

12 / 1985

**Halina Kudrewicz
Stanisław Przeździecki**

**FALE POWIERZCHNIOWE
WZBUDZONE NA PÓLPLASZCZYŹNIE
JEDNOSTRONNIE IMPEDANCYJNEJ**

12/1985.

P. 269



WARSZAWA 1985

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1984 r.



56937



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark. wyd. 1,2 Ark. druk. 1,75

Oddano do drukarni w marcu 1985 r.

Nr zamówienia 166/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Halina Kudrewicz
Stanisław Przeździecki
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

FALE POWIERZCHNIOWE WZBUDZONE NA
PÓŁPŁASZCZYŹNIE JEDNOSTRONNIE
IMPEDANCYJNEJ

1. Wstęp

Prowadzenie fal powierzchniowych przez struktury impedancyjne jest zjawiskiem dobrze znanym w technice prowadzenia fal elektromagnetycznych. Dyfrakcja fali płaskiej na impedancyjnej półpłaszczyźnie stanowi kanoniczny problem przydatny między innymi do badania możliwości wzbudzenia fali powierzchniowej na płaskim ekranie i zależności jej parametrów od właściwości materiału pokrywającego ekran.

Istnieją dwie metody rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na impedancyjnej półpłaszczyźnie asymetrycznej /tzn. półpłaszczyźnie o różnych impedancjach po obu jej stronach/: metoda Maliużyńca opracowana dla klina /1958/ i metoda Wienera-Hopfa-Hilberta /WHH/ opracowana dla rozwiązania układu równań Wienera-Hopfa /Hurd 1976/.

Rozwiązanie Maliużyńca wykorzystali m.innymi autorzy pracy [3], dostosowując je do obliczeń numerycznych wykonanych dla kombinacji impedancji nie prowadzących, a także prowadzących fale powierzchniowe. Metodę WHH eksploatowali autorzy pracy [5]. Okazało się, że jest ona szczególnie dogodna dla prześledzenia zależności rozwiązania od impedancji każdej ze stron.

Prezentowana praca jest kontynuacją [5] i dotyczy przypadku, gdy jedna ze stron półpłaszczyzny jest doskonale przewodząca. Znalezione rozwiązanie. Przedyskutowano możliwość wzbudzenia fali powierzchniowej i zależność jej parametrów od impedancji półpłaszczyzny.

2. Sformułowanie zagadnienia

Na półpłaszczyznę $z = 0, x \geq 0$ pada fala płaska

$$/1/ \quad \psi_i = \exp[-ik(x \cos \phi_0 + z \sin \phi_0) - i\omega t]$$

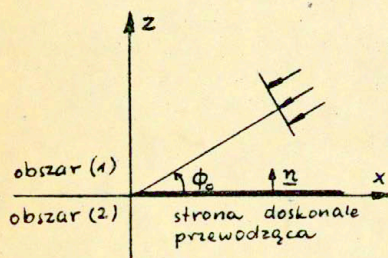
pod kątem ϕ_0 , prostopadłe do krawędzi.

Należy znaleźć pole E, H przyjmując, że jedna strona półpłaszczyzny jest doskonale przewodząca, druga - impedancyjna, scharakteryzowana przez warunek Leontowicza

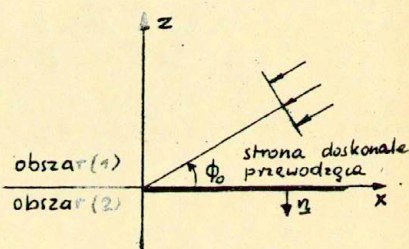
$$/2/ \quad \underline{n} \times \underline{E} = -Z_p [\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{H})]$$

gdzie \underline{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do półpłaszczyzny i skierowany do otaczającego ośrodka, Rys 1A, 1B,

$Z_p = \sqrt{\frac{\mu_p}{\epsilon_p}}$ oznacza impedancję powierzchniową półpłaszczyzny.



Rys.1A.



Rys.1B.

Rozróżnimy dwa przypadki położenia półpłaszczyzny względem fali padającej.

A. Strona impedancyjna półpłaszczyzny jest oświetlona,

$0 < \phi_0 < \pi$, Rys.1A.

B. Doskonale przewodząca strona półpłaszczyzny jest oświetlona, $0 < \phi_0 < \pi$, Rys 1B.

Ponieważ fala pada prostopadle do krawędzi, problem jest skalarny i sprowadza się do rozwiązania równania Helmholtza

$$/3/ \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

z warunkami brzegowymi.

Dla polaryzacji E, gdy $\underline{E}^i = (0, E_y^i, 0)$ mamy $\underline{E} = (0, E_y, 0)$.
Wtedy $\psi = E_y$, a warunek brzegowy ma postać

$$/4A/ \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial z} + i \frac{k}{\eta_1} \psi = 0 & \text{dla } z = 0_+, x > 0 \\ \psi = 0 & \text{dla } z = 0_-, x > 0 \end{cases}$$

$$/4B/ \quad \begin{cases} \psi = 0 & \text{dla } z = 0_+, x > 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} - i \frac{k}{\eta_2} \psi = 0 & \text{dla } z = 0_-, x > 0, \end{cases}$$

gdzie η jest liczbą zespoloną i oznacza współczynnik impedancji względnej $\eta = \frac{Z_p}{Z}$, Z jest impedancją ośrodka.

Dla wygody rozróżniania dalszych wzorów, współczynnik impedancji η oznaczony jest indeksem 1 dla przypadku A, a indeksem 2 dla przypadku B.

Dla polaryzacji H, gdzie $\underline{H}^i = (0, H_y^i, 0)$ mamy $\underline{H} = (0, H_y, 0)$.
Wtedy $\psi = H_y$ i warunek brzegowy ma postać

$$/5A/ \quad \begin{cases} \psi = i \frac{1}{\eta_1 k} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \text{dla } z = 0_+, x > 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & \text{dla } z = 0_-, x > 0 \end{cases}$$

$$/5B/ \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & \text{dla } z = 0_+, x > 0 \\ \psi = i \frac{1}{\eta_2 k} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \text{dla } z = 0_-, x > 0 \end{cases}$$

3. Rozwiązanie dla polaryzacji E - problem TM.

Rozwiązania poszukujemy w postaci sumy pola padającego V_i i ugiętego V_s

$$/6/ \quad V = V_i + V_s .$$

Pole ugięte spełnia równanie Helmholtza

$$/7/ \quad \nabla^2 V_s + k^2 V_s = 0$$

z niejednorodnymi warunkami brzegowymi

$$/8A/ \quad \left\{ \begin{array}{l} V_s - i \frac{\eta_1}{k} \frac{\partial V_s}{\partial z} = (-1 + \eta_1 \sin \phi_0) e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_+, x>0 \\ V_s = -e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_-, x>0 \end{array} \right.$$

$$/8B/ \quad \left\{ \begin{array}{l} V_s = -e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_+, x>0 \\ V_s + i \frac{\eta_2}{k} \frac{\partial V_s}{\partial z} = -(1 + \eta_2 \sin \phi_0) e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_-, x>0. \end{array} \right.$$

oraz z warunkami ciągłości na granicy obszarów /1/ i /2/ dla $x < 0$, Rys 1A, 1B.

$$/9/ \quad \left\{ \begin{array}{l} V_s^{(1)} = V_s^{(2)} \quad \text{dla } z=0, x < 0 \\ \frac{\partial V_s^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial V_s^{(2)}}{\partial z} \quad \text{dla } z=0, x < 0. \end{array} \right.$$

Rozwiązania szukamy w klasie funkcji spełniających warunków w ostrzu

$$/10/ \quad V = C + O(\varrho^\tau) \quad \text{dla } \varrho \rightarrow 0$$

gdzie $\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}$, C jest stałą dowolną, $\tau > 0$.

Ponadto żądamy aby dla stratnego ośrodka: $\text{Re}k > 0$, $\text{Im}k > 0$
i stratnej impedancji półprzestrzyny: $\text{Re} \eta > 0$
pole ugięte, po odjęciu pola odbitego, dążyło do zera jak
 $e^{ik\eta}$ dla $\eta \rightarrow \infty$.

4. Metoda rozwiązania

Rozwiązania poszukujemy metodą Wienera-Hopfa-Hilberta
WHH, /2/, /4/, /5/. Praca obecna jest kontynuacją pracy /5/,
dlatego będziemy się odwoływać do wyprowadzonych tam wzorów.

4.1. Postać rozwiązania

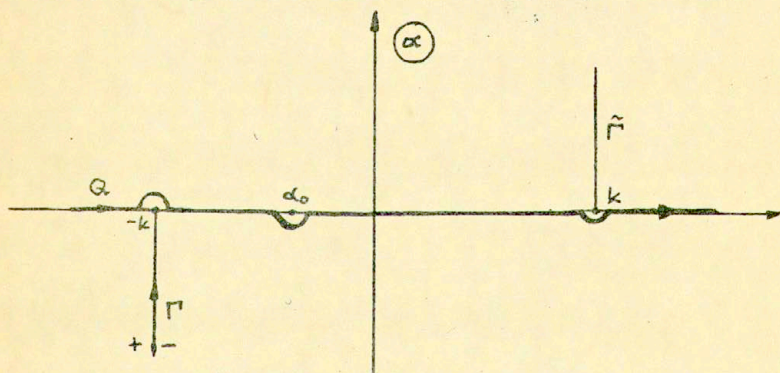
Postulujemy rozwiązanie w postaci całkowej

$$\begin{aligned} /11/ \quad V_s^{(0)} &= \int_Q A(\alpha) e^{i(\alpha x + \gamma z)} d\alpha && \text{dla } z > 0 \\ \psi_s^{(k)} &= \int_Q B(\alpha) e^{i(\alpha x - \gamma z)} d\alpha && \text{dla } z < 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$/12/ \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

Linia Q przebiega na płaszczyźnie α z cięciem wzdłuż pół-
prostych Γ i $\tilde{\Gamma}$, jak na Rys. 2.



Rys. 2.

4.2. Wyznaczenie funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ przez funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$
lub $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$

Podstawienie rozwiązania /11/ do warunków brzegowych /8A, 9/, /8B, 9/ tworzy w każdym z przypadków A, B/ cztery równania całkowe. Rozwiązanie każdego z równań wyraża się przez jedną z funkcji $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$, $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$.

Funkcje $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ są analityczne w obszarze powyżej linii Q i w pewnym jej otoczeniu.

Funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ są analityczne w obszarze poniżej linii Q i w pewnym jej otoczeniu.

Jednocześnie otrzymuje się związki między poszukiwanymi funkcjami $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ i nowymi funkcjami.

Związki te mają postać

$$/13/ \begin{cases} A(\alpha) = \frac{1}{2} \left[L_1(\alpha) + \frac{1}{8} L_2(\alpha) \right] \\ B(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} L_2(\alpha) - L_1(\alpha) \right] \end{cases}$$

$$/14A/ \begin{cases} A(\alpha) = \frac{1}{S_1 + 8} \left[U_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{S_1 - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \right] \\ B(\alpha) = U_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \end{cases}$$

$$/14B/ \begin{cases} A(\alpha) = U_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \\ B(\alpha) = \frac{1}{S_2 + 8} \left[U_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{S_2 + \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \right] \end{cases}$$

gdzie oznaczono

$$/15/ \quad \alpha_0 = -k \cos \phi_0$$

$$/16/ \quad S_j = \frac{k}{\eta_j}, \quad j = 1, 2.$$

W ten sposób rozwiązanie /11/ zostaje określone za pomocą funkcji $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ /lub $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ /.

4.3. Równania Wienera-Hopfa

Funkcje $U(\alpha)$, $L(\alpha)$ otrzymuje się z układu równań Wienera-Hopfa, który powstaje przez wyrugowanie funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ ze związków /13, 14A/ i odpowiednio /13, 14B/.

Układ równań Wienera-Hopfa ma postać

$$/17/ \quad G(\alpha) L(\alpha) = U(\alpha) + (\alpha - \alpha_0)^{-1} P$$

gdzie

$$/18/ \quad L(\alpha) = \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix} \quad U(\alpha) = \begin{bmatrix} U_1(\alpha) \\ U_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$/19A/ \quad G(\alpha) = \begin{bmatrix} \gamma + s_1 & \frac{\gamma + s_1}{\delta} \\ -1 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}$$

$$/19B/ \quad G(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\delta} \\ -\gamma - s_2 & \frac{\gamma + s_2}{\delta} \end{bmatrix}$$

$$/20A/ \quad P = -\frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} s_1 - \gamma_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$/20B/ \quad P = -\frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} 1 \\ s_2 + \gamma_0 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$/21/ \quad \gamma_0 = \sqrt{k^2 - \alpha_0^2} = k \sin \phi_0$$

Dowodzi się następujące twierdzenie [4], [5]:

Jeżeli macierz $G(\alpha)$ daje się przedstawić w postaci iloczynu

$$/22/ \quad G(\alpha) = G_V(\alpha) G_L(\alpha)$$

gdzie macierz $G_V(\alpha)$ jest analityczna i nieosobliwa w obszarze powyżej linii Q i w pewnym jej otoczeniu, a macierz $G_L(\alpha)$ jest analityczna i nieosobliwa w obszarze poniżej linii Q i w pewnym jej otoczeniu, to każde rozwiązanie układu /17/

wyraża się wzorem

$$L(\alpha) = \frac{G_L^{-1}(\alpha) G_V^{-1}(\alpha_0) P}{\alpha - \alpha_0} + G_L^{-1}(\alpha) C(\alpha)$$

/23/

$$U(\alpha) = \frac{G_V(\alpha) G_V^{-1}(\alpha_0) - I}{\alpha - \alpha_0} P + G_V(\alpha) C(\alpha)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, C(α) - całkowitą funkcją wektorową.

4.4. Metoda Wienera-Hopfa-Hilberta /WHH/

Metoda WHH polega na skonstruowaniu macierzy $G_V(\alpha)$ i $G_L(\alpha)$ przy pomocy funkcji analitycznych rozwiązujących problem Hilberta na linii Γ lub $\tilde{\Gamma}$, /ogólnie na linii cięcia wybranej na płaszczyźnie α /.

Problem Hilberta powstaje z przedłużenia równania Wienera-Hopfa danego w otoczeniu linii Q na całą płaszczyznę α z cięciem.

Dla faktoryzacji macierzy $G(\alpha)$ wystarczy przedłużyć jednorodny układ równań Wienera-Hopfa

$$/24/ \quad G l = u$$

gdzie $G = G(\alpha)$ jest macierzą określoną wzorem /19A/ /19B/,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(\alpha) \\ u_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(\alpha) \\ l_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

Przedłużenia dokonamy na obszar $\alpha \notin \Gamma$.

Wartości funkcji z lewej strony skierowanej linii Γ jak na Rys. 2 oznaczymy przez $/+ /$, wartości funkcji z prawej strony linii Γ przez $/- /$. Otrzymamy

$$/25/ \quad G_+ l_+ = u_+$$

$$/26/ \quad G_- l_- = u_-$$

Ponieważ $l_+ = l_-$ na linii Γ , bo funkcja l jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie, to z /25/, /26/ wynika wektorowe równanie Hilberta

$$/27/ \quad H u_- = u_+$$

gdzie

$$/28/ \quad H = G_+ G_-^{-1}$$

Przyjmując oznaczenie $\delta_+ = \delta$, $\delta_- = -\delta$ otrzymamy dla macierzy /19A/, /19B/ odpowiednio

$$/29A/ \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -\delta - s_1 \\ \frac{1}{\delta - s_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$/29B/ \quad H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\delta - s_2} \\ -\delta - s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

W żadnym z przypadków /29A, /29B/ układ /27/ nie jest rozseparowany względem składowych u_1, u_2 wektora u , ale daje się rozseparować względem iloczynu i ilorazu tych składowych.

Otrzymujemy

$$/30A/ \quad (u_1 u_2)_+ = \frac{s_1 + \delta}{s_1 - \delta} (u_1 u_2)_-$$

$$/31A/ \quad \left(\frac{u_1}{u_2} \right)_+ \left(\frac{u_1}{u_2} \right)_- = (s_1 + \delta)(s_1 - \delta)$$

$$/30B/ \quad (u_1 u_2)_+ = \frac{s_2 + \delta}{s_2 - \delta} (u_1 u_2)_-$$

$$/31B/ \quad \left(\frac{u_1}{u_2} \right)_+ \left(\frac{u_1}{u_2} \right)_- = \frac{1}{(s_2 + \delta)(s_2 - \delta)}$$

Przy rozwiązaniu wykorzystamy podobieństwo równań /30-31/ do zbadanych już równań występujących w dyfrakcji na asymetrycznej półpłaszczyźnie [4], [5].

Równanie /30A,B/ przedstawia typowy problem Hilberta na krzywej otwartej. Po zlogarytmowaniu stanowi on problem znalezienia analitycznej funkcji przy zadanym skoku jej wartości na linii

$$/32/ \quad \ln(u_1 u_2)_+ - \ln(u_1 u_2)_- = \ln \frac{s_j + \delta}{s_j - \delta}, \quad j=1,2$$

Rozwiązaniem problemu znalezienia analitycznej funkcji $\phi(\omega)$ doznającej przy przejściu przez linię L skok $\phi_+(t) - \phi_-(t) = \varphi(t)$

/w najprostszym przypadku zerowego indeksu zagadnienia/ jest całka Cauchy'ego

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha} d\tau$$

Bez dodatkowych założeń co do klasy poszukiwanej funkcji rozwiązanie jest niejednoznaczne [7]. W przypadku /30AB/

całka: $\int_{\Gamma} \ln \frac{S_j + \delta(t)}{S_j - \delta(t)} \frac{dt}{t - \alpha}$ nie istnieje,

gdyż $\frac{S_j + \sqrt{k^2 - t^2}}{S_j - \sqrt{k^2 - t^2}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -1$, natomiast istnieje $\int_{\Gamma} \ln \frac{\delta(t) + S_j}{\delta(t) - S_j} \frac{dt}{t - \alpha}$.

Wprowadzimy zatem nową zmienną

$$/33/ \quad w(\alpha) = u_1 u_2 \sqrt{k + \alpha}$$

Z /30/, /33/ otrzymujemy równanie

$$/34/ \quad w_+(\alpha) = \frac{\delta + S_j}{\delta - S_j} w_-(\alpha) \quad , \quad j = 1, 2$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie

$$/35/ \quad w(\alpha) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\delta(t) + S_j}{\delta(t) - S_j} \frac{dt}{t - \alpha} \right\} \quad , \quad j = 1, 2$$

i ostatecznie

$$/36/ \quad u_1 u_2 = \frac{1}{\sqrt{k + \alpha}} w(\alpha)$$

Bardziej ogólnie, rozwiązanie równania /30/ ma postać

$$/37/ \quad u_1 u_2 = (k + \alpha)^{n - \frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\delta(t) + S_j}{\delta(t) - S_j} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

Liczba n zostanie wyznaczona przez żądanie odpowiedniego zachowania funkcji $u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$ /inaczej funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ / w nieskończoności dla spełnienia przez funkcję ψ_j daną wzorem /11/ warunku w ostrzu /10/.

Funkcja $w(\alpha)$ jest znana jako czynnik faktoryzacji funkcji

$$/38/ \quad K(\alpha) = \frac{S_j + \delta}{\delta}$$

w otoczeniu linii Q ;

$$/39/ \quad K_V(\alpha) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln \frac{S_1 + \delta(t)}{\delta(t)} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}.$$

Zachodzi równość $W(\alpha) = K_V(\alpha)$.

Funkcja /35/ jest przedłużeniem analitycznym funkcji /39/ na całą płaszczyznę $\alpha \notin \Gamma$ [4], [5].

Całka /35/ nie wyraża się przez funkcje elementarne. Zna-ne są jej różne postaci używane do obliczeń numerycznych. Senior [6] sprowadził ją do całki występującej w rozwiązaniu Maliużyńca. W tej pracy będziemy ją stosowali bez żadnych przekształceń, korzystając z jej następujących własności: jest to funkcja analityczna i bez zer dla $\alpha \notin \Gamma$, $K_V(\alpha) \rightarrow 1$ dla $\alpha \rightarrow \infty$.

Przejdźmy do równania /31A/. Tak jak w analogicznym proble-mie dla asymetrycznej półpłaszczyzny, wprowadzamy nową zmienną

$$/40/ \quad V(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)$$

z /31A/ i /40/ otrzymujemy

$$\text{Skąd} \quad V_+(\alpha) - V_-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln (S_1 + \delta)(S_1 - \delta)$$

$$/41/ \quad V(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln [S_1 + \delta(t)][S_1 - \delta(t)] \frac{dt}{t-\alpha}$$

$$\text{Zatem} \quad \frac{u_1}{u_2} = \exp \{ \sqrt{k+\alpha} V(\alpha) \}$$

Zgodnie z symboliką przyjętą w pracy [4], [5] wprowadzimy oznaczenie

$$/42/ \quad g_{10}^2 = \exp \{ \sqrt{k+\alpha} V(\alpha) \}$$

Wtedy

$$/43/ \quad \frac{u_1}{u_2} = g_{10}^2$$

Funkcji /42/ nie udaje się wyrazić przez funkcje elementar-ne, ale daje się przedstawić w postaci dogodnej do analizy jakościowego charakteru rozwiązania.

Przedstawimy ją jako iloczyn, w którym jeden z czynników za-leżny od zmiennej α i od impedancji η /lub s / jest znaną

funkcją występującą w zagadnieniu dyfrakcji na półpłaszczyźnie asymetrycznej, zaś pozostałe czynniki nie zależą od impedancji.

Zauważmy, że jeżeli wprowadzimy funkcję

$$/44/ \quad \tilde{N}(\alpha, s_1) = (s_1 + \gamma) \sqrt{k + \alpha}$$

i dokonamy jej faktoryzacji w otoczeniu linii Q

$$/45/ \quad \tilde{N}(\alpha, s_1) = \tilde{N}_U(\alpha, s_1) \tilde{N}_L(\alpha, s_1)$$

gdzie funkcja $\tilde{N}_U(\alpha, s_1)$ jest analityczna w obszarze leżącym nad linią Q, a $\tilde{N}_L(\alpha, s_1)$ jest analityczna w obszarze leżącym pod tą linią, to funkcja g_{10}^2 wyrazi się jako przedłużenie na obszar $\alpha \notin \Gamma$ funkcji złożonej

$$/46/ \quad g_{10}^2 = [\tilde{N}_U(\alpha, s_1)]^{\sqrt{k + \alpha}}$$

Mamy bowiem

$$/47/ \quad \tilde{N}_U(\alpha, s_1) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln [s_1 + \gamma(t)]}{\sqrt{k+t}} \frac{dt}{t-\alpha} \right\} = \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln \left\{ \frac{[s_1 + \gamma(t)][s_1 - \gamma(t)]}{\sqrt{k+t}} \right\}}{t-\alpha} dt \right\}.$$

Dowód przebiega analogicznie jak w Dodatku [5]. Całka

$$/47/ \text{ istnieje, gdyż } \frac{\ln [s_1 + \sqrt{k^2 - t^2}]}{(t-\alpha)\sqrt{k+t}} \sim O\left(\frac{\ln t}{t^{3/2}}\right) \text{ dla } t \rightarrow \infty$$

Do sfaktoryzowania funkcji $\tilde{N}(\alpha, s_1)$ wykorzystamy przeprowadzoną w [5] faktoryzację funkcji $\tilde{K}(\alpha, s_1) = \tilde{K}_U(\alpha, s_1) \tilde{K}_L(\alpha, s_1)$, gdzie

$$/48/ \quad \tilde{K}(\alpha, s_1) = \left(\frac{s_1 + \gamma}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}} = \frac{\tilde{N}(\alpha, s_1)}{M(\alpha)}$$

przy oznaczeniu

$$/49/ \quad M(\alpha) = \gamma \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} = \left(\sqrt{k^2 - \alpha^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}}$$

Z równości /48/ wynika dla czynników faktoryzacji zależność

$$/50/ \quad \tilde{N}_U(\alpha, s_1) = M_U(\alpha) \tilde{K}_U(\alpha, s_1)$$

Funkcję $M_\nu(\alpha)$ przedstawimy w postaci iloczynu

$$/51/ \quad M_\nu(\alpha) = (\sqrt{k+\alpha}) \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_Q \frac{\ln(k-t)}{\sqrt{k+t}} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Z /46/, /50/ /51/ mamy

$$/52/ \quad g_{10}^2 = \sqrt{k+\alpha} \delta^2 g \cdot g^2(\alpha, s_1)$$

gdzie /obliczenia w Dodatku [5] / $g^2(\alpha, s_1) = [K_\nu(\alpha, s_1)]^{\sqrt{k+\alpha}}$

$$/53/ \quad g^2(\alpha, s_j) = \frac{(\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})}{\sqrt{k+\alpha} (\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})}$$

$$/54/ \quad d_j = \frac{ik}{\eta_j} \sqrt{1-\eta_j^2}, \quad j=1, 2, \text{ gdzie } \arg \eta_j - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{1-\eta_j} < \arg \eta_j + \frac{\pi}{2}$$

natomiast

$$/55/ \quad \delta^2 g = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{4\pi i} \int_Q \frac{\ln(k-t)}{\sqrt{k+t}} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Badanie funkcji /55/ w nieskończoności daje wynik

$$/56/ \quad \delta^2 g \rightarrow 1 \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Ze wzorów /37/ i /43/ mamy ciąg rozwiązań

$$/57/ \quad u^{(n)} = \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$/58/ \quad u_1^{(n)} = (\sqrt{k+\alpha})^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{K_\nu} g_{10}$$

$$u_2^{(n)} = (-1)^n (\sqrt{k+\alpha})^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{K_\nu} g_{10}^{-1}$$

dla całkowitych n .

Macierz $G_\nu(\alpha)$ jest utworzona przez dwa wektory spośród /58/ o wskaźnikach $n=0; n=1$, tak, żeby wektor $U(\alpha)$ dany wzorem /23/ był rzędu nie wyższego niż $O(\alpha^{-\frac{1}{2}})$, co zapewni spełnienie przez funkcję $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ warunku na ostrzu.

Warunkiem koniecznym takiego zachowania funkcji $U(\alpha)$ w nieskończoności jest $C(\alpha) \equiv 0$ we wzorach /23/.

Mamy zatem

$$/59/ \quad G_\nu(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{K_\nu} \begin{bmatrix} g \delta g & \sqrt{k+\alpha} g \delta g \\ \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} g^{-1} \delta^{-1} g & -g^{-1} \delta^{-1} g \end{bmatrix}$$

Dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ $K_U, g, \delta g = O(1)$. Wobec tego

$$G_U(\alpha) = O \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^{-2} & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz $G_U^{-1}(\alpha)$ wyraża się wzorem-

$$/60/ \quad G_U^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{K_U}} \begin{bmatrix} g^{-1} \delta^{-1} g & \sqrt{k+\alpha} g \delta g \\ \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} g^{-1} \delta^{-1} g & -g \delta g \end{bmatrix}$$

Podstawiając /59/, /60/ do drugiego z wzorów /23/, gdzie $C(\alpha) = 0$, a następnie do /14A/ otrzymujemy

$$A(\alpha) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{g \delta g \sqrt{K_U}}{\sqrt{K_U}} \frac{g_0^{-1} \delta g_0 (s_1 - \tau_0) \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right) + g_0 \delta g_0 \sqrt{k+\alpha_0} \left(1 - \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right)}{(s_1 - \alpha_0)(s_1 + \tau)}$$

/61/

$$B(\alpha) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{g^{-1} \delta g^{-1} \sqrt{K_U}}{\sqrt{K_U}} \frac{g_0^{-1} \delta g_0^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{k-\alpha_0}}\right) (s_1 - \tau_0) + g_0 \delta g_0 \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha_0}{k+\alpha}}\right)}{\alpha - \alpha_0}$$

gdzie

$$\alpha_0 = -k \cos \phi_0, \quad \tau_0 = k \sin \phi_0, \quad g_0 = g(\alpha_0), \quad \delta g_0 = \delta g(\alpha_0), \quad K_U^0 = K_U(\alpha_0)$$

Rozwiązanie problemów Hilberta /30B, 31B/ przebiega analogicznie i wyraża się wzorami

$$/62/ \quad \begin{aligned} u_1 u_2 &= (k+\alpha)^{n-\frac{1}{2}} K_U(\alpha, s_2) \\ \frac{u_1}{u_2} &= g_{02}^2(\alpha, s_2) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \frac{1}{g^2} \frac{1}{\delta^2 g} \end{aligned}$$

gdzie $K_U(\alpha, s_2)$ jest dane wzorem /35/ lub /39/, $K_U(\alpha, s_2) = W(\alpha)$

dla $j=2$, funkcja $g^2(\alpha, s_2)$ jest dana wzorem /53/ dla $j=2$, funkcja $\delta^2 g$ - wzorem /55/.

Macierze $G_U(\alpha)$ i $G_U^{-1}(\alpha)$ są dane wzorami

$$/63/ \quad G_U(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{K_U} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} g^{-1} \delta^{-1} g & g^{-1} \delta^{-1} g \\ g \delta g & -\sqrt{k+\alpha} g \delta g \end{bmatrix}$$

$$/64/ \quad G_U^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{K_U}} \begin{bmatrix} \sqrt{k+\alpha} g \delta g & g^{-1} \delta^{-1} g \\ g \delta g & -\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} g^{-1} \delta^{-1} g \end{bmatrix}$$

Podstawiając /63/, /64/ do drugiego z wzorów /23/, gdzie $C(\alpha) = 0$, a następnie do /14B/ otrzymujemy

$$A(\alpha) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{g_0^{-1} \delta g_0 \sqrt{k_0}}{\sqrt{k_0}} \frac{g_0 \delta g_0 \left(\sqrt{\frac{k+\alpha_0}{k+\alpha}} + 1 \right) + g_0^{-1} \delta g_0^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{k+\alpha_0}} \right) (s_2 + \delta_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

/65/

$$B(\alpha) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{g_0 \delta g_0 \sqrt{k_0}}{\sqrt{k_0}} \frac{g_0 \delta g_0 (\sqrt{k+\alpha_0} - \sqrt{k+\alpha}) + g_0^{-1} \delta g_0^{-1} \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}} \right) (s_2 + \delta_0)}{(\alpha - \alpha_0)(s_2 + \delta)}$$

gdzie jak poprzednio indeksem „0” zaznaczono wartość odpowiednich funkcji w punkcie $\alpha = \alpha_0$.

5. Analityczne przedłużenie rozwiązania dla wszystkich wartości parametru η

W przedstawionej metodzie WHH macierz $G_0(\alpha)$, a w efekcie funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ wyrażają się za pomocą czynnika faktoryzacji dwóch funkcji

$$K(\alpha, \eta) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}} = \frac{s + \delta}{\delta} \quad ; \quad \tilde{K}(\alpha, \eta) = \left[K(\alpha, \eta) \right] \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}$$

Dla każdej wartości η z płaszczyzny zmiennej zespolonej funkcja $K(\alpha, \eta)$ ma dwa punkty zerowe

$$\pm \alpha = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2},$$

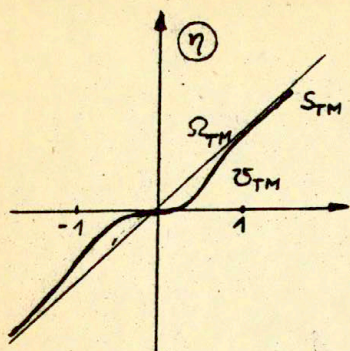
które leżą na I lub II płacie powierzchni Riemanna α .

Dla płatów wybranych tak jak na Rys. 2 krzywa S_{TM} o równaniu $\text{Re} \delta = 1$, Rys. 3a. dzieli płaszczyznę η na dwa obszary: obszar Ω_{TM} przylegający do krzywej S_{TM} od góry i obszar \mathcal{U}_{TM} przylegający do krzywej S_{TM} od dołu. Dla $\eta \in \Omega_{TM}$ zera leżą na płacie I, dla $\eta \in \mathcal{U}_{TM}$ zera leżą na płacie II powierzchni Riemanna α .

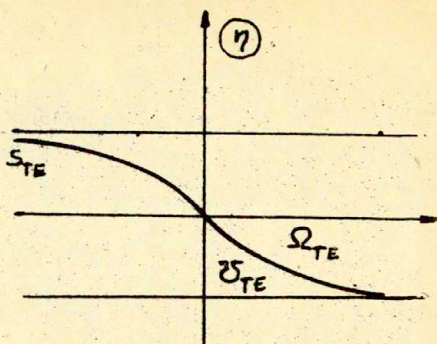
Rozwiązanie /11/, /61/; /11/, /65/ jest znalezione dla takich wartości parametru, dla których macierz $G(\alpha)$ jest nieosobliwa, a więc $\eta_1 \in \mathcal{U}_{TM}$, $\eta_2 \in \mathcal{U}_{TM}$.

Jeżeli interesuje nas tylko impedancja pasywna to dodatkowo $\text{Re} \eta_1 > 0$, $\text{Re} \eta_2 > 0$.

Trudność w analitycznym przedłużeniu rozwiązania tkwi w przedłużeniu czynników faktoryzacji omawianych funkcji, które



Rys. 3a.



Rys. 3b.

dla $\eta \in \Omega_{TM}$ wyrażają się innymi formułami. Problem ten jest szczegółowo rozpatrzony w [5], skąd zaczerpniemy wyniki.

Mamy dla $\eta_j \in \Omega_{TM}$, $\alpha \notin \Gamma$

$$/66/ \quad g^2(\alpha, \eta_j) = \frac{\alpha + d_j}{\sqrt{k+d}} \frac{\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha}}{(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})}$$

$$/67/ \quad K_U(\alpha, \eta_j) = \frac{\alpha + d_j}{\alpha + k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln \frac{\eta_j \delta}{\eta_j \delta - k} \frac{d\delta}{\delta - \alpha} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha + d_j}{\alpha + k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta_j + \sqrt{k^2 - t^2}}{\eta_j - \sqrt{k^2 - t^2}} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

gdzie d_j wyraża się wzorem /54/ przy czym gałąź pierwiastka we wzorze /54/ wybiera się tak, że $\text{Im} d_j > 0$ dla $\text{Re} \eta_j > 0$, $\text{Im} \eta_j > 0$. Liniami cięcia dla $\sqrt{k+d_j}$ i $\sqrt{k-d_j}$ we wzorze /66/ są odpowiednio Γ i $\tilde{\Gamma}$ i $\sqrt{k+d_j} = \sqrt{k}$, $\sqrt{k-d_j} = \sqrt{k}$ dla $d_j = 0$.

6. Bieguny funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$.

Rozpatrzmy kolejno wzory /61/ i /65/.

Niezależnie od wartości parametru η punkt $\alpha = \alpha_0$ jest biegunem I rzędu każdej z funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$.

Dla $\eta \in \mathcal{U}_{TM}$ możemy stwierdzić co następuje :

- 1/ zera funkcji $s+\gamma$ leżą na płacie II,
- 2/ funkcje $g^2(\alpha, \eta)$ oraz $K_U(\alpha, \eta)$ są analityczne i bez zer na płacie I.

Wniosek: funkcje $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ nie mają biegunów na płacie I poza punktem $\alpha = \alpha_0$.

Dla $\eta \in \Omega_{TM}$ stwierdzamy co następuje:

- 1/ funkcja $s+\gamma$ ma zera I rzędu $\alpha = \pm d$ na płacie I,
- 2/ funkcja $g^2(\alpha, \eta)$, wzór /66/ i funkcja $K_U(\alpha, \eta)$, wzór /67/ ma zero I rzędu na płacie I.

Badamy przypadek A. Do wzorów /61/ podstawiamy g dane wzorem /66/, K_U dane wzorem /67/ oraz $s_1 + \gamma = \frac{(\alpha + d_1)(\alpha - d_1)}{s_1 - \gamma}$.

W punkcie $\alpha = -d_1$, licznik i mianownik funkcji $A(\alpha)$ mają zera I rzędu. Jest to punkt pozornie osobliwy. W punkcie $\alpha = d_1$, mianownik ma zero I rzędu, licznik jest różny od zera.

Wniosek: funkcja $A(\alpha)$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = d_1$. Funkcja $B(\alpha)$ nie ma innego bieguna oprócz bieguna w punkcie $\alpha = \alpha_0$.

Badamy przypadek B. Do wzorów /65/ podstawiamy g dane wzorem /66/, K_U dane wzorem /67/ i $s_2 + \gamma = \frac{(\alpha + d_2)(\alpha - d_2)}{s_2 - \gamma}$.

Wniosek: funkcja $A(\alpha)$ nie ma bieguna innego niż biegun w punkcie $\alpha = \alpha_0$. Funkcja $B(\alpha)$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = d_2$.

7. Rozwiązanie dla polaryzacji H - problem TE.

Przez wstawienie $\frac{1}{\eta}$ w miejsce η_j we wzorach na rozwiązanie /11/ /61/; /11/, /65/ otrzymujemy rozwiązanie dla polaryzacji H.

Odwzorowując przez inwersję krzywą S_{TM} dostajemy krzywą S_{TE} , Rys 3b. Jeżeli oznaczymy jak poprzednio przez Ω_{TE} obszar leżący nad krzywą S_{TE} , a przez \mathcal{U}_{TE} obszar leżący pod krzywą, to przeciwnie niż poprzednio macierz G_U jest nieosobliwa dla $\eta \in \Omega_{TE}$.

Dla $\eta \in \Omega_{TE}$ funkcja g jest dana formułą /53/, gdzie

$d_j = k\sqrt{1-\eta_j^2}$, funkcja $K_\nu = w(\alpha)$ formułą /35/ lub /39/, gdzie wstawiamy $\frac{1}{\eta_j}$ w miejsce η_j .

Dla $\eta_j \in \mathcal{U}_{TE}$ funkcja g jest opisana wzorem /66/, a funkcja K_ν wzorem /67/, gdzie wstawiamy $\frac{1}{\eta_j}$ w miejsce η_j /wtedy $d_j = k\sqrt{1-\eta_j^2}$ /.

Dla $\eta_j \in \mathcal{U}_{TE}$ funkcja $A(\alpha)$ dla przypadku A ma biegun w punkcie $d_1 = k\sqrt{1-\eta_j^2}$ i odpowiednio funkcja $B(\alpha)$ dla przypadku B ma biegun w punkcie d_2 .

8. Analiza rozwiązania. Fale powierzchniowe

Klasyczną metodą badania rozwiązania /11/ jest metoda punktu siodłowego.

Przez zamianę zmiennych przestrzennych

$$\begin{aligned} /68/ \quad x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

i zmiennej całkowania

$$/69/ \quad \alpha = k \cos \beta$$

całka /11/, /61/ (/11/, /65/) przybiera postać

$$\begin{aligned} /70/ \quad u_s(r, \theta) &= \int_C A(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta && \text{dla } 0 < \theta < \pi \\ u_s(r, \theta) &= \int_C B(\beta) e^{ikr \cos(\beta + \theta)} d\beta && \text{dla } \pi < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

gdzie C jest obrazem linii Q na płaszczyźnie β przy odwzorowaniu /69/, Rys 4.

W metodzie punktu siodłowego linia C wspólna dla wszystkich wartości r, θ , które w całce są parametrami, zostaje zamieniona przez krzywą najszybszego spadku $\frac{S(\theta)}{r}$ dla każdego θ .

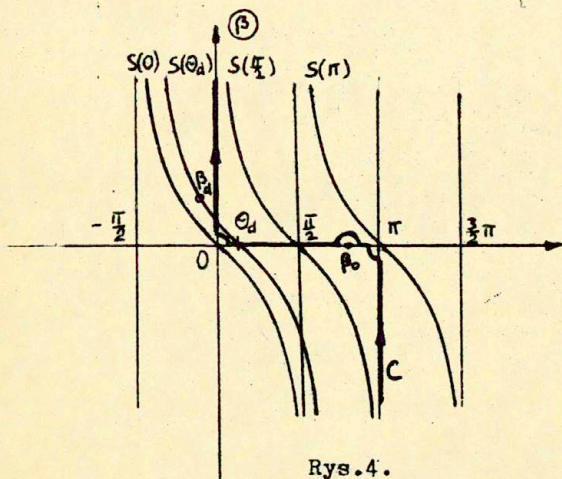
Krzywe $S(\theta)$ są dane równaniem

$$/71/ \quad \beta_r - \theta = \arccos \frac{1}{ch \beta_i}$$

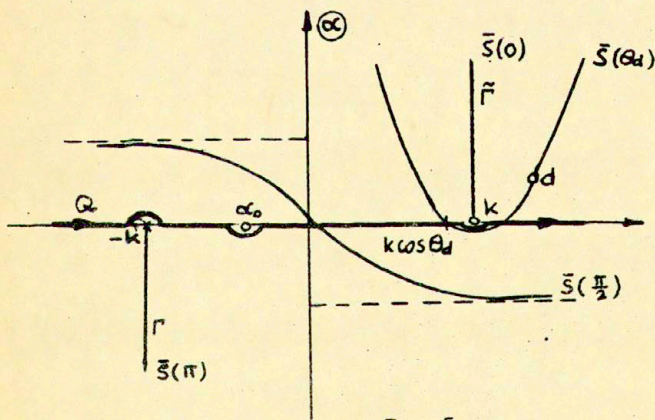
gdzie $\beta_r + i\beta_i = \beta$

Równanie /71/ przedstawia rodzinę linii z parametrem θ .

Linie są przesunięte równoległe względem siebie. Każda z nich przecina oś $R\alpha\beta$ w punkcie Θ , Rys.4. Na Rys.5. naszkicowano obrazy $\bar{S}(\theta)$ krzywych $S(\theta)$ na płaszczyźnie α dla $0 < \theta < \pi$. Wszystkie krzywe leżą na płacie I. Krzywa $\bar{S}(0)$ jest linią cięcia $\tilde{\Gamma}$, krzywa $\bar{S}(\pi)$ - linią cięcia Γ .



Rys.4.



Rys.5.

Przy zamianie drogi całkowania zgodnie z tw. Cauchy'ego mamy

$$u_s(r, \theta) = \int_C A(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta =$$

$$= \int_{S(\theta)} A(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta + 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{\beta=\beta_k} A(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)}$$

/72/

$$u_s(r, 2\pi - \theta) = \int_C B(\beta) e^{ikr \cos(\beta + \theta)} d\beta =$$

$$= \int_{S(\theta)} B(\beta) e^{ikr \cos(\beta + \theta)} d\beta + 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{\beta=\beta_k} B(\beta) e^{ikr \cos(\beta + \theta)}$$

gdzie β_k oznacza biegun funkcji $A(\beta)$ / $B(\beta)$ / zawarty między liniami C i $S(\theta)$ dla $0 < \theta < \pi$.

Jak zbadaliśmy, każda z funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = \alpha_0$. Ponadto funkcja $A(\alpha)$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = d$ dla przypadku A, a funkcja $B(\alpha)$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = d$ dla przypadku B. Transformacja /69/ nie zmienia typu osobliwości w tym punkcie. Oznaczmy $\beta_0 = \beta(\alpha_0)$, $\beta_d = \beta(d)$.

W interpretacji fizycznej składnik sumy występującej w prawej stronie wzoru /72/ określony przez residuum funkcji $A(\beta)$ w punkcie $\beta = \beta_d$ przedstawia falę powierzchniową prowadzoną przez górną stronę półpłaszczyzny. Składnik sumy określony przez residuum funkcji $B(\beta)$ w punkcie $\beta = \beta_d$ przedstawia falę powierzchniową prowadzoną przez dolną stronę półpłaszczyzny.

8.1. Parametry fali powierzchniowej

Przy zmianie położenia krzywej $S(\theta)$, $|\bar{S}(\theta)|$ wraz z kątem θ , biegun β_d , $|d|$ przestaje leżeć w obszarze między pierwotną linią całkowania, a krzywą $S(\theta)$, $|\bar{S}(\theta)|$. Fala powierzchniowa

zatem, istnieje w pewnym tylko sektorze kątowym przylegającym do półpłaszczyzny od góry: $0 < \theta < \varphi$ lub od dołu: $2\pi - \varphi < \theta < 2\pi$. Kąt φ jest równy Θ_d , gdzie Θ_d jest parametrem krzywej $S(\theta)$ przechodzącej przez punkt β_d , Rys. 4 /krzywej $\bar{S}(\theta)$ przechodzącej przez punkt d , Rys 5/.

Wygodnie jest analizować falę płaską we współrzędnych x, z . Wróćmy też na płaszczyznę α .

W sektorze $0 < \theta < \varphi$ fala powierzchniowa jest niejednorodną falą płaską

$$/73/ \quad w_1(d, x, z) = W_1(d) e^{i(d \cdot x + \gamma_d z)}$$

a w sektorze $2\pi - \varphi < \theta < 2\pi$ — niejednorodną falą płaską

$$/74/ \quad w_2(d, x, z) = W_2(d) e^{i(d \cdot x - \gamma_d z)}$$

gdzie

$$/75/ \quad \gamma_d = \sqrt{k^2 - d^2}$$

$$/76/ \quad W_1(d) = 2\pi i \operatorname{res}_{\alpha=d} A(\alpha), \quad W_2(d) = 2\pi i \operatorname{res}_{\alpha=d} B(\alpha)$$

Wydzielając część rzeczywistą i urojoną liczby d i γ_d :

$$d = \operatorname{Re} d + i \operatorname{Im} d, \quad \gamma_d = \operatorname{Re} \gamma_d + i \operatorname{Im} \gamma_d$$

falę płaską /73/ i /74/ można przedstawić odpowiednio w postaci

$$/77/ \quad w_1(d, x, z) = W_1(d) e^{-(\operatorname{Im} d \cdot x + \operatorname{Im} \gamma_d z)} e^{i(\operatorname{Re} d \cdot x + \operatorname{Re} \gamma_d z)}$$

$$/78/ \quad w_2(d, x, z) = W_2(d) e^{-(\operatorname{Im} d \cdot x - \operatorname{Im} \gamma_d z)} e^{i(\operatorname{Re} d \cdot x - \operatorname{Re} \gamma_d z)}$$

Oznaczmy przez n_F wektor prostopadły do płaszczyzny stałej fazy, a przez n_A wektor prostopadły do płaszczyzny stałej amplitudy. Są one wzajemnie prostopadłe. Fala powierzchniowa propaguje się w kierunku wektora n_F i zanika w kierunku wektora n_A .

Dla fali $w_1(d, x, z)$:

$$/79/ \quad n_F = (\operatorname{Re} d, \operatorname{Re} \gamma_d)$$

$$n_A = (\operatorname{Im} d, \operatorname{Im} \gamma_d)$$

dla fali $w_2(d, x, z)$

$$\begin{aligned} /80/ \quad n_F &= (Re d, -Re \vartheta_d) \\ n_A &= (Im d, -Im \vartheta_d) \end{aligned}$$

Do znalezienia wektorów n_A, n_F oraz kąta ψ dla każdej wartości η z interesującego nas obszaru D_{TM} :

$\eta \in \Omega_{TM}$ i $Re \eta > 0$ dla przypadku TM, Rys.6a i obszaru D_{TE} :
 $\eta \in \mathcal{U}_{TE}$ i $Re \eta > 0$ dla przypadku TE, Rys.6b posłużą odwzorowania przedstawione na Rys.6.

Obszar D_{TM} , Rys.6a, odwzorowano funkcją $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$.
 Odwzorowany obszar umieszczono na płaszczyźnie α , Rys.6c.
 Ten sam obszar D_{TM} odwzorowano funkcją $\vartheta_d = -\frac{k}{\eta}$ i umieszczono na płaszczyźnie ϑ , Rys.6d, oraz funkcją $\beta_d = \arcsin(-\frac{1}{\eta})$ i umieszczono na płaszczyźnie β .

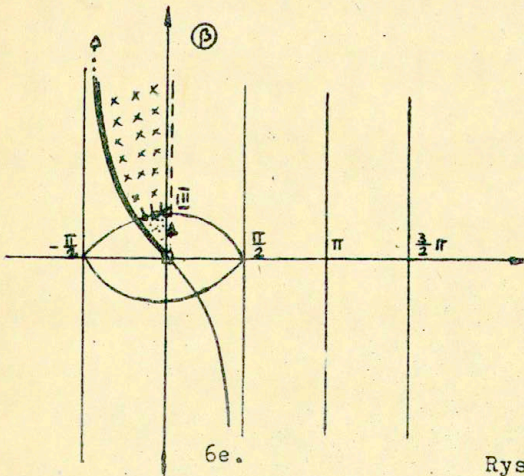
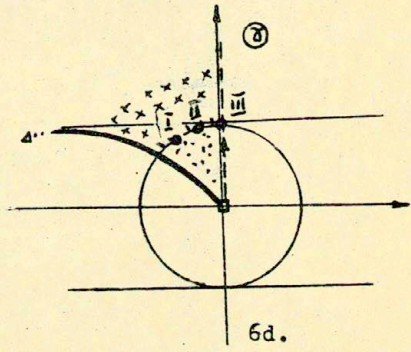
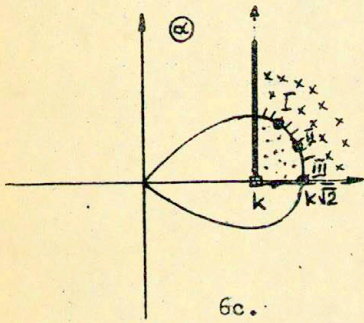
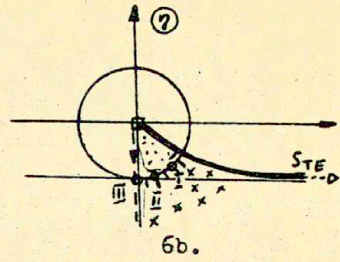
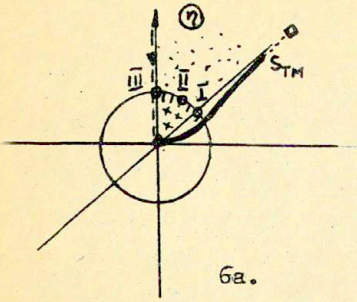
W ten sposób dla danej wartości η z obszaru D_{TM} odczytuje się wartość d z rys.6c, wartość $\vartheta_d = -\frac{k}{\eta} = \sqrt{k^2 - d^2}$ z rys.6d, oraz wartość $\beta_d = \arcsin(-\frac{1}{\eta}) = \arccos \frac{k}{\eta}$ z rys.6e. Odczyt jest tym bardziej dokładny im dokładniej wykonana się odwzorowania /np. przez odwzorowanie jakiejś siatki układu współrzędnych/.

Załączone rysunki przedstawiają jedynie szkice.

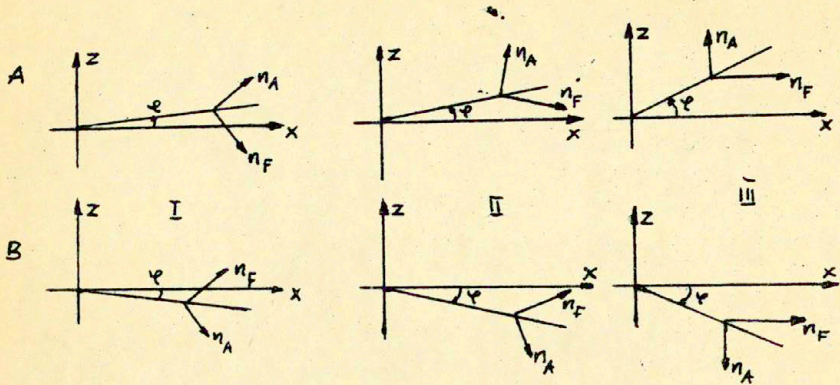
Te same rysunki dotyczą przypadku TE.

Przedstawiony na płaszczyźnie α, ϑ i β obszar jest obrazem obszaru D_{TE} , Rys.6b, kolejno przy odwzorowaniu funkcją $d = k\sqrt{1-\eta^2}$, $\vartheta_d = -k\eta$, $\beta_d = \arcsin(-\eta)$.

Odpowiadające sobie linie i obszary na Rys.6abcde. są zaznaczone w ten sam sposób. Charakterystyczne cechy odwzorowań: przy odwzorowaniu obszaru D_{TM} punkt $\eta = 0$ odwzorowuje się w punkt $d = \infty$, $\vartheta_d = \infty$, $\beta_d = \infty$. Obszar $|\eta| < 1$ odwzorowuje się w zewnątrz lemniskaty Bernoulli'ego na płaszczyźnie α , w zewnątrz okręgu o promieniu k na płaszczyźnie ϑ i w zewnątrz zamkniętej linii naszkicowanej na płaszczyźnie β . I na odwrót, obszar $|\eta| > 1$ odwzorowuje się we wnętrze każdej z tych krzywych.



Rys. 6.



Rys.7.

Przy odwzorowaniu obszaru D_{TE} punkt $\eta = 0$ odwzorowuje się w punkt $d = 0$, $\delta_d = 0$, $\beta_d = 0$. Zatem wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie η odwzorowuje się we wewnątrz każdej z omówionych krzywych na płaszczyźnie α, δ, β , a zewnątrz - w obszar leżący na zewnątrz tych zamkniętych krzywych.

Korzystając z rysunków 6 można przeanalizować zależność parametrów fali powierzchniowej od impedancji półpłaszczyzny.

Na Rys.7. naszkicowano kierunek propagacji, kierunek zaniżania amplitudy i sektor istnienia fali powierzchniowej dla trzech wybranych wartości η na okręgu jednostkowym: $\eta_I, \eta_{II}, \eta_{III}$ zaznaczonych na Rys.6a, 6b.

Liczby $W_1(d), W_2(d)$ określające amplitudę fali /73/, /74/ wyrażają się przez wzory

$$\begin{aligned}
 & /81/ \quad W_1(d) = 2\pi i \operatorname{res} A(\alpha) = \\
 & = -\frac{1}{2} \frac{g_d \delta g_d \sqrt{K_d^d}}{\sqrt{K_v^0}} (s - \delta_d) \frac{g_0^{-1} \delta g_0^{-1} (s - \delta_0) \left(1 + \sqrt{\frac{k+d}{k+d_0}}\right) + g_0 \delta g_0 \sqrt{k+d_0} \left(1 - \sqrt{\frac{k+d}{k+d_0}}\right)}{(d - \alpha_0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2(d) &= 2\pi i \operatorname{res}_{\alpha=d} B(\alpha) = \\
 /82/ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_d \delta g_d \sqrt{K_v^d}}{\sqrt{K_v^0}} (s - \gamma_d) \frac{g_0 \delta g_0 (\sqrt{k + \alpha_0} - \sqrt{k + d}) + g_0^{-1} \delta g_0^{-1} \left(1 + \sqrt{\frac{k+d}{k+\alpha_0}}\right) (s + \gamma_0)}{d - \alpha_0}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$/83/ \quad g_d = \frac{\sqrt{k+d} - \sqrt{k-d}}{\sqrt{2k} + \sqrt{k+d}} .$$

Funkcja $K_v(\alpha)$ wyraża się wzorem /67/. Indeksom „d” zaznaczono wartość odpowiednich funkcji w punkcie $\alpha = d$, a indeksem „o” zaznaczono wartość tych funkcji w punkcie $\alpha = \alpha_0$.

9. Streszczenie

W pracy rozwiązano problem padania fali płaskiej na półpłaszczyznę, której jedna strona jest doskonale przewodząca, a druga impedancyjna - opisana warunkiem Leontowicza. Fala pada prostopadle do krawędzi półpłaszczyzny. Zastosowano metodę Wienera - Hopfa - Hilberta, której istota tkwi w faktoryzacji macierzy / Hurd 1976 / .

Przez zanalizowanie rozwiązania metodą punktu siodłowego wyodrębniono niejednorodną falę płaską, która w interpretacji fizycznej stanowi falę powierzchniową, propagującą się w obszarze kątowym przylegającym do impedancyjnej strony półpłaszczyzny. Przedyskutowano zależność parametrów tej fali od impedancji półpłaszczyzny.

LITERATURA

- 1 G.D.MALIUZINIEC - Wzbudzenie, odbicie i promieniowanie fal powierzchniowych na klinie z zadanymi impedancjami granic. Dokłady AN SSSR 121, 3, 436-439, /1958/.
- 2 R.A. HURD - The Wiener - Hopf - Hilbert method for diffraction problems. Can. J. Phys., 54, 7, 775-780 /1976/.
- 3 OVIDIO M. BUCCI, GIORGIO FRANCESCHETTI, Electromagnetic scattering by a half plane with two face impedances. Radio Sci. 11, 1 49-59 /1976/.
- 4 R.A. HURD and S.PRZEŹDZIECKI - Diffraction by a half-plane with different face impedances - a re-examination. Can.J.Phys., 59, 1337-1347 /1981/.
- 5 E. KUDREWICZ, S. PRZEŹDZIECKI - Analiza rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na asymetrycznej półplaszczyźnie impedancyjnej. Prace IPPT 18/1983.
- 6 T.B.A. SENIOR - Half plane edge diffraction. Radio Sci. 10, 6, 645-650 /1975/.
- 7 P.D. GACHOV - Zagadnienia brzegowe. Państwowe Wydawnictwo Fiz.- Mat. LiteratURY , Moskwa 1963 /w języku ros./.