie i prąd w linii transmisyjnej złożonej z dużej ilości jednakowych elementów, każdy zawierający oporniki R i $1/G$ oraz cewkę L i kondensator C. Przy tym oporności R i $1/G$ mogą być dowolne. Oczywiście związek napięcia i prądu w linii z polem elektromagnetycznym wokół linii jest w tym przypadku skomplikowany /zresztą jest on nieistotny z punktu widzenia propagacji fal w takiej linii/.

2. RÓWNANIA LINII TRANSMISYJNEJ

Parametry R , G , L , C linii transmisyjnej "teorioobwodowej" mogą być wybrane w zasadzie dowolnie. Założymy, że pojemność jest zależna od napięcia: $C = C_0 + C_1 u$, gdzie C_0 i C_1 są stałymi dodatnimi. Indukcyjność L jest także stałą dodatnią. Równania /1.2/ przepisujemy w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} + p\alpha u = 0, \qquad /2.1/$$
$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x} + p\beta i = 0,$$

gdzie $p>0$ jest dużym parametrem.

Linia transmisyjna z nieliniową pojemnością jest stosowana w technice jako element kształtujący impulsy elektryczne. Dla dużych wartości parametru p linia opisana równaniami /2.1/ jest silnie dyspersyjna. Można to zrealizować przez zwiększenie oporności R i upływności G przy stałym L i C.

Zastosujemy metodę fal biegnących dla równań hiperbolicznych dyspesywnych

$$A^K_{ik}(u,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_K} + pB_i(u,x) = 0, \qquad /2.2/$$

która została opisana szczegółowo w pracach [2] - [4]. W tych równaniach $K=0,1,\dots,m$ oraz $i,k=1,\dots,n$, przy czym $A^0_{ik} = I_{ik}$, $x_0 = t$. Dla $(u_k) = (u,i)$ układ /2.1/ przybiera postać /2.2/ ze współczynnikami

$$(A^1_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}, \qquad (B_i) = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \beta u_2 \end{bmatrix}. \qquad /2.3/$$

Skonstruujemy rozwiązanie asymptotyczne równań /2.1/ w postaci rozwinięcia

$$u_i(x) = u^0_i(x) + \sum_{\nu=1}^{N} g^\nu_i(x) S_\nu(\varphi) + R_i(x) \qquad /2.4/$$

z funkcjami $S_\nu(\varphi) = (ip)^{-\nu}\exp ip\varphi$. Będziemy poszukiwać funkcji fazowej $\varphi = \varphi(t,x)$ i współczynników rozwinięcia $g^\nu_i(t,x)$

przy założeniu, że $u_i^0(t,x) \equiv 0$. Używamy oznaczenia $\partial\varphi/\partial x_k = k_k$, przy czym $k_0 = -\omega$.

Dla obliczenia macierzy dyspersyjnej $\mathcal{A}_{ik} = k_k A_{ik}^k - iB_i^k$ potrzebna jest pochodna $B_i^k = \partial B_i/\partial u_k$. Mamy

/2.5/
$$(B_i^k) = \begin{bmatrix} \alpha C_0/C & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

a stąd

/2.6/
$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega - i\alpha C_0/C & k/C \\ k/L & -\omega - i\beta \end{bmatrix}$$

Dla $u_i = u_i^0$ otrzymujemy

/2.7/
$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega - i\alpha & k/C \\ k/L & -\omega - i\beta \end{bmatrix}$$

Żądanie znikania wyznacznika

/2.8/
$$Q(-\omega,k) = \det(\mathcal{A}_{ik}) = \omega^2 + i(\alpha+\beta)\omega - \alpha\beta - c^2k^2$$

prowadzi do równania dyspersyjnego

/2.9/
$$Q(-\omega,k) = 0.$$

Dwa pierwiastki tego równania

/2.10/
$$\omega_1 = -\frac{1}{2}i(\alpha+\beta) + \sqrt{\Delta}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}i(\alpha+\beta) - \sqrt{\Delta}$$

gdzie $\Delta = c^2k^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$, odpowiadają falom propagującym się w dwu kierunkach wzdłuż linii transmisyjnej; $c = (LC)^{-1/2}$ jest prędkością charakterystyczną dla układu równań /2.1/.

W szczególnym przypadku gdy $\alpha = \beta$ fale propagują się bez dyspersji. Istotnie, hamiltonian dla obydwu rodzajów fal

/2.11/ $$\mathcal{H}(k) = -\frac{1}{2} i(\alpha+\beta) \pm \sqrt{\Delta}$$

przybiera wówczas postać

/2.12/ $$\mathcal{H}(k) = -i\alpha \pm ck,$$

a więc jest liniowy względem zmiennej k.

Układ równań /2.1/ jest w ogólności niekonserwatywny, gdyż $\mathrm{Im}\,\mathcal{H} \neq 0$. Jak pokazano w pracy [5], procedura fali biegnącej jest poprawna pod warunkiem, że

/2.13/ $$\mathrm{Im}\,\mathcal{H} = \mathrm{const} \quad i \quad \mathrm{Im}\,\mathcal{H} \leq 0.$$

Możliwe są dwa przypadki:

/i/ Linia transmisyjna bez tłumienia. Niech $\alpha > 0$ i $\beta = -\alpha$. Wtedy

/2.14/ $$\mathcal{H}(k) = \pm (c^2k^2 - \alpha^2)^{1/2}.$$

Hamiltonian jest rzeczywisty dla $k^2 \geq \alpha^2/c^2$. Ujemne β można zrealizować w praktyce przez zastosowanie w linii transmisyjnej ujemnej oporności R.

/ii/ Linia transmisyjna z tłumieniem. Niech $\alpha+\beta > 0$. Wtedy część urojona hamiltonianu jest ujemna dla $k^2 \geq (\alpha-\beta)^2/4c^2$. Ten przypadek obejmuje linie transmisyjne z dodatnimi R i G.

3. LINIA TRANSMISYJNA BEZ TŁUMIENIA

Pierwiastkom równania dyspersyjnego

/3.1/ $$\omega_1 = (c^2k^2-\alpha^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = -(c^2k^2-\alpha^2)^{1/2}$$

odpowiadają następujące wektory zerowe lewe i prawe macierzy dyspersyjnej /2.7/:

/3.2/ $$(l_i) = [k, L(\omega_1+i\alpha)], \quad (r_i) = [k, C(\omega_1+i\alpha)],$$

oraz

/3.3/ $$(l_i) = [k, L(\omega_2+i\alpha)], \quad (r_i) = [k, C(\omega_2+i\alpha)].$$

Łatwo sprawdzić, że wektory odpowiadające różnym pierwiastkom są ortogonalne, tj. że $l^1_k r^2_k = 0$ i $l^2_k r^1_k = 0$ / l^1_k, r^1_k odpowiadają pierwiastkowi ω_1, a l^2_k, r^2_k odpowiadają pierwiastkowi ω_2 /.

Przechodzimy do obliczenia promieni i funkcji fazowych. Hamiltonian ma postać /2.14/, zatem prędkość grupowa jest dana formułą

/3.4/ $$\gamma = \partial\mathcal{H}/\partial k = \pm\, c^2k\,(c^2k^2-\alpha^2)^{-1/2}$$

ze znakiem górnym dla ω_1 i dolnym dla ω_2. Rozwiązując równania kanoniczne Hamiltona

/3.5/ $$\dot{x} = \gamma, \qquad \dot{k} = 0$$

otrzymujemy wstęgi promieniowe

/3.6/ $$x = \gamma t + x^0, \quad k = k^0,$$

gdzie x° i k° są wartościami początkowymi funkcji $x(t)$ i $k(t)$ dla $t=t^\circ=0$. Oprócz funkcji $k(t)$, stałe na promieniach są także $\omega=\mathcal{H}(k)$, $\gamma(k)$ oraz lagrangian $\mathcal{L}(k)=-\omega+k\gamma$, tj.

/3.7/ $$\mathcal{L}(k)=\pm\alpha^2(c^2k^2-\alpha^2)^{-1/2}.$$

Stąd funkcja fazowa określona jest na promieniu /3.6/ przez całkę

/3.8/ $$\varphi(t)=\int_0^t \mathcal{L}\,ds+\varphi^\circ(x^\circ)=\mathcal{L}t+\varphi^\circ(x^\circ),$$

przy czym $\varphi^\circ(x)=\varphi(0,x)$.

Niech $k^\circ(x^\circ)$ oznacza wartość początkową funkcji $k(t)$ na promieniu o wartości początkowej x°. Funkcja $k^\circ(x^\circ)$ jest związana z wartością początkową $\varphi^\circ(x^\circ)$:

/3.9/ $$k^\circ(x^\circ)=d\varphi^\circ(x^\circ)/dx^\circ.$$

Wziąwszy to pod uwagę stwierdzamy, że w pewnym otoczeniu $t=0$ dla $t>0$ funkcja fazowa jest dana formułą /3.8/. Istotnie, podstawiając $x^\circ=x-\gamma t$ otrzymujemy

/3.10/ $$\varphi(t,x)=\mathcal{L}(k)t+\varphi^\circ(x-\gamma t)$$

z funkcją $k(t,x)$ zdefiniowaną w sposób uwikłany przez zależność

/3.11/ $$k=k^\circ(x-\gamma(k)t),$$

gdzie $k^\circ(x^\circ)$ jest wyliczone ze związku /3.9/.

Następnym krokiem jest rozwiązanie równań transportu. Ograniczymy się do obliczenia pierwszego współczynnika rozwinięcia fali biegnącej /2.4/

/3.12/ $$g_i^1(t,x) = \sigma(t,x) r_i \ .$$

W tym celu rozwiążemy pierwsze równanie transportu

/3.13/ $$\dot{\sigma} + a e^{i p \varphi} \sigma^2 + b\sigma = 0$$

na promieniach, a następnie znajdziemy funkcję $\sigma(t,x)$ w pewnym otoczeniu $t=0$ dla $t>0$

Współczynnik a w równaniu /3.13/ można znaleźć posługując się relacją

/3.14/ $$l_i r_i a = l_i \bar{\mathcal{A}}_{il}^k r_l r_k \ ,$$

gdzie $\bar{\mathcal{A}}_{il}^k = \partial \bar{\mathcal{A}}_{il} / \partial u_k$ dla $u_k = u_k^\circ$; $\bar{\mathcal{A}}_{il} = \mathcal{A}_{il} + \omega I_{il}$, czyli

/3.15/ $$(\bar{\mathcal{A}}_{il}) = \begin{bmatrix} -i\alpha C_0/C & k/C \\ k/L & -i\beta \end{bmatrix}$$

Różniczkując tę macierz względem u_k i kładąc $u_k = 0$ otrzymujemy

/3.16/ $$(\bar{\mathcal{A}}_{il}^1) = \begin{bmatrix} i2GC_1/C_0^2 & -kC_1/C_0^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz $\bar{\mathcal{A}}_{il}^2 = 0$. Korzystając z /3.2/ i /3.3/ mamy

/3.17/ $$l_i \bar{\mathcal{A}}_{il}^k r_l r_k = k^3 C_1 C_0^{-1}(-\omega + i\alpha_0)$$

oraz

/3.18/ $$l_i r_i = LC_0 [c_0^2 k^2 + (\omega + i\alpha_0)^2]$$

/ $\alpha_0 = G/C_0$, $c_0^2 = 1/LC_0$ /. Stąd po odpowiednich przekształceniach dostajemy

/3.19/ $$a = \frac{1}{2} C_1 C_0^{-1} k^2 \gamma \frac{-\mathcal{H}(k) + i\alpha_0}{\mathcal{H}(k) + i\alpha_0}$$

Przy braku nieliniowości, tj. dla $C_1 = 0$, współczynnik a jest równy zero. $\mathcal{H}(k)$ i $\gamma(k)$ występujące w powyższym wyrażeniu są dane przez /2.14/ i /3.4/.

Współczynnik b określony jest relacją

/3.20/ $$l_i r_i b = l_i D_{ik} r_k$$

dla $u_k = u_k^0$, gdzie $D_{ik} = I_{ik} \partial/\partial t + A_{ik}^1 \partial/\partial x$ /zależność od zmiennych t i x pojawia się ze względu na funkcję $k(t,x)$, od której są zależne wektory zerowe/. Otrzymujemy dla obydwu rodzajów fal

/3.21/ $$l_i D_{ik} r_k = k\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + (\omega + i\alpha)\left(LC_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x}\right).$$

Funkcje ω i k są stałe na promieniu, tj. $\dot{\omega} = 0$, $\dot{k} = 0$. Stąd

/3.22/ $$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \gamma \frac{\partial k}{\partial x} = 0.$$

Biorąc to pod uwagę, a także korzystając z równości

/3.23/ $$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = \gamma \frac{\partial k}{\partial x},$$

dostajemy

/3.24/ $$l_i D_{ik} r_k = (\omega + i\alpha)(1 - LC_0 \gamma^2) \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Po podzieleniu tego wyrażenia przez /3.18/ mamy ostatecznie

/3.25/ $$b = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{k}(1-\gamma^2/c^2)\frac{\partial k}{\partial x} .$$

Przy braku dyspersji, kiedy $\alpha = 0$, współczynnik b jest równy zero, gdyż wtedy $\gamma = c$. Pochodną $\partial k/\partial x$ można sprowadzić do postaci

/3.26/ $$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{dk^0}{dx^0}\left(1+\frac{dk^0}{dx^0}\frac{\partial \gamma}{\partial x}t\right)^{-1},$$

gdzie dk^0/dx^0 jest pochodną funkcji /3.9/. Widać, że $b = 0$ także wtedy, gdy linia fazowa $\varphi(t,x) = 0$ jest w chwili początkowej linią prostą, tj. gdy $\varphi^0(x^0)$ jest funkcją liniową /patrz praca [3]/.

Przechodzimy do rozwiązania równania transportu /3.13/ na promieniach. Współczynniki a i b są stałe na promieniach, ale funkcja fazowa $\varphi(t,x)$ zależy liniowo od t /formuła /3.8//. Podstawiając $\sigma = 1/\varrho$ do /3.13/ otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne

/3.27/ $$\dot{\varrho} - b\varrho - ae^{ip\varphi} = 0,$$

którego rozwiązanie łatwo znajdujemy metodą uzmiennienia stałej z rozwiązania równania jednorodnego. W ten sposób

/3.28/ $$\sigma(t) = \left[\lambda e^{ip\varphi} + \left(\frac{1}{\sigma^0} - \lambda e^{ip\varphi^0}\right)e^{bt}\right]^{-1}$$

na promieniu o wartości początkowej x^0 ; $\sigma^0 = \sigma^0(x^0)$ jest wartością początkową funkcji $\sigma(t)$, $\lambda = a(-b+ip\mathcal{L})^{-1}$.

Funkcję $\sigma(t,x)$ określoną w pewnym otoczeniu osi x dla $t > 0$ otrzymuje się z funkcji /3.28/ przez podstawienie $x^0 = x - \gamma t$ do wartości początkowych $\sigma^0(x^0)$ i $\varphi^0(x^0)$.

Rozwiązanie asymptotyczne równań /2.1/ dla $p \to \infty$ z dokładnością do wyrazów rzędu $1/p^2$ ma postać

/3.29/
$$u_1 \sim \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} k\sigma(t,x),$$
$$u_2 \sim \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} C_0(\omega + i\alpha_0)\sigma(t,x)$$

dla obydwu rodzajów fal.

4. LINIA TRANSMISYJNA Z TŁUMIENIEM

Rozpatrzymy drugi z przypadków wymienionych w punkcie 2, to jest ten, kiedy $\alpha+\beta > 0$. Pierwiastkom równania dyspersyjnego, które są dane przez /2.10/, odpowiadają wektory zerowe /3.2/ i /3.3/. Hamiltonian ma postać /2.11/, stąd prędkość grupowa

/4.1/
$$\gamma = \pm c^2 k\left[c^2k^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2\right]^{-1/2}$$

ze znakiem górnym dla ω_1 i dolnym dla ω_2. Rozwiązanie równań kanonicznych Hamiltona /3.5/ jest postaci /3.6/.

Ponieważ lagrangian

/4.2/
$$\mathcal{L}(k) = \frac{1}{2} i(\alpha+\beta) \pm \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2\left[c^2k^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2\right]^{-1/2}$$

jest stały na promieniach, to funkcja fazowa jest określona na promieniach formułą /3.8/, a w otoczeniu osi x dla $t > 0$ formułą /3.10/.

Współczynniki a i b równania transportu mają taką samą postać jak poprzednio, tj. /3.19/ i /3.25/, tylko z innymi γ i $\mathcal{H}$. Podobnie jest z rozwiązaniem równania transportu postaci /3.28/ i wreszcie z rozwiązaniem asymptotycznym równań linii transmisyjnej, które jest postaci /3.29/.

5. PRZYKŁAD

Założymy, że wartość początkowa funkcji fazowej zależy liniowo od x^0 : $\varphi^0(x^0) = k^0x^0$. Z równości /3.9/ wynika, że $k^0(x^0) =$

const= k° , a z /3.11/ wynika, że $k(t,x)$ =const= k° . Dla funkcji fazowej mamy

/5.1/ $$\varphi(t,x) = \mathcal{L}(k)t + k^\circ x^\circ = (-\omega^\circ + \gamma k^\circ)t + k^\circ(x-\gamma t) =$$
$$= -\omega^\circ t + k^\circ x ,$$

gdzie $\omega^\circ = \mathcal{H}(k^\circ)$. Ponieważ $b=0$, to /3.28/ daje

/5.2/ $$\sigma(t,x) = (\lambda e^{-ip\omega^\circ t} + \frac{1}{\sigma^\circ})^{-1} ,$$

a $\lambda = a/ip\mathcal{L}$.

Rozważymy dane początkowe /dla równań /2.1// postaci

/5.3/ $$u_i(0,x) = \frac{1}{ip}\sigma(0,x)r_i e^{ip\varphi^\circ}$$

/patrz praca [4]/. Niech $\sigma^\circ(x^\circ)$=const. Wtedy pierwszy składnik sumy w /5.2/ jest dc pominięcia względem drugiego dla $p \to \infty$ /dla rzeczywistego ω° / i $\sigma(t,x) = \sigma^\circ$. Zatem /3.29/ daje

/5.4/ $$u_1 \sim \frac{1}{ip} k^\circ \sigma^\circ e^{-ip\omega^\circ t + ipk^\circ x} ,$$
$$u_2 \sim \frac{1}{ip} C_0(\omega^\circ + i\alpha_0)\sigma^\circ e^{-ip\omega^\circ t + ipk^\circ x} .$$

Jeśli linia transmisyjna jest z tłumieniem, to pierwszy składnik sumy w /5.2/ maleje wykładniczo dla $p \to \infty$ i jest zawsze do pominięcia.

6. KONKLUZJA

Rozwiązanie pierwszego równania transportu w postaci ogólnej /3.28/, jak również powyższy przykład, pokazują, że efekty nieliniowe dają przyczynki do wyrazów wyższego rzędu w rozwinięciu fali biegnącej.

LITERATURA

[1] R. COURANT, D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, Interscience Publishers, 1962. Rozdz. III, §3.

[2] W. LAPRUS, Metoda fal biegnących dla równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT, 3/1981.

[3] W. LAPRUS, Rozwiązania asymptotyczne równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT, 27/1982.

[4] W. LAPRUS, Rozwiązania nieliniowych równań teorii magnetojonowej, Prace IPPT, 20/1983.

[5] W. LAPRUS, Asymptotyczne rozwiązania równań MHD ze skończoną przewodnością, Prace IPPT, 12/1984.

STRESZCZENIE

Zbadano dwa typy linii transmisyjnej: bez tłumienia /z ujemną opornością elektryczną/ i z tłumieniem. Dla dużej dyspersji znaleziono rozwiązania asymptotyczne układu równań opisujących fale napięcia i prądu.