3.31 — pobudzanie i propagacja fal elektromagnetycznych
1.11 — równania różniczkowe

Włodzimierz Laprus

ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ MHD ZE SKOŃCZONĄ PRZEWODNOŚCIĄ

12/1984

WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 207

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1984 r.

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.druk. 1,25. Ark. wyd.0,6
Oddano do drukarni w lutym 1984 r.
Nr zamówienia 154/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Włodzimierz Laprus
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ MHD ZE SKOŃCZONĄ PRZEWODNOŚCIĄ

1. WPROWADZENIE

Metoda fal biegnących dla równań nieliniowych dyspersywnych została przedstawiona w pracach [1] , [2] i [3] . Pokazano tam również, że rozwinięcie fali biegnącej jest rozwinięciem asymptotycznym rozwiązania przy $p \to \infty$; parametr p występuje w równaniach i w warunkach początkowych.

Podstawowe ograniczenie metody fal biegnących zastosowanej do równań dyspersywnych wynika z założenia, że te równania są konserwatywne, to jest że opisują zjawiska fizyczne bez dysypacji energii /oraz bez źródeł energii/. Założenie takie jest potrzebne do tego, by równanie dyspersyjne miało rzeczywiste pierwiastki, a w konsekwencji, by promienie były rzeczywiste.

Pokażemy, że założenie o konserwatywności układu równań nie jest konieczne i że można go zastąpić mniej ostrym założeniem, które dopuszcza dysypację. Tym sposobem metoda fal biegnących może być zastosowana na przykład do równań magnetohydrodynamiki ze skończoną przewodnością i do równań linii transmisyjnej z tłumieniem.

Zostaną znalezione rozwiązania asymptotyczne równań mhd dla dużej przewodności z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu względem $1/p$, gdzie p jest przewodnością elektryczną ośrodka.

2. ZESPOLONA FUNKCJA FAZOWA

Rozważamy układ równań dyspersywnych postaci

$$A^{K}_{ik}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_K} + pB_i(u) = 0, \tag{/2.1/}$$

gdzie $K=0,1,\ldots,m$ oraz $i,k=1,\ldots,n$. Parametr p jest dodatni, a współczynniki A^{κ}_{ik} i B_i są rzeczywistymi /i regularnymi/ funkcjami zmiennych zależnych u_i w rozpatrywanym obszarze zmienności U . Dopuszczamy także zależność współczynników równań od zmiennych niezależnych x_{κ} . Zakładamy, że $A^{0}_{ik} = I_{ik}$, gdzie I_{ik} jest macierzą jednostkową, i wprowadzamy oznaczenie $x_0 = t$.

O układzie równań /2.1/ będziemy zakładać, że jest hiperboliczny dla $u_i \in U$. Natomiast macierz $B^{k}_{i} = \partial B_i/\partial u_k$ nie musi być antysymetryczna w przypadku symetrycznej macierzy A^{κ}_{ik} , tj. układ /2.1/ nie musi być konserwatywny.

Poszukujemy rozwiązania układu /2.1/ w postaci rozwinięcia fali biegnącej

$$/2.2/ \qquad u_i(t,x) = u^{0}_{i}(t,x) + \sum_{\nu=1}^{N} g^{\nu}_{i}(t,x)\, S_{\nu}(\varphi) + R_i(t,x)$$

z regularnymi współczynnikami g^{ν}_{i} i resztą R_i ; $u^{0}_{i}(t,x)$ jest z założenia dostatecznie regularnym rozwiązaniem układu równań /2.1/. Będziemy zakładać, że dane początkowe mają także postać rozwinięcia /2.2/.

Funkcja fazowa $\varphi(t,x)$, występująca jako argument funkcji

$$/2.3/ \qquad S_{\nu}(\varphi) = (ip)^{-\nu} \exp ip\varphi ,$$

może mieć wartości zespolone. Niech φ_R i φ_I będą odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną funkcji fazowej $\varphi = \varphi_R + i\varphi_I$. Wprowadzimy oznaczenie $\partial\varphi/\partial x_{\kappa} = k_{\kappa}$, przy czym $k_0 = -\omega$. Niech $\omega = \omega_R + i\omega_I$, gdzie $\omega_R = \partial\varphi_R/\partial t$ i $\omega_I = \partial\varphi_I/\partial t$. Zakładamy, że $k_{\varkappa}$ dla $\varkappa = 1,\ldots,m$ są rzeczywiste, czyli że φ_I oraz ω_I są zależne tylko od czasu t .

W przypadku niekonserwatywnego układu równań /2.1/ macierz dyspersyjna

$$/2.4/ \qquad \mathcal{A}_{ik} = -\omega I_{ik} + \bar{\mathcal{A}}_{ik}$$

nie jest hermitowska i macierz $\bar{\mathcal{A}}_{ik} = k_{\varkappa} A^{\varkappa}_{ik} - i B^{k}_{i}$ /$\varkappa = 1,\ldots,m$/ ma w ogólności wartości własne zespolone dla rzeczywistych $k_{\varkappa}$. Znikanie wyznacznika $Q = \det(\mathcal{A}_{ik})$ jest warunkiem koniecznym do wyznaczenia współczynników rozwinięcia /2.2/. Zatem równanie dyspersyjne

/2.5/ $$Q(-\omega, k) = 0,$$

traktowane jako wielomian względem ω przy danych $k_\varkappa$, ma w ogólności pierwiastki zespolone. Oznaczmy te pierwiastki przez

/2.6/ $$\omega^{(i)} = \mathcal{H}^{(i)}(t,x,k)$$

dla $i=1,\dots,n$ /x oznacza zmienne $x_\varkappa$, k oznacza zmienne $k_\varkappa$/. Równanie dyspersyjne można przedstawić jako iloczyn n czynników postaci

/2.7/ $$Q^{(i)}(-\omega, k) = -\omega + \mathcal{H}^{(i)}(t,x,k).$$

Znikanie jednego czynnika wystarcza, by równanie dyspersyjne było spełnione. Ograniczymy się do rozważenia jednego rodzaju fali, określonej równaniem dyspersyjnym

/2.8/ $$Q^{(i)}(-\omega, k) = 0$$

i będziemy dalej opuszczać wskaźnik "(i)".

Równanie /2.8/ jest równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu dla funcji fazowej $\varphi(t,x)$. Wstęgi charakterystyczne tego równania są określone przez układ równań kanonicznych

/2.9/ $$\dot{x}_\varkappa = \partial Q/\partial k_\varkappa,$$

/2.10/ $$\dot{k}_\varkappa = -\partial Q/\partial x_\varkappa,$$

gdzie kropką oznaczono pochodną zwyczajną względem parametru s na krzywych charakterystycznych $x_\varkappa = x_\varkappa(s)$. Wziąwszy pod uwagę /2.7/ i zakładając, że hamiltonian $\mathcal{H}$ jest niezależny od czasu t mamy

/2.11/ $$\dot{t} = 1, \qquad \dot{\omega} = 0.$$

Można zatem przyjąć, że $t \equiv s$. Otrzymujemy w ten sposób układ równań kanonicznych Hamiltona

/2.12/ $$\dot{x}_\varkappa = \partial \mathcal{H}/\partial k_\varkappa ,$$

/2.13/ $$\dot{k}_\varkappa = -\partial \mathcal{H}/\partial x_\varkappa .$$

Promienie $x_\varkappa = x_\varkappa(t)$ i prędkość promieniowa $\gamma_\varkappa = \dot{x}_\varkappa$ są rzeczywiste wtedy, gdy część urojona hamiltonianu nie zależy od $k_\varkappa$. Podobnie, $k_\varkappa$ jest rzeczywiste wtedy, gdy część urojona hamiltonianu nie zależy od $x_\varkappa$. Stąd wniosek, że

/2.14/ $$\mathrm{Im}\, \mathcal{H} = \mathrm{const}.$$

Warunek /2.14/ wystarcza, by dalsza procedura była poprawna. /W przeciwnym razie należałoby rozważyć dwa rodzaje promieni odpowiadające dwom równaniom dyspersyjnym

/2.15/ $$-\omega_R + \mathcal{H}_R(t,x,k) = 0,$$

/2.16/ $$-\omega_I + \mathcal{H}_I(t,x,k) = 0,$$

wynikającym z /2.8/; $\mathcal{H}_R$ i $\mathcal{H}_I$ są częścią rzeczywistą i urojoną hamiltonianu, przy czym, zgodnie z poprzednim założeniem, $k_\varkappa$ są rzeczywiste, zatem $\partial \mathcal{H}_I/\partial x_\varkappa = 0$. Oczywiście pozostaje jeszcze problem właściwego sformułowania równań transportu./

Funkcja fazowa jest określona równaniem

/2.17/ $$\dot{\varphi} = -\omega + k_\varkappa \gamma_\varkappa = \mathcal{L} ,$$

a lagrangian $\mathcal{L}$ jest związany z hamiltonianem $\mathcal{H}$ zależnością

/2.18/ $$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + k_\varkappa \partial \mathcal{H}/\partial k_\varkappa$$

wynikającą z /2.17/. Widać, że

/2.19/ $$\mathrm{Im}\, \mathcal{L} = -\mathrm{Im}\, \mathcal{H} ,$$

czyli że $\mathrm{Im}\, \mathcal{L} = -\omega_I = \mathrm{const}$. W ogólniejszym przypadku, gdy $\mathcal{H}$ jest funkcją czasu /wtedy $\dot{\omega} = \partial \mathcal{H}/\partial t$ w równości /2.11//, $\mathrm{Im}\, \mathcal{H}$

jest funkcją czasu, a więc $\operatorname{Im}\mathcal{H} = \omega_I(t)$. Zważywszy, że funkcja fazowa jest określona na promieniu $x_\varkappa = x_\varkappa(t)$ całką

/2.20/
$$\varphi(t,x) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(s,x,k)\,ds + \varphi(t^\circ, x^\circ),$$

gdzie $x^\circ_\varkappa = x_\varkappa(t^\circ)$ i $k_\varkappa = k_\varkappa(t)$, będziemy zakładać, że spełniony jest warunek

/2.21/
$$-\int_{t^\circ}^{t} \omega_I(s)\,ds + \varphi_I(t^\circ) \geqslant 0$$

w pewnym otoczeniu t° dla $t > t^\circ$. Wówczas $\varphi_I \geqslant 0$ i funkcje $S_\nu(\varphi)$ są ograniczone przy $p \to \infty$. Warunek /2.21/ powinien być w szczególności spełniony wtedy, gdy $\varphi_I(t^\circ) = 0$. Stąd wniosek, że

/2.22/
$$\int_{t^\circ}^{t} \omega_I(s)\,ds \leqslant 0 .$$

W przypadku hamiltonianu niezależnego od czasu ω_I = const na promieniu i /2.22/ sprowadza się do

/2.23/
$$\omega_I \leqslant 0 .$$

Z fizycznego punktu widzenia spełnienie warunku /2.23/ przez układ równań /2.1/ oznacza brak źródeł energii.

Założenia wymienione wyżej sprawiają, że wyniki prac [1] , [2] i [3] stosują się w całości do przypadku niekonserwatywnych układów równań postaci /2.1/. W szczególności pozostaje prawdziwy lemat o kierunkach promieniowych /por. dowód lematu w pracy [1] /, a zatem postać równań transportu pozostaje bez zmian.

3. RÓWNANIA MHD

Rozpatrzymy równania magnetohydrodynamiki w postaci skalarnej jednowymiarowej, tj. w przypadku gdy pole elektryczne $\underline{E}$, pole magnetyczne $\underline{B}$ i prędkość gazu przewodzącego $\underline{v}$ są odpowiednio postaci $(0, E, 0)$, $(0, 0, B)$ i $(v, 0, 0)$. Wówczas układ równań magnetohydrodynamiki przybiera postać

/3.1/ $$\frac{\partial E}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial B}{\partial x} + p\frac{1}{\varepsilon_0}(E - vB) = 0,$$

/3.2/ $$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

/3.3/ $$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} - p\frac{1}{\varrho}B(E - vB) = 0,$$

/3.4/ $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Zmiennymi zależnymi są E , B , v i gęstość gazu ϱ . Stałe dodatnie c_0 i ε_0 są odpowiednio prędkością światła w próżni i przenikalnością dielektryczną próżni, $p > 0$ jest przewodnością elektryczną ośrodka. Prędkość dźwięku α jest funkcją gęstości: $\alpha(\varrho) = h\varrho^{\beta}$, gdzie $h > 0$ i $\beta > 0$ są stałymi / $\beta = (\varkappa - 1)/2$, $\varkappa > 1$ jest stałą politropową/. Po wprowadzeniu nowych zmiennych

/3.5/ $$B' = c_0 B, \qquad \varrho' = \alpha(\varrho)/\beta$$

dostajemy układ równań symetrycznie hiperboliczny

/3.6/ $$\frac{\partial E}{\partial t} + c_0\frac{\partial B}{\partial x} + p\frac{1}{\varepsilon_0}\left(E - \frac{v}{c_0}B\right) = 0,$$

/3.7/ $$\frac{\partial B}{\partial t} + c_0\frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

/3.8/ $$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial x} - p\frac{1}{c_0\bar{\varrho}}B\left(E - \frac{v}{c_0}B\right) = 0,$$

/3.9/ $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \beta\varrho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

/primy opuszczono/, gdzie $\bar{\varrho} = \delta\varrho^{1/\beta}$, $\delta = (\beta/h)^{1/\beta} > 0$.

Dla $(u_i) = (E, B, v, \varrho)$ układ równań /3.6/-/3.9/ ma postać /2.1/ z macierzą

/3.10/ $$(A^1_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & c_0 & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \beta\varrho \\ 0 & 0 & \beta\varrho & v \end{bmatrix}$$

i wektorem

$$(B_i) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0}\left(E - \frac{v}{c_0}B\right) \\ 0 \\ \frac{1}{c_0\bar{\varrho}}\left(E - \frac{v}{c_0}B\right)B \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{3.11}$$

W celu znalezienia macierzy dyspersyjnej $\mathcal{A}_{ik}$ danej formułą /2.4/ obliczymy najpierw pochodną $\partial B_i/\partial u_k$. Mamy

$$(B_i^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0} & -\frac{v}{\varepsilon_0 c_0} & -\frac{B}{\varepsilon_0 c_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{B}{c_0\bar{\varrho}} & -\frac{2vB}{c_0^2\bar{\varrho}} & -\frac{B^2}{c_0^2\bar{\varrho}} & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.12}$$

gdzie $C = B\left(E - \frac{v}{c_0}B\right)/c_0\bar{\varrho}\varrho\beta$. Stąd otrzymujemy

$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega - \frac{i}{\varepsilon_0} & kc_0 + i\frac{v}{\varepsilon_0 c_0} & i\frac{B}{\varepsilon_0 c_0} & 0 \\ kc_0 & -\omega & 0 & 0 \\ -i\frac{B}{c_0\bar{\varrho}} & i\frac{2vB}{c_0^2\bar{\varrho}} & -\omega + kv + i\frac{B^2}{c_0^2\bar{\varrho}} & k\beta\varrho + iC \\ 0 & 0 & k\beta\varrho & -\omega + kv \end{bmatrix} , \tag{3.13}$$

przy czym k oznacza k_1 .

4. ROWNANIE DYSPERSYJNE, PROMIENIE I FUNKCJA FAZOWA

Zakładamy, że $\overset{\circ}{u}_i(t,x)$ w rozwinięciu /2.2/ jest wektorem postaci $(0, 0, v_0, \varrho_0)$ ze stałymi v_0 i ϱ_0 . W takim razie

$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega - \frac{i}{\varepsilon_0} & kc_0 + i\frac{v_0}{\varepsilon_0 c_0} & 0 & 0 \\ kc_0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega + kv_0 & k\beta\varrho_0 \\ 0 & 0 & k\beta\varrho_0 & -\omega + kv_0 \end{bmatrix} , \tag{4.1}$$

a więc

$$\text{/4.2/} \qquad \det(\mathcal{k}_{ik}) = (\omega^2 + i\varepsilon_0^{-1}\omega - k^2c_0^2 + ikv_0\varepsilon_0^{-1}) \times$$
$$\times(\omega^2 - 2kv_0\omega + kv_0 - k^2\beta^2\varrho_0^2).$$

Wszystkie pierwiastki równania dyspersyjnego $\det(\mathcal{k}_{ik}) = 0$ są pojedyncze. Dwa pierwsze,

$$\text{/4.3/} \qquad \omega_1 = -\frac{1}{2}i\varepsilon_0^{-1} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad i \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}i\varepsilon_0^{-1} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta},$$

gdzie $\Delta = -\varepsilon_0^{-2} + 4k^2c_0^2 - 4ikv_0\varepsilon_0^{-1}$, odpowiadają falom typu elektromagnetycznego. Dwa pozostałe pierwiastki,

$$\text{/4.4/} \qquad \omega_3 = (v_0 + \beta\varrho_0)k \quad i \quad \omega_4 = (v_0 - \beta\varrho_0)k,$$

odpowiadają falom typu hydrodynamicznego. Pierwiastki /4.3/ spełniają warunek /2.14/ wtedy, gdy $v_0 = 0$ i gdy $k^2 > \mu_0/4\varepsilon_0$, gdzie $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c_0^2$ jest przenikalnością magnetyczną próżni. Przy tych założeniach warunek /2.23/ jest także spełniony.

Wektory zerowe lewe i prawe macierzy dyspersyjnej /4.1/ przedstawiają się następująco. Dla pierwiastka ω_1 :

$$\text{/4.5/} \qquad (l_i) = (kc_0/\omega_2, -1, 0, 0), \quad (r_i) = (\omega_1/kc_0, -1, 0, 0).$$

Dla pierwiastka ω_2 :

$$\text{/4.6/} \qquad (l_i) = (kc_0/\omega_1, -1, 0, 0), \quad (r_i) = (\omega_2/kc_0, -1, 0, 0).$$

Dla pierwiastka ω_3 :

$$\text{/4.7/} \qquad (l_i) = (0, 0, 1, 1), \qquad (r_i) = (0, 0, 1, 1).$$

Dla pierwiastka ω_4 :

$$\text{/4.8/} \qquad (l_i) = (0, 0, -1, 1), \qquad (r_i) = (0, 0, -1, 1).$$

Przechodzimy teraz do obliczenia promieni i funkcji fazowych odpowiadających pierwiastkom /4.3/ i /4.4/.

Fale typu elektromagnetycznego /pierwiastki ω_1 i ω_2 /. Hamiltonian ma postać

/4.9/ $$\mathcal{H}(k) = -\frac{1}{2} i \varepsilon_0^{-1} \pm \frac{1}{2}\left(-\varepsilon_0^{-2} + 4k^2 c_0^2\right)^{1/2}$$

ze znakiem górnym dla ω_1 i znakiem dolnym dla ω_2 . Stąd prędkość grupowa

/4.10/ $$\gamma = \partial\mathcal{H}/\partial k = \pm 2kc_0^2\left(-\varepsilon_0^{-2} + 4k^2 c_0^2\right)^{-1/2} .$$

Rozwiązując równania kanoniczne Hamiltona

/4.11/ $$\dot{x} = \gamma , \qquad \dot{k} = 0$$

otrzymujemy wstęgi promieniowe

/4.12/ $$x = \gamma t + x^0 , \qquad k = k^0 ,$$

gdzie x^0 i k^0 są wartościami początkowymi funkcji $x(t)$ i $k(t)$ dla $t^0 = 0$. Oczywiście γ jest stałe na promieniach. Lagrangian

/4.13/ $$\mathcal{L}(k) = \frac{1}{2} i \varepsilon_0^{-1} \pm \frac{1}{2} \varepsilon_0^{-2}\left(-\varepsilon_0^{-2} + 4k^2 c_0^2\right)^{-1/2}$$

jest także stały na promieniach. Zatem funcja fazowa określona jest przez całkę

/4.14/ $$\varphi(t,x) = \int_0^t \mathcal{L}\, ds + \varphi^0(x^0) = \mathcal{L}t + \varphi^0(x^0)$$

na promieniu przecinającym oś x w punkcie x^0 , tj. na promieniu /4.12/, przy czym $\varphi^0(x) \equiv \varphi(0,x)$. Niech $k^0(x^0)$ oznacza wartość początkową funkcji $k(t)$ na tym promieniu. Ponieważ

/4.15/ $$k^0(x^0) = d\varphi^0(x^0)/dx^0 ,$$

to ostatecznie funkcja fazowa jest określona w pewnym otoczeniu $t = 0$ dla $t > 0$ przez formułę /4.14/, gdzie położono $x^0 = x - \gamma t$, to jest

/4.15/ $$\varphi(t,x) = \mathcal{L}(k)t + \varphi^{\circ}(x-\gamma t)$$

z funkcją $k(t,x)$ zdefiniowaną w sposób uwikłany przez zależność

/4.16/ $$k = k^{\circ}(x-\gamma(k)t).$$

Fale typu hydrodynamicznego /pierwiastki ω_3 i ω_4 /. Hamiltonian ma postać

/4.17/ $$\mathcal{H}(k) = (v_{\circ} \pm \beta\varrho_{\circ})k$$

ze znakiem górnym dla ω_3 i znakiem dolnym dla ω_4 . Jest to funkcja liniowa zmiennej k , a więc w tym przypadku nie ma dyspersji. Prędkość grupowa

/4.18/ $$\gamma = v_{\circ} \pm \beta\varrho_{\circ} .$$

jest równa odpowiedniej prędkości charakterystycznej dla układu hiperbolicznego /3.6/-/3.9/ /patrz macierz /3.10//. Równania kanoniczne Hamiltona,

/4.19/ $$\dot{x} = \gamma, \qquad \dot{k} = 0,$$

mają rozwiązanie

/4.20/ $$x = \gamma t + x^{\circ}, \qquad k = k^{\circ},$$

czyli takiej samej postaci jak poprzednio. Jednak tym razem lagrangian $\mathcal{L}$ jest równy zero i funkcja fazowa jest stała na promieniach:

/4.21/ $$\varphi(t,x) = \int_0^t \mathcal{L}\,ds + \varphi^{\circ}(x^{\circ}) = \varphi^{\circ}(x^{\circ}) .$$

Zatem w pewnym otoczeniu $t=0$ dla $t>0$ funkcja fazowa jest określona formułą

/4.22/ $$\varphi(t,x) = \varphi^{\circ}(x-\gamma t)$$

z γ danym przez /4.18/.

5. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ TRANSPORTU

Ograniczymy się do obliczenia pierwszego współczynnika rozwinięcia fali biegnącej /2.2/, tj.

/5.1/ $$g_i^1(t,x) = \sigma(t,x)\, r_i$$

dla obydwu rodzajów fal. W tym celu rozwiążemy pierwsze równanie transportu

/5.2/ $$\dot{\sigma} + a e^{ip\gamma}\sigma^2 + b\sigma = 0$$

na promieniach, a następnie znajdziemy funkcje $\sigma(t,x)$ w pewnym otoczeniu $t=0$ dla $t>0$.

Współczynnik a można obliczyć posługując się relacją

/5.3/ $$l_i r_i a = l_i \bar{A}^k_{il} r_l r_k$$

/por. /4.14/ w pracy [1] /, gdzie $\bar{A}^k_{il} = \partial \bar{A}_{il}/\partial u_k$ i $u_k = u_k^0$.
Wziąwszy pod uwagę /2.4/ i /3.13/ stwierdzamy, że $\bar{A}^1_{ik} = 0$ i że

/5.4/ $$(\bar{A}^2_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i/\varepsilon_0 c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i/c_0\varrho & i2v/c_0^2\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

/5.5/ $$(\bar{A}^3_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & i/\varepsilon_0 c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix},$$

$$/5.6/ \qquad (\bar{A}^{1}_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\beta \\ 0 & 0 & k\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd dla fal typu elektromagnetycznego $a = 0$, dla fal typu hydrodynamicznego

$$/5.7/ \qquad a = \pm (1+\beta) k$$

ze znakiem górnym dla ω_3 i znakiem dolnym dla ω_4.

Współczynnik b określony jest relacją

$$/5.8/ \qquad l_i r_i b = l_i D_{ik} r_k$$

/por. /1.18/ w pracy [2] /, gdzie $D_{ik} = I_{ik}\,\partial/\partial t + A^{1}_{ik}\,\partial/\partial x$ i $u_k = u^{0}_k$.

Dla fal typu elektromagnetycznego otrzymujemy

$$/5.9/ \qquad l_i D_{ik} r_k = \frac{k}{\omega_2}\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1/k) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1/k),$$

$$/5.10/ \qquad l_i D_{ik} r_k = \frac{k}{\omega_1}\frac{\partial}{\partial t}(\omega_2/k) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2/k)$$

/pierwsze wyrażenie dla fali odpowiadającej pierwiastkowi ω_1, drugie dla fali odpowiadającej ω_2 /, a stąd.

$$/5.11/ \qquad b_1 = -i\varepsilon_0 k \frac{\partial}{\partial t}(\omega_1/k) + i\varepsilon_0 \omega_2 \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1/k),$$

$$/5.12/ \qquad b_2 = -i\varepsilon_0 k \frac{\partial}{\partial t}(\omega_2/k) + i\varepsilon_0 \omega_1 \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2/k).$$

Po wykonaniu różniczkowania i uwzględnieniu równości

$$/5.13/ \qquad \frac{\partial k}{\partial t} + \gamma \frac{\partial k}{\partial x} = 0,$$

którą /jak łatwo sprawdzić/ spełnia funkcja /4.16/, mamy ostatecznie

/5.14/ $$b_1 = b_2 = -i\varepsilon_0 k^{-2} L_1(k) L_2(k)\, \partial k/\partial x\ .$$

Pochodną $\partial k/\partial x$ w tym wyrażeniu można sprowadzić do postaci

/5.15/ $$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{dk^0}{dx^0}\left(1 + \frac{dk^0}{dx^0}\frac{\partial \gamma}{\partial k}t\right)^{-1},$$

gdzie dk^0/dx^0 jest pochodną funkcji /4.15/.

Dla fal typu hydrodynamicznego proste obliczenia dają współczynnik $b=0$.

Jak widać, fale typu elektromagnetycznego są wyjątkowe /a==0/, tj. zachowują się jak fale liniowe, i ulegają dyspersji /b≠0/. Natomiast fale typu hydrodynamicznego są nieliniowe /a≠0/ i propagują się bez dyspersji /b=0/.

Fale typu elektromagnetycznego. Równanie transportu ma postać

/5.16/ $$\dot{\sigma} + b\sigma = 0.$$

Ponieważ współczynnik $b(k)$ jest stały na promieniach, to rozwiązaniem tego równania jest funkcja

/5.17/ $$\sigma(t) = \sigma^0(x^0)\exp(-bt),$$

gdzie $\sigma^0(x^0)$ jest wartością początkową na promieniu przecinającym oś x w punkcie x^0 . Funkcję $\sigma(t,x)$ określoną w pewnym otoczeniu osi x dla $t>0$ otrzymuje się z /5.17/ przez podstawienie $x^0 = x-\gamma t$ /także we współczynniku b /, co daje

/5.18/ $$\sigma(t,x) = \sigma^0(x-\gamma t)\exp(-bt),$$

przy czym funkcja $k(t,x)$ jest określona przez /4.16/ z $\gamma = \gamma_1$ lub $\gamma = \gamma_2$ danym przez /4.10/.

Fale typu hydrodynamicznego. Równanie transportu

/5.19/ $$\dot{\sigma} + a e^{i\psi}\sigma^2 = 0,$$

gdzie a i ψ są stałe na promieniu, ma rozwiązanie

/5.20/ $$\sigma(t) = (1/\sigma^\circ(x^\circ) + a e^{ip\varphi} t)^{-1}.$$

Stąd mamy

/5.21/ $$\sigma(t,x) = (1/\sigma^\circ(x-\gamma t) + a e^{ip\varphi} t)^{-1}$$

z funkcją $\varphi(t,x)$ postaci /4.22/; $\gamma = \gamma_3$ lub $\gamma = \gamma_4$ jest dane przez /4.18/, $a = a_3$ lub $a = a_4$ jest dane przez /5.7/.

6. ROZWIĄZANIA ASYMPTOTYCZNE

Zbierając wszystkie wyniki otrzymujemy rozwiązania asymptotyczne równań /3.6/-/3.9/ dla $p \to \infty$ odpowiadające kolejnym pierwiastkom równania dyspersyjnego.

Pierwiastek ω_1 :

/6.1/ $$E \sim \frac{1}{ip} \frac{\omega_1}{c_0 k} \sigma^\circ(x-\gamma_1 t) \exp(ip\varphi - bt),$$

/6.2/ $$B \sim -\frac{1}{ip} \sigma^\circ(x-\gamma_1 t) \exp(ip\varphi - bt),$$

/6.3/ $$v \sim 0 ,$$

/6.4/ $$\varrho \sim \varrho_0 .$$

Pierwiastek ω_2 :

/6.5/ $$E \sim \frac{1}{ip} \frac{\omega_2}{c_0 k} \sigma^\circ(x-\gamma_2 t) \exp(ip\varphi - bt),$$

/6.6/ $$B \sim -\frac{1}{ip} \sigma^\circ(x-\gamma_2 t) \exp(ip\varphi - bt),$$

/6.7/ $$v \sim 0 ,$$

/6.8/ $$\varrho \sim \varrho_0 .$$

Pierwiastek ω_3 :

/6.9/ $$E \sim 0 ,$$

/6.10/ $$B \sim 0 ,$$

/6.11/ $$v \sim v_0 + \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} (1/\sigma^\circ(x-\gamma_3 t) + a_3 e^{ip\varphi} t)^{-1},$$

/6.12/ $$\varrho \sim \varrho_0 + \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} (1/\sigma^\circ(x-\gamma_3 t) + a_3 e^{ip\varphi} t)^{-1}.$$

Pierwiastek ω_4 :

/6.13/ $$E \sim 0,$$

/6.14/ $$B \sim 0,$$

/6.15/ $$v \sim v_0 - \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} \left(1/\sigma^\circ (x-\gamma_4 t) + a_4 e^{ip\varphi} t\right)^{-1};$$

/6.16/ $$\varrho \sim \varrho_0 + \frac{1}{ip} e^{ip\varphi} \left(1/\sigma^\circ (x-\gamma_4 t) + a_4 e^{ip\varphi} t\right)^{-1}.$$

W powyższych wyrażeniach funkcja $\varphi(t,x)$ jest postaci

/6.17/ $$\varphi = \mathcal{L}_1 t + \varphi^\circ (x-\gamma_1 t), \quad \varphi = \mathcal{L}_2 t + \varphi^\circ (x-\gamma_2 t)$$

dla ω_1 i ω_2 , albo postaci

/6.18/ $$\varphi = \varphi^\circ (x-\gamma_3 t), \quad \varphi = \varphi^\circ (x-\gamma_4 t)$$

dla ω_3 i ω_4 .

7. KONKLUZJA

Rozwiązania asymptotyczne równań mhd ze skończoną przewodnością można podzielić na dwa rodzaje. W rozwinięciach asymptotycznych pierwszego rodzaju tylko pola E i B mają różny od zera wyraz rzędu $1/p$; są to fale liniowe podlegające dyspersji. W rozwinięciach asymptotycznych drugiego rodzaju tylko v i ϱ mają różny od zera wyraz rzędu $1/p$; są to fale nieliniowe bez dyspersji.

LITERATURA

[1] W. LAPRUS, Metoda fal biegnących dla równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT, 3/1981

[2] W. LAPRUS, Rozwiązania asymptotyczne równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT, 27/1982

[3] W. LAPRUS, Rozwiązania nieliniowych równań teorii magnetojonowej, Prace IPPT, 20/1983