

## Sur le prolongement statique des champs de Prandtl pour le matériau de Coulomb

J. SALENÇON (PARIS)

UTILISANT la méthode proposée par SHIELD on étudie le prolongement statiquement et plastiquement admissible des champs de contraintes de Prandtl, pour le matériau rigide parfaitement plastique non pesant dont le critère de plasticité est celui de Coulomb. La solution est valable pour une ouverture quelconque de l'éventail ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ), et pour un intervalle de valeurs de  $\phi$ , variable avec  $\alpha$ , et au moins égal à  $0 \leq \phi < 76^\circ$  (environ). On donne des détails sur la construction du champ de contraintes. Ce résultat permet une interprétation plus précise de certaines solutions classiques dans le cas du matériau de Coulomb.

Rozważono statycznie i plastycznie dopuszczalne przedłużenia klasycznych pól naprężenia Prandtla dla doskonale sztywno-plastycznych materiałów podlegających prawu plastyczności Coulomba; zastosowano metodę zaproponowaną przez SHIELDA. Rozwiązanie zachowuje swą ważność niezależnie od rozwarcia wachlarza charakterystyk ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ) i dla zakresu zmienności  $\phi$  co najmniej obejmującego  $0 \leq \phi < 76^\circ$ . Podano szczegóły odpowiedniej konstrukcji. Wyniki pozwalają na jaśniejszą interpretację pewnych rozwiązań klasycznych dotyczących materiału Coulomba.

Рассмотрены статически и пластически допустимые продолжения классических полей напряжения Прандтля для идеально жестко-пластических материалов подчиняющихся закону пластичности Кулона; применен метод предложенный Шильдом. Решение сохраняет свою справедливость независимо от расгвора веера характеристик ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) и для интервала изменения  $\phi$  по крайней мере охватывающего  $0 < \phi < 76^\circ$ . Даются подробности соответствующего построения. Результаты позволяют на более ясную интерпретацию некоторых классических решений, касающихся материала Кулона.

### 1. Introduction

LE PROLONGEMENT statique et plastiquement admissible des champs de Prandtl avec éventail d'ouverture  $\pi/2$ , pour le matériau rigide plastique de Tresca, a été effectué par plusieurs auteurs: BISHOP [1], SHIELD [11] et cf [4], SAYIR et ZIEGLER [10] ont ainsi proposé trois solutions différentes. La généralisation de la première solution au cas d'éventails d'ouverture  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \pi/2$  a été faite dans [6, 7] et [12, 13]; la seconde solution a aussi été généralisée dans [7].

L'intérêt d'un tel prolongement tient à ce qu'il permet dans l'étude de certains problèmes de construire des solutions complètes au sens de BISHOP [1]: des exemples ont été donnés dans [1, 2, 6, 7, 8, 13] entre autres. Plus généralement l'utilisation de champs de contraintes où interviennent des champs de Prandtl pour l'emploi de la méthode *statique* de détermination des charges limites est ainsi rendue possible.

Pour le matériau de Coulomb non pesant, la brève note de SHIELD [11] indique sans détail la méthode (explicitée par PHILIPPS [4] pour le matériau de Tresca), qui fournit

un prolongement statiquement et plastiquement admissible pour  $0 \leq \phi < 75^\circ$  pour un éventail d'ouverture  $\pi/2$ .

Nous nous proposons ici de donner quelques détails sur l'utilisation de cette méthode ainsi que sur les possibilités de généralisation pour  $0 \leq \alpha < \pi/2$ .

## 2. Notations et rappels

Le problème de départ est celui du poinçonnement d'un demi-plan en matériau rigide-plastique de Coulomb cohérent non pesant. On désigne par  $C$  la cohésion,  $\phi$  l'angle de frottement interne du matériau et on pose selon l'usage  $H = C \cotg \phi$ .  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales comptées positivement en traction et ordonnées selon  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . On pose:

$$(2.1) \quad p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad \theta = (0x, \sigma_1).$$

On rappelle (Fig. 1) que la solution de Prandtl consiste en le champ de contraintes à la limite d'écoulement défini par:

$$\text{dans } ADC: \theta = \pi, \quad p = H \sin \phi / (1 - \sin \phi),$$

$$(2.2) \quad \text{dans } ABC: \theta_1 = \omega + \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} = \Omega(\omega),$$

$$(2.3) \quad p_1 = H \left[ \exp \left\{ \left( \frac{\pi}{2} + \phi - 2\omega \right) \operatorname{tg} \phi \right\} \right] / (1 - \sin \phi) - H,$$

$$\text{dans } A'AB: \theta = \pi/2, \quad p = H [\exp(\pi \operatorname{tg} \phi)] / (1 - \sin \phi) - H.$$

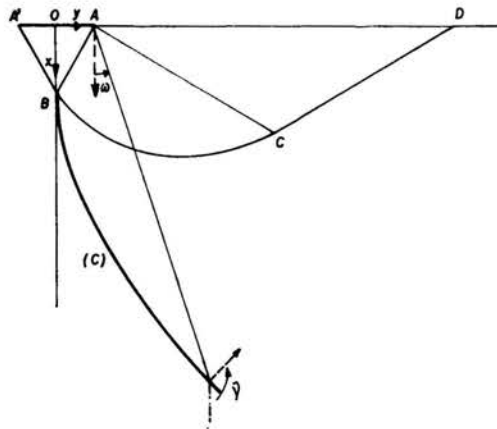


FIG. 1.

## 3. Construction du prolongement

Suivant la méthode de Shield on va chercher à déterminer une courbe (C) issue de B (et sa symétrique), ligne de discontinuité du champ de contrainte, telle que l'on obtienne

un champ de contrainte statiquement et plastiquement admissible en prenant : au-dessus de  $(C)$  les mêmes champs homogène et semi-homogène que dans  $ADC$  et  $ABC$  (champ 1) au-dessous de  $(C)$  le champ 2,

- statiquement admissible,
- où  $\tau_{xy} = 0$ ,
- défini par la continuité de la contrainte sur  $(C)$  et :
- l'hypothèse que le champ 2 soit à la limite d'écoulement sur  $(C)$ .

### 3.1. Détermination de $(C)$

Compte-tenu de d),  $(C)$  apparaît en chaque point comme une ligne de discontinuité entre deux champs à la limite d'écoulement : champ 1 ( $\theta_1(\omega)$ ,  $p_1(\omega)$ , connues), champ 2 ( $\theta_2(\omega)$  connu,  $p_2(\omega)$  inconnu).

Désignant par  $\nu(\omega)$  l'angle fait avec  $0x$  par la normale à  $(C)$  au point d'azimut  $\omega$ , on trouve :

$$(3.1) \quad 2\nu(\omega) = \omega + \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \pm \arccos \left\{ \sin \phi \cos \left( \omega + \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right\} = \Omega(\omega) \pm A(\omega)$$

en posant :

$$(3.2) \quad A(\omega) = \arccos \{ \sin \phi \cos [\Omega(\omega)] \}.$$

Seule la solution :  $2\nu = \Omega + A$ , correspond au problème posé.  $(C)$  a une tangente verticale en  $B$  et une direction asymptotique selon  $AC$  quand  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ .

On en déduit alors :

$$(3.3) \quad p_2(\omega) = -H - [p_1(\omega) + H] \sin[\Omega(\omega) - A(\omega)] / \sin[\Omega(\omega) + A(\omega)].$$

### 3.2. Vérification du caractère plastiquement admissible du champ 2

Sur  $(C)$ , on a :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} [\sigma_x(\omega)]_2 - H &= -(p_2(\omega) + H)(1 - \sin \phi), \\ [\sigma_y(\omega)]_2 - H &= -(p_2(\omega) + H)(1 + \sin \phi). \end{aligned}$$

D'autre part d'après les conditions a) et b), on a :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \text{dans le champ 2.}$$

Pour vérifier que le champ 2 est plastiquement admissible, on doit vérifier que : pour

$$(3.5) \quad -\pi/4 + \phi/2 \leq \omega'' \leq \omega' \leq \pi/4 + \phi/2,$$

$$(3.6) \quad \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \leq \frac{H - [\sigma_x(\omega'')]_2}{H - [\sigma_y(\omega')_2]} = \varrho(\omega', \omega'') \leq \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi};$$

(3.6) exprime qu'en un point quelconque du champ 2, où les contraintes principales sont  $[\sigma_x(\omega'')]_2$  et  $[\sigma_y(\omega')_2]$  avec  $\omega'$  et  $\omega''$  satisfaisant (3.5), le cercle de Mohr est intérieur à la courbe intrinsèque du matériau :

D'après (2.3), (3.3), (3.4) on a

$$(3.7) \quad \varrho(\omega', \omega'') = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \frac{f(\Omega')}{f(\Omega'')}$$

en posant

$$(3.8) \quad f(\Omega) = -\exp[2(\Omega - \pi) \operatorname{tg} \phi] \sin(\Omega + A) / \sin(\Omega - A).$$

La Fig. 2 représente pour diverses valeurs de  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) la courbe représentative de  $f(\Omega)$  en fonction de  $\Omega$ , ( $\pi/2 \leq \Omega \leq \pi$ );  $f$  est une fonction positive croissante sur l'intervalle étudié.

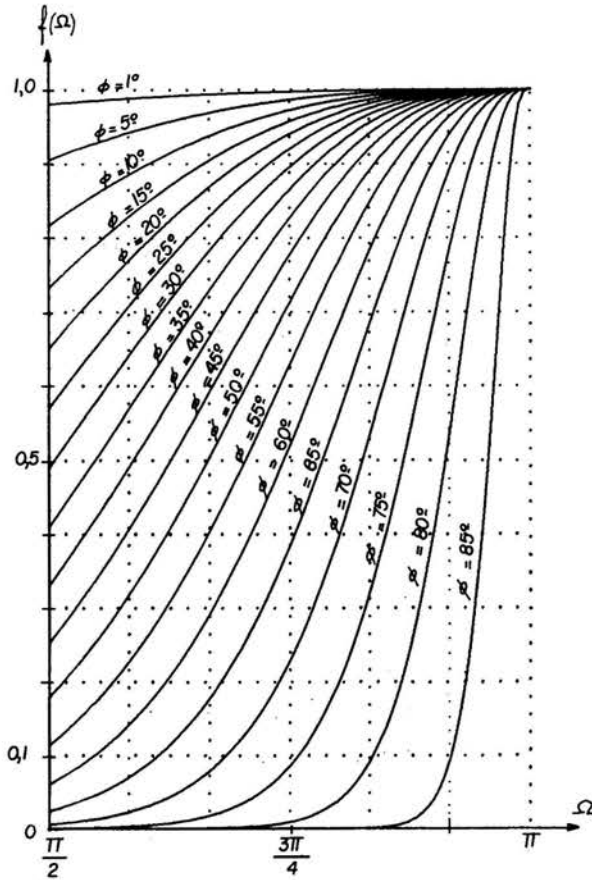


FIG. 2.

La première inégalité de (3.6) est donc toujours vérifiée car  $f(\Omega')/f(\Omega'') \geq 1$  si

$$(3.9) \quad \pi/2 \leq \Omega'' \leq \Omega' \leq \pi$$

ce qui correspond à (3.5).

Il reste à étudier la seconde, dans le cas le plus défavorable, c'est à dire pour:

$$\Omega' = \pi \quad \text{et} \quad \Omega'' = \pi/2.$$

On a :

$$f(\Omega') = 1 \quad \text{et} \quad f(\Omega'') = [\exp(-\pi \operatorname{tg} \phi)](1 + \sin \phi)/(1 - \sin \phi)$$

dont on déduit que la seconde inégalité de (3.6) est vérifiée pour  $0 \leq \phi < 76^\circ$  environ.

On retrouve ainsi le résultat annoncé par SHIELD: la méthode permet de mettre en évidence un prolongement statiquement et plastiquement admissible du champ de contrainte de Prandtl (d'ouverture  $\pi/2$ ) pour le matériau de Coulomb cohérent non pesant, dans l'intervalle  $0 \leq \phi < 76^\circ$  (largement suffisant pour les besoins pratiques).

#### 4. Cas des champs de Prandtl d'ouverture inférieure à $\pi/2$

Pour les champs de Prandtl d'ouverture  $\alpha$ , ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ) qui interviennent dans le problème de la butée d'une paroi sur un massif, la méthode s'applique également, de façon analogue à ce qui a été dit dans [7] dans le cas du matériau de Tresca.

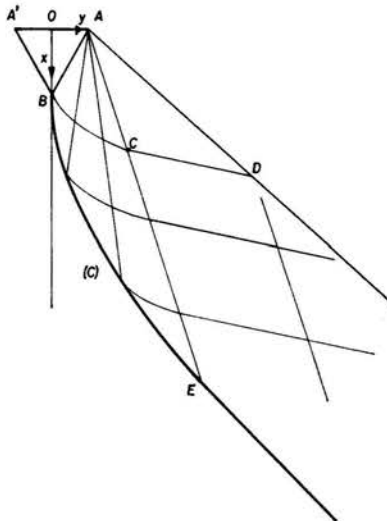


FIG. 3.

Le principe de la méthode est le même que celui exposé au paragraphe 3, et l'on cherche à déterminer la courbe (C), dans l'intervalle:

$$-\pi/4 + \phi/2 \leq \omega \leq \alpha.$$

Il résulte de façon évidente du raisonnement donné ci-dessus dans le cas  $\alpha = \pi/2$ , qui s'applique sans modification ici, que la courbe (C) dans l'intervalle:

$$(4.1) \quad -\pi/4 + \phi/2 \leq \omega \leq \alpha - \pi/4 + \phi/2$$

est identique à celle du cas  $\alpha = \pi/2$ .

Cette courbe rencontre la droite AC en un point E et se poursuit dans le champ homogène ACD prolongé, suivant sa tangente en E (l'angle  $\nu$  étant alors constant). Cette tangente a un azimut inférieur à celui de AD, et ne rencontre donc pas cette dernière.

La vérification du caractère plastiquement admissible du champ 2 est identique à ce qui a été fait pour  $\alpha = \pi/2$  à cela près que le cas le plus défavorable pour la deuxième inégalité (3.6) correspond à  $\Omega'' = \pi/2$  et  $\Omega' = \alpha + \pi/2$ . L'intervalle permis pour  $\phi$  s'élargit donc au fur et à mesure que  $\alpha$  diminue.

## 5. Intéret du résultat

Le résultat ainsi obtenu permet de préciser le caractère des solutions classiques données pour le problème du poinçonnement d'un demi-plan, ou d'un coin obtus (termes de cohésion dans les calculs de forces portantes en mécanique des sols).

Si le matériau est standard [5], on peut maintenant affirmer que la charge obtenue est la charge limite; dans le cas de matériaux non standards, on peut utiliser les théorèmes de RADENKOWIC [3, 5, 9] dont on déduit que la charge obtenue est inférieure ou égale aux chargements limites possibles.

## Bibliographie

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problem of deformation of a plastic rigid material*, J. Mech. Phys. Sol., **2**, 1, 43-53, 1953.
2. D. J. F. EWING et R. HILL, *The plastic yielding of V notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., **15**, 2, 115-124.
3. A. C. PALMER, *A limit theorem for materials with non-associated flow-laws*, J. Mécanique, **5**, 2, 217-222, 1966.
4. A. PHILIPPS, *Introduction to plasticity*, Ronald Press Cy. 158, New-York 1956.
5. D. RADENKOWIC, *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée*, C. R. Ac. Sc. Paris, **252**, 4103-4104.
6. J. SALENÇON, *Poinçonnement d'une plaque en déformation plane*, C. R. Ac. Paris, A, **264**, 613-616, 1967.
7. J. SALENÇON, *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*, Thèse Doct. ès-Sc., Paris 1969.
8. J. SALENÇON, *Butée d'une paroi lises sur un massif plastique. Solutions statiques*, J. Mécanique, **11**, 1, 135-146, 1972.
9. J. SALENÇON, *Ecoulement plastique libre et analyse limite pour les matériaux standards et non standards*, Ann. I.T.B.T.P., **295-296**, 90-100, Juillet-Août 1972.
10. M. SAYIR et H. ZIEGLER, *Zum Prandtl'schen Stampelproblem*, Ingenieur Archiv, **36**, 5, 294-302, 1968.
11. R.T. SHIELD, *Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution*, J. Appl. Mech., **21**, 193-194, 1954.
12. W. SZCZEPIŃSKI, *Indentation of a plastic block by two opposite narrow punches*, Bull. Acad. Polon. Scie., Série Sci. Techn., **14**, 11-12, 671-676, 1966.
13. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej* [Introduction to the analysis of plastic working processes], Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Warszawa 1967.

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES  
ECOLE POLYTECHNIQUE, PARIS

Reçu 13 Juillet 1972