

3.31 — dyfrakcja, propagacja, promieniowanie fal elektromagnetycznych

1.11 — analiza spektralna, równania całkowe, równania różniczkowe

**Tomasz Jabłoński**

**SPEKTRALNE WŁASNOŚCI  
OPERATORÓW NIESAMOSPRĘŻONYCH  
W ELEKTROMAGNETYCZNYCH  
ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH**

11/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1984 r.



56938



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,3 Ark.druk. 1,75

Oddano do drukarni w marcu 1985 r.

Nr zamówienia 165/85

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Tomasz Jabłoński

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

SPEKTRALNE WŁASNOŚCI OPERATORÓW NIESAMOSPRZĘŻONYCH  
W ELEKTROMAGNETYCZNYCH ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH

Wstęp

Praca zawiera opis metod matematycznych, wykorzystujących spektralną teorię operatorów w przestrzeniach Hilberta, przydatnych do analizy pól elektromagnetycznych w zagadnieniach dyfrakcji, promieniowania, a także propagacji /falowody/. Metody te są alternatywą dla metod asymptotycznych optyki geometrycznej i są szczególnie efektywne do wyznaczania pól w przypadku, gdy długość fali porównywalna jest z rozmiarami obiektu /przypadek ten znajduje się poza zakresem stosowalności metod asymptotycznych/ oraz do badania własności rezonansowych obiektów.

W pracy podane są schematy głównych metod spektralnych wraz z dużą ilością ich wariantów stosowalnych przy różnych specyficznych warunkach brzegowych. Główny nacisk położony jest na sformułowanie matematycznych kryteriów stosowalności tych metod. Praca ma na celu stworzenie bazy oraz dostarczenie matematycznego "narzędzia" do rozwiązywania problemów praktycznych w przyszłości. Wychodzi ona na przeciw wzrastającemu zapotrzebowaniu praktyków, którzy w ostatnich latach coraz częściej i w coraz bardziej skomplikowanych problemach elektromagnetyzmu zaczynają stosować metody spektralne, często bez wystarczającego matematyczne-

go usprawiedliwienia. Dostarcza ponadto szeregu nietrywialnych, stymulujących pytań dla matematyków.

## Rozdział 1. Schematy podstawowych metod spektralnych.

### 1.1 Metoda rozkładu na funkcje własne /MRW/.

Schemat MRW zilustrujemy na klasycznym przykładzie. Rozważmy problem:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{w } \Omega = \mathbb{R}^3 - D \quad k^2 > 0 \\ u|_{\Gamma} = f \\ |x| \left( \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

gdzie  $\Omega$  - obszar nieograniczony na zewnątrz skończonego obiektu  $D$  z gładką powierzchnią  $\Gamma$ ,  $\Gamma \in C^2$ .

Jeśli szukamy rozwiązania w postaci:

$$u = \int_{\Gamma} \frac{e^{ikr_{xy}}}{4\pi r_{xy}} g(y) dy, \quad r_{xy} = |x-y|$$

to

$$Tg = f$$

gdzie

$$/1.1.1/ \quad T(k)g = \int_{\Gamma} \frac{e^{ikr_{xy}}}{4\pi r_{xy}} g(y) dy$$

To, co praktycy nazwali metodą rozkładu na funkcje własne /MRW/ jest niczym innym, niż metodą Pikarda rozwiązywania samo-sprzężonych równań całkowych pierwszego rodzaju.

Praktycy zakładają /najczęściej bez sprawdzenia/, że:

1/ operator  $T$  ma wektory własne:

$$Tf_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad |\lambda_1| \gg |\lambda_2| \gg \dots$$

2/ operator  $T$  nie posiada wektorów stowarzyszonych /to znaczy nietrywialnych rozwiązań równania:

$$(T - \lambda I)^n f = 0$$

dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  oraz  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

3/ zbiór wektorów własnych  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  systemu własnego operatora  $T$ :  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  tworzy bazę Riesz'a w przestrzeni  $H = L^2(\Gamma)$ . /patrz definicja poniżej/

Przy powyższych założeniach równanie:

$$Tg = f$$

rozwiązuje się przy pomocy prostej formuły /konsekwencja zachodzenia równości Parsevala/:

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, f_j)_H}{\lambda_j^{(k)}} f_j$$

gdzie  $(\cdot, \cdot)_H$  - iloczyn skalarny w  $H$ .

Na tym w zasadzie polega MRW. Jest ona używana bez analizy matematycznej przez praktyków na przykład w [1], [2], [3], [4].

W obszarze rezonansowym, jest ona niezwykle dogodna z praktycznego punktu widzenia, gdyż wtedy w formule na  $g$  tylko kilka członów posiada współczynniki istotnie różne od zera. Ponadto, znajomość "modów własnych" pozwala na głębszy fizyczny wgląd w istotę badanego zjawiska.

Definicja

Niech:

- $\{h_j\}_{j=1}^\infty$  - baza ortonormalna w przestrzeni Hilberta  $H$ ,
- $1 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$  - ciąg liczb całkowitych,  $m_l \rightarrow \infty$  przy  $l \rightarrow \infty$ ,
- $H_1 = \text{span} / h_{m_1}, h_{m_1+1}, \dots, h_{m_1+1-1} /$ ,
- $Q_1$  - ortoprojektor na  $H_1$ ,
- $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  - zupełny system minimalny w  $H$ ,
- $F_1 = \text{span} / f_{m_1}, f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+1-1} /$
- $P_1$  - projektor na  $F_1$ .

Wtedy:

1/ System  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  tworzy bazę Rieszsa w  $H$  /oznaczenie:  $\{f_j\} \in R/H/$  /, jeśli istnieje izomorfizm  $B$  taki, że

$$Bh_j = f_j \quad \text{dla wszystkich } j \in \mathbb{N}.$$

2/ System  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  tworzy bazę Rieszsa z nawiasami w  $H$  /oznaczenie:  $\{f_j\} \in R_b/H/$  /, jeśli istnieje izomorfizm  $B$  taki, że

$$BH_1 = F_1 \quad \text{dla wszystkich } l \in \mathbb{N}$$

3/ System  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  tworzy bazę Bari z nawiasami w  $H$  /oznaczenie:  $\{f_j\} \in B_b/H/$  /, jeśli

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|P_l - Q_l\|_H^2 < +\infty$$

Dalekie od trywialnych pytania, jakie się natychmiast pojawiają w związku z MRW, są następujące:

1/ Czy prawdą jest, że niesamosprężony i zwarty /a taki właśnie jest/ operator  $T$  ma w ogóle wartości własne? /a priori nie musi; np. operatory Volterry nie mają niezerowych wartości własnych/.

2/ Czy system własny operatora  $T$  jest zupełny w  $H = L^2(\Gamma)$ ?

3/ Czy zupełny system własny operatora  $T$  tworzy bazę Rieszsa w  $L^2(\Gamma)$ ?

/zupełny system w  $H$  nie musi tworzyć bazy w  $H$ : na przykład -  $H = L^2(0,1)$ ,  $f_n/x = x^n$ ,  $n = 0,1,2,\dots$  wtedy nie dla każdego  $g \in L^2(0,1)$   $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$  /.

4/ Załóżmy, że system własny operatora  $T$  nie tworzy bazy Rieszsa w  $H = L^2(\Gamma)$  /z algebry liniowej wiadomo, że system własny niesamosprężonego operatora nie musi tworzyć bazy: na przykład  $A$  działający w  $R^2$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  posiada tylko jeden wektor własny/.

Wtedy: czy i kiedy zbiór wszystkich wektorów stowarzyszonych / $\equiv$  system stowarzyszony/ operatora  $T$  tworzy bazę Rieszsa w  $H$ ?

/Wiadomo, że w  $R^n$  dla każdego operatora /macierzy/ system stowarzyszony tworzy bazę w  $R^n$  i każda baza jest bazą Rieszsa; w nieskończonej-wymiarowej przestrzeni Hilberta jest to nieprawdą/.

5/ Kiedy operator  $T$  nie posiada wektorów stowarzyszonych, a jedynie własne, tworzące bazę w  $H$ ?

Z praktycznego punktu widzenia najistotniejsze są pozytywne odpowiedzi na pytania 1/, 4/, 5/. O tym, że pytania powyższego

typu są nietrywialne niech świadczy fakt, że nic nie wiadomo o istnieniu i własnościach funkcji własnych dla podstawowego w teorii laserów równania:

$$/1.1.2/ \quad \int_{-1}^1 e^{i(x-y)} f(y) dy = \lambda f(x)$$

Na szczęście sytuacja jest znacznie lepsza w przypadku wielu operatorów interesujących praktyków /między innymi operatora T/.

### 1.2 Metoda rozkładu względem osobliwości /MRO/.

Schemat MRO zilustrujemy na następującym problemie /niestacjonarnym/:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & , t \geq 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u|_{\Gamma} = 0 \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = f(x), f \in C_0^\infty(\Omega) \end{cases}$$

gdzie  $\Omega$  - obszar nieograniczony na zewnątrz skończonego obiektu  $D$  z gładką powierzchnią  $\Gamma$ ,  $\Gamma \in C^2$ .

Jeśli weźmiemy funkcję Green'a następującego problemu:

$$\begin{cases} (-\Delta + k^2) G = \delta(x-y) & \text{w } \Omega, \operatorname{Re} k > 0 \\ G|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

to rozwiązanie  $u$  można napisać w postaci:

$$/1.2.1/ \quad u = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{kt} v(x, k) dk$$

gdzie

$$v(x, k) = \int_{\Omega} G(x, y, -k^2) f(y) dy$$

Założmy, że  $v(x, k)$  jest meromorficzna w całej  $k$ -płaszczyźnie zespolonej /dla problemu przykładowego jest to prawdą; cf. [5]/ oraz, że  $v(x, k)$  spełnia następujące oszacowanie:

$$/1.2.2/ \quad |v(x, k)| \leq \frac{\varepsilon}{1+|k|^a}, \quad \varepsilon = \text{const.} > 0, a > \frac{1}{2}$$

dla  $\operatorname{Re} k > -A$ ,  $|\operatorname{Im} k| > N_A$ ,  $A > 0$ .

Oszacowanie to pochodzi od Lax'a-Philips'a [6].

Spełnienie powyższych założeń pozwala przesunąć w lewo kontur całkowania w /1.2.1/, w wyniku czego otrzymujemy następujący rozkład /asymptotyczny/ rozwiązania względem osobliwości funkcji Green'a  $G/x, y, -k^2/$ :

$$/1.2.3/ \quad u = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{b_j} c_j^{(m)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{k_j t} + o(e^{-|\operatorname{Re} k_N| t})$$

gdzie  $k_j$  - bieguny funkcji  $G/x, y, -k^2/$ ,  $b_j$  - ich krotności.

Rozkład /1.2.3/ jest rozkładem typu MRO. Suma jest wkładem reszduów w biegunach  $k_j$ ,  $j \leq N$ , zaś reszta pochodzi z oszacowania całki w /1.2.1/ z  $c < -|\operatorname{Re} k_N|$ . Zauważmy jeszcze, że

$$\operatorname{Res}_{k=k_j} \frac{e^{kt}}{(k-k_j)^m} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{k_j t}$$

Uwaga:

Główna trudność w zastosowaniu MRO polega na udowodnieniu zachodzenia /1.2.2/. Sama meromorficzność funkcji  $v/x, k/$  nie wystarczy do otrzymania /1.2.3/, gdyż istnieje możliwość występowania biegunów  $-\varepsilon_n + i\omega_n$  z bardzo małym  $\varepsilon_n > 0$  i bardzo dużym  $\omega_n$ .

W związku z MRO powstają następujące pytania:

- 1/ Co można powiedzieć o położeniu biegunów  $k_j$ ?
- 2/ Kiedy zachodzi oszacowanie /1.2.2/?
- 3/ Jakie są własności biegunów  $k_j$ ?
- 4/ Jak te bieguny wyliczać?
- 5/ Czy bieguny zależą w sposób ciągły od brzegu obiektu?
- 6/ W jakim stopniu zbiór biegunów  $\{k_j\}$ ,  $\operatorname{Re} k_j < 0$ , determinuje kształt obiektu?

Wykorzystując praktycznie MRO zakłada się, że tylko kilka członów w /1.2.3/ jest istotnych, na przykład pierwsze trzy /tak będzie, gdy  $|\operatorname{Re} k_j| \gg |\operatorname{Re} k_3|$ ,  $j > 3/$ . Mierzy się następnie eksperymentalnie chwilowe pola  $u/x, t/$  i wyznacza bieguny  $k_1, k_2, k_3$  zakładając przy tym, że położenie tych trzech biegunów funkcji Green'a



$G/x, y, -k^2/$  dostarcza wystarczającą ilość informacji do zidentyfikowania obiektu  $D = R^3 - \Omega$ . Założenie to nie posiada dotychczas poparcia teoretycznego.

W oparciu o powyższe rozważania można sformułować interesujący problem odwrotny:

Dany zbiór liczb zespolonych  $\{k_j\}$ ,  $\operatorname{Re} k_j < 0$ . Znaleźć obiekt rozpraszający taki, że funkcja Green'a dla tego obiektu ma bieguny  $\{k_j\}$ . Rozstrzygnąć przy tym należy, czy zbiór  $\{k_j\}$  determinuje obiekt jednoznacznie oraz podać ograniczenia, jakie trzeba nałożyć na zbiór  $\{k_j\}$ , aby był to zbiór biegunów funkcji Green'a pewnego obiektu.

Powyższy problem pozostaje dotychczas otwarty. Znany jest jedynie następujący fakt /cf. [6]/: jeśli obiekt jest typu gwiazdy oraz warunek brzegowy jest warunkiem Dirichlet'a, to  $\{k_j\}$  spełnia warunek:

$$|\operatorname{Re} k_j| > a \ln |\operatorname{Im} k_j| + b, \quad a > 0$$

Z praktycznego punktu widzenia sformułowany wyżej problem odwrotny nie wygląda zbyt obiecująco, ponieważ tylko w niewielu przypadkach znane są zespolone bieguny. Co więcej, wydaje się mało możliwym wyciąganie wniosków ogólnych o obiekcie bez poważnego zawężenia klasy rozważanych obiektów /na przykład jeśli a priori wiadomo, że analizowanym obiektem jest jakaś kula, to wtedy można w oparciu o MRO wyznaczyć jej promień/. Dlatego wydaje się, że w celu praktycznego wykorzystania MRO do identyfikacji obiektów, lepiej jest sporządzić empiryczne tabele odpowiedzi dla typowych obiektów, niż rozwijać matematyczną teorię w oparciu o sformułowany problem odwrotny. Jednakowoż, problem ten pozostaje bardzo interesującym z matematycznego punktu widzenia.

## Rozdział 2. Matematyczne aspekty metod MRW i MRO.

Rozdział ten zawiera podstawowe fakty znane matematykom, związane z metodami MRW i MRO. Podane są odpowiedzi na najistotniejsze pytania zadane w rozdziale 1 oraz sformułowane są główne

problemy otwarte, w przypadkach gdy takie odpowiedzi pozostają nieznane. Pełne dowody matematyczne zostały pominięte, ponieważ są one trudne dla niespecjalistów z analizy spektralnej, są długie, a można je znaleźć w cytowanej literaturze.

### 2.1. Zupełność systemu stowarzyszonego operatora liniowego A w przestrzeni Hilberta H.

Może być ona ustalona w oparciu o następujące twierdzenia:

#### Twierdzenie /2.1.1/ /Gohberg-Krein [7]/

Jeśli L jest samosprzężonym operatorem w przestrzeni Hilberta H z widmem dyskretnym,  $0 \notin \sigma(L)$ , Q jest operatorem liniowym,  $D/Q \supset D/L$ ,  $L^{-1}Q$  jest zwarty oraz  $p/L^{-1}Q L^{-1} / < \infty$ , wtedy system stowarzyszony operatora

$$A = L + Q$$

jest zupełny w H.

Uwaga:

$p/T / < \infty$  oznacza, że T jest zwarty oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p / T / < + \infty$ , gdzie  $s_n$  są wartościami singularnymi operatora T, to znaczy wartościami własnymi operatora  $|T| = \sqrt{T^*T}$ .

#### Twierdzenie /2.1.2/ /Gohberg-Krein [7]/

Jeśli operator A jest zwarty, dyssypatywny,  $\text{Im } A$  jest operatorem nuklearnym,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf n \cdot s_n / A / = 0$ , to system stowarzyszony operatora A jest zupełny w H.

Uwaga:

Operator liniowy A nazywamy dyssypatywnym, jeśli dla każdego  $f \in D/A /$   $\text{Im} / Af, f /_{\mathbb{H}} \geq 0$ .

Zwarty operator liniowy A nazywamy nuklearnym, jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n / A / < + \infty$

#### Twierdzenie /2.1.3/ /Ramm [8]/

Jeśli operator  $A \gg 0$  jest zwarty, B jest dyssypatywny i nuklearnym, to system stowarzyszony operatora  $A + B$  jest zupełny w H.

Przykład.

Operator T zdefiniowany w /1.1.1/:

$$Tg = \int_{\Gamma} \frac{e^{ikr_{xy}}}{4\pi r_{xy}} g(y) dy$$

działający w  $H = L^2(\Gamma)$ , można rozbić na sumę:

$$T = T_1 + T_2$$

gdzie

$$T_1 g = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r_{xy}} g(y) dy$$

Wtedy  $T_1 \geq 0$ , bo jądro  $\frac{1}{4\pi r_{xy}}$  jest dodatnio określone.  $T_1$  jest zwarty i samosprzężony, bo jest operatorem całkowym ze słabą osłabliwością. Łatwo pokazuje się dyssypatywność i nuklearność operatora  $T_2$  /nuklearność w oparciu o dostateczną gładkość jądra  $T_2$ /. Zatem, z twierdzenia /2.1.3/ otrzymujemy zupełność systemu stowarzyszonego operatora  $T$  w  $H = L^2(\Gamma)$ .

Twierdzenie /2.1.4/ /Simon-Reed [9]/

Jeśli  $A$ -operator nuklearny, który jest silnie  $m$ -akretywny, to znaczy, że dla każdego  $f \in H$  istnieje  $\epsilon > 0$  takie, że

$$\arg [f, Af]_{\mathbb{H}} \leq \pi/2 - \epsilon$$

to system stowarzyszony operatora  $A$  generuje całą przestrzeń  $H$ .

Uwaga:

Niech  $A$  jest operatorem silnie  $m$ - akretywnym, niech  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Wtedy:

$$\operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A) \quad ; \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathbb{H}} \leq (-\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$$

## 2.2. Bazowość systemu stowarzyszonego niesamosprzężonego operatora $A$ działającego w przestrzeni Hilberta $H$ .

Przez bazowość systemu stowarzyszonego operatora rozumiemy fakt, że zbiór wszystkich wektorów stowarzyszonych operatora tworzy bazę w  $H$ . Nasza wiedza na temat spektralnych własności operatorów niesamosprzężonych jest bardzo ograniczona. Na przykład nie wiadomo, jak badać te własności w przypadku operatora z równania /1.1.2/. Jeśli niesamosprzężony operator jest słabym zaburzeniem operatora samosprzężonego /w sensie zdefiniowanym poniżej/, to

przy pewnych założeniach dotyczących dystrybucji wartości własnych takiego operatora, udaje się uzyskać bazowość systemu stowarzyszonego, dokładniej:

niech  $L$  - gęsto określony, samosprzężony operator z widmem dyskretnym, działający w przestrzeni Hilberta  $H$ ,  $0 \notin \sigma(L)$ . Załóżmy ponadto, że spełniony jest następujący warunek dotyczący rozkładu wartości własnych:

$$/2.2.1/ \quad \lambda_n = cn^p + O(n^{p_1}) \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

gdzie  $p > 0$ ,  $c > 0$ ,  $p_1 < p$ .

Rozważmy operator  $A$

$$/2.2.2/ \quad A = L + Q \quad , \quad D/A = D/L$$

bliski operatorowi  $L$  w tym sensie, że operator /niesamosprzężony/  $Q$  jest subordynowany w stosunku do  $A$ , to znaczy:

$$\text{dla każdego } f \in D/L^a/: \quad \|Qf\|_H \leq C_a \|L^a f\|_H$$

gdzie  $a < 1$  oraz  $D/Q \supset D/L$ .

Ponieważ dla  $\lambda \notin \sigma(L)$  mamy:

$$/2.2.3/ \quad \begin{aligned} \|A - \lambda I\|^{-1} &= \|L + Q - \lambda I\|^{-1} = \\ &= \left\{ I + \|L - \lambda I\|^{-1} L^a L^{-a} Q \right\}^{-1} \|L - \lambda I\|^{-1} \end{aligned}$$

więc łatwo widać, że  $\lambda \notin \sigma(A)$  o ile

$$/2.2.4/ \quad \left\| \|L - \lambda I\|^{-1} L^a \right\|_H < \frac{1}{C_a}$$

Ze zwartości  $L^{-1}$  mamy, że

$$\left\| \|L - \lambda I\|^{-1} L^a \right\|_H \leq \sup_n |\lambda_n|^a |\lambda_n - \lambda|^{-1}$$

Zatem jeśli

$$|\lambda_n - \lambda| \geq |\lambda_n|^a C_a q$$

gdzie  $q > 1$  jest dowolne, to warunek /2.2.4/ jest spełniony.

Udowodniliśmy zatem

Lemat /Kato [11], Kacnelson [10]/

Niech  $L$  - samosprzężony operator z widmem dyskretnym,

$Q$  - liniowy, subordynowany w stosunku do  $L$ ,

$$A = L + Q$$

Wtedy  $\sigma(A) \subset U$  gdzie

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \lambda : |\lambda - \lambda_n| < |\lambda_n|^{\alpha} C_{\alpha} q, q > 1 \}$$

Ponadto,  $\sigma(A)$  jest dyskretne.

/Dyskretność widma wynika ze zwartości operatora  $/L - \lambda I/^{-1}$  i ograniczonosci operatora  $\{I + /L - \lambda I/^{-1} L^{\alpha} L^{-\alpha} Q\}^{-1}$  w /2.2.3/ /.

W oparciu o powyższy lemat, wykorzystując własności projektorów spektralnych, oszacowania dla rezolwenty operatora  $A$  oraz informacje o dystrybucji wartości własnych /co pozwala tak podobać kontury całkowania w całkach Riesz, aby odpowiednie szeregi były zbieżne/ Kacnelson w [10], a także Agranovich w [1] uzyskali podstawowe twierdzenie o bazowości systemu stowarzyszonego operatora  $A$ :

Twierdzenie /2.2.5/ /Kacnelson [10]/

Przy założeniach /2.2.1/:

$$p/1 - \alpha/ = 1 \Rightarrow \{f_j\} \in R_b/H/$$

$$p/1 - \alpha/ > 1 \Rightarrow \{f_j\} \in B_b/H/$$

$$p/1 - \alpha/ \geq 2 \Rightarrow \{f_j\} \in R/H/ \quad /Ramm [1]/$$

gdzie  $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$  - system stowarzyszony operatora  $A$  zdefiniowanego w /2.2.2/.

Uwaga:

Przy pewnych dodatkowych założeniach Agranovich [1] pokazał, że szeregi rozwijane względem bazowych wektorów stowarzyszonych są szybko-zbieżne.

Uwaga:

Wykorzystując powyższe twierdzenie pokazuje się bazowość systemu stowarzyszonego dla operatora  $T$  zdefiniowanego w /1.1.1/ oraz wszystkich operatorów generowanych przez zagadnienia brzegowe w wariantach metody MRW, opisanych w rozdziale 3 tej pracy. /Szczegóły - patrz dodatek w [1]/.

### 2.3. Istnienie bazy ortonormalnej złożonej tylko z wektorów własnych.

Problem ten ma znaczenie praktyczne, gdyż łatwiej wylicza się wektory własne, niż stowarzyszone. Wiadomo, że operatory normalne /  $AA^{\#} = A^{\#}A$  / nie posiadają wektorów stowarzyszonych. Wystarczy zatem podać warunek dostateczny na to, aby dany operator był normalny. Jeśli znane jest jego jądro, to warunek ten jest zazwyczaj pewnym warunkiem dotyczącym brzegu  $\Gamma$  rozważanego obiektu.

#### Przykład 1. [8]

Rozważmy operator  $T$  zdefiniowany w /1.1.1/. Łatwo pokazuje się, że jądro  $C/x,y/$  operatora  $C = TT^{\#} - T^{\#}T$  wynosi:

$$/2.3.1/ \quad C(x,y) = 2i \int_{\Gamma} \frac{\sin[k(r_{xt} - r_{yt})]}{16\pi^2 r_{xt} r_{yt}} dt$$

Zatem,  $T$  jest normalny iff  $C/x,y/ = 0$  na  $\Gamma$ .

Znikanie /2.3.1/ jest warunkiem dotyczącym powierzchni  $\Gamma$ , spełnionym na przykład dla sfery.

#### Przykład 2. [13]

Wypiszmy podstawowe równanie teorii syntezy anten liniowych:

$$B\varphi = \int_{-a}^a e^{ixy} \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x), \quad -a \leq x \leq a$$

Tutaj jądro operatora  $D = BB^{\#} - B^{\#}B$  wynosi:

$$D(x,y) = 2i \int_{-a}^a \sin\{(x-y)z\} dz$$

Warunek  $D/x,y/ = 0$  dla  $x,y \in [-a,a]$  jest oczywiście spełniony. Zatem  $B$  jest operatorem normalnym w  $L^2[-a,a]$  i z jego wektorów własnych można zbudować bazę ortonormalną w  $L^2[-a,a]$ .

Uwaga:

Normalność operatora nie jest warunkiem koniecznym na bezwzględność

systemu własnego tego operatora. W nieskończenie-wymiarowych przestrzeniach Hilberta istnieją zwarte operatory, których wektory własne rozpinają całe  $H$ , a które nie są podobne do operatorów normalnych /przykład - cf. [14]/.

Uwaga:

W [15] sformułowany jest następujący fakt:

Podprzestrzeń własna i podprzestrzeń stowarzyszona swartego operatora  $A$ , odpowiadająca wartości własnej  $\lambda$  pokrywają się

iff 1/  $\lambda$  jest biegunem prostym rezolwenty  $(A - \lambda I)^{-1}$

lub if 2/  $(A - \lambda I)^2 f = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)f = 0$

lub iff 3/ operator  $A - \lambda I$  nie posiada zer w podprzestrzeni  $\text{Range}(A - \lambda I)$ .

#### 2.4. Lokalizacja i własności biegunów funkcji Green'a.

Niech  $G(x,y,k)$  - funkcja Green'a dla zewnętrznego zagadnienia Dirichlet'a:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)G = -\delta(x-y) & \text{w } \Omega \\ G|_{\Gamma} = 0 \\ |x| \left( \frac{\partial G}{\partial |x|} - kG \right) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, k > 0 \end{cases}$$

gdzie  $\Omega$  - obszar nieograniczony na zewnątrz skończonego obiektu  $D$  z gładkim brzegiem  $\Gamma$ ,  $\Gamma \in C^2$ .

Funkcja  $G(x,y,k)$  jest meromorficzna w całej  $k$ -płaszczyźnie zespolonej. Zachodzi interesujący fakt dotyczący biegunów tej funkcji /cf. appendix 7 w [12]/:

#### Twierzenie 2.4.1/

Zbiór biegunów funkcji Green'a  $G(x,y,k)$  pokrywa się ze zbiorem zer funkcji  $\lambda_n/k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gdzie  $\lambda_n/k$  są wartościami własnymi operatora  $T/k$  zdefiniowanego w /1.1.1/.

Uwaga:

Znane są metody wariacyjne wyliczania wartości własnych niesamoprzeczonych, swartych operatorów /na przykład cf. [16]/.

Uwaga:

Niewiele wiadomo na temat lokalizacji zespolonych biegunów funkcji Green'a oraz kiedy bieguny te są proste. Dysponujemy tylko częściowymi informacjami o bardzo szczególnych przypadkach, na dodatek trudnymi do wykorzystania w praktycznych problemach.

### 2.5. Ogólna metoda wyliczania biegunów funkcji Green'a.

Została ona zaproponowana przez A.G. Ramm'a /cf. chap.IV w [12]/. Jest wariantem ogólnej metody projekcji. Zademonstrujemy ją na przykładzie problemu z impedancyjnym warunkiem brzegowym:

$$/2.5.1/ \quad \begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \Omega = \mathbb{R}^3 - D \\ \frac{\partial u}{\partial N} - hu \Big|_{\Gamma} = 0 & h = \text{const.}, \operatorname{Re} h > 0 \\ u \sim \frac{e^{ik|x|}}{|x|} f(n, k) & |x| \rightarrow \infty, \quad n = \frac{x}{|x|} \end{cases}$$

gdzie  $\Gamma$  - jest gładkim brzegiem ograniczonego obszaru  $D$ , a  $N$  normalną zewnętrzną do  $\Gamma$ .

Jeśli poszukujemy rozwiązania w postaci

$$/2.5.2/ \quad u = \int_{\Gamma} \frac{e^{ikr_{xy}}}{4\pi r_{xy}} \epsilon(y) dy$$

to podstawiając /2.5.2/ do warunku impedancyjnego w /2.5.1/ otrzymujemy:

$$/2.5.3/ \quad \epsilon = Q\epsilon$$

gdzie

$$Q\epsilon = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial N_x} \frac{e^{ikr_{xt}}}{2\pi r_{xt}} \epsilon(s) ds - h \int_{\Gamma} \frac{e^{ikr_{xt}}}{2\pi r_{xt}} \epsilon(s) ds$$

Niech  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  - baza Riesz'a w  $H = L^2(\Gamma)$  oraz

$$\epsilon_N = \sum_{j=1}^N c_j e_j$$

Podstawiając  $\epsilon_N$  do /2.5.3/ i biorąc iloczyn skalarny w  $L^2(\Gamma)$  z  $e_j$  otrzymujemy układ równań na nieznane współczynniki  $c_j$ :



$$/2.5.4/ \quad \sum_{j=1}^N b_{ij}(k) \epsilon_j = 0$$

gdzie

$$/2.5.5/ \quad b_{ij}(k) = \delta_{ij} - (\Phi \epsilon_j, \epsilon_i)_{L^2(\Gamma)}$$

Składowe ten ma nietrywialne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy

$$/2.5.6/ \quad \det [ b_{ij}(k) ] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq N$$

lewa strona /2.5.6/ jest całkowatą funkcją  $k$ . Niech  $k_m^{(GV)}$  będą jej pierwiastkami. Dowodzi się następujący

lemat

Granice:  $\lim_{N \rightarrow \infty} k_m^{(N)} = k_m$  istnieją i równe są biegunom funkcji Green'a dla danego problemu. Ponadto, każdy biegun może być uzyskany w ten sposób.

Uwaga:

Powyższa metoda stosowalna jest do szerokiej klasy warunków brzegowych /włączając warunek Dirichlet'a, Neumann'a oraz trzeciego rodzaju/. Na przykład jeśli  $u|_{\Gamma} = 0$ , to /2.5.3/ ma postać:

$$T \epsilon = \int_{\Gamma} \frac{e^{ik_0 t}}{4\pi r_{0t}} \epsilon(\lambda) d\lambda = 0 \quad , t \in \Gamma$$

żeś /2.5.5/, /2.5.6/ wygląda następująco:

$$\beta_{ij}(k) = (T \epsilon_j, \epsilon_i)_{L^2(\Gamma)}$$

$$\det [ \beta_{ij}(k) ] = 0 \quad 1 \leq i, j \leq N$$

Uwaga:

W zastosowaniu praktycznym metody występują dwa nietrywialne momenty: 1/ - wyliczenie  $b_{ij}/k$  w /2.5.4/ oraz 2/ - numeryczne rozwiązanie równania /2.5.6/. W obu przypadkach istnieją stosowne metody w literaturze z analizy numerycznej.

Uwaga:

Nietrywialnie dowodzi się, że w każdym zwartym obszarze płaszczyzny zespolonej bieguny zależą w ciągły sposób od brzegu obiektu /cf. [16]/.

## 2.6. Otwarte problemy związane z MRW i MRO.

- 1/ Zastosować kryteria na zupełność /bazowość/ systemu stowarzyszonego dla różnych operatorów występujących w konkretnych zagadnieniach rozważanych przez praktyków.
- 2/ W zagadnieniach tych, metodą MRW, znaleźć rozwiązania na pole EM oraz przeanalizować własności rezonansowe obiektów.
- 3/ Podać warunki na brzeg  $\Gamma$ ; aby odpowiadający operator był normalny /patrz 2.3/.
- 4/ Zbadać własności spektralne operatora całkowitego teorii laserów, zdefiniowanego w /1.1.2/.
- 5/ W jakim stopniu bieguny funkcji Green'a determinują geometrię obiektu rozpraszającego?
- 6/ Rozstrzygnąć, czy bieguny funkcji Green'a dla zewnętrznego problemu Dirichlet'a /z wypukłym, gładkim brzegiem/ są proste. /dla impedancyjnych warunków brzegowych mogą wystąpić bieguny wyższych rzędów/
- 7/ Rozstrzygnąć, czy rząd bieguna pokrywa się z krotnością zera odpowiadającej wartości własnej.
- 8/ Przetestować numerycznie metodę /2.5/ znajdowania biegunów funkcji Green'a na praktycznych problemach.
- 9/ Czy możliwe jest przejście z  $N \rightarrow \infty$  w rozwinięciu MRO /1.2.3/ i otrzymanie w wyniku tego szeregu zbieżnego?

## Rozdział 3. Warianty metody MRW w zagadnieniach brzegowych występujących w praktyce.

Metodę MRW wykorzystuje się w praktyce w następujący sposób:

Niech dane jest /skalarne/ zagadnienie dyfrakcyjne, promieniowania, czy propagacji w postaci niejednorodnego /ze źródłami/ równania Helmholtz'a z pewnymi warunkami brzegowymi /Dirichlet'a, Neumann'a, impedancyjnymi, sprzęgającymi itp./.

Rozwija się pomocnicze zagadnienie własne w postaci jednorodnego równania Helmholtz'a z analogicznymi warunkami brzegowymi,

w którym jeden ze współczynników zagadnienia /na przykład  $k, \xi, h, \rho$ , itp./ spełnia rolę wartości własnej /parametru spektralnego/. Warianty MRW różnią się sposobem wprowadzenia parametru spektralnego - stąd biorą swoje nazwy - na przykład:  $\xi$  - metoda,  $h$  - metoda itd.

Dowodzi się, że operator generowany przez pomocnicze zagadnienie własne ma widmo dyskretne /najczęściej nierzeczywiste - gdy występują straty energii/ oraz, że jego system własny /stowarzyszony/ tworzy bazę w stosownej przestrzeni Hilberta. Pozwala to poszukiwać rozwiązania problemu wyjściowego w postaci rozwinięcia w tej bazie:

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n$$

gdzie  $U^0$  - pole pierwotne,

$u_n$  - funkcje własne /stowarzyszone/ zagadnienia jednorodnego,

$A_n$  - wylicza się, wykorzystując związki ortogonalności oraz żądając, aby  $U$  spełniało wyjściowe równanie /warunek brzegowy/.

Często zagadnienie własne daje się sprowadzić do równoważnego mu równania całkowego i rozwiązać numerycznie metodami wariacyjnymi lub elementu skończonego.

Umiejętność wyznaczenia dostatecznej ilości wartości i funkcji własnych decyduje o praktycznej użyteczności metody w konkretnych zagadnieniach. W przypadku, gdy wartość któregoś z parametrów obiektu jest bliska wartości rezonansowej /to znaczy którejś z wartości własnych zagadnienia pomocniczego/, tylko niewielka ilość współczynników  $A_n$  występujących w rozwinięciu rozwiązania jest istotnie różna od zera. Wtedy małym kosztem numerycznym możemy otrzymać dostatecznie dokładne rozwiązanie dla pola EM. Metoda nadaje się do badania własności rezonansowych dla bardzo szerokiej klasy obiektów, biorąc pod uwagę geometrię oraz rodzaj materiału /na przykład przenikalność dielektryczna, czy impedancja może być funkcją położenia, przypadki siatek metalowych, falowców o dowolnym przekroju itp./.

### 3.1. Klasyyczna k-metoda.

Zilustrujemy ją na przykładzie wewnętrznego zagadnienia Dirichlet'a:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \omega \subset V \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

gdzie  $V$  - ograniczony obszar z gładkim brzegiem  $\Gamma$ .

Pomocnicze zagadnienie własne, jednorodne ma postać:

$$/3.1.1/ \quad \begin{cases} \Delta u_n + k_n^2 u_n = 0 & \omega \subset V \\ u_n|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

$k_n$  pełni tutaj rolę parametru spektralnego /wartości własnej/. Dobrze wiadomo, że operator generowany przez to zagadnienie ma widmo dyskretne i że ma miejsce "rzeczywista" ortogonalność funkcji własnych:

$$\int_V u_n u_m dV = 0, \quad n \neq m$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$/3.1.2/ \quad U = \sum_n A_n u_n$$

gdzie  $A_n$  wyznacza się korzystając ze związków ortogonalności tak, aby spełnione było wyjściowe równanie z prawą stroną równą  $f$ :

$$A_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \frac{\int_V f u_n dV}{\int_V u_n^2 dV}$$

Uwaga:

$k$ -metoda nie nadaje się do zagadnień zewnętrznych. W tym przypadku bowiem, dla wszystkich  $k_n$ ,  $\text{Im } k_n > 0$  zaś funkcje własne zagadnienia /3.1.1/ rosną na nieskończoności. Wtedy /3.1.2/ nie spełnia warunku wypromieniowania i aby zachować rozwiązanie w postaci szeregu po funkcjach własnych należałoby dołączyć całkę po widmie ciągłym /króre jest wtedy niepustym zbiorem!/, kompensują-

czą eksponencjalny wzrost szeregu. Na przykład dla cylindra o promieniu  $a$ , wartości własne są pierwiastkami równania:

$$J_m^{(2)}/k_{mn} a/ = 0$$

zaś funkcje własne rosną jak

$$\frac{\exp(\text{Im } k_{mn} r)}{\sqrt{r}} ; (\text{Im } k_{mn} > 0)$$

O atrakcyjności i praktycznej przydatności metody MRW decyduje fakt, że przy innym sposobie wprowadzania parametru spektralnego niż w  $k$ , udaje się zachować dyskretność widma generowanego przez zagadnienie operatora, również dla zagadnień zewnętrznych.

### 3.2. $\xi$ -metoda.

Przykładowo rozważmy problem dla dielektryka z  $\xi = \text{const.}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 \xi u = f \quad \text{w } V^+ \\ \Delta u + k^2 u = f \quad \text{w } V^- = (V^+)^c \\ u^+ - u^- |_{\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} |_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

warunek wypromieniowania

gdzie  $V^+$  - obszar ograniczony z gładkim brzegiem  $\Gamma$ .

W pomocniczym jednorodnym zagadnieniu własnym parametr spektralny wprowadzamy w przenikalność dielektryczną  $\xi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_n + k^2 \xi_n u_n = 0 \quad \text{w } V^+ \\ \Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad \text{w } V^- \\ u_n^+ - u_n^- |_{\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} |_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

warunek wypromieniowania

Okazuje się, że tak sformułowane zagadnienie ma widmo czysto dyskretne /przy czym  $\text{Im } \xi_n > 0/$  oraz, że system własny tworzy bazę.

Usprawiedliwia to przedstawienie rozwiązania w postaci:

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n$$

gdzie  $U^0$  - pole pierwotne.

Każde rozwiązanie takiej postaci spełnia równanie w  $V^-$ , warunki ciągłości na  $\Gamma$  oraz warunek wypromieniowania /to ostatnie nie jest takie oczywiste na pierwszy rzut oka/. Korzystając z faktu:

$$\int_{V^+} u_n u_m dV = 0, \quad n \neq m$$

współczynniki  $A_n$  dobiera się tak, aby  $U$  spełniało równanie w  $V^+$ . Otrzymujemy:

$$A_n = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon - \epsilon_n} \frac{\int_{V^+} U^0 u_n dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}$$

$\epsilon$ -metodę można stosować również w przypadku, gdy  $\epsilon = \epsilon(r)$  jest funkcją położenia, równą jedności poza ograniczonym obszarem.

Wartością własną zagadnienia jednorodnego jest wtedy nie  $\epsilon_n = \epsilon_n(r)$  która sama jest funkcją położenia, lecz pewna liczba występująca w wyrażeniu na  $\epsilon_n(r)$ . Postać funkcji  $\epsilon_n(r)$  zależy od postaci funkcji  $\epsilon(r)$ , podobnie jak w przypadku  $\epsilon = \text{const}$ , ten sam kształt obiektu występuje w zagadnieniu wyjściowym jak i pomocniczym.

### 3.3. h-metoda.

Polega na wprowadzeniu parametru spektralnego w impedancyjny warunek brzegowy występujący w zagadnieniu pomocniczym. Dla przykładu rozważmy problem:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \text{w } \Omega \\ u + h \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 & \text{Im } h \leq 0 \\ \text{warunek wypromieniowania} \end{cases}$$

gdzie  $\Omega$  obszar nieograniczony z gładkim brzegiem  $\Gamma$ , zaś  $h$  może przyjmować również wartość zero /warunek Dirichlet'a/ lub  $\infty$  /warunek Neumann'a/.

Jednorodne zagadnienie własne dla tego problemu przybiera postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad \text{w } \Omega \\ u_n + h_n \frac{\partial u_n}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

warunek wypromieniowania

Dowodzi się, że /tak, jak w pozostałych wariantach/ rozwiązanie można przedstawić w postaci:

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n$$

gdzie jak zwykle  $U^0$  jest polem pierwotnym, którego wybór jest w miarę dowolny /wpływa on jedynie na postać współczynników  $A_n$ /. Dowolność tego wyboru ma duże znaczenie praktyczne na przykład, gdy znane jest rozwiązanie problemu zbliżonego do rozważanego.

Dla funkcji własnych  $u_n$  zachodzą następujące związki ortogonalności:

$$\int_{\Gamma} u_n u_m dS = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u_n}{\partial N} \frac{\partial u_m}{\partial N} dS = 0, \quad n \neq m$$

Pozwalają one wyznaczyć współczynniki  $A_n$  tak, aby spełniony był wyjściowy warunek impedancyjny problemu.

$$A_n = \frac{1}{h_n - h} \frac{\int_{\Gamma} (U^0 + h \frac{\partial U^0}{\partial N}) \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_{\Gamma} (\frac{\partial u_n}{\partial N})^2 dS}$$

Impedancje własne  $h_n$  są dyskretnym podzbiorem płaszczyzny zespolonej /jeśli w wyjściowym problemie oprócz strat energii na brzegu  $\Gamma$  występują inne straty, na przykład na promieniowanie, to  $\text{Im } h_n > 0$ /. Są to jedyne dopuszczalne wartości, przy których występują nietłumione drgania własne w obiekcie, przy ustalonej częstotliwości  $k$ . Z kolei częstotliwości rezonansowe są pierwiastkami równania:

$$h - h_n/k = 0$$

Dla zagadnień wewnętrznych bez strat / $\text{Im } h = 0$ / pierwiastki te

są rzeczywiste i pokrywają się z częstotliwościami rezonansowymi z k-metody. Dla zagadnień zewnętrznych pierwiastki te są zawsze zespolone, ponieważ  $\text{Im } h_n > 0$  oraz  $\text{Im } h < 0$ .

h-metodę można stosować także, gdy impedancja jest funkcją punktów brzegowych:  $h = h/s$ ,  $s \in \Gamma$ .

### 3.4. $\rho$ -metoda.

Metoda ta polega na wprowadzeniu do jednorodnego zagadnienia pomocniczego warunku brzegowego /zawierającego parametr spektralny  $\beta_n$  /, sprzęgającego wartości brzegowe pola na różnych stronach brzegu  $\Gamma$ . O ile warunek impedancyjny oznacza całkowite oddzielenie, "zaekranowanie" pewnego obszaru, o tyle warunek sprzęgający oznacza, że brzeg jest częściowo "przeźroczysty" dla pola.

Rozważmy przykład:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \text{w } \Omega^+ \\ u|_{\Gamma} = 0 \\ \text{warunek wypromieniowania} \end{cases}$$

gdzie  $\Omega^+$  - obszar nieograniczony w  $R^3$  z gładkim brzegiem  $\Gamma$ .

Pomocnicze zagadnienie własne formułuje się dla całej przestrzeni  $R^3 = \Omega^+ \cup \Omega^-$ :

$$\begin{cases} \Delta u_n + k^2 u_n = 0 & \text{w } R^3 - \Gamma \\ u_n^+ - u_n^- = 0|_{\Gamma} \\ \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\beta_n} = 0|_{\Gamma} \\ \text{warunek wypromieniowania} \end{cases}$$

Współczynniki  $A_n$  w rozwiązaniu  $U$ :

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n$$

wyznaczają się tak, aby spełniony był wyjściowy warunek brzegowy.

Wynoszą one:



$$A_n = - \frac{\int_{\Gamma} u^0 v_n dS}{\rho_n \cdot \int_{\Gamma} v_n^2 dS}$$

gdzie

$$V_n = \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) \Big|_{\Gamma}$$

$\rho$ -metodę można stosować do problemów z różnymi innymi warunkami brzegowymi. Warunek brzegowy może, na przykład, przybrać postać:

$$\begin{cases} u^+ - u^- = 0 \Big|_{\Gamma} \\ \left[ \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{u}{\rho} \right] = 0 \Big|_{\Gamma} \end{cases}$$

Opisuje on wtedy metalową siatkę periodyczną, gdzie

$$\rho = \frac{-p}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi q}{2}$$

przy czym  $p$  - okres,  $q$  - współczynnik zapełnienia siatki.

Również problemy dla dielektryków typu:

$$\begin{cases} \Delta u^+ + k^2 \epsilon \mu u^+ = f^+ & \text{w } \Omega^+ \\ \Delta u^- + k^2 u^- = f^- & \text{w } \Omega^- \\ u^+ - u^- = 0 \Big|_{\Gamma} \\ n \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} = 0 \Big|_{\Gamma} \end{cases}$$

można rozważać  $\rho$ -metodą, poszukując rozwiązania od razu w całej przestrzeni  $= \Omega^+ \cup \Omega^-$ .

### 3.5. s-metoda.

Nadaje się ona szczególnie do zagadnień zewnętrznych. Parametr spektralny  $s$  wprowadza się do warunków na nieskończoności. Wartość własna jest wtedy własnym współczynnikiem odbicia - stosunkiem amplitudy fali własnej odbitej do padającej. Jeśli jedy-  
nymi stratami energii są straty na promieniowanie, to równanie całkowe, do którego sprowadza się jednorodny problem własny, jest

rzeczywiste, a widmo jest dyskretnym podzbiorem okręgu jednostkowego.

Sposób wprowadzania parametru spektralnego s zilustrujemy na następującym przykładzie:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 \varepsilon(r) u = f & \text{w } \mathbb{R}^2 \\ u \sim \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \phi & r \rightarrow \infty \end{cases}$$

gdzie  $\varepsilon(r)$  - funkcja położenia, różna od jedności tylko w ograniczonym obszarze  $\Omega$ ,

Jednorodne zagadnienie własne dla tego problemu wygląda następująco: /wartością własną jest  $s_n$ /

$$\begin{cases} \Delta u_n + k^2 \varepsilon(r) u_n = 0 & \text{w } \mathbb{R}^2 \\ u_n \sim \left( \phi_n^* \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} + s_n \phi_n \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \right) \cdot \frac{1}{1+s_n}, r \rightarrow \infty \end{cases}$$

przy czym

$$\phi_n^*(\varphi) = i \phi_n(\varphi + \pi)$$

Jest ono równoważne następującemu równaniu całkowemu:

$$-4u_n = k^2 \int_{\Omega} (\varepsilon(r) - 1) u_n (N_0(kR) - \lambda_n J_0(kR)) dV$$

gdzie  $R = |r - r'|$ , zaś  $\lambda_n = i \frac{1 - s_n}{1 + s_n}$  spełnia rolę wartości własnej w tym równaniu.

Funkcje własne  $u_n$  nie stanowią dogodnej bazy dla przedstawienia rozwiązania problemu wyjściowego /nie spełniają one warunku wypromieniowania/. Dlatego jako funkcje bazowe przyjmuje się pewne funkcje, które wyrażają się przez funkcje  $u_n$ . Ich bazowość dowodzi się nietrywialnie, wykorzystując teorię przestrzeni Pontriagina  $\Pi_x$  z indefinitnym iloczynem skalarnym.

Przytoczone w rozdziale tym przykłady wariantów MRW dają jedynie ogólny obraz możliwości jej praktycznego wykorzystania.

Specyfikacja MRW do wybranej klasy zagadnień brzegowych, wraz ze szczegółową jej analizą, będzie tematem odrębnej publikacji.

Na zakończenie przytoczymy /cf. [1]/ ciekawą, mało znaną metodę iteracyjną rozwiązywania jednorodnych równań całkowych, pozwalającą wyliczać numerycznie dużo większą ilość wartości i funkcji własnych, niż przy stosowaniu metod tradycyjnych.

Niech  $u^{(0)}$  - pewna funkcja na  $\Gamma$ . Przyjmijmy ją jako przybliżenie początkowe. Wtedy  $u^{(m)}$  równo:

$$u^{(m)} = \int_{\Gamma} G u^{(m-1)} dS$$

definiujemy, jako jej m-tą iterację jądrem  $G$  wyjściowego operatora całkowego.

Definiujemy  $f_N$ :

$$f_N = \sum_{j=0}^N c_j u^{(j)}$$

z nieokreślonymi współczynnikami  $c_j$ . Kładąc na przykład  $c_N = 1$ , pozostałe z nich wyliczamy z warunku znikania  $f_N$  w  $N$  różnych punktach brzegu  $\Gamma$ . Wtedy wartości własne /przybliżone/ rozwiązywanego równania całkowego wyznaczamy jako zera wielomianu

$$P_N = \sum_{j=0}^N c_j x^j$$

Funkcje własne znajdujemy z wyrażenia:

$$u_n = \sum_{j=0}^N x_n^j \sum_{m=0}^j (-1)^m c_{j-m} f_{N-m}$$

Ilość otrzymywanych tą metodą elementów własnych zależy od gęstości początkowych wartości widma oraz od wyboru  $u^{(0)}$ . Nowe iteracje przestają być efektywne, gdy  $u^{(m)}$  staje się bliskie pierwszej funkcji własnej. Dlatego, w przeciwieństwie do metod klasycznych,  $u^{(0)}$  należy wybrać tak, aby jej rozwinięcie na funkcje własne zawierało jak najwięcej nietrywialnych członów.

Bibliografia.

- [1] - V.Voitovich, B.Kacnelenbaum, A.Sivov "Obobsztsziennyj metod sobstviennykh kolebaniij w teorii difrakcii" Nauka 1977.
- [2] - C.E.Baum "Emerging technology for transient and broad band analysis and synthesis of antennas and scatterers" Proc. IEEE. vol.66 pp. 1598-1614, 1976.
- [3] - R.J.Garbacz, R.H.Turpin "A generalized expansion for radiated and scattered fields" IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP-19, pp.348-358, May 1971.
- [4] - R.F.Harrington, J.R. Mautz "Theory of characteristic modes for conducting bodies" IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP-19, pp. 622-628, Sept. 1971.
- [5] - A.G.Ramm "Some theorems on analytic continuation of the Schrödinger operator resolvent kernel in spectral parameter" Izviestija Akad. Nauk Armjan. SSR, ser. Math. 3, 1968.
- [6] - P.D.Lax, R.S.Phillips "A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix" Arch. Rat. Mech. Anal.. vol. 40, pp. 268-280, 1971.
- [7] - I.C.Gohberg, M.G.Krejn "Vviedenie v teoriiju liniejnykh nie-samosopriazennykh operatorov" Nauka 1965
- [8] - A.G.Ramm "O razloženiij po sobstviennym funkcijam diskretnogo spektra v zadaczach difrakcii" Radiotech. Elektron. No. 3 pp. 496-501, 1973.
- [9] - Simon B., M.Reed "Methods of modern mathematical physics" tom IV-Analysis of operators /tłumaczenie rosyjskie/ Moskwa 1982 p.356.
- [10] - V.Kacnelson "Conditions under which systems of eigenvectors of some classes of operators form a basis" Funct. Anal. and Applic., 1, 1967, pp. 122-132.

- [1] - T.Kato "Perturbation Theory for Linear Operators" Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [2] - A.G.Ramm "Theory and applications of some new classes of integral equations" Springer-Verlag, New York, 1980.
- [3] - B.Minkovich, V.Jakovlev "Teoriya sinteza anten" Moskva, 1969.
- [4] - D.Decourd, C.Foias, C.Pearcy "Compact operators with root vectors that span" Proc. Am. Math. Soc., 76, 1979, pp.101-106.
- [5] - A.G.Ramm "A remark on the theory of integral equations" Diff. Eq. 8, 1972, pp.1177-1180.
- [6] - A.G.Ramm "Nonselfadjoint operators in diffraction and scattering" Math. Methods in Appl. Sciences vol. 2. 1980, pp.327-346.

### Streszczenie.

Podane zostały schematy metody rozkładu na funkcje własne /MRW/ oraz metody rozkładu względem osobliwości /MRC/. Przeanalizowano matematyczne aspekty stosowalności wyżej wymienionych metod spektralnych. Przedyskutowano różne warianty MRW stosowalne do szerokiej klasy elektromagnetycznych zagadnień brzegowych. Każdy z tych wariantów umożliwia zachowanie dyskretnej, a mimo to zupełnej reprezentacji pola, a także zbadanie własności rezonansowych rozważanego obiektu.