1.11 — równania różniczkowe, teoria spektralna
3.31 — teoria fal elektromagnetycznych

3/1986

Tomasz Jabłoński

INTERACYJNA METODA ROZKŁADU NA FUNKCJE WŁASNE DLA ŚWIATŁOWODÓW CYLINDRYCZNYCH

3/1986

P. 269

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN BIBLIOTEKA

WARSZAWA 1986

http://rcin.org.pl

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 listopada 1985 r.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

56870

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,75 Ark.druk. 1,25
Oddano do drukarni w styczniu 1986 r.
Nr zamówienia 73/86.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

Tomasz Jabłoński
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ITERACYJNA METODA ROZKŁADU NA FUNKCJE WŁASNE DLA ŚWIATŁOWODÓW CYLINDRYCZNYCH

Streszczenie

W pracy opisana jest metoda znajdowania modów podstawowych w światłowodach cylindrycznych jedno lub wielordzeniowych z dowolną ciągłą niejednorodnością poprzeczną. Dowolność dotyczy zarówno kształtu przekroju rdzenia jak i profilu indeksu refrakcji. Metoda ta, nazwana iteracyjną metodą rozkładu na funkcje własne /IMRW/, wykorzystuje spektralne własności operatora $\mathcal{T}$, generowanego przez wektorowe, własne zagadnienie brzegowe opisujące propagację w światłowodzie. Dowodzi się, że dzięki odpowiedniemu zdefiniowaniu operator $\mathcal{T}$ można przedstawić jako relatywnie zwarte zaburzenie samosprzężonego operatora $\mathcal{L}$ z widmem dyskretnym, którego funkcje własne są znane i stanowią bazę ortonormalną. Fakt ten pozwala skonstruować iteracyjny proces, który przy stosownym wyborze przybliżenia zerowego jest zbieżny do poszukiwanej funkcji /i wartości/ własnej operatora $\mathcal{T}$, wyrażonej w bazie pochodzącej od $\mathcal{L}$. W pracy podany jest również opis prostego algorytmu numerycznego dla IMRW oraz zasygnalizowane są możliwości przeniesienia metody na inne zagadnienia brzegowe elektromagnetyzmu.

I Sformułowanie problemu

W pracy rozważać będziemy cylindryczny światłowód, jednorodny wzdłuż kierunku propagacji /osi x_3/, w którym przenikalność dielektryczna ϵ jest funkcją przekroju poprzecznego światłowodu taką, że:

http://rcin.org.pl

$$\epsilon = \varepsilon(x)\cdot\epsilon_0$$

/1/ $$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_p + \varepsilon_s(x) & x \in P \\ 1 & x \in \mathbb{R}^2 - P \end{cases}$$

$$\varepsilon_s(x) = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_p)\cdot s(x)$$

gdzie:

ϵ_0 - przenikalność dielektryczna próżni

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

/2/ $1 < \varepsilon_p = \text{const}$, $\operatorname{supp} \varepsilon_s(x) \subset$ koło $(0, r=a)$ $=: P = \operatorname{Int} P$

$\varepsilon_{max} = \sup_{x \in P} \varepsilon(x)$, $\varepsilon_{max} - \varepsilon_p > 0$

O funkcji $s: P \to \mathbb{R}$ zakładamy, że spełnia następujące warunki:

/3/ $$s \in H_0^2(S), \quad \sup_{x \in S} |s(x)| = 1$$

gdzie S - obszar ze spójnymi składowymi taki, że

/4/ $$\operatorname{diam} S \ll \operatorname{diam} P = 2a$$

zaś $H_0^m(S)$ jest lokalną przestrzenią Sobolewa, to znaczy uzupełnieniem $C_0^\infty(S)$ w normie:

$$\|s\|_m = \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha s\|_{L^2(S)} \Big)^{1/2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Innymi słowy dany jest światłowód, w którym niewielkie, gładkie niejednorodności indeksu refrakcji opisywane funkcją s, pojawiają się tylko w rdzeniach S światłowodu, zanurzonych w relatywnie dużym kołowym płaszczu P ze stałą przenikalnością dielektryczną ε_p. Wiadomo, że każdy światłowód spełniający powyższe założenia posiada zawsze własności propagacyjne. Oznacza to, że istnieją mody prowadzone w rdzeniach S nie posiadające częstotliwości odcięcia, zwane modami podstawowymi. Rozważany w pracy problem polega na opisaniu pola elektromagnetycznego modów podstawowych wraz z podaniem ich stałych propagacji dla opisanej wyżej klasy światłowodów.

Równania pola wygodnie jest sformułować w naszym przypadku w terminach poprzecznych składowych pola magnetycznego H. [1]

http://rcin.org.pl

To niestandardowe sformułowanie ma w przypadku światłowodów szereg zalet w porównaniu z tradycyjnym podejściem /pochodzącym z teorii falowodów/, polegającym na przyjęciu za niewiadome składowych podłużnych pola E oraz H. Jedną z głównych zalet jest fakt, że stała propagacji /której kwadrat jest wartością własną w jednorodnym układzie równań Maxwell'a/ nie wchodzi w warunki brzegowe, a jedynie w równanie, co istotnie upraszcza sformułowanie i analizę problemu.

Przyjmując zależność czasową $e^{-i\omega t}$ oraz:

/5/ $$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 \ , \quad \mu = \text{const.} \ , \quad \sigma = 0$$

/6/ $$\tilde{H}(X) = \left[H_\perp(x), H_\parallel(x) \right] e^{i\beta x_3} = \left[\tilde{H}_\perp, \tilde{H}_\parallel \right]$$

gdzie

$X = (x, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$\perp$ - składowe poprzeczne

$\parallel$ - składowa podłużna x_3,

układ równań Maxwell'a sprowadza się do następującego, równoważnego mu zagadnienia brzegowego na pole $H_\perp$ oraz stałą propagacji β /czynnik $e^{i\beta x_3}$ pominięty/:

/7/ $$\begin{cases} \Delta_\perp H_\perp + k^2 \varepsilon(x) H_\perp + \dfrac{1}{\varepsilon(x)} \left(\nabla_\perp \varepsilon(x) \times (\nabla_\perp \times H_\perp) \right) - \beta^2 H_\perp = 0 \\ H_\perp^+ \big|_{\partial P} = H_\perp^- \big|_{\partial P} \\ \nabla_\perp \cdot H_\perp^+ \big|_{\partial P} = \nabla_\perp \cdot H_\perp^- \big|_{\partial P} \\ \dfrac{1}{\varepsilon^+} (\nabla_\perp \times H_\perp^+) \Big|_{\partial P} = \dfrac{1}{\varepsilon^-} (\nabla_\perp \times H_\perp^-) \Big|_{\partial P} \\ \text{znikanie } H_\perp \text{ w nieskończoności} \end{cases}$$

gdzie + oznacza rozwiązanie wewnątrz P, a $\varepsilon(x)$ zadane jest w /1/ - /4/.

http://rcin.org.pl

Pozostałe składowe pola elektromagnetycznego wyrażają się przez $H_\perp$ według wzorów:

$$\tilde{E}_\parallel = \frac{i}{\omega\epsilon_0\varepsilon}\left(\nabla_\perp \times \tilde{H}_\perp\right)$$

/8/ $$\tilde{H}_\parallel = \frac{i}{\beta}\left(\nabla_\perp \cdot \tilde{H}_\perp\right)$$

$$\tilde{E}_\perp = \frac{i}{\omega\epsilon_0\varepsilon}\left(\nabla_\parallel \times \tilde{H}_\perp + \nabla_\perp \times \tilde{H}_\parallel\right)$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy pewne uzasadnione fizycznie założenie upraszczające, pozwalające czytelniej zaprezentować iteracyjną metodę rozkładu na funkcje własne, które nie zmniejsza w istotny sposób, zdaniem autora, zakresu i efektywności jej praktycznego wykorzystania. Pokażemy później, jak można się od tego założenia uwolnić.

Średnica płaszcza P jest co najmniej o rząd wielkości większa od średnicy rdzenia S /patrz /4//, zaś z fizyki wiadomo, że pole modów prowadzonych zanika eksponencjalnie na zewnątrz rdzenia. Nie będzie więc dużym odstępstwem od rzeczywistości fizycznej, jeśli przyjmiemy, że całkowite pole elektromagnetyczne na brzegu płaszcza P jest pomijalnie małe. /Jedną z ważnych funkcji grubego płaszcza w światłowodzie jest właśnie odizolowanie pola w rdzeniu od wpływów zewnętrznych [2]/. Przyjmiemy zatem, że

/9/ $$\tilde{H}\Big|_{\partial P} = 0$$

i zamiast /7/ rozważać będziemy dalej następujący problem brzegowy:

/10/ $$\begin{cases} \Delta_\perp H_\perp + k^2\varepsilon(x)H_\perp + \frac{1}{\varepsilon(x)}\left(\nabla_\perp\varepsilon(x) \times (\nabla_\perp \times H_\perp)\right) - \beta^2 H_\perp = 0 & \text{w } P \\ H_\perp\Big|_{\partial P} = 0 \end{cases}$$

gdzie funkcja $\varepsilon(x)$ zadana jest w /1/ - /4/, zaś diam P = 2a jest dostatecznie duża.

http://rcin.org.pl

II Metoda rozwiązania

Zagadnienie brzegowe /10/ rozwiążemy iteracyjną metodą rozkładu na funkcje własne. W języku teorii światłowodów, polega ona na znajdowaniu kolejnych przybliżeń modu podstawowego w rdzeniach w postaci rozwinięcia na "mody płaszczowe" propagujące w płaszczu bez rdzeni, traktowanym jako olbrzymi wielomodowy światłowód pokryty metalem ze stałym indeksem refrakcji $n_p = \sqrt{\varepsilon_p}$. Dzięki temu, że stała propagacji modu podstawowego w rdzeniu jest większa od każdej ze stałych propagacji modów płaszczowych oraz temu, że rdzenie wprowadzają relatywnie małą niejednorodność, można za pomocą zabiegów matematycznych "wyłuskać" w kolejnych przybliżeniach szukane rozwiązanie. W tradycyjnych metodach przyjmuje się, że płaszcz rozciąga się do nieskończoności i wprost rozwiązuje się /najczęściej przy poważnych założeniach upraszczających, bądź numerycznie/ jednorodne zagadnienie własne typu /7/, odrębnie traktując przypadki różnych kształtów rdzeni i profilów indeksu refrakcji [3]. W opisywanej metodzie spektralnej rozwiązuje się zagadnia niejednorodne, w których niejednorodność reprezentująca dowolny rdzeń /rdzenie/ jest skutecznie "poprawiana" w kolejnych iteracjach, co prowadzi w granicy do rozwiązania problemu.

Aby uzyskać zwarty, a zarazem w miarę ogólny opis IMRW, skonstruujemy najpierw w odpowiedni sposób operator generowany przez zagadnienie /10/ oraz podamy najważniejsze jego własności. W tym celu weźmy przestrzeń Hilberta wektorowych funkcji zespolonych określonych na P, całkowalnych z kwadratem:

$$L^2(P) \otimes \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H} \tag{11}$$

z iloczynem skalarnym:

$$(u,v)_{\mathcal{H}} := \int_P \sum_{i=1}^{2} u_i(x)\overline{v_i(x)}\,dx = (u_1,v_1)_{L^2(P)} + (u_2,v_2)_{L^2(P)} \tag{12}$$

$$u,v \in \mathcal{H}, \qquad u = [u_1,u_2],\ v = [v_1,v_2].$$

http://rcin.org.pl

Określmy działający w $\mathcal{H}$ nieograniczony operator $\mathcal{T}$ /porównaj z /10/ oraz /1/ - /4//:

$$\mathcal{T}(H):=\mathcal{T}([H_1,H_2])=$$

/13/ $$=\Big[\Delta H_1+k^2\varepsilon_p H_1+k^2\varepsilon_s(x)H_1+\frac{1}{\varepsilon(x)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Big),$$
$$\Delta H_2+k^2\varepsilon_p H_2+k^2\varepsilon_s(x)H_2-\frac{1}{\varepsilon(x)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Big)\Big]$$

gdzie

$$H=[H_1(x_1,x_2),H_2(x_1,x_2)]\in\mathcal{H}, \qquad (x_1,x_2)=x\in P\subset\mathbb{R}^2$$

Nie będziemy precyzować, chwilowo, dziedziny $D(\mathcal{T})$ operatora $\mathcal{T}$, zakładając jednak, że

$$D(\mathcal{T})\supset C_0^\infty(P)\times C_0^\infty(P),$$

/14/ $$u\in D(\mathcal{T}) \Rightarrow u|_{\partial P}=0$$

Operator $\mathcal{T}$ przedstawimy w postaci sumy dwóch operatorów. W tym celu zdefiniujmy w $\mathcal{H}$ operator $\mathcal{L}$:

/15/ $$\mathcal{L}(H):=[L(H_1),L(H_2)], \qquad D(\mathcal{L})=D(L)\otimes D(L)$$

gdzie

/16/ $$L(H_i):=\Delta H_i+k^2\varepsilon_p H_i \qquad i=1,2.$$

jest samosprzężonym operatorem działającym w $L^2(P)$, którego forma kwadratowa jest domknięciem formy:

/17/ $$q(f,g):=\int_P \nabla f\cdot\overline{\nabla g}\,dx$$

z dziedziną $Q(q)=C_0^\infty(P)$.
Innymi słowy, L jest samosprzężonym rozszerzeniem Friedrichsa przesuniętego o $k^2\varepsilon_p$ laplasjanu z istotną dziedziną:

$$D^{ess}(L)=\{f\in H_0^1(P):\ f\in C^\infty \text{ aż do brzegu } \partial P,\ f|_{\partial P}=0\}$$

http://rcin.org.pl

Prawdziwe są przy tym następujące inkluzje:

/18/ $$D^{ess}(L) \subset D(L) \subset Q(L) = H_0^1(P) \;, \qquad Q(L) = Q(\bar{q})$$

gdzie

/19/ $$D(L) = \{ f \in H_0^1(P) : f \in C^2 \text{ aż do brzegu } \partial P, \; f|_{\partial P} = 0 \}$$

Dobrze wiadomo /patrz np. [4], [5]/, że L jest operatorem półograniczonym z góry z widmem dyskretnym:

/20/ $$\forall u \in D(L), \|u\|_{L^2(P)} = 1 \qquad (Lu, u)_{L^2(P)} \leqslant \lambda_1 = \lambda_{(0,1)} < k^2 \varepsilon_p$$

$$\sigma(L) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n \in \mathbb{R} : \lambda_n = k^2 \varepsilon_p - \varkappa_n^2 \text{ gdzie } \varkappa_n > 0 : J_\nu(\varkappa_{(\nu,\mu)} a) = 0, \\ n = (\nu, \mu), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \; \mu = 1, 2, \ldots \end{array} \right\}$$

Dla $\varrho \notin \sigma(L)$ rezolwenta L:

/21/ $$R_\varrho := (L - \varrho I)^{-1}$$

jest operatorem zwartym.

W przestrzeni $\mathcal{H}$ istnieje baza ortonormalna złożona z funkcji własnych operatora $\mathcal{L}$:

/22/ $$(W_n)_{n=(0,1)}^{\infty} : \qquad (\mathcal{L} - \lambda_n I) W_n = 0$$

gdzie

/23/ $$W_n^i = W_{\nu\mu}^i(r, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (NJ_{\nu\mu})^{-1/2} J_\nu(\varkappa_{\nu\mu} r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \nu\varphi \\ \cos \nu\varphi \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2. \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, 2, \ldots \end{array}$$

przy czym

/24/ $$NJ_{\nu\mu} := \frac{\pi a^2}{2} \left(J_{\nu+1}(\varkappa_{\nu\mu} a) \right)^2$$ gdzie 2a = diam P

Przyjmiemy przydatne później oznaczenia:

/25/ $$\lambda_1 = \max(\lambda : \lambda \in \sigma(L)) \;, \quad \sigma_{min} = k^2 \varepsilon_p \;, \quad \sigma_{max} = k^2 \varepsilon_{max} .$$

Widać, że

/26/ $$\lambda_1 < t_{min} < t_{max}$$

Zdefiniujmy ponadto w $\mathcal{H}$ operator $\mathcal{F}$:

/27/ $$\mathcal{F}(H) = \left[F_1([H_1, H_2]), F_2([H_1, H_2]) \right], \quad D(\mathcal{F}) = H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2$$

gdzie

/28/ $$F_i([H_1, H_2]) = -k^2 \varepsilon_1(x) H_i + \frac{(-1)^i}{\varepsilon(x)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{(3-i)}} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right), \quad i = 1, 2.$$

Ze względu na własności funkcji $\varepsilon(x)$/patrz /1/ - /4//:

/29/ $$\forall u \in D(\mathcal{F}) \qquad \mathrm{supp}\, F_i(u) \subset S, \qquad i = 1, 2.$$

Sformułujemy teraz w postaci twierdzenia podstawowe własności przedstawionej wyżej konstrukcji.

Twierdzenie

Operator $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwarty oraz nieskończenie mały względem operatora $\mathcal{L}$. Oznacza to, że:

$$\forall \varrho \notin \sigma(\mathcal{L}) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{L} - \varrho I)^{-1} = \mathcal{F} R_\varrho$$

jest operatorem zwartym w $\mathcal{H}$ oraz

$$\forall d > 0 \ \exists b_{(d)} \ \forall u \in D(\mathcal{L}):$$

/30/ $$\| \mathcal{F} u \|_{\mathcal{H}} \leq d \| \mathcal{L} u \|_{\mathcal{H}} + b \| u \|_{\mathcal{H}}$$

przy czym d można wybrać dowolnie małe /inf d = 0/.

Operator $\mathcal{T}$:

/31/ $$\mathcal{T} := \mathcal{L} - \mathcal{F}, \qquad D(\mathcal{T}) = D(\mathcal{L}) \cap D(\mathcal{F}) = D(\mathcal{L})$$

jest domknięty i $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{L}} - \overline{\mathcal{F}}$

http://rcin.org.pl

Ponadto, widmo $\sigma(\mathcal{T})$ jest dyskretne i zawiera się w następującym podzbiorze $\mathbb{C}$:

/32/ $$\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{M} := \{ \gamma \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,\gamma \leq \lambda_1 + B, \ |\mathrm{Im}\,\gamma| \leq B \}$$

gdzie

$$B := \max \left\{ \frac{b}{1-d}, \ d \cdot \lambda_1 + b \right\}$$

Jeśli $\mathcal{F}$ jest symetryczny, to $\mathcal{T}$ jest samosprzężony oraz ograniczony z góry:

/32'/ $$\forall u \in D(\mathcal{T}) \qquad (\mathcal{T}u, u)_{\mathcal{H}} \leq (\lambda_1 + B) \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}}$$

<u>Dowód</u>

/Uwaga: w całym dowodzie indeksy i,j,k,l = 1,2/

Relatywna zwartość:

Wystarczy pokazać, że $\mathcal{F}$ jest zwarty jako operator:

$$\mathcal{F} : \left(D(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}} \right) \longrightarrow \left(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}} \right)$$

gdzie

$$\|u\|_{\mathcal{L}} := \|u\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{H}}$$

Weźmy kulę $K \subset \left(D(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}} \right)$.

Dla dowolnego $u = [u_1, u_2] \in K$ mamy:

$$\|u_i\|_{L^2(P)} < C_1 , \quad \|(\Delta + k^2 \varepsilon_p I) u_i\|_{L^2(P)} < C_1$$

Ponieważ /patrz /18// $D(L) \subset Q(L) = H^1_0(P)$ to $\|\nabla u_i\|_{L^2(P)} < +\infty$

Co więcej, w naszym przypadku /P jest kołem/ prawdziwe jest następujące oszacowanie /patrz [6] /:

/33/ $$\forall \delta > 0 \ \exists C_{2(\delta)} \ \forall u \in K \quad \|u_i\|_{L^2(P)} + \|\nabla u_i\|_{L^2(P)} \leq \delta \cdot \|\Delta u_i\|_{L^2(P)} + C_2 \|u_i\|_{L^2(P)}$$

http://rcin.org.pl

Wynika z niego, że

$$\exists c_3 \ \forall u \in K \qquad \|\nabla u_i\|_{L^2(P)} < c_3$$

Mamy ponadto:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_k} u_i - \frac{\partial}{\partial x_l} u_j\right\|_{L^2(P)} \leqslant \|\nabla u_1\|_{L^2(P)} + \|\nabla u_2\|_{L^2(P)} < 2 \cdot c_3$$

/33'/ $$\left\|\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_1\right\|_{L^2(P)} < c_4 \ , \quad \left\|\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_1 \cdot \nabla u_i\right\|_{L^2(P)} < c_5(c_4, c_3)$$

$$\left\|\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_i\right)\right\|_{L^2(P)} \leqslant \|\Delta u_i\|_{L^2(P)} < c_1$$

Drugie oszacowanie w /33'/ wynika z /3/, zaś ostatnie łatwo widać po przejściu do transformat Fourier'a, bo

$$\sum_j (\xi_k \cdot \xi_j)^2 \leqslant \varrho^4 \ , \qquad \varrho = (\xi_1, \xi_2)$$

Z powyższych oszacowań wynika, że

/34/ $$\forall u \in K \quad \|F_i u\|_{H_0^1(P)} \leqslant \|F_i u\|_{L^2(P)} + \|\nabla F_i u\|_{L^2(P)} < M_{i\,(c_1, \ldots, c_4)} = \mathrm{const.}$$

Zatem obraz kuli K przez operator $\mathcal{F}$ jest ograniczony w $H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2$. Ale kula w $H_0^1(P)$ zanurza się w sposób zwarty w $L^2(P)$, zatem relatywna zwartość $\mathcal{F}$ została udowodniona.

Relatywna ograniczoność:

Weźmy dowolne $u \in D(\mathcal{L}) \subset H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2$. Przed chwilą pokazaliśmy, że /patrz /34//:

$$\exists M_{\mathcal{F}} = \mathrm{const.} : \quad \|\mathcal{F} u\|_{H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2} \leqslant M_{\mathcal{F}} \|u\|_{H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2}$$

Stąd

$$\forall \delta > 0 \ \forall u \in D(\mathcal{L}) \qquad \|\mathcal{F} u\|_{\mathcal{H}} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{F} u\|_{H_1^0(P) \otimes \mathbb{C}^2} \leqslant M_{\mathcal{F}} \|u\|_{H_0^1(P) \otimes \mathbb{C}^2}$$
$$\leqslant M_{\mathcal{F}} \left(\delta \cdot \|\mathcal{L} u\|_{\mathcal{H}} + (C_{(\delta)} + \delta \cdot k^2 \varepsilon_P) \|u\|_{\mathcal{H}}\right)$$

Skorzystaliśmy z nierówności /33/.

http://rcin.org.pl

Zatem:

$$\|\mathcal{F}u\|_{\mathcal{H}} \leqslant d \cdot \|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{H}} + b\|u\|_{\mathcal{H}}$$

gdzie $d = \delta \cdot M_{\mathcal{F}}$ - dowolnie małe,

$b = b(\delta, M_{\mathcal{F}}) = \left(C(\delta) + \delta \cdot k^2 \varepsilon_p\right) \cdot M_{\mathcal{F}}$

Czyli $\mathcal{F}$ jest nieskończenie mały względem $\mathcal{L}$.

Dyskretność widma $\sigma(\mathcal{T})$:

Przekształćmy rezolwentę operatora $\mathcal{T}$ w punkcie $\pm i\mu$ do równoważnej postaci:

$$(\mathcal{T} \pm i\mu I)^{-1} = (\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}\left(I - \mathcal{F}(\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}\right)^{-1}$$

Z relatywnej ograniczoności $\mathcal{F}$ wynika, że dla $\mu > b$ /pamiętajmy że inf d = 0/:

$$\|\mathcal{F}(\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left(d + \frac{b}{\mu}\right) < 1$$

Wtedy $\pm 1 \notin \sigma\left(\mathcal{F}(\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}\right)$, a zatem $\left(I - \mathcal{F}(\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}\right)^{-1}$ jest ograniczony. Ponadto $(\mathcal{L} \pm i\mu I)^{-1}$ jest zwarty /patrz /21//. Stąd $(\mathcal{T} \pm i\mu I)^{-1}$ jest zwarty, a zatem $\mathcal{T}$ ma widmo dyskretne. Pozostała część twierdzenia jest wnioskiem z twierdzenia Kato-Rellich'a /patrz np. [10] lub [5]/.

Jesteśmy matematycznie przygotowani do przedstawienia metody rozwiązania zagadnienia własnego /10/, które w świetle /13/ i /31/ ma równoważną postać:

/35/ $$(\mathcal{T} - \gamma I)H_{\perp} = 0 \quad \text{lub} \quad (\mathcal{L} - \gamma I)H_{\perp} = \mathcal{F}H_{\perp} \qquad \gamma = \beta^2$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest relatywnie zwartym, nieskończenie małym zaburzeniem operatora $\mathcal{L}$.

Poszukujemy stałej propagacji β modu podstawowego $(\gamma = \beta^2)$. Jest ona największa ze wszystkich stałych propagacji modów prowadzonych w rdzeniu S. Mamy zatem /patrz oznaczenia /25/ i /26//:

/36/ $$\sigma_{min} < \mathrm{Re}\,\gamma < \sigma_{max} \quad \text{oraz} \quad \gamma \notin \sigma(\mathcal{L})$$

http://rcin.org.pl

Niech dla $\varrho_n \notin \sigma(\mathcal{L})$, n = 0,1,2,...

/37/ $$\mathcal{M}_n := (\mathcal{L} - \varrho_n I)^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{R}_{\varrho_n}\mathcal{F} \ , \quad D(\mathcal{M}_n) = D(\mathcal{J})$$

/38/ $$\mathcal{Z}_n := \mathcal{F}(\mathcal{L} - \varrho_n I)^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{R}_{\varrho_n} \ , \quad D(\mathcal{Z}_n) = \mathcal{H}$$

Z twierdzenia wynika następujący wniosek:

<u>Wniosek</u>

$\mathcal{Z}_n$ jest zwartym operatorem w $\mathcal{H}$, zaś $\mathcal{M}_n$ jest zwarty jako operator:

/39/ $$\mathcal{M}_n : \left(D(\mathcal{J}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}\right) \longrightarrow \left(D(\mathcal{J}), \|\cdot\|_{\mathcal{H}}\right) \ , \quad \varrho_n \notin \sigma(\mathcal{L})$$

Przy tym, $\mathcal{M}_n$ przedłuża się do operatora zwartego w $\mathcal{H}$ /bo jeśli $\mathcal{F}$ jest $\mathcal{L}$-zwarty, to $\mathcal{F}^*$ też jest $\mathcal{L}$-zwarty i wtedy $\mathcal{M}_n^* = \mathcal{F}^*\mathcal{R}_n$/

Ponadto $\forall \varrho_n > \lambda_1 \ \forall u \in \mathcal{H}$

$$\|\mathcal{Z}_n u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \max\left\{ \frac{b}{(1-d)(\varrho_n - \lambda_1)}, \frac{d \cdot \lambda_1 + b}{\varrho_n - \lambda_1} \right\}$$

Zatem, jeśli $\varrho_n \approx \lambda_1 + b$ to $\|\mathcal{Z}_n\| \approx 1$, przy czym dla $\varrho_n > \lambda_1 + B$ /patrz /32// $\|\mathcal{Z}_n\| < 1$.

<u>Opis procesu iteracyjnego dla IMRW:</u>

Rozwiązanie problemu /35/ znajdujemy w następujący sposób:

Wybieramy:

$$\varrho_0 : \ \mathrm{Re}\,\varrho_0 \in (b_{min}, b_{max}) \ , \quad |\mathrm{Im}\,\varrho_0| < B$$

$$\Psi_0 : \ \Psi_0 \in D(\mathcal{J}), \ \|\Psi_0\|_{\mathcal{H}} = 1 \ , \ \mathrm{Re}(\mathcal{J}\Psi_0, \Psi_0) > b_{min}$$

W pętli iteracyjnej znajdujemy:

<u>Krok 1</u>

/40/ $$\Phi_n = \mathcal{M}_{n-1}\Psi_{n-1}$$

co jest równoważne /patrz /37// znalezieniu rozwiązania Φ_n niejednorodnego równania ze znaną prawą stroną i znanym ϱ_{n-1} :

http://rcin.org.pl

$$/41/\qquad \begin{cases} (\mathcal{L}-\varrho_{n-1}I)\Phi_n = \mathcal{F}\Psi_{n-1} \\ \Phi_n|_{\partial P}=0 \end{cases}$$

Równanie to rozwiązujemy metodą rozkładu na funkcje własne operatora $\mathcal{L}$ /patrz np. [9]/. Rozwiązanie takie zawsze istnieje, bo $\varrho_{n-1} \notin \sigma(\mathcal{L})$.

Krok 2

Mając Φ_n normujemy je:

$$\Psi_n := \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}}$$

oraz znajdujemy ϱ_n z zależności:

$$/42/\qquad \varrho_n = \varrho_{n-1} + \left(\mathcal{F}\left(\frac{\Psi_{n-1}}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}} - \Psi_n\right), \Psi_n\right)_{\mathcal{H}}$$

Opis kroku 1

Rozwiązania $\Phi_n = [\varphi_n^1, \varphi_n^2]$ równania /41/ poszukujemy w postaci:

$$/43/\qquad \varphi_n^i = \sum_m C_m^{n,i} W_m^i \qquad i=1,2.\ ,\ m=(\nu,\mu)$$

gdzie w_m^i - funkcje własne operatora L /patrz /23//. Każde rozwiązanie postaci /43/ spełnia warunek $\varphi_n^i|_{\partial P}=0$. Współczynniki $C_m^{n,i}$ wyznaczymy tak, aby /43/ spełniało samo równanie /41/:

$$(L-\varrho_{n-1}I)\left(\sum_m C_m^{n,i} W_m^i\right) = F_i\Psi_{n-1} \quad , \ i=1,2.$$

$$\sum_m C_m^{n,i}\left\{\left(L-(\varrho_{n-1}+\lambda_m-\lambda_m)I\right)W_m^i\right\} = F_i\Psi_{n-1}$$

$\lambda_m \in \sigma(L)$ zatem

$$\sum_m C_m^{n,i}(\lambda_m-\varrho_{n-1})W_m^i = F_i\Psi_{n-1} \quad / \cdot (\cdot, W_m^i)_{L^2(P)}$$

Mnożąc obustronnie skalarnie przez w_m^i oraz wykorzystując ortogonalność w_m^i otrzymujemy:

$$C_m^{n,i} = \frac{1}{\lambda_m-\varrho_{n-1}} \cdot \frac{(F_i\Psi_{n-1}, W_m^i)_{L^2(P)}}{(W_m^i, W_m^i)_{L^2(P)}}$$

http://rcin.org.pl

Biorąc pod uwagę /23/, /24/ oraz /29/:

/44/ $$C_m^{n,i} = \frac{(F_i \Psi_{n-1}, W_m^i)_{L^2(S)}}{\lambda_m - \varrho_{n-1}}$$

Ostatecznie:

/45/ $$\varphi_n^i = \sum_{\nu,\mu} \frac{(F_i \Psi_{n-1}, W^i_{(\nu,\mu)})_{L^2(S)}}{\lambda_{(\nu,\mu)} - \varrho_{n-1}} \cdot W^i_{(\nu,\mu)}, \quad \begin{array}{l} i = 1,2. \\ \nu = 0,1,2,\dots \\ \mu = 1,2,3,\dots \end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że w /44/ i /45/ występuje iloczyn skalarny: $(\cdot,\cdot)_{L^2(S)}$ a więc całkowanie po relatywnie małym rdzeniu S, co wynika z /29/. ∎

Opis kroku 2

Z równości Parseval'a mamy:

/46/ $$\|\varphi_n^i\|^2_{L^2(P)} = \sum_m |C_m^{n,i}|^2 \quad , \quad i = 1,2.$$

Stąd

/47/ $$N_n := \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} = \left(\sum_m |C_m^{n,1}|^2 + |C_m^{n,2}|^2 \right)^{1/2}$$

Wtedy dla unormowanego $\Psi_n = [\psi_n^1, \psi_n^2]$ otrzymujemy:

/48/ $$\psi_n^i = \sum_m \frac{C_m^{n,i}}{N_n} W_m^i = \sum_m D_m^{n,i} W_m^i, \quad i = 1,2.$$

Nowe ϱ_n ma odpowiadać przybliżonemu rozwiązaniu własnemu Ψ_n. Zatem, szukamy ϱ_n takiego, że

/49/ $$\mathcal{T}\Psi_n = \varrho_n \Psi_n$$

Mnożąc obustronnie /49/ skalarnie przez Ψ_n /$\|\Psi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$/ otrzymujemy:

/50/ $$\varrho_n = (\mathcal{T}\Psi_n, \Psi_n)_{\mathcal{H}}$$

http://rcin.org.pl

Korzystając z /41/:

$$\mathcal{T}\Psi_n = \mathcal{L}\Psi_n - \varrho_{n-1}\Psi_n + \varrho_{n-1}\Psi_n - \mathcal{F}\Psi_n =$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{\Psi_{n-1}}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}}\right) + \varrho_{n-1}\Psi_n - \mathcal{F}\Psi_n$$

Zatem

$$\varrho_n = \varrho_{n-1} + \left(\mathcal{F}\left(\frac{\Psi_{n-1}}{\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}} - \Psi_n\right), \Psi_n\right)_{\mathcal{H}}$$

■

<u>Uwaga 1</u>

Formuła /42/ ma następującą równoważną postać, dogodną do obliczeń numerycznych:

/51/
$$\varrho_n = \varrho_{n-1} + \Big\{ \sum_m (\lambda_m - \varrho_{n-1}) \cdot \left(|D_m^{n,1}|^2 + |D_m^{n,2}|^2 \right) - \sum_{i=1}^{2} \sum_m \overline{D_m^{n,i}} \cdot \left(F_i \Psi_n , w_m^i \right)_{L^2(S)} \Big\}$$

<u>Uwaga 2</u>

Z /50/ wynika, że dla n = 1,2,...

/52/
$$\operatorname{Re} \varrho_n \leq \operatorname{Re} \gamma_{max} = \sup_{\gamma} \left(\operatorname{Re}\gamma : \gamma \in \sigma(\mathcal{J}) \right) = \sup_{\|u\|=1} \operatorname{Re}(\mathcal{J}u, u)_{\mathcal{H}}$$

Ponadto na mocy /37/,/39/ oraz /40/ ciąg $(\Psi_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera podciąg zbieżny w $\mathcal{H}$, ponieważ kula z $H_0^1(P)\otimes\mathbb{C}^2$ zanurza się w $\mathcal{H}$ w sposób zwarty. Wtedy $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}$ też zawiera podciąg zbieżny i z konstrukcji procesu iteracyjnego wynika, że

$$\Psi_n \longrightarrow H \iff \varrho_n \longrightarrow \gamma$$

gdzie γ, H rozwiązanie problemu /35/.

http://rcin.org.pl

III Wykorzystanie praktyczne IMRW.

Metoda jest uniwersalna w tym sensie, że można ją formalnie zastosować do znajdowania modów podstawowych dla bardzo szerokiej klasy światłowodów jedno lub wielordzeniowych, których profile indeksu refrakcji spełniają założenia /1/ - /4/. Co więcej, numeryczny algorytm ulegał będzie jedynie niewielkim modyfikacjom przy zmianie profilu indeksu lub kształtu rdzenia. Algorytm ten jest stosunkowo prosty i sprowadza się w zasadzie do znajdowania w miarę potrzeby zer funkcji Bessel'a oraz całkowania po relatywnie małym przekroju rdzenia S /nośniku funkcji s(x) / wyrażenia typu /patrz /44//:

/53/ $$\int_S F_i \Psi_n \cdot W_m^i \, dx$$

Unika się przy tym numerycznego różniczkowania w operatorze F_i, ponieważ samo Ψ_n /patrz /45// jest kombinacją liniową funkcji, których pochodne można policzyć analitycznie. Ponadto, większość całek /53/ jest równa zeru lub pomijalnie mała, co oznacza, że $F_i\Psi_n$ jest ortogonalne lub prawie ortogonalne do większości modów płaszczowych. Dzieje się tak dlatego, że mod podstawowy jest nieomal cały zanurzony w podprzestrzeni kilkunastu pierwszych funkcji własnych operatora $\mathcal{L}$. Decyduje o tym relatywna zwartość operatora $\mathcal{F}$ względem $\mathcal{L}$. Nie mniej istotny jest wpływ symetrii kształtu rdzeni /posiada je w zasadzie każdy realizowany w praktyce światłowód/. Symetrie te decydują o ortogonalności $F_i\Psi_n$ do całych nawet serii modów płaszczowych. Wykonując analitycznie proste całkowania można się przekonać, że na przykład dla profilu indeksu, który nie zależy od kąta φ, jedynymi nieortogonalnymi do $F_i\Psi_n$ seriami funkcji własnych operatora L są:

dla składowej H_1:

$$W^1_{(2\nu,\mu)} = J_{2\nu}(\varkappa_{(2\nu,\mu)} \cdot r) \cdot \cos 2\nu\varphi \qquad \nu = 0,1,2,\ldots \quad \mu = 1,2,3,\ldots$$

zaś dla składowej H_2:

$$W^2_{(2\nu,\mu)} = J_{2\nu}(\varkappa_{(2\nu,\mu)} \cdot r) \cdot \sin 2\nu\varphi \qquad \nu,\mu = 1,2,3,\ldots$$

http://rcin.org.pl

przy czym współczynniki w rozwinięciu H_1 są o dwa rzędy większe niż w rozwinięciu H_2. Potwierdza to fizyczny fakt, że mod podstawowy w światłowodzie z kołowym rdzeniem jest prawie liniowo spolaryzowany oraz, że jest symetryczny względem osi polaryzacji i antysymetryczny względem osi do niej prostopadłej [7] .

Znajomość całek /53/ oraz odpowiadających im wartości własnych operatora $\mathcal{L}$ pozwala dalej, w trywialny już sposób, wyznaczyć nowe przybliżenie pola $H_\perp$ /formuły /44/ i /45//, a także nową stałą propagacji β_n /formuła /51//.

Przeprowadzony został test numeryczny metody na wybranym przykładzie jednomodowego światłowodu z potęgowym profilem indeksu refrakcji w kołowym rdzeniu. Światłowód ten był analizowany innymi metodami, co pozwoliło porównać wyniki /patrz np.[7]/. Test wypadł pomyślnie: β_n szybko ustalało się w pobliżu spodziewanej wartości stałej propagacji modu podstawowego, zaś rozkład składowej $H_\perp$ tego modu był zgodny z oczekiwanym - H_1 było prawie niezależne od kąta /dominowały w rozwinięciu funkcje $w_{(0,m)}$, $m = 1,2,\ldots,7$/, natomiast H_2 było o dwa rzędy mniejsze /z dominującymi w rozwinięciu $w_{(2,m)}$, $m = 1,2,\ldots$/. W najbliższej przyszłości planowane jest przeprowadzenie przy pomocy IMRW obliczeń dla przypadków nie posiadających dotychczas satysfakcjonujących rozwiązań, między innymi dla światłowodów jedno i dwurdzeniowych z eliptycznymi przekrojami rdzeni. Należą one do grupy światłowodów zachowujących polaryzację. Istnieje duże zapotrzebowanie ze strony praktyków na zbadanie własności oraz przeprowadzenie syntezy takich właśnie światłowodów.

Trudno jest przewidzieć skuteczny zakres stosowalności IMRW bez przeprowadzenia szczegółowej matematycznej analizy jej zbieżności. Analiza ta wymaga pełniejszej specyfikacji funkcji profilu $\varepsilon_\Delta(x)$ oraz dokładniejszego zbadania spektralnych własności operatorów $\mathcal{T}$ i $\mathcal{Z}_n$. Należy również uwzględnić wpływ wyboru przybliżenia zerowego.

Heurystycznie, mechanizm zbieżności można wyjaśnić w następujący sposób: jeśli β_n znajduje się blisko krańca widma operatora $\mathcal{T}$, to norma zwartego operatora $\mathcal{Z}_n$ /a także i $\mathcal{M}_n$/ jest bliska jedności /patrz /32/, wniosek oraz uwaga 2/, przy czym

http://rcin.org.pl

dla $\varrho_n \notin \mathfrak{M}$, $\|\mathcal{M}_n\|_{\mathcal{H}} < 1$, zaś dla ϱ_n bliskiego $\sigma(\mathcal{L})$, $\|\mathcal{M}_n \Psi_n\|_{\mathcal{H}}$ jest duża dla Ψ_n rozpiętych na pierwszych funkcjach własnych operatora $\mathcal{L}$ /bo wtedy $\|\mathcal{R}_n\|$ jest duża/. Szacowania różnicy $\varrho_n - \varrho_{n-1}$ /w oparciu o /42// skłaniają do hipotezy, że jeśli ϱ_{n-1} jest takie, że: $\mathrm{Re}\,\gamma_2 < \mathrm{Re}\,\varrho_{n-1} < \mathrm{Re}\,\gamma_{max}$ gdzie γ_{max}, γ_2 - dwie pierwsze wartości własne $\mathcal{T}$, to $\mathrm{Re}\,\varrho_n > \mathrm{Re}\,\varrho_{n-1}$ i $\varrho_n \xrightarrow[n]{} \gamma_{max}$, jako ciąg rosnący ograniczony z góry. Wtedy $\|(\mathcal{M}_n - I)\Psi_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$ co jest równoważne $\|(\mathcal{T} - \varrho_n I)\Psi_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Mając na względzie uwagę 2 wydaje się więc, że w zależności od wyboru przybliżenia zerowego ϱ_0, Ψ_0, operatory $\mathcal{M}_n$ będą produkować różne ciągi kolejnych przybliżeń $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}, (\Psi_n)_{n=1}^{\infty}$, zbieżne do wartości i funkcji własnych operatora $\mathcal{T}$. Trwają intensywne prace nad uściśleniem powyższego wyjaśnienia mechanizmu zbieżności IMRW oraz nad zbadaniem dalszych własności widma operatora $\mathcal{T}$, co umożliwi opisanie własności propagacyjnych szerokiej klasy światłowodów wykorzystywanych w praktyce.

Od założenia upraszczającego /9/ można się uwolnić, biorąc zamiast $\mathcal{L}$ operator $\mathcal{L}'$, generowany przez otwarte zagadnienie brzegowe dla jednorodnego, nieskończonego cylindra dielektrycznego o przekroju kołowym. Z prac Agranovich'a [8] oraz Kacenelenbauma i współpracowników [9] wynika, że można tak skonstruować operator $\mathcal{L}'$, aby miał widmo czysto dyskretne, zaś jego funkcje własne i stowarzyszone stanowiły bazę Riesza w przestrzeni, w której działa. Niestety $\mathcal{L}'$ nie jest wtedy samosprzężony, zaś jego wartości i funkcje własne trzeba wyliczać numerycznie, stosując podane w [9] metody wariacyjne. Algorytm dla IMRW staje się wtedy bardziej kosztowny numerycznie.

IMRW można przenieść na inne własne zagadnienia brzegowe elektromagnetyzmu. Jej zastosowanie jest możliwe wszędzie tam, gdzie generowany przez problem brzegowy operator daje się przedstawić jako relatywnie ograniczone /z $d<1$/ zaburzenie takiego operatora ze znanym widmem dyskretnym /najlepiej samosprzężonego/, którego funkcje własne i stowarzyszone stanowią bazę. Traktując owe zaburzenie jako niejednorodność, można w procesie iteracyjnym znaleźć ten kawałek widma operatora wyjściowego, który "wystaje" z widma operatora nie zaburzonego. Relatywna ogra-

http://rcin.org.pl

niczoność /zwartość/ zaburzenia będzie gwarantować zbieżność procesu iteracyjnego oraz efektywność rozwinięcia na funkcje własne operatora nie zaburzonego.

Opisana sytuacja występuje dosyć często, a dzięki pracom Rosjan /patrz na przykład [9], [11]/ znacznie wzrosła w ostatnim dziesięcioleciu ilość nadających się do zaburzania /w sensie podanym przed chwilą/ operatorów opisujących różne zagadnienia brzegowe elektromagnetyzmu. Ponadto, w wielu wypadkach znane są rozwiązania uproszczonych, bądź kanonicznych problemów, które mogą posłużyć za przybliżenia zerowe dla IMRW.

http://rcin.org.pl

Bibliografia

[1] - N.VOITOVICH, B.KACENELENBAUM, A.SIVOV "Sobstviennyje wolny dielektriczeskich wołnovodov słożnogo sieczenija" Radiotechnika i Elektronika JUL 1979 pp 1245-1263.

[2] - A.CHERIN "An introduction to optical fibers" McGraw Hill 1983

[3] - "Optical fibre communication" Praca zbiorowa McGraw Hill 1980

[4] - V.VLADIMIROV "Uravnienija matematiczeskoj fiziki" Nauka 1981

[5] - M.REED, B.SIMON "Methods of modern mathematical physics" tom II i IV. Academic Press 1978

[6] - V.MAZJA "Prostranstva Soboleva" Leningrad 1985 p. 211

[7] - A.SNYDER "Understanding monomode optical fibers" Proc. of IEEE vol. 69 no 1 JAN 81 pp 6-13

[8] - M.AGRANOVICH "Niesamosopriażennyje opieratory w zadaczach tipa difrakcji na dielektriczeskom tiele" Radiotechnika i Elektronika no 5 1974 pp 970-979

[9] - V.VOITOVICH, B.KACENELENBAUM, A.SIVOV "Obobszczciennyj metod sobstviennych kolebanij w teorii difrakcji" Nauka 1977

[10] - T.KATO "Perturbation theory for linear operators" Springer-Verlag 1966

[11] - A.RAMM "Theory and applications of some new classes of integral equations" Springer-Verlag 1980

http://rcin.org.pl

Iterative Eigenfunction Expansion Method for Cylindrical Fibers

/abstract/

A method, called iterative eigenfunction expansion method /IEEM/, for determining fundamental modes in a wide class of fibers is presented. IEEM is applicable for single or multi-core, cladded, gradient index cylindrical fibers with arbitrary cross sectional shape. The method essentially takes advantage of spectral properties of the operator T, which is generated by the fiber propagation vectorial boundary eigenproblem. The T is constructed in such a way, that it is the relatively compact perturbation of the selfadjoint operator L with discrete spectrum, whose eigenfunctions possess basisness property and are known analitically. This feature of T allows us to construct an iterative process, which is convergent to desired eigenvalue and eigenfunction of T, provided suitable starting approximation is choosen. This eigenfunction of T is obtained as an expansion in the basis originated from L. In other words, the fundamental mode in the core is represented in terms of fiber's cladding modes.

A simple and not expensive numerical algorithm for IEEM is described in the paper, too. The method was successfully tested for a known case of monomode, circular, power profile index fiber. Only few iterations were needed to obtain satisfactory results. Autor thinks, that the IEEM is competitive with available methods, especially in case of monomode fibers and that it can be applied to the other electromagnetic boundary problems, in which the coresponding operator can be constructed as the relatively compact perturbation of a known operator with discrete spectrum.

http://rcin.org.pl