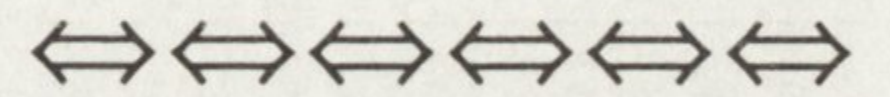


## METODYKA



**Anna Gazda**

Katedra Botaniki Leśnej  
i Ochrony Przyrody  
Akademii Rolniczej  
al. 29 Listopada 46  
31-425 Kraków  
rlgazda@cyf-kr.edu.pl

### **Geometria fraktali i niektóre jej zastosowania w ekologii**

The fractal geometry  
and some of its applications  
in ecology

#### **1. Wstęp**

Wobec ogromnej różnorodności obiektów występujących w otaczającym nas świecie, przyrodnicy napotykają trudności przy próbach tworzenia modeli odzwierciedlających bogactwo natury. Większość struktur przestrzennych występujących w naturze jest tak nieregularna, że trudno znaleźć w geometrii euklidesowej odpowiednie narzędzia w celu analizowania ich form. Na przykład linia brzegowa wyspy nie jest ani prostą, ani okręgiem i żadna inna klasyczna krzywa nie przybliża prawdziwego jej kształtu. Wprawdzie proste figury geometryczne, którymi operuje geometria euklidesowa, można wykorzystać w celu odzwierciedlenia kształtów istniejących w przyrodzie, ale wymaga to zarówno znacznych uproszczeń i przybliżeń, jak i złożonych przekształceń. Geometria euklidesowa ma swoje korzenie w strukturach regularnych, podczas gdy narodziny wielu gałęzi matematyki rozwijanych współcześnie są związane z matematycznymi strukturami nie odpowiadającymi ani wzorcom Euklidesa, ani Newtona – np. zbiór Cantora, płatek von Kocha, dywan Sierpińskiego (rys. 1) i wiele innych (Ciesielski i Pogoda 1989). Istnienie wzorców przypominających wyżej wymienione twory matematyczne rzuciło naukowcom wyzwanie, aby badać te formy, które geometria euklidesowa pozostawia poza swoją sferą jako bezkształtne (Mandelbrot 1983). Benoit B. Mandelbrot wprowadził w 1975 roku pojęcie geometryczne „fraktal”, które przedstawia strukturę obiektu we wszystkich skalach przestrzennych i pozwala określić nieregularność i złożoność kształtu badanego przedmiotu (Mandelbrot 1975, 1977, 1983, 1990). Nazwa „*fractal*” pochodzi z łacińskiego określenia oznaczającego złamany, nieregularny (czasownik łaciński *frango, fregi, fractum* oznacza przełamać, złamać, tworzyć nieregularne fragmenty), czyli słowo fraktal znaczy zarówno „połamany” jak i „nieregularny” (Mandelbrot



1983). Fraktale są figurami geometrycznymi, które w przeciwieństwie do figur euklidesowych mają we wszystkich skalach taką samą strukturę (stopień nieregularności). Powoduje to, że obiekt będący fraktalem wygląda tak samo niezależnie od skali w jakiej go oglądamy, czyli jest samopodobny. Wewnątrz danej struktury znajdują się zmniejszone kopie jej samej, mające wymiary określone przez czynnik skalujący. Na przykład okrąg nie jest fraktalem, ponieważ powiększając jego mały fragment uzyskujemy figurę, nie będącą kopią figury wyjściowej (np. łuk), a obrys zbocza góry jest fraktalem, ponieważ jest nieregularny w każdej skali, nie tracąc swej struktury mimo zastosowania różnych powiększeń.

Mandelbrot (1986) stwierdził, że geometria fraktali została wykreowana przez samą przyrodę. Voss (1988) nazwał euklidesowe figury geometryczne charakterystycznymi dla ludzkiego rozumowania artefaktami, natomiast geometrię fraktalną uznał za nowy język opisu otaczającej nas rzeczywistości. W konsekwencji fraktale pozwalają nam na stawianie nowych pytań i dostarczają nowego typu odpowiedzi.

Zastosowania fraktali mogą być generalnie zaklasyfikowane do dwóch grup. Pierwsza wykorzystuje tzw. wymiar fraktalny (por. rozdz. 2) jako wskaźnik stopnia złożoności struktur (krzywych, powierzchni). Druga obejmuje konstruowanie modeli, w celu symulacji zjawisk i struktur występujących w rzeczywistości, oraz do porównania wzorców generowanych przez postulowane modele dynamiczne z wzorcami istniejącymi w przyrodzie (Kandrop 1994).

Teoria fraktali jest stosowana coraz powszechniej w wielu dziedzinach nauki, pozwalając na opisanie zjawisk zachodzących w różnych skalach, począwszy od mikro-, aż po makroskalę. Najczęściej stosuje się ją w fizyce (Greborgi i in. 1984, Hentschel i Proacaccia 1984, Bassendorf 1987), topografii (Klinkenberg i Goodchild 1992), geofizyce (Burrough 1985), geologii (Yfantis i in. 1988), gleboznawstwie (Burrough 1981, 1983a, 1983b, Armstrong 1986), meteorologii (Lovejoy 1982), medycynie (Tsonis i Tsonis 1987, West i Goldberg 1987, Hauge 1993, Keipes i in. 1993). W zakresie nauk biologicznych została wykorzystana w genetyce (Jeffrey 1992, Langlet 1992), taksonomii (Burlando 1990) – łącznie z rozpatrywaniem problemów ewolucji rozmaitych grup (Green 1991, Burlando 1993) – oraz w badaniach nad architekturą roślin (Crawford i Young 1983, Prusinkiewicz i Hanan 1989, Prusinkiewicz i Lindenmayer 1990, Strand 1990, Zeide 1990, 1991, Corona 1991, Long 1994).

W ekologii teorią fraktali zainteresowało się wielu badaczy (Loehle 1983, Mandelbrot 1983, Frontier 1987, Voss 1988, Sugihara i May 1990, Milne 1991, Hastings i Sugihara 1993). Ukazało się również szereg publikacji omawiających szczegółowe problemy, jak analizę wzorców



przestrzennych rozmaitych zjawisk (Pastor i Broschart 1990, Haslett 1994, Scheuring i Riedi 1994, Vedyushkin 1994), w tym np. typów roślinności (Palmer 1988, Rex i Malanson 1990), rozmieszczenia gatunków roślin i zwierząt, zjawisko bogactwa gatunkowego (Frontier 1985, 1987, 1993, Milne 1991, Decampo i de Bikuna 1994, Loehle i Wein 1994), współwystępowanie gatunków (Palmer 1992) itp. Zastosowano również analizę fraktalną do badania dynamiki populacji (Hastings i Sugihara 1993). Fraktale są narzędziem bardzo często używanym również w ekologii krajobrazu (Gardner i in. 1987, Krummel i in. 1987, Turner 1987, Milne 1988, 1991, Milne i in. 1992).

W niniejszym artykule postaram się przybliżyć podstawowe pojęcia związane z teorią fraktali oraz wskazać możliwości stosowania fraktali (ze szczególnym uwzględnieniem wymiaru fraktalnego) w badaniach ekologicznych, a także podjąć próbę wyjaśnienia, dlaczego właśnie geometria fraktali może pomóc w opisie i zrozumieniu pewnych zjawisk zachodzących w przyrodzie.

## 2. Definicja fraktala i wyjaśnienie pojęcia wymiaru fraktalnego

Geometria fraktali jako teoria matematyczna została opisana między innymi przez Federę (1988) i Falconera (1990). Badacze przyrody mogą sięgnąć po książkę autorstwa Hastingsa i Sugihary (1993) oraz kilka ważnych artykułów (Loehle 1983, Frontier 1987, Sugihara i May 1990, Milne 1991), w których są zamieszczone podstawy matematyczne tej teorii, a także opisane zastosowania fraktali jako narzędzia w ekologii.

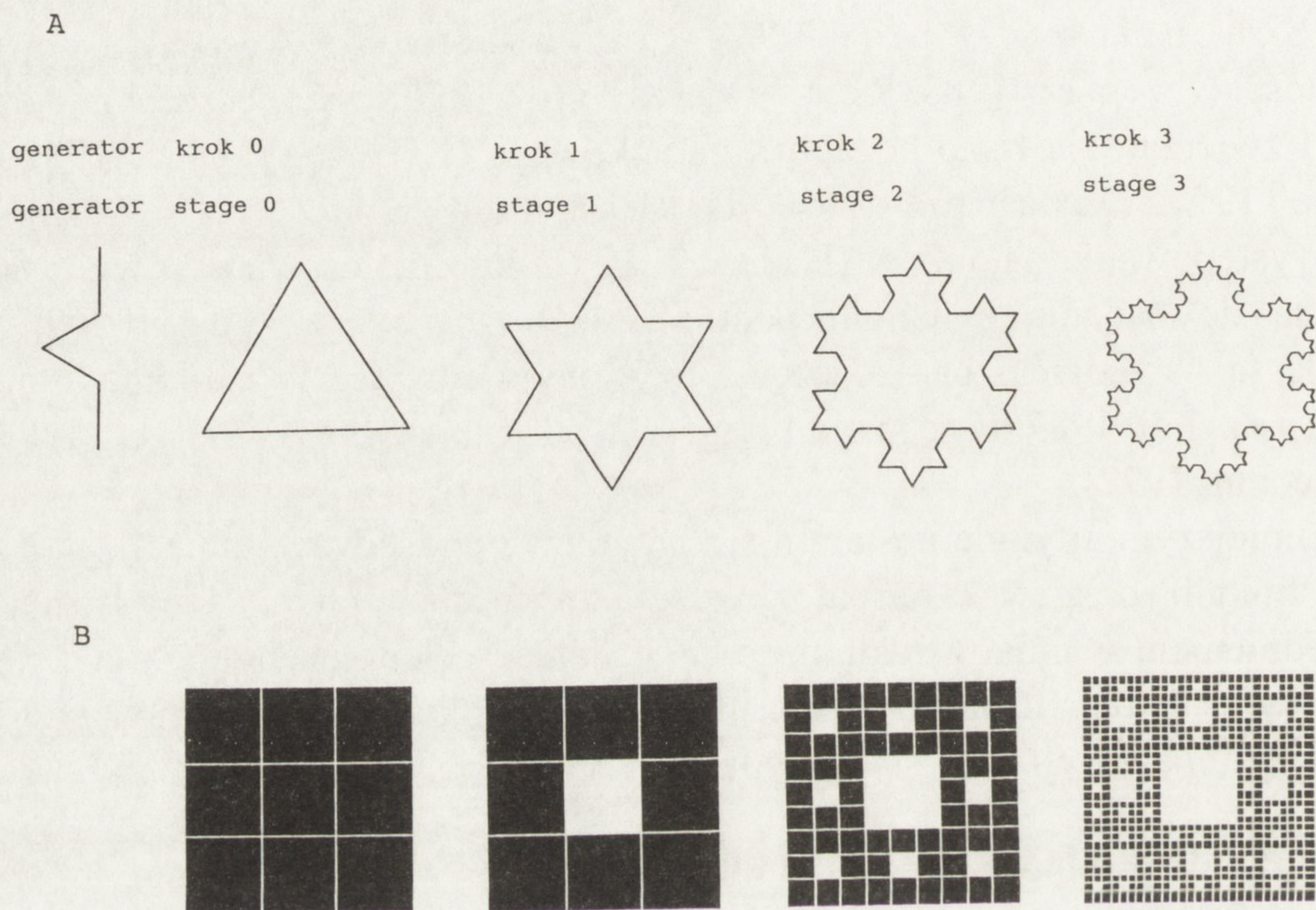
Do obecnej chwili nie istnieje kompletna i w pełni satysfakcjonująca wszystkich definicja fraktala (Feder 1988). Dwie z powszechniej używanych definicji brzmią następująco:

– Fraktalem w przestrzeni metrycznej zupełnej  $X$  nazywamy każdy niepusty i zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej  $X$  (Kudrewicz 1993).

– Fraktalem nazywamy taką figurę, której wymiar fraktalny jest różny od topologicznego (Ciesielski i Pogoda 1989). (W ogromnym uproszczeniu: wymiar topologiczny jest wyrażony liczbą całkowitą – punktu 0, linii 1, płaszczyzny 2, bryły 3; natomiast wymiar fraktalny, zwany też wymiarem Hausdorffa-Besicovitcha, jest wymiarem ułamkowym.)

Wyróżniamy dwa rodzaje fraktali ze względu na typ samopodobieństwa. Fraktale idealne (matematyczne, deterministyczne), takie jak na przykład płatek von Kocha czy dywan Sierpińskiego (rys. 1), cechuje dokładnie powtarzająca się, w coraz to mniejszej skali, struktura linii brzegowej. Sukcesywne powiększenia obiektu wykazują identycznie samopodobną strukturę. Jest to tzw. silne (ściśle) samopodobieństwo. W naturze nie spotykamy tego typu figur. Drugi rodzaj stanowią





**Rys. 1.** Metoda tworzenia: *A* – płatka von Kocha (1904),  $D = 1,26$ ; *B* – dywanu Sierpińskiego (1915),  $D = 1,8928$

Płatek von Kocha konstruujemy poprzez zastępowanie każdego boku trójkąta równobocznego generatorem. Dywan Sierpińskiego tworzymy poprzez podzielenie kwadratu na dziewięć przystających kwadratów, a następnie usunięcie środkowego. W obydwu przypadkach procedurę powtarzamy wielokrotnie

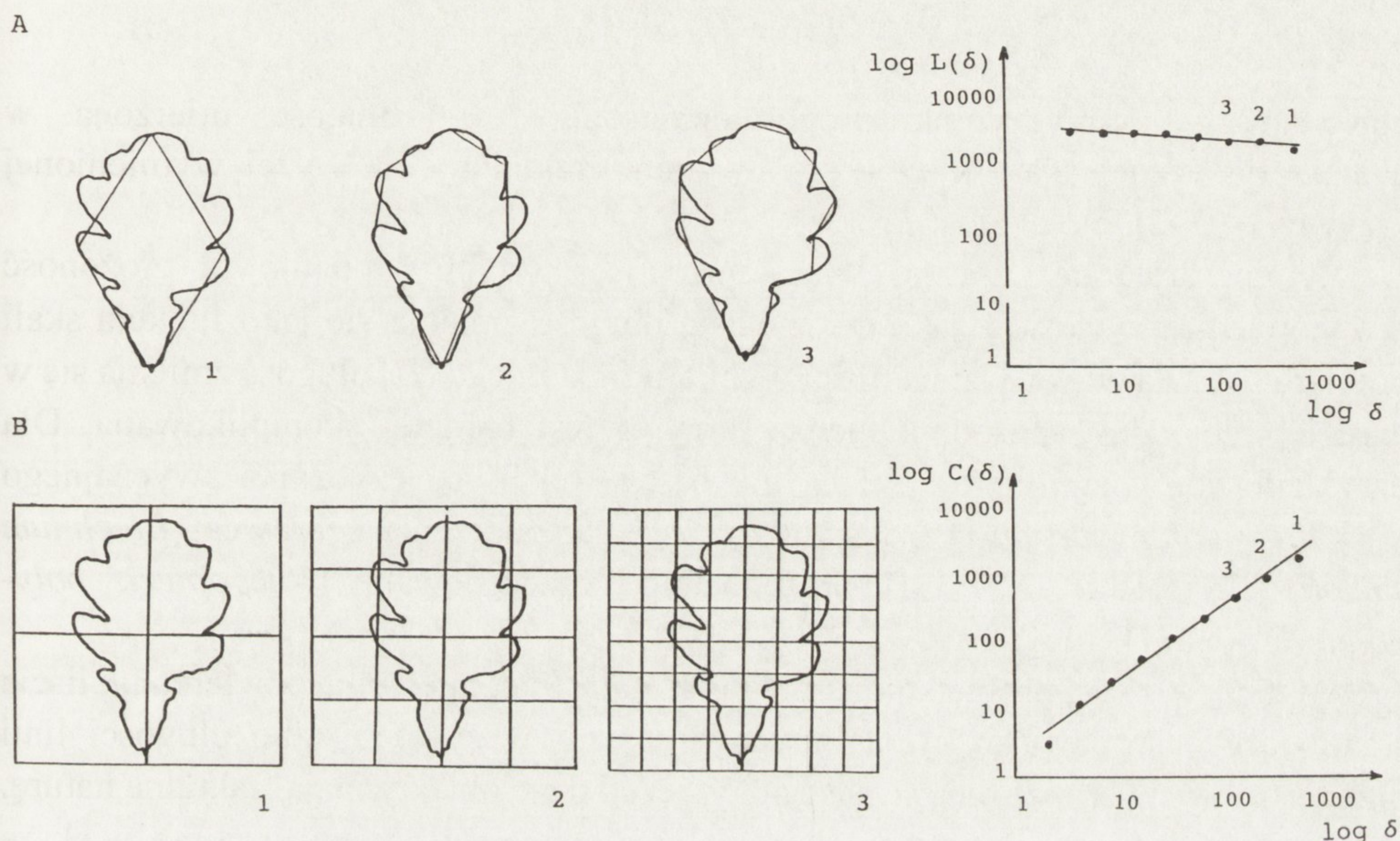
The construction of: *A* – the snowflake of von Koch (1904),  $D = 1.26$ ; *B* – the Sierpiński carpet (1915),  $D = 1.8928$

The von Koch snowflake is constructed by replacing line segments (in the equilateral triangle) with the polygonal generator and so on. The Sierpiński carpet is created by removing, in the centre of the filled square with the width of  $3\delta$ , the square with width equal  $1\delta$ . This process is reiterated ad infinitum

fraktale rzeczywiste (stochastyczne), do których zaliczamy również obiekty rzeczywiste jak: linia brzegowa wyspy, wzorzec krajobrazu, granice roślinności, obrys blaszki liściowej i inne podobne obiekty. Jednak trudno w tych przypadkach dopatrzeć się samopodobieństwa, takiego samego rodzaju jak u fraktali matematycznych. Ten typ samopodobieństwa Wałat (1987) nazywa słabym samopodobieństwem, a inni samopodobieństwem statystycznym.

Z pojęciem fraktala bardzo ściśle związane jest pojęcie wymiaru. Charakteryzuje on w sposób liczbowy stopień złożoności obiektu poprzez ocenę szybkości wzrostu mierzonej wielkości, np. długości, w trakcie dokonywania pomiaru z coraz większą dokładnością. Załóżmy, że chcemy jak najdokładniej zmierzyć długość badanej krzywej, np. linię brzegową liścia (rys. 2A). Mierząc tę długość z użyciem liniału mogą obliczyć kolejne przybliżenia poszukiwanej wartości stosując metodę





**Rys. 2.** Kolejne etapy wykonywane w trakcie obliczania wymiaru fraktalnego metodą: *A* – kroczka, *B* – siatki

Ponumerowane kółka oznaczają kolejne kroki zilustrowane na powyższej rycinie. Kółka bez numeru oznaczają punkty, dla których współrzędne zostały wyliczone w wyniku dalszych obliczeń przy coraz mniejszym kroku

Illustration of: *A* – the divider method, *B* – the grid method

Circles 1, 2, 3 illustrate the first three steps which are illustrated in this figure. For points without any numbers coordinates were computed using divider with declining length of step

wielokrotnej aproksymacji poprzez kolejne zmiany długości jednostki miary (kroku  $\delta$ ). Można też użyć cyrkla zerowego (kroczka) o określonym kroku ( $\delta$ ) lub też zamiast zmiany kroku ( $\delta$ ) wykorzystać zdjęcia (Morse i in. 1985) o różnych powiększeniach, np. 2:1, 1:1, 1:2, itd.

Całkowita, oszacowana długość krzywej ( $L$ ) będzie iloczynem liczby boków ( $n$ ) wieloboku i ich długości (kroku). Wraz ze zmniejszaniem długości kroku ( $\delta$ ) jesteśmy w stanie oddać coraz dokładniej szczegóły analizowanej linii brzegowej. Jednocześnie wraz ze zmniejszaniem  $\delta$  następuje wzrost całkowitej długości linii brzegowej ( $L$ ). W praktyce długość ( $L$ ) wielu interesujących naturalnych obiektów, np. linii brzegowych wysp, długości rzek w zlewni o ogromnej liczbie dopływów, są zależne od skali pomiaru, czyli od  $\delta$ , według prostego równania potęgowego (Sugihara i May 1990):



$$L(\delta) = K \cdot \delta^{1-D} \quad (1)$$

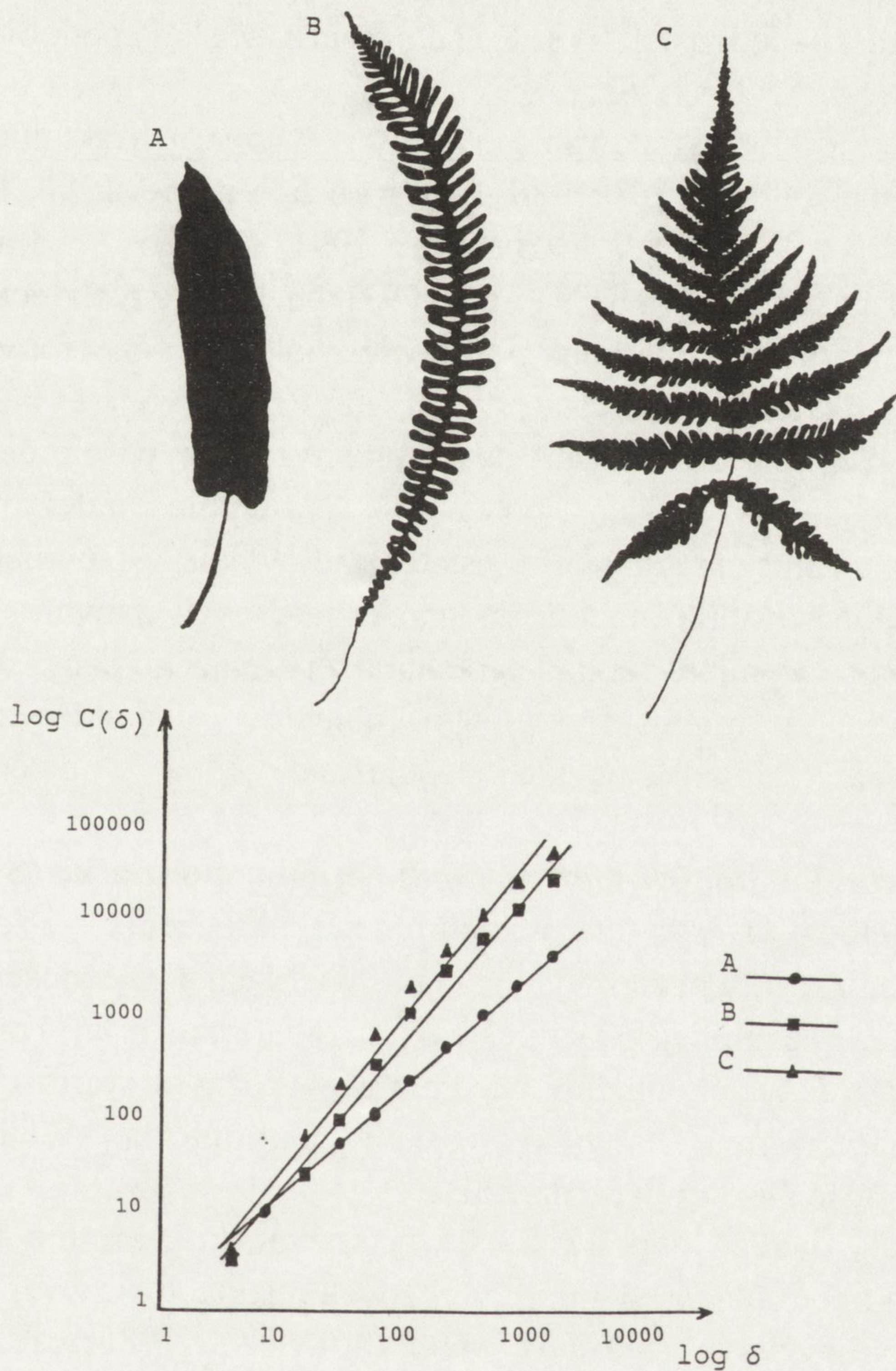
gdzie:  $K$  – współczynnik proporcjonalności,  $L$  – długość mierzona w charakterystycznej skali  $\delta$ ,  $D$  – tzw. wymiar fraktalny (dla wyżej wymienionej krzywej  $1 < D < 2$ ),  $\delta$  – długość kroku.

Wymiar fraktalny opisuje więc złożoność kształtu. Ponadto ta złożoność odzwierciedla szybkość z jaką rzeczywista długość zmienia się jako funkcja skali pomiaru ( $\delta$ ). Dla większych wartości wymiaru fraktalnego ( $D$ ) długość zmienia się w bardziej radykalny sposób, ponieważ krzywa jest bardziej skomplikowana. Dla przykładu porównajmy wartości  $D$  linii brzegowej liścia jęczynika zwyczajnego (*Phyllitis scolopendrium* (L.) Newm.)  $D = 1,08$ , podrzenia żebrowca (*Blechnum spicant* (L.) Roth.)  $D = 1,41$  oraz zachyłki oszczepowatej (*Phegopteris polypodioides* Fée)  $D = 1,45$  (rys. 3).

W rzeczywistości problem pozornie tak banalny, jak mierzenie powierzchni liścia stanowiącego środowisko życia innych organizmów żywych, albo długości linii brzegowej wyspy, może okazać się trudny, jeżeli dane obiekty mają fraktalną naturę. Zauważmy, że jeżeli mierzymy długość linii brzegowej obiektu z coraz większą dokładnością, to całkowita długość wzrasta coraz bardziej. Powód takiego zachowania jest oczywisty. Kiedy obserwujemy zatokę lub półwysep na mapie w skali 1 : 100 000, a następnie na mapie 1 : 10 000, wtedy stają się widoczne małe zatoczki w zatoce i małe półwyspy w obrębie dużego półwyspu. W skali 1 : 1 000 widać dokładnie jeszcze mniejsze formy geomorfologiczne itd. I tym sposobem całkowitą długość linii brzegowej zatoki lub półwyspu należy powiększyć o rosnącą długość linii brzegowych tych szczegółów. Jakkolwiek istnieje pośredni przedział  $\delta$ , w którym  $L(\delta)$  zmienia się w niewielkim stopniu, np. dla wybrzeża skalistego może on wynosić od 20 m do 20 cm, ale  $L(\delta)$  znowu wzrasta gwałtownie, gdy  $\delta$  jest mniejsze od 20 cm, ponieważ na wynik pomiaru mają wpływ nieregularności budowy poszczególnych skał (Mandelbrot 1983).

Co prawda ktoś mógłby stwierdzić, że zakładamy wielkość błędu pomiaru i ta informacja powinna nas zadowolić. Wobec tego powinniśmy przestać zajmować się tym wyłącznie technicznym problemem. Niemniej jest on głębszy i poważniejszy niż trywialna dokładność pomiaru. Uważa się, że zjawiska przyrodnicze powinny być mierzone w skali, która jest dla nich charakterystyczna. Przekonanie to wynika jedynie z ograniczenia ludzkiej percepcji. Nasz umysł nie jest w stanie objąć środowiska, w którym żyjemy, równocześnie na poziomie drobnych szczegółów oraz procesów zachodzących w makroskali. Przyroda natomiast operuje wszystkimi skalami równocześnie. Jednak w celu podjęcia próby zrozumienia otaczającej nas przyrody wprowadzamy skale przestrzenne i czasowe pomiarów, które akceptujemy jako odpowiednie w danych warunkach.





**Rys. 3.** Wymiar fraktalny liści paproci o różnym stopniu złożoności budowy morfologicznej: *A* – jęczynika zwyczajnego (*Phyllitis scolopendrium* (L.) Newm.)  $D = 1,08$ ; *B* – podrzenia żebrowca (*Blechnum spicant* (L.) Roth.)  $D = 1,41$ ; *C* – zachyłki oszczepowatej (*Phegopteris polypodioides* Fée)  $D = 1,45$

The fractal dimension  $D$  of leaf outline of ferns: *A* – *Phyllitis scolopendrium* (L.) Newm.,  $D = 1.08$ ; *B* – *Blechnum spicant* (L.) Roth.,  $D = 1.41$ ; *C* – *Phegopteris polypodioides* Fée,  $D = 1.45$

### 3. Wybrane metody określania wymiaru fraktalnego

Istnieje wiele metod estymowania wymiaru fraktalnego obiektów. Najprostszą jest skala podobieństwa, której używamy dla fraktali idealnych. Może być ona obliczona wprost, jeśli znamy algorytm, przy użyciu którego, metodą kolejnych iteracji, generowany był dany fraktal. Na przykład w płatku von Kocha każdy



segment ma długość 3 jednostek i w następnej iteracji jest on zastępowany segmentem o długości 4 jednostek (rys. 1). To oznacza, że skala podobieństwa takiej krzywej wynosi  $\log 4 / \log 3 = 1,26$ .

Opisano szereg metod szacowania wartości wymiaru fraktalnego różnych obiektów (Peitgen i Richter 1986, Peitgen i Saupe 1988, Kaye 1989, Sugihara i May 1990, Carr i Benzer 1991, Taylor i Taylor 1991, Korvin 1992, Hastings i Sugihara 1993). Niektóre z tych technik polegają na obliczaniu wymiaru fraktalnego na podstawie wielkości zmierzonych wprost, a inne opierają się na szacunkach statystycznych. Przy wyborze metody należy uwzględnić charakter danych, którymi dysponujemy, i oczywiście cel badań, aby móc wybrać stosowną funkcję potęgową. Następnie należy zastosować transformację logarytmiczną danych i ostatecznie wykorzystać metodę regresji liniowej w celu dopasowania modelu do przekształconych danych. W rezultacie otrzymujemy wartość wymiaru fraktalnego charakteryzującego dany obiekt. W celu obliczenia wartości wymiaru fraktalnego obiektów charakteryzujących się samopodobieństwem słabym, zwykle stosuje się jedną z czterech poniżej omówionych metod.

**a. Metoda krocza (*the divider method*), cyrkla, podziałki** (Sugihara i May 1990). Metoda ta wymaga wielokrotnego „kroczenia” wzdłuż krzywej (granicy lub obwodu) cyrklem zerowym w celu stwierdzenia zależności zachodzącej między długością  $L(\delta)$  a zmniejszającym się  $\delta$  („rozpiętością kroku”) przy kolejnych pomiarach. Pomiaru  $L(\delta)$  dokonujemy więc dla wielu różnych wartości  $\delta$ , następnie nanosimy otrzymane wartości na wykres w skali logarytmicznej. Według równania (1) obliczamy wartość  $D$  z krzywej regresji.

W praktyce dla danego  $\delta$  powinno się powtarzać kilkakrotnie tę procedurę, wyznaczając punkt początkowy pomiaru w różnych punktach krzywej (rys. 2A).

**b. Metoda pokryciowa (*the box method*)** (Voss 1988). Jest to metoda pośrednia pomiędzy metodą krocza a siatki. Badaną krzywą pokrywa się coraz mniejszymi kwadratami lub okręgami, a w przypadku figur przestrzennych kulami, następnie określa się liczbę  $C(\delta)$  kwadratów, okręgów lub kul koniecznych do pokrycia krzywej. Wartości  $C(\delta)$  i  $\delta$  nanosi się na skalę podwójnie logarytmiczną tak samo jak w przypadku metody siatki.

**c. Metoda siatki (*the grid method*)** (Sugihara i May 1990) (rys. 2B). Jeżeli dysponujemy mapą, na którą naniesione są powierzchnie zajmowane przez dany obiekt (np. gatunek rośliny, zbiorowisko lub formę geomorfologiczną itp.), łatwiej użyć metody, która polega na nałożeniu na mapę siatki kwadratów o boku  $\delta$ . Obliczamy liczbę kwadratów ( $C(\delta)$ ) zawierających fragment krzywej obrazującej przebieg granicy lub brzegu danego obiektu. Następnie siatkę tę zagęszczamy dwukrotnie zmniejszając bok kwadratu  $\delta$ . Obliczamy wymiar fraktalny ( $D$ ) jako



wartość nachylenia prostej z równania regresji liniowej. Zmiana orientacji siatki względem obiektu daje ten sam efekt, co wybór różnych punktów rozpoczęcia pomiarów w metodzie krocza.

**d. Metoda obliczania ilorazu  $O/P$  wartości obwodu obiektu ( $O$ ) i jego powierzchni ( $P$ ) (*the perimeter–area method*) (Sugihara i May 1990).** Jeżeli obiekt składa się z mozaiki nieregularnych powierzchni (np. mapa zbiorowisk roślinnych), to wymiar fraktalny obliczamy wykorzystując właściwości relacji:

$$O = P^{D/2} . \quad (2)$$

Należy obliczyć obwód ( $O$ ) i powierzchnię ( $P$ ) każdego nieregularnego fragmentu dla kolejnych, przyjętych wielkości kroku ( $\delta$ ), po czym nanieść znalezione wartości na wykresie podwójnie logarytmicznym. Współczynnik nachylenia prostej regresji wynosi  $D/2$ . Zauważmy, że  $D$  obliczone w ten sposób jest „miarą całokształtu” dla zbioru obiektów, w przeciwieństwie do poprzednich metod, które mogą być zastosowane do brzegu pojedynczego obiektu (wyspy, liścia itp.).

#### 4. Ograniczenia metod określania wymiaru fraktalnego

Każdy pomiar charakteryzuje się pewnym błędem, którego źródłem są zarówno zastosowane narzędzia pomiarowe, jak i metoda dokonywania pomiaru. Wielkości otrzymane z pomiaru opracowujemy następnie zgodnie z założonym modelem matematycznym, co implikuje przenoszenie błędów pomiaru na wyniki.

W omawianych metodach występują następujące źródła błędów:

a. Pierwsze z ograniczeń jest natury technicznej. Fraktale w rzeczywistości są obiektami granicznymi. Obliczając wymiar fraktalny zakładamy, że gdy  $\delta$  dąży do zera, to  $L(\delta)$  do nieskończoności. Oczywiście w praktyce ten wymóg nigdy nie może być spełniony, czyli w tym przypadku jesteśmy w stanie zdefiniować samopodobieństwo jedynie dla danej rozdzielczości, pamiętając równocześnie, że jedynie obiekt graniczny, a nie żadne z jego pośrednich przybliżeń jest doskonale samopodobne. Jest to spowodowane przez ograniczoną rozdzielczość obrazu (fotograficznego, skanowanego, wideo) lub nawet krocza.

b. Jeżeli wykonujemy opracowanie graficzne i obliczenia przy zastosowaniu komputera, to minimalne  $\delta$  narzuca rozdzielczość skanera lub tzw. digitajzera (urządzenia służącego do przetworzenia danych graficznych w zapis cyfrowy obrazu), użytego w celu wczytania danych graficznych.

c. Obiekty rzeczywiste, występujące w naturze, mają ograniczone rozmiary (minimalne i maksymalne), co zarazem ogranicza możliwą liczbę przekształceń i iteracji.



## 5. Przykłady zastosowań oceny wymiaru fraktalnego w badaniach ekologicznych

Z rozważań przedstawionych w poprzednich rozdziałach wynika, że analiza fraktalna jest szczególnie odpowiednia do opisu i badania obiektów lub zjawisk o strukturze złożonej, lecz wykazującej duży stopień samopodobieństwa.

Takimi obiektami są np. systemy korzeniowe jako struktury powstające przez stałe powtarzanie prostych reguł wzrostu i rozgałęzień. Fitter i Stickland (1992) w swoich badaniach śledzili rozwój korzeni różnych gatunków roślin wysianych na rozmaitych podłożach. Oszacowane wartości wymiaru fraktalnego badanych systemów korzeniowych były mniejsze niż 1,5, co świadczy o tym, że systemy te miały relatywnie prostą strukturę. Wartość wymiaru fraktalnego ( $D$ ) powiększała się wraz ze wzrostem systemu korzeniowego, odzwierciedlając bogactwo powstających rozgałęzień. Jednak wzrost  $D$  był nieliniowy. Zmiany wartości wymiaru fraktalnego można interpretować w następujący sposób:

- początkowy okres, gdy  $D$  jest niskie i zmienia się powoli, reprezentuje wzrost długości korzeni i powstawanie nielicznych rozgałęzień,
- czas szybkiego wzrostu  $D$  odzwierciedla rozwój licznych rozgałęzień,
- stabilizacja  $D$  na nowym, wyższym poziomie przedstawia rozwinięty już system korzeniowy, wytwarzający samopodobne struktury.

Podobnie można przeanalizować sposób penetrowania przestrzeni przez zwierzęta. Odbywa się ono z reguły według określonych wzorców, chociaż wizualna ocena tropów niekiedy nie ujawnia tego i nawet może sprawiać wrażenie poruszania się chaotycznego. Trasy mogą być ekstremalnie różne pod względem złożoności toru („krętości”), pomimo że łączą równie odległe punkty i mają taką samą całkowitą długość. Dicke i Burrough (1988) przeanalizowali tropy przędziorka (*Tetranychus urticae* Koch.) poruszającego się w kierunku liści rośliny żywicielskiej. W eksperymencie użyto feromonu symulującego wcześniejsze odwiedzanie liści przez osobniki tego samego gatunku. Okazało się, że w kierunku liści, które już były penetrowane, pajęczaki te poruszają się po torach o mniej skomplikowanym kształcie niż w przypadku „czystych” liści.

Niekiedy ukształtowanie podłoża ma ogromne znaczenie dla zwierząt. Wiadomo np., że czas, który larwa musi poświęcić na znalezienie nowego źródła pokarmu lub termicznie odpowiedniejszych mikrosiedlisk, może wpływać na śmiertelność w populacji. Weiss i Murphy (1988) analizowali wpływ nieregularności podłoża na długość drogi pokonywanej przez różnych rozmiarów gąsienice motyla (*Euphydryas editha bayensis* Sternitzky). Badano gąsienice, które przemieszczały się do celu odległego o 1 metr w linii prostej. Drogę tę mierzono w skali długości gąsienic, a fakturę podłoża określono przez wymiar fraktalny ( $D$ ). Okazało się, że długość trasy ( $L$ ) gwałtownie wzrasta dla małych gąsienic poruszających się po



podłożu charakteryzującym się bardziej skomplikowaną fakturą. Dzięki analizie fraktalnej podłoża można było zależność tę przedstawić liczbowo.

Podobne zagadnienie było rozpatrywane w artykule *Witha* (1994), dotyczącym zależności między ruchami owadów w różnych stadiach rozwoju osobniczego a właściwościami środowiska.

Analizę fraktalną stosowano także często przy badaniu zagadnień związanych z przestrzenną heterogenicznością środowiska. *Loehle* (1990) zwrócił uwagę na fakt, że koncepcja areału osobniczego jako ograniczonej powierzchni pozbawiona jest w pewnym stopniu biologicznej treści. Wiele informacji jest utraconych, jeżeli nie respektuje się częstości eksplorowania pewnych fragmentów obszaru przez badane zwierzę. Na przykład zagęszczenie gniazd orła (*Haliaeëtus leucocephalus*), który buduje je na wybrzeżu klifowym lub na skalistych wyspach, najczęściej podaje się jako liczbę gniazd ( $n$ ) przypadających na jeden kilometr wybrzeża. Taka miara zagęszczenia gniazd ma sens tylko wtedy, jeżeli rozmieszczone są one w linii prostej, przestaje natomiast oddawać treść biologiczną, gdy linia brzegowa jest bardzo urozmaicona. W związku z tym *Pennycuick* i *Kline* (1986) oraz *Pennycuick* (1992) zaproponowali wprowadzenie nowego parametru, „ $S$ ” („*spacing*” – odstęp), w którym miara odległości między gniazdami jest powiązana ze stopniem skomplikowania podłoża:

$$S = (E/n)^{1/D}$$

gdzie  $E$  („*extent*” – wydłużenie) opisywane jest wzorem:  $E = n \cdot \delta^D$  (oznaczenia jak w rozdz. 2), natomiast  $D$  jest wymiarem fraktalnym. Odstęp ( $S$ ) jest więc wielkością analogiczną do odległości między sąsiednimi gniazdami, ale w odniesieniu do powierzchni fraktalnej.

Z zagadnieniem areału osobniczego bardzo ściśle powiązany jest problem liczbowego określenia dostępności przestrzeni życiowej dla osobników różniących się rozmiarami w obrębie populacji, jak i dla różnych gatunków. *Morse* i in. (1985), *Shorrocks* i in. (1991), *Gunnarson* (1992, 1993) oraz *Gee* i in. (1994) zastosowali teorię fraktali do zbadania stopnia zasiedlenia roślin–gospodarzy przez stawonogi. Wykorzystując metodę estymacji wzrostu powierzchni dostępnej dla coraz to mniejszych organizmów i spadku zapotrzebowania na pokarm, w miarę jak zwierzęta są coraz mniejsze, można przewidzieć, ile razy większa będzie na danej powierzchni liczba osobników małych niż dużych. Opisane powyżej badania były poświęcone analizie stanu istniejącego, natomiast *Jeffries* (1993) wykonał doświadczenie w celu zbadania przebiegu procesu kolonizacji przez owady na przygotowanych przez niego „sztucznych roślinach” wodnych. Z wyników badań należy wywnioskować, że rośliny o bardziej złożonym kształcie są intensywniej



kolonizowane: zarówno przez większą liczbę osobników, jak i większą liczbę gatunków.

Wiele procesów zachodzących w przyrodzie przebiega równocześnie w wielu skalach i na różnych poziomach organizacji życia. Topografia rafy koralowej jest klasycznym przykładem złożoności ujawniającej się w wielu skalach. Bradbury i in. (1984) zastosowali analizę fraktalną w celu „skalowania hierarchicznego” budowy rafy koralowej w Australii. Wyodrębnili oni trzy przedziały skali pomiaru, które odpowiadają skalom trzech podstawowych struktur rafy:

- przedział do 0,1 m ( $D = 1,1$ ) odwzorowuje anatomiczne zróżnicowanie cech osobników w obrębie indywidualnych kolonii koralu;
- 0,2–2 m ( $D = 1,05$ ) rozmiar całej, dorosłej, żyjącej kolonii;
- 5–10 m ( $D = 1,15$ ) skale głównych struktur geomorfologicznych.

Stała wartość wymiaru fraktalnego ( $D$ ) w obrębie każdego przedziału sugeruje możliwość występowania pewnych procesów wzrostu rafy, które są samopodobne. Najniższy wymiar fraktalny w przedziale 0,2–2 m, czyli stosunkowo „gładką” budowę żyjącej dorosłej kolonii, autorzy interpretują jako wyraz ograniczania jej kontaktów z otaczającym środowiskiem.

W skali krajobrazu ekologów interesuje rozmieszczenie całych formacji roślinnych, form geomorfologicznych itp. Burrough (1981) oszacował wymiar fraktalny ( $D$ ) dla szeregu danych liczbowych opisujących między innymi glebę, roślinność, geologię różnych jednostek geograficznych. Stwierdził, że wymiar fraktalny może być wykorzystany jako wskaźnik informujący o stopniu fragmentacji i wzorcu rozdrobnienia badanego obiektu w różnych skalach przestrzennych. Wykazał też, że niezbędna jest znajomość stopnia nieregularności struktur przestrzennych, szczególnie wtedy, kiedy interpolujemy z danych punktowych.

Analizę fraktalną zastosowano również przy opracowaniu i interpretacji zdjęć satelitarnych ze stanu Vermont (De Cola 1989). Okazało się, że różne typy roślinności charakteryzują się specyficznym wzorcem przestrzennym. Lasy odznaczają się wysoką wartością  $D$  i zajmują duże obszary, tereny rolne również pokrywają duże obszary, a ich wymiar fraktalny ( $D$ ) jest zależny od intensywności upraw, natomiast przestrzenie zagospodarowane urbanistycznie zajmują małe obszary z odpowiednio wysokim  $D$ .

## 6. Uwagi końcowe

Geometria fraktali jest użytecznym „językiem” opisu kształtu: zmienności, różnorodności i nieregularności w przyrodzie. Jak podkreślił Mandelbrot (1990), te specyficzne rodzaje grupowej nieregularności, które wydają się być wszechobecne w przyrodzie, mogą stać się źródłem prostoty, kiedy zostaną zastosowane metody fraktalne. Fraktale wychwytyują strukturę rzeczywistości.



Najbardziej adekwatną miarą stopnia złożoności obiektów lub zjawisk jest wymiar fraktalny. Pozwala on jednoznacznie w sposób liczbowy określić „kształt” np. w celu porównania lub sklasyfikowania obiektów. Dlatego też, początkowo w naukach przyrodniczych, głównie zwrócono uwagę na profity, jakie może przynieść stosowanie wymiaru fraktalnego. Obecnie jednak coraz częściej inne aspekty geometrii fraktalnej pojawiają się w publikacjach dotyczących np. modeli ekologicznych. Jednak omówienie tego zagadnienia wykracza poza ramy niniejszego artykułu.

Matematyczna teoria fraktali wydaje się być zawiła i trudna dla laika, jednak wykonanie analizy fraktalnej może przynieść nieoczekiwane korzyści i nowe spojrzenie na otaczającą nas rzeczywistość.

**Podziękowania:** Pragnę wyrazić swą wdzięczność Pani prof. dr hab. Elżbiecie Pancer-Kotejowej za ogromną pomoc okazaną mi w trakcie powstawania tej pracy, Panu prof. dr. Johnowi Birksowi z *Botanical Institute, University of Bergen* za udostępnienie zasobów bogatej biblioteki, Panu dr. Krzysztofowi Ciesielskiemu, dr. Jerzemu Szwagrzykowi oraz mgr. Andrzejowi Bieleckiemu za przeczytanie maszynopisu i podzielenie się ze mną swoimi cennymi uwagami oraz mgr. Markowi Gaździe za pomoc w przygotowaniu tego artykułu.

## Piśmiennictwo

- Armstrong A. C. 1986 – On the fractal dimensions of some transient soil properties – *J. Soil Sci.* 37: 641–652.
- Bassendorf M. H. 1987 – Stochastic and fractal analysis of fracture trajectories – *Int. J. Engng. Sci.* 25: 667–672.
- Bradbury R. H., Reichelt R. E., Green D. G. 1984 – Fractals in ecology: methods and interpretation – *Mar. Ecol. Progr. Ser.* 14: 295–296.
- Burlando B. 1990 – The fractal dimension of taxonomic systems – *J. Theor. Biol.* 146: 99–114.
- Burlando B. 1993 – The fractal geometry of evolution – *J. Theor. Biol.* 163: 161–172.
- Burrough P. A. 1981 – Fractal dimension of landscapes and other environmental data – *Nature*, 294: 240–242.
- Burrough P. A. 1983a – Multiscale sources of spatial variation in soil. I. The application of fractal concepts to nested levels of soil variation – *J. Soil Sci.* 34: 577–597.
- Burrough P. A. 1983b – Multiscale sources of spatial variation in soil. II. A non-Brownian fractal model and its application in soil survey – *J. Soil Sci.* 34: 599–620.
- Burrough P. A. 1985 – Faces, facsimiles and facts: fractal models of geophysical phenomena (W: Science and uncertainty. Red. S. Nash) – IBM UK Ltd, Science Reviews Ltd.
- Carr J. R., Benzer W. B. 1991 – On the practice of estimating fractal dimension – *Math. Geol.* 23: 945–958.
- Ciesielski K., Pogoda Z. 1989 – Złamany wymiar – *Wiedza i Życie*, 11–12: 60–68.
- Corona P. 1991 – Studio dell'architettura della chioma arborea mediante L'analisi frattale – *L'Italia Forestale e Montana*, 4: 291–308.
- Crawford J. W., Young I. M. 1983 – A multiple scaled fractal tree – *J. Theor. Biol.* 145: 199–206.
- Decampo L., de Bikuna B. G. 1994 – Development and application of a diversity index ( $D$ ) to the benthic macroinvertebrates communities in the rivers of Biscay (North of Spain) – *Arch. Hydrobiol.* 129: 353–371.



- De Cola L. 1989 - Fractal analysis of classified landsat scene – *Photogr. Eng. Remote Sens.* 55: 601–610.
- Dicke M., Burrough P. A. 1988 – Using fractal dimensions for characterizing tortuosity of animal trails – *Physiol. Entomol.* 13: 393–398.
- Falconer K. J. 1990 – *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications* – Willey and Sons Ltd., London.
- Feder J. 1988 – *Fractals* – Plenum Press, New York & London.
- Fitter A. H., Stickland T. S. 1992 – Fractal characterization of root system architecture – *Funct. Ecol.* 6: 632–635.
- Frontier S. 1985 – Diversity and structure in aquatic ecosystems – *Oceanogr. Mar. Biol. Ann. Rev.* 23: 253–312.
- Frontier S. 1987 – Applications of fractal theory to ecology (W: *Developments in numerical ecology*. Ed. P. Legendre, L. Legendre) – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 335–378.
- Frontier S. 1993 – Species diversity as a fractal property of biomass (W: *Fractal'93 Conference*) – Elsevier, Kingston.
- Gardner R. H., Milne B. T., Turner M. G., O'Neill R. V. 1987 – Neutral models for the analysis of broad-scale landscape pattern – *Landscape Ecol.* 1: 19–28.
- Gee J. M., Warwick R. M. 1994 – Body-size distribution in a marine metazoan community and the fractal dimensions of macroalgae – *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 178: 247–259.
- Greborgi C., Ott E., Yorke J. A. 1984 – Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics – *Science*, 238: 632–638.
- Green D. M. 1991 – Chaos, fractals and nonlinear dynamics in evolution and phylogeny – *TREE*, 6: 333–337.
- Gunnarsson B. 1992 – Fractal dimension of plants and body size distribution of plants and body size distribution in spiders – *Funct. Ecol.* 6: 636–641.
- Gunnarsson B. 1993 – Spiders thrive in a fractal world – *Fauna Flora (Stokh.)*, 88: 30–35.
- Haslett J. R. 1994. – Community structure and the fractal dimensions of mountain habitats – *J. Theor. Biol.* 167: 407–411.
- Hastings H. M., Sugihara G. 1993 – *Fractals a user's guide for the natural sciences* – Oxford University Press.
- Hauge A. 1993 – Chaos and fractals: Are these concepts of interest to medical science? – *Tidsskr. Nor. Laegeforen.* 113: 3678–3686.
- Hentschel H. G. E., Proacaccia I. 1984 – Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds – *Phys. Rev. A*, 29: 1461–1470.
- Jeffrey H. J. 1992 – Fractals and genetics in the future – *Spec. Sci. Technol.* 15: 311–318.
- Jeffries M. 1993 – Invertebrate colonization of artificial pondweeds of differing fractal dimension – *Oikos*, 67: 142–148.
- Kaandrop J. A. 1994 – *Fractal modelling. Growth and form in biology* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Kaye B. H. 1989 – *A random walk through fractal dimensions* – VCH, Weinham, New York.
- Keipes M., Ries F., Dicato M. 1993 – On the British coastline and the interest of fractals in medicine – *Biomed. Pharmath.* 47: 409–415.
- Klinkenberg B., Goodchild M. F. 1992 – The fractal properties of topography: a comparison of methods – *Earth Surface Processes and Landforms*, 17: 217–234.
- Korvin G. 1992 – *Fractal models in the Earth sciences* – Elsevier, Amsterdam.
- Krummel J. R., Gardner R. H., Sugihara G., O'Neill R. V., Coleman P. R. 1987. – Landscape patterns in a disturbed environment – *Oikos*, 48: 321–324.
- Kudrewicz J. 1993 – *Fraktale i chaos* – Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.



- Langlet G. 1992 – The fractal laws in genetics – *Rev. Bio-Math.* 30: 57–71.
- Loehle C. 1983 – The fractal dimension and ecology – *Speculat. Sci. Technol.* 6: 131–142.
- Loehle C. 1990 – Home range: A fractal approach – *Landsc. Ecol.* 5: 39–52.
- Loehle C., Wein G. 1994 – Landscape habitat diversity: a multiscale information theory approach – *Ecol. Model.* 73: 311–329.
- Long A. C. 1994 – Leonardo da Vinci's rule and fractal complexity in dichotomous trees – *J. Theor. Biol.* 167: 107–113.
- Lovejoy S. 1982 – Area-perimeter relationship for rain and cloud areas – *Science*, 216: 185–187.
- Mandelbrot B. B. 1975 – *Les objets fractals: forme, chance et dimension* – Flammarion, Paris.
- Mandelbrot B. B. 1977 – *Fractals. Form, chance and dimension* – Freeman and Co., San Francisco.
- Mandelbrot B. B. 1983 – *The fractal geometry of nature* – W. H. Freeman & Co., New York.
- Mandelbrot B. B. 1986 – *Fractals and the rebirth of iteration theory (W: The beauty of fractals. Red. H.-O. Peitgen, P. H. Richter)* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 151–160.
- Mandelbrot B. B. 1990 – *Fractals – a geometry of nature* – *New Scientist*, 1734: 38–43.
- Milne B. T. 1988 – Measuring the fractal geometry of landscapes – *Appl. Math. Comput.* 27: 67–79.
- Milne B. T. 1991 – *Lessons from applying fractal models to landscape patterns (W: Quantitative methods in landscape ecology. Red. M. G. Turner, R. H. Gardner)* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 199–235.
- Milne B. T., Turner M. G., Wiens J. H., Johnson A. R. 1992 – Interactions between the fractal geometry of landscapes and allometric herbivory – *Theor. Popul. Biol.* 41: 337–353.
- Morse D. R., Lawton J. H., Dodson M. M., Williamson M. H. 1985 – Fractal dimension of vegetation and the distribution of arthropod body lengths – *Nature*, 314: 731–733.
- Palmer M. W. 1988 – Fractal geometry: a tool for describing spatial pattern of plant communities – *Vegetatio*, 75: 91–102.
- Palmer M. W. 1992 – The coexistence of species in fractal landscapes – *Am. Nat.* 139: 375–397.
- Pastor J., Broschart M. 1990. – The spatial pattern of a northern conifer-hardwood landscape – *Landsc. Ecol.* 4: 55–68.
- Peitgen H.-O., Richter P. H. 1986 – *The beauty of fractals* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Peitgen H.-O., Soupe D. 1988 – *The science of fractal images* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Pennycuik C. J. 1992 – *Newton rules biology* – Oxford University Press.
- Pennycuik C. J., Kline N. C. 1986 – Units of measurement for fractal extent, applied to the coastal distribution of bald eagle nests in the Aleutian Islands, Alaska – *Oecologia (Berl.)*, 68: 254–258.
- Prusinkiewicz P., Hanan J. 1989 – Lindenmayer systems, fractals, and plants – *Lect. Notes Biomath.* 79: 1–120.
- Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. 1990 – *The algorithmic beauty of plants* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Rex K. D., Malanson G. P. 1990 – The fractal shape of riparian forest patches - *Landsc. Ecol.* 4: 249–258.
- Scheuring I., Riedi R. R. 1994 – Application of multifractals to the analysis of vegetation pattern – *J. Veget. Sci.* 5: 489–496.
- Shorocks B., Marsters J., Ward I., Evennett P. J. 1991 – The fractal dimension of lichens and the distribution of arthropod body lengths – *Funct. Ecol.* 5: 457–460.
- Strand L. 1990 – Crown density and fractal dimension – *Medd. Nor. Inst. Skogforsk.* 43: 1–11.
- Sugihara G., May M. M. 1990 – Applications of fractals in ecology – *TREE*, 5: 79–86.



- Taylor C. C., Taylor S. J. 1991 – Estimating the dimension of a fractal – *J. R. Statist. Soc. B*, 53: 353–364.
- Tsonis A. A., Tsonis P. A. 1987 – Fractals: A new look at biological shape and patterning – *Perspect. Biol. Med.* 30: 355–361.
- Turner M. G. 1987 – Spatial simulation of landscape changes in Georgia: A comparison of 3 transition models – *Landsc. Ecol.* 1: 29–36.
- Vedyushkin M. A. 1994 – Fractal properties of forest spatial structure – *Vegetatio*, 113: 65–70.
- Voss R. F. 1988 – Fractals in nature: From characterization to simulation (W: The science of fractal images. Red. H.-O. Peitgen, D. Soupe) – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 21–70.
- Walat A. 1987 – Fraktale – Instytut Kształcenia Nauczycieli im. W. Spasowskiego, Warszawa.
- Weiss S. B., Murphy D. D. 1988 – Fractal geometry and caterpillar dispersal: or how many inches can inchworms inch? – *Funct. Ecol.* 2: 116–118.
- West B. J., Goldberg A. L. 1987 – Physiology in fractal dimensions – *Am. Sci.* 75: 354–356.
- With K. A. 1994 – Ontogenetic shifts in low grasshoppers interact with landscape structure: an analysis of movement patterns – *Funct. Ecol.* 8: 477–485.
- Yfantis E. A., Flatman G. T., Englund E. J. 1988 – Simulation of geological surfaces using fractals – *Math. Geol.* 20: 667–672.
- Zeide B. 1990 – Fractal analysis of crown structure (W: Proc. sessions "Mensuration, growth and yield", IUFRO, Red. H. E. Burkhardt) – School of Forestry and Wildlife Resources, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, 24061-0324, U.S.A., 232–241.
- Zeide B. 1991 – Fractal geometry in forestry applications – *For. Ecol. Manage.* 46: 179–188.

## Summary

Mandelbrot (1983) claimed that many scientific theories were developed by borrowing already existing mathematical theory, while the fractal geometry was created by the nature. Using the fractal theory we can study different patterns, which have been left aside by Euclidean geometry as being amorphous.

A fractal is by definition a set for which the Hausdorff-Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension. Fractals may be divided into two groups: "exact", mathematical fractals (Fig. 1), and "statistical" fractals. Likely as in Euclidean geometry, where we use different notion to describe some objects, in the fractal geometry we need the special measure of shape and complexity of any object, expressed as a number. This measure is the Hausdorff-Besicovitch dimension, called fractal dimension ( $D$ ). There are numerous methods to estimate the fractal dimension. Usually for statistical fractals we use one of the following method: the divider method (Fig. 2A), the box method, the grid method (Fig. 2B) and the perimeter–area method. In this paper fractal dimensions of three different outline of fern leaves are compared (Fig. 3). The most complicated shape is characterised by the highest value of  $D$ .

Recently there is a growing interest in the application of the fractal geometry in ecology. Many scientists use the fractal geometry as a new tool for describing either a very complicated, irregular and fragmented objects or different phenomena in different spatial and temporal scales. This paper provides a report on how the fractal dimension ( $D$ ) was used by ecologists to study following problems: describing and quantification of shape of a very complicated systems like a root system (Fitter and Stickland 1992), or a coral reef (Bradbury et al. 1984), a home range (Pennycuick 1992), an available area (Morse et al. 1985), heterogeneity in landscape ecology (Burrough 1981, De Cola 1989). The fractal geometry allows ecologists to view nature at multiple scales. This field of geometry has much to offer to ecology.