BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

TRYGONOMETRYJA PŁASKA I KULISTA.

PLAN BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNÉJ.

Seryja piérwsza (12-mo).

Tom I. **Początki arytmetyki** M. Berkmána. Str. X+266; z drzeworytami w tekście. W oprawie cena zniżona kop. 30.
Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. Kramsztyka. Książeczka I. wydanie 2-ie Str. XII+105; drzeworytów 61. W oprawie kop. 40.
Tom III. Toż. Książeczka II. Wyd. 2-ie. Str. XI+171; drzew. 77. W opr. kop. 65.
Tom IV. **Wiadomości początkowe z gieografii fizycznéj i meteorologii** A. W. Witkowskiego. Str. VIII+108; drzew. 22, litog. 4. W opr. cena zniż. k. 25.
Tom V. **O najprostszych figurach gieometrycznych.**

Seryja druga (12-mo).

Tom I. **Arytmetyka**
Tom II. **Gieometryja elementarna w wykładzie przystępnym.**
Tom III. **Krótki wykład początków algiebry.**
Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
Tom V. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją.**
Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**

Seryja trzecia (8-vo).

Tom I. **Arytmetyka,** kurs teoretyczny M. A. Baranieckiego, z przypiskami A. Żbikowskiego i J. N. Frankego. Str. LVIII+375; z drzeworytami w tekście. Cena zniżona Rub. 1. *Wydanie drugie pod prasą.*
Tom II. **Zadania arytmetyczne.**
Tom III. **Algiebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych.**
Tom IV. **Gieometryja elementarna** I. Badowskiego. *Pod prasą.*
Tom V. **Krótki wykład syntetyczny elementarnych własności przecięć stożkowych.** A. M. Baranieckiego, str. XVI+131, drzeworyt. 63. Cena zniż. kop. 40.
Tom VI. **Trygonometryja płaska i kulista** A. Czajewicza, str. XXX + 392, drzeworytów 86. Cena Rub. 2.
Tom VII. **Miernictwo.**
Tom VIII. **Zasady fizyki** A. W. Witkowskiego. *Pod prasą.*
Tom IX. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją** J. Jędrzejewicza. Ze wstępem historycznym H. Merczynga str. XVIII+400 drzew. 215 tab. X. Cena zniż. R. 2.
Tom X. **Gieometryja wykréślna.**
Tom XI. **Mechanika elementarna.**

Seryja czwarta (8-vo Lex.).

Tom I. **Wstęp do analizy.**
Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. Sochockiego. Str. XII+212; drzew. 9. Cena zniżona kop. 60.
Tom III. **Teoryja równań algiebraicznych.** *)
Tom IV. **Gieometryja analityczna** W. Zająckowskiego. Str. XLI + 511; drzeworytów. 85. Cena zniżona Rub. 1.
Tom V. **Gieometryja syntetyczna.** **)
Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy.**
Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego.** ***)
Tom VIII. **Rachunek waryjacyjny.**
Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
Tom X. **Mechanika teoretyczna.** J. N. Frankego str. XXXI+645. drzew. 72. Rub. 3.
Tom XI. **Rachunki wykréślne.**
Tom XII. **Historyja matematyki.**
Tom dodatkowy «Biblijoteki». **Słownik matematyczno-fizyczny.**

Jako uzupełniające seryją IV «Bibl.mat.-fiz.» należy uważać następujące dzieła, ogłoszone przez biblijotekę kórnicką:

*) **Teoryja wyznaczników,** kurs uniwersytecki M. A. Baranieckiego. Paryż, 1879. 8-vo, str. XX+600. Marek 12.

) **Wykład gieometryi wykréślnéj E. Sągayły. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzewor. w tekś., oraz LXII tablice (in folio fracto) miedziorytów. Marek 24.

***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych,** W. Zająckowskiego. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV+902. Marek 20.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,
WYDAWANA
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.
pod kierunkiem
M. A. BARANIECKIEGO i A. CZAJEWICZA.
SERYJA III. TOM VI.

TRYGONOMETRYJA
PŁASKA I KULISTA.

NAPISAŁ

ALEKSANDER CZAJEWICZ.
MAGISTER NAUK FIZYCZNO-MATEMATYCZNYCH
B. SZKOŁY GŁÓWNEJ.

REDAKTOR i WYDAWCA CZASOPISMA «BIBL. MAT. FIZ.»
A. CZAJEWICZ.

WARSZAWA.
W DRUKARNI NOSKOWSKIEGO,
1891.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 12 Ноября 1891 года.

Składał zecer P. Siekierzyński.
Drzeworyty ciął A. Wiśniewski.
Papier z papierni w Mirkowie.

SPIS RZECZY.

TRYGONOMETRYJA PŁASKA.

TRYGONOMETRYJA KULISTA.

PRZEDMOWA.

Książka niniejsza, jako stanowiąca tom VI Biblioteki matematyczno-fizycznej, jest przeznaczoną do użytku szkolnego i w tymże duchu napisaną została. W rozdziale I-ym, po określeniu miary kąta i różnych wielkości kąta podaję na podstawie spółrzędnych punktu, definicyją funkcyj trygonometrycznych i wartości ich dla różnych kątów, oraz zasadnicze wzory funkcyj trygonometrycznych i związki, jakie między nimi zachodzą. Następnie wykładam zasady przekształcania funkcyj trygonometrycznych, bądź bezpośrednio, bądź przy pomocy kątów posiłkowych, oraz zasady rozwiązywania równań trygonometrycznych w przypadkach, gdy one prowadzą do rozwiązywania równań algiebraicznych. W tymże rozdziale wprowadzam bardzo często pomijane, albo błędnie przytaczane w traktatach trygonometrycznych własności funkcyj cyklometrycznych i ich związki pomiędzy sobą, aby z rzeczą, dającą się elementarnie przedstawić obznajmić czytelnika, a tymsamym ułatwić mu zrozumienie tych funkcyj i ich własności przy wykładzie rachunku wyższego, gdzie one ważną odgrywają rolę. Rozdział II-gi poświęcony został tablicom funkcyj trygonometrycznych i ich logarytmom. Jakkolwiek do użytku szkolnego dostatecznemi są logarytmy pięciocyfrowe, to jednak używam także logarytmów siedmiocyfrowych, aby czytelnikowi dać możność obeznania się z ich układem i sposobem użycia. Rozdział III-ci obejmuje zastosowania funkcyj trygonometrycznych. Po wyprowadzeniu związków między bokami i kątami trójkąta płaskiego, wykładam zasady rozwiązywania trójkątów prostokątnych i jakichkolwiek, podaję zastosowania funkcyj trygonometrycznych do Gieometryi, zadania szczególne tyczące się rozwiązywania równań i kilka zadań z Gieometryi praktycznej.

W rozdziale I-ym Trygonometryi kulistej podaję zasadnicze wzory trygonometryi kulistej, tudzież wzory, służące do rozwiązywania trojkątów kulistych; w rozdziale II-im sposoby rozwiązywania trójkątów kulistych prostokątnych i jakichkolwiek; w rozdziale III-im wzory na powierzchnią trójkąta kulistego, na promienie kół stycznych do trójkąta kulistego, tudzież twierdzenie Legendre'a, mające ważne zastosowanie w pomiarach gieodezyjnych. Rozdział IV-ty zawiera niektóre zastosowania do Stereometryi, rozdział zaś V-ty niektóre zadania z Astronomi sferycznej.

Mając na uwadze zakres książki, pominąłem, zamieszczane w wielu traktatach trygonometrycznych naukę o ilościach urojonych, rozwiązywanie trygonometryczne równań algiebraicznych i rozwijanie funkcyj trygonometrycznych na szeregi; teoryje te bowiem, chociaż dają się wyprowadzić drogami elementarnemi, należą właściwie do Analizy wyższej i we właściwym tomie Biblioteki zamieszczone będą.

W książce mej idąc za wskazówkami, podanemi w lepszych dzielach trygonometrycznych, starałem się trzymać wywodów ścisłych, ogólnych i wyprowadzać wzory, o ile można było drogą analityczną. Wprawdzie niektóre wywody, podane przezemnie, dadzą się wyprowadzić drogami prostszemi, ale je pominąłem jużto dla tego, że są mniej ogólne, już też dla tego, że wymagają znajomości wyższej matematyki.

Dla ułatwienia czytelnikowi zrozumienia teoryi i nabrania wprawy w rachunku trygonometrycznym dołączyłem prawie do każdego ustępu odpowiednio dobrane zadania i przykłady z odpowiedziami. Zadania i przykłady czerpałem z innych książek, wszakże nieszczędziłem mozołu, aby je wszystkie przerobić i błędne gdzieindziej odpowiedzi sprostować.

Niezależnie od traktatu Trygonometryi podaję krótki rys jej rozwoju, oparty na podstawie książek, w tymże zarysie wspomnianych, aby czytelnikowi, obeznanemu już z teoryją, wskazać drogi, jakiemi postępowała Trygonometryja, zanim weszła na to stanowisko, na jakim ją dzisiaj widzimy. Po ogólnym rysie historycznym przytaczam ważniejsze książki trygonometryczne w językach obcych napisane, tudzież spis książek, jakie wyszły w języku polskim.

Warszawa, 31 Października 1891 roku.

KRÓTKI RYS ROZWOJU TRYGONOMETRYI.

Początek Trygonometryi wiąże się ściśle z powstaniem Gieometryi, do której Trygonometryja została wprowadzona jako pomocnicza w różnych obliczeniach, jakich pierwotnie używano przy pomiarach gruntu.

Pierwsze ślady miary kąta przez pewne linije znajdujemy w papyrusie egipskim Ahmesa (między 2000 — 1700 rokiem przed Chrystusem): [Papyrus Rind des Britisch Museum, w tłomaczeniu Eisenlohra, Lipsk, 1877]. W papyrusie tym, tam gdzie jest mowa o piramidach, wprowadzony jest stosunek *seqt*. Jakie jednak miary wprowadzano do rachunku, tego niewiadomo, jest mowa o *uchatebt* i *piremus*. Prawdopodobnie uchatebt odnosił się do miary podstawy (gruntu), zaś piremus do miary wysokości lub przedmiotów pochyłych. Ahmes zauważył, że ściany piramid egipskich nachylone są pod jednakim kątem do podstawy i to nie wiele różnym od kąta 52°. Znaleziony seqt odpowiada kątowi 52° i ma to miejsce wtedy, gdy za piremus weźmiemy krawędź piramidy, za uchatebt przekątną kwadratowej podstawy, możemy zatym twierdzić, że seqt było identyczne z dostawą kąta, jaki krawędź piramidy tworzy z przekątną podstawy. Przy grobowcach egipskich, które mają ściany więcej strome aniżeli piramidy, seqt ma inne znaczenie, mianowicie wyobraża styczną trygonometryczną kąta, jaki ściana grobowca tworzy z podstawą.

Jak z jednej strony Trygonometryja płaska powstała jednocześnie z Gieometryą, tak z drugiej strony Trygonometryja kulista swój początek winna Astronomii, do której była wprowadzona jako pomocnicza w obliczeniach astronomicznych.

Szczupłe są nasze wiadomości co do tego, jaką drogą pierwotni uczeni dochodzili do rozwiązywania zadań z Astronomii. Najdawniejsze wiadomości znajdujemy u Greków. Matematycy greccy zastanawiając się nad kulą i jej powierzchnią, badali własności trójkątów kulistych, utworzonych przez koła wielkie na kuli nakreślone. Oni rozwiązywali swoje zadania trygonometryczne nie w ten sposób, jakto obecnie czynimy za pomocą funkcyj trygonometrycznych, lecz posługiwali się cięciwami koła, zwanemi *chordae*. Opierając się na tej zasadzie, że w każde koło można wpisać trójkąt, którego boki są proporcyjonalne względem boków trójkąta danego, kąty zaś równe kątom tegoż trójkąta, i że boki trójkąta wpisanego w koło są cięciwami łuków, zawierających dwa razy taką ilość stopni, jaką posiadają kąty trójkąta, starożytni Grecy starali się znaleść liczby, przez które należałoby pomnożyć średnicę koła lub jego promień, aby można było otrzymać cięciwy dla wszystkich łuków od 0° do 180°.

Według podania Theona Aleksandryjskiego w komentarzu do Almagesta pierwszy Hipparch z Nicäe w Bitynii (162 — 126 przed Chrystusem) zwany przez Pliniusza Rodyjskim, robił obserwacyje astronomiczne na wyspie Rhodos, a następnie w Aleksandryi. Jemu Astronomija przyznaje ważne usługi i uważa go, jako twórcę nauki o gwiazdach. Według Theona Hipparch w 12 księgach, a Menelaus (żyjący około 98 roku po Chrystusie), w 6 księgach mieli podać tablicę cięciw. Dzieła jednak tych uczonych nie doszły nas w tekście oryginalnym. Mamy jedynie tłomaczenie arabskie i hebrajskie trzech ksiąg Sferyki Menelausa. Menelaus jest twórcą twierdzenia o poprzecznych: „jeżeli w trójkącie poprowadzimy poprzeczną, to ona odetnie na bokach trójkąta sześć odcinków, z których iloczyn trzech odcinków sobie nieprzyległych, jest równy iloczynowi trzech odcinków pozostałych”. Tożsamo twierdzenie stosuje się do trójkąta kulistego, gdy zamiast odcinków łukowych weźmiemy cięciwy, odpowiadające podwójnym łukom. Ptolemeusz na tym twierdzeniu oparł swoję Trygonometryją. W sferyce Menelausa spotykamy się z wielu znanemi twierdzeniami o trójkątach kulistych i tak: w każdym trójkącie kulistym summa trzech jego boków jest mniejsza od koła wielkiego; summa trzech kątów jest większa od dwu kątów prostych; — równym bokom odpowiadają kąty równe i nawzajem; — naprzeciwko boku większego leży kąt większy; trzy koła wielkie dzielące kąty na dwie równe części przecinają się w jednym punkcie; jeżeli w trójkącie kulistym podzielimy jeden kąt kołem wielkim na dwie równe części, dwusieczna odetnie na boku przeciwległym dwa odcinki takie, że cięciwy podwójnych odcinków będą proporcyjonalne względem cięciw odpowiednich podwójnych boków. Oprócz Sferyki Menelausa mamy jeszcze Sferykę Teodosiusa z Tripolis w Bitynii (około r. 100 przed Chrystusem) (tłomaczenie Platona Tiburtinusa: Theodosii sphaericorum libri tres, Oxoniae 1707) W Sferyce Teodozyusza pomieszczone są stosunki kół wielkich, ich odcinków i cięciw. Jego poszukiwania służyły za podstawę Trygonometryi, chociaż w nich niebyło jeszcze mowy o trójkątach kulistych. Zdaje się, że prace tych dwóch uczonych były podstawą do jedynego dzieła, jakie doszło rąk naszych, w którym się zawiera Trygonomotryja. Autorem tego dzieła jest Ptolemeusz.

Ptolemeusz (128 — 168) napisał dzieło, zwane przez Arabów Almagestem (wyraz złożony z przedimka arabskiego *al* i skrócenia wyrazu μεγιστον) pod tytułem: Κλαυδιου Πτολεμαιου Μεγαλης Συνταξεως βιβλ. ιγ. Θεωνος Αλεξανδρεως εις τα αυτα Υπομνημτων βιβλ. ια. Basil. 1538. Tłomaczenie tego dzieła na język łaciński, z którego czerpiemy materyjały nosi tytuł: Claudii Ptolemaei Pelusiensis Alexandrini. Almagestum seu magnae Constructionis mathematicae Opus, plane divinum latina donatum lingua ab Georgo Trapezuntio. Lib. XIII, Basil. 1541 *). W tym dziele Ptolemeusz sprowadził obliczenie cięciw do małej ilości odpowiednich twierdzeń. Przedewszystkim wyszedł z własności trójkąta, czworokąta i pięciokąta foremnego, i znalazł długości ich boków, następnie obliczył

---

*) Pierwszy Gerard z Cremony (1114 — 1187) przetłomaczył Almagest na język łaciński.

długości boków dziesięciokąta foremnego, dwunastokąta i t. p. Opierając się na twierdzeniu Pytagorasa, pokazuje naprzód w jaki sposób mając cięciwę łuku, można znaleść cięciwę łuku spełniającego. Następnie opierając się na twierdzeniu (znanym obecnie pod nazwą tw. Ptolemeusza): w czworokącie wpisanym w koło, summa prostokątów z boków przeciwległych, równa się prostokątowi z przekątnych tegoż czworokąta wskazuje, w jaki sposób można znaleść cięciwę summy lub różnicy dwu łuków, gdy dane są cięciwy każdego z dwu łuków. Wreszcie pokazuje, w jaki sposób mając cięciwę danego łuku, można znaleść cięciwę połowy łuku. Tym sposobem przychodzi on do znalezienia cięciw kątów 90^0, 45^0, $22^0\ 30'$,...; 72^0, 36^0, 18^0, 9^0, $4^0\ 30'$,...; 60^0, 30^0, 15^0, $7^0\ 30'$,..., a przez odpowiednie dodawanie lub odejmowanie otrzymuje cięciwy 3^0, 6^0, 9^0,... 180^0. W końcu opierając się na tej zasadzie, że jeżeli w kole poprowadzimy dwie cięciwy nierówne, stosunek cięciw jest mniejszy od stosunku odpowiednich łuków Ptolemeusz oblicza w przybliżeniu cięciwę 1^0. Taka jest zasada, jakiej się trzymał Ptolemeusz przy obliczaniu cięciw, które podał w swych tablicach co każde pół stopnia.

W celu podania wartości cięciw w funkcyi promienia Ptolemeusz dzielił średnicę na 120 części (partes) czyli promień na 60 części, każdą taką część dzielił następnie na 60 części, które nazywał minutami (minutae), wreszcie minutę dzielił na 60 części, które nazywał sekundami (secundae). Podział ten 60-owy przyjął Ptolemeusz od Babilończyków, którzy, zdaje się, pierwsi go wprowadzili. Według tego podziału bok dziesięciokąta foremnego zawiera 37 części 4 minuty 55 sekund, bok pięciokąta 70.32.3; bok szeciokąta 60, bok kwadratu 84.51.10, wreszcie bok trójkąta 103.55.23. Ponieważ

$$1 : 60 \times 60 \times 60 = 1 : 216000 = 0{,}0000046296,$$

przeto jedna sekunda wynosi niewiele więcej jak czterymilionowe promienia. Wyraźmy bok trójkąta w ułamku dziesiętnym. Ponieważ według Ptolemeusza bok trójkąta jest równy 103.55.23, przeto ten bok zawierać będzie sekund $(103 \times 60 + 55)\,60 + 23$, czyli 374123 sekund. Lecz

$$\begin{aligned} \log 374123 &= 5{,}5730144 \\ \log 216000 &= 5{,}3344538 \\ \hline \text{logarytm boku trójkąta} &= 0{,}2385606 \end{aligned}$$

przeto bok trójkąta $= 1{,}73205$. Lecz według naszych tablic $\sin 60^0 = 0{,}8660254$, przeto $2 \sin 60^0 =$ bokowi trójkąta $= 1{,}7320508$; widzimy więc, że tablice Ptolemeusza zgadzają się prawie z naszemi tablicami, jedynie różniąc się w stutysięcznych częściach dziesiętnych.

Tablice Ptolemeusza składają się z trzech kolumn; w pierwszej (przytaczamy napisy z tłomaczenia łacińskiego) pod nazwą *arcuum partes, minutae* podane są wielkości łuków, w drugiej noszącej nadpis: *chordarum partes, minutae, secundae* podane są długości cięciw danemu łukowi odpowiadające, i wyrażone w częściach, minutach i sekundach; wreszcie w kolumnie trzeciej z nadpisem: *trigesimarum minutae, secundae, tertiae* podane są trzydzieste części różnicy między cięciwami dwu łuków, różniących się o pół stopnia i wyrażone w minutach, sekundach i tercyjach.

Dla objaśnienia przytaczamy część tablic Ptolemeusza:

Arcuum		Chordarum			Trigesimarum		
partes	*m*	*partes*	*m*	*2-a*	*m*	*2-a*	*3-a*
90	0	84	51	10	0	44	20
90	30	85	13	20	0	44	8
91	0	85	35	14	0	43	57
91	30	85	57	23	0	43	45
92	0	86	12	15	0	43	33
92	30	86	41	2	0	43	21
93	0	87	2	42	0	43	9

Co się tyczy funkcyj trygonometrycznych i właściwej Trygonometryi, zaznaczyć należy, że poraz pierwszy spotykamy u Ptolemeusza twierdzenia

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha,\quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Rozwiązywaniem trójkątów płaskich Ptolemeusz się nie zajmował, tylko badał te przypadki rozwiązywania trójkątów kulistych, które mu były potrzebne do rozwiązywania zadań astronomicznych. Opierając się na tym, że przez poprowadzenie z wierzchołka trójkąta kulistego koła wielkiego prostopadłego do boku przeciwległego, trójkąt kulisty jakikolwiek da się zawsze podzielić na dwa trójkąty kuliste prostokątne, Ptolemeusz zajmował się jedynie rozwiązywaniem trójkątów kulistych prostokątnych. Za podstawę jego obrachunków służyły wiadomości czerpane ze Sferyki Menelausa, a głównie twierdzenie Menelausa o poprzecznych, które stosował do zadań, odnoszących się do trójkąta kulistego prostokątnego.

Do rozwiązywania trójkątów kulistych prostokątnych używał twierdzeń, ktore obejmowały znane nam wzory

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\sin b = \sin a \sin\beta,$$

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg} c = \cos\beta \operatorname{tg}\alpha.$$

Ptolemeusz tak jak i jego następcy aż do Eulera, nie używał wzorów, ale je tylko wysławiał w różnych twierdzeniach, i wyprowadzał drogą gieometryczną.

Dalszy nierównie ważny krok zrobiła Goniometryja i Trygonometryja przez prace Hindusów. Hindusowie, tak jak i Ptolemeusz, dzielili ćwiartkę okręgu koła na 90 części, które odpowiadają dzisiejszym stopniom, każdy stopień był podzielony na 60 minut, zatym cały okrąg zawierał 216000 części (minut). Dla promienia nie ustanawiali żadnej oddzielnej miary, tylko wyrażali go w powyższych częściach okręgu koła, przyjmując promień jako równy 3437,7 w przybliżeniu 3438 części okręgu koła 216000 części zawierającego, przyjmując stosunek okręgu koła średnicy albo 22 : 7, albo $\sqrt{10}$, albo przyjęty przez Baskâra (ur. 1114 po Chrystusie) stosunek 3927 : 1250. Tutaj widzimy główną różnicę, jaka zachodziła w oznaczaniu promienia między Grekami i Hindusami. Hindusowie oprócz tego dzielili ćwierć okręgu koła na 24 części, z których zatym każda zawiera 225 części (minut), na które okrąg dzielono; te 225 części odpowiada więc $3\frac{3}{4}$ stopniom. W Astronomii pozorna droga słońca, uważana jako koło, dzieloną była przez Hindusów na 12 części czyli znaków, zatym jeden znak wynosił 30°. Cięciwę Hindusowie nazywali jyâ albo jîva, połowę cięciwy nazywali jyardha albo ardhajyâ. Prostopadłą (połowa cięciwy) dwu znaków czyli 60° zwali podwójną cięciwą tridjîva. Hindusowie, chociaż wprowadzali do rachunku nazwy cięciw, to jednak rozważali tylko połowy cięciw czyli właściwie wstawy. Obliczyli oni wstawy dla ćwiartki okręgu koła dla wszystkich kątów od $3\frac{3}{4}°$ co każde $3\frac{3}{4}$ stopnia czyli co każde 225 części razem zatym mieli 24 wstawy i te w odpowiednie tablice ułożyli. Wstawę odwrotną czyli strzałę nazywali utkramajyâ, dzisiejszą zaś dostawę zwali kotijyâ. Co się tyczy tablic wstaw, to one były bardzo proste. Promień czyli wstawa 90° obliczona z obwodu wynosiła 3438 części, wstawa 30° wynosiła tego połowę t. j. 1719 części. Przez zastosowanie wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$, otrzymali $\sin \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$. Opierając się na znanych im twierdzeniach

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2, \quad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$1 - \cos\alpha = \sin\operatorname{vers}\alpha, \quad \sin\operatorname{vers} 2\alpha = 2\sin^2\alpha,$$

i wiedząc, że $\sin 30° = 1719$, $\sin 45° = 2431$, otrzymali

$$\sin 45° = 890, \quad \sin 7°30' = 449, \quad \sin 3°45' = 225,$$

$$\sin 22°30' = 1315, \quad \sin 11°15' = 671.$$

Następnie znaleźli wstawy kątów dopełniających

$$\sin 60° = 2978, \quad \sin 75° = 3321, \quad \sin 82°30' = 3409,$$

$$\sin 86°15' = 3431, \quad \sin 67°30' = 3177, \quad \sin 78°45' = 3372.$$

Przez przepołowienie kątów otrzymali

$$\sin 37°30' = 2093, \quad \sin 41°15' = 2267, \quad \sin 33°45 = 1910,$$

a następnie wstawy kątów dopełniających:

$$\sin 52°30' = 2728, \quad \sin 48°45' = 2585, \quad \sin 56°15' = 2859.$$

Z przepołowienia kąta 52° 30′ otrzymali $\sin 26°15 = 1520$, a szukając wstawy kąta dopełnienia, znaleźli $\sin 63°45' = 3084$. Wreszcie z przepołowienia kąta 37° 30′ znaleźli $\sin 18°45' = 1105$, a następnie $\sin 71°15' = 3256$. Tym sposobem drogą bardzo prostą Hindusowie przyszli do ułożenia tablic wstaw, wyrażonych w długościach łuków koła. Wynikiem tablic było, że $\sin 90^0 = 3438$ t. j., że wstawa kąta 90^0 jest równa długości łuku zawierającego 3438 minut, a wstawa $3^0 45' = 225$ minutom t. j., że wstawa kąta $3^0 45'$ jest równa długości łuku temuż kątowi odpowiadającego. Z tych tablic, w których wstawy podane są w trzech lub czterech cyfrach całkowitych, Hindusowie odkryli następujące godne uwagi prawo; że jeżeli a, b, c są trzema następującemi po sobie kątami czyli łukami tablic t. j. takimi, że $a - b = b - c = 3^0 45' = d$, natenczas

$$\sin c - \sin b = (\sin b - \sin a) - \frac{\sin b}{225}.$$

Był to wzór interpolacyjny, na mocy którego można było w każdym czasie obliczyć tablice. Ponieważ podane przez Hindusów liczby nie zawierały ułamków, to używając powyższego wzoru, przy obliczaniu $\frac{\sin b}{225}$ należy brać najbliższą liczbę całkowitą.

Wzór powyższy w rzeczywistości istnieje i daje się bardzo łatwo wyprowadzić; ale w nim należy, jako spółczynnik $\sin b$, brać nie $\frac{1}{225}$ lecz $2 \sin \operatorname{vers} d = \frac{1}{233{,}5}$. Prawdopodobnie dogodny do rachunku spółczynnik $\frac{1}{225} = \frac{4}{900}$ był powodem, że w powyższym wzorze wzięto 225 w miejsce 233,5, co nie miało wpływu na dokładność, z jaką tablice były podane. Hindusowie znali niedokładność swoich tablic, skoro Baskâra przyjmuje $\sin 3^0 45' = \frac{100}{1529}$, $\cos 3^0 45' = \frac{466}{467}$; które od prawdziwych wartości różnią się nie wiele więcej jak o jednę dziesięciomilionową promienia. Baskâra za pomocą znalezionych przez siebie wartości $\sin 1^0 = \frac{10}{573}$, $\cos 1^0 = \frac{6568}{6569}$, a które różnią się od prawdziwych wartości o jednę dziesięcio milionową promienia, a tym samym są dokładniejsze od wartości, podanych przez Ptolemeusza, starał się ułożyć tablice wstaw kątów co każdy 1^0, przy użyciu twierdzenia

$$\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

Nie mamy specyjalnej rozprawy Hindusów, dotyczącej rozwiązywania trójkątów, możemy jednak twierdzić, że Hindusowie, rozwiązywanie trójkątów jakichkolwiek, podobnie jakto czynił Ptolemeusz, sprowadzali do rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Przy użyciu tablic starano się wstawy brakujących kątów obliczać sposobem przybliżonym. I tak, jeżeli im chodziło o wstawę kąta $28^0 43'$, to brano z tablic wstawy dwu kątów obejmujących ten kąt, mianowicie $\sin 30^0 = \sin 1800' = 1719$ i $\sin 26^0 15' = \sin 1575' = 1520$, skąd wyprowadzali że dla różnicy między kątami 225' różnica między wstawami wynosi 199. Że zaś kąt dany mający 1723' jest większy od kąta $26^0 15'$ o 148', to różnicę między wstawą kąta szukanego a wstawą kąta bezpośrednio od niego mniejszego, w tablicach zawartego, znajdowali z proporcyi $225:148=199:x$, stąd $x=131$, a tym samym $\sin 28^{0}43'=1520+131=1651$. Tą drogą jednak przeprowadzane rachunki nie mogły dawać ścisłych rezultatów, skoro $\sin 3^{0}45$, jakto już wyżej zaznaczyliśmy, była według tablic Hindusów równa długości łuku temuż kątowi odpowiadającego.

Jak we wszystkich częściach Matematyki tak i w Trygonometryi nie małe zasługi położyli Arabowie. Głównie Arabom zawdzięczamy wprowadzenie do Trygonometryi zamiast cięciw Ptolemeuszowych, *) ich połowy czyli wstaw. Na oznaczenie wstawy Arabowie używali oddzielnego znaku i nazwy *dschaib*. Nazwa sinus, najmniej odpowiadająca jej znaczeniu, była poraz pierwszy użytą i to raz jeden tylko w pierwszym tłomaczeniu łacińskim przez Platona Tiburtinusa, dzieła: De motu albo De scientia stellarum Norymberga, 1537., arabskiego matematyka Mohammed ben Gebera Albatani'ego albo Albateniusa († 929), gdy tymczasem w tłomaczeniu jego Astronomii wszędzie była stosowaną. Albatani pierwszy wprowadził styczne trygonometryczne. Znajdujemy u Albatani'ego, że z równania $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\mathrm{D}$, wartość wstawy φ otrzymujemy za pomocą wzoru $\sin\varphi=$ $=\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{1+\mathrm{D}^2}}$, zaś φ z tablicy wstaw. Stosunek $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ odgrywa u Albataniego bardzo ważną rolę. Gdy mianowicie φ oznacza wysokość słońca, h wysokość kołka pionowego, zaś l długość cienia rzuconego na płaszczyznę poziomą przy wysokości słońca φ, natenczas $l=h\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Albatani obliczył jak wielkie jest l, przy stałym h i przy wysokościach słońca $\varphi=1^{0}, 2^{0}, 3^{0},\ldots$ i wypadki otrzymane ujął w odpowiednie tablice, z których za pomocą długości cienia znajdował wysokość słońca. Tablice te były rodzajem tablic dostycznych. U Albatani'ego spotykamy poraz pierwszy zasadnicze twierdzenia Trygonometryi kulistej, mianowicie związek między trzema bokami i kątem trójkąta kulistego, czyli innemi słowy twierdzenie

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha,$$

z którego Albatani wyprowadził twierdzenie

$$\sin\operatorname{vers}\alpha=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}.$$

Ponieważ wstawa kąta jakiegokolwiek jest mniejsza od wstawy kąta prostego, to dla wstawy kąta prostego wprowadzono oddzielną nazwę sinus totus v. sinus rectus.

---

*) Z polecenia Kalifa Almamuma Izaak ben Honain przełożył Almagest Ptolemeusza na język arabski.

Abul Wefa (937 — 998) idąc za Albatanim wprowadził styczną jako oddzielną funkcyją trygonometryczną i ułożył tablice stycznych, przyjmując podział promienia na 60 części; on też miał już pojęcie o dostycznych i siecznych. Nazwy jednak stycznej i siecznej t. j. tangens i secans, wprowadzone zostały poraz pierwszy dopiero przez Finkego w jego dziele Geometria rotundi 1583 r.

Ebn Junis w Kairze (979 — 1008) ułożył tablice stycznych i siecznych dla całej ćwiartki okręgu koła i robił z nich taki sam użytek, jakto my dzisiaj czynimy. Jego tablice nie doszły rąk naszych i dla tego uważają Regiomontana jako pierwszego autora tablic stycznych.

Geber Mohammed ben Aflah z Sewilli zwany Geber, żyjący około r. 1050, napisał dzieło o Astronomii, które wydane zostało p. t.: Instrumentum primi mobilis a P. Appiano nunc primum inventum et editum. Acc. Gebri filii Affla Hispalensis libri IX de Astron. per Girardum Cremonensem latinitate donati. Norimbr. 1534. W tym dziele pierwsza księga jest kompletną Trygonometryją. Geber opierając się na prawie czterech wielkości, wyprowadził zasadnicze wzory dla trójkąta kulistego prostokątnego, podane najpierw przez Ptolemeusza, a nadto wyprowadził nie podany przez niego wzór $\cos\beta = \cos b \sin\gamma$, który zowie się też wzorem Gebera.

Abul Hassan Ali z Marocco, żyjący na początku XIII wieku, przez uważanie cienia, jaki rzuca przedmiot prostopadły do płaszczyzny pionowej na tęż płaszczyznę, gdy słońce go oświeca, obliczył styczną i sieczną wysokości słońca; gdyż cień dawał mu styczną, odległość zaś końca cienia od wierzchołka przedmiotu sieczną wysokości słońca. Rozważając płaszczyznę poziomą, kołek pionowy i cień rzucony przez słońce, otrzymywał tak jak i Albatani dostyczną wysokości słońca, a także i dosieczną tejże wysokości.

Mohammed ben Musa zajmował się rozwiązywaniem trójkątów kulistych, a stosowane przez niego metody mało się różnią od metod dzisiaj używanych.

Zwrócić należy uwagę, że Arabowie, w ogólności dla Trygonometryi wielkie położyli zasługi, nie tylko przez rozważanie funkcyj trygonometrycznych jako stosunków, ale i przez to, że wszelkie twierdzenia wyprowadzone przez Greków gieometrycznie, u Arabów mają charakter wyrażeń algiebraicznych.

Tablice funkcyj trygonometrycznych układane przez Greków i Arabów podawały wartości funkcyj trygonometrycznych w funkcyi promienia koła, dla którego przyjmowano podział sześćdziesiątkowy. Niedogodny ten podział promienia koła usunął naprzód w zasadzie Georg Peurbach (1423 — 1461), mówimy w zasadzie, gdyż Peurbach nie wprowadził podziału dziesiętnego, tylko przyjął promień równy 600 000 części. Peurbach podał tablice wstaw, co każde 10 minut w rękopisie p. t.: Nova tabula sinus de decem minutis in decem, par multas millenarias partes. Tablice te jednak nie były drukowane. Peurbach nosił się z myślą napisania Trygonometryi, przedwczesna jednak śmierć nie pozwolila mu urzeczywistnić tego zamiaru ani wykończyć prac nad tablicami funkcyj trygonometrycznych.

Uczeń Peurbacha Jan Müller (1436 — 1476), zwany od swego miasta rodzinnego Regiomontanem albo de Monte Regio, uzupełnił prace Peurbacha i obliczył wstawy dla każdej minuty, przyjmując promień naprzód równy 6 000 000, a następnie równy 10 000 000; wydał je w dziele p. t.: Tractatus Georgii Peurbachi super propositiones Ptolemeai de sinubus et chordis. Item compositio Tabularum Sinuum per Joannem de Regiomonte. Adjectae sunt et Tabulae sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem Astronomiae studiosis impressa Norimbergae apud Joh. Petreium anno Christi 1541. W dziele Gerhardt'a p. t.: Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877, jest wskazane w jaki sposób Regiomontan obliczał tablice. Niezależnie od tych tablic Regiomontan ułożył tablice stycznych co każde 10 minut dla promienia $r = 100\,000$ i wydał je pod nazwą Tabula foecunda. Wprawdzie Abul Wefa, żyjący w X wieku ułożył tablice stycznych, ale czy Regiomontan je znał, czyteż nie, tego twierdzić nie można. Regiomontan również jak i Peurbach był zdania, że ważną rolę w Astronomii odgrywa Trygonometryja i z tego powodu zajął się opracowaniem zasad Trygonometryi. Praca wydaną została już po jego śmierci przez Schonera 1533 p. t.: De triangulis omnimodis libri quinque. W pierwszej księdze Regiomontan zajmuje się rozwiązywaniem trójkątów płaskich jakichkolwiek, sprowadzając rozwiązanie ich do trójkąta prostokątnego; do wyznaczenia boków trójkąta używa wstaw, nie wprowadzając innych funkcyj trygonometrycznych. W celu rozwiązania trójkąta, gdy dane są trzy boki, szuka naprzód wysokości trójkąta, a następnie jego boków. Druga księga obejmuje twierdzenie, że wstawy kątów są proporcyjonalne względem boków odpowiednich. Trzecia księga poświęcona jest Trygonometryi kulistej, która prawdopodobnie była opracowana na podstawie Sferyki Menelausa. W czwartej księdze zajmuje się Regiomontan rozwiązywaniem trójkątów kulistych prostokątnych i jakichkolwiek i podaje główne twierdzenia odnoszące się do Trygonometryi kulistej. Wreszcie w księdze piątej podane są różne twierdzenia i zagadnienia, odnoszące się do trójkąta kulistego. Zaznaczyć należy, że pierwszy Regiomontan wyprowadził wzór na powierzchnią trójkąta $\Delta = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$ i on pierwszy używał wzoru

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{a + b}{a - b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

do rozwiązywania trójkątów, gdy dane są dwa boki trójkąta i kąt między niemi zawarty.

Jan Dee w dziele p. t. Paralacticae commentationis Praxeosque nucleus quidam, Authore Dee Londinensi, London 1573, przytacza powyższy wzór w postaci twierdzenia Regiomontana. Dee podaje dowód tego twierdzenia, do którego wprowadza jedynie wstawy, skutkiem czego dowód jego jest długi i nie odznacza się jasnością. Finke w Geometria rotundi przedstawia ten wzór w postaci proporcyi

$$\frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{2} - b = \operatorname{tg}\frac{180^0-\gamma}{2} : \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{180^0-\gamma}{2}-\beta\right) \\ \operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{180^0-\gamma}{2}\right) \end{cases}.$$

Również w dziełach Claviusa Geom. pract. Lugd. 1607, Theodosii Trip. sphaer. lib. V. Item Claviisimus tangentis et secantes, triangula rectilinea et sphaerica Rom. 1586 podany jest powyższy wzór w kształcie

$$a-b : a+b = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma : \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\gamma+\beta\right).$$

Nieśmiertelnej sławy nasz uczony Mikołaj Kopernik (1473 — 1543) twórca Astronomii nowoczesnej, położył ważne usługi w dziale Trygonometryi. W jego dziele p. t.: „De revolutionibus orbium coelestium", wydanym przez Retyka w r. 1543, rozdziały 12-ty, 13-ty i 14-ty księgi pierwszej poświęcone są Trygonometryi. W rozdziale XII Kopernik podaje twierdzenia zasadnicze do obliczania wstaw, trzymając się mniej więcej zasad, podanych przez Ptolemeusza, tudzież tablice wstaw co każde 10 minut dla promienia = 100 000. Nazwy wstawy Kopernik nie wprowadza, tylko wstawy nazywa połowami cięciw; w tablicach tych podane są również różnice między wstawami, dla każdych 10 minut różnicy między kątami. Rozdział XIII poświęcony jest wyłożeniu zasad rozwiązywania trójkątów płaskich, zaś rozdział XIV obejmuje twierdzenia, dotyczące trójkątów kulistych, tudzież zasady rozwiązywania tychże trójkątów. Rozwiązanie trójkątów jakichkolwiek czy to płaskich czy też kulistych Kopernik sprowadza do rozwiązania odpowiednich trójkątów prostokątnych. Wyjątek z dzieła Kopernika, zawierający powyżej przytoczone rozdziały, wydany został oddzielnie przez Retyka przed wydaniem całego dzieła w r. 1542 p. t.: De lateribus et angulis triangulorum... Jan Śniadecki, idąc za Retykiem (Rozprawa o Koperniku 1802, dzieła Śniadeckiego tom II, 1837, str. 166 — 168) utrzymuje, że Kopernik miał już swoję pracę gotową, gdy wyszło 1533 dzieło Regiomontana p. t.: De triangulis omnimodis libri quinque, i że zatym sposoby rozwiązania trójkąta, gdy są dane trzy jego boki, podane przez Kopernika i Regiomontana, są niezależne jeden od drugiego. Istotnie, porównanie obu prac wykazuje, że układ i wykonanie u Kopernika jest zupełnie różnym, niż w Trygonometryi Regiomontana, przyczym należy zauważyć, że rozdziały trygonometryczne w dziele Kopernika należą do wcześniej napisanych. Również zasługą Kopernika jest to, że pierwszy ułożył tablice siecznych i uprościł praktykę interpolacyi w rachunku funkcyj trygonometrycznych. Maurolycus również zajmował się ułożeniem tablic siecznych i wydał je 1558 r. w dziele p. t.: Tabula benefica.

Uczony francuski Viète (1540 — 1603) zajmował się rozważaniem przypadku rozwiązania trójkąta kulistego, gdy dane są trzy jego boki. To zadanie, które uzupełniło teoryją rozwiązywania równań kulistych, posłużyło Vietemu do znalezienia dwu wzorów analitycznych, które obejmowały wszystkie przypadki rozwiązywania trójkątów kulistych. Również Viète przyczynił się do rozwoju zadań tyczących się trójkątów kulistych przez przekształcanie trójkąta kulistego na inny, któregoby kąty i boki w pewien sposób odpowiadały bokom i kątom trójkąta danego. Powiada on: gdy z trzech wierzchołków trójkąta kulistego zakreślimy trzy koła wielkie, wtedy z przecięcia tych kół powstanie trójkąt wzajemny (reciproque) trójkąta danego, tak względem boków jak i kątów. Zwrócić należy uwagę, że ten trójkąt wzajemny nie jest trójkątem biegunowym. Trójkąt Viètego jest taki, że dwa boki są równe kątom przeciwległym trójkąta danego, trzeci zaś bok jest spełnieniem kąta trzeciego. Uczeni: Adrian Metius, Magini, Pitiscus, Neper i Cavalieri do przekształcania trójkątów kulistych używali trójkąta wzajemnego Viètego. Odkrycie zaś trójkąta kulistego biegunowego winniśmy Snelliusowi, który wprowadził go do przekształcań trójkątów kulistych w dziele o Trygonometryi, wydanym po jego śmierci 1627 roku.

Grzegorz Joachim (1514 — 1574) zwany zazwyczaj Retykiem (Reticus) pierwszy wyprowadził związki między bokami i kątami trójkąta prostokątnego, a które mu służyły za definicyje funkcyj trygonometrycznych. Tego rodzaju definicyje funkcyj trygonometrycznych były powodem, że Retyk nazwy (według niego barbarzyńskie) sinus i cosinus zastąpił nazwami *perpendiculum* i *basis*. Z rozważania trójkąta prostokątnego obliczał przeciwprostokątną, przez co przyszedł do ułożenia tablic siecznych. Retyk również położył zasługi w obliczaniu wstaw. Mając na uwadze, że dotychczasowe tablice nie są zbyt dokładne, obliczył nowe tablice wstaw dla promienia 10 000 milionów i podał je co każde 10′. Aby mieć dokładne wartości wstaw, co do ostatnich cyfr, obliczył tablice wstaw dla promienia 1 000 000 000 000 000, z pierwszemi, drugiemi i trzeciemi różnicami, a nadto dla pierwszego i ostatniego stopnia ćwiartki okręgu koła podał wstawy co każdą sekundę, wraz z pierwszemi i drugiemi różnicami. W papierach, po jego śmierci pozostałych, znaleziono dla tegoż promienia obliczone tablice wstaw, stycznych i siecznych co każdą minutę, tudzież początek tablic stycznych i siecznych co każde 10″ z pierwszemi i drugiemi różnicami. Wczesna śmierć Retyka nie pozwoliła mu wydać tych tablic i dopiero jego uczeń Walenty Otho, kosztem Hrabiego Pfalzu Jana Kazimierza, ogłosił je drukiem, wraz z koniecznemi uzupełnieniami. Tablice wyszły p. t.: Opus Palatinum de triangulis a Georgio Joachimo Rhetico coeptum: L. Valentinus Otho, Principis Palatini Friderici IV Electoris Mathematicus consummavit An. Sal. Hum. 1596.

Do prac Retyka i Otho doliczyć należy prace Bartholomaeusa Pitiscusa (1561 — 1613). Pitiscus wydał pierwszy dzieło traktujące o samej Trygonometryi p. t.: Bartholomeai Pitisci Gruenbergensis Silesii Trigonometriae sive de dimensione Triangulorum libri quinque. Item promatum variorum, nempe Geodeticarum Altimetricorum, Geographicorum et Astronomicorum Libri decem trigonometriae subjuncti, ad usum ejus demonstrandum. August, Vindel 1600 (trzecie wydanie 1612 r.). W księdze drugiej Pitiscus mówi o funkcyjach trygonometrycznych, sposobie ich obliczania i związkach pomiędzy niemi; wprowadza sinus, tangens i secans, zaś dostawy, dostycznej i dosiecznej nie używa. Pitiscus, podobnie jak i Retyk, rozważa funkcyje trygonometryczne jako stosunki i wskazuje, w jaki sposób styczne i sieczne dają się otrzymać za pomocą wstaw. Księga trzecia poświęcona jest sposobom rozwiązywania trójkątów płaskich, czwarta zaś rozwiązywaniu trójkątów kulistych. W księdze piątej wskazuje naprzód różne skrócenia w rachunkach trygonometrycznych, a następnie podaje tablice pod osobnym tytułem: Canon triangulorum emendatissimus, pertinens ad Trigonometriam Bartholomaei Pitisci Gruenbergensis Silesii Francfort. Anno 1612. W tablicach tych podane są wartości funkcyj trygonometrycznych pierwszej i ostatniej minuty co każdą sekundę, dla sąsiednich 9 minut co każde 2″, następne zaś co każde 10″, a poczynając od 1° co każdą minutę. Promień koła przyjmuje stosownie do potrzeby od 100 000 do 1 000 000 000 000.

Albert Girard (ur. 1626) wydał tablice funkcyj trygonometrycznych, wraz z teoryją czworokątów płaskich i kulistych. W jego tablicach spotykamy się z oznaczeniami sin., tang., sec.

Jakkolwiek styczne i sieczne były głównie wprowadzone dla zaoszczędzenia utrudnionych mnożeń i dzieleń wyrażeń trygonometrycznych, to jednak uważano, że one nie są wystarczające do praktycznych celów i starano się o to, aby można było uniknąć mnożeń i dzieleń wyrażeń trygonometrycznych przez odpowiednie zastąpienie iloczynów i ilorazów przez summy lub różnice wyrażeń trygonometrycznych; innemi słowy starano się odwrotnie postępować, niż to czynimy dzisiaj. Tym sposobem przy obliczeniach wyrażeń trygonometrycznych, zastępowano iloczyny $\sin\alpha \sin\beta$ i $\cos\alpha \cos\beta$ następującemi dwumianami

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

Zdaje się, że pierwszy Jan Werner (ur. 1468) astronom norymbergski zajmował się zamianą iloczynów na summy lub różnice; po nim Tycho Brahe, Wittich, wreszcie Justus Byrgius (Jobst Byrg v. Bürgi) naukę w tym kierunku posunęli. Całą manipulacyją tego rodzaju zamiany nazywali rachunkiem Prosthaphäresis.

Uciążliwe wykonywania mnożeń i dzieleń wyrażeń trygonometrycznych naprowadziło John'a Napiera Barona z Merchiston w Szkocyi (1550—1617) do wynalezienia logarytmów, które były owocem jego poszukiwań nad Trygonometryją. Napier zapoznał uczonych ze swoim odkryciem przez ogłoszenie dzieła: Mirifici logarithmorum canonis descriptis, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistici mathematica, amplissimi facilimi et expeditissimi explicatio, Edinburg 1614. Napiera jednak nie można uważać jako wynalazcę logarytmów w dzisiejszym ich pojmowaniu. Jego odkrycie odnosiło się głównie do ułatwienia rachunków trygonometrycznych, a mianowicie do tego w jaki sposób iloczyny, ilorazy, potęgi, pierwiastki liczb dają się zastąpić przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb im odpowiednich. Napier w swoich tablicach założył naprzód, że $\sin 90^\circ = 10\,000\,000$, a jej logarytm równy zeru; w jego tablicach, które nie są logarytmami liczb naturalnych, ale temi, które wstawom odpowiadają, 1 oznacza logarytm $\sin 89^\circ 59'$. Napierowi zawdzięczamy wzory dla trójkąta kulistego jakiegokolwiek, znane po nazwą Analogij Napiera.

W tymże samym czasie Justus Bürgi wpadł na odkrycie logarytmów. Tablice jego wyszły w Pradze 1620. Jego logarytmy należą do układu w którym $\log 1 = 0$, $\log 10 = 230\,270$. Logarytmy Bürgi'ego mają więcej podobieństwa do logarytmów Briggsa aniżeli do logarytmów Napiera. Napier przez wprowadzenie logarytmów chciał uprościć rachunki trygonometryczne, Bürgi zaś rachunki z wielkiemi liczbami.

Dokładne obliczenie wstaw co dziesięć sekund, na zasadach przyjętych przez Napiera, podał Ursinus (1587 — 1634) Benjam. Ursini Sprottavii Silesii Mathematici Electoralis Brandenburgici Magnus canon triangulorum logarithmicus ex voto et consilio Illustr. Neperi p. m. novissimo, et sinu toto 100 000 000 ad scrupulor. secuudor. decadas usque vigili studio et pertinaei industria diductus Coloniae 1624. Ursinus podał tablice wstaw i ich logarytmów dla kątów co każde 10″ wraz z różnicami. W dziele zaś jego: Trigonometria cum magno logarithmorum canonae, Coloniae 1625, w księdze trzeciej podane są zastosowania logarytmów do Trygonometryi.

Piotr Krüger (1580 — 1639) wydał tablice logarytmów wstaw i stycznych, w dziele p. t.: Praxis Trigonometriae Logarithmicae cum Logarithmorum Tabulis ad Triangulatam Plana quam Sphaerica sufficientibus, Amstelodami 1634. Krüger rozpoczyna swoje tablice wskazaniem użytku logarytmów w rachunkach trygonometrycznych, następnie podaje tablice liczb naturalnych od 1 do 10000, potym zaś tablice logarytmów wstaw i stycznych, które zowie mesologarithmi, co każdą minutę, wreszcie logarytmy wstaw i stycznych co każdą sekundę dla pierwszego stopnia. W końcu podaje tablice Jakóba Bartscha: Tabula Logarithmica quarta continens Antilogarithmos ad majorem Radium et ad bina Scrupp. secunda totuis primi et bessis secundi gradus supputatos. Tablice te są logarytmami dostawy kątów od 1^0 do $1^0\,41'$ co każde 2″ i dla promienia 100 000. W dodatku do tablic Krüger stosuje logarytmy do rachunków trygonometrycznych. W dziele p. t.: Synopsis trigonometriae Gdańsk 1612, podaje twierdzenie Regiomontana dla trójkątów płaskich, w postaci wzoru

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Jan Keppler (1571 — 1631) rachował tablice logarytmów wstaw według systemu Napiera, które wydrukowane były bez jego wiedzy w Marburgu p. t.: Joannis Keppleri Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos. Praemissa demonstratione legitima ortus Logarithmorum eorumque usque. Quibus nova traditur Arithmetica seu Compendium, quo post numerorum notitiam nullum nec admirabilis nec utilius solventi pleraque, problemata caluculatoria, praesertim in Doctrina Triangulorum citra multiplicationis divisionis radiumque extractionis in memoris prolixis labores molestissimos, Marburgi 1624.

Henry Briggs (1556 — 1630), przyjmując zasadę definicyi logarytmów Napiera, obliczył logarytmy liczb, przyjmując 10 jako podstawę. Briggs umarł przed ukończeniem swojej pracy. Jego Arithmetica logarithmica Lond. 1624 zawierała logarytmy liczb od 1 do 200 000 i od 90 000 do 100000 w czternastu cyfrach dziesiętnych. Tablice wstaw naturalnych dla promienia równego 1 000 000 000 000 000, stycznych i siecznych dla promienia równego 10 000 000 000, a logarytmy wstaw i stycznych dla każdej setnej części stopnia w 14 cyfrach dziesiętnych wyszły w r. 1633 p. t.: Trigonometria Britannica, staraniem Henryka Gellibranda, profesora Astronomii w Colege Gresham. Logarytmy liczb naturalnych Brigssa uzupełnił księgarz i matematyk Adrian Vlacq z Gouda i wydał tablice logarytmów wszystkich liczb od 1 do 100000 w r. 1628.

Na szczególną uwagę naszą zasługuje dzieło Jana Tońskiego, profesora Akademii krakowskiej p. t.: Arithmetica vulgaris et Trigonometria rectilineorum, prout universae Geometriae practicae alisque Mathescos partibus, Geographiae, Architectonicae, Gnomonicae etc. subservit, Ingolstadii, wydanie drugie 1645 (pierwsze 1640 r.) W dziełku tym na str. 67 istnieje rozdział zatytułowany Fragmentum logisticae astronomicae, w którym podany jest rachunek stopni, minut i sekund. Na stronnicach 77 — 95 podany jest wykład Trygonometryi płaskiej (Trigonometria rectilineorum) podzielony na trzy części: część pierwsza „De communibus trigonometriae principiis, zawiera wykład najważniejszych własności trójkątów, określenia linij trygonometrycznych (inscriptarum) sinus rectus, sinus versus, sinus complementi, tangens, secans, wreszcie tangens i secans complementi. Dla wyrażenia wielkości linij trygonometrycznych promień podzielony jest na 10^4 części równych i w takich jednostkach wraz z dwiema dziesiętnemi podane są długości tych linij. W tablicach zatytułowanych: Canon triangulorum sive mathematicus nuncupatur, zamieszczonych na końcu dziełka, podane są długości wstaw, stycznych i siecznych, odpowiadające kolejnym łukom, różniącym się o jednę minutę i postępującym od 0^0 do 90^0. Część druga Trygonometryi „De ratione laterum et angulorum trianguli" (str. 96) zawiera rozwiązanie zadania zasadniczego „mając dane dwa kąty trójkąta znaleść stosunki boków przeciwległych". Część trzecia „De praxi trigonometriae rectilineorum" (str. 103) obejmuje rozwiązanie zagadnień: 1) mając jeden bok trójkąta i dwa kąty znaleść pozostały kąt i dwa boki; 2) mając dwa boki i jeden kąt znaleść pozostałe dwa kąty i bok; 3) mając trzy boki trójkąta znaleść trzy kąty. W końcu tej części Toński podaje rozwiązania trójkątów płaskich prostokątnych. Następnie mowa jest o Trygonometryi kulistej. W części pierwszej (str. 119) „de fundamentis Trigonometriae sphaericorum", podane są wiadomości zasadnicze, tyczące się trójkątów kulistych. W części drugiej (str. 141) „de praxi Trigonometriae Triangulorum sphaericorum, podane są związki między elementami trójkąta kulistego prostokątnego i sposoby rozwiązywania tego rodzaju trójkątów, a następnie rozwiązywanie trójkątów kulistych jakichkolwiek przez sprowadzenie do rozwiązywania trójkątów kulistych prostokątnych. Wreszcie w rozdziale zatytułowanym: „Problemata miscellanea", podane są zastosowania do architektoniki, gieografii matematycznej i gnomoniki. Dziełko Tońskiego może być uważane za jedno z najlepszych w swoim rodzaju w ówczesnej literaturze europejskiej, jako treściwe i jasne.

Dzieło Solskiego, Geometra Polski, 1683, zawiera określenie linij trygonometrycznych i wykazuje ich użytek do niektórych zadań gieometryi praktycznej, tudzież tablice wstaw, stycznych i t. p.

Wojciech Tylkowski w dziele p. t.: Geometria practica curiosa in tres libros divisa, quorum primus agit: de lineae, secundus de superficiei, tertius de corporis dimensione (Poznań 1692) podał tablice wstaw, stycznych i siecznych co każdy stopień, oraz praktyczne sposoby kreślenia elipsy i paraboli, wszakże bez dowodu.

Przez wynalezienie logarytmów Trygonometryja weszła w nową fazę. Z wielką trudnością obliczane przedtym sieczne, okazały się w obec logarytmów zbytecznemi i znikły z tablic. Również znikł rachunek Prosthaphäresis, który przy użyciu logarytmów prowadził do wprost przeciwnego celu. Jak dawniej dla dogodności rachunków starano się zamieniać iloczyny wyrażeń trygonometrycznych na summę lub różnicę odpowiednich wyrażeń trygonometrycznych, tak z chwilą wynalezienia logarytmów starano się odwrotnie postępować, to jest summy lub różnice zamieniać na iloczyny. Do tegoż samego celu używano kątów posiłkowych i całe postępowanie rozciągnięto nawet do obliczania wyrażeń algiebraicznych, które jednak nie mają bezpośredniego związku z Trygonometryją, jak np. rozwiązywanie równań algiebraicznych.

W miarę tego, jak potrzeby nauki wymagały, układano rozmaite tablice logarytmów funkcyj trygonometrycznych, jedni podawali je w 10 cyfrach dziesiętnych jak Callet; inni w 7 cyfrach dziesiętnych jak: Callet, Vega, Bremiker, Schrön, Hoüel; inni w 5 cyfrach dziesiętnych, jak: Lalande, Dupuis, Schlömilch, Wittstein, Zech, albo wreszcie w 4 cyfrach dziesiętnych jak: Müller, Hoüel, Wittstein, Zech.

Poczynając od starożytnych aż do dzisiejszych czasów, wszyscy uczeni dzielili okrąg koła na 360 stopni, stopień na 60 minut, minutę na 60 sekund. Uczeni francuscy przy układzie miar w końcu zeszłego wieku, starali się system dziesiętny wprowadzić i dla okręgu koła. Ćwiartka okręgu koła była przez nich podzielona na 100 części zwanych *grades*, jeden grade na 100 części zwanych *minutes*, wreszcie jednę minutę na 100 części, zwanych *secondes* i opierając się na tym nowym setnym podziale ułożone zostały tablice logarytmów funkcyj trygonometrycznych. Prace uczonych francuskich, wydane zostały p. t.: Tables trigonometriques decimales, ou tables des logarithmes des sinus, secantes et tangentes suivant la division du quart de cercle en 100 degrés, du degré en 100 minutes, et de la minute en 100 secondes; precedées de la table des logarithmes des nombres depuis dix mille jusqu'a cent mille et de plusieurs tables subsidiaires, calculées par Ch. Borda; revues, augmentées et publiées par I. B. I. Delambre à Paris de l'imprimerie de la Republique An. IX. System ten jednak nie został wprowadzony w użycie i dotąd, jak dawniej, używany jest dla okręgu koła system sześćdziesiątkowy.

Podczas gdy początkowo, wszelkie twierdzenia trygonometryczne dowodzone były drogą gieometryczną, w połowie wieku XVIII zaczęto używać drogi rachunkowej. Zdaje się, że pierwszy Mayer używał drogi rachunkowej. W rozprawie: Trigonometrica (Com. Petrop. T. II ad A. 1727 str. 12 — 30) pokazuje w jaki sposób $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ daje się wyrazić przez $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$, gdy α i β przybierają różne wielkości. Również Mayer pokazuje w jaki sposób wyrażenia

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{-\cos\alpha + \cos\beta}, \quad \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\beta \pm \sin\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)},$$

$$\frac{\cos\alpha \pm \cos\beta}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \text{ jak również } \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \ \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \ldots$$

dają się przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Mayer wyprowadza również drogą analityczną znanie już wówczas wyrażenia dogodne do rachunku logarytmami $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, przez trzy boki trójkąta; tudzież Analogije Napiera.

Za czasów Leonarda Eulera (1707—1783) wchodzi Trygonometryja w nową fazę. Do jego czasów wypowiadano twierdzenia trygonometryczne słowami, później zaś w tych twierdzeniach oznaczano funkcyje trygonometryczne, bądź małemi, bądź wielkiemi głoskami alfabetu łacińskiego, jakto czynił Mayer. Skutkiem takich oznaczeń trudno było przy przekształceniach wyrażeń trygonometrycznych uchwycić zachodzące związki między funkcyjami trygonometrycznemi a bokami trójkąta. Euler pierwszy usunął dowolność znakowania funkcyj trygonometrycznych i dawniejsze symbole zastąpił je dzisiaj używanemi

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{cotg}\alpha,\ \sec\alpha,\ \operatorname{cosec}\alpha.$$

Nadto, dla jaśniejszego przedstawienia związków między bokami i kątami trójkąta, oznaczał boki trójkąta literami łacińskiemi a, b i c, kąty zaś im przeciwległe literami greckiemi α, β i γ. Skutkiem wprowadzenia takiego oznaczenia wzory były zrozumiałe i zachęcały do nowych kombinacyj i poszukiwań· Również Eulerowi należy przypisać tę zasługę, że gdy pierwotnie funkcyje trygonometryczne uważane były jako wielkości linijowe, to Euler rozważał je jako liczby, które zmieniają swą wielkość ze zmianą kąta, a tymsamym są funkcyjami kątowemi. Do tego określenia funkcyj trygonometrycznych Euler przywiązywał wielką wagę i rozwinął część analityczną funkcyj trygonometrycznych, a przez rozwijanie funkcyj na szeregi wskazał nowe drogi rachowania funkcyj trygonometrycznych. Euler swoje poszukiwania pomieścił, jużto w Petersburgskich Comentariach, jużteż oddzielnie w swoim dziele p. t.: Introductio in Analysin infinitorum. Euler zarówno w rachunkach funkcyj trygonometrycznych jak i w rachunkach ich logarytmów zaprowadził wiele uproszczeń. Wzory trygonometryi kulistej

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$
$$\sin a \operatorname{tg}\gamma - \sin\beta \operatorname{tg} c = \cos\alpha\cos\beta\operatorname{tg} c,$$

podane zostały w formie przywiedzionej w rozprawie: Principes de la trigonometrie spherique. (Mem. de l'Arad. Roy. de Prusse 1753) i w Trig. sphaer. univ. ex primis principiis breviter et dilucide derivata. (Acta Petropol. 1779). Jemu również zawdzięczamy wzory Trygonometryi kulistej

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

dogodne do rachunku logarytmami.

Na podstawie oznaczeń, wprowadzonych przez Eulera, różni uczeni wydawali książki, traktujące o Trygonometryi, w których starali się upraszczać nietylko podane dotychczas wzory, ale i przekształcenia wyrażeń trygonometrycznych.

De Gua w rozprawie, pomieszczonej w Mém. de Paris 1785 starał się z jednego wzoru zasadniczego Trygonometryi wyprowadzić pozostałe wzory; metoda jego jednak była zbyt rozwlekłą i niejasną.

Najlepszym na owe czasy i treściwym dziełem, traktującym o Trygonometryi było Klügels: Analytische Trigonometrie, Braunschweig 1770. W dziele tym jednak Klügel podawał często proporcyje zamiast wzorów, podanych przez Eulera.

Lambert (Beiträge zur Mathematik I str. 369) podał drogą analityczną wiele wzorów Trygonometryi kulistej.

Kompletne dzieło o Trygonometryi było napisane przez Cagnoli'ego: Trigonometrie rectiligne et spherique trad. de l'italien par Chombré 2 edition, Paris 1808. W dziele tym Cagnoli, metodami dosyć rozwlekłemi, bez wprowadzenia oznaczeń Eulera, podał wiele związków między kątami i bokami trójkąta, a między innemi związek między sześcioma elementami trójkąta kulistego, znany pod nazwą wzorów Cagnoli'ego.

Bardzo cenną pracę stanowi rozprawa Lagrange'a: Mémoire sur la Trigonometrie sphériqne (Jour. de l'Ecole Polytechnique, Cahier VI, str 270), w której Lagrange wszystkie wzory Trygonometryi kulistej wyprowadził z wzorów kształtu: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

Legendre w rozprawie pomieszczonej w Mémoires de l'Institut 1806 podał twierdzenie, dotyczące obliczenia powierzchni trójkątów kulistych, za pomocą rozważania trójkątów płaskich. Twierdzenie to, podane przez nas we właściwym miejscu Trygonometryi kulistej, ma ważne zastosowania w pomiarach gieodezyjnych.

Jako jednę z najlepszych książek opracowanych na ówczesnej nauce należy przytoczyć dzieło Pfleiderera (1786—1821) profesora matematyki i fizyki w Korpusie Kadetów w Warszawie od r. 1766—1782, a następnie profesora w Tybindze, p. t. Ebene Trigonometrie, Tübingen, 1802. W dziele tym oprócz starannego opracowania całej nauki o Trygonometryi, znajduje się bardzo obfity i starannie zebrany materyjał, dotyczący historyi Trygonometryi, a głównie Trygonometryj starożytnych, których zasady i sposoby wyprowadzania wzorów podaje Pfleiderer w krótkości.

Dotąd rozwiązywano zadania, dotyczące rozwiązywania trójkątów kulistych jakichkolwiek przez rozdzielenie tych ostatnich na dwa trójkąty kuliste prostokątne i rozwiązanie tych ostatnich. Wzory podane przez Delambre'a i Gaussa pozwoliły wprost rozwiązywać trójkąty kuliste jakiekolwiek, bez rozkładu ich na trójkąty kuliste prostokątne. Delambre podał swe wzory w Connaissance de temps r. 1808, Gauss zaś w dziele swoim p. t. Theoria motus corporum coelestium, wydanym r. 1809, ogłosił również te wzory jako dotąd nieznane. Obaj uczeni prodali wzory bez dowodu. Jan Śniadecki uderzony prostotą tych wzorów usiłował je wyprowadzić, co też uskutecznił opierając się na wzorach Cagnoli'ego i dowód swój przesłał do Akademii nauk w Petersburgu 12 Marca 1811 r. Delambre w Connaissance de temps 1812 upomniał się o zdanie Gaussa o tych wzorach, jakoby przez siebie podanych, dowodu jednak nie przytoczył. Dopiero w Astronomii wydanej w Paryżu 1814, przytoczył dowód oparty na Analogijach Napiera; dowód ten jednak jest dosyć zawiły.

Mollweide w Monatliche Correspondez 1809 r. dowiódł wzorów podanych przez Delambre'a i Gaussa, a nadto wyprowadził wzory dla Trygonometryi płaskiej

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma},$$

znane w nauce pod nazwą wzorów Mollweidego.

Jan Śniadecki w dziele swoim: Trygonometrya kulista analitycznie wyłożona, z przystosowaniami do rozmiaru ziemi i do zadań astronomicznych, Wilno 1817 (wydanie drugie 1820), przełożonym na język niemiecki przez Feldta i wydanym p. t.: Śniadecki's Sphärische Trigonometrie aus den polnischen, von Feldt, Leipzig 1828, podaje również dowód swój wzorów Delambre'a. Jestto zarazem wyborny podręcznik, który i dzisiaj służyć może do nauki Trygonometryi kulistej. Sumienny rozbiór tej książki ogłosił Józef Twardowski w Pamiętniku Warszawskim 1817 r.

Wspomnieć nam tu jeszcze wypada, że pierwsze pojęcia o Polygonometryi znajdujemy w dziele A. Girard'a p. t.: Tables des sinus etc. Ala Haye 1626. Na jego zasadach powstała początkowo wprowadzona przez Lamberta, a rozwinięte przez I. Mayera (Tetragon. specimen 1773) i Biörsena (Introductio Tetr. Hauniae 1780) tetragonometryja. Główne jednak podstawy Polygonometryi dał Lexell w dziele p. t.: De resolutione polygonarum rectilineorum 1775 — 1776 Polygonometryja została następnie rozwinięta przez Lhuillera w dziele: Polygonometrie et Abregé d'isoperimetrie, Genewa, 1789; Carnota: w Geometrie de position, Paryż 1803; Gaussa w przypisie do tłomaczenia Schumachera dzieła Carnota i J. Steinera w wielu rozprawach, pomieszczonych w dzienniku Crellego.

Nie mamy zamiaru przytaczać tu licznych książek; jakie się ukazały w ostatnich czasach, a które traktują Trygonometryją, ograniczymy się jedynie do ważniejszych i celniejszych książek w językach obcych napisanych. Do takich zaliczamy; z francuskich:

Serret, Traité de Trigonométrie, sixiéme édition, Paris 1880.
Briot et Bouquet, Leçons de Trigonométrie, sixiéme édition 1873.
Vacquant et de Lepinay, Cours de Trigonométrie, Paris 1886.
Gouyou, Traité de Trigonométrie, Paris 1891.

Z niemieckich:

Heis i Eschweiler, Ebene und sphärische Trigonometrie, zweite Auflage, Köln. 1875.

Brockmann, Lerbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Leipzig 1880.

Schlömilch, Gründzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Masses: Ebene und sphärische Trigonometrie zwei Theile Eisenach. 1868.

Baltzer, Die Elemente der Mathematik 2-er Band: Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie sechste Auflage, Leipzig 1883.

Spitz, Lerbuch der Ebenen Trigonometrie, fünfte Auflage, Leipzig 1877 i Lerbuch der sphärischen Trigonometrie, Leipzig 1886.

Bardzo cenne dzieło do zadań z Trygonometryi jest dzieło: Reidt'a Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie I Theil, Trigonometrie 3 Auflage, Leipzig 1884.

Z angielskich:

B. D. Beasley, An elementary Treatise on plane Trigonometry, London, 1884.

I. Todhunter, Plane Trigonometry, London 1886; Spherical Trigonometry, fifth edition, London 1886.

John Cassey A treatise on plane Trigonometry, London 1888; A treatise on spherical Trigonometry, London 1889.

W. E. Johnson, Treatise on Trigonometry, London 1889.

I w naszej literaturze mamy dosyć książek, traktujących o Trygonometryi. Pominąwszy dzieło Śniadeckiego o Trygonometryi, jako już powyżej przytoczone, następujące książki były wydane w języku polskim:

Jan Śniadecki, Rachunku algiebraicznego teorya przystosowań do linij krzywych 1783. W rozdziale IV części II, pomieszczone są zasady trygonometryi, a raczej gieometryi wyłożone systematycznie i naukowo.

Józef Czech, Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmioro: sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanymi przypisami i trygonometryą dla pożytku młodzieży akademickiej, Wilno 1807; po śmierci autora wyszło wydanie 2-gie 1817 z trygonometryją Simpsona.

Lhuillier, Gieometrya dla Szkół Narodowych w przekładzie Gawrońskiego 1785, 1803, 1810 i 1816. W części pierwszej podane są początki miernictwa i trygonometryja.

Frączkiewicz Augustyn, Dowody różnych podań z Trygonometryi płaskiej i Gieometryi elementarnej, Kraków 1827.

Karol Hube, prof. Uniwersytetu Krakowskiego, rozprawy o Trygonometryi kulistej, Kraków 1820.

Poliński, Początki Trygonometryi płaskiej, Wilno 1816, 1821, 1828.

Ksiądz Antoni Dąbrowski, Jeometrya dla Szkół Wojewódzkich, Warszawa 1823, na str. 197 — 252 wyłożoną jest Trygonometryja prostokreślna.

Ksiądz Ignacy Przybylski, Geometrya początkowa, Warszawa 1823, zawierająca w oddzielnym rozdziale trygonometryją.

Antoni Krauz, Matematyka na klassę drugą Szkoły zimowej Artyleryi, Warszawa 1828. Nauki VII—IX obejmują Trygonometryją.

Libelt, Wykład matematyki, Poznań 1844, tom drugi obejmuje trygonometryją i solidometryją.

Ksiądz Fr. Kasterski, Trygonometrya podług Lefebure'a de Fourcy, Warszawa 1836.

August Bernhardt, Trygonometrya płaska i kulista, przekład z czwartego wydania Trygonometryi Lefebure'a de Fourcy, Warszawa 1850.

Witold Turno, Trygonometrya prostolinijna i sferyczna, Poznań 1857.

Jan Steczkowski, Trygonometrya prostokreślna i sferyczna, Kraków 1859.

I. Przystański, Trygonometrya prostokreślna wraz z zadaniami, Warszawa 1859.

Jan Baranowski, Wzory z Trygonometryi prostokreślnej i kulistej, Warszawa 1864.

G. H. Niewęgłowski, Trygonometrya z teoryją ilości urojonych i z notami, Paryż 1870.

Mikołaj Jaxa Bykowski, Trygonometrya, Warszawa 1875, pomieszczona w Panteonie wiedzy ludzkiej, wydanej staraniem Przeglądu Tygodniowego.

Bronisław Gustawicz, Zasady Goniometryi i Trygonometryi prostokreślnej na podstawie rzutów algiebraicznych, Kraków 1886.

Bliższe szczegóły, dotyczące historyi Trygonometryi znajdzie czytelnik w następujach dziełach, z których czerpałem materyjały do Rysu historycznego rozwoju Trygonometryi.

Abraam Kästner, Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796. Tom I str. 512—634.

C. F. Pfleiderer, Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Tübingen 1802.

A. Arneth, Die Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852.

E. I. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877.

Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880.

Richard Klimpert, Geschichte der Geometrie, Stuttgart 1888.

Karl Fink, Geschichte der reinem Mathematik, Tübingen 1890.

Samuel Dickstein, Geometryja; artykuł pomieszczony w Encyklopedyi Wychowawczej 1889.

TRYGONOMETRYJA PŁASKA.

ROZDZIAŁ I.

NAUKA O FUNKCYJACH TRYGONOMETRYCZNYCH.

KIERUNKI DODATNE I UJEMNE NA LINII PROSTEJ.

1. Jeżeli na linii prostej, którą możemy nakreślić poziomo, obierzemy punkt stały O, natenczas położenie każdego punktu M na tej prostej będzie oznaczone, skoro będziemy znali odległość tego punktu od punktu stałego O i gdy przytym będziemy wiedzieli, po której stronie tegoż punktu stałego ma się znajdować punkt M. Pod tym ostatnim względem w Algiebrze przyjmuje się, że jeżeli odległości, mierzone od pewnego punktu w pewnym oznaczonym kierunku uważamy za dodatne, wtedy mierzone w kierunku wprost przeciwnym uważać należy za ujemne. Tym sposobem, jeżeli przyjmować będziemy odległości od punktu O, liczone od ręki lewej ku prawej za dodatne, natenczas odległości mierzone od tegoż samego punktu od ręki prawej ku lewej czyli w kierunku wprost przeciwnym — za ujemne. Zatym, jeżeli punkty M i M′ (fig. 1) będą położone w jednakowej odległości od punktu O np. w odległości dwu jednostek, natenczas odległość OM wyrazi się liczbą + 2, odległość zaś punktu M′ od O wyrazi się liczbą — 2.

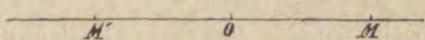

Fig. 1.

Z tego wynika, że jeżeli przez a oznaczymy liczbę dodatną lub ujemną, wyrażać mającą długość liczoną na linii M′M od punktu O, natenczas ilość jednostek tej długości wyrazi się przez $+ a$ lub $- a$, stosownie do tego, czy a jest dodatne, czyteż ujemne.

2. Jeżeli wyobrazimy sobie, że punkt ruchomy wyszedszy z punktu O porusza się bąć w jednym, bąćteż w drugim kierunku, natenczas różne części linii M′M, opisane przez punkt ruchomy będą jedne dodatne, drugie zaś ujemne, stosownie do tego czy punkt ruchomy w czasie przebiegu tych części odbywa ruch w kierunku od lewej ku prawej, czyteż od prawej ku lewej ręce, a jeżeli oznaczymy przez $a, b, c, d, \ldots$ liczby dodatne lub ujemne, które odpowiadają drogom opisanym przez punkt ruchomy, a przez x oznaczymy odległość punktu ruchomego M od punktu stałego O, w chwili, kiedy punkt ruchomy po dokonanym ruchu znajduje się w spoczynku, natenczas odległość OM wyrazi się

$$x = a + b + c + d + \dots$$

czyli będzie sumą algiebraiczną dróg opisanych przez punkt ruchomy.

3. Częstokroć zmianę kierunku wyrażamy innym sposobem i tak, jeżeli na linii P′P obierzemy szereg punktów P′, N′, M′, M, N, P... i przyjmiemy kierunek od lewej ku prawej ręce za dodatny, natenczas kie-

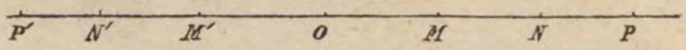

Fig. 2.

runkami dodatnemi będą P′N′, N′M′, M′O, OM, MN, NP..., wtedy kierunki wprost przeciwne oznaczać możemy przez N′P′, M′N′, OM′, MO, NM, PN... i będziemy mieli $N'P' = -P'N'$, $M'N' = -N'M'$, $OM' = -M'O, \dots$, $MO = -OM$, $NM = -MN$, $PN = -NP, \dots$ czyli

$$N'P' + P'N' = 0,\ M'N' + N'M' = 0,\ OM' + M'O = 0,$$
$$MO + OM = 0,\ NM + MN = 0,\ PN + NP = 0, \dots$$

jeżeli więc oznaczamy przez x, tak co do kierunku, jak i odległości wielkość OM, natenczas z poprzedzającego wzoru art. 2 wynika

$$-x + a + b + c + \dots = 0,$$

zatym, jeżeli weźmiemy odległość najbliższego punktu od punktu stałego ze znakiem przeciwnym, suma algebraiczna odległości będzie równa zeru.

Wniosek ten jest bardzo ważny i z niego nieraz korzystać będziemy w następstwie naszego wykładu.

MIARA KĄTÓW.

4. Jeżeli dwie linije proste przecinają się, natenczas mówimy, że tworzą z sobą kąt, punkt przecięcia się linij zowie się wierzchołkiem kąta, a linije tworzące kąt jego ramionami.

Miarą kąta, jak nam wiadomo z Gieometryi, jest łuk koła, zakreślonego z wierzchołka kąta, jako środka, a zawarty między jego ramionami, to znaczy, że w jakim stosunku jest kąt dany do kąta prostego, w takim samym stosunku jest łuk koła między ramionami kąta zawarty do ćwiartki okręgu koła czyli innemi słowy, ile jednostek kątowych zawiéra kąt, tyleż odpowiednich jednostek łukowych zawierać będzie i łuk.

5. Ponieważ miarą kąta jest łuk koła, zakreślonego z wierzchołka, jako środka, a zawarty między ramionami kąta, przeto miarę kąta możemy także przedstawić zapomocą długości owego łuku. Wiadomo nam, że stosunek okręgu koła do średnicy jest liczbą stałą, niedającą się przedstawić przez liczbę wymierną, tylko z pewnym przybliżeniem, od nas zależnym; wartość przybliżona da się przedstawić w kształcie ułamku $\frac{22}{7}$ (stosunek Archimedesa), z większym przybliżeniem w kształcie ułamku $\frac{355}{113}$ (stosunek Adriana Anthonisz'a, zwanego Metiusem); wartość zaś w 15 cyfrach dziesiętnych jest

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793.$$

Dla oznaczenia tego stosunku używamy litery greckiej π, przeto, jeżeli r jest promieniem koła, długość okręgu koła wyrazi się przez $2\pi r$. *)

6. Przedewszystkim wyznaczymy kąt, który ma za miarę łuk równy długości promienia.

Według definicyi miary kąta mamy (fig. 3)

$$\frac{\text{kąt } AOB}{\text{kąta prostego}} = \frac{\text{łuk } AB}{\text{ćwiartki okręgu koła}}$$

czyli

$$\frac{\text{kąt } AOB}{4 \text{ kątów prostych}} = \frac{\text{łuk } AB}{\text{okręgu koła}}$$

a że łuk AB ma być równy promieniowi r, a okrąg koła $= 2\pi r$, przeto

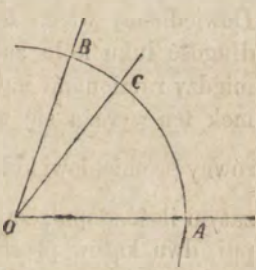

Fig. 3.

$$\frac{\text{kąt } AOB}{4 \text{ kątów prostych}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \text{ zatym}$$

$$\text{kąt } AOB = \frac{\text{dwu kątom prostym}}{\pi}$$

---

*) π rachowali

Ludolph van Ceulen	do	35	cyfr dziesiętnych
Machin	„	100	„
Vega	„	140	„
Dahse	„	200	„
Clausen z Dorpatu	„	250	„
Richter z Elbląga	„	333	„
Rutherford Wiliam	„	440	„
Shanks	„	530	„

którego rachunek do 500 cyfr dziesiętnych sprawdził Richter z Elbląga. (Grunert, Archiv t. XXV. 1855, str. 472).

Pierwszy Lambert dowiódł, że π jest liczbą niewymierną, następnie Legendre okazał, że i kwadrat z π jest liczbą niewymierną, wreszcie Lindemann w t. XX. Math. Annal. 1882, str. 213 — 225 dowiódł, że liczba π nie może być pierwiastkiem równania algiebraicznego jakiegokolwiek stopnia o spółczynnikach wymiernych.

Kąt ten zwany przez Anglików **radianem** przyjmiemy za jednostkę do mierzenia kątów.

7. Wyznaczymy wielkość tego kąta. Niech AOC (fig. 3) będzie pewnym kątem. Z punktu O, jako środka, nakreślmy promieniem r łuk koła taki, aby długość AB była równa promieniowi koła. Natenczas, jeżeli przez l oznaczymy długość łuku AC, zawartego między ramionami kąta danego, będziemy mieli, na zasadzie proporcyonalności łuków względem kątów im odpowiadających,

$$\frac{\text{kąt AOC}}{\text{kąt AOB}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \frac{l}{r}$$

zatym

$$\text{kąt AOC} = \frac{l}{r}\ \text{kąt AOB}.$$

Jeżeli więc kąt AOB weźmiemy za jednostkę miary kątów, wtedy

$$\text{kąt AOC} = \frac{l}{r}.$$

Dowiedliśmy więc, że miarą kąta jest ułamek, którego licznikiem jest długość łuku koła zakreślonego z wierzchołka, jako środka, i zawartego między ramionami kąta, mianownikiem zaś promień tegoż koła. Ułamek ten wyraża się w jednostkach takiego kąta, który ma za miarę łuk równy promieniowi koła. Ponieważ ten kąt jest równy $\frac{\text{dwu kątom prostym}}{\pi}$, zatym ilość stopni, zawartych w tym kącie znajdziemy, dzieląc ilość stopni dwu kątów prostych t. j. 180° przez π. Wykonywając dzielenie, z odpowiednim przybliżeniem, znajdziemy

$$\frac{180^0}{\pi} = 57^0,29577951307347$$

czyli

$$57^0\ 17'\ 44'',_{8062470645241};$$

taki jest zatym kąt, który ma za miarę łuk koła, zakreślonego z wierzchołka, równy promieniowi.

Dla wyjaśnienia tego rodzaju przedstawienia miary kąta, dajmy, że mamy kąt, który ma za miarę $\frac{2}{3}$ promienia koła, wtedy kąt ten będzie zawierał $\frac{2}{3} \times 57{,}29577951$ stopni i będzie miał za miarę, łuk koła zawarty między ramionami, nakreślony z wierzchołka kąta, a długość tego łuku będzie wyrównywać $\frac{2}{3}$ promienia.

8. Ze względu, że tego rodzaju miara kątów ma ważne zastosowanie w poszukiwaniach teoretycznych, nazywać ją będziemy miarą teoretyczną kąta, dla odróżnienia od pierwszej (zwykłej) miary kąta, którą nazywać będziemy miarą kąta w stopniach albo zwykłą miarą kąta. Z tej definicyi miary teoretycznej kąta wynika, że ona jest liczbą oderwaną. Jako wniosek miary teoretycznej kąta wynika, że skoro $2\pi r$ jest długością okręgu koła, przeto miarą teoretyczną 4 kątów prostych jest $\frac{2\pi r}{r}$ czyli 2π, miarę teoretyczną dwu kątów prostych jest π, miarą kąta prostego jest $\frac{\pi}{2}$, zaś n kątów prostych jest $\frac{n\pi}{2}$.

9. Należy nam teraz zbadać, jaki zachodzi związek między miarą teoretyczną, a zwykłą miarą kąta. Niech θ oznacza ilość stopni kąta danego, zaś x jego miarę teoretyczną. Ponieważ 180^0 odpowiada dwu kątom prostym, przeto $\frac{\theta}{180}$ wyraża stosunek danego kąta do dwu kątów prostych, że zaś π jest miarą teoretyczną dwu kątów prostych, przeto $\frac{x}{\pi}$ wyraża stosunek danego kąta do dwu kątów prostych, mamy zatym

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\theta}{180}, \text{ stąd}$$

$$x = \theta \frac{\pi}{180},$$

$$\text{zaś } \theta = x \frac{180}{\pi}.$$

Takie są zatym wzory do zamiany miary zwykłej kąta na jego miarę teoretyczną i nawzajem.

10. Jeżeli w szczególności szukać będziemy miary teoretycznej kąta równego 1^0, wtedy kąt $1^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0,29578$

$$\text{i kąt } \theta^0 = \frac{\theta}{57,29578},$$

dla kąta równego $1'$ będziemy mieli $\frac{60 \times 180}{\pi} = \frac{10800}{\pi} = 3437,74677$,

zatym $$\text{kąt } 1' = \frac{1}{3437,74677},$$

wreszcie miarę teoretyczną kąta $1''$ znajdziemy dzieląc $\frac{\pi}{180}$ przez 60×60

t. j. przez liczbę sekund, zawartych w jednym stopniu t. j. π przez 648000; będzie więc miara teoretyczna kąta $1'' = \frac{1}{206264,806}$.

W praktyce, przy obliczaniu kątów bardzo małych, używamy tego ostatniego wzoru, biorąc za mianownik 206265, czyli że miara teoretyczna kąta $1'' = \frac{1}{206265}$.

PRZYKŁADY.

1). **Znaleść ilość stopni, minut i sekund kąta, który przy promieniu 10 stóp ma miarę teoretyczną 9 cali.** Miarą teoretyczną kąta będzie $\frac{9}{10.12} = \frac{3}{40}$. Szukaną ilość stopni, minut i sekund znajdziemy według art. 9.

$\theta^0 = \frac{3}{40}\,\frac{180^0}{\pi} = \frac{3}{40} \times 57^0,29577951 = 4^0,29718463$, czyli $4^0\ 17'\ 49'',_{86}$.

2). **Znaleść miarę teoretyczną kąta $5^0\ 37'\ 30''$**

$$x = 5,625 \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{32}\,\pi.$$

3). **Wyrazić $\frac{5}{16}$ kąta prostego w mierze teoretycznej i w zwykłej mierze kąta.**

$$\text{miara teoretyczna} = \frac{5}{16}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\,\pi,$$

$$\text{miara zwykła} = \frac{5}{16}\,\frac{\pi}{2} \times \frac{180^0}{\pi} = \frac{5}{16}\,90^0 = 28^0,_{125}.$$

4). **Trzy kąty trójkąta tworzą postęp arytmetyczny, największy z nich jest dwa razy większy od najmniejszego, znaleść miary tych kątów.**

Jeżeli przez $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ oznaczymy ilość stopni tych kątów, a przez r różnicę postępu, natenczas

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180,$$

$$\theta_3 = \theta_1 + 2r, \qquad \theta_2 = \theta_1 + r,$$

nadto $\theta_3 = 2\theta_1 = \theta_1 + 2r$, zatym $\theta_1 = 2r$; równanie piérwsze, po podstawieniu tych wartości, daje $\theta_1 = 40$, zatym miarami teoretycznemi tych kątów będą

$$40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\,\pi,$$

$$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3},$$

$$80 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{9}\pi.$$

5). Trzy kąty trójkąta tworzą postęp arytmetyczny, a stosunek ilości stopni najmniejszego z kątów do 60 jest równy stosunkowi miary teoretycznej kąta największego do π. Znaleść miarę w stopniach trzech kątów trójkąta.

Oznaczając przez θ_1, θ_2, θ_3 ilość stopni szukanych kątów trójkąta, a przez r różnicę postępu, będziemy mieli

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180,$$

$$\theta_2 = \theta_1 + r, \qquad \theta_3 = \theta_1 + 2r,$$

miarą teoretyczną kąta największego będzie

$(\theta_1 + 2r)\frac{\pi}{180}$ zatym, według warunków zadania

$\theta_1 : 60 = (\theta_1 + 2r)\frac{\pi}{180} : \pi$, stąd

$\theta_1 = \frac{\theta_1 + 2r}{3}$, czyli $\theta_1 = r$,

pierwsze z tych równań daje zatym

$\theta_1 + 2\theta_1 + 3\theta_1 = 180$, stąd

$\theta_1 = 30$, następnie $\theta_2 = 60$, $\theta_3 = 90$.

6). Znaleść miary kąta wielokąta foremnego o n bokach.

Wiadomo, że suma kątów wielokąta o n bokach równa się

$(n - 2)\,180^0$; jeden zatym kąt $= \frac{n-2}{n}\,180^0$,

miarą zaś teoretyczną tego kąta będzie

$$\frac{n-2}{n}\pi.$$

7). Wyrazić w obu miarach kąt, jaki tworzą dwie wskazówki na zegarze, gdy zegar pokazuje godzinę kwadrans na pierwszą.

Skoro wskazówki na zegarze poruszają się, z takiemi prędkościami, że, gdy obie wychodzą z godziny dwunastej, wskazówka większa przebiega cały okrąg koła, wskazówka zaś mniejsza $\frac{1}{12}$ część tegoż okręgu, to gdy wskazówki pokazują godzinę kwadrans na pierwszą, wskazówka większa przebiegła ćwierć okręgu koła, wskazówka mniejsza przebieży wtedy $\frac{1}{12}$ część ćwiartki okręgu koła, czyli innemi słowy, gdy wskazówka większa przebieży 90^0, wskazówka mniejsza przebieży $\frac{90^0}{12}$ czyli $7\frac{1}{2}^0$. Kąt więc, który wtedy tworzą z sobą wskazówki będzie $= 90^0 - 7\frac{1}{2}^0$ czyli $82\frac{1}{2}^0$. Miarą teoretyczną tego kąta będzie $\frac{82\frac{1}{2}}{180}\pi$ czyli $\frac{11}{24}\pi$.

11. W Trygonometryi przyjmujemy jako jednostkę kątów jednę lub drugą z powyżej opisanych jednostek; w pierwszym przypadku wyrażamy kąt w stopniach, minutach i sekundach, w drugim zaś liczbą oderwaną, równą stosunkowi łuku, odpowiadającego danemu kątowi do promienia koła; w tym ostatnim przypadku przyjmować będziemy nadal dla uproszczenia, że promień koła równa się jednostce długości.

RÓŻNE WIELKOŚCI KĄTÓW. KĄTY DODATNE I UJEMNE.

12. Kąty w Geometryi rozważane zazwyczaj nie są większe od dwu kątów prostych, w Trygonometryi zaś mamy do czynienia z kątami wszelkich wielkości, i dlatego po części inaczej je pojmujemy. Jeżeli wyobrazimy sobie liniją $X'X$, na niej punkt stały O i przypuścimy, że linija prosta wychodząc z położenia OA obraca się około punktu O w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek na zegarze, jak strzałka wskazuje, i przyjmie położenie OP, natenczas mówimy, że linije OA i OP tworzą z sobą kąt AOP, którego punkt O zowiemy wierzchołkiem, linije zaś OA i OP ramionami tegoż kąta. Kierunek OA przyjmować nadal będziemy zawsze jako to ramię kąta, od którego

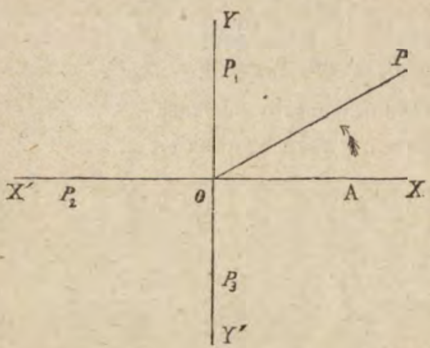

Fig. 4.

zaczynamy go rozważać, tak, iż nasz kąt AOP powstał wskutek obrotu prostej od położenia **początkowego** OA do położenia OP, nie zaś odwrotnie. Jeżeli taż linija ruchoma w dalszym swoim ruchu przyjmie takie położenie, że linija OP_1 będzie prostopadłą do linii OA, natenczas mówimy, że linije tworzą z sobą kąt prosty. Jeżeli linija ruchoma w dalszym swoim ruchu przyjmie położenie OP_2, wprost przeciwne kierunkowi OA, natenczas mówimy, że dwie linije proste tworzą z sobą dwa kąty proste czyli tak zwany kąt **półpełny**. Jeżeli znowu taż linija ruchoma w dalszym swoim ruchu przyjmie położenie OP_3 prostopadłe do OA i wprost przeciwne kierunkowi OP_1, mówimy, że dwie linije proste tworzą z sobą trzy kąty proste. Jeżeli wreszcie linija prosta w następnym swym ruchu przyjmie położenie pierwotne, mówimy, że dwie linije proste tworzą z sobą cztery kąty proste, czyli tak zwany kąt pełny.

Jeżeli linija prosta ruchoma, dopełniwszy obiegu, wróci do pierwotnego położenia, natenczas może w dalszym ciągu ruch odbywać i kilkakrotnie przechodzić przez toż samo położenie. Jeżeli więc linija prosta, po dokonanych obrotach, przyjmie, dajmy na to, położenie OP, natenczas przez kąt AOP będziemy rozumieli nie tylko kąt, jaki powstał wtedy, gdy linija ruchoma, wychodząc z położenia początkowego OA, doszła bezpośrednio do położenia OP, ale także wszystkie kąty, utworzone przez obrót tejże linii, która po dokonanych obrotach zajmie położenie OP. Jeżeli więc oznaczymy przez θ kąt, jaki powstał, gdy linija ruchoma, wyszedszy z położenia OA, przyszła bezpośrednio do położenia OP, nie przechodząc przez położenie OP_1, natenczas wszystkie kąty, jakie tworzą z sobą dwa kierunki OA i OP wyrażą się pewną ilością kątów pełnych zwiększoną o kąt θ; czyli, rozumiejąc przez θ zwykłą miarę kątów, wszystkie kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OP wyrażą się przez

$$360^\circ . n + \theta^\circ,$$

gdzie n oznacza ilość dokonanych obrotów; jeżeli zaś przez θ rozumieć będziemy miarę teoretyczną kąta, też kąty wyrażą się przez

$$2n\pi + \theta,$$

przyczym należy zauważyć, że w pierwszym przypadku θ oznacza ilość stopni kąta, w drugim zaś przypadku liczbę oderwaną.

13. Dla łatwiejszego wyrażania kątów, jakie dwa kierunki tworzyć mogą z sobą, poprowadźmy z punktu O (fig. 5) prostopadłą do OX i przedłużmy kierunki OA i OP_1 w strony wprost przeciwne, tym sposobem podzielimy płaszczyznę na cztery części, które nazywać będziemy ćwiartkami kąta pełnego i tak: część AOP_1 nazywać będziemy ćwiartką pierwszą, P_1OP_3 ćwiartką drugą, P_3OP_5 ćwiartką trzecią, wreszcie P_5OA ćwiartką czwartą. Jeżeli przez θ oznaczymy kąt

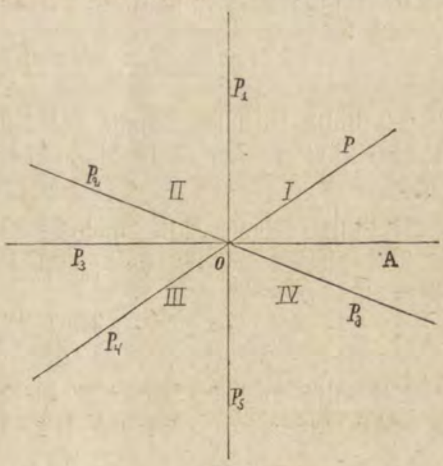

Fig. 5.

mniejszy od kąta prostego, w takim razie, według tego, co się powiedziało w poprzednim artykule, wszystkie kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OP, wyrażą się przez

$$2n\pi + \theta,$$

w ten więc sposób wyrażać się będą wszystkie kąty kończące się w pierwszej ćwiartce.

Jeżeli linija ruchoma po dokonanych obrotach zajmie położenie OP_2 w drugiej ćwiartce, i takie, że kąt $P_1 OP_2$, mniejszy od kąta prostego, jest $= \theta$, natenczas wszystkie kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OP_2, wyrażą się przez

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} + \theta = \left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi + \theta,$$

w ten więc sposób wyrażać się będą wszystkie kąty kończące się w drugiej ćwiartce. Jeżeli linija prosta po dokonanych obrotach zajmie położenie OP_4 w trzeciej ćwiartce, i takie, że kąt $P_3 OP_4$, mniejszy od kąta prostego, jest $= \theta$, natenczas wszystkie kąty, jakie linija ruchoma może utworzyć przez kilkakrotny obrót i zatrzymanie się w położeniu OP_4, wyrażą się przez

$$2n\pi + \pi + \theta = (2n+1)\pi + \theta.$$

Jeżeli wreszcie linija ruchoma zajmie położenie OP_6 w czwartej ćwiartce, i takie, że kąt $P_5 OP_6$, mniejszy od kąta prostego, jest $= \theta$, natenczas wszystkie kąty, jakie tworzyć mogą z sobą kierunki OA i OP_6, wyrażą się przez

$$2n\pi + \frac{3}{2}\pi + \theta = \left(\frac{4n+3}{2}\right)\pi + \theta.$$

Stąd, jako wniosek, dają się wyprowadzić następujące wielkości kątów: *a)* jeżeli linija ruchoma zajmie położenie OP_1 prostopadłe do OA, wszystkie kąty, jakie tworzą te kierunki wyrażą się przez

$$\frac{4n+1}{2}\pi.$$

b) jeżeli linija ruchoma zajmie położenie OP_3, przeciwległe kierunkowi OA, kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OP_3, wyrażą się przez

$$(2n+1)\pi,$$

c) jeżeli linija ruchoma zajmie położenie OP_5, prostopadłe do OA a wprost przeciwne kierunkowi OP_1, kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OP_5, wyrażą się przez

$$\frac{4n+3}{2}\pi,$$

d) jeżeli linija ruchoma wróci do pierwotnego położenia OA wszystkie kąty, jakie tworzą z sobą kierunki OA i OA, wyrażą się przez

$$2n\pi.$$

14. Jeżeli linija ruchoma dokonywa obrotu w kierunku odpowiadającemu ruchowi wskazówek na zegarze, czyli w kierunku przeciwnym strzałce (fig. 5), i zajmie położenie OP_6 w czwartej ćwiartce, natenczas mówimy, że dwa kierunki OA i OP_6 tworzą z sobą kąt ujemny, dla odróżnienia od kątów, utworzonych ruchem w kierunku strzałki, które uważać będziemy za dodatne. Jeżeli kąt AOP_1 oznaczymy przez θ, natenczas rozumując w podobny sposób, jak w artykule poprzedzającym, przyjdziemy do tego wniosku, że wszystkie kąty ujemne, jakie mogą tworzyć z sobą kierunki OA i OP_6, wyrażą się przez

$$-2n\pi-\theta.$$

Jeżeli linija ruchoma, po dokonanych obrotach zajmie, położenie w trzeciej ćwiartce, i takie, że kąt $P_5OP_4=\theta$ i zawsze mniejszy od kąta prostego, natenczas wszystkie kąty ujemne zakończone w trzeciej ćwiartce wyrażą się przez

$$-\frac{4n+1}{2}\pi-\theta.$$

Podobnież, wszystkie kąty ujemne, zakończone w drugiej ćwiartce, wyrażą się przez

$$-(2n+1)\pi-\theta,$$

zakończone zaś w pierwszej ćwiartce, wyrażą się przez

$$-\frac{4n+3}{2}\pi-\theta.$$

15. Opierając się na tym, że kąty rachowane w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek na zegarze są dodatne,. rachowane zaś w innym kierunku są ujemne, możemy kąt ujemny zakończony w pierwszej ćwiartce, uważać jako utworzony kilkakrotnym całkowitym obrotem w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, a następnie w kierunku przeciwnym na kąt θ, mniejszy od kąta prostego, tym sposobem wszystkie kąty ujemne, zakończone w pierwszej ćwiartce, możemy jeszcze wyrazić w kształcie

$$-2n\pi+\theta.$$

Rozumując w ten sam sposób, co do kątów ujemnych, zakończonych w innych ćwiartkach, i pamiętając o tym, cośmy mówili o kątach dodatnych, przychodzimy do wniosku, że

$$2n\pi+\theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, jest ogólnym wyrażeniem wszystkich kątów bąć dodatnych, bąć ujemnych, zakończonych w pierwszej ćwiartce; że

$$\frac{4n+1}{2}\pi+\theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, dodatną lub ujemną, jest ogólnym wyrażeniem wszystkich kątów, bąć dodatnych, bąć ujemnych, zakończonych w drugiej ćwiartce; że

$$(2n+1)\pi+\theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, dodatną lub ujemną, jest ogólnym wyrażeniem wszystkich kątów, bąć dodatnych, bąć ujemnych, zakończonych w trzeciej ćwiartce; i że wreszcie

$$\frac{4n+3}{2}\pi+\theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, jest ogólnym wyrażeniem wszystkich kątów, bąć dodatnych, bąć ujemnych, zakończonych w czwartej ćwiartce.

We wszystkich tych wzorach przez θ rozumimy kąt dodatny, mniejszy od kąta prostego.

DOPEŁNIENIE I SPEŁNIENIE KĄTA.

16. Jeżeli suma algiebraiczna dwu kątów jest równa kątowi prostemu, mówimy, że dwa kąty są d o p e ł n i a j ą c e m i s i ę i każdy z nich jest d o p e ł n i e n i e m pozostałego. Jeżeli więc oznaczymy przez x miarę teoretyczną kąta, wtedy dopełnieniem tego kąta będzie

$$\frac{\pi}{2}-x,$$

jeżeli zaś x oznaczać będzie zwykłą miarę kąta w stopniach, natenczas dopełnieniem tego kąta będzie

$$90^0-x.$$

Jeżeli kąt AOP jest mniejszy od kąta prostego, natenczas jego dopełnieniem będzie kąt POB (fig. 6), jeżeli zaś kąt AOP_1 jest większy od kąta prostego, natenczas jego dopełnieniem będzie kąt ujemny — BOP_1. Przypuśćmy, że mamy jakikolwiek kąt zakończony np. w drugiej ćwiartce. Niech końcowym ramieniem tego kąta będzie OP_1, starajmy się znaleść dopełnienie tego kąta, to jest taki kąt, aby po dodaniu go do kąta danego mieć kąt prosty. Kąt zakończony w drugiej ćwiartce wyraża się, jak wiadomo, przez

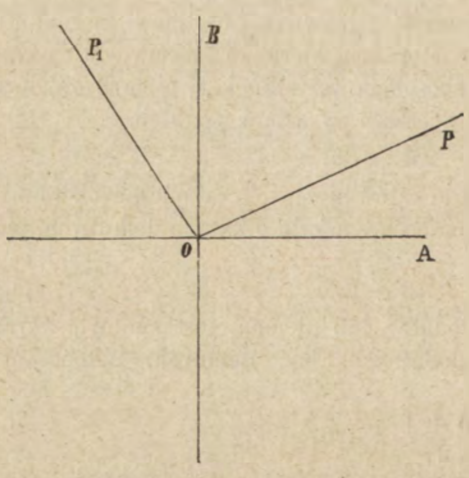

Fig. 6.

$$\frac{4n+1}{2}\pi+\theta,$$

gdzie θ oznacza miarę teoretyczną kąta mniejszego od kąta prostego, mianowicie $\theta = BOP_1$. Jeżeli ramię końcowe tego kąta OP_1 weźmiemy za ramię początkowe kąta dopełnienia i kierunki dodatne i ujemne tegoż kąta przyjmiemy teżsame co i dla kąta danego, natenczas dopełnieniem kąta, zakończonego w drugiej ćwiartce będzie

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4n+1}{2}\pi - \theta, \text{ czyli}$$

$$x = -2n\pi - \theta.$$

Widzimy więc że ramieniem końcowym kąta danego będzie wtedy kierunek OB. Podobnie rzecz się będzie miała dla kątów, zakończonych w innych ćwiartkach, zatym: *jeżeli ramię końcowe kąta danego weźmiemy za ramię początkowe kąta dopełnienia, natenczas ramieniem końcowym kąta dopełnienia będzie zawsze kierunek prostopadłej, poprowadzonej z wierzchołka kąta danego do ramienia początkowego kąta, a czyniącej z tymże ramieniem początkowym kąt prosty.*

17. Jeżeli suma algiebraiczna dwu kątów jest równa dwu kątom prostym mówimy, że dwa kąty są spełniającemi się i każdy z nich jest spełnieniem pozostałego. Gdy więc przez x oznaczymy miarę teoretyczną kąta, wtedy spełnienie tego kąta wyrazi się przez

$$\pi - x;$$

gdy zaś x oznacza miarę zwykłą kąta, wyrażoną w stopniach, wtedy spełnienie tego kąta wyrazi się przez

$$180^0 - x:$$

Jeżeli kąt AOP jest mniejszy od dwu kątów prostych, natenczas jego speł-

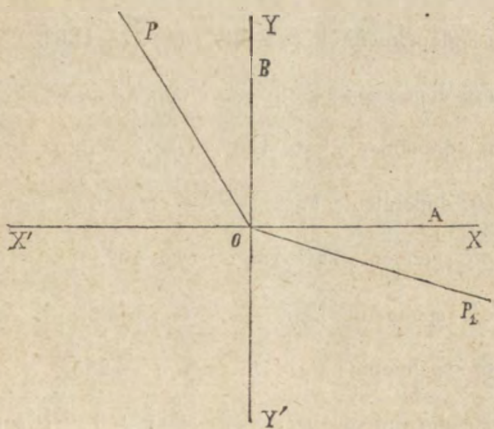

Fig. 7.

nieniem będzie kąt POX', jeżeli zaś dany kąt jest większy od dwu kątów prostych, jego spełnieniem będzie kąt ujemny. Przypuśćmy, że mamy jakikolwiek kąt, zakończony np. w czwartej ćwiartce i niech ramieniem końcowym tego kąta będzie OP_1 (fig. 7), natenczas, jeżeli przez θ oznaczymy kąt $Y'OP_1$ mniejszy od kąta prostego, wszystkie kąty mające końcowe ramię OP_1, wyrażą się, jak wiadomo, przez

$$\frac{4n+3}{2}\pi+\theta.$$

Starajmy się znaleść spełnienie tego kąta. Jeżeli ramię OP_1 weźmiemy za ramię początkowe kąta spełnienia, a kierunki dodatne i ujemne dla tego kąta będziemy brali te same, co dla kąta danego, wtedy spełnienie kąta danego, zakończonego w czwartej ćwiartce znajdziemy ze wzoru

$$x=\pi-\frac{4n+3}{2}\pi-\theta$$

czyli

$$x=-2n\pi-\frac{\pi}{2}-\theta,$$

który pokazuje, że wtedy ramieniem końcowym kąta spełnienia będzie kierunek OX'.

Podobnie rzecz się będzie miała dla każdego kąta, zakończonego w którejkolwiek ćwiartce. Zatym, *jeżeli ramię końcowe kąta danego weźmiemy za ramię początkowe kąta spełnienia, natenczas ramieniem końcowym kąta spełnienia będzie zawsze kierunek wprost przeciwny kierunkowi ramienia początkowego kąta danego.*

PRZYKŁADY.

1) Znaleść dopełnienie kąta 245^0. *Odp.* -155^0.

2) Znaleść dopełnienie kąta $\frac{\pi}{8}$. *Odp.* $\frac{3}{8}\pi$.

3) Znaleść dopełnienie kąta 415^0. *Odp.* -325^0.

4) Znaleść dopełnienie kąta $\frac{2n+1}{2}\pi$. *Odp.* $-n\pi$.

5) Znaleść spełnienie kąta 135^0. *Odp.* 45^0.

6) Znaleść spełnienie kąta $\frac{\pi}{4}$. *Odp.* $\frac{3}{4}\pi$.

7) Znaleść spełnienie kąta 415^0. *Odp.* -235^0.

8) Znaleść dopełnienie kąta $\frac{4n+3}{2}\pi+\theta$. *Odp.* $-(2n+1)\pi-\theta$.

9) Znaleść spełnienie kąta $\frac{4n+3}{2}\pi - \theta$. *Odp.* $-\frac{4n+1}{2}\pi + \theta$.

10) Znaleść spełnienie kąta $\frac{4n+3}{2}\pi$. *Odp.* $-\frac{4n+1}{2}\pi$.

SPÓŁRZĘDNE PUNKTU NA PŁASZCZYŹNIE.

18. Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie dwie linije proste, przecinające się pod kątem prostym i przedłużone nieograniczenie w obie strony, jednę z tych linij przyjmijmy za poziomą, druga przeto będzie miała kierunek pionowy. Jeżeli na tej samej płaszczyźnie weźmiemy punkt P, natenczas położenie tego punktu względem dwu prostych będzie oznaczone, skoro będziemy znali odległości PM i PN tegoż punktu od tych prostych; albowiem jeżeli odetniemy na linijach OX i OY odpowiednio OM=NP i ON=MP, a następnie wyprowadzimy z punktu M równoległą do OY, a z punktu M równoległą do OX, to te dwie linije przetną się w punkcie P, który właśnie będzie tym punktem, którego odległościami od linij OX i OY są PM i PN. Otóż, odległości PM i PN punktu na płaszczyźnie od dwu prostych danych nazywamy s p ó ł r z ę d n e m i p u n k t u, linije proste OX i OY zowiemy o s i a m i s p ó ł r z ę d n y c h, punkt zaś ich przecięcia p o c z ą t k i e m u k ł a d u s p ó ł r z ę d n y c h. Ponieważ linije OX i OY są prostopadłe względem siebie, przeto mówimy także, że punkt jest odniesiony do układu prostokątnego, czyli te spółrzędne są prostokątne.

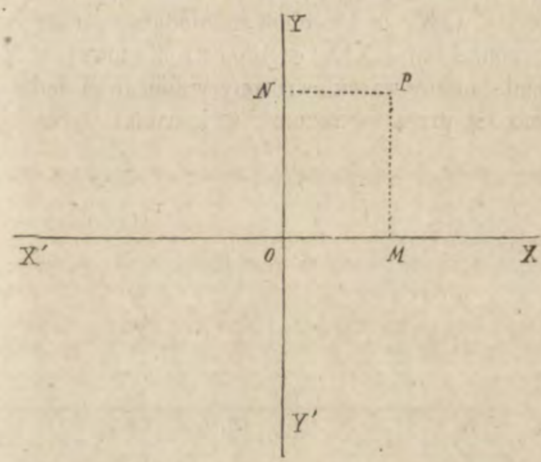

Fig 8

Spółrzędną na osi OX nazywamy o d c i ę t ą, spółrzędną na osi OY r z ę d n ą albo p r z y s t a w ą danego punktu. Odciętą oznaczać będziemy przez x, rzędną zaś przez y. Odpowiednio do tego, osi spółrzędne nazywamy: pierwszą osią odciętych, lub często osią x-ów, drugą zaś osią rzędnych, lub często osią y-ów.

19. Ponieważ punkt na płaszczyźnie może zajmować cztery różne położenia względem osi spółrzędnych, niezmieniając swej od nich odległości, przeto dla wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie nie dostateczną jest znajomość odległości punktu od osi spółrzędnych, ale potrzebnym jest jeszcze wskazanie kierunku, w jakim te odległości mają być liczone.

Ażeby określić kierunek spółrzędnych należy uważać każdą z osi, jako złożoną z dwu części, które wychodzą z punktu O, w dwu kierunkach wprost sobie przeciwnych. Jeżeli jeden z tych kierunków przyjmiemy jako dodatny, drugi należy przyjąć jako ujemny; tym sposobem i spółrzędne punktu będą dodatne, lub ujemne, stosownie do tego, czy ich kierunki, wzięte od początku układu spółrzędnych będą odpowiadać kierunkom osi przyjętym, jako dodatne, lub jako ujemne.

Za kierunek dodatny osi odciętych, którą przyjęliśmy za liniję poziomą, bierze się pospolicie ten, który wychodzi z O od lewej ku prawej ręce t. j. OX, za kierunek zaś dodatny osi rzędnych bierze się ten, który leży ponad liniją X′X, czyli po stronie lewej osi X′X, gdy, stojąc na płaszczyźnie, mamy wzrok zwrócony w kierunku dodatnym osi X′X to jest OY. Samo się przez się rozumi, że kierunki wprost przeciwne uważać należy

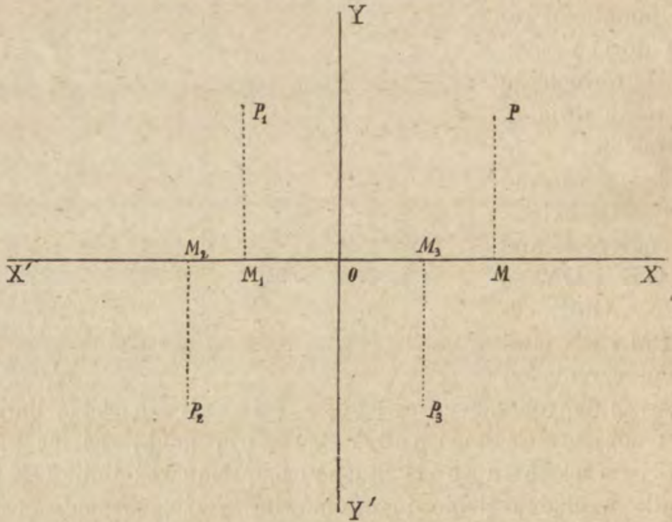

Fig. 9.

za ujemne. Przez osi spółrzędnych płaszczyzna rozdzieloną zostaje na cztery ćwiartki, które nazywać będziemy ćwiartką pierwszą, drugą, trzecią i czwartą układu spółrzędnych, odpowiednio do wprowadzonych powyżej ćwiartek kąta pełnego.

Jeżeli więc punkt P znajdować się będzie w pierwszej ćwiartce układu spółrzędnych XOY, rzędna i odcięta będą dodatne; jeżeli punkt P_1 znajdować się będzie w drugiej ćwiartce YOX', rzędna będzie dodatna, odcięta zaś ujemna; jeżeli punkt P_2 znajdować się będzie w trzeciej ćwiartce X'OY', rzędna i odcięta będą ujemne; nareszcie, jeżeli punkt P_3 znajdować się będzie w czwartej ćwiartce Y'OX, rzędna będzie ujemna, odcięta zaś dodatna i naodwrót, jeżeli rzędna i odcięta będą dodatne, punkt znajdować się będzie w pierwszej ćwiartce, jeżeli rzędna dodatna, a odcięta ujemna, punkt znajdować się będzie w drugiej ćwiartce i t. d.

Z tego, co się powiedziało wypada, że każdy punkt na płaszczyźnie ma spółrzędne ściśle oznaczone i że dwie liczby rzeczywiste wyznaczają w zupełności położenie punktu na płaszczyźnie. Jako wniosek z definicyi spółrzędnych możemy wyprowadzić ten: że, jeżeli punkt znajduje się na osi odciętych, to jego rzędną jest zero, i że wszystkie punkty, których rzędna jest zerem, leżą na osi odciętych; że, jeżeli punkt znajduje się na osi rzędnych, to jego odcięta jest zerem i że wszystkie punkty, których odcięta jest równa zeru, leżą na osi rzędnych; wreszcie, że obie spółrzędne początku układu są równe zeru i naodwrót, jeżeli rzędna i odcięta punktu są równe zeru, ten punkt jest początkiem układu spółrzędnych.

PRZYKŁADY.

Oznaczyć położenie punktu na płaszczyźnie, gdy jego spółrzędnemi są:

1) $x = +4, \quad y = -3.$
2) $x = +4, \quad y = +3.$
3) $x = -4, \quad y = +3.$
4) $x = -4, \quad y = -3.$

POJĘCIE FUNKCYJ I LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

20. Niech będzie kąt XOL (fig. 10), który oznaczmy przez θ; jedno z jego ramion weźmy za oś odciętych, wierzchołek za początek układu, a prostopadłą w wierzchołku do ramienia OX, za oś rzędnych.

Jeżeli na drugim ramieniu kąta obierzemy jakikolwiek punkt P, i poprowadzimy rzędną, utworzy nam się trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątną będzie odległość punktu P od początku układu spółrzędnych, a pozostałe boki trójkąta będą przedstawiały, co do wartości bezwzględnej, spółrzędne punktu danego.

Prostą OP, która przedstawia odległość punktu P od początku układu, zawsze uważać będziemy za wielkość bezwzględną, oznaczymy tę odległość przez l. Między temi trzema wielkościami x, y, l, możemy rozważać stosunki każdych dwu z nich; tych stosunków będzie sześć, mianowicie:

$$\frac{y}{l}, \ \frac{x}{l}, \ \frac{y}{x}, \ \frac{x}{y}, \ \frac{l}{x}, \ \frac{l}{y};$$

one oczywiście, jako stosunki dwu odcinków, przedstawiają liczby oderwane, które mogą być dodatne lub ujemne, zależnie od tego, jakiemi są x i y.

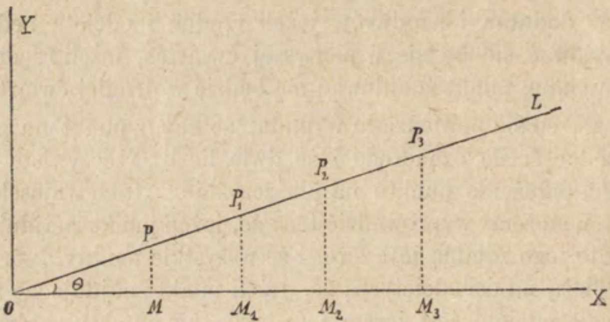

Fig. 10*a*.

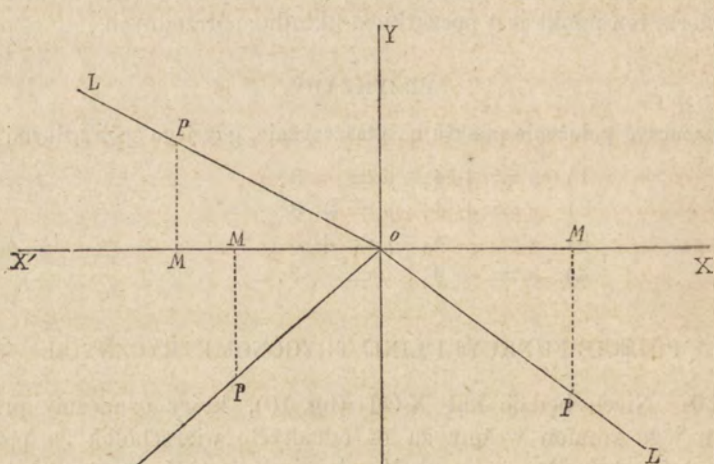

Fig 10*b*.

Ponieważ z podobieństwa trójkątów POM, P_1OM_1, P_2OM_2,... wynika, że

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{P_2M_2}{OP_2} = \ldots$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{OM_2}{OP_2} = \ldots$$

. . . .

przeto wartości tych stosunków nie zależą od punktu P, dowolnie obranego na ramieniu końcowym kąta, czyli, że dla danego kąta są one stałe. Z tych stosunków: stosunek $\frac{y}{l}$ to jest, stosunek rzędnej do odległości zowiemy wstawą kąta θ (sinus); stosunek $\frac{x}{l}$ t. j. stosunek odciętej do odległości zowiemy dostawą kąta θ (cosinus); stosunek $\frac{y}{x}$ t. j. stosunek rzędnej do odciętej zowiemy styczną kąta θ (tangens); stosunek $\frac{x}{y}$ t. j. stosunek odciętej do rzędnej zowiemy dostyczną kąta θ (cotangens); stosunek $\frac{l}{x}$ t. j. stosunek odległości do odciętej zowiemy sieczną kąta θ (secans); wreszcie, stosunek $\frac{l}{y}$ t. j. stosunek odległości do rzędnej zowiemy dosieczną kąta θ (cosecans). Zatym, *jeżeli wierzchołek kąta weźmiemy za początek układu, a jedno z jego ramion za oś odciętych, natenczas*:

1) liczbę, wyrażającą stosunek rzędnej jakiegokolwiek punktu, położonego na ramieniu końcowym kąta, do odległości tegoż punktu od początku układu, nazywamy wstawą kąta danego;

2) liczbę, wyrażającą stosunek odciętej jakiegokolwiek punktu, położonego na ramieniu końcowym kąta do odległości tegoż punktu od początku układu, nazywamy dostawą kąta danego;

3) liczbę, wyrażającą stosunek rzędnej jakiegokolwiek punktu, położonego na ramieniu końcowym kąta, do odciętej tegoż punktu, nazywamy styczną kąta danego;

4) liczbę, wyrażającą stosunek odciętej jakiegokolwiek punktu, położonego na ramieniu końcowym kąta do rzędnej tegoż punktu, nazywamy dostyczną kąta danego;

5) liczbę, wyrażającą stosunek odległości jakiegokolwiek punktu, położonego na ramieniu końcowym kąta od początku układu do odciętej tegoż punktu, nazywamy sieczną kąta danego;

6) liczbę, wyrażającą stosunek odległości jakiegokolwiek punktu położonego na ramieniu końcowym kąta od początku układu do rzędnej tegoż punktu, nazywamy dosieczną kąta danego.

Z zestawienia z sobą stosunków powyżej przytoczonych, wprost wynika, że trzy ostatnie stosunki są odwrotnościami trzech pierwszych stosunków, z tych powodów, dostyczną, sieczną i dosieczną kąta danego, możemy jeszcze określić w ten sposób: *dostyczna kąta danego jest odwrotnością jego stycznej*; *sieczna kąta danego jest odwrotnością jego dostawy; dosieczna kąta danego jest odwrotnością jego wstawy.*

Zauważyć jeszcze możemy, że gdy dany jest kąt, natenczas jego wstawa, dostawa i t. d. są dokładnie oznaczone, t. j że danemu kątowi odpowiada jedna tylko wstawa, jedna tylko dostawa i t. d.

Z tego względu, stosunki te odgrywają ważną rolę przy mierze kątów i dlatego otrzymały oddzielne nazwy. Ogólnie te stosunki nazywać będziemy funkcyjami kołowemi albo goniometrycznemi alboteż funkcyjami trygonometrycznemi kąta.

Badanie własności funkcyj trygonometrycznych i związków, jakie między niemi zachodzą, stanowi główny przedmiot Trygonometryi. Niektórzy autorowie tę część Trygonometryi, która zajmuje się własnościami funkcyj trygonometrycznych i związków między niemi zachodzących, nazywają Goniometryją, a zastosowanie funkcyj trygonometrycznych do rowiązywania trójkątów, nazywają właściwą Trygonometryją; my jednak tego podziału uwzględniać nie będziemy.

21. Oprócz, powyżej określonych funkcyj trygonometrycznych, wprowadzane są jeszcze dwie funkcyje trygonometryczne, mianowicie wstawa odwrotna kąta (sinus versus) i dostawa odwrotna kąta (cosinus versus). Pierwsza jest różnicą między jednością i dostawą kąta t. j. 1 — cosinus, druga zaś różnicą między jednością i wstawą kąta t. j. 1 — sinus; z uwagi jednak, że obie te funkcye nie przedstawiają wielkiego użytku w nauce, mówić o nich szczegółowo nie będziemy.

22. Jeżeli oznaczymy przez θ dany kąt, to dla oznaczenia funkcyj trygonometrycznych tego kąta t. j. wstawy (sinus), dostawy (cosinus), stycznej (tangens), dostycznej (cotangens), siecznej (secans), dosiecznej (cosecans), używać będziemy następujących skróceń:

$$\sin\theta,\ \cos\theta,\ \mathrm{tg}\,\theta,\ \mathrm{cotg}\,\theta,\ \sec\theta,\ \mathrm{cosec}\,\theta,$$

a więc

$$(1)\qquad \begin{gathered} \sin\theta = \frac{y}{l},\quad \cos\theta = \frac{x}{l},\quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}, \\ \mathrm{cotg}\,\theta = \frac{x}{y},\quad \sec\theta = \frac{l}{x},\quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{l}{y}. \end{gathered}$$

23. Ponieważ każdy kąt wyrażamy bąć w stopniach, bąć w mierze teoretycznej, która jest liczbą oderwaną, to i odpowiednie znakowanie wprowadzamy do oznaczenia funkcyj trygonometrycznych kąta i tak, np. wstawę kąta, który ma za miarę łuk koła, zakreślony z wierzchołka kąta, między jego ramionami, a równy promieniowi koła, który to kąt, jak wiadomo, wynosi $57^0, 17', 44''_{806}$, oznaczymy, w mierze zwykłej przez

$$\sin\,(57^0\ 17'\ 44'',_{806}),$$

w mierze zaś teoretycznej przez

$$\sin 1.$$

W ogólności, jeżeli mamy kąt podany w mierze teoretycznej, np. m, wstawę jego oznaczymy przez $\sin m$, (gdzie m jest liczbą jakąkolwiek) i przez nią rozumieć będziemy wstawę takiego kąta, który ma za miarę łuk koła, zakreślonego z wierzchołka jako środka, a zawarty między jego ramionami, który równa się m promieniom tegoż koła.

24. Ponieważ rzędna punktu jest dodatna w pierwszej i drugiej ćwiartce układu, ujemna zaś w trzeciej i czwartej ćwiartce, odcięta zaś jest dodatna w pierwszej i czwartej ćwiartce układu, ujemna zaś w ćwiartkach drugiej i trzeciej, przeto przypatrując się wzorom (1) art. 22-go, widzimy; 1) że, jeżeli ramię końcowe kąta danego znajduje się w pierwszej ćwiartce układu, natenczas wszystkie funkcyje trygonometryczne są dodatne; 2) że, jeżeli ramię końcowe kąta danego znajduje się w drugiej ćwiartce układu, natenczas wstawa i dosieczna są dodatne, pozostałe zaś funkcyje trygonometryczne są ujemne; 3) że, jeżeli ramię końcowe kąta danego znajduje się w trzeciej ćwiartce układu, natenczas styczna i dostyczna są dodatne, pozostałe funkcyje trygonometryczne są ujemne; 4) że, jeżeli ramię końcowe kąta danego znajduje się w czwartej ćwiartce układu, natenczas dostawa i sieczna są dodatne, pozostałe zaś funkcyje trygonometryczne są ujemne.

Wnioski te dają się schematycznie przedstawić w sposób następujący:

Funkcyje	w I-ej ćwiartce	w II-ej ćwiartce	w III-ej ćwiartce	w IV-ej ćwiartce
wstawa	+	+	—	—
dostawa	+	—	—	+
styczna	+	—	+	—
dostyczna	+	—	+	—
sieczna	+	—	—	+
dosieczna	+	+	—	—

Z tego się jasno pokazuje: 1) że, jeżeli wstawa pewnego kąta jest dodatna, kąt a raczej ramię końcowe kąta, znajduje się w pierwszej lub drugiej ćwiartce, jeżeli zaś wstawa jest ujemna kąt znajduje się w trzeciej lub czwartej ćwiartce; 2) że, jeżeli dostawa jest dodatna, kąt znajduje się w pierwszej lub czwartej ćwiartce, jeżeli zaś jest ujemna kąt znajduje się w drugiej lub trzeciej ćwiartce; 3) że, jeżeli styczna jest dodatna kąt znajduje się w pierwszej lub trzeciej ćwiartce, jeżeli zaś styczna jest ujemna, kąt znajduje się w drugiej lub czwartej ćwiartce i t. d.

25. Jeżeli na figurze (art. 20), na której kąt XOL nazwaliśmy θ, rozważać będziemy kąty $2\pi+\theta$, $4\pi+\theta, \ldots$, w ogóle $2n\pi+\theta$ i na końcowym ramieniu OL, każdego z tych kątów, obierzemy tensam punkt P, to zawsze mieć będziemy teżsame wielkości x, y, l, tak, iż

$$\sin(2\pi+\theta)=\frac{y}{l},\ \sin(4\pi+\theta)=\frac{y}{l},\ldots,\sin(2n\pi+\theta)=\frac{y}{l},$$

wskutek tego według wzorów (1) art. 22-go,

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta,\ \sin(4\pi+\theta)=\sin\theta,\ldots.$$

w ogóle

(1) $$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta.$$

Jeżeli w tym wzorze wprowadzimy oznaczenie

$$2n\pi+\gamma=\theta,$$

otrzymamy

$$\sin(2n\pi+\gamma)=\sin\theta,$$

na mocy zaś wzoru (1)

$$\sin(2n\pi+\gamma)=\sin\gamma,$$

stąd $$\sin\gamma=\sin\theta,$$

a że $$\gamma=-2n\pi+\theta,$$

(2) przeto $$\sin(-2n\pi+\theta)=\sin\theta.$$

Oba te wzory możemy ująć w jeden

(3) $$\sin(\pm 2n\pi+\theta)=\sin\theta.$$

Podobnież rozumując, przyszlibyśmy do wzorów:

(4) $$\cos(\pm 2n\pi+\theta)=\cos\theta,$$

(5) $$\operatorname{tg}(\pm 2n\pi+\theta)=\operatorname{tg}\theta,$$

(6) $$\operatorname{cotg}(\pm 2n\pi+\theta)=\operatorname{cotg}\theta,$$

(7) $$\sec(\pm 2n\pi+\theta)=\sec\theta,$$

(8) $$\operatorname{cosec}(\pm 2n\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta.$$

Widzimy zatym, że wartości funkcyj trygonometrycznych pewnego kąta pozostają teżsame, gdy do niego dodamy lub też od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych.

26. Wiemy, że funkcyje trygonometryczne są liczbami oderwanemi. Jak każdą liczbę oderwaną, tak i funkcyje trygonometryczne możemy przedstawić gieometrycznie zapomocą długości pewnych odcinków, umówiwszy się co do wyboru jednostki. Jeżeli promieniem równym jednostce, zakreślimy z wierzchołka kąta danego θ okrąg koła (fig. 11), który przetnie ramiona kąta danego w punktach A i B, prostopadłą zaś poprowadzoną z wierzchołka do ramienia OA, przetnie w punkcie C, natenczas, jeżeli z punktu B spuścimy prostopadłe BD i BE na OA i OC, z punktów A i C poprowadzimy styczne do okręgu koła aż do przecięcia się z przedłużeniem linii OB w punktach F i G, nadto w punkcie B styczną do okrę-

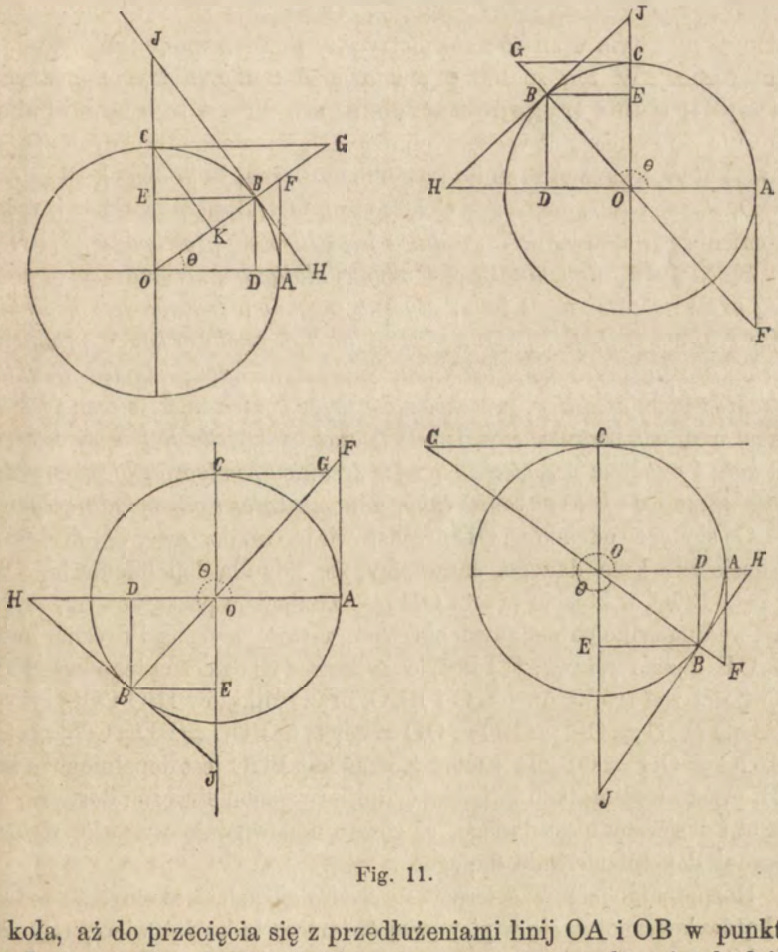

Fig. 11.

gu koła, aż do przecięcia się z przedłużeniami linij OA i OB w punktach H i J; na zasadzie definicyi funkcyi trygonometrycznych, mieć będziemy

$$\sin\theta = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} = BD,$$
$$\cos\theta = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{1} = OD,$$
$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{BD}{OD} = \frac{AF}{OA} = \frac{AF}{1} = AF,$$
$$\mathrm{cotg}\,\theta = \frac{OD}{BD} = \frac{EB}{OE} = \frac{CG}{OC} = \frac{CG}{1} = CG,$$
$$\sec\theta = \frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA} = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} = OH,$$
$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{OB}{BD} = \frac{OB}{OE} = \frac{OG}{OC} = \frac{OI}{1} = OI,$$

otrzymujemy zatym w sposób gieometryczny przedstawione funkcyje trygonometryczne. W ten sposób przedstawione funkcyje trygonometryczne zowiemy linijami trygonometrycznemi. Temi to właśnie linijami wyłącznie się zajmowano w dawnych dziełach trygonometrycznych. Zatym, wstawą kąta θ, uważaną za liniją trygonometryczną, jest odcinek BD, dostawą OD, styczną AF, dostyczną CG, sieczną OH, dosieczną OI t. j. w kole o promieniu równym jedności: *wstawa jest długością prostopadłej, spuszczonej z końca łuku, danemu kątowi odpowiadającego, na średnicę, przechodzącą przez początek tegoż łuku; styczna trygonometryczna jest odcinkiem stycznej gieometrycznej, poprowadzonej do tegoż koła w końcu promienia, przechodzącego przez początek łuku, zawartym między tymże punktem, a przedłużeniem średnicy, przechodzącej przez koniec łuku; sieczna jest odcinkiem średnicy, poprowadzonej przez początek łuku, zawartym między środkiem koła i punktem przecięcia się tejże średnicy ze styczną gieometryczną, poprowadzoną do koła w końcu łuku, danemu kątowi odpowiadającego.*

Co się tyczy odcinków: OD przedstawiającego dostawę, CG dostyczną, OI dosieczną kąta danego, zauważmy, że, gdy dla dopełnienia kąta θ to jest kąta BOC, w którym prosta OB jest ramieniem początkowym, wykreślimy, według tylko co podanych określeń, wstawę, styczną i sieczną, natenczas, CK będzie wstawą, BJ będzie styczną, a OG sieczną tego kąta BOC. Z równości zaś trójkątów CKO i BEO, oraz trójkątów IBO i OCG wypada, że $\sin BOC = CK = BE = OD = \cos\theta$; $\mathrm{tg}\,BOC = BI = CG = \mathrm{cotg}\,\theta$; $\sec BOC = OG = OI = \mathrm{cosec}\,\theta$. Że zaś kąt BOC jest dopełnieniem kąta AOB, przeto według tych związków, linije trygonometryczne dostawa, dostyczna i dosieczna kąta danego, są równe odpowiednio wstawie, stycznej i siecznej dopełnienia kąta danego.

Rozpatrując się w czterech naszych figurach, widzimy: że wstawy BD kątów kończących się w pierwszej ćwiartce, które jak wiemy (art. 24), są dodatne, przedstawione są przez proste nad średnicą poziomą, zaś ujemne vstawy (kątów, zakończonych w trzeciej i czwartej ćwiartce), przez proste pod tąż średnicą, że styczne AF dodatne (kątów, zakończonych w pierwszej i trzeciej ćwiartce) są nad średnicą poziomą, zaś ujemne (kątów, zakończonych w drugiej i czwartej ćwiartce) znajdują się pod nią, a wszystkie przechodzą przez początek A; że sieczne OH dodatne (kątów, zakończonych w pierwszej i czwartej ćwiartce) przypadają na średnicy poziomej z prawej strony średnicy pionowej, zaś ujemne (kątów, zakończonych w drugiej i trzeciej ćwiartce) znajdują się po lewej stronie średnicy pionowej, a zawsze liczą się od środka koła; że dostawy OD dodatne (kątów, zakończonych w pierwszej i czwartej ćwiartce) przypadają z prawej strony średnicy pionowej, dostawy zaś ujemne (kątów zakończonych w drugiej i trzeciej ćwiartce), z lewej strony tejże średnicy; że dostyczne CG dodatne (kątów, zakończonych w pierwszej i trzeciej ćwiartce) przypadają z prawej strony średnicy pionowej, ujemne zaś (kątów, zakończonych w drugiej i czwartej ćwiartce) z lewej strony tejże średnicy; że dosieczne OI dodatne (kątów, zakończonych w pierwszej i drugiej ćwiartce) przypadają na średnicy pionowej w jej kierunku dodatnym t. j. nad średnicą poziomą, dosieczne zaś ujemne (kątów, zakończonych w trzeciej i czwartej ćwiartce) przypadają w kierunku ujemnym średnicy pionowej czyli pod średnicą poziomą, a zawsze liczą się od środka koła.

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW DOPEŁNIAJĄCYCH SIĘ.

27. Niech będzie kąt LOX, który oznaczmy przez θ, (fig. 12), bąć w stopniach, bąć w mierze teoretycznej wyrażony, natenczas kąt LOY, mający początkowe ramię OL, a końcowe ramię OY, jakto widzieliśmy w art. 16-ym, będzie dopełnieniem kąta danego i wyrazi się przez $90^0 - \theta$ lub $\frac{\pi}{2} - \theta$. Jeżeli liniją OL weźmiemy za ramię początkowe kąta, a OY za ramię końcowe, natenczas biorąc na linii OY taki punkt Q, aby $OQ = OP$, na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych art. 20, będziemy mieli

$$\sin LON = \frac{RQ}{OQ},$$

$$\cos LON = \frac{OR}{OQ},$$

$$\operatorname{tg} LON = \frac{RQ}{OR},$$

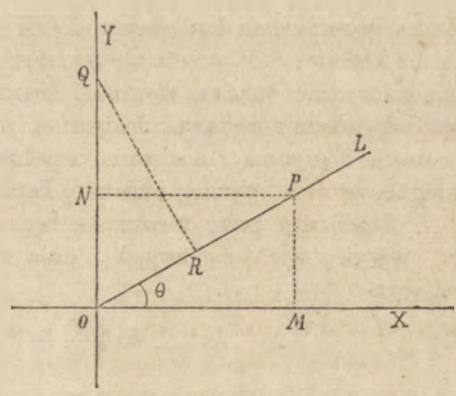

Fig. 12.

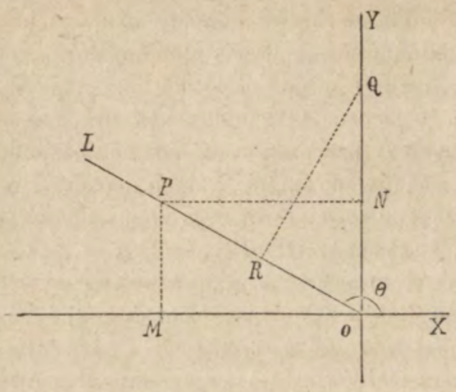

Fig. 12a.

$$\operatorname{cotg} LON = \frac{OR}{RQ},$$

$$\sec LON = \frac{OQ}{OR},$$

$$\operatorname{cosec} LON = \frac{OQ}{RQ},$$

że zaś z równości trójkątów OQR i OPN, mamy $RQ = NP = OM = x$, $OR = ON = MP = y$, nadto z założenia $OQ = ON = l$, przeto mieć będziemy

$$\sin LON = \frac{x}{l} = \cos\theta,$$

$$\cos LON = \frac{y}{l} = \sin\theta,$$

$$\operatorname{tg} LON = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\theta,$$

$$\operatorname{cotg} LON = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta,$$

$$\sec LON = \frac{l}{y} = \operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec} LON = \frac{l}{x} = \sec\theta.$$

Że zaś dopełnieniem kąta danego LOX jest kąt, mający początkowe ramię OL, a końcowe OY, przeto z powyższych wzorów wynika, że funkcyje trygonometryczne: wstawa, styczna i sieczna dopełnienia kąta danego są równe odpowiednio dostawie, dostycznej i dosiecznej kąta danego, i naodwrót, dostawa, dostyczna i dosieczna dopełnienia kąta danego są równe odpowiednio wstawie, stycznej i siecznej kąta danego.

Jeżeli więc przez θ rozumieć będziemy miarę teoretyczną kąta danego, powyżej wyrażone związki, dają się przedstawić w kształcie następującym:

(1) $$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,$$

(2) $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,$$

(3) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cotg}\theta,$$

(4) $$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta,$$

(5) $$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,$$

(6) $$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta;$$

jeżelibyśmy zaś przez θ rozumieli zwykłą miarę w stopniach, powyższe związki dadzą się przedstawić w kształcie następującym

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta,$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ-\theta)=\operatorname{cotg}\theta,$$
$$\operatorname{cotg}(90^\circ-\theta)=\operatorname{tg}\theta,$$
$$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta.$$

PRZYKŁADY.

1) $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$.

2) $\cos\frac{\pi}{8}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{3}{8}\pi$.

3) $\sin 18^\circ=\cos(90^\circ-18^\circ)=\cos 72^\circ$.

4) $\cos 45^\circ=\sin(90^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ$.

5) $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi\right)=\operatorname{cotg}\frac{1}{8}\pi$.

6) $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

7) $\operatorname{tg}65^\circ 15'=\operatorname{tg}(90^\circ-24^\circ 45')=\operatorname{cotg}24^\circ 15'$.

8) $\operatorname{cotg}84^\circ 10'=\operatorname{tg}(90^\circ-84^\circ 10')=\operatorname{tg}5^\circ 50'$.

9) $\sec\frac{\pi}{8}=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\pi\right)=\operatorname{cosec}\frac{3}{8}\pi$.

10) $\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{8}=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi\right)=\sec\frac{\pi}{8}$.

11) $\sec 48^\circ=\operatorname{cosec}(90^\circ-48^\circ)=\operatorname{cosec}42^\circ$.

12) $\operatorname{cosec}15^\circ=\sec(90^\circ-15^\circ)=\sec 75^\circ$.

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW SPEŁNIAJĄCYCH SIĘ.

28. Niech będzie kąt LOX (fig. 13), który oznaczmy przez θ, bąć w stopniach, bąć w mierze teoretycznej wyrażony, natenczas spełnieniem tego kąta, jakto widzieliśmy w art. 17-ym, będzie kąt, mający początkowe ramię OL, końcowe zaś OX′ i wyrazi się przez $\pi - \theta$ lub $180^0 - \theta$.

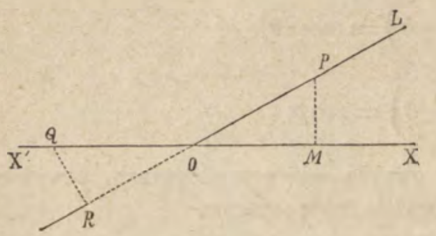

Fig 13.

Jeżeli prostą OL weźmiemy za początkowe ramię kąta, a OX′ za ramię końcowe tegoż kąta, natenczas biorąc na linii X′X taki punkt Q, aby OQ = = OP, i spuszczając z punktu Q prostopadłą na przedłużenie linii OL, mieć będziemy

$$\sin LOX' = \sin(\pi - \theta) = \frac{QR}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta,$$

$$\cos LOX' = \cos(\pi - \theta) = -\frac{OR}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg} LOX' = \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\frac{QR}{OR} = -\frac{PM}{OM} = -\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{cotg} LOX' = \cot(\pi - \theta) = -\frac{OR}{QR} = -\frac{OM}{PM} = -\operatorname{cotg}\theta,$$

$$\sec LOX' = \sec(\pi - \theta) = -\frac{OQ}{OR} = -\frac{OP}{OM} = -\sec\theta,$$

$$\operatorname{cose} LOX' = \operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \frac{OQ}{QR} = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\theta,$$

z czego wynika, że wstawa i dosieczna spełnienia danego kąta są równe tak co do wielkości jakoteż i znaku odpowiednio wstawie i dosiecznej kąta danego, zaś dostawa, styczna, dostyczna i sieczna spełnienia kąta danego są równe co do wielkości odpowiednio, dostawie, stycznej i siecznej kąta danego, ale znaku przeciwnego i naodwrót: wstawa i dosieczna kąta danego jest równa co do wielkości i znaku wstawie i dosiecznej kąta spełnienia, pozostałe zaś funkcyje trygonometryczne kąta danego są równe co do wielkości, a znaku przeciwnego, odpowiednio funkcyjom trygonometrycznym kąta spełnienia.

Jeżeli więc dla kąta danego θ przyjmiemy zwykłą miarę w stopniach, natenczas powyższe związki dają się przedstawić w kształcie następującym:

$$\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta,$$
$$\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta,$$
$$\mathrm{tg}(180^0 - \theta) = -\mathrm{tg}\,\theta,$$
$$\mathrm{cotg}(180^0 - \theta) = -\mathrm{cotg}\,\theta,$$
$$\sec(180^0 - \theta) = -\sec\theta,$$
$$\mathrm{cosec}(180^0 - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta;$$

jeżeli zaś przez θ rozumiemy miarę teoretyczną kąta, powyższe związki przedstawić się dadzą w kształcie następującym:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \tag{1}$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \tag{2}$$
$$\mathrm{tg}(\pi - \theta) = -\mathrm{tg}\,\theta, \tag{3}$$
$$\mathrm{cotg}(\pi - \theta) = -\mathrm{cotg}\,\theta, \tag{4}$$
$$\sec(\pi - \theta) = -\sec\theta, \tag{5}$$
$$\mathrm{cosec}(\pi - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta, \tag{6}$$

PRZYKŁADY.

1) $\sin\frac{\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{7}{8}\pi.$

2) $\cos 1 = -\cos(\pi - 1) = -\cos 2{,}31415.$

3) $\sin 48^0 = \sin(180^0 - 48^0) = \sin 132^0.$

4) $\cos 80^0 = -\cos(180^0 - 80^0) = -\cos 100^0.$

5) $\mathrm{tg}\frac{3}{4}\pi = -\mathrm{tg}\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = -\mathrm{tg}\frac{1}{4}\pi.$

6) $\mathrm{cotg}\frac{3}{8}\pi = -\mathrm{cotg}\left(\pi - \frac{3}{8}\pi\right) = -\mathrm{cotg}\frac{5}{8}\pi.$

7) $\mathrm{tg}\, 45^0 = -\mathrm{tg}(180^0 - 45^0) = -\mathrm{tg}\, 135^0.$

8) $\mathrm{cotg}\, 135^0 = -\mathrm{cotg}(180^0 - 135^0) = -\mathrm{cotg}\, 45^0.$

9) $\sec\frac{3}{4}\pi = -\sec\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = -\sec\frac{1}{4}\pi.$

10. $\mathrm{cosec}\frac{3}{4}\pi = \mathrm{cosec}\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \mathrm{cosec}\frac{1}{4}\pi.$

11. $\sec 72^0 = -\sec(180^0 - 72^0) = -\sec 108^0.$

12. $\mathrm{cosec}\, 108^0 = \mathrm{cosec}(180^0 - 108^0) = \mathrm{cosec}\, 72^0.$

ZMIANY, JAKIM PODLEGAJĄ FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE, GDY KĄT WZRASTA. WARTOŚCI KRAŃCOWE FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

29. Niech będzie układ osi spółrzędnych YOX (fig. 14). Jeżeli linija OL ruchoma obracać się będzie około punktu O, natenczas z liniją stałą OX, tworzyć będzie w danej chwili kąt, który oznaczmy przez θ jeżeli na tej linii ruchomej obierzemy punkt P, odległość tego punktu od początku układu O, weźmiemy za jedność, i oznaczymy przez x i y spółrzędne punktu P, funkcyje trygonometryczne kąta LOX, jak wiadomo, wyrażą się przez

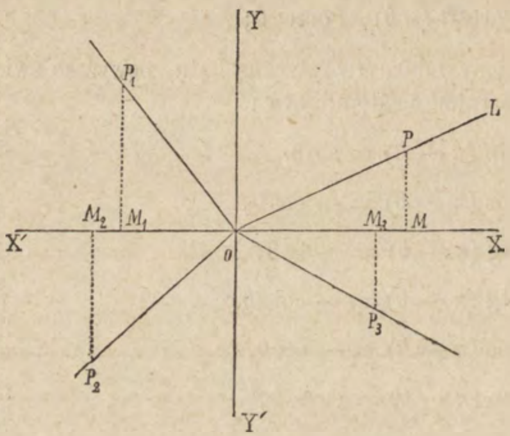

Fig. 14.

$$\sin\theta = y,$$

$$\cos\theta = x, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}, \quad \sec\theta = \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y}.$$

Zachodzi pytanie, jakim zmianom ulegają funkcyje trygonometryczne, gdy linija ruchoma OL w swoim obrocie tworzy coraz inne kąty.

Gdy linija OL schodzi się z liniją OX t. j. z osią odciętych, kąt jest zerem, rzędna punktu P jest zerem, odcięta zaś równa jedności, zatym wstawa jest zerem , dostawa jednością, styczna zerem, dostyczna nieskończenie wielką, sieczna jednością, a dosieczna nieskończenie wielką.

Jeżeli linija ruchoma, pozostaje w pierwszej ćwiartce układu spółrzędnych, rzędna i odcięta są dodatne, a nadto rzędna rośnie, odcięta zaś maleje, zatym w pierwszej ćwiartce układu spółrzędnych, wstawa styczna i sieczna, wzrastają z obrotem linii OL, pozostałe zaś funkcyje trygonometryczne maleją.

Jeżeli linija ruchoma OL, zajmie położenie OY, prostopadłe do OX, natenczas rzędna będzie równa jedności, odcięta zaś równa zeru, zatym funkcyje trygonometryczne kąta YOX, czyli kąta prostego, będą miały następujące wartości: wstawa będzie równa jedności, dostawa zeru, styczna będzie nieskończenie wielką, dostyczna równa zeru, sieczna nieskończenie wielką, dosieczna zaś równa jedności.

Gdy linija ruchoma zajmie położenia OP_1 w drugiej ćwiartce układu, natenczas rzędna będzie dodatna, odcięta zaś ujemna i rzędna będzie malała z obrotem linii OL, odcięta zaś co do wartości bezwzględnej będzie się zwiększała, zatym w drugiej ćwiartce układu: wstawa będzie się zmniejszała, dostawa będzie rosła, styczna będzie się zmniejszała, dostyczna rosła, sieczna będzie się zmniejszała, a dosieczna rosła. Skoro linija ruchoma zajmie położenie OX′ wprost przeciwne kierunkowi OX i z liniją OX utworzy kąt półpełny, czyli dwa kąty proste, natenczas rzędna będzie zerem, a odcięta równa jedności ujemnej, funkcyje trygonometryczne zatym kąta półpełnego, czyli dwu kątów prostych, otrzymują następujące wartości: wstawa będzie zerem, dostawa jednością ujemną, styczna zerem, dostyczna nieskończenie wielką, sieczna jednością ujemną, dosieczna nieskończenie wielką.

Przez podobne rozumowanie możemy wyprowadzić odpowiednie konkluzyje dla kątów, kończących się w trzeciej i czwartej ćwiartce układu.

30. Widzieliśmy, że styczna kątów, zakończonych w pierwszej ćwiartce jest wciąż dodatna, w drugiej zaś wciąż ujemna, w miarę powiększania się kąta w pierwszej ćwiartce wciąż wzrasta i dochodzi do wartości nieskończenie wielkiej dodatnej; zaś w drugiej ćwiartce od wartości nieskończenie wielkiej ujemnej, bezwzględnie wciąż maleje, tak, iż dla kąta $\frac{\pi}{2}$ i w ogóle dla kąta $2n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{4n+1}{2}\pi$, styczna ma dwie wartości $+\infty$ i $-\infty$. Rozumieć to należy w ten sposób, że gdy kąt $\frac{4n+1}{2}\pi$ uważamy za kraniec wzrastających kątów, kończących się w pierwszej ćwiartce, to jego styczną należy przyjmować jako $+\infty$, jeżeli zaś tenże kąt $\frac{4n+1}{2}\pi$ uważamy za kraniec, malejących kątów, kończących się w drugiej ćwiartce, to jego styczną jest $-\infty$. Podobnie zauważyć możemy, że sieczna kąta $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{4n+1}{2}\pi$ ma dwie wartości $+\infty$ i $-\infty$, stosownie do tego, czy kąt $\frac{4n+1}{2}\pi$ jest wartością krańcową kątów zwiększających się, zakończonych w pierwszej ćwiartce, czyteż kątów zmniejszających się, zakończonych w drugiej ćwiartce.

31. Wnioski, otrzymane z powyższych rozumowań, przy uwzględnieniu algiebraicznych wartości dadzą się przedstawić schematycznie w sposób następujący:

gdy kąt				
	rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$,	do π,	do $\frac{3}{2}\pi$,	do 2
wstawa	rośnie od 0 do 1,	maleje do 0,	maleje do -1,	rośnie do
dostawa	maleje od 1 do 0,	maleje do -1,	rośnie do 0,	rośnie do
styczna	rośnie od 0 do $+\infty$, od $-\infty$	do 0,	rośnie do $+\infty$, od $-\infty$	rośnie do
dostyczna	maleje od $+\infty$ do 0,	maleje do $-\infty$, od $+\infty$	maleje do 0,	maleje do $-$
sieczna	rośnie od 1 do $+\infty$, od $-\infty$	rośnie do -1,	maleje do $-\infty$, od $+\infty$	maleje do
dosieczna	maleje od $+\infty$ do 1,	rośnie do $+\infty$, od $-\infty$	rośnie do -1,	maleje do $-$

32. Z powyższych trzech artykułów, wynika: że wstawa i dostawa posiadać może wartości włącznie: od -1 do $+1$; styczna i dostyczna od $-\infty$ do $+\infty$; sieczna i dosieczna od $-\infty$ do -1, tudzież od $+1$ do $+\infty$.

PRZYKŁADY.

1) $\sin 2n\pi = 0$, $\cos 2n\pi = 1$, $\operatorname{tg} 2n\pi = 0$, $\operatorname{cotg} 2n\pi = \pm\infty$, $\sec 2n\pi = 1$, $\operatorname{cosec} 2n\pi = \pm\infty$.

2) $\sin\frac{4n+1}{2}\pi = +1$, $\cos\frac{4n+1}{2}\pi = 0$, $\operatorname{tg}\frac{4n+1}{2}\pi = \pm\infty$, $\operatorname{cotg}\frac{4n+1}{2}\pi = 0$, $\sec\frac{4n+1}{2}\pi = \pm\infty$, $\operatorname{cosec}\frac{4n+1}{2}\pi = +1$.

3) $\sin(2n+1)\pi = 0$, $\cos(2n+1)\pi = -1$, $\operatorname{tg}(2n+1)\pi = 0$, $\operatorname{cotg}(2n+1)\pi = \pm\infty$, $\sec(2n+1)\pi = -1$, $\operatorname{cosec}(2n+1)\pi = \pm\infty$.

4) $\sin\frac{4n+3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{4n+3}{2}\pi = 0$, $\operatorname{tg}\frac{4n+3}{2}\pi = \pm\infty$, $\operatorname{cotg}\frac{4n+3}{2}\pi = 0$, $\sec\frac{4n+3}{2}\pi = \pm\infty$, $\operatorname{cosec}\frac{4n+3}{2}\pi = -1$.

SPROWADZENIE FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTÓW JAKIEJKOLWIEK WIELKOŚCI DO FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTA MNIEJSZEGO OD KĄTA PROSTEGO.

33. Z tego, cośmy dotąd powiedzieli o funkcyach trygonometrycznych, wynika, że gdy rozważamy funkcyje trygonometryczne kątów, zakończonych w którychkolwiek dwu różnych ćwiartkach, to one otrzymują tezsame wartości bezwzględne, a różnić się mogą znakami, tak np. dostawy kątów drugiej ćwiartki, co do wartości bezwzględnej przechodzą przez wszystkie wartości od zera do jedności, przez które także przechodzą dostawy kątów czwartej ćwiartki i t. p.; możemy przeto dążyć do tego, aby mając funkcyją trygonometryczną jakiegokolwiek kąta, znaleść taki kąt pierwszej ćwiartki, któregoby pewna funkcyja trygonometryczna miała też samą wartość bezwzględną, co funkcyja trygonometryczna kąta danego, wskutek czego, możnaby tę ostatnią wyrazić przez funkcyje trygonometryczne kąta mniejszego od kąta prostego, uwzględniając przytym właściwy znak.

34. Widzieliśmy w art. 27-ym i 28-ym, że jeżeli przez θ rozumiemy jakikolwiek kąt dodatny, natenczas

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \tag{1}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta. \tag{2}$$

Otóż przy pomocy tych wzorów, przez funkcyje trygonometryczne kąta θ możemy wyrazić wstawę i dostawę kątów, różniących się od kąta θ o jakąkolwiek ilość kątów prostych i tak, jeżeli weźmiemy kąt $\frac{\pi}{2} + \theta$, natenczas na zasadzie wzoru (2)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,$$

w ten sposób wyrażać się będą wstawy kątów różniących się o $\frac{\pi}{2}$.

Jeżeli w tym wzorze do kąta θ, dodamy lub też od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie art. 25-go, wartość wstawy nie ulegnie zmianie i będziemy mieli wzór ogólny

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = \cos\theta, \tag{3}$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną albo także zero.

Jeżeli w szczególności przyjmiemy, że kąt θ jest mniejszy od kąta prostego, wzór powyższy pokazuje, w jaki sposób wstawę kąta dodatnego, zakończonego w drugiej ćwiartce, możemy wyrazić przez dostawę kąta mniejszego od kąta prostego.

Jeżeli znowu wzorów (2), (3), (4), (5) i (6), artykułu 27-go i 28-go użyjemy do znalezienia pozostałych funkcyj trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{2} + \theta$, przyjdziemy do następujących wzorów

$$\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = -\sin\theta, \tag{4}$$

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = -\operatorname{cotg}\theta,$$

$$(6) \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = -\operatorname{tg}\theta,$$

$$(7) \qquad \sec\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta,$$

$$(8) \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \theta\right) = \sec\theta.$$

35. Jeżeli następnie rozważać będziemy kąt $\pi + \theta$, natenczas na zasadzie wzorów (1) i (4) artykułu poprzedzającego, mieć będziemy

$$\sin(\pi + \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta,$$

w ten sposób zatym wyrażać się będą wstawy kątów różniących się o π.

Jeżeli w tym wzorze do kąta θ, dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie wzorów art. 25-go wartość wstawy nie ulegnie zmianie i będziemy mieli wzór ogólny

$$(1) \qquad \sin[(2n+1)\pi + \theta] = -\sin\theta,$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Jeżeli znowu wzorów (3), (4), (5), (6), (7), (8), artykułu poprzedzającego, użyjemy do znalezienia pozostałych funkcyj trygonometrycznych kąta $\pi + \theta$, przyjdziemy do następujących wzorów

$$(2) \qquad \cos[(2n+1)\pi + \theta] = -\cos\theta,$$

$$(3) \qquad \operatorname{tg}[(2n+1)\pi + \theta] = \operatorname{tg}\theta,$$

$$(4) \qquad \operatorname{cotg}[(2n+1)\pi + \theta] = \operatorname{cotg}\theta,$$

$$(5) \qquad \sec[(2n+1)\pi + \theta] = -\sec\theta,$$

$$(6) \qquad \operatorname{cosec}[(2n+1)\pi + \theta] = -\operatorname{cosec}\theta.$$

Jeżeli w szczególności przyjmiemy, że kąt θ jest mniejszy od kąta prostego, wzory powyższe pokazują, w jaki sposób funkcyje trygonometryczne kąta dodatnego, zakończonego w trzeciej ćwiartce, możemy wyrazić przez odpowiednie funkcyje trygonometryczne kąta mniejszego od kąta prostego.

36. Jeżeli nakoniec rozważać będziemy kąt $\frac{3\pi}{2} + \theta$, natenczas na zasadzie wzorów dwu poprzednich artykułów, mieć będziemy

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta,$$

w ten zatym sposób wyrażać się będą wstawy kątów różniących się o $\frac{3\pi}{2}$.

Jeżeli w powyższym wzorze do kąta θ dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie wzorów art. 25-go, wartość wstawy nie ulegnie zmianie i będziemy mieli wzór ogólny

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta, \tag{1}$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Jeżeli wzorów dwu poprzedzających artykułów użyjemy do znalezienia pozostałych funkcyj trygonometrycznych kąta $\frac{3}{2}\pi+\theta$, przyjdziemy do następujących wzorów

$$\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=-\operatorname{cotg}\theta, \tag{3}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=-\operatorname{tg}\theta, \tag{4}$$

$$\sec\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta, \tag{5}$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\theta\right)=-\sec\theta. \tag{6}$$

Jeżeli w szczególności przyjmiemy, że kąt θ jest mniejszy od kąta prostego, wzór powyższy pokazuje, w jaki sposób funkcyje trygonometryczne kąta dodatnego, zakończonego w czwartej ćwiartce, możemy wyrazić przez odpowiednie funkcyje trygonometryczne kąta mniejszego od kąta prostego.

PRZYKŁADY.

1) $\sin 135^\circ = \cos 45^\circ$.
2) $\cos 135^\circ = -\sin 45^\circ$.
3) $\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$.
4) $\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ$.
5) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$.
6) $\operatorname{cotg} 225^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ$.
7) $\sin 315^\circ = -\cos 45^\circ$.
8) $\cos 315^\circ = \sin 45^\circ$.
9) $\operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{cotg} 60^\circ$.
10) $\operatorname{cotg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$.

11) $\sin 495^0 = \cos 45^0$.
12) $\sin 765^0 = \sin 45^0$.
13) $\mathrm{tg}\, 945^0 = \mathrm{tg}\, 45^0$.
14) $\mathrm{cotg}\, 615^0 = -\mathrm{cotg}\, 75^0$.
15) $\sin 585^0 = -\sin 45^0$.

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW UJEMNYCH.

37. Niech będą dwa kąty LOX i L′OX (fig. 15), równe co do bezwzględnej wartości, a utworzone ruchem linii OX w kierunkach wprost sobie przeciwnych. Jeżeli pierwszy z tych kątów oznaczymy przez $+\theta$, drugi wyrazi się przez $-\theta$, gdzie przez θ rozumiemy wartość bezwzględną jakiegokolwiek kąta. Na kierunkach OL i OL′, obierzmy dowolne punkty P i P′ i spuśćmy z tych punktów prostopadłe do OX. Z podobieństwa trójkątów OPM i OP_1M_1 wynika, że co do bezwzględnej wartości

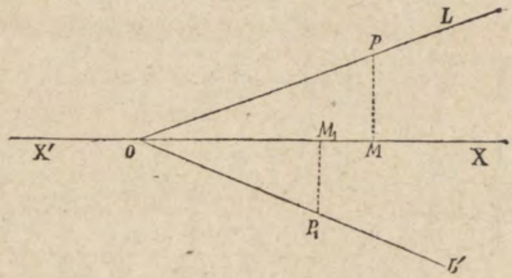

Fig. 15.

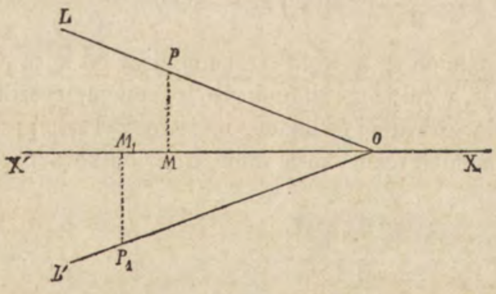

Fig. 15a.

$$\frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{PM}{OP}.$$

Ponieważ w tym wypadku rzędne punktów P i P_1 mają kierunki wprost sobie przeciwne t. j. P_1M_1 względem PM dodatnego, przeto są znaku przeciwnego, będzie więc

$$\frac{P_1M_1}{OP_1} = -\frac{PM}{OP},$$

zatym

(1) $$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

czyli, że *wstawa kąta ujemnego równa się ujemnej wstawie kąta dodatnego tejsamej wielkości.*

Podobnież mamy z podobieństwa tychże trójkątów.

$$\frac{OM_1}{OP_1} = \frac{OM}{OP},$$

że zaś OM_1 i OM ze zmianą kątów θ i $-\theta$ nie ulegają zmianie znaku, bowiem przyjmują tensam kierunek, przeto powyższe stosunki zgadzają się z sobą i co do znaków, zatym

(2) $$\cos(-\theta) = \cos\theta,$$

czyli, że *dostawa kąta ujemnego jest równa tak co do wielkości, jakoteż i znaku dostawie tejsamej wielkości kąta dodatnego.*

W podobny sposób możemy dowieść, że

(3) $$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta,$$

(4) $$\operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta,$$

(5) $$\sec(-\theta) = \sec\theta,$$

(6) $$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta.$$

Z dowodu, prowadzącego nas do powyższych wzorów, wynika, że wzory te mają miejsce jakiejkolwiek wielkości byłby kąt θ, zatym, że są ogólne.

38. Jeżeli we wzorach artykułu poprzedzającego do kąta $-\theta$ dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie art. 25-go, wartości funkcyj trygonometrycznych nie ulegną zmianie i będziemy mieli wzory ogólne

(1) $$\sin(2n\pi - \theta) = -\sin\theta = \sin(-\theta),$$

(2) $$\cos(2n\pi - \theta) = \cos\theta = \cos(-\theta),$$

(3) $$\operatorname{tg}(2n\pi - \theta) = -\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(-\theta),$$

(4) $$\operatorname{cotg}(2n\pi - \theta) = -\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}(-\theta),$$

(5) $$\sec(2n\pi - \theta) = \sec\theta = \sec(-\theta),$$

(6) $$\operatorname{cosec}(2n\pi - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}(-\theta),$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Okazuje się zatym, że wzory wyprowadzone w art. 25-ym, dla przypadku, gdy kąt θ jest dodatny, mają miejsce i wtedy gdy kąt θ jest ujemny.

39. Jeżeli we wzorach art. 27-go, mianowicie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cotg}\theta,$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta,$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta,$$

do kąta $\frac{\pi}{2}-\theta$ dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie wzorów art. 25-go wartości funkcyj trygonometrycznych nie ulegną zmianie, a uwzględniając wzory art. 37-go, mieć będziemy

(1) $$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\cos\theta=\cos(-\theta),$$

(2) $$\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\sin\theta=-\sin(-\theta),$$

(3) $$\operatorname{tg}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\operatorname{cotg}\theta=-\operatorname{cotg}(-\theta),$$

(4) $$\operatorname{cotg}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}(-\theta),$$

(5) $$\sec\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta=-\operatorname{cosec}(-\theta),$$

(6) $$\operatorname{cosec}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\theta\right)=\sec\theta=\sec(-\theta),$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Przyszliśmy więc do wzorów, które pokazują, że wyprowadzone w art. 34-ym wzory dla przypadku, gdy θ oznacza kąt dodatny, mają miejsce i wtedy, gdy kąt θ jest ujemny.

40. Jeżeli we wzorach art. 28-go, mianowicie:

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\theta)=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\text{cotg}\,(\pi - \theta) = -\,\text{cotg}\,\theta,$$
$$\sec\,(\pi - \theta) = -\,\sec\theta,$$
$$\text{cose}\,(\pi - \theta) = \text{cosec}\,\theta,$$

do kąta $\pi - \theta$ dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie wzorów art. 25-go, wartości funkcyj trygonometrycznych nie ulegną zmianie, a jeżeli uwzględnimy wzory art. 37-go, mieć będziemy

(1) $$\sin\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = \sin\theta = -\sin\,(-\theta),$$
(2) $$\cos\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = -\cos\theta = -\cos\,(-\theta),$$
(3) $$\text{tg}\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = -\,\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(-\theta),$$
(4) $$\text{cotg}\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = -\,\text{cotg}\,\theta = \text{cotg}\,(-\theta),$$
(5) $$\sec\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = -\sec\theta = -\sec\,(-\theta),$$
(6) $$\text{cosec}\,[(2n+1)\,\pi - \theta] = -\,\text{cosec}\,\theta = -\,\text{cosec}\,(-\theta),$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Równości te pokazują nam, że wzory, wyprowadzone w art. 35-ym, dla przypadku gdy θ oznacza kąt dodatny, mają miejsce i wtedy, gdy kąt θ jest ujemny.

41. Jeżeli nakoniec rozważać będziemy funkcyje trygonometryczne kąta $\frac{3}{2}\pi - \theta$ i uwzględnimy związki, zachodzące między kątami dopełniającemi się (art. 27-my), tudzież związki art. 37-go, mieć będziemy

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \cos(\theta - \pi) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \sin(\theta - \pi) = -\sin(\pi - \theta) = -\sin\theta,$$
$$\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \text{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \text{cotg}(\theta - \pi) = -\,\text{cotg}\,(\pi - \theta) = \text{cotg}\,\theta,$$
$$\text{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \text{cotg}\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \text{tg}(\theta - \pi) = -\,\text{tg}\,(\pi - \theta) = \text{tg}\,\theta,$$
$$\sec\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \sec\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \text{cosec}\,(\theta - \pi) = -\,\text{cosec}\,(\pi - \theta) = -\,\text{cosec}\,\theta,$$
$$\text{cosec}\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \text{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi - (\theta - \pi)\right) = \sec(\theta - \pi) = \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta,$$

a jeżeli do kąta $\frac{3}{2}\pi - \theta$ dodamy lub od niego odejmiemy całkowitą ilość kątów pełnych, to na zasadzie wzorów art. 25-go, wartości funkcyj trygonometrycznych nie ulegną zmianie, a uwzględniając wzory art. 37-go, mieć będziemy:

$$(1)\qquad \sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos(-\theta),$$

$$(2)\qquad \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=\sin(-\theta),$$

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=-\operatorname{cotg}(-\theta),$$

$$(4)\qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=-\operatorname{tg}(-\theta),$$

$$(5)\qquad \sec\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=\operatorname{cosec}(-\theta),$$

$$(6)\qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\theta\right)=-\sec(-\theta),$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero.

Równości te pokazują nam, że wzory wyprowadzone w art. 36-ym dla przypadku, gdy θ oznacza kąt dodatny, mają miejsce i wtedy, gdy kąt θ jest ujemny.

42. Wzory wyprowadzone w czterech poprzednich artykułach, jeżeli w nich n oznacza liczbę ujemną, pokazują nam, w jaki sposób funkcyje trygonometryczne kątów ujemnych dają się wyrazić przez funkcyje trygonometryczne kąta dodatnego θ, a jeżeli w szczególności przez θ rozumieć będziemy kąt dodatny mniejszy od kąta prostego, wzory powyższe pokazują nam, w jaki sposób funkcyje trygonometryczne kątów ujemnych, zakończonych w którejkolwiek ćwiartce, dają się wyrazić przez funkcyje trygonometryczne kąta dodatnego mniejszego od kąta prostego.

W końcu, z zestawienia wzorów podanych w art. 25-ym, 34-ym, 35-ym i 36-ym, tudzież wzorów, podanych w art. 38-ym, 39-ym, 40-ym i 41-ym, okazuje się, że funkcyje trygonometryczne kątów dodatnych lub ujemnych, zakończonych w którejkolwiek ćwiartce, dają się zawsze wyrazić przez odpowiednie funkcyje trygonometryczne kąta dodatnego mniejszego od kąta prostego.

PRZYKŁADY.

1) $\sin(-45^\circ 30') = -\sin(45^\circ 30')$.

2) $\sin(-220^\circ) = \sin 40^\circ$.

3) $\cos(-45^\circ 30') = \cos(45^\circ 30')$.

4) $\cos(-220^\circ) = -\cos 40^\circ$.

5) $\operatorname{tg}(-45^0) = -\operatorname{tg} 45^0$.
6) $\operatorname{cotg}(-45^0) = -\operatorname{cotg} 45^0$.
7) $\operatorname{tg}(-220^0) = -\operatorname{tg} 40^0$.
8) $\operatorname{cotg}(-220^0) = -\operatorname{cotg} 40^0$.
9) $\sin 855^0 = \sin 45^0$.
10) $\cos 495^0 = -\cos 45^0$.
11) $\operatorname{tg} 675^0 = -\operatorname{tg} 45^0$.
12) $\operatorname{cotg} 855^0 = -\operatorname{cotg} 45^0$.
13) $\sin 765^0 = \cos 45^0$.
14) $\cos(-675^0) = \cos 45^0$.
15) $\operatorname{tg}(-945^0) = -\operatorname{tg} 45^0$.
16) $\operatorname{cotg}(675^0) = -\operatorname{cotg} 45^0$.

O KĄTACH ODPOWIADAJĄCYCH DANYM FUNKCYJOM TRYGONOMETRYCZNYM.

43. Kąty odpowiadające danej wstawie lub danej dosiecznej.

Niech daną wstawą kąta będzie u, to jak wiemy, u jest liczbą oderwaną, co do wartości bezwzględnej nie większą od jedności. Promieniem równym jednostce nakreślmy okrąg koła, poprowadźmy dwie średnice, jedną poziomą X'X, drugą pionową Y'Y (fig. 16), pierwszą weźmy za oś x-ów, drugą za oś y-ów. Jeżeli od środka O na średnicy pionowej odetniemy $ON = u$, w kierunku y dodatnych lub w kierunku y ujemnych, stosownie do tego, czy u dodatne, czyteż ujemne, a przez punkt N poprowadzimy równoległą do średnicy poziomej, która dostatecznie przedłużona przetnie okrąg koła w punktach P i P_1 i te punkty przecięcia połączymy ze środkiem koła, otrzymamy dwie proste OP i OP_1, które będą końcowemi ramionami kątów, mających wstawę $= u$. Jakoż

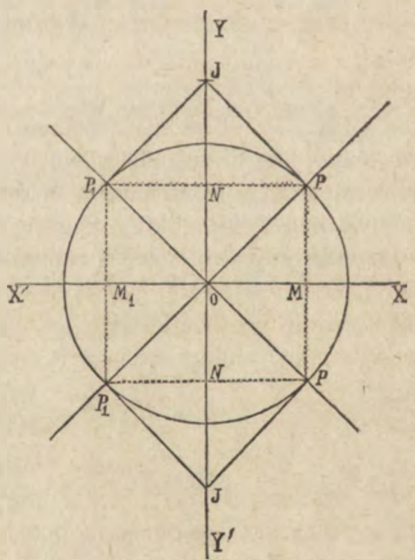

Fig. 16.

$$\sin XOP = \frac{PM}{OP} = \frac{ON}{OP} = \frac{u}{1} = u,$$

$$\sin XOP_1 = \frac{PM_1}{OP} = \frac{ON}{OP_1} = \frac{u}{1} = u,$$

kąty więc, mające początkowe ramię OX, a końcowe ramię OP lub OP_1 będą jedynemi kątami, których wstawa jest równa u.

Jeżeli oznaczymy przez θ jeden z kątów, mających początkowe ramię OX, a końcowe OP, wszystkie kąty, bąć dodatne, bąć ujemne, mające końcowe ramię OP, wyrażą się w kształcie

$$2n\pi + \theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną albo także zerem, kąty zaś, mające końcowe ramię OP_1, wyrażą się przez $(2n+1)\pi - \theta$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną albo także zerem; zatym wszystkie kąty, mające daną wstawę u, wyrażą się w dwu kształtach

$$2n\pi + \theta \text{ i } (2n+1)\pi - \theta.$$

Oba te wyrażenia można ująć w jedno

$$n\pi + (-1)^n\theta,$$

które przedstawia, pierwsze z powyższych wyrażeń, gdy n parzyste, drugie zaś, gdy n nieparzyste. Tym sposobem

$$n\pi + (-1)^n\theta,$$

daje nam kształt wszystkich kątów, których wstawa jest takąsamą, jak kąta θ.

44. Jeżeli przez u rozumieć będziemy dosieczną kąta, która jak wiadomo, jest liczbą oderwaną, co do wartości bezwzględnej nie mniejszy od jedności i na średnicy pionowej, poczynając od środka koła odetniemy $OI = u$, w kierunku y dodatnych, gdy u dodatne, w kierunku zaś y ujemnych, gdy u ujemne, a z punktu I poprowadzimy styczne do okręgu koła, natenczas łącząc punkty styczności P i P_1, ze środkiem koła, otrzymamy dwie proste OP i OP_1, które będą kierunkami końcowemi ramion kątów, mających dosieczną $= u$. Mamy wtedy

$$\operatorname{cosec} XOP = \frac{OP}{MP} = \frac{OI}{OP} = \frac{u}{1} = u,$$

$$\operatorname{cosec} XOP_1 = \frac{OP_1}{M_1P_1} = \frac{OI}{OP_1} = \frac{u}{1} = u.$$

Jeżeli więc oznaczymy przez θ jeden z kątów, mających końcowe ramię OP i rozumować będziemy w tensam sposób, jak w poprzednim artykule znajdziemy, że

$$n\pi + (-1)^n\theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, a także zerem, wyobraża wszystkie kąty, których dosieczna jest taką samą jak kąta θ.

45. Kąty odpowiadające danej dostawie lub danej siecznej.

Niech daną dostawą kąta będzie u, to jak wiemy u jest liczbą oderwaną co do wartości bezwzględnej nie większą od jedności. Promieniem równym jedności (fig. 17) nakreślmy okrąg koła, poprowadźmy dwie średnice, jednę poziomą X'X, drugą pionową YY', pierwszą weźmy za oś x-ów, drugą za oś y-ów. Jeżeli od środka na średnicy poziomej odetniemy $OM = u$, w kierunku x dodatnych, gdy u dodatne, w kierunku zaś x ujemnych, gdy u ujemne, a przez punkt M poprowadzimy równoległą od osi y-ów, która przetnie okrąg koła w dwu punktach P i P_1, natenczas łącząc te punkty ze środkiem koła, otrzymamy dwie proste OP i OP_1, które będą końcowemi ramionami kątów, których dostawa jest równa u. Jakoż

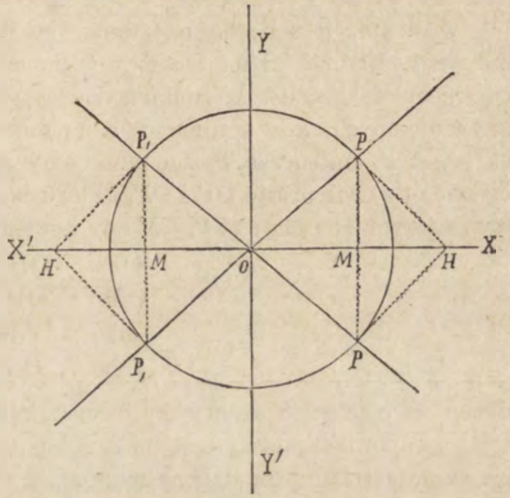

Fig. 17.

$$\cos XOP = \frac{OM}{OP} = \frac{u}{1} = u,$$

$$\cos XOP_1 = \frac{OM}{OP_1} = \frac{u}{1} = u,$$

kąty więc mające początkowe ramię OX, a końcowe ramię OP lub OP_1 będą jedynemi kątami, których dostawą jest u.

Jeżeli przez θ oznaczymy jeden z kątów, mających końcowe ramię OP, natenczas wszystkie kąty bąć dodatne, bąć ujemne, mające ramię OP, wyrażą się przez

$$2n\pi + \theta,$$

kąty zaś bąć dodatne, bąć ujemne, mające końcowe ramię OP_1, wyrażą się przez

$$2n\pi - \theta.$$

Oba te wyrażenia można ująć w jedno

$$2n\pi \pm \theta,$$

które przedstawia, pierwsze z tych wyrażeń, gdy bierzemy znak +, drugie zaś, gdy bierzemy znak —. Tym sposobem

$$2n\pi \pm \theta,$$

daje nam kształt wszystkich kątów, których dostawa jest takąsamą, jak kąta θ.

47. Jeżeli teraz przez u rozumieć będziemy sieczną kąta, która jak wiadomo, jest liczbą oderwaną, co do wartości bezwzględnej nie mniejszą odjedności i na średnicy poziomej, poczynając od środka koła odetniemy $OH = u$ w kierunku x dodatnych, gdy u dodatne, w kierunku zaś x ujemnych, gdy u ujemne, a z punktu H poprowadzimy styczne do okręgu koła, natenczas, łącząc punkty styczności P i P_1 ze środkiem koła, otrzymamy dwie proste OP i OP_1, które będą końcowemi ramionami kątów, których sieczną jest u. Mamy bowiem

$$\sec XOP = \frac{OP}{OM} = \frac{OH}{OP} = \frac{u}{1} = u.$$

$$\sec XOP_1 = \frac{OP_1}{OM} = \frac{OH}{OP_1} = \frac{u}{1} = u.$$

Jeżeli więc przez θ oznaczymy jeden z kątów, mających końcowe ramię OP, a odpowiadających danej siecznej i rozumować będziemy jak w poprzednim artykule, znajdziemy, że

$$2n\pi \pm \theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zerem, wyobraża wszystkie kąty, których sieczna jest takąsamą, jak kąta θ.

48. Kąty odpowiadające danej stycznej i dostycznej.

Niech daną styczną kąta będzie u, to jak wiemy u jest liczbą oderwaną, przyjąć mogącą jakąkolwiek wartość bezwzględną. Promieniem równym jedności (fig. 18) nakreślmy okrąg koła i poprowadźmy dwie średnice jednę poziomą, drugą pionową, pierwszą weźmy za oś x-ów drugą za oś y-ów. Jeżeli w punkcie A przecięcia się okręgu koła z kierunkiem x-ów dodatnych, poprowadzimy styczną gieometryczną do okręgu koła 1 od tegoż punktu na tej stycznej ode-

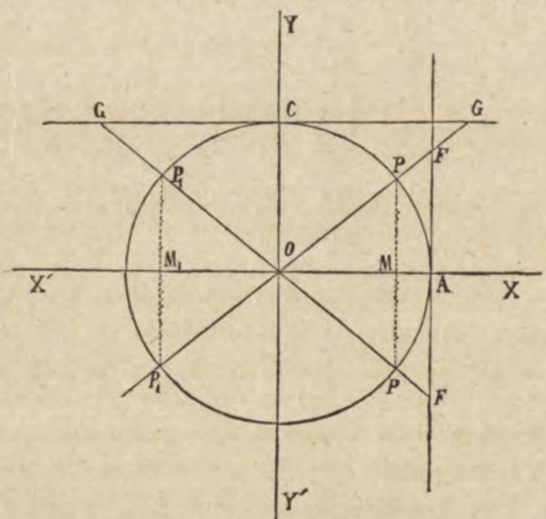

Fig. 18.

tniemy $AF = u$ w kierunku y-ów dodatnych, gdy u dodatne w kierunku zaś y-ów ujemnych, gdy u ujemne, a punkt F połączymy ze środkiem koła i liniją OF przedłużymy aż do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie P_1, wtedy OP i OP_1, będą ramionami końcowemi kątów, których styczną będzie u. Jakoż

$$\operatorname{tg} XOP = \frac{MP}{OM} = \frac{AF}{OA} = \frac{u}{1} = u,$$

$$\operatorname{tg} XOP_1 = \frac{M_1P_1}{OM_1} = \frac{AF}{OA} = \frac{u}{1} = u,$$

kąty więc, mające początkowe ramię OX, a końcowe ramię OP lub OP_1 będą jedynemi kątami, których styczną trygonometryczną jest u. Jeżeli przez θ oznaczymy jeden z kątów, mających ramię końcowe OP, natenczas wszystkie kąty bąć dodatne, bąć ujemne, mające ramię końcowe OP, wyrażą się przez

$$2n\pi + \theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną alboteż zerem; kąty zaś dodatne lub ujemne, mające końcowe ramię OP_1, wyrażą się przez

$$(2n + 1)\pi + \theta.$$

Oba te wyrażenia można ująć w jedno

$$n\pi + \theta,$$

które przedstawia pierwsze z tych wyrażeń, gdy n parzyste, drugie zaś gdy n nieparzyste. Tym sposobem

$$n\pi + \theta,$$

gdzie θ jest jednym z kątów, których styczną trygonometryczną jest u, daje nam kształt wszystkich kątów, których styczna trygonometryczna jest takąsamą jak kąta θ.

49. Jeżeli teraz przez u rozumieć będziemy dostyczną kąta, która, jak wiadomo, jest liczbą oderwaną, przyjąć mogącą jakąkolwiek wartość bezwzględną i w punkcie C przecięcia się okręgu koła z kierunkiem y-ów dodatnych, poprowadzimy styczną gieometryczną do okręgu koła, i na niej, poczynając od punktu C, odetniemy $CG = u$ w kierunku x-ów dodatnych, gdy u dodatne, w kierunku zaś x-ów ujemnych, gdy u ujemne, wreszcie punkt G połączymy ze środkiem koła i liniją OG przedłużymy aż do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie P_1, wtedy linije OP i OP_1, będą ramionami końcowemi kątów, których dostyczną jest u. Mamy bowiem

$$\operatorname{cotg} XOP = \frac{OM}{MP} = \frac{CG}{OC} = \frac{u}{1} = u,$$

$$\operatorname{cotg} XOP_1 = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{CG}{OC_1} = \frac{u}{1} = u.$$

Jeżeli więc przez θ oznaczymy jeden z kątów, odpowiadających danej dostycznej i rozumować będziemy jak w poprzednim ustępie, znajdziemy, że

$$n\pi + \theta,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zerem, zaś θ jednym z tych kątów, którego dostyczną jest u, — przedstawia ogólny kształt wszystkich kątów, których dostyczna jest taką samą co i kąta θ.

50. W sześciu ostatnich artykułach dowiedliśmy:

1) że, gdy daną jest wstawa lub dosieczna, wszystkie kąty im odpowiadające, dają się przedstawić w kształcie $n\pi + (-1)^n \theta$, gdzie θ jest jednym z kątów, odpowiadających danej wstawie lub dosiecznej;

2) że, gdy daną jest dostawa lub sieczna, wszystkie kąty im odpowiadające dają się przedstawić w kształcie $2n\pi \pm \theta$, gdzie θ jest jednym z kątów dodatnych, odpowiadających danej dostawie lub siecznej;

3) że, gdy daną jest styczna lub dostyczna, wszystkie kąty mi odpowiadające, daje się przedstawić w kształcie $n\pi + \theta$, gdzie θ jest jednym z tych kątów, odpowiadających danej stycznej lub dostycznej. Z tego możemy wyprowadzić następujące wnioski:

1) aby dwa kąty miały tęższamą wstawę lub tęższamą dosieczną, koniecznym i dostatecznym jest, aby, albo summa tych kątów była równa nieparzystej ilości kątów półpełnych, albo, żeby ich różnica była równa ilości parzystej kątów półpełnych;

2) aby dwa kąty miały tęższamą dostawę lub tęższamą sieczną, koniecznym i dostatecznym jest, aby, albo summa, albo różnica kątów była równa całkowitej ilości kątów pełnych;

3) wreszcie, aby dwa kąty miały tęższamą styczną lub też dostyczną, koniecznym i dostatecznym jest, aby różnica tych dwu kątów była ilością całkowitą kątów półpełnych.

FUNKCYJE ODWROTNE FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH LUB FUNKCYJE CYKLOMETRYCZNE.

51. Jeżeli mamy dane funkcyje trygonometryczne $u = \sin\theta$, albo $u = \cos\theta$, albo $u = \operatorname{tg}\theta$, i t. p. możemy szukać kątów, danej funkcyi trygonometrycznej odpowiadających. W ten sposób postawione zadanie będzie doprowadzało do wynalezienia zależności kątów od funkcyj trygonometrycznych, które to zależności, jako nowe funkcyje, zowią się funkcyjami odwrotnemi funkcyj kołowych albo funkcyjami cyklometrycznemi.

Jeżeli mamy daną wstawę u, a chcemy znaleść kąty lub łuki miarą ich będące, którychby wstawa była równa danej liczbie u, natenczas szukane kąty oznaczamy przez Arcus sinus $= u$ albo krócej Arc sin u. Takie zatym oznaczenie wskazuje wszystkie kąty, których wstawą jest u; jeżeli więc θ jest jednym z tych kątów, którego wstawą jest u, natenczas na zasadzie tego co się powiedziało w art. 43-im, będzie

$$\mathrm{Arc}\sin u = n\pi + (-1)^n\theta.$$

Podobnież przez Arc cos cosinus $= u$ albo krócej Arc cos u, rozumiemy wszystkie kąty, których dostawą jest u. Jeżeli więc θ jest jednym z tych kątów, którego dostawą jest u, na zasadzie art. 45-go, mieć będziemy

$$\mathrm{Arc}\cos u = 2n\pi \pm \theta.$$

Podobnież, jeżeli przez θ oznaczać będziemy jeden z kątów, którego styczna $= u$, lub którego dostyczna $= u$, lub sieczna $= u$, lub wreszcie dosieczna $= u$, natenczas na zasadzie art. 44-go, 47-go, 48-go i 49-go, mieć będziemy

$$\mathrm{Arc\,tg}\, u = n\pi + \theta,$$
$$\mathrm{Arc\,cotg}\, u = n\pi + \theta,$$
$$\mathrm{Arc\,sec}\, u = n\pi \pm \theta,$$
$$\mathrm{Arc\,cosec}\, u = n\pi + (-1)^n\theta.$$

Wzory te pokazują, że wartości nowych funkcyj nie są oznaczone, albowiem każda z nich posiada nieskończenie wiele wartości. Wartości jednak tych funkcyj będą ściśle oznaczone, jeżeli nie będziemy ich rozważali w całej jak powyżej ogólności. Możemy się mianowicie umówić, jak się to zwykle robi, aby przez arcus sinus, arcus tangens, arcus cotangens i arcus cosecans rozumieć te kąty, które przypadają między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$; zaś przez arcus cosinus i arcu secans te kąty, które przypadają między 0 i π. W takim razie każda funkcyja cyklometryczna będzie miała jedyną wartość, a dla jej oznaczenia używać będziemy odpowiednich oznaczeń: arc sin u, arc cos u, arc tg u, arc cotg u, arc sec u, arc cosec u.

Zatym *przez arc sin u, arc tg u, arc cotg u, arc cosec u, rozumieć będziemy kąt, zawarty między* $-\frac{\pi}{2}$ *i* $\frac{\pi}{2}$, *którego odpowiednia wstawa, styczna, dostyczna i dosieczna jest równa u; zaś przez arccos u i arsec u rozumieć będziemy kąt dodatny, przypadający między 0 i* π, *którego odpowiednia dostawa i sieczna jest równa u.*

Anglicy na oznaczenie funkcyj cyklometrycznych, w ten sposób określonych, używają znakowań

$$\sin^{-1}u,\ \cos^{-1}u,\ \mathrm{tg}^{-1}u,\ \mathrm{cotg}^{-1}u,\ \sec^{-1}u,\ \mathrm{cosec}^{-1}u,$$

tak, iż

$$\sin^{-1}u = \arcsin u,$$

$$\cos^{-1}u = \arccos u,$$

$$\mathrm{tg}^{-1}u = \mathrm{arc\,tg}\,u,$$

$$\mathrm{cotg}^{-1}u = \mathrm{arc\,cotg}\,u,$$

$$\sec^{-1}u = \mathrm{arc\,sec}\,u,$$

$$\mathrm{cosec}^{-1}u = \mathrm{arc\,cosec}\,u.$$

ZASADNICZE ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCYJAMI TRYGONOMETRYCZNEMI.

52. Według definicyi funkcyj trygonometrycznych, podanej w art. 20-ym, mamy

$$\sin\theta = \frac{y}{l},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{l},$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x},$$

$$\mathrm{cotg}\,\theta = \frac{x}{y},$$

$$\sec\theta = \frac{l}{x},$$

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{l}{y}.$$

Podnosząc do kwadratu dwa pierwsze równania i dodając stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2 + x^2}{l^2},$$

że zaś w trójkącie OPM, (art. 20), na zasadzie twierdzenia Pytagoras'a $l^2 = x^2 + y^2$, przeto mieć będziemy

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Podstawiając wartości x i y, otrzymane z dwu pierwszych równań, w równanie trzecie, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

a podstawiając też wartości x i y w równanie czwarte,

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Podobnież podstawiając wartość x w równanie piąte, a wartość y w równanie szóste, otrzymamy

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Tym sposobem przyszliśmy do pięciu równań

(1) $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

(2) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

(3) $$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

(4) $$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

(5) $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},$$

które stanowią zasadnicze związki między funkcyjami trygonometrycznemi tego samego kąta.

Ze względu, że wartości funkcyj trygonometrycznych wyprowadzone zostały dla jakiegokolwiek kąta, związki powyżej otrzymane między funkcyjami trygonometrycznemi, mają miejsce dla jakiegokolwiek kąta, czyli są wzorami ogólnemi.

Z powyższych pięciu równań możemy wyprowadzić wiele innych godnych uwagi związków, mianowicie mnożąc równania (2) i (3) stronami odpowiedniemi, otrzymamy

(6) $$\operatorname{tg}\theta \operatorname{cotg}\theta = 1,$$

z równań zaś (4) i (5) mamy

(7) $$\sec\theta\cos\theta = 1,$$

(8) $$\operatorname{cosec}\theta\sin\theta = 1,$$

Równania (6), (7) i (8) pokazują, że $\operatorname{cotg}\theta$ i $\operatorname{tg}\theta$, $\sec\theta$ i $\cos\theta$, wreszcie $\operatorname{cosec}\theta$ i $\sin\theta$ przedstawiają pary funkcyj, z których jedna jest odwrotnością drugiej. Własność tę zauważyliśmy już powyżej w art. 20-ym, opierając się bezpośrednio na określeniu owych funkcyj.

Z równań (2) i (3), wyprowadzamy następujące:

$$1+\mathrm{tg}^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$1+\mathrm{cotg}^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

na zasadzie zaś wzorów (4) i (5), otrzymujemy

(9) $$\sec^2\theta = 1+\mathrm{tg}^2\theta,$$

(10) $$\mathrm{cosec}^2\theta = 1+\mathrm{cotg}^2\theta,$$

53. Równania (1), (2), (3), (4) i (5), zachodzące między sześcioma funkcyjami trygonometrycznemi, z których każde przedstawia związki między dwiema funkcyjami trygonometrycznemi, są tego rodzaju, że możemy je rozwiązać, to jest wyrazić którąkolwiek z pięciu funkcyj trygonometrycznych przez każdą z pozostałych.

W tym jednak rozwiązaniu należy zauważyć, że nie wszystkie otrzymane wartości będą ściśle oznaczone i tak np. jeżelibyśmy z równania (1) chcieli wyrazić dostawę przez wstawę, otrzymamy

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

otrzymujemy więc dwie wartości na $\cos\theta$. Przyczyną tego jest, że z pomiędzy kątów, danej wstawie odpowiadających, są nie tylko kąty, których dostawa jest dodatna, ale i kąty, których dostawa jest ujemna. Jakoż na zasadzie art. 43-go, do tej samej wstawy, należą wszystkie kąty, które dają się przedstawić w kształcie $n\pi+(-1)^n\theta$, gdzie θ jest kątem dodatnym, zakończonym w pierwszej lub drugiej ćwiartce, gdy wstawa jest dodatna; zaś kątem ujemnym, zakończonym w trzeciej lub czwartej ćwiartce, gdy wstawa jest ujemna. Lecz, gdy wstawa jest dodatna t. j., gdy kąt zakończony jest w pierwszej lub drugiej ćwiartce, kątom $n\pi+(-1)^n\theta$ odpowiada dostawa dodatna, gdy kąt zakończony w pierwszej ćwiartce, ujemna zaś, gdy kąt zakończony w drugiej ćwiartce; gdy zaś wstawa jest ujemna t. j., gdy kąt zakończony jest w trzeciej lnb czwartej ćwiartce, kątom $n\pi+(-1)^n\theta$, odpowiada dostawa ujemna, gdy kąt jest zakończony w trzeciej ćwiartce, dostawa zaś dodatna, gdy kąt jest zakończony w czwartej ćwiartce. Stąd też danej wstawie kąta odpowiadają dwie wartości na dostawę. Jeżeli więc kąt θ zakończony jest w pierwszej lub czwartej ćwiartce, natenczas $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$, gdy zaś kąt θ zakończony jest w drugiej lub trzeciej ćwiartce, natenczas

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

W podobny sposób możemy wyjaśnić przyczynę podwójnej wartości na styczną, dostyczną i sieczną kąta przez wstawę kąta, jak również wartości innych funkcyj trygonometrycznych.

Z tego, cośmy powiedzieli wynika, że równania (1), (2), (3), (4) i (5) artykułu poprzedzającego, możemy rozwiązać bezwzględu na znaki, a jeżeli to uskutecznimy, otrzymamy następujące równania

(1) $$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}} = \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta},$$

(2) $$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{\operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}} = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta},$$

(3) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}.$$

(4) $$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1},$$

(5) $$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}}{\operatorname{cotg}\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}},$$

(6) $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta} = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}.$$

PRZYKŁADY.

1) Jeżeli $\sin\theta = \frac{3}{5}$, znaleść bezwzględne wartości $\cos\theta$, $\sec\theta$ i $\operatorname{tg}\theta$.

Odp. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = 1\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}$.

2) Jeżeli $\cos\theta = \frac{5}{13}$, znaleść bezwzględne wartości $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ i $\operatorname{cotg}\theta$.

Odp. $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec}\theta = 1\frac{1}{12}$, $\operatorname{cotg}\theta = \frac{5}{12}$.

3) Jeżeli $\sec\theta = 3\frac{4}{7}$, znaleść bezwzględne wartości $\operatorname{tg}\theta$ i $\sin\theta$.

Odp. $\operatorname{tg}\theta = 3\frac{3}{7}$, $\sin\theta = \frac{24}{25}$.

4) Jeżeli $\operatorname{tg}\theta = 2\frac{2}{5}$, znaleść bezwzględne wartości $\sec\theta$ i $\sin\theta$.

Odp. $\sec\theta = 2\frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$.

5) Jeżeli $\sin\theta = \frac{1}{3}$, znaleść bezwzględne wartości $\cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{cotg}\theta$ i $\sec\theta$. *Odp.* $\cos\theta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}\theta = 2\sqrt{2}$, $\sec\theta = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

6) Jeżeli $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{3}$, znaleść bezwzględne wartości $\sin\theta$ i $\sec\theta$.

Odp. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Dowieść prawdziwości następujących związków:

7) $\cos\theta\operatorname{tg}\theta + \sin\theta\operatorname{cotg}\theta = \sin\theta + \cos\theta$.

8) $\cos\theta\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cotg}\theta$.

9) $\frac{\sin\theta\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta} = 1$.

10) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta\operatorname{cotg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$.

11) $(\sec^2\theta - 1)(\operatorname{cosec}^2\theta - 1) = 1$.

12) $\sec^2\theta + \operatorname{cose}^2\theta = \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$.

13) $\operatorname{cotg}^2\theta - \cos^2\theta = \cos^2\theta\operatorname{cotg}^2\theta$.

14) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

15) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$.

16) $\cos^3\theta - \sin^3\theta = (\cos\theta - \sin\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)$.

17) $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$.

18) Jeżeli $\sin\theta = m$, $\operatorname{tg}\theta = n$, natenczas

$$(1 - m^2)(1 + n^2) = 1.$$

19) Jeżeli $\cos\theta = m$, $\operatorname{tg}\theta = n$, natenczas

$$m^2(1 + n^2) = 1.$$

20) Jeżeli $\operatorname{tg}\theta = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}$, a $\theta < \frac{\pi}{2}$, natenczas

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

21) $\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos^2\varphi} - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\theta} = \operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\varphi.$

22) $\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

23) $\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta.$

24) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

25) $\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha - 2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha.$

26) Jeżeli $\sin\theta = \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$, natenczas

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

27) Jeżeli $\cos\theta = n\sin\varphi$ i $\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\beta}$, natenczas

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2\cos^2\varphi}}.$$

28) Jeżeli $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma \pm \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$, natenczas

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma \pm \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta,$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

29) Jeżeli $\operatorname{tg}\beta = \sec\alpha\sec\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$, natenczas

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}.$$

30) Jeżeli $\cos\theta = \operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma$, $\operatorname{cotg}\theta = \sin\beta\operatorname{cotg}\alpha$, natenczas

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

WARTOŚCI FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTÓW 45°, 30° 60°, CZYLI $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$.

54. Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem wartości funkcyj trygonometrycznych kątów 45°, 30° i 60°, czyli $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{3}$. Jeżeli kąt równy 45° czyli $\frac{\pi}{4}$, natenczas w trójkącie POM art. 20, mamy $OM = PM$, czyli rzędna równa odciętej, w tym przypadku wstawa równa dostawie, na zasadzie więc równania (1) art. 52-go, mamy

$$2\sin^2 45^0 = 1,\ 2\cos^2 45^0 = 1,$$

zatym

(1) $$\sin 45^0 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

(2) $$\cos 45^0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

na mocy zaś pozostałych równań artykułu 52-go, otrzymamy

(3) $$\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

(4) $$\operatorname{cotg} 45^0 = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

(5) $$\sec 45^0 = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

(6) $$\operatorname{cosec} 45^0 = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

Do wzorów (1) i (2) molibyśmy także przyjść, pamiętając, że na mocy związków między kątami dopełniającemi się

$$\sin 45^0 = \cos(90^0 - 45^0) = \cos 45^0,$$

zatym $\sin 45^0 = \cos 45^0$, biorąc zaś $\sin 45^0$ zamiast $\cos 45^0$ w równaniu (1) art. 52-go, przyjdziemy do wzoru (1) powyżej wyprowadzonego.

55. Weźmy pod uwagę kąt $XOP = 30^0$ albo $\frac{\pi}{6}$ (fig. 19). Nakreślmy pod liniją OX kąt P_1OX równy kątowi XOP i z dowolnie obranego punktu P na ramieniu OP, spuśćmy prostopadłą do OX, przedłużmy ją aż do przecięcia z ramieniem OP_1 w punkcie P_1, utworzy nam się wtedy trójkąt POP_1 równoboczny.

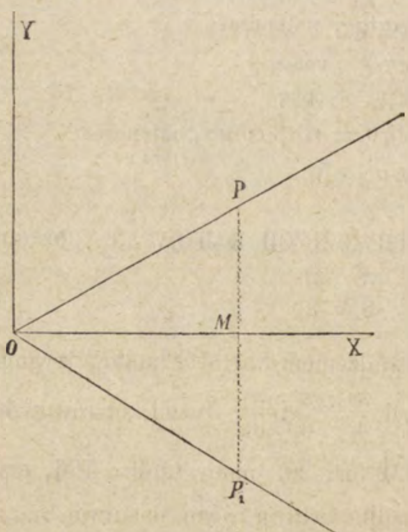

Fig. 19.

Ponieważ POM jest połową kąta POP_1, przeto $MP = MP_1$, zatym MP jest połową PP_1, a tymsamym połową OP, zatym otrzymamy

(1) $$\sin 30^0 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{2};$$

mając zaś wstawę 30^0, znajdziemy pozostałe funkcyje trygonometryczne kąta 30^0 na zasadzie wzorów (2), (3), (4), (5) i (6), art. 53-go,

(2) $$\cos 30^0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

(3) $$\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 30^0 = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

(5) $$\sec 30^0 = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

(6) $$\operatorname{cosec} 30^0 = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2.$$

56. Z wyrażeń na funkcyje trygonometryczne kąta 30^0, czyli $\frac{\pi}{6}$ znajdziemy funkcyje trygonometryczne kąta 60^0, czyli $\frac{\pi}{3}$, pamiętając o związkach, jakie zachodzą między funkcyjami trygonometrycznemi kątów dopełniających się, mianowicie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg}\theta,$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{tg}\theta,$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec,$$

mamy bowiem w tym razie

(1) $$\sin 60^0 = \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

(2) $$\cos 60^0 = \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

(3) $$\operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 60^0 = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

(5) $$\sec 60^0 = \sec \frac{\pi}{3} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2.$$

(6) $$\operatorname{cosec} 60^0 = \operatorname{cose} \frac{\pi}{3} = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

57. Z wzorów wyprowadzonych w poprzednich trzech artykułach dają się wyprowadzić przy zastosowaniu wzorów podanych w artykułach 34-ym i 38-ym, wzory na funkcyje trygonometryczne kątów 120^0, 135^0 i 150^0, czyli $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ i $\frac{5}{6}\pi$, mianowicie:

(1) $$\sin 120^0 = \sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

(2) $$\cos 120^0 = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

(3) $$\operatorname{tg} 120^0 = \operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi = +\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 120^0 = \operatorname{cotg} \frac{2}{3}\pi = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

(5) $$\sec 120^0 = \sec \frac{2\pi}{3} = \sec\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = -2,$$

(6) $$\operatorname{cosec} 120^0 = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

podobnież:

(7) $$\sin 135^0 = \sin \frac{3}{4}\pi = \sin\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

(8) $$\cos 135^0 = \cos \frac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{1}\pi\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

(9) $$\operatorname{tg} 135^0 = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\operatorname{tg} 45^0 = -1,$$

(10) $$\operatorname{cotg} 135 = \operatorname{cotg} \frac{3}{4}\pi = \operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\operatorname{cotg} 45^0 = -1,$$

(11) $$\sec 135^0 = \sec \frac{3}{4}\pi = \operatorname{cose}\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sec \frac{1}{4}\pi = -\sqrt{2},$$

(12) $$\operatorname{cosec} 135^0 = \operatorname{cose} \frac{3}{4} = \operatorname{cose}\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = +\operatorname{cosec} \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2},$$

wreszcie

(13) $$\sin 150^0 = \sin \frac{5}{6}\pi = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2},$$

(14) $$\cos 150^0 = \cos \frac{5}{6}\pi = \cos\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

(15) $$\operatorname{tg} 150^0 = \operatorname{tg} \frac{5}{6}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

(16) $$\operatorname{cotg} 150^0 = \operatorname{cotg} \frac{5}{6}\pi = \operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3},$$

(17) $$\sec 150^0 = \sec \frac{5}{6}\pi = \sec\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\sec\frac{\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

(18) $$\operatorname{cosec} 150^0 = \operatorname{cosec} \frac{5}{6}\pi = \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = 2.$$

ZWIĄZKI ZACHODZĄCE MIĘDZY FUNKCYJAMI KOŁOWEMI ODWROTNEMI ALBO CYKLOMETRYCZNEMI.

58. Ze związków, jakie zachodzą między funkcyjami trygonometrycznemi, dają się wyprowadzić odpowiednie związki między funkcyjami kołowemi odwrotnemi albo cyklometrycznemi. Ponieważ, gdy kąt θ jest dodatny i mniejszy od kąta prostego,

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},$$

przeto, jeżeli położymy $\sin\theta = u$, otrzymamy

$$\operatorname{arc}\sin u = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-u^2}$$

(1) $$= \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

$$= \operatorname{arc}\sec\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc}\operatorname{cosec}\frac{1}{u}.$$

Ponieważ przy tymsamym założeniu $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, przeto, kładąc $\cos\theta = u$, będziemy mieli

(2)
$$\begin{aligned}\arccos u &= \arcsin\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\\ &= \operatorname{arc\,cotg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{u} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\end{aligned}$$

Ponieważ przy tymsamym założeniu

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta},$$

$$\sec\theta = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta},$$

przeto, kładąc $\operatorname{tg}\theta = u$, otrzymamy

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{arc\,tg} u &= \arcsin\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\\ &= \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{u} = \operatorname{arc\,sec}\sqrt{1+u^2} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}.\end{aligned}$$

Ponieważ przy tymsamym założeniu

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}}, \quad \cos\theta = \frac{\operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta},$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta}}{\operatorname{cotg}\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\theta},$$

przeto, jeżeli założymy $\operatorname{cotg}\theta = u$, otrzymamy

(4)
$$\begin{aligned}\operatorname{arc\,cotg} u &= \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcos}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{u} = \operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = \operatorname{arc\,cosec}\sqrt{1+u^2}.\end{aligned}$$

Ponieważ znowu przy tymsamym założeniu

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1},$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}},$$

przeto, zakładając $\sec\theta = u$, otrzymamy

$$(5) \quad \begin{aligned} \operatorname{arc\,sec} u &= \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{u} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{u^2-1} \\ &= \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc\,cosec} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}. \end{aligned}$$

Ponieważ wreszcie przy tymsamym założeniu

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}}{\operatorname{cosec}\theta}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}},$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}, \quad \sec\theta = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}},$$

przeto, jeżeli położymy $\operatorname{cosec}\theta = u$, otrzymamy

$$(6) \quad \begin{aligned} \operatorname{arc\,cosec} u &= \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{u} = \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{u^2-1} = \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}. \end{aligned}$$

Takie zatym są związki między funkcyjami cyklometrycznemi, gdy kąt przez nie przedstawiony jest dodatny i mniejszy od kąta prostego, a tymsamym, gdy funkcyje trygonometryczne dane są dodatne.

59. Wzory (1), (2), (3), (4), (5) i (6), artykułu poprzedzającego wyprowadzone zostały przy tym założeniu, że kąt przez nie przedstawiony jest dodatny i mniejszy od kąta prostego, czyli gdy funkcyje trygonometryczne są dodatne, tak, iż przez $\operatorname{arc\,sin} u$, $\operatorname{arc\,cos} u$, $\operatorname{arc\,tg} u$ i t. d., rozumiemy kąty mniejsze od kąta prostego. Że zaś, według określenia funkcyj cyklometrycznych, przez $\operatorname{arc\,sin} u$, $\operatorname{arc\,tg} u$, $\operatorname{arc\,cotg} u$, $\operatorname{arc\,cosec} u$, rozumiemy kąty dodatne, gdy funkcyje trygonometryczne są dodatne, zaś kąty ujemne mniejsze co do bezwzględnej wartości od kąta prostego, gdy funkcyje trygonometryczne są ujemne; przez $\operatorname{arc\,cos} u$ i $\operatorname{arc\,sec} u$ rozumiemy kąty dodatne zawarte między 0 i $\frac{1}{2}\pi$, gdy dostawa i sieczna są dodatne, zaś zawarte między $\frac{1}{2}\pi$ i π, gdy też funkcyje są ujemne, przeto zachodzi potrzeba wynalezienia związków, jakie zachodzić mają między temi funkcyjami cyklometrycznemi, gdy funkcyje trygonometryczne przyjmują wartości ujemne.

Jeżeli we wzorach (1) artykułu poprzedzającego wstawa będzie ujemna i równa $-u$, gdzie u oznacza liczbę dodatną, natenczas z uwagi, że w tym przypadku $\operatorname{arc\,sin}(-u) = -\operatorname{arc\,sin} u$, mieć będziemy na zasadzie tychże wzorów

$$-\operatorname{arc\,sin} u = -\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-u^2} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = -\operatorname{arc\,sec}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{u},$$

że zaś

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$-\operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{-u},$$

$$-\operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{u} = \operatorname{arc\,cosec}\left(-\frac{1}{u}\right),$$

przeto mieć będziemy

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,sin}(-u) = -\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{-u} = -\operatorname{arc\,sec}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{-u}.$$

Widzimy więc, że wzory (1) artykułu poprzedzającego utrzymują się dla arc tg, arc cotg, arc cosec i w przypadku, gdy wstawa jest ujemna, zaś dla arc cos i arc sec należy w tych wzorach strony drugie wziąć ze znakiem przeciwnym, tak, iż owe wzory mają postać ogólną

$$\operatorname{arc\,sin} u = \pm \operatorname{arcos}\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \pm \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{u},$$

gdzie z podwójnych znaków znak $+$ odnosi się do przypadku gdy $u > 0$, zaś znak $-$ do przypadku $u < 0$. Rozważmy teraz jakiej zmianie ulegają wzory (2) artykułu poprzedzającego gdy dostawa jest ujemna.

Gdy dostawa dana jest ujemna i równa $-u$, gdzie u oznacza liczbę dodatną, natenczas, według określenia funkcyj cyklometrycznych, $\operatorname{arc\,cos}(-u)$ przedstawia kąt dodatny zakończony w drugiej ćwiartce i $< \pi$, gdy tymczasem odpowiednie wyrażenia $\operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-u^2}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{-u}$,

$\text{arc cotg}\,\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$, $\text{arc cosec}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ przedstawiają: pierwszy i czwarty, kąty dodatne mniejsze od kąta prostego, zaś drugi i trzeci kąty ujemne co do wartości bezwzględnej mniejsze od kąta prostego. Aby więc znaleść w tym przypadku związki między funkcyjami cyklometrycznemi, należy mieć na uwadze:

1) że kąty, mające jednakie wstawy są kątami spełniającemi się czyli, że w tym przypadku kąt, wyrażony funkcyją $\text{arc cos}\,(-u)$ jest spełnieniem kąta, mającego wstawę dodatną $=\sqrt{1-u^2}$, czyli, że w tym przypadku, mieć będziemy

$$\text{arc cos}\,(-u) = \pi - \text{arc sin}\,\sqrt{1-u^2},$$

2) że różnica dwu kątów, mających tęższamą styczną trygonometryczną jest równa kątowi półpełnemu, w tym więc przypadku, kąt dodatny, odpowiadający dostawie ujemnej, otrzymamy, dodając π do kąta ujemnego, odpowiadającego danej stycznej trygonometrycznej czyli, że wtedy

$$\text{arc cos}\,(-u) = \pi + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{-u}, \text{ a że}$$

$$\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{-u} = -\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

przeto

$$\text{arc cos}\,(-u) = \pi - \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

zatym kąt, odpowiadający dostawie ujemnej, równa się spełnieniu kąta dodatnego, którego styczna trygonometryczna $= \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$.

Przeprowadzając podobne rozumowania znajdziemy, że

$$\text{arc cos}\,(-u) = \pi - \text{arc cotg}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$\text{arc cos}\,(-u) = \pi - \text{arc cosec}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Co się tyczy ostatniego związku

$$\text{arc cos}\,(-u) = \text{arc sec}\,\frac{1}{-u},$$

ten się utrzymuje w swej mocy, z przyczyny, że kąt, którego sieczna jest ujemna, zakończony jest w drugiej ćwiartce. Tym sposobem wzory (2) artykułu poprzedniego w przypadku, gdy dostawa jest ujemna, dają się napisać w kształcie

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arc\,cos}(-u) &= \pi - \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-u^2} \\
&= \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (2)\\
&= \pi - \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{-u}\,.
\end{aligned}
$$

Widzimy więc z tego, że gdy rozważamy funkcyją cyklometryczną dla dostawy ujemnej należy we wzorach (2) artykułu poprzedzającego zamiast arc sin, arc tg, arc cotg i arc cosec, brać spełnienia kątów, odpowiadających dostawie dodatnej u, pozostałą zaś funkcyją arc sec pozostawić bez zmiany.

Przeprowadzając podobne rozumowania przyjdziemy do następujących wzorów:

a) gdy u oznacza styczną trygonometryczną dodatną, natenczas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arc\,tg}(-u) &= \operatorname{arc\,sin}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}} \\
&= -\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{-u} \qquad (3)\\
&= -\operatorname{arc\,sec}\sqrt{1+u^2} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{1+u^2}}{-u}\,.
\end{aligned}
$$

b) gdy u oznacza dostyczną dodatną, natenczas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arc\,cotg}(-u) &= -\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\
&= -\operatorname{arc\,cos}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{-u} \qquad (4)\\
&= -\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = -\operatorname{arc\,cosec}\sqrt{1+u^2},
\end{aligned}
$$

c) gdy u oznacza sieczną dodatną, natenczas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arc\,sec}(-u) &= \pi - \operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \\
&= \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{-u} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{u^2-1} \qquad (5)\\
&= \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = \pi - \operatorname{arc\,cosec}\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,.
\end{aligned}
$$

d) gdy wreszcie u oznacza dosieczną dodatną, wtedy

$$\operatorname{arc\,cosec}(-u) = \arcsin\frac{1}{-u}$$

(6) $$= -\arccos\frac{\sqrt{u^2-1}}{u} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$= -\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{u^2-1} = -\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}.$$

PRZYKŁADY.

1) $\arcsin\frac{p}{q} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$.

2) $\arcsin\frac{p-q}{p+q} = \operatorname{arc\,tg}\frac{p-q}{2\sqrt{pq}}$.

3) $\arcsin\sqrt{\frac{a}{x+a}} = \operatorname{arc\,cotg}\sqrt{\frac{x}{a}}$.

4) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{2x}}$.

5) $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2} = \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

6) $\arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$.

7) $\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{3} = \operatorname{arc\,cosec} 2$.

8) $\operatorname{arc\,tg} 1 = \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

9) $\operatorname{arc\,sec}\sqrt{2} = \operatorname{arc\,tg} 1$.

10) $\operatorname{arc\,cosec}\frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11) $\arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3} = \operatorname{arc\,sec}\frac{5}{3}$.

12) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ lub

$$= \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,cosec} \frac{2}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub wreszcie}$$

$$= \operatorname{arc\,sec}(-2) = \frac{2}{3}\pi .$$

13) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= -\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= \operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= -\operatorname{arc\,sec}\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub wreszcie}$$

$$= \operatorname{arc\,cosec}(-2) = -\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} .$$

14) $$\operatorname{arc\,sec}(-2) = \pi - \operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{-2} = \pi - \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ lub wreszcie}$$

$$= \pi - \operatorname{arc\,cosec}\frac{2}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi .$$

15) $$\operatorname{arc\,cosec}(-2) = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{-2} = -\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= -\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub}$$

$$= -\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} \text{ lub wreszcie}$$

$$= -\operatorname{arc\,sec}\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} .$$

O RZUTACH PROSTOKĄTNYCH.

60. Rzutem prostokątnym albo ortogonalnym jakiegokolwiek punktu M w przestrzeni (fig. 20), na liniją X'X nazywamy punkt przecięcia się płaszczyzny prostopadłej do linii X'X, przez dany punkt poprowadzonej, z tąż liniją X'X. Linija prosta X'X, zowie się osią rzutów.

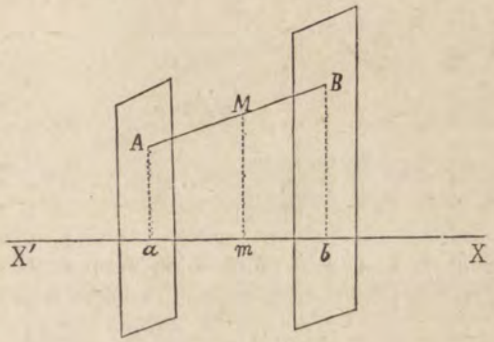

Fig. 20.

Niech będzie odcinek AB linii prostej, zaś a i b rzutami punktów końcowych tego odcinka na oś X'X. Wyobraźmy sobie na tym odcinku punkt M i niech m będzie rzutem tego punktu na oś X'X. Jeżeli punkt ruchomy M przebiega odcinek AB od A do B, natenczas rzut tego punktu przebiegać będzie jednocześnie na linii X'X, odcinek ab w kierunku od a do b.

Nazywamy rzutem odcinka AB na oś X'X, odcinek ab osi X'X, zawarty między rzutami punktów końcowych danego odcinka AB, rzut ten będzie dodatny lub ujemny, stosownie do tego czy punkt m przebiegając od a do b odbywa ruch w kierunku przyjętym jako dodatny, czyteż w kierunku wprost przeciwnym. Jeżeli zatym rzut odcinka AB na oś X'X oznaczymy przez (AB), będziemy mieli

$$(AB) = ab.$$

Jeżeli rozważać będziemy dwa odcinki AB i BA, utworzone ruchem punktu M w kierunkach wprost sobie przeciwnych, to rzuty tych odcinków będą równe a znaku przeciwnego, będzie więc

$$(AB) = -(BA).$$

W szczególnym przypadku, gdy odcinek, który rzucamy na oś rzutów leży na płaszczyźnie prostopadłej do tejże osi, wtedy rzut owego odcinka jest punktem, a długość tego rzutu równa się zeru. Jeżeli figura, której chcemy znaleść rzut, znajduje się wraz z osią rzutów na jednej płaszczyźnie, natenczas dla znalezienia rzutu jakiegokolwiek punktu tej figury, dostateczną będzie rzeczą spuścić z tego punktu prostopadłą na oś rzutów, a spodek tej prostopadłej będzie rzutem tego punktu.

61. *Twierdzenie. Summa algiebraiczna rzutów wielokąta zamkniętego, bądź płaskiego, bądź ukośnego jest równa zeru.*

Niech będzie wielokąt zamknięty ABCDEA (fig. 21) i dajmy, że punkt ruchomy przebiega ten wielokąt w kierunku ABCDEA. Punkt A jest punktem wyjścia i powrotu po dokonanym obiegu punktu ruchomego. Niech a, b, c, d, e, będą rzutami wierzchołków danego wielokąta na oś $X'X$, rzuty te ograniczają na osi $X'X$ odcinki ab, bc, . . . , które są rzutami każdego z boków wielokąta. Że zaś po ukończeniu obiegu wielokąta przez punkt ruchomy, rzut tegoż punktu, któregoto rzutu położenie początkowe było w a, powraca do tegoż samego punktu a, przeto na zasadzie tego co się powiedziało w art. 2-gim, summa algiebraiczna tych rzutów będzie równa zeru, czyli

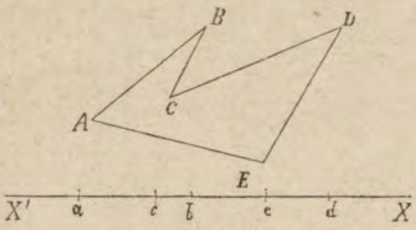

Fig. 21.

$$ab + bc + cd + de + ea = 0,$$

że zaś podług powyższej definicyi

$$(AB) = ab,\ (BC) = bc, \ldots, \text{ przeto}$$

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DE) + (EA) = 0,$$

czyli, że *summa algiebraiczna rzutów wielokąta zamkniętego jest równa zeru.*

62. Jeżeli mamy liniją łamaną niezamkniętą utworzoną ruchem punktu, wychodzącego z punktu A i zatrzymującego się w punkcie np. L, natenczas, jeżeli punkt A połączymy z L, mieć będziemy wielokąt zamknięty, stosując zaś do niego poprzedzające twierdzenie, otrzymamy

$$(AB) + (BC) + \ldots + (KL) + (LA) = 0,$$

stąd

$$-(LA) = (AB) + (BC) + \ldots + (KL),$$

a że

$$-(LA) = (AL),$$

przeto

$$(AL) = (AB) + (BC) + \ldots + (KL),$$

przychodzimy więc do ważnego twierdzenia. *Rzut jednego z boków wielokąta zamkniętego jest równy summie algiebraicznej rzutów pozostałych boków wielokąta, gdy w obu razach ten sam wierzchołek przyjmujemy jako początkowy.*

Z tego twierdzenia daje się wyprowadzić następujący wniosek: jeżeli rozważamy linije łamane, mające końce w tych samych punktach, natenczas summa algiebraiczna rzutów wszystkich części jednej linii łamanej jest równa summie algiebraicznej rzutów wszystkich części innej linii łamanej, gdy tenże sam wspólny ich koniec uważamy za punkt początkowy.

63. Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem związku, jaki zachodzi między długością danego odcinka, a jego rzutem. Niech będzie dany odcinek AB (fig. 22) i ab jego rzut na oś X′X; przyjmijmy, że początek tego odcinka AB jest w punkcie A, zaś kierunek X′X jako dodatny. Wiemy z Gieometryi, że jeżeli mamy w przestrzeni dwie proste krzyżujące się, to przez kąt, jaki one tworzą z sobą rozumiemy kąt, jaki równoległa do jednej z tych prostych, poprowadzona przez którykolwiek punkt drugiej, tworzy z tąż liniją drugą. Wogólności więc czy prosta AB i oś X′X leżą na jednej płaszczyźnie, czyteż są krzyżującemi się, tworzą z sobą kąt CAB, gdy prosta AC jest równoległa do X′X i poprowadzona z punktu A w kierunku powyżej przyjętym jako dodatny. Ten kąt CAB nazwijmy θ. Rzutem odcinka AB na oś X′X jest odcinek ab, który na pierwszej z naszych figur jest dodatny, na drugiej zaś ujemny, jest zaś równy odcinkowi AD. Według określenia dostawy kąta, mamy

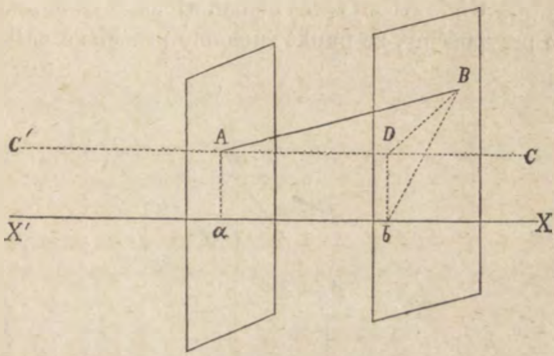

Fig. 22*a*.

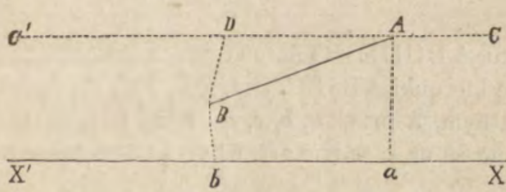

Fig. 22*b*.

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}, \text{ stąd}$$

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\cos\theta, \text{ a że } \mathrm{AD} = ab.$$

przeto, tak co do wielkości jako i kierunku

$$(\mathrm{AB}) = ab = \mathrm{AB}\cos\theta,$$

przychodzimy więc do następującego twierdzenia: *Rzut odcinka linii prostej na oś, jest równy iloczynowi długości tego odcinka przez dostawę kąta, jaki tenże odcinek tworzy z osią rzutów.*

Zauważyć nam wypada, że na drugiej figurze rzut ab, jakeśmy już wspomnieli, jest ujemny, po prawej też stronie powyższej równości $\cos\theta$, jako kąta zakończonego w trzeciej ćwiartce, jest liczbą ujemną.

64. Niech teraz będzie wielokąt zamknięty ABCDEFGA (fig. 23) i przypuśćmy, że punkt ruchomy przebiega całkowicie ten wielokąt w kie-

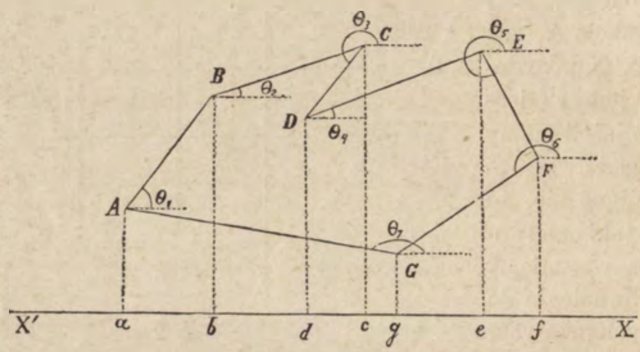

Fig. 23.

runku ABCDEFGA, natenczas oznaczając przez θ_1, θ_2, .., θ_7, kąty, jakie kierunki AB, BC, CD, DE, EF, ... tworzą z kierunkiem osi rzutów dodatnym, a przez a, b, c, ... rzuty odpowiednie wierzchołków wielokąta, natenczas na zasadzie art. 61-go i 63-go, mieć będziemy

$$ab + bc + cd + de + ef + fg + ga = 0,$$

czyli

$$AB\cos\theta_1 + BC\cos\theta_2 + CD\cos\theta_3 + \ldots + GA\cos\theta_7 = 0,$$

Jeżeli jeden z boków wielokąta np. CD leży na płaszczyźnie prostopadłej do osi X'X w takim razie kąt, jaki kierunek CD tworzą z osią x t. j. θ_3 jest równy $\frac{3}{2}\pi$, a że $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$, przeto wzór ostatni redukuje się wtedy do

$$AB\cos\theta_1 + BC\cos\cos\theta_2 + DE\cos\theta_4 + \ldots = 0.$$

Jeżeli mamy liniją łamaną niezamkniętą ABCDEFG i połączymy punkty końcowe tej linii prostą AG, natenczas na zasadzie twierdzenia art. 62-go, mieć będziemy

$$ag = ab + bc + cd + de + ef + fg,$$

a jeżeli przez θ oznaczymy kąt, jaki kierunek AG czyni z osią $X'X$ otrzymamy

$$AG\cos\theta = AB\cos\theta_1 + BC\cos\theta_2 + CD\cos\theta_3 + DE\cos\theta_4 + EF\cos\theta_5 + \\ + FG\cos\theta_6 .$$

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE SUMMY LUB RÓŻNICY KĄTÓW.

65. Zajmiemy się teraz podaniem związków, jakie zachodzą między funkcyjami trygonometrycznemi summy lub różnicy dwu kątów, a funkcyjami trygonometrycznemi tychże dwu kątów. Naprzód podamy wzór na wstawę summy dwu kątów.

Niech α i β będą dwoma kątami dodatnemi jakiejkolwiek wielkości, dajmy np., że jeden z kątów, mianowicie α, zakończony jest w drugiej ćwiartce układu. Niech OM (fig. 24) będzie ramieniem końcowym tego kąta. Ponieważ do kąta α mamy dodać kąt β, przeto końcowe ramię kąta α, to jest OM należy wziąć za początkowe ramię kąta β, a więc dla tego kąta β prosta OM będzie tym, czym jest prosta OX dla kąta α t. j. dodatnym kierunkiem osi odciętych, a prostopadła do niej w punkcie O w kierunku wzrastających kątów α, to jest OY_1 kierunkiem dodatnym osi rzędnych; dajmy nadto, że drugi kąt β zakończony jest w pierwszej ćwiartce dodatnej nowego układu, a jego ramieniem końcowym jest OP. To przyjąwszy, kąt, który będzie summą kątów t. j. kąt $XOP = \alpha + \beta$ będzie miał początkowe ramię, schodzące się z kierunkiem OX, ramieniem zaś końcowym tego kąta będzie OP.

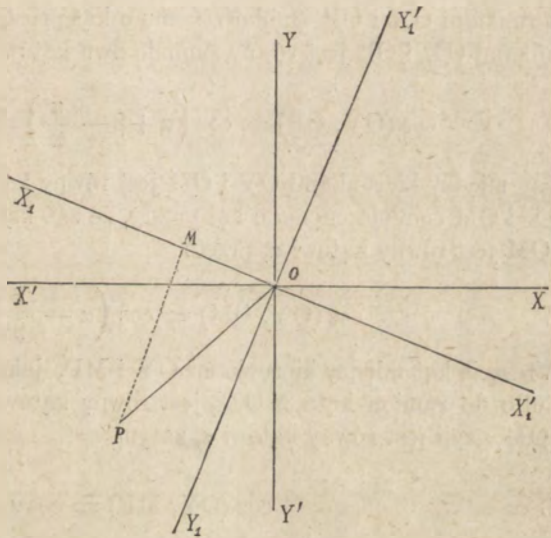

Fig. 24.

Obierzmy na ramieniu końcowem kąta β punkt P i spuśćmy z tego punktu prostopadłą PM na oś OX_1 drugiego układu, tudzież połączmy punkt P z początkiem układu O. Następnie zróbmy rzut linii łamanej OMP, tudzież prostej OP, mających teżsame punkty końcowe na oś rzędnych OY pierwszego układu, natenczas, na zasadzie tego co się powiedziało w poprzednich artykułach o rzutach linij łamanych, mieć będziemy

$$\text{rzut } OP = \text{rzutowi } OM + \text{rzut } MP,$$

że zaś

$$\text{rzut } OP = OP\cos(\widehat{OY, OP}),$$

$$\text{rzut } OM = OM\cos(\widehat{OY, OM}),$$

$$\text{rzut } MP = MP\cos(\widehat{OY, MP}),$$

przeto

$$a) \qquad OP\cos(\widehat{OY, OP}) = OM\cos(\widehat{OY, OM}) + MP\cos(\widehat{OY, MP}).$$

Zważmy, że kąt między kierunkami OY i OP jest równy kątowi między kierunkami OX i OP zmniejszonemu o kąt prosty, że zaś kąt między kierunkami OX i OP jest równy summie dwu kątów t. j. $\alpha + \beta$, przeto

$$b) \qquad \cos(\widehat{OY, OP}) = \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha + \beta).$$

Kąt między kierunkami OY i OM jest równy kątowi między kierunkami OX i OM zmniejszonemu o kąt prosty, że zaś kąt między kierunkami OX i OM jest równy kątowi α, przeto

$$c) \qquad \cos(\widehat{OY, OM}) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha.$$

Wreszcie kąt między kierunkami OY i MP, jako mający ramiona prostopadłe do ramion kąta XOM, jest równy kątowi między kierunkami OX i OM, czyli jest równy kątowi α, zatym

$$d) \qquad \cos(\widehat{OY, MP}) = \cos\alpha.$$

Podstawiając wartości z równań *b)*, *c)*, *d)* w równanie *a)*, otrzymamy

$$OP\sin(\alpha + \beta) = OM\sin\alpha + MP\cos\alpha.$$

Że zaś według definicyi funkcyj trygonometrycznych

$$\sin\beta = \frac{MP}{OP}, \quad \cos\beta = \frac{OM}{OP},$$

skąd

$$MP = OP\sin\beta, \quad OM = OP\cos\beta,$$

przeto podstawiając te wartości w równanie poprzedzające i opuszczając spólny czynnik OP, znajdziemy

$$(1) \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

taki zatym jest związek między wstawą summy dwu kątów, a wstawą i dostawą każdego z kątów.

Gdybyśmy za kąty α i β przyjęli inne kąty dodatne t. j. zakończone w jakichkolwiek ćwiartkach doszlibyśmy do tegoż samego wzoru.

Ponieważ przyjęliśmy, że kąty α i β są dodatne, przeto biorąc na n taką liczbę całkowitą dodatnią, aby $2n\pi - \beta$, gdzie β oznacza kąt dodatny, było dodatne i stosując wzór powyższy do dwu kątów α i $(2n\pi - \beta)$ dodatnych, będziemy mieli

$$\sin(\alpha + 2n\pi - \beta) = \sin\alpha \cos(2n\pi - \beta) + \cos\alpha \sin(2n\pi - \beta),$$

że zaś wartości funkcyj trygonometrycznych pozostają też same, gdy kąty powiększamy lub zmniejszamy o całkowitą ilość kątów pełnych, przeto będzie

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta),$$

a że
$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta,$$

przeto

(2)
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

przyszliśmy więc do związku między wstawą różnicy dwu kątów a wstawą i dostawą każdego z tych kątów.

Wzory (1) i (2) mają miejsce i wtedy, gdy kąty α i β są ujemne, gdyż wprowadzając do powyższych wzorów, zamiast kątów ujemnych, kąty dodatne powstałe z kątów ujemnych przez dodanie odpowiedniej ilości kątów pełnych i rozumując podobnie jak w ustępie poprzedzającym przyjdziemy do wzorów, które nam pokażą, że wzory (1) i (2) utrzymują się i wtedy, gdy kąty α i β są ujemne. Wzory więc (1) i 2) mają miejsce jakiemikolwiek byłyby kąty α i β, zatym są ogólnemi.

66. Jeżeli we wzorach (1) i (2), powyżej wyprowadzonych, zamiast kąta α weźmiemy kąt $\frac{\pi}{2} + \alpha$, otrzymamy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta,$$

że zaś według art. 34-go

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = \cos(\alpha + \beta), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \cos(\alpha - \beta),$$

przeto otrzymamy

(1) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

(2) $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Przyszliśmy więc do wzorów na dostawę summy lub różnicy dwu kątów, które, jako wyprowadzone z wzorów ogólnych, są wzorami ogólnemi t. j. mają miejsce dla wszelkich wielkości kątów α i β.

67. Wzory powyższe dają się wyprowadzić gieometrycznie przy pomocy twierdzenia Ptolemeusza: *w czworokącie upisanym w koło, iloczyn przekątnych czworokąta równa się summie iloczynowi boków przeciwległych czworokąta.*

Dajmy, że kąty α i β są mniejsze od kąta prostego. Promieniem dowolnym nakreślmy okrąg koła i poprowadźmy średnicę AC, (fig. 25), przy końcu A tej średnicy nakreślmy z jednej jej strony kąt $BAC = \alpha$, z drugiej zaś strony kąt $CAD = \beta$; przedłużmy ramiona kątów aż do przecięcia się z okręgiem koła w punktach B i D i poprowadźmy linije BC, CD tudzież przekątną BD; natenczas według twierdzenia Ptolemeusza, powyżej wysłowionego, mieć będziemy

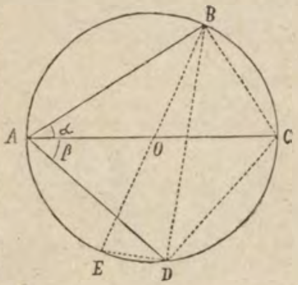

Fig. 25.

$$AC.BD = BC.AD + AB.CD.$$

Jeżeli przez wierzchołek B poprowadzimy średnicę BE, i punkt E przecięcia się jej z okręgiem połączymy z punktem D, natenczas kąty ABC, ADC i BDE, będą kątami prostemi, przeto na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych, będziemy mieli

$$\sin BED = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{AC},$$

że zaś kąt $$BED = \text{kątowi } BAD = \alpha + \beta,$$

przeto $$BD = AC\sin(\alpha + \beta),$$

podobnież $$BC = AC\sin\alpha, \quad AD = AC\cos\beta,$$

$$AB = AC\cos\alpha, \quad CD = AC\sin\beta,$$

podstawiając te wartości w powyższe równanie i opuszczając spólny czynnik $\overline{AC}^2$, otrzymamy

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

68. Dowodzenie artykułu poprzedzającego można uogólnić i dla przypadku, kiedy kąty kąty α lub β, albo oba razem są większe od kąta prostego i mogą być zakończone w którejkolwiek ćwiartce układu. W celu wyprowadzenia tego wzoru dla przypadku najogólniejszego, należy kąty α i β w ten sposób wykreślać, aby przyjmując kierunek AC jako dodatny, jeden z kątów wykreślać w kierunku rzędnych dodatnych, drugi zaś kąt w kierunku wprost przeciwnym i tak, jeżeli np. kąt α zakończony jest w drugiej ćwiartce układu, β zaś w pierwszej ćwiartce, ramię końcowe kąta α (fig. 25*a*), przyjmie kierunek AL, ramię zaś końcowe kąta β przyjmie kierunek AD. Przedłużając prostą AL aż do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie B, prowadząc średnicę BE i łącząc punkty E z D, B z C, B z D i D z C, z czworokąta ABDC, mieć będziemy

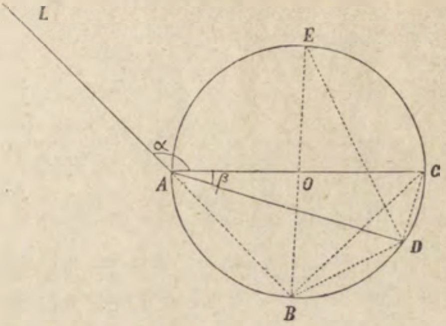

Fig. 25*a*.

$$BD.AC + AB.DC = AD.BC,$$

że zaś $BD = BE \sin BED = BE \sin BAD = BE \sin DAL$

$$= BE \sin(DAC + LAC) = AC \sin(\alpha + \beta),$$

$$AB = AC \cos CAB = -AC \cos\alpha,$$

$$CD = AC \sin\beta,$$

$$AD = AC \cos\beta,$$

$$BC = AC \sin BAC = AC \sin\alpha,$$

przeto, po opuszczeniu czynnika spólnego $\overline{AC}^2$, otrzymamy

$$\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cos\beta,$$

a stąd

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

69. W celu wyprowadzenia wzoru na dostawę summy dwu kątów, dajmy, że kąty α i β są mniejsze od kąta prostego. Promieniem dowolnym nakreślmy okrąg koła i poprowadźmy średnicę AD (fig. 26), w końcach A i D tej średnicy nakreślmy kąty $ADB = \alpha$ i $CAD = \beta$, po tejże samej stronie średnicy. Połączywszy punkty B i C przecięcia się ramion tych kątów z okręgiem koła, poprowadziwszy przez punkt B średnicę BE i połączywszy punkty E i C, mieć będziemy

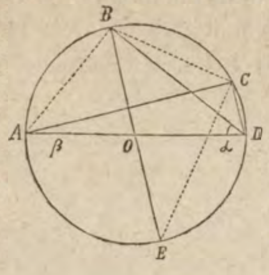

Fig. 26.

$$AC = AD\cos CAD = AD\cos\beta,$$

$$BD = AD\cos ADB = AD\cos\alpha,$$

$$BC = BE\cos CBE = BE\cos\left(\frac{\pi}{2} - BEC\right)$$

$$= AD\cos\left(\frac{\pi}{2} - BAC\right)$$

$$= AD\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)\right]$$

$$= AD\cos(\alpha + \beta),$$

$$AB = AD\sin\alpha,$$

$$CD = AD\sin\beta,$$

a że według twierdzenia Ptolemeusza

$$AC.BD = BC.AD + AB.CD,$$

przeto, po podstawieniu w to równanie wartości powyżej otrzymanych i po opuszczeniu czynnika spólnego $\overline{AD}^2$, mieć będziemy

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin\beta,$$

stąd zaś

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Wzór niniejszy możemy tąż samą drogą wyprowadzić i dla przypadku, kiedy kąty α i β przyjmują jakiekolwiek wielkości, w tym razie należy kąty α i β wykreślać w końcach średnicy i gdy jeden z nich liczymy w kierunku y dodatnych, drugi liczyć należy w kierunku wprost przeciwnym.

W podobny sposób, moglibyśmy wyprowadzić wzory na wstawę i dostawę różnicy dwu kątów; w pierwszym razie (gdy chodzi o wstawę różnicy kątów), kąty α i β należy wykreślać z jednej strony średnicy z tegoż samego jej końca, i liczyć w tym samym kierunku; w drugim zaś po różnych stronach średnicy, w końcach jej przeciwnych i liczyć w kierunkach wprost przeciwnych.

70. Ze względu, że wzory na wstawę i dostawę summy lub różnicy dwu kątów odgrywają ważną rolę w Trygonometryi, przytoczymy jeszcze jeden dowód, który jakkolwiek nie jest tak ogólny, jak dowody podane w poprzednich artykułach, odznacza się jednak wielką prostotą. Dajmy, że kąt $\alpha < \frac{\pi}{2}$ i $\beta < \frac{\pi}{2}$, nadto $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Niech będzie (fig. 27), kąt LOA równy kątowi α i $SOL = \beta$, natenczas kąt SOA będzie równy $\alpha + \beta$.

Na linii OS obierzmy jakikolwiek punkt P, i z tego punktu spuśćmy prostopadłe PM i PR na linije OL i OA z punktu zaś M prostopadłe

MN i MQ na linije OA i PR. Wtedy z przyczyny, że kąty QPM i QMO są dopełnieniami kąta PMQ, będzie kąt QPM = QMO, a że kąt QMO = MOA = α będzie QPM = α. Na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych, mamy

$$\sin SOA = \sin(\alpha + \beta) = \frac{PR}{OP} = \frac{MN}{OP} + \frac{PQ}{OP}, \text{ czyli}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{MN}{OM}\cdot\frac{OM}{OP} + $$
$$+ \frac{PQ}{PM}\cdot\frac{PM}{OP},$$

że zaś również na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych

$$\frac{MN}{OM} = \sin\alpha, \quad \frac{OM}{OP} = \cos\beta,$$
$$\frac{PQ}{PM} = \cos\alpha, \quad \frac{PM}{OP} = \sin\beta,$$

przeto $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

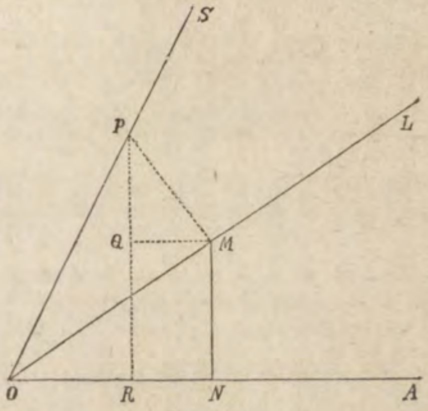

Fig. 27.

Podobnież otrzymamy

$$\cos SOA = \cos(\alpha+\beta) = \frac{OR}{OP} = \frac{ON - RN}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{QM}{OP},$$

czyli
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP} - \frac{QM}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}.$$

stąd
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Przyszliśmy więc do wzorów na wstawę i dostawę summy dwu kątów

71. W podobny sposób wyprowadzimy wzory na wstawę i dostawę różnicy dwu kątów. Dajmy, że α i $\beta < \frac{\pi}{2}$, nadto $\alpha > \beta$. Niech będzie kąt LOA = α, kąt LOS = β, natenczas kąt SOA = $\alpha - \beta$. Na linii OS weźmy jakikolwiek punkt P, z tego punktu spuśćmy prostopadłe PM i PR na linije OL i OA, z punktu zaś M spuśćmy prostopadłe MN i MQ na liniją OA i na przedłużenie linii PR. Wtedy z przyczyny, że kąty MPQ i LMQ są dopeł-

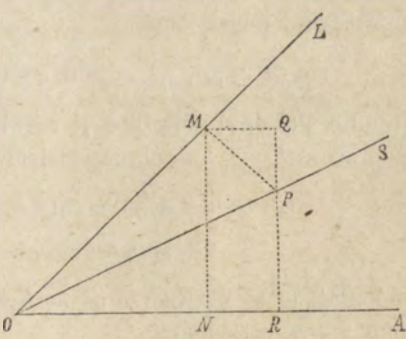

Fig. 28.

nieniami kąta QMP, przeto są sobie równe, a że $LMQ = LOA = \alpha$, przeto i kąt $MPQ = \alpha$. To wiedząc zważmy, że na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych, mamy

$$\sin SOA = \sin(\alpha - \beta) = \frac{PR}{OP} = \frac{QR - PQ}{OP} = \frac{MN - PQ}{OP},$$

czyli

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{MN}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} - \frac{PQ}{MP} \cdot \frac{MP}{OP},$$

a stąd

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Podobnież

$$\cos SOA = \cos(\alpha - \beta) = \frac{OR}{OP} = \frac{ON + NR}{OP} = \frac{ON + MQ}{OP},$$

czyli

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} + \frac{MQ}{MP} \cdot \frac{MP}{OP},$$

stąd

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

72. Wzory te wyprowadzone zostały dla przypadku, gdy oba kąty α i β są mniejsze od kąta prostego, a nadto $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Dowodzenie jednak powyższe daje się zastosować i do przypadków, gdy kąty α i β przyjmują jakiekolwiek wielkości dodatne. W tym razie należy tylko odpowiednio wykreślić figurę i pamiętać o znakach jakie mają funkcyje trygonometryczne kątów, zakończonych w różnych ćwiartkach.

73. Wzory na wstawę i dostawę summy dwu kątów pozwalają nam wyprowadzić wzory na wstawę i dostawę summy ilukolwiek kątów. Jakoż, jeżeli we wzorze na wstawę summy dwu kątów, weźmiemy $\beta + \gamma$, zamiast β, mieć będziemy

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha \sin(\beta + \gamma),$$

a jeżeli $\cos(\beta + \gamma)$ i $\sin(\beta + \gamma)$ rozwiniemy według wzorów, otrzymanych w poprzednich artykułach, znajdziemy

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) = {} & \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \cos\alpha \cos\gamma, \\ & + \sin\gamma \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \end{aligned}$$

Podobnież, jeżeli we wzorze na dostawę summy dwu kątów zamiast β weźmiemy $\beta + \gamma$, otrzymamy

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cos(\beta + \gamma) - \sin\alpha \sin(\beta + \gamma),$$

a podstawiając wartości $\cos(\beta+\gamma)$ i $\sin(\beta+\gamma)$, znalezione w poprzednich artykułach, znajdziemy

$$(2)\quad \cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

W podobny sposób możemy znaleść wzory na wstawę i dostawę summy czterech kątów, pięciu kątów, i t. d. w ogólności summy ilukolwiek kątów. Sposób wyprowadzenia tych wzorów jasno pokazuje, że wstawa i dostawa summy ilukolwiek kątów daje się wyrazić wymiernie przez wstawy i dostawy każdego z kątów.

74. Z wzorów na wstawę i dostawę summy dwu kątów i ich różnicy dają się wyprowadzić wzory na styczną summy lub różnicy dwu kątów, przez styczne trygonometryczne każdego z kątów. Jakoż, ponieważ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

przeto podstawiając wartości $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$, (art. 62-gi i 63-gi), otrzymamy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

a dzieląc licznik i mianownik ułamka po prawej stronie przez $\cos\alpha\cos\beta$ i pamiętając, że $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$, otrzymamy

$$(1)\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Podobnież, jeżeli we wzorze

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

podstawimy wartości $\sin(\alpha-\beta)$ i $\cos(\alpha-\beta)$, a licznik i mianownik ułamka po prawej podzielimy przez $\cos\alpha\cos\beta$, otrzymamy

$$(2)\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Wzory (1) i (2) są ogólne, to jest mają miejsce dla jakiejkolwiek wartości kątów α i β, gdyż wyprowadzone zostały z wzorów ogólnych.

75. Z wzorów na styczną summy dwu kątów, możemy wyprowadzić wzory na styczną summy ilukolwiek kątów i tak, jeżeli we wzorze (1) poprzedniego artykułu, zamiast β weźmiemy $\beta+\gamma$, otrzymamy

$$(1)\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\beta+\gamma)},$$

rozwijając $\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$ na zasadzie wzoru (1) poprzedzającego artykułu, otrzymamy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}.$$

W podobny sposób możemy wyprowadzić wzory na styczną summy czterech kątów, pięciu kątów i t. d. w ogólności ilukolwiek kątów, a ze sposobu ich wyprowadzenia łatwo spostrzeżemy, że styczna summy ilukolwiek kątów wyraża się wymiernie przez styczne tychże kątów.

76. Z wzorów na wstawę summy lub różnicy dwu kątów możemy łatwo wyprowadzić wzory na dostyczną summy lub różnicy dwu kątów. Jakoż, podstawiając we wzorach $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ i $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ wartości $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ i dzieląc liczniki i mianowniki ułamków po prawej stronie przez $\sin\alpha\sin\beta$, znajdziemy

$$(1)\qquad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta},$$

$$(2)\qquad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Jeżeli we wzorze (1) zamiast β weźmiemy $(\beta+\gamma)$ i rozwiniemy wyrażenie $\operatorname{cotg}(\beta+\gamma)$ na zasadzie wzoru (1), otrzymamy

$$(3)\quad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cot}\beta\operatorname{cotg}\gamma-\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma+\cos\beta\operatorname{cotg}\gamma-1}.$$

W podobny sposób możemy znaleść wzory na dostyczną summy czterech kątów, następnie pięciu kątów i t. d. w ogólności ilukolwiek kątów, a ze sposobu wyprowadzenia łatwo wniesiemy, że dostyczna summy ilukolwiek kątów daje się wyrazić wymiernie przez dostyczne tychże kątów.

PRZYKŁADY.

1) Jeżeli $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, a kąty α i $\beta<\frac{\pi}{2}$, natenczas

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{8+3\sqrt{5}}{15},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{4\sqrt{5}-6}{15},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{8-3\sqrt{5}}{15},\ \cos(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{5}+6}{15},$$

2) Jeżeli $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, α i $\beta<\frac{\pi}{2}$, natenczas

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3+2\sqrt{14}}{12}, \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{7}-6\sqrt{2}}{12}.$$

3) Jeżeli $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, α i $\beta < \frac{\pi}{2}$, natenczas

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha+\beta\right) = \frac{79\sqrt{2}}{130}.$$

Dowieść prawdziwości następujących związków:

4) $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha + 2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

5) $\cos(\alpha+2\beta) = 2\cos\beta\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha$.

6) $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta}{1-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}^2\beta}$.

7) $\sec(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

8) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

9) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

10) Gdy $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$, wtedy $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta$ i $\operatorname{cotg}\gamma$ tworzą postęp arytmetyczny.

11) Gdy $\sin x = \sin\alpha\sin(x+\beta)$, wtedy $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{1-\sin\alpha\cos\beta}$.

12) Jeżeli $\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)$, $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{tg}(\varphi+\beta)$, tworzą postęp arytmetyczny, natenczas $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{cotg}\beta$, tworzą także postęp arytmetyczny.

13) $\sin^2\beta + \sin^2(\alpha-\beta) + 2\sin\beta\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha = \sin^2\alpha$.

14) $\cos^2(\alpha-\theta) + \cos^2\theta - 2\cos(\alpha-\theta)\cos\theta\cos\alpha = \sin^2\alpha$.

WZORY NA SUMMĘ LUB RÓŻNICĘ FUNKCYJ CYKLOMETRYCZNYCH.

77. Wzory na wstawę, dostawę, styczną i dostyczną summy lub różnicy dwu kątów doprowadzają nas do odpowiednich związków na summę lub różnicę dwu funkcyj cyklometrycznych. I tak: Jeżeli przez α i β rozumieć będziemy kąty dodatne mniejsze od kąta prostego i założymy

$$\sin\alpha = u, \quad \sin\beta = v, \tag{1}$$

wtedy u i v będą liczbami dodatnemi, zatym na zasadzie definicyi funkcyj cyklometrycznych

$$\alpha = \arcsin u, \quad \beta = \arcsin v. \tag{2}$$

Wzór na wstawę summy dwu kątów

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

przyjmie kształt

$$\sin(\alpha+\beta) = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}, \tag{3}$$

podobnież

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-uv \\ &= \frac{1-(u^2+v^2)}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}+uv}.\end{aligned} \tag{4}$$

Z tego ostatniego wzoru wnieść możemy, czy summa kątów $\alpha+\beta$ jest mniejsza, czyteż większa od kąta prostego, mianowicie: kąt $\alpha+\beta$ będzie mniejszy od kąta prostego, gdy dostawa jego jest dodatna, czyli gdy $u^2+v^2<1$; będzie zaś kąt $\alpha+\beta$ większy od kąta prostego, gdy dostawa jest ujemna, czyli gdy $u^2+v^2>1$. W pierwszym zatym przypadku, otrzymamy ze wzoru (3)

$$\alpha+\beta=\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}),$$

a podstawiając za α i β ich wyrażenia (2), otrzymamy

$$\arcsin u+\arcsin v=\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}),$$
$$\text{gdy } u^2+v^2<1.$$

W drugim zaś przypadku, gdy kąt $\alpha+\beta$ jest większy od kąta prostego czyli, gdy dostawa jest ujemna, na zasadzie tego co się powiedziało w art. 59-ym, mieć będziemy

$$\alpha+\beta=\pi-\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}),$$

a podstawiając zamiast α i β ich wyrażenia (2), otrzymamy

$$\arcsin u+\arcsin v=\pi-\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}).$$

Tym sposobem otrzymaliśmy dwa związki

$$\arcsin u+\arcsin v=\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}), \quad \text{gdy } u^2+v^2<1. \tag{5}$$

$$\arcsin u+\arcsin v=\pi-\arcsin(u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}), \quad \text{gdy } u^2+v^2>1, \tag{6}$$

pokazujące nam w jaki sposób summę dwu kątów, odpowiadających danym wstawom, możemy wyrazić przez jeden kąt, którego wstawa będzie nam znana. Przez podobne rozumowania przyjdziemy do wzoru.

$$\arcsin u-\arcsin v=\arcsin(u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}), \tag{7}$$

który będzie miał miejsce bez żadnych ograniczeń, albowiem różnica dwu kątów, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego przypada między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$.

78. Jeżeli przez α i β rozumieć będziemy kąty dodatne, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego i założymy

$$\cos\alpha = u, \quad \cos\beta = v, \tag{1}$$

zaczym idzie

$$\alpha = \operatorname{arc\,cos} u, \quad \beta = \operatorname{arc\,cos} v, \tag{2}$$

natenczas, na zasadzie wzorów na dostawę summy dwu kątów, mieć będziemy

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \\ &= \frac{u^2+v^2-1}{uv+\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Z tego wyrażenia łatwo wniesiemy, że kąt $\alpha+\beta$ jest mniejszy od kąta prostego, gdy $u^2+v^2>1$, jest zaś większy od kąta prostego, gdy $u^2+v^2<1$; że zaś w przypadku, gdy dostawa jest ujemna, kąt jej odpowiadający arc cosinus przypada w drugiej ćwiartce układu, przeto równanie (3) na zasadzie definicyi funkcyj cyklometrycznych, daje nam

$$\alpha+\beta = \operatorname{arc\,cos}\{uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\},$$

a podstawiając za α i β ich wyrażenia (2), mieć będziemy

$$\operatorname{arc\,cos} u + \operatorname{arc\,cos} v = \operatorname{arc\,cos}(uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}). \tag{4}$$

Wzór ten pokazuje, w jaki sposób summę dwu kątów, których dane są dostawy, można zastąpić jednym kątem, którego dostawa będzie nam znana.

W celu wyprowadzenia wzoru na różnicę dwu kątów, których dane są dostawy, uważamy, że

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = v\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-v^2},$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2},$$

pierwszy z tych wzorów możemy napisać w kształcie

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{v^2-u^2}{v\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{1-v^2}}.$$

Z tego wyrażenia $\sin(\alpha-\beta)$ widzimy, że kąt $\alpha-\beta$ będzie dodatny lub ujemny, stosownie do tego czy $v>u$, czyteż $v<u$; w pierwszym przypadku to jest, gdy $v>u$, kąt $\alpha-\beta$ będzie dodatny, a tymsamym, mieć będziemy

$$\alpha-\beta = \operatorname{arc\,cos}(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$

w drugim zaś przypadku, gdy $v<u$, kąt $\alpha-\beta$ będzie ujemny, a tym samym

$$\alpha - \beta = - \text{arc}\cos(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$

podstawiając w tych równaniach zamiast α i β ich wyrażenia (2), mieć będziemy

(5) $$\text{arc}\cos u - \text{arc}\cos v = \text{arc}\cos(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$

gdy $v > u$,

(6) zaś $$\text{arccos}\, u - \text{arccos}\, v = - \text{arccos}(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$

gdy $v < u$.

79. Jeżeli przez α i β rozumieć będziemy kąty dodatne, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego i założymy

$\text{tg}\,\alpha = u$, $\text{tg}\,\beta = v$, zaczym idzie

(1) $$\alpha = \text{arc}\,\text{tg}\, u, \quad \beta = \text{arc}\,\text{tg}\, v,$$

natenczas, na zasadzie wzoru na styczną summy dwu kątów, mieć będziemy

(2) $$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} = \frac{u+v}{1-uv}.$$

Z tego wyrażenia widzimy, że kąt $\alpha + \beta$ będzie mniejszy od kąta prostego, gdy $uv < 1$, zatym

$$\alpha + \beta = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{u+v}{1-uv}.$$

Gdy zaś $uv > 1$, kąt $\alpha + \beta$ będzie większy od kąta prostego, gdyż styczna jego jest wtedy ujemna, przeto kąt $\alpha + \beta$ na zasadzie art. 59-go będzie spełnieniem kąta dodatnego, którego styczna jest $= \frac{u+v}{uv-1}$; w tym więc razie

$$\alpha + \beta = \pi - \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{u+v}{uv-1},$$

podstawiając za α i β ich wyrażenia (2), otrzymamy

(3) $$\text{arc}\,\text{tg}\, u + \text{arc}\,\text{tg}\, v = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{u+v}{1-uv},$$

gdy $uv < 1$,

(4) $$\text{arc}\,\text{tg}\, u + \text{arc}\,\text{tg}\, v = \pi - \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{u+v}{uv-1},$$

gdy $uv > 1$.

W podobny sposób rozumując, przyjdziemy do wzoru

(5) $$\text{arc}\,\text{tg}\, u - \text{arc}\,\text{tg}\, v = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{u-v}{1+uv}$$

który mieć będzie miejsce bez żadnych ograniczeń, albowiem różnica dwu kątów, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego przypada między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$.

80. Jeżeli przez α i β rozumieć będziemy dwa kąty dodatne, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego i założymy

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = u, \quad \operatorname{cotg}\beta = v,$$

zaczym idzie

$$\text{(2)} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,cotg} u, \quad \beta = \operatorname{arc\,cotg} v,$$

natenczas na zasadzie wzorów na dostyczną summy dwu kątów mieć będziemy

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \frac{uv-1}{u+v}.$$

Jeżeli $uv > 1$ dostyczna kąta $\alpha+\beta$ jest dodatna, kąt zatym $\alpha+\beta$ jest mniejszy od kąta prostego, więc

$$\text{(4)} \qquad \alpha+\beta = \operatorname{arc\,cotg}\frac{uv-1}{u+v};$$

jeżeli zaś $uv < 1$ dostyczna kąta $\alpha+\beta$ jest ujemna, kąt $\alpha+\beta$ jest większy od kąta prostego, na zasadzie zatym art. 59-go będzie spełnieniem kąta dodatnego, którego dostyczna jest $= \frac{1-uv}{u+v}$, w tym więc przypadku

$$\text{(5)} \qquad \alpha+\beta = \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{1-uv}{u+v},$$

podstawiając we wzorach (4) i (5) zamiast α i β ich wyrażenia (2), otrzymamy

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{arc\,cotg} u + \operatorname{arc\,cotg} v = \operatorname{arccotg}\frac{uv-1}{u+v},$$

$$\text{gdy } uv > 1,$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{arc\,cotg} u + \operatorname{arc\,cotg} v = \pi - \operatorname{arc\,cotg}\frac{1-uv}{u+v},$$

$$\text{gdy } uv < 1.$$

W podobny sposób rozumując znajdziemy

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{arc\,cotg} u - \operatorname{arc\,cotg} v = \operatorname{arc\,cotg}\frac{uv+1}{u-v},$$

który to wzór mieć będzie miejsce bez żadnych ograniczeń, gdyż różnica dwu kątów $\alpha - \beta$, z których każdy jest mniejszy od kąta prostego przypada między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$.

81. Przy wyprowadzeniu w artykułach poprzedzających związków między funkcyjami cyklometrycznemi, przypuszczaliśmy, że każdy z kątów α i β jest dodatny i mniejszy od kąta prostego, a tymsamym, że dane funkcyje trygonometryczne u i v są dodatne. Według jednak definicyi funkcyj cyklometrycznych przez $\operatorname{arc}\cos u$ i $\operatorname{arc}\sec u$ rozumiemy nietylko kąty dodatne mniejsze od kąta prostego, ale także kąty dodatne większe od kąta prostego, a nie większe od kąta półpełnego, czyli dwu kątów prostych mianowicie wtedy, gdy u jest ujemne; podobnież przez $\operatorname{arc}\sin u$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} u$, $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u$ i $\operatorname{arc}\operatorname{cosec} u$ rozumiemy nie tylko kąty dodatne nie większe od $\frac{\pi}{2}$, ale także kąty ujemne, co do wartości bezwzględnej nie większe od $\frac{\pi}{2}$, a mianowicie wtedy, gdy u jest ujemne; wypada nam przeto pokazać, jakim zmianom ulegają związki wyprowadzone w artykułach poprzedzających, gdy u i v przyjmują wartości ujemne.

Ponieważ

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\operatorname{arc}\sin(-u) &= -\operatorname{arc}\sin u,\\
\operatorname{arc}\cos(-u) &= \pi - \operatorname{arc}\cos u,\\
\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-u) &= -\operatorname{arc}\operatorname{tg} u,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg}(-u) &= -\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u,\\
\operatorname{arc}\sec(-u) &= \pi - \operatorname{arc}\sec u,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cosec}(-u) &= -\operatorname{arc}\operatorname{cosec} u,
\end{aligned}
$$

przeto, chcąc znaleść związki między funkcyjami cyklometrycznemi dla przypadku, gdy u i v są ujemne, należy za też funkcyje podstawić powyższe wartości, wskutek czego otrzymamy wyrażenia, zawierające funkcyje cyklometryczne, w których u i v będą dodatne. Stosując zatym do nich wzory artykułów poprzedzających przyjdziemy do związków, które nam pokażą, w jaki sposób summa lub różnica dwu funkcyj cyklometrycznych w przypuszczeniu, że u i v są ujemne, daje się wyrazić przez jednę funkcyją cyklometryczną. Jako przykład dajmy, że chcemy znaleść

$$\operatorname{arc}\cos(-u) + \operatorname{arc}\cos(-v),$$

gdzie $u > 0$ i $v > 0$.

Na zasadzie wzorów (1), mamy

$$\operatorname{arc}\cos(-u) + \operatorname{arc}\cos(-v) = 2\pi - (\operatorname{arc}\cos u + \operatorname{arc}\cos v),$$

stosując do wyrażenia w nawiasie wzór (4) art. 78-go, otrzymamy

(2) $\operatorname{arc\,cos}(-u) + \operatorname{arc\,cos}(-v) = 2\pi - \operatorname{arc\,cos}(uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2})$.

Podobnież otrzymalibyśmy

(3) $\operatorname{arc\,sin}(-u) + \operatorname{arc\,sin}(-v) = -\operatorname{arc\,sin}(u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2})$,

$$\text{gdy } u^2 + v^2 < 1;$$

zaś

(4) $\operatorname{arc\,sin}(-u) + \operatorname{arc\,sin}(-v) = \operatorname{arc\,sin}(u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}) - \pi$,

$$\text{gdy } u^2 + v^2 > 1.$$

Podobne wzory możemy wyprowadzić i dla innych funkcyj cyklometrycznych.

82. Przy zastosowaniach związków, wyprowadzonych w artykułach poprzedzających, należy zawsze mieć na uwadze, czy u i v są liczbami dodatnemi czyteż ujemnemi; jeżeli są dodatne, wzory art. 77-go, 78-go, 79-go i 80-go, wprost stosujemy; w przypadkach zaś, gdy u i v są ujemne, należy wprowadzić związki (1) artykułu 81-go. Jeżeli nie mamy bliższych określeń co do tego czy $u > 0$ i $v > 0$, należy wprowadzić odpowiednie warunki, tak np. mieć będziemy

$$\operatorname{arc\,cos} u + \operatorname{arc\,cos} v = \operatorname{arc\,cos}(uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$
$$\text{gdy } u > 0 \text{ i } v > 0,$$
$$\operatorname{arc\,cos} u + \operatorname{arc\,cos} v = 2\pi - \operatorname{arc\,cos}(uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$
$$\text{gdy } u < 0 \text{ i } v < 0,$$
$$\operatorname{arc\,cos} u + \operatorname{arc\,cos} v = \pi - \operatorname{arc\,cos}(-uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}),$$
$$\text{gdy } u > 0 \text{ i } v < 0, \text{ nadto } u > -v,$$
$$\operatorname{arc\,cos} u + \operatorname{arc\,cos} v = \pi + \operatorname{arc\,cos}(-uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2},$$
$$\text{gdy } u > 0,\ v < 0, \text{ nadto } u < -v.$$

PRZYKŁADY.

Dowieść następujących związków:

1) $\operatorname{arc\,sin}\frac{3}{5} + \operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$.

2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5} + \operatorname{arc\,cotg}\frac{7}{3} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{13}{18}$.

3) $\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} 5$.

4) $\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13} + \operatorname{arc\,sin}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

5) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2-x+1}$, gdy $x > 1$.

6) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW WIELOKROTNYCH.

83. Jeżeli we wzorach podanych na wstawę, dostawę, styczną i dostyczną summy dwu kątów, założymy, że kąt $\alpha = \beta$, natenczas otrzymamy następujące wzory

(1) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

(2) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

(3) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha},$$

które pokazują nam w jaki sposób funkcyje trygonometryczne kątów dwa razy większych od kąta danego wyrażają się przez funkcyje trygonometryczne kąta danego.

Gdybyśmy chcieli mieć wyrażoną wstawę i dostawę kąta podwójnego przez samą wstawę lub samą dostawę kąta danego, dostatecznym będzie w powyższych wzorach (1) i (2) raz za dostawę, drugi raz za wstawę podstawić ich wartości wynikające ze związku (1) art. 52-go; co uskuteczniwszy otrzymamy

(5) $$\begin{cases} \sin 2\alpha = \pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}, \\ \sin 2\alpha = \pm 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \end{cases}$$

84. Wzory (5) i (6) artykułu poprzedzającego pokazują, że gdy dany jest kąt, to wartości $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$, są ściśle oznaczone. Jeżeli jednak kąt nie jest nam znany, lecz daną jest jego wstawa lub dostawa, to dostawa kąta podwójnego będzie ściśle oznaczona, wstawa zaś będzie miała dwie wartości, czyli będzie nieoznaczona, dopóki innego danego warunku mieć nie będziemy. Przyczyna tej nieoznaczoności wstawy kąta podwójnego, gdy daną jest albo wstawa, albo dostawa kąta danego, daje się łatwo wyjaśnić. Jakoż, przypuśćmy naprzód, że wstawa kąta α jest dana $= a$, natenczas kąt jej odpowiadający jest nieoznaczony, a jego wielkości dają się napisać (art. 43-ci) w kształcie

$$n\pi + (-1)^n \theta,$$

gdzie θ oznacza jeden z kątów, którego wstawa jest $= a$. W tym przypadku wartości wstawy 2α, otrzymamy ze wzorów

$$\sin 2\alpha = \sin[2n\pi + (-1)^n 2\theta] = \sin 2\theta, \text{ gdy } n \text{ parzyste}$$

$$\sin 2\alpha = \sin[2n\pi + (-1)^n 2\theta] = -\sin 2\theta, \text{ gdy } n \text{ nieparzyste},$$

podobnież

$$\cos 2\alpha = \cos[2n\pi + (-1)^n 2\theta] = \cos 2\theta,$$

czy n parzyste czyteż nieparzyste.

Widzimy więc, że wstawa kąta podwójnego ma wtedy dwie wartości, dostawa zaś jednę, co też wzory (5) i (6) nam pokazują.

Podobnie rzecz się ma, gdy mamy dostawę kąta α równą b. Jeżeli oznaczymy przez θ, którykolwiek z kątów, którego dostawa $= b$, wielkości wszystkich kątów, odpowiadających danej dostawie, dają się przedstawić w kształcie (art. 45-ty)

$$2n\pi \pm \theta,$$

a tymsamym wartości $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$, będą następujące:

$$\sin 2\alpha = \sin(4n\pi \pm 2\theta) = \pm \sin 2\theta,$$

$$\cos 2\alpha = \cos(4n\pi \pm 2\theta) = \cos 2\theta,$$

wstawa więc kąta podwójnego przy danej dostawie kąta danego ma dwie wartości, dostawa zaś tylko jednę wartość, co też wzory (5) i (6) nam pokazują.

85. Podwójna wartość wstawy kąta podwójnego, w przypadku, gdy daną jest wstawa lub dostawa kąta danego, daje się wyjaśnić gieometrycznie.

Niech XOP_1 (fig. 29) będzie najmniejszym z kątów dodatnych, którego wstawą jest $a > 0$, natenczas nie tylko kąty mające końcowe ramię OP_1, ale i kąty mające kierunek OP_2 ($P_1OX = P_2OX'$), będą miały jednę i tęższamą wstawę, skutkiem tego i dwie różne wartości kąta podwójnego będą odpowiadały danej wstawie: XOQ_1 ($XOQ_1 = 2XOP_1$), tudzież XOQ_2 ($2\pi - XOQ_1$). Zatym wstawa

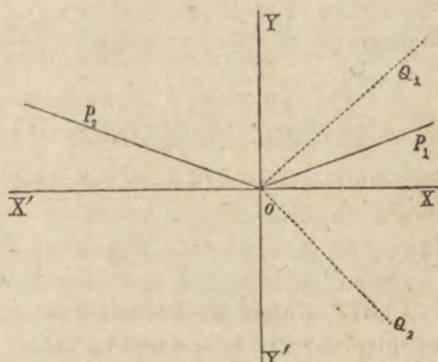

Fig. 29.

kąta XOQ_2 będzie równa co do wartości bezwzględnej wstawie kąta XOQ_1, a znaku przeciwnego; czego też dowodzi wzór poprzednio wyprowadzony. Podobnież będzie się rzecz miała, gdy dana wstawa jest ujemna.

Podobne rozumowania można przeprowadzić i dla przypadku, gdy $\sin 2\alpha$ wyrażamy przez dostawę kąta α.

86. Z wzorów art. 83-go możemy wyprowadzić wiele innych wzorów, z których przytoczymy te, które są najczęstszego użycia przy przekształcaniu funkcyj trygonometrycznych. I tak wzory (6) dają nam

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \tag{2}$$

Z podzielenia tych równań przez siebie stronami odpowiedniemi otrzymamy

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \tag{3}$$

z tego zaś równania znajdziemy

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{4}$$

Podobnież wiemy, że

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha,$$

że zaś
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha},$$

(5) przeto
$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha},$$

Wiemy, że
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ zatym}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha},$$

podstawiając zamiast $2\cos^2\alpha$ wyrażenie z równania (6) art. 83-go, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}. \tag{6}$$

87. Jeżeli we wzorach (1) i (2) art. 73-go założymy $\alpha = \beta = \gamma$, i w pierwszym z tych wzorów zamiast $\cos^2\alpha$ weźmiemy $1 - \sin^2\alpha$, w drugim zaś zamiast $\sin^2\alpha$ weźmiemy $1 - \cos^2\alpha$, otrzymamy wzory na wstawę i dostawę kąta potrójnego, mianowicie:

$$(1) \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$(2) \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Z tych wzorów pokazuje się, że $\sin 3\alpha$ przez $\sin\alpha$, a $\cos 3\alpha$ przez $\cos\alpha$ wyrażają się wymiernie i całkowicie, przeciwnie zaś $\sin 3\alpha$ wyraża się niewymiernie przez $\cos\alpha$, a $\cos 3\alpha$ niewymiernie przez $\sin\alpha$. Z tego wypada, że gdy daną jest wstawa kąta, wstawa kąta potrójnego jest ściśle oznaczona, gdy tymczasem $\cos 3\alpha$ możemy tylko wyznaczyć co do wartości bezwzględnej; gdy zaś daną jest dostawa kąta, dostawa kąta potrójnego jest ściśle oznaczona, wstawa zaś jedynie co do wartości bezwzględnej. Przyczynę tego można wyjaśnić w sposób podany w art. 84-ym.

Jeżeli mamy wyrażone $\sin(m-1)\alpha$ i $\cos(m-1)\alpha$ przez $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, możemy łatwym sposobem wyrazić $\sin m\alpha$ i $\cos m\alpha$ przez też funkcyje trygonometryczne. Jakoż, jeżeli we wzorach (1) art. 65-go i (1) art. 66-go założymy $\beta = (m-1)\alpha$, otrzymamy

$$(3) \qquad \sin m\alpha = \sin\alpha\cos(m-1)\alpha + \cos\alpha\sin(m-1)\alpha,$$

$$(4) \qquad \cos m\alpha = \cos\alpha\cos(m-1)\alpha - \sin\alpha\sin(m-1)\alpha,$$

które nam pokazują, w jaki sposób możemy znaleść $\sin m\alpha$ i $\cos m\alpha$, gdy dane są $\sin(m-1)\alpha$ i $\cos(m-1)\alpha$. Z wzorów tych przez kolejne zakładanie za m liczb 5, 6, 7, ... otrzymamy wzory na $\sin 4\alpha$ i $\cos 4\alpha$, $\sin 5\alpha$ i $\cos 5\alpha$, i t. d. w funkcyi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

88. Jeżeli we wzorach (1) art. 75-go i wzorze (3) art. 76-go założymy $\alpha = \beta = \gamma$, otrzymamy wzory na styczną i dostyczną kąta potrójnego, mianowicie:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$(2) \qquad \operatorname{cotg} 3\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^3\alpha - 3\operatorname{cotg}\alpha}{3\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}.$$

Wzory te pokazują nam, że styczna kąta potrójnego wyraża się wymiernie przez styczną kąta danego, dostyczna zaś kąta potrójnego wymiernie przez dostyczną kąta danego.

Jeżeli znamy wyrażenia $\operatorname{tg}(m-1)\alpha$ przez styczną kąta α i $\operatorname{cotg}(m-1)\alpha$ przez dostyczną kąta α, znaleść możemy tak $\operatorname{tg} m\alpha$, jak i $\operatorname{cotg} m\alpha$. Jakoż, jeżeli w równaniu (1) art. 74-go i równaniu (1) art. 76-go zamiast β podstawimy $(m-1)\alpha$, otrzymamy

$$(3) \qquad \operatorname{tg} m\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(m-1)\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(m-1)\alpha},$$

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} m\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}(m-1)\alpha - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}(m-1)\alpha}.$$

Wzory te pokazują, w jaki sposób przez kolejne zakładanie za m liczb 4, 5,... potrafimy wyrazić $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{tg} 5\alpha$,... przez $\operatorname{tg}\alpha$, tudzież $\operatorname{cotg} 4\alpha$, $\operatorname{cotg} 5\alpha$,... przez $\operatorname{cotg}\alpha$.

PRZYKŁADY.

1) Jeżeli $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, natenczas

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{9}\sqrt{5},\quad \cos 2\alpha = \frac{1}{9}.$$

Dowieść następujących związków:

2) $1 - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg}\alpha = \cos^2\alpha$.

3) $\sin 4\alpha = 4\cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$.

4) $\sin 8\alpha = 8\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$.

5) $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha}$.

6) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

7) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

8) $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \cos 2\alpha \left(\frac{7 + \cos 4\alpha}{8}\right)$.

9) $\frac{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1 - 2\sin 2\alpha$.

10) $\frac{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = 1 + 2\sin 2\alpha$.

11) $\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha = \cos 2\alpha\,[2\cos 4\alpha - 1]$.

12) $\sin 2\alpha + \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

13) $\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{8\cos 2\alpha}{1 - \cos 4\alpha}$.

14) $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

15) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

16) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

17) $\operatorname{tg}\alpha + 2\sin^2\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha = \sin 2\alpha$.

18) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.

19) $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cosec} 2\alpha$.

20) $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg} 2\alpha$.

21) $\dfrac{\sec 2\alpha - 1}{\sec 2\alpha + 1} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$

22) $\operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$

23) $\operatorname{cotg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha.$

24) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha.$

25) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

26) $\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \sec 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha.$

27) Jeżeli $\operatorname{tg}\beta = \sec\alpha \sec\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma$, natenczas $\cos 2\beta$ jest ujemne.

28) $\operatorname{tg} 4\alpha = \dfrac{4 \operatorname{tg}\alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}.$

29) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$

30) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + 1}.$

89. Ze związków wyprowadzonych w artykułach poprzedzających na funkcyje trygonometryczne kąta podwójnego, możemy wyprowadzić związki odpowiednie dla funkcyj cyklometrycznych. I tak, na zasadzie wzoru (1) art. 83-go, mamy

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

jeżeli założymy $\sin\alpha = u$ i przypuścimy, że $u > 0$, wtedy

$$\alpha = \arcsin u,$$

$$\sin 2\alpha = 2u\sqrt{1-u^2}. \tag{1}$$

Żeby się przekonać, czy kąt 2α jest większy od kąta prostego, czyteż od niego mniejszy szukajmy dostawy kąta 2α. Wiemy, że $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, zatym

$$\cos 2\alpha = 1 - 2u^2. \tag{2}$$

Ten wzór nam pokazuje, że kąt 2α będzie mniejszy od kąta prostego, gdy $1 > 2u^2$, będzie zaś większy od kąta prostego, gdy $1 < 2u^2$. W pierwszym przypadku ze wzoru (1) otrzymamy, $2\alpha = \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}$, czyli $2 \arcsin u = \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}$; w drugim zaś przypadku, na zasadzie art. 59-go, mieć będziemy $2\alpha = \pi - \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}$, czyli $2\arcsin u = \pi - \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}$, otrzymujemy zatym dwa związki

(3) $$\arcsin u = \frac{1}{2}\arcsin 2u\sqrt{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < \frac{1}{2},$$

(4) $$\arcsin u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\arcsin 2u\sqrt{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 > \frac{1}{2}.$$

Weźmy teraz pod uwagę wzór (2) art. 83-go, który napiszmy w kształcie

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Jeżeli założymy $\cos\alpha = u$, wtedy $\alpha = \arccos u$, $\cos 2\alpha = 2u^2 - 1$. Kąt 2α będzie mniejszy od kąta prostego, gdy $u^2 > \frac{1}{2}$, będzie zaś większy od kąta prostego, gdy $u^2 < \frac{1}{2}$; że zaś w przypadku, gdy dostawa jest ujemna, kąt jej odpowiadający arcus cosinus znajduje się w drugiej ćwiartce układu, przeto na zasadzie definicyi funkcyj cyklometrycznych, mieć będziemy ogólnie

$$2\alpha = \arccos(2u^2 - 1), \text{ czyli}$$

(5) $$\arccos u = \frac{1}{2}\arccos(2u^2 - 1).$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wzór (3) art. 83-go t. j. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ i założymy $\operatorname{tg}\alpha = u$, wtedy

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} u, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Z tego wzoru widzimy, że kąt 2α będzie mniejszy od kąta prostego, gdy $u^2 < 1$, zatym $2\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{1-u^2}$; będzie zaś większy od kąta prostego, gdy $u^2 > 1$ i wtedy na zasadzie art. 59-go, mieć będziemy

$$2\alpha = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{u^2-1},$$

podstawiając za α jego wyrażenie przyjdziemy do następujących wzorów

(6) $$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1,$$

(7) $$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{u^2-1}, \text{ gdy } u^2 > 1.$$

Rozważmy następnie równanie (5) art. 86-go mianowicie:

(8) $$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

i założmy $\operatorname{tg}\alpha = u$, wtedy $\alpha = \operatorname{arc\,tg} u$, $\sin 2\alpha = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Żeby się dowiedzieć czy kąt 2α jest mniejszy, czyteż większy od kąta prostego, szukajmy dostawy kąta podwójnego, na zasadzie wzoru (4) art. 86-go, mieć będziemy

$$\cos 2\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Ten wzór nam pokazuje, że dostawa 2α będzie dodatna, gdy $u^2 < 1$, będzie zaś ujemna, gdy $u^2 > 1$; w pierwszym przypadku kąt 2α będzie mniejszy od kąta prostego, w drugim zaś większy od kąta prostego. W pierwszym przypadku ze wzoru (8), otrzymamy $2\alpha = \arcsin \dfrac{2u}{1+u^2}$, w drugim zaś przypadku $2\alpha = \pi - \arcsin \dfrac{2u}{1+u^2}$. Podstawiając za α jego wyrażenie otrzymamy

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2u}{1+u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1, \tag{9}$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2u}{1+u^2}, \text{ gdy } u^2 > 1. \tag{10}$$

Jeżeli wreszcie we wzorze (4) art. 86-go

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

założymy $\operatorname{tg}\alpha = u$, skąd $\alpha = \operatorname{arc\,tg} u$, otrzymamy

$$\cos 2\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

dostawa będzie dodatna gdy $u^2 < 1$, ujemna zaś, gdy $u^2 > 1$; w pierwszym przypadku kąt 2α będzie mniejszy, w drugim zaś większy od kąta prostego; że zaś w przypadku, gdy dostawa jest ujemna, kąt jej odpowiadający arcus cosinus znajduje się w drugiej ćwiartce, przeto na zasadzie definicyi funkcyj cyklometrycznych, otrzymamy ogólnie

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-u^2}{1+u^2}. \tag{11}$$

90. Wzory wyprowadzone w artykule poprzedzającym możemy też łatwo otrzymać ze związków między funkcyjami cyklometrycznemi, podanych w art. 77-ym, 78-ym i 79-ym. Jakoż, jeżeli w tych związkach założymy $\beta = \alpha$, przyjdziemy do wzorów następujących:

$$\arcsin u = \frac{1}{2} \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < \frac{1}{2},$$

$$\arcsin u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \arcsin 2u\sqrt{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 > \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{u^2-1}, \text{ gdy } u^2 > 1,$$

$$\operatorname{arc\,cos} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos}(2u^2 - 1).$$

Podobnież na mocy wzoru (3) art. 79-go, będziemy mieli

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1,$$

że zaś, gdy $u^2 < 1$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{1-u^2} = \operatorname{arc\,sin} \frac{\frac{2u}{1-u^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{2u}{1+u^2},$$

zatym

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{2u}{1+u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1,$$

otrzymujemy wzór (9) art. 89-go. Na mocy zaś wzoru (4) art. 79-go

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{u^2-1}, \text{ gdy } u^2 > 1,$$

że zaś, gdy $u^2 > 1$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{u^2-1} = \operatorname{arc\,sin} \frac{2u}{u^2+1}, \text{ przeto}$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{2u}{u^2+1},$$

otrzymujemy więc wzór (10) art. 89-go.

W podobny sposób możemy wyprowadzić wzór (11) art. 89-go. Jakoż, na mocy wzoru (3) art. 79-go, mamy

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{1-u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1,$$

że zaś, gdy $u^2 < 1$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{1-u^2} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1-u^2}{1+u^2}, \text{ zatym}$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{1-u^2}{1+u^2}, \text{ gdy } u^2 < 1.$$

Na mocy zaś wzoru (4) art. 79-go,

$$\operatorname{arc tg} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\operatorname{arc tg}\frac{2u}{u^2-1}, \text{ gdy } u^2 > 1,$$

że zaś, gdy $u^2 > 1$,

$$\operatorname{arc tg}\frac{2u}{u^2-1} = \operatorname{arc cos}\frac{u^2-1}{u^2+1}, \text{ zatym}$$

$$\operatorname{arc tg} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\operatorname{arc cos}\frac{u^2-1}{u^2+1}, \text{ gdy } u^2 > 1.$$

Jeżeli teraz zważymy, że na mocy art. 58-go,

$$\operatorname{arc cos}\frac{1-u^2}{1+u^2} = \pi - \operatorname{arc cos}\frac{u^2-1}{u^2+1},$$

będziemy mieli

$$\operatorname{arc tg} u = \frac{1}{2}\operatorname{arc cos}\frac{1-u^2}{1+u^2}, \text{ gdy } u^2 > 1.$$

W obu więc razach czy $u^2 < 1$, czyteż $u^2 > 1$, mamy

$$\operatorname{arc tg} u = \frac{1}{2}\operatorname{arc cos}\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE POŁOWY KĄTA.

91. Wzory na wstawę i dostawę połowy kąta.

Jeżeli we wzorach (6) artykułu 83-go weźmiemy $\frac{\alpha}{2}$ zamiast α, otrzymamy

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

stąd zaś

(1) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

(2) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

Przyszliśmy do wzorów na wstawę i dostawę połowy kąta, wyrażonych przez dostawę tegoż kąta, że zaś wzory te wyprowadzone zostały z wzorów (6) art. 83-go, które mają miejsce dla jakiegokolwiek kąta, przeto i wzory (1) i (2) mają miejsce dla jakiegokolwiek kąta α, czyli, że są wzorami ogólnemi.

Z wzorów powyższych wynika, że każdej wartości dostawy kąta α odpowiadają dwie wartości wstawy i dwie wartości dostawy połowy tegoż kąta. Przyczynę podwójnej wartości możemy wyjaśnić w sposób następujący. Jeżeli daną jest dostawa kąta α, natenczas $2n\pi \pm \alpha$ wyobraża nam wszystkie kąty, które mają tężsamą dostawę co kąt α, zatym wyrażenie, które nam daje $\sin\frac{\alpha}{2}$ przez $\cos\alpha$ powinno nam dać wartości wstawy każdego kąta, wynikającego ze wzoru $\frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$. Lecz $\sin\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \sin n\pi \cos\frac{\alpha}{2} \pm \cos n\pi \sin\frac{\alpha}{2} = \pm \sin\frac{\alpha}{2}$, otrzymujemy więc dwie wartości, różniące się jedynie znakiem, co też wzór (1) nam pokazuje. Podobnież wyrażenie, dające nam wartość $\cos\frac{\alpha}{2}$ przez $\cos\alpha$, powinno nas doprowadzać do dostawy wszystkich kątów, wynikających ze wzoru $\frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$; że zaś $\cos\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos n\pi \cos\frac{\alpha}{2} \mp \sin n\pi \sin\frac{\alpha}{2} = \cos n\pi \cos\frac{\alpha}{2} = \pm \cos\frac{\alpha}{2}$, przeto otrzymujemy dwie wartości, różniące się jedynie znakiem, co też i wzór (2) nam pokazuje.

92. Wynikającą z powyższych wzorów podwójną wartość $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ możemy także wyjaśnić gieometrycznie. Niech $XOP_1 = \alpha$ (fig. 30) będzie najmniejszym z kątów dodatnych, którego dostawa jest dana, natenczas nietylko kąty dodatne, mające ramię końcowe OP_1, ale i kąty dodatne mające ramię końcowe OP_2 ($XOP_1 = YOP_2$), będą miały jednę i tężsamą dostawę, zatym dwie wartości wstawy połowy kąta będą odpowiadały danej dostawie, jedna, odpowiadająca kątowi XOQ_1 $\left(XOQ_1 = \frac{1}{2}XOP_1\right)$ i druga, odpowiadająca kątowi $XOQ_2 = \pi - \frac{1}{2}XOP_2 = \pi - \frac{1}{2}XOP_1$ mianowicie: $\sin XOQ_1 = \sin\frac{1}{2}XOP_1$ i $\sin XOQ_2 = \sin(\pi - \frac{1}{2}XOP_1) = \sin\frac{1}{2}XOP_1$. Ponieważ tej samej dostawie odpo-

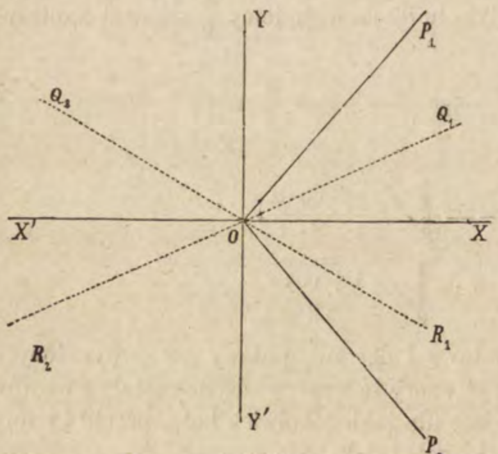

Fig. 30.

wiadają i kąty ujemne, jeżeli więc $XOP_2 = \alpha$ będzie co do wartości bezwzględnej najmniejszym z kątów ujemnych, odpowiadających danej dostawie, to nie tylko kąty ujemne, mające ramię końcowe OP_2, ale i kąty ujemne, mające ramię końcowe OP_1 (kąt rozwarty $XOP_1 = -2\pi$ + kąt ostry XOP_1), będą miały tężsamą dostawę, zatym otrzymamy odpowiednie wartości wstawy połowy kąta

$$\sin\left(\frac{\text{kąt ostry } XOP_2}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\text{kąt ostry } XOP_1}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\text{kąt rozwarty } XOP_1}{2}\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\text{kąt ostry } XOP_1}{2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\text{kąt ostry } XOP_1}{2}\right).$$

Widzimy więc, że gdy daną jest dostawa kąta, będziemy mieli dwie wartości wstawy połowy kąta. W ten sam sposób możemy wyjaśnić podwójną wartość dostawy połowy kąta.

93. Z tego, co się wyżej powiedziało, wynika, że podwójna wartość wstawy i dostawy połowy kąta utrzymuje się dopóty, dopóki znamy jedynie dostawę kąta. Jeżeli jednak znany nam jest kąt α, wtedy będziemy znali i kąt $\frac{\alpha}{2}$, a tymsamym będziemy wiedzieli, jaki należy wziąć znak dla $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$. Znika również wątpliwość co do podwójnej wartości $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$, jeżeli nie znamy samego kąta α, ale wiemy, w której ćwiartce układu znajduje się ramię końcowe kąta $\frac{\alpha}{2}$ i tak, jeżeli wiemy np., że $\frac{\alpha}{2}$ przypada między π i $\frac{3}{2}\pi$, wtedy $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ są ujemne, a tymsamym znak przed pierwiastkiem należy wziąć —.

94. Starajmy się teraz wyznaczyć wstawę i dostawę połowy kąta przez jego wstawę. Jeżeli we wzorze (1) art. 83-go weźmiemy $\frac{\alpha}{2}$ zamiast α, otrzymamy

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ nadto mamy}$$

$$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2},$$

stąd zaś
$$\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin\alpha,$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha,$$

zatym

(1) $$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\alpha},$$

(2) $$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\alpha},$$

stąd zaś

(3) $$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha}),$$

(4) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha}),$$

Przyszliśmy do wzorów, pokazujących nam, w jaki sposób $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ dają się wyrazić przez $\sin\alpha$; że zaś te wzory wyprowadzone zostały ze wzorów, służących dla jakiegokolwiek kąta α, przeto wzory (3) i (4) mają miejsce także dla jakiegokolwiek kąta α, czyli są wzorami ogólnemi.

95. Wzory powyższe pokazują nam, że danej wstawie kąta odpowiadają cztery wartości wstawy i cztery wartości dostawy połowy kąta. Przyczynę tego możemy wyjaśnić w sposób następujący. Niech α będzie jednym z tych kątów, którego mamy daną wstawę, wtedy $n\pi+(-1)^n\alpha$ będzie nam wyobrażać wszystkie kąty, których wstawa będzie takąż-samą jak dla kąta α, zatym wyrażenie $\sin\frac{\alpha}{2}$ przez $\sin\alpha$, dawać nam powinno wstawy wszystkich kątów, wynikających ze wzoru $\frac{1}{2}(n\pi+(-1)^n\alpha)$. Przypuśćmy, że n jest parzyste $=2m$, natenczas

$$\sin\frac{1}{2}\left\{n\pi+(-1)^n\alpha\right\}=\sin\left(m\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin m\pi\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$+\cos m\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\cos m\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sin\frac{\alpha}{2};$$

jeżeli n jest nieparzyste i równe $2m+1$, natenczas

$$\sin\frac{1}{2}\left\{n\pi+(-1)^n\alpha\right\}=\sin\left(m\pi+\frac{\pi-\alpha}{2}\right)=\sin m\pi\cos\frac{\pi-\alpha}{2}$$
$$+\cos m\pi\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=\cos m\pi\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=\pm\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Otrzymujemy więc cztery wartości wstawy połowy kąta, gdy dana jest wstawa tegoż kąta.

Podobnież, wyrażenie, które nam daje dostawę $\frac{\alpha}{2}$ przez wstawę α, powinno nam dostarczać dostawy wszystkich tych kątów, które wynikają ze wzoru $\frac{1}{2}(n\pi+(-1)^n\alpha)$.

Jeżeli n parzyste $= 2m$, natenczas

$$\cos\frac{1}{2}(n\pi + (-1)^n\alpha) = \cos\left(m\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos m\pi \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$-\sin m\pi \sin\frac{\alpha}{2} = \cos m\pi \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\cos\frac{\alpha}{2};$$

jeżeli zaś n nieparzyste $= 2m + 1$, natenczas

$$\cos\frac{1}{2}(n\pi + (-1)^n\alpha) = \cos\left(m\pi + \frac{\pi-\alpha}{2}\right) = \cos m\pi \cos\frac{\pi-\alpha}{2}$$

$$-\sin m\pi \sin\frac{\pi-\alpha}{2} = \cos m\pi \cos\frac{\pi-\alpha}{2} = \pm\cos\frac{\pi-\alpha}{2} = \pm\sin\frac{\alpha}{2}.$$

otrzymujemy więc cztery wartości dostawy połowy kąta, gdy dana jest wstawa tegoż kąta.

96. Z tego, cośmy powiedzieli w artykule poprzedzającym, wynika, że jeżeli co do kąta α nie mamy żadnego bliższego określenia, wtedy nie możemy także określić, które z podwójnych znaków, zachodzących we wzorach (3) i (4), brać należy, a tymsamym otrzymujemy dla $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ po cztery różne wartości. Jeżeli jednak kąt α, jest dany, lub też wiadomo nam, w której ćwiartce układu położone jest ramię końcowe kąta, w takim razie możemy w każdym przypadku, bez żadnej trudności wskazać, który ze znaków brać należy. Jakoż, przypuśćmy, że kąt α znajduje się w pierwszej ćwiartce układu spółrzędnych i przypada między 0 i $\frac{\pi}{2}$, wtedy kąt $\frac{\alpha}{2}$ przypadać będzie między 0 i $\frac{\pi}{4}$, w tym przypadku $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ są dodatne nadto $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$. Rozważając równania (1) i (2) widzimy, że lewa strona równania (1) jest dodatna, przeto pierwiastek po prawej stronie należy wziąć ze znakiem $+$, że zaś lewa strona równania (2) jest ujemna, przeto pierwiastek po prawej należy wziąć ze znakiem $-$. Jeżeli więc α przypada między 0 i $\frac{\pi}{2}$, mieć będziemy

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin\alpha},$$

zatym

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}).$$

Załóżmy powtóre, że kąt α przypada między $\frac{3}{2}\pi$ i 2π, w tym razie kąt $\frac{\alpha}{2}$ przypadać będzie między $\frac{3}{4}\pi$ i π. W tym przypadku $\cos\frac{\alpha}{2}$ jest ujemna, $\sin\frac{\alpha}{2}$ zaś dodatna i co do wartości bezwzględnej mniejsza od $\cos\frac{\alpha}{2}$, zatym lewa strona równania (1) jest ujemna, przeto pierwiastek po prawej stronie należy wziąć ze znakiem —; lewa zaś strona równania (2) jest dodatna, przeto pierwiastek po prawej należy wziąć ze znakiem +. Jeżeli więc α przypada między $\frac{3}{2}\pi$ i 2π, mamy

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{1+\sin\alpha},$$

zatym

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right\},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right\}.$$

97. Możemy łatwo wskazać ogólne prawidło na wyznaczenie znaków dla wyrażeń $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$ i $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}$ a tymsamym i dla $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$. Jakoż, wiemy, że

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Wyrażenie po prawej jest dodatne, gdy $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ przypada między $2n\pi$ i $(2n\pi+1)\pi$, jest zaś ujemne, gdy $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ przypada między $(2n+1)\pi$ i $(2n+2)\pi$, gdzie w obu razach n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zerem. Zatym $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$ będzie dodatne, gdy

$\frac{\alpha}{2}$ przypada między $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ i $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, będzie zaś ujemne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{7}{4}\pi$; w szczególności, gdy $n = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ będzie dodatne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $-\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$, będzie zaś ujemne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $\frac{3}{4}\pi$ i $\frac{7}{4}\pi$.

Ponieważ znowu

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

przeto, rozumując w sposób powyżej przytoczony, znajdziemy, że $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}$ będzie dodatne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ i $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$, będzie zaś ujemne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{9}{4}\pi$; gdzie n oznacza liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zerem. W szczególności, gdy $n = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}$ będzie dodatne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4}$, będzie zaś ujemne, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $\frac{5}{4}\pi$ i $\frac{9}{4}\pi$.

Dla wyjaśnienia tego prawidła przypuśćmy, że zachodzi potrzeba znalezienia kąta α, dla którego

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

W tym przypadku, we wzorach (1) i (2) należy brać znaki dolne t. j. —. Ponieważ we wzorze (1) bierzmy znak — przeto, na zasadzie tego co się powyżej powiedziało, kąt $\frac{\alpha}{2}$ przypada między $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{7}{4}\pi$; ponieważ zaś we wzorze (2) bierzemy znak —, przeto kąt $\frac{\alpha}{2}$ przypadać będzie między $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{9}{4}$. Kombinując te dwie wartości krańcowe kąta $\frac{\alpha}{2}$, przychodzimy do wniosku ostatecznego, że kąt $\frac{\alpha}{2}$ przypada między

$$2n\pi + \frac{5}{4}\pi \text{ i } 2n\pi + \frac{7}{4}\pi,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zerem.

98. Wzory na styczną i dostyczną połowy kąta.

Dla wyprowadzenia wzoru na styczną połowy kąta przez styczną tegoż kąta, uważamy, że jeżeli we wzorze (3) art. 83-go zamiast α weźmiemy $\frac{\alpha}{2}$, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \text{ a stąd}$$

(1) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Podwójną wartość, jaką otrzymaliśmy dla $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, możemy wyjaśnić w sposób następujący. Jeżeli α jest jednym z tych kątów, którego styczna jest dana, natenczas $n\pi + \alpha$ przedstawia nam wszystkie kąty, których styczna jest taką samą jak styczna kąta α; wyrażenie zatym, które nam daje $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, powinno nam dawać wartości stycznej wszystkich kątów, wynikających ze wzoru $\frac{1}{2}(n\pi + \alpha)$. Jeżeli przypuścimy, że n parzyste $= 2m$, natenczas

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(n\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\left(m\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

jeżeli zaś n nieparzyste $= 2m + 1$, natenczas

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(n\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\left(m\pi + \frac{\pi+\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{2} = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

mamy więc dwie różne wartości $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, gdy daną jest styczna kąta α, co też pokazuje wzór (1).

Z tego, cośmy powiedzieli, wynika, że gdy daną jest styczna pewnego kąta, wypadają zawsze dwie wartości stycznej połowy kąta. Jeżeli jednak danym jest kąt α albo też wskazanym jest, w której ćwiartce układu znajduje się ramię końcowe kąta α, będziemy wiedzieli tymsamym, kiedy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ jest dodatna, a kiedy ujemna, a zatym nie mamy wtedy wątpliwości co do tego, z jakim znakiem należy wziąć pierwiastek.

99. Możemy także wyrazić styczną połowy kąta przez wstawę i dostawę tegoż kąta. Jakoż wiemy, że

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{i } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

stąd zaś na mocy związków (6) art. 83-go,

(1) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

(2) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

podstawiając w którymkolwiek z tych związków $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ zamiast $\sin\alpha$, otrzymamy

(3) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

100. W podobny sposób możemy otrzymać wzory na dostyczną połowy kąta, mianowicie:

(1) $$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha=\operatorname{cotg}\alpha\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha},$$

(2) $$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

(3) $$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

(4) $$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$

FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE TRZECIEJ CZĘŚCI KĄTA.

101. Równanie dające $\cos\frac{\alpha}{3}$, gdy daną jest dostawa kąta α.

Jeżeli we wzorze (2) artykułu 87-go

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

zamiast α weźmiemy $\frac{\alpha}{3}$, otrzymamy

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Jeżeli w tym wzòrze założymy $\cos\alpha = u$, zaś $\cos\frac{\alpha}{3} = x$, otrzymamy

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{u}{4} = 0.$$

Równanie to, jak nas uczy Algiebra, posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, otrzymujemy więc dla x, a tymsamym dla $\cos\frac{\alpha}{3}$ trzy wartości. Możemy tego dowieść w sposób następujący. Jeżeli θ jest jednym z kątów, którego dostawa jest $= u$, wielkości kąta α dają się przedstawić (art. 45-ty) w kształcie

$$\alpha = 2n\pi \pm \theta,$$

a tymsamym wartości x w kształcie

$$x = \cos\left(\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\theta}{3}\right),$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą dodatną lub ujemną, albo także zero. Jakąkolwiek liczbą byłoby n, możemy ją napisać w kształcie $n = 3m + k$, gdzie $k = 0$, 1 lub 2; mamy więc

$$\alpha = \cos\left(2m\pi + \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\theta}{3}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\theta}{3}\right),$$

ecz kąty

$$-\frac{\theta}{3},\ \frac{4\pi}{3} - \frac{\theta}{3},\ \frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3},$$

mają teżsame dostawy co i kąty

$$\frac{\theta}{3},\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{4},\ \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3},$$

zatym x ma trzy różne wartości mianowicie:

$$\cos\frac{\theta}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right),$$

i więcej ich mieć nie może.

102. Równanie dające $\sin\frac{\alpha}{3}$, gdy daną jest wstawa kąta α.

Jeżeli we wzorze (1) art. 87-go, mianowicie:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

zamiast α, weźmiemy $\frac{\alpha}{3}$, otrzymamy

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3},$$

a zakładając $\sin\alpha = u$, $\sin\frac{\alpha}{3} = x$, przyjdziemy do równania

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{u}{4} = 0.$$

Równanie to, jak nas uczy Algiebra, posiada trzy pierwiastki rzeczywiste otrzymujemy więc dla x, a tymsamym dla $\sin\frac{\alpha}{3}$ trzy różne wartości. Możemy tego dowieść w sposób następujący. Niech θ będzie jednym z tych kątów, którego wstawa jest $= u$, natenczas wielkości kąta α dają się wtedy przedstawić (art. 43-ci) w kształcie

$$n\pi + (-1)^n\theta,$$

a tymsamym wartości x w kształcie

$$x = \sin\left(\frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\theta}{3}\right),$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą dodatną lub ujemną albo także zero. Gdy n parzyste $= 2m$, mamy

$$x = \sin\left[\frac{2m\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right],$$

gdy zaś n nieparzyste $= 2m + 1$,

$$x = \sin\left[\frac{(2m+1)\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right].$$

Lecz jakąkolwiek liczbą byłoby m możemy je przedstawić w kształcie $3p + k$, biorąc za k zero, 1 lub 2. W tym więc razie wzory powyższe przyjmą kształt

$$x = \sin\left(2p\pi + \frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) = \sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right),$$

$$x = \sin\left(2p\pi + \frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\theta}{3}\right) = \sin\left(\frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\theta}{3}\right).$$

Że zaś kąty

$$\frac{3\pi}{3} - \frac{\theta}{3},\quad \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3},\quad \frac{5\pi}{3} - \frac{\theta}{3},$$

mają teżsame wstawy co i kąty

$$\frac{\theta}{3},\quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3},\quad \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3},$$

przeto x ma trzy wartości różne

$$\sin\frac{\theta}{3},\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right),$$

i więcej ich mieć nie będzie.

103. Równanie na $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, gdy daną jest styczna kąta α.

Jeżéli we wzorze (1) art. 88-go, to jest we wzorze

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

zamiast α weźmiemy $\frac{\alpha}{3}$, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}},$$

a zakładając $\operatorname{tg}\alpha = u$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} = x$, przyjdziemy do następującego równania

$$x^3 - 3ux^2 - 3x + u = 0.$$

Z tego równania widzimy, że zadanie znalezienia wartości $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ zawisłym jest od rozwiązania równania stopnia trzeciego. Równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste, o czym można się przekonać w sposób następujący. Niech θ będzie jednym z kątów, którego styczna jest $=u$, natenczas na zasadzie art. 48-go wszystkie kąty, mające styczną takąż samą co i kąt θ, dają się przedstawić w kształcie

$$\alpha = n\pi + \theta,$$

a stąd

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right).$$

Jeżeli założymy $n = 3m + k$, gdzie $k = 0$, 1 lub 2, wzór poprzedzający przyjmie kształt

$$x = \operatorname{tg}\left(m\pi + \frac{k\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right),$$

stąd wynika, że na α otrzymujemy trzy wartości

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{3},\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\theta}{3}\right),$$

i więcej ich być nie może.

Jeżeli w szczególności u jest nieskończenie wielkie, równanie sprowadza się do

$$3x^2 - 1 = 0,$$

które ma jedynie dwa pierwiastki $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponieważ zaś w tym przypadku $\theta = \frac{\pi}{2}$, przeto trzema pierwiastkami równania są

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi,$$

stąd wypada, że dla $u = \infty$ jeden z pierwiastków jest nieskończenie wielki pozostałemi zaś pierwiastkami są $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ i $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$. Mamy zatym

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

104. W ogólności jeżeli chcemy otrzymać $\sin\frac{\alpha}{m}$, $\cos\frac{\alpha}{m}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{m}$, gdy są nam odpowiednio znane $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, szukamy naprzód równania, któreby nam dawało wartości $\sin m\alpha$, $\cos m\alpha$, lub $\operatorname{tg} m\alpha$, odpowiednio przez $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, lub $\operatorname{tg}\alpha$. W tych równaniach kładziemy $\frac{\alpha}{m}$ zamiast α, przez co otrzymujemy równanie, z którego wypada nam znaleść nieznane. Równania w ten sposób otrzymane będą stopnia m-go lub $2m$-go. Należy zauważyć, że gdy m jest potęgą liczby 2, rozwiązanie równania sprowadza się do rozwiązania równania stopnia drugiego, albowiem mając wyrażenia $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ przez $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ lub $\operatorname{tg}\alpha$, możemy w ten sam sposób, znaleść $\sin\frac{\alpha}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$; $\sin\frac{\alpha}{8}$, $\cos\frac{\alpha}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$; i t. d.

PRZYKŁADY.

1) Wyrazić $\sin\frac{1}{2}$ przez $\sin\alpha$, gdy α przypada między 450° i 630°.

Odp. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right).$

2) Wyrazić $\cos\frac{1}{2}\alpha$ przez $\cos\alpha$, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między 405° i 495°.

Odp. $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right).$

3) Wyrazić $\sin\frac{\alpha}{2}$ przez $\sin\alpha$, gdy $\frac{\alpha}{2}$ przypada między -45^0 i -135^0.

Odp. $\sin\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})$.

4) Znaleść wartości krańcowe, między któremi znajdować się winien kąt α, aby $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})$.

Odp. $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$.

5) Znaleść wartości krańcowe, między któremi znajdować się winien kąt α, aby $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})$.

Odp. $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ i $2n\pi + \frac{\pi}{4}$.

6) Znaleść wartości krańcowe, między któremi znajdować się winien kąt α, aby $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha})$.

Odp. $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$ i $2n\pi + \frac{7}{4}\pi$.

Dowieść następujących związków:

7) $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]^2$.

8) $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$,

9) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sec\alpha$.

10) $\sin^4\alpha + 2\cos\beta\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \left(\sin\frac{\beta}{2}\sin 2\alpha\right)^2$.

11) $1 + \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$.

12) Jężeli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2 - \sqrt{3}$ znaleść $\sin\alpha$. *Odp.* $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

WZORY NA SUMMĘ LUB RÓŻNICĘ WSTAW I DOSTAW KĄTA, TUDZIEŻ ICH ILOCZYNY.

105. Jeżeli wzory na $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$, dodamy do siebie lub odejmiemy stronami odpowiedniemi, i tożsamo uczynimy z wzorami na $\cos(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha-\beta)$, przyjdziemy do następujących wzorów:

(1) $$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

(2) $$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta,$$

(3) $$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$

(4) $$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta,$$

jeżeli w tych wzorach założymy $\alpha+\beta=p$ i $\alpha-\beta=q$, skąd $\alpha=\frac{p+q}{2}$, $\beta=\frac{p-q}{2}$, otrzymamy następujące wzory:

(5) $$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

(6) $$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

(7) $$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

(8) $$\cos q-\cos p=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Przyszliśmy więc do wzorów, które nam pozwalają summę lub różnicę wstaw i dostaw wyrazić przez odpowiednie iloczyny tychże funkcyj trygonometrycznych.

Wzory (1), (2), (3) i (4) możemy napisać w kształcie:

(9) $$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),$$

(10) $$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),$$

(11) $$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),$$

(12) $$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

Otrzymujemy więc wzory, które nam pokazują, w jaki sposób iloczyn wstawy przez dostawę, iloczyn dostaw i iloczyn wstaw możemy wyrazić przez summę lub różnicę wstaw lub dostaw kątów odpowiednich.

Wzory wyprowadzone powyżej mają ważne zastosowania w badaniach funkcyj trygonometrycznych, o czym się przekonamy poniżej, wskazując w jaki sposób przy ich pomocy przychodzi się częstokroć do bardzo prostych związków, które pozwalają rozwiązać wiele zadań matematycznych.

106. Wzory artykułu poprzedzającego doprowadzają nas do innych godnych uwagi wzorów, a mianowicie:

$$(1) \qquad \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p-q)}.$$

$$(2) \qquad \frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q),$$

$$(3) \qquad \frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(p-q),$$

$$(4) \qquad \frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p-q),$$

$$(5) \qquad \frac{\sin p - \sin q}{\cos p - \cos p} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(p+q),$$

$$(6) \qquad \frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(p-q);$$

Jeżeli we wzorach na summę wstaw i różnicę dostaw

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta,$$

założymy $\alpha = 30^0$, i napiszemy α zamiast β, natenczas otrzymamy

$$\sin(30^0 - \alpha) + \sin(30^0 - \alpha) = 2 \sin 30^0 \cos\alpha,$$

$$\cos(30^0 - \alpha) - \cos(30^0 + \alpha) = 2 \sin 30^0 \sin\alpha,$$

że zaś $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, przeto

$$(7) \qquad \sin(30^0 + \alpha) + \sin(30^0 - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$(8) \qquad \cos(30^0 - \alpha) - \cos(30^0 + \alpha) = \sin\alpha,$$

otrzymujemy więc dwa wzory podane przez Euler'a, które, jakto poniżej zobaczymy, bardzo są użyteczne przy obliczaniu tablic funkcyj trygonometrycznych.

PRZYKŁADY.

Dowieść następujących związków:

1) $\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^0 - \alpha)$.

2) $2 \sin\alpha \cos 3\alpha = \sin 4\alpha - \sin 2\alpha$.

3) $2 \sin\alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 4\alpha$.

4) $2\sin 2\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha + \sin\alpha.$

5) $2\cos\alpha\cos 2\alpha = \cos 3\alpha + \cos\alpha.$

6) $\cos 3\alpha\cos 4\alpha = \frac{1}{2}\cos 7\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha.$

7) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha.$

8) $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha = 1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha.$

9) $4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 3\alpha = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha.$

10) $8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha = 1 - \cos 6\alpha - \cos 8\alpha + \cos 10\alpha.$

11) $\sin\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

12) $\sin 3\alpha - \sin\alpha = 2\cos 2\alpha\sin\alpha.$

13) $\cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 2\cos\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$

14) $\cos 3\alpha - \cos 4\alpha = 2\sin\frac{7}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$

15) $\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin 45^0\cos(45^0 - \alpha).$

16) $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^0 - \alpha).$

17) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha - 1.$

18) $4\cos\alpha\cos(120^0 - \alpha)\cos(120 + \alpha) = \cos 3\alpha.$

19) $\sin(\alpha - \beta)\sin\gamma + \sin(\beta - \gamma)\sin\alpha + \sin(\gamma - \alpha)\sin\beta = 0.$

20) $\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha = \sin\beta.$

21) $\frac{1 - \operatorname{tg}(45^0 - \varphi)}{1 + \operatorname{tg}(45^0 + \varphi)} = \operatorname{tg}\varphi.$

22) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$

23) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$

24) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta = 1.$

25) $\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^0) + \cos(\alpha - 120^0) = 0.$

WARTOŚCI FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH, NIEKTÓRYCH KĄTÓW SZCZEGÓLNYCH.

107. W artykułach 54-ym, 55-ym i 56-ym podaliśmy wartości funkcyj trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60°. Obecnie pokażemy, w jaki sposób, używając wzorów, podanych w artykułach poprzedzających, możemy otrzymać wartości niektórych kątów szczególnych.

108. Funkcyje trygonometryczne kątów 15^0 i 75^0, czyli $\frac{\pi}{12}$ i $\frac{5}{12}\pi$.

Ponieważ kąt $15^0 = 45^0 - 30^0$, przeto używając wzorów na wstawę różnicy dwu kątów, otrzymamy

$$\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0,$$

podstawiając zamiast $\sin 45^0$, $\cos 45^0$, $\sin 30^0$ i $\cos 30^0$, wartości otrzymane w art. 54-ym i 55-ym, mieć będziemy

$$\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{1}{2}, \text{ czyli}$$

$$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1),$$

a że wstawa kąta danego równa się dostawie kąta dopełnienia, przeto będziemy mieli

(1) $$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Podobnież stosując wzór na dostawę różnicy dwu kątów do $15^0 = 45^0 - 30^0$, otrzymamy

(2) $$\cos 15^0 = \sin 75^0 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

Mając zaś wyrażenia na wstawę lub dostawę kąta, otrzymamy na mocy wzorów, podanych w art. 52-gim, wartości pozostałych funkcyj trygonometrycznych

$$\operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{cotg} 75^0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}, \text{ czyli}$$

(3) $$\operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{cotg} 75^0 = 2 - \sqrt{3},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 15^0 = \operatorname{tg} 75^0 = 2 + \sqrt{3},$$

Do wyrażeń wstawy lub dostawy kąta 15^0, moglibyśmy przyjść szukając ich wartości, jako wstawy lub dostawy połowy kąta 30^0, na mocy bowiem wzorów (1) i (2) art. 91-go,

$$\sin 15^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^0}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 15^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^0}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}},$$

na mocy zaś wzoru (1) i (2) art. 94-go,

$$\sin 15^0 = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 30^0} - \sqrt{1-\sin 30^0}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 15^0 = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 30^0} + \sqrt{1-\sin 30^0}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

109. Funkcyje trygonometryczne kątów 18^0 i 72^0, czyli $\frac{\pi}{10}$ i $\frac{2}{5}\pi$.

Jeżeli $\alpha = 18^0$, natenczas $5\alpha = 90^0$, stąd

$$2\alpha = 90^0 - 3\alpha, \text{ zatym}$$

$$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha,$$

podstawiając zamiast $\sin 2\alpha$ i $\cos 3\alpha$ ich wartości z równań (1) art. 83-go i równań (2) art. 87-go, znajdziemy

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \text{ stąd}$$

$$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3, \text{ a że } \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$$

przeto $2\sin\alpha = 1 - 4\sin^2\alpha$, zatym

$$\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{4}, \text{ stąd}$$

$$\sin\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

a że wstawa kąta 18^0 jest dodatna, przeto

(1) $$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Mając $\sin 18^0$, znajdziemy zapomocą wzoru (1) art. 52-go,

$$\cos 18^0 = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}},$$

czyli

(2) $$\cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Wzory (1) i (2) doprowadzają nas do wzorów na styczną i dostyczną kątów 18^0 i 72^0, mianowicie:

$$\operatorname{tg} 18^0 = \operatorname{cotg} 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}},$$

czyli

(3) $$\operatorname{tg} 18^0 = \operatorname{cotg} 72^0 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},$$

(4) $$\operatorname{cotg} 18^0 = \sin 72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

110. Funkcyje trygonometryczne kątów 36^0 i 54^0, czyli $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{3}{10}\pi$.

Jeżeli wzory (6) artykułu 83-go,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

zastosujemy do przypadku $\alpha = 18^0$, znajdziemy

$$\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \text{ zatym}$$

(1) $$\cos 36^0 = \sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

że zaś

$$\sin 36^0 = \sqrt{1-\cos^2 36^0} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}},$$

przeto

(2) $$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

Mając zaś $\sin 36^0$ i $\cos 36^0$, znajdziemy

$$\operatorname{tg} 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{4}}.$$

zatym

(3) $$\operatorname{tg} 36^0 = \operatorname{cotg} 54^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

zaś $$\operatorname{cotg} 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, \text{ zatym}$$

(4) $$\operatorname{cotg} 36^0 = \operatorname{tg} 54^0 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},$$

Wartości sin 36^0 i cos 36^0 możemy także wyprowadzić na mocy wzorów na wstawę kąta podwójnego. Jakoż wiemy, że

$$2\sin 36^0 \cos 36^0 = \sin 72^0,$$

$$2\sin 72^0 \cos 72^0 = \sin 144^0 = \sin 36^0,$$

z pomnożenia tych równań stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$4\cos 36^0 \cos 72^0 = 1, \text{ czyli}$$

$$4\sin 54^0 \sin 18^0 = 1,$$

stąd, na mocy wzorów (12) artykułu 105-go, mieć będziemy

$$\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{1}{2},$$

podnosząc do kwadratu, otrzymamy

$$\cos^2 36 - 2\cos 36^0 \cos 72^0 + \cos^2 72^0 = \frac{1}{4},$$

że zaś

$$4\cos 36^0 \cos 72^0 = 1,$$

przeto z dodania tych równań stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$(\cos 36^0 + \cos 72^0)^2 = \frac{5}{4}, \text{ stąd}$$

$$\cos 36^0 + \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

mając zaś summę dostaw i ich różnicę znajdziemy obie dostawy, mianowicie

$$\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

otrzymaliśmy więc wzór (1), jak również wzór (1) art. 109-go.

111. Funkcyje trygonometryczne kątów 9^0 i 81^0, czyli $\frac{\pi}{20}$ i $\frac{9}{20}\pi$.

Jeżeli we wzorach (3) i (4) art. 94-go, mianowicie:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \mp\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

zamiast kąta α weźmiemy 18^0 i pamiętać będziemy o prawidle na znaki, jakie podaliśmy w art. 96-ym, otrzymamy

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 18^0} - \sqrt{1-\sin 18^0}\right),$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 18^0} + \sqrt{1-\sin 18^0}\right),$$

podstawiając zamiast $\sin 18^0$ wartość ze wzoru (1) art. 109-go, mieć będziemy

$$(13) \qquad \sin 9^0 = \cos 81^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4},$$

$$(14) \qquad \cos 9^0 = \sin 81^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

Mając zaś $\sin 9^0$, $\cos 9^0$, $\sin 81^0$ i $\cos 81^0$, znajdziemy pozostałe funkcyje trygonometryczne.

112. Funkcyje trygonometryczne kątów 12^0 i 78^0, czyli $\frac{\pi}{15}$ i $\frac{13}{30}\pi$.

Wiemy, że $12^0 = 30^0 - 18^0$, jeżeli więc zastosujemy wzory na wstawę i dostawę różnicy dwu kątów do kąta $30^0 - 18^0$, otrzymamy

$$\sin 12^0 = \sin 30^0 \cos 18^0 - \cos 30^0 \sin 18^0,$$

$$\cos 12^0 = \cos 30^0 \cos 18^0 + \sin 30^0 \sin 18^0,$$

podstawiając wartości wstawy i dostawy kątów 30^0 i 18^0, znajdziemy

$$(1) \qquad \sin 12^0 = \cos 78^0 = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}-1),$$

$$(2) \qquad \cos 12^0 = \sin 78^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1),$$

Mając zaś wstawę i dostawę kątów 12^0 i 78^0, znajdziemy wartości pozostałych funkcyj trygonometrycznych tychże kątów.

113. Funkcyje trygonometryczne kątów 3^0 i 87^0, czyli $\frac{\pi}{60}$ i $\frac{29}{60}\pi$.

Ponieważ $3^0 = 18^0 - 15^0$; przeto, jeżeli do kąta $18^0 - 15^0$ zastosujemy wzory na wstawę i dostawę różnicy dwu kątów, otrzymamy

$$\sin 3^0 = \sin 18^0 \cos 15^0 - \cos 18^0 \sin 15^0,$$

$$\cos 3^0 = \cos 18^0 \cos 15^0 + \sin 18^0 \sin 15^0,$$

podstawiając wartości wstawy i dostawy kątów 15° i 18°, otrzymane w artykułach poprzedzających, znajdziemy

$$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

(1)
$$= \frac{1}{8}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 3^\circ = \sin 87^\circ = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)\right\}$$

(2)
$$= \frac{1}{8}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}\right],$$

a następnie pozostałe funkcyje trygonometryczne kątów 3° i 87°.

114. Sposób postępowania w artykułach poprzedzających wskazuje nam możliwość znalezienia funkcyj trygonometrycznych kątów 6°, 21°, 24°, 27°, 33°, 39° i 42°, a tymsamym i funkcyj trygonometrycznych kątów dopełniających.

115. Jeżeli we wzorach wyprowadzonych w artykułach poprzedzających na wstawy i dostawy kątów 3°, 9°, 12°, 15°, 18°, 30°, 36° i 45° wykonamy wskazane działania i ograniczymy się w obliczeniu do 7 cyfr dziesiętnych, znajdziemy

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= 0{,}0523360,\\
\cos 3^\circ &= 0{,}9986295,\\
\sin 9^\circ &= 0{,}1564345,\\
\cos 9^\circ &= 0{,}9876883,\\
\sin 12^\circ &= 0{,}2079117,\\
\cos 12^\circ &= 0{,}9781476,\\
\sin 15^\circ &= 0{,}2588190,\\
\cos 15^\circ &= 0{,}9659258,\\
\sin 18^\circ &= 0{,}3090170,\\
\cos 18^\circ &= 0{,}9510565,\\
\sin 30^\circ &= 0{,}5,\\
\cos 30^\circ &= 0{,}8660254,\\
\sin 36^\circ &= 0{,}5877853,\\
\cos 36^\circ &= 0{,}8090170,\\
\sin 45^\circ &= 0{,}7071068,\\
\cos 45^\circ &= 0{,}7071068.
\end{aligned}$$

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ TRYGONOMETRYCZNYCH. KĄTY POSIŁKOWE.

116. Wzory dotąd wyprowadzone są zwykłemi tożsamościami i pozwalają przekształcać pewne wyrażenia trygonometryczne na inne częstokroć prostsze i dogodniejsze do obliczeń. Przy obliczaniu wyrażeń trygonometrycznych pożądaną jest rzeczą, aby do tych wyrażeń zachodziły iloczyny funkcyj trygonometrycznych. Widzieliśmy w art. 105-ym, w jaki sposób summę wstaw lub dostaw możemy wyrazić przez iloczyny odpowiednich funkcyj trygonometrycznych. Otóż, w niniejszym ustępie chcemy pokazać, w jaki sposób, bądź bezpośrednio, bądźteż przy użyciu tak zwanych kątów posiłkowych, wyrażenia dość skomplikowane możemy przekształcać na inne, w które wchodziłyby iloczyny funkcyj trygonometrycznych, a tymsamym na wyrażenia dogodne do rachunku logarytmami. Częstokroć zapomocą przekształceń przychodzimy do nowych związków, zachodzących między funkcyjami trygonometrycznemi.

117. Przypuśćmy, że wyrażenie

$$S = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

chcemy przekształcić na inne, do którego wchodziłyby iloczyny funkcyj trygonometrycznych. Uważmy, że $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$ stanowi trzy wyrazy iloczynu $(1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$, zatym

$$S = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

ostatnie trzy wyrazy, wzięte ze znakiem przeciwnym, stanowią kwadrat wyrażenia $\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma$, zatym

$$S = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2, \text{ czyli}$$

$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2.$$

Rozkładając różnicę kwadratów na iloczyn summy pierwiastków przez ich różnicę, będziemy mieli

$$S = [\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma] \times [\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma];$$

Na mocy wzorów na dostawę summy i różnicy dwu kątów, otrzymamy

$$S = [\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma][\cos\gamma - \cos(\alpha + \beta)],$$

rozkładając różnicę dostaw na iloczyny według wzorów (8) art. 105-go, znajdziemy

$$S = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$(1) \qquad = 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}.$$

Z tego wzoru wypada, że jeżeli w szczególności kąty α, β i γ są kątami płaskiemi kąta bryłowego trójściennego, wyrażenie powyższe jest dodatne. Jakoż, w tym przypadku każdy z kątów α, β, γ, jest dodatny i mniejszy od summy dwu pozostałych, a ich summa jest mniejsza od 2π; przeto każdy z kątów wchodzących po prawej stronie równania (1) jest większy od zera, a mniejszy od π, zatym każda z wstaw jest różna od zera i dodatna, a tymsamym i iloczyn jest dodatny.

118. Przypuśćmy, że wyrażenie

$$S = \sin\alpha + \sin\alpha + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma), \tag{1}$$

chcemy przeształcić na inne, do którego wchodziłyby iloczyny funkcyj trygonometrycznych. Stosując do wyrażeń $\sin\alpha + \sin\beta$ i $\sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$ wzory (5) i (6) art. 105-go, otrzymamy

$$S = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

stąd

$$S = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\right];$$

zastępując różnicę dostaw przez iloczyn wstaw, na zasadzie wzoru (8) art 105-go, otrzymamy

$$S = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

zatym

$$\begin{aligned} &\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Jeżeli w szczególności przypuścimy, że summa trzech kątów danych, jest równa dwu kątom prostym, czyli że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, natenczas $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, a powyższy wzór przyjmie kształt następujący:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}. \tag{3}$$

Taki zatym związek zachodzi między trzema kątami α, β i γ, gdy ich summa równa się dwu kątom prostym.

Ze względu, że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, wzór powyższy możemy jeszcze napisać w kształcie następującym:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{4}$$

W podobny sposób, w założeniu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, otrzymamy

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \tag{5}$$

119. Niech będzie wyrażenie

(1) $$S = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma),$$

które chcemy przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Stosując do wyrażeń $\cos\alpha + \cos\beta$ i $\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)$, wzory (7) art. 105-go, otrzymamy

$$S = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right];$$

zamieniając summę dostaw na iloczyn, mieć będziemy

$$S = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma-\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma+\alpha-\beta}{4}$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

zatym

(2) $$\begin{aligned}&\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma),\\ &= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Do tego samego wzoru przyjdziemy, gdy we wzorze (3) art. 118-go, zamiast kątów α, β, γ weźmiemy odpowiednio $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$ i $\frac{\pi}{2} - \gamma$.

Jeżeli w szczególności przypuścimy, że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, natenczas z przyczyny, że $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\pi = -1$, mieć będziemy

(3) $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2};$$

taki zatym jest związek, jaki zachodzić winien między trzema kątami, gdy ich summa jest równa dwu kątom prostym.

Ze względu, że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, wzór (3), możemy napisać w kształcie

(4) $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

W podobny sposób, w założeniu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, otrzymamy

(5) $$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 = 0.$$

120. Niech będzie wyrażenie

(1) $$S = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

które chcemy przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Ponieważ $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, przeto

$$S = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma\,[\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

czyli

$$S = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \text{czyli}$$

$$S = \frac{\cos\gamma\sin(\alpha+\beta) + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

zatym

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

przyszliśmy więc do żądanego przekształcenia. Jeżeli w szczególności $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, natenczas z przyczyny, że $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\pi=0$, mieć będziemy

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Taki zatym zachodzi związek między trzema kątami, gdy ich summa jest równa się dwu kątom prostym.

121. *Znaleść summę wstaw i dostaw kątów, tworzących postęp arytmetyczny.*

Niech będzie summa n wstaw kątów, tworzących postęp arytmetyczny, którego różnicą jest kąt λ, t. j. niech będzie

$$(1) \quad S = \sin\alpha + \sin(\alpha+\lambda) + \sin(\alpha+2\lambda) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\lambda),$$

i przypuśćmy, że chcemy znaleść wartość tej summy zapomocą iloczynu funkcyj trygonometrycznych. Pomnożywszy obie strony równości (1) przez $2\sin\frac{\lambda}{2}$, mieć będziemy

$$2\sin\frac{\lambda}{2}\,.\,S = 2\sin\alpha\sin\frac{\lambda}{2} + 2\sin(\alpha+\lambda)\sin\frac{\lambda}{2} + \ldots$$
$$+ 2\sin(\alpha+(n-1)\lambda)\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Jeżeli iloczyn każdych dwu wstaw zastąpimy przez różnicę dostaw, na mocy wzoru (12) art. 105-go, będziemy mieli

$$2\sin\alpha\sin\frac{\lambda}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+\lambda)\sin\frac{\lambda}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3\lambda}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+2\lambda)\sin\frac{\lambda}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{3\lambda}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5}{2}\lambda\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin[\alpha+(n-1)\lambda]\sin\frac{\lambda}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\lambda\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\lambda\right).$$

Dodając do siebie te równości stronami odpowiedniemi, wszystkie wyrazy po prawej stronie się zniosą z wyjątkiem wyrazu pierwszego i ostatniego, i otrzymamy

$$2\sin\frac{1}{2}\,.\,S=\cos\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)-\cos\left[\alpha+\frac{2n-1}{2}\lambda\right]$$
$$=2\sin\left[\alpha+\frac{n-1}{2}\lambda\right]\sin\frac{n\lambda}{2},$$

zatym

(2) $$S=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{n-1}{2}\lambda\right]\sin\frac{n\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}}.$$

W podobny sposób możemy znaleść summę dostaw kątów, tworzących postęp arytmetyczny

(3) $S_1=\cos\alpha+\cos(\alpha+\lambda)+\cos(\alpha+2\lambda)+\ldots+\cos(\alpha+(n-1)\lambda)$.

Jeżeli obie strony tej równości pomnożymy przez $2\sin\frac{\lambda}{2}$ i podwójne iloczyny z dostawy przez $\sin\frac{\lambda}{2}$ zastąpimy przez różnicę wstaw, otrzymamy po dokonaniu redukcyi

$$2S_1\sin\frac{\lambda}{2}=\sin\left[\alpha+\frac{2n-1}{2}\lambda\right]-\sin\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right),$$
$$=2\cos\left[\alpha+\frac{n-1}{2}\lambda\right]\sin\frac{n\lambda}{2},$$

zatym

(2) $$S_1=\frac{\cos\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\lambda\right]\sin\frac{n\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}}.$$

122. Dowiedziemy teraz, że jeżeli między kątami α, β i θ zachodzi związek $\alpha+\beta=\theta$, natenczas

(1) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta=\sin^2\theta.$$

Uważmy naprzód, że

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

czyli

$$\cos\alpha^2 + \cos^2\beta = 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

podstawiając tę wartość $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ w lewą stronę równania (1) i pamiętając, że według założenia $\alpha+\beta=\theta$, otrzymamy

$$1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta, \text{ czyli}$$

$$1 + \cos\theta\,[\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta],$$

rozwijając $\cos(\alpha-\beta)$ według wzoru (2) art. 66-go, otrzymamy

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = 1 - \cos\theta\,[\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]$$
$$= 1 - \cos\theta\cos(\alpha+\beta),$$

a że $\alpha+\beta=\theta$, przeto

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

PRZYKŁADY.

Wyprowadzić następujące związki:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$
$= 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right).$

2) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

3) $\cos 3\theta\sin^3\theta + \sin 3\theta\cos^3\theta = \frac{3}{4}\sin 4\theta.$

4) $\sin 3\theta\sin^3\theta + \cos 3\theta\cos^3\theta = \cos^3 2\theta.$

5) $\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}(60^0+\theta) + \operatorname{tg}(\theta - 60^0) = 3\operatorname{tg} 3\theta.$

6) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\beta+\gamma-\alpha)$
$= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

7) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\alpha+\gamma).$

Dowieść następujących związków w założeniu $\alpha+\beta+\gamma=\pi$:

8) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$

9) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

10) $\cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 1 = 4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma.$

11) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\frac{\pi-\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi-\gamma}{4}.$

12) $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-1=4\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\pi-\beta}{4}\sin\frac{\pi-\gamma}{4}$.

13) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$.

14) $\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=2$.

15) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

16) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}=\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma-2$.

17) Dowieść, że gdy $\alpha+\beta+\gamma=0$,

$$\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)+4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)+1=4\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

18) Dowieść wzoru Euler'a,

$$\sin\alpha+\sin(36^0-\alpha)+\sin(72^0+\alpha)=\sin(36^0+\alpha)+\sin(72^0-\alpha).$$

19) Dowieść wzorów Legendre'a,

$$\cos\alpha=\cos(54^0+\alpha)+\sin(54^0-\alpha)-\sin(18^0+\alpha)-\sin(18^0-\alpha),$$

$$\cos\alpha=\cos(36^0+\alpha)+\cos(36^0-\alpha)-\cos(72^0-\alpha)-\cos(72^0+\alpha).$$

20) Dowieść wzorów Delambre'a,

$$\sin(\alpha+1^0)-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin(\alpha-1^0)-4\sin\alpha\sin^2 30',$$

$$\sin(\alpha+1'')-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin(\alpha-1')-4\sin\alpha\sin^2 30''.$$

123. Kąty posiłkowe.

Funkcyje trygonometryczne, przez użycie tak zwanych kątów posiłkowych, pozwalają nam przekształcać wielomiany na iloczyny pewnych wyrażeń. Samo z siebie wynika, że zadanie sprowadza się przedewszystkim do przekształcenia dwumianu na iloczyn, albowiem podstawiając znaleziony iloczyn zamiast dwu wyrazów wielomianu sprowadzimy dany wielomian do innego, który będzie miał o jeden wyraz mniej; biorąc następnie dwa wyrazy tego nowego wielomianu i przekształcając na iloczyn, otrzymamy nowy wielomian, który będzie miał o dwa wyrazy mniej niż wielomian pierwotny. Postępując ciągle tą drogą przyjdziemy w końcu do jednego wyrazu, który będzie iloczynem pewnych wyrażeń.

124. Przypuśćmy, że dwumian

$$a\pm b,$$

gdzie a i b, oznaczają jakiekolwiek liczby dodatne chcemy zamienić na iloczyn pewnych czynników, nadto że $a>b$.

Rozwiązanie 1-sze. Dwumian powyższy możemy napisać w kształcie

$$a\pm b=a\left(1\pm\frac{b}{a}\right).$$

Wprowadźmy kąt posiłkowy φ taki, aby $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Ponieważ według założenia $\frac{b}{a} < 1$, przeto możemy zawsze znaleść taki kąt φ, który będzie przypadał między 0 i $\frac{\pi}{4}$, a którego styczna będzie równa $\frac{b}{a}$. To wiedząc mieć będziemy

$$a \pm b = a(1 \pm \operatorname{tg}\varphi) = a\,\frac{\cos\varphi \pm \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Lecz

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin\varphi = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

Mamy zatym

$$a + b = \frac{a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos\varphi},$$

$$a - b = \frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos\varphi}.$$

Przyszliśmy więc do wzorów, które pokazują nam, w jaki sposób summę lub różnicę dwu liczb możemy zamienić na iloczyn funkcyj trygonometrycznych.

Rozwiązanie 2-gie.

$$a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Niech φ będzie takim kątem, którego dostawa jest równa $\frac{b}{a}$, czyli kątem wynikającym z równania $\cos\varphi = \frac{b}{a}$. Ponieważ $\frac{b}{a} < 1$, przeto możemy wziąć za kąt φ, kąt zawarty między 0 i $\frac{\pi}{2}$. Według założenia, mieć będziemy

$$a \pm b = a(1 \pm \cos\varphi).$$

Lecz

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},\quad 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

zatym

$$a + b = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad a - b = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Rozwiązanie 3-cie. Rozważmy naprzód

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Połóżmy $\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{b}{a}$, czyli $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$; ponieważ $b < a$, przeto za kąt φ możemy wziąć ten kąt, który przypada między 0 i $\frac{\pi}{4}$. To wiedząc, mieć będziemy

$$a + b = (1 + \mathrm{tg}^2\varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Rozważmy następnie wyrażenie

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right).$$

Jeżeli założymy $\sin^2\psi = \frac{b}{a}$, $\sin\psi = \sqrt{\frac{b}{a}}$, natenczas na kąt ψ możemy wziąć kąt przypadający między 0 i $\frac{\pi}{2}$. To założywszy, otrzymamy

$$a - b = a(1 - \sin^2\psi) = a\cos^2\psi.$$

We wszystkich tych trzech rozwiązaniach przypuszczaliśmy, że potrafimy znaleść kąt φ lub ψ, zadośćczyniące powyższym warunkom. Sposób w jaki przychodzimy do znalezienia kąta, gdy daną jest funkcyja trygonometryczna, wyłożonym będzie w jednym z następnych ustępów.

125. Przypuśćmy, że wyrażenie

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

chcemy przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami. Powyższe wyrażenie możemy napisać w kształcie:

$$x = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}},$$

a jeżeli założymy $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$ i weźmiemy za kąt φ, kąt dodatny lub ujemny, mniejszy co do wartości bezwzględnej od kąta prostego, zadośćczyniący powyższemu równaniu, otrzymamy żądane przekształcenie

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

126. Przypuśćmy, że wyrażenie $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, gdzie $a > b$ chcemy przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Wyrażenie powyższe możemy napisać w kształcie:

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Ponieważ $b < a$, przeto możemy założyć $\sin\varphi = \frac{b}{a}$ i za kąt φ wziąć kąt dodatny mniejszy od $\frac{\pi}{2}$, mieć będziemy

$$x = a\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = a\cos\varphi,$$

otrzymujemy więc żądane przekształcenie.

Zwrócić należy uwagę, że powyższe wyrażenie, bez wprowadzania kąta posiłkowego, daje się przekształcić na wyrażenie dogodne do rachunku logarytmami, albowiem $x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

127. Przypuśćmy, że wyrażenie

$$x = a\sin\alpha + b\cos\alpha,$$

gdzie a i b są liczbami dodatnemi danemi, a kąt α jakimkolwiek kątem, chcemy przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami. Powyższe wyrażenie daje się napisać w kształcie

$$x = a\left[\sin\alpha + \frac{b}{a}\cos\alpha\right],$$

a jeżeli wprowadzimy taki kąt posiłkowy φ, aby $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, natenczas powyższe wyrażenie przyjmie kształt żądany

$$x = a(\sin\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha) = a\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

128. Przypuśćmy wreszcie, że wyrażenie

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha},$$

gdzie a i b są liczbami dodatnemi danemi, a kąt $\alpha < \pi$, chcemy przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Jeżeli zauważymy, że

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

powyższe wyrażenie daje się napisać w kształcie:

$$x=\sqrt{(a^2+b^2)\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)-2ab\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)},\ \text{czyli}$$

$$x=\sqrt{(a+b)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Jeżeli przyjmiemy $a>b$ możemy wziąć za kąt φ taki kąt, któryby zadość czynił równaniu

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

i był dodatny i mniejszy od $\frac{\pi}{2}$. W tym przypadku wyrażenie powyższe przyjmie kształt

$$x=(a+b)\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{a+b}{\cos\varphi}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Zadanie to pokazuje, jak w szczególnych przypadkach trójmiany dają się przekształcić na iloczyny przez wprowadzenie jednego kąta posiłkowego.

129. Nie zawsze jednak przez wprowadzenie jednego kąta posiłkowego, dany dwumian daje się przekształcić na wyrażenie dogodne do rachunku logarytmami. W tych przypadkach osiągamy żądany cel przez wprowadzenie dwu kątów posiłkowych. I tak niech będzie wyrażenie

$$x=a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\beta),$$

gdzie a i b są liczbami dodatnemi lub ujemnemi, a α i β kątami jakiemikolwiek i przypuśćmy, że chcemy to wyrażenie przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami. Mamy

$$x=a\cos\alpha+b\cos\alpha\cos\beta-b\sin\alpha\sin\beta$$

$$=a\left(1+\frac{b}{a}\cos\beta\right)\cos\alpha-b\sin\alpha\sin\beta.$$

Niech φ będzie kątem, którego $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}\cos\alpha$, natenczas, wprowadzając ten kąt do wyrażenia powyższego, mieć będziemy

$$1+\frac{b}{a}\cos\beta=1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{\sin 45^0\cos\varphi+\cos 45^0\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^0+\varphi)}{\cos\varphi},$$

zatym

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^0+\varphi)}{\cos\varphi}\left[\cos\alpha - \frac{b\sin\alpha\sin\beta}{a\sqrt{2}\sin(45^0+\varphi)}\cos\varphi\right].$$

Jeżeli teraz za kąt ψ weźmiemy taki kąt, którego

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b\sin\beta\cos\varphi}{a\sqrt{2}\sin(45^0+\varphi)},$$

natenczas

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^0+\varphi)}{\cos\varphi\cos\psi}\cos(\psi+\alpha),$$

otrzymujemy więc żądane przekształcenie.

PRZYKŁADY.

1) Wyrażenie $\sin\alpha = \cos\theta\cos\beta\cos\alpha + \sin\theta\sin\beta$, gdzie α i β są kątami danemi, przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami, z którego moglibyśmy otrzymać kąt θ.

Odp. Zakładając $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta}$, otrzymamy

$$\sin(\theta+\varphi) = \frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\beta}.$$

2) Przekształcić wyrażenie $x = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, gdzie a i b są liczbami dodatnemi, nadto $a > b$, na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}$, otrzymamy $x = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

3) Wyrażenie $x = a\sin\alpha + \frac{b^2\sin\alpha\sin^2\beta}{a\cos^2\gamma}$ przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin\beta}{a\cos\gamma}$, otrzymamy $x = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\varphi}$.

4) Wyrażenie $x = \frac{a\operatorname{tg}\alpha\sin\gamma + b\cos\alpha}{a\operatorname{tg}\alpha\sin\gamma - b\cos\alpha}$, gdzie a i b są liczbami dodatnemi lub ujemnemi, zaś α i γ jakiemikolwiek kątami, przekształcić na inne dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\cos\alpha}{a\sin\gamma}$, otrzymamy $x = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}$.

5) Wyrażenie $x = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$, gdzie α, β i θ są jakiemikolwiek kątami, przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\alpha\cos\theta}{\cos\alpha}$, otrzymamy $x = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\cos(\varphi \mp \beta)$.

6) Wyrażenie $x = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$, gdzie a i b są liczbami dodatnemi lub ujemnemi, zaś α jakimkolwiek kątem przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{cotg}\alpha$, otrzymamy $x = \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$.

7) Wyrażenie $x = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)$, gdzie $a^2 > b$ przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\frac{b}{a^2} = \sin^2\varphi$, otrzymamy $x = a\sin^2\frac{1}{2}\varphi$.

8) Wyrażenie $x = \frac{a\sin\alpha - b\sin\beta}{\sin\theta}$, gdzie a i b są liczbami dodatnemi lub ujemnemi, zaś α, β i θ jakiemikolwiek kątami, przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}$, otrzymamy $x = \sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{a\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi}$.

9) Wyrażenie $x = 2a\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{m^2 - a^2\cos^2 2\alpha}}$, gdzie a jest liczbą dodatną lub ujemną, zaś α jakimkolwiek kątem przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami.

Odp. Kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2\cos^2 2\alpha}{m^2}$, otrzymamy

$$x = \frac{2a}{m}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha\cos\varphi}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}}.$$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ TRYGONOMETRYCZNYCH.

130. Jeżeli w ogóle dwa wyrażenia są połączone znakiem równości, a wchodzą w nie funkcyje trygonometryczne niewiadomego kąta lub też kilku niewiadomych kątów, i te wyrażenia są sobie równe tylko przy szczególnych wartościach owego lub owych kątów, to mamy wówczas r ó w n a n i e t r y g o n o m e t r y c z n e.

Znalezienie wartości kątów, któreby zadość czyniły danemu równaniu lub też układowi danych równań, zowiemy odpowiednio r o z w i ą z a n i e m równania lub rozwiązaniem układu równań. Jeżeli równanie zawiera jeden tylko kąt niewiadomy, mówimy, że równanie ma jednę niewiadomą; jeżeli zaś mamy kilka kątów niewiadomych, natenczas dla ich znalezienia potrzeba w ogólności mieć tyle równań czyli związków między funkcyjami trygonometrycznemi tych kątów, ile jest kątów niewiadomych.

Jeżeli chcemy rozwiązać jedno równanie trygonometryczne z jedną niewiadomą, za pomocą odpowiedniego przekształcenia równania danego możemy sprowadzić je do innego, któreby zawierało jednę tylko funkcyją trygonometryczną kąta niewiadomego, a wówczas biorąc tę właśnie funkcyją za nową niewiadomą sprowadzimy zadanie nasze do rozwiązania równania algiebraicznego. Rozwiązanie tego ostatniego równania dostarczy nam jednę lub więcej wartości funkcyi trygonometrycznej kąta szukanego. Z otrzymanych w ten sposób wartości funkcyi trygonometrycznej potrafimy, za zasadzie tego co się powiedziało w art. 43-im do 48-go włącznie wnieść o istnieniu kątów, zadośćczyniących danemu równaniu trygonometrycznemu. Samo obliczenie owych kątów we wszelkich przypadkach da się uskutecznić dopiero wtedy, kiedy będziemy znali sposoby wyznaczania kątów z danych ich funkcyj trygonometrycznych, czym się zajmiemy w rozdziale następującym. W szczególnych jednak przypadkach, kiedy z rozwiązania równania algiebraicznego, do którego dane równanie trygonometryczne sprowadzić się daje, wypadną nam jako wartości funkcyj trygonometrycznych — liczby, wyprowadzone w art. 53-im, 54-ym, 55-ym i 108-ym do 112-go, będziemy już mogli tego rodzaju równanie już teraz w zupełności rozwiązać.

Zwrócić należy uwagę, że otrzymane w ten sposób wartości funkcyi trygonometrycznej nie zawsze prowadzą do właściwych rozwiązań równania danego. Wiadomo bowiem, że nie wszystkie wartości mogą przyjmować funkcyje trygonometryczne, a tylko wartości rzeczywiste i przypadające między pewnemi krańcami; z otrzymanych zatym rozwiązań należy brać tylko te, które są możebne, a tymsamym i odpowiednie kąty, zawarte między krańcami, wyznaczonemi z warunków zadania. Którą z funkcyj trygonometrycznych, należy brać za niewiadomą i przez nią wyrażać funkcyje pozostałe zależy od natury równania; w każdym razie wybór funkcyi niewiadomej nie wpływa bynajmniej na ogólny rezultat ostatecznych wypadków. Częstokroć, wyrażając funkcyje trygonometryczne, zachodzące do równania, przez jednę z nich i przekształcając równanie przychodzimy do równania daleko ogólniejszego od równania danego; w tym przypadku po zupełnym rozwiązaniu tego równania, należy brać tylko te wartości, które zadość czynią pierwotnemu równaniu.

Jeżeli mamy rozwiązać układ równań trygonometrycznych, w które wchodzą funkcyje trygonometryczne tylu kątów niewiadomych ile jest równań, natenczas wszystkie funkcyje trygonometryczne każdego kąta wyrażamy przez jednę z nich i układ danych równań trygonometrycznych rozważamy jako układ równań algiebraicznych, w których niewiadomemi są te właśnie funkcyje trygonometryczne kątów szukanych. Po rozwiązaniu względem nich, jeżeli to jest możliwe, układu tych równań algiebraicznych sprowadzamy zadanie do oznaczenia kątów, których funkcyje trygonometryczne są znane.

131. *Przykład 1 szy.* Niech będzie równanie trygonometryczne

$$3\sin x = 2\cos^2 x,$$

które chcemy rozwiązać, to jest znaleść taki kąt x, aby zadość uczynił temu równaniu.

Żeby równanie to rozwiązać, należy jednę z funkcyj trygonometrycznych wyrazić przez pozostałą, to jest albo dostawę wyrazić przez wstawę, lubteż wstawę wyrazić przez dostawę. Jeżeli dostawę wyrazimy przez wstawę, otrzymamy

$$3\sin x = 2 - \sin^2 x.$$

Jeżeli to równanie, jako algiebraiczne, rozwiążemy względem $\sin x$, otrzymamy dla $\sin x$ dwie wartości $\sin x = \frac{1}{2}$, i $\sin x = -2$. Ponieważ wstawa jakiegokolwiek kąta może przypadać jedynie między -1 i $+1$; przeto znaleziona druga wartość -2, jest niemożliwa. Mamy więc jedno tylko rozwiązanie $\sin x = \frac{1}{2}$. Wiemy jednak, że $\sin 30^0 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, przeto kąt $\frac{\pi}{6}$ zadość czyni danemu równaniu i jest najmniejszym z kątów dodatnych, którego wstawa jest równa $\frac{1}{2}$. A że wszystkie kąty, których wstawa jest równa $\frac{1}{2}$ dają się napisać (art. 43-ci) w kształcie $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną, a także zerem, przeto $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ jest ogólnym rozwiązaniem danego równania.

Przypuśćmy teraz, że tożsamo równanie chcemy rozwiązać, przez znalezienie wartości $\cos x$. Podnosząc dane równanie do kwadratu i kładąc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, przyjdziemy do równania

$$4\cos^4 x + 9\cos^2 x = 9,$$

a stąd

$$\cos^2 x = \frac{-9 \pm 15}{8}.$$

W tym wyrażeniu należy wziąć znak $+$ jako jedynie możliwy, skutkiem czego otrzymamy

$$\cos^2 x = \frac{3}{4},$$

zatym

$$\cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Że zaś $\cos 30^0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, przeto $x = \pm\frac{\pi}{6}$. Otrzymaliśmy więc dwie wartości x, gdy tymczasem przy pierwszym rozwiązaniu, otrzymaliśmy tylko jednę wartość. Przyczyną tego jest to, że skutkiem podniesienia do kwadratu danego równania ilość pierwiastków tego równania podwojoną została, bowiem $9\sin^2 x$ jest kwadratem nie tylko $+3\sin x$, ale i $-3\sin x$. Stąd wypada, że postępując tą samą drogą z równaniem $-3\sin x = 2\cos^2 x$, otrzymalibyśmy też samą wartość $\cos x$, zatym otrzymana wartość $\cos x$ daje nam rozwiązanie nie tylko równania $3\sin x = \cos^2 x$. ale i równania $-3\sin x = \cos^2 x$. Z natury jednak zadania wypada, że wstawa kąta szukanego jest dodatna, ramię więc końcowe kąta może się znajdować w pierwszej lub w drugiej ćwiartce układu, zatym i kąty, wynikające z równania $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ należy brać te tylko, które mają końcowe ramię w pierwszej lub drugiej ćwiartce układu. Lecz wszystkie kąty dodatne lub ujemne, których dostawą jest $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, a zakończone są w pierwszej ćwiartce układu dają się napisać w kształcie $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemną albo także zerem; kąty zaś dodatne lub ujemne, zakończone w drugiej ćwiartce układu, których dostawą jest $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dają się napisać w kształcie $(2n+1)\pi - \frac{\pi}{6}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną lub ujemne albo także zerem. Oba te wyrażenia kąta szukanego możemy napisać w kształcie

$$n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6},$$

gdzie n jest liczbą dodatną lub ujemną, albo także zerem. Przychodzimy więc i tą drugą drogą do rezultatu powyżej otrzymanego.

132. *Przykład 2-gi.* Rozwiązać równanie

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

Podstawiając wartości wstawy $2x$ i stycznej x, otrzymamy

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ stąd}$$

$$\sin x\,(2\cos^2 x - 1) = 0.$$

Pierwsza strona tego równania jest iloczynem dwu czynników, przeto równaniu temu możemy zadość uczynić kładąc albo $\sin x = 0$, albo $2\cos^2 x - 1 = 0$. Pierwsze z tych równań daje

$$x = n\pi, \text{ drugie zaś daje}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

a że $\cos 45^0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, przeto $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daje nam wszystkie kąty, które możemy napisać w kształcie $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, że zaś $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, przeto $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, daje nam wszystkie kąty, które wynikają ze wzoru

$$x = 2n\pi \pm \frac{3}{4}\pi.$$

Tym sposobem jako ogólne rozwiązanie powyższego równania otrzymujemy

$$x = n\pi, \quad x = 2n\pi \pm \frac{1}{4}\pi, \quad x = 2n\pi \pm \frac{3}{4}\pi.$$

133. *Przykład 3-ci.* Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}x - 2}{\operatorname{tg}x + 2}.$$

Znosząc mianownik w tym równaniu, otrzymamy

$$(\operatorname{tg}x + 2)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}x - 2, \text{ a stąd}$$

$$\operatorname{tg}x\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 2\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

wyrażając $\operatorname{tg}x$ przez $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na zasadzie wzoru (3) art. 83-go, otrzymamy

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \text{ że zaś}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), \text{ przeto}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2,$$

stąd
$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0,$$
przychodzimy więc do równania, które dla $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ daje pierwiastki urojone, równanie więc nasze nie daje się rozwiązać, to znaczy, że niema żadnego kąta, któryby zadość czynił danemu równaniu.

134. *Przykład 4-ty.* Rozwiązać równanie
$$a\sin x+b\cos x=c,$$
gdzie a, b i c są liczbami całkowitem dodatnemi lub ujemnemi.

Rozwiązanie 1-sze. Jeżeli z tego równania chcemy znaleść $\sin x$, natenczas podnosząc do kwadratu równanie
$$b\cos x=c-a\sin x,$$
i kładąc $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, przyjdziemy do następującego równania
$$(a^2+b^2)\sin^2 x-2ac\sin x=b^2-c^2,$$
a stąd
$$\sin x=\frac{ac\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$
Ten wzór daje nam dwie wartości $\sin x$, z których tylko jedna zadość czyni równaniu danemu. Przyczyna tego leży w tym, że przez podniesienie do kwadratu powyższego równania ilość pierwiastków danego równania podwojoną została, bowiem $b^2\cos^2 x$ jest kwadratem nietylko $+b\cos x$, ale także kwadratem $-b\cos x$, zatym postępując drogą powyżej wskazaną, otrzymalibyśmy dla równania $a\sin x-b\cos x=c$, takiż sam wypadek. Z tego wypada, że rozwiązanie powyżej otrzymane daje nam rozwiązanie nie tylko równania $a\sin x+b\cos x=c$, ale także równania $a\sin x-b\cos x=c$. Które z rozwiązań należy wziąć dla pierwszego równania, a które dla drugiego tego nie możemy wiedzieć; to nas doprowadza do przekonania, że dla rozwiązania danego równania należy użyć innej drogi, któraby nam wątpliwość w tym względzie usunęła, mianowicie wyrazić tak $\sin x$ jak i $\cos x$ przez inną funkcyją trygonometryczną i taką, przez którą tak $\sin x$ jak i $\cos x$ wyrażały się wymiernie. Otóż na zasadzie wzorów (5) i (4) art. 86-go, mamy
$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x},$$
po podstawieniu tych wartości w równanie dane, otrzymamy
$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(c-b)=0,$$

a stąd
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Wzór ten daje nam także dwie wartości $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, lecz gdy się ograniczymy do szukania kąta, zawartego między 0 i 2π, rozwiązanie pierwsze dla każdej wartości $\sin x$ daje dwie wielkości kąta x, razem więc cztery wielkości, rozwiązanie zaś ostatnie z przyczyny, że $\frac{1}{2}x$ przypada wtedy między 0 i $\frac{\pi}{2}$ daje nam dla $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ dwie wartości, a tymsamym i na kąt szukany dwie wielkości, które są właściwemi rozwiązaniami zadania.

Jedynym warunkiem aby $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ miało wartości rzeczywiste jest
$$a^2+b^2\geqq c^2,$$
Jeżeli $a^2+b^2>c^2$ obie wartości $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ są rzeczywiste i różne; jeżeli więc α jest jednym z kątów, odpowiadających pierwszej wartości $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, zaś β jednym z kątów, odpowiadających drugiej wartości, będziemy mieli dwie wielkości $\frac{x}{2}$ kształtu $\frac{x}{2}=n\pi+\alpha$ i $\frac{x}{2}=n\pi+\beta$, a tymsamym
$$x=2n\pi+2\alpha \text{ lub } x=2n\pi+2\beta.$$
Jeżeli $a^2+b^2=c^2$ oba pierwiastki równania dają równe wartości $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i wtedy mamy jeden szereg kątów, zadośćczyniących danemu równaniu, a jeżeli α jest jednym z kątów, odpowiadających $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, natenczas wszystkie kąty dają się napisać w kształcie $x=2n\pi+2\alpha$.

Jeżeli nakoniec $a^2+b^2<c^2$ pierwiastki równania dla $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nie będą rzeczywiste, a tymsamym rozwiązanie danego zadania jest niemożebne.

Rozwiązanie 2-gie. Równanie powyższe możemy rozwiązać przez wprowadzenie kąta posiłkowego. Podzieliwszy obie strony równania danego przez a, otrzymamy
$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}.$$
Ponieważ styczna trygonometryczna kąta, może przyjmować wszystkie wartości, przeto jakiemikolwiek liczbami byłyby a i b możemy zawsze znaleść taki kąt φ, aby $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, gdzie za φ możemy wziąć najmniejszy

z kątów dodatnych, którego styczna jest $=\frac{b}{a}$. Przez wprowadzenie, w ten sposób określonego kąta φ, równanie dane przyjmie kształt

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{c}{a},$$

stąd

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi,$$

Otrzymujemy więc równanie, do którego niewiadoma x zachodzi tylko w postaci jednej funkcyi trygonometrycznej. Kąt φ łatwo potrafimy znaleść; jeżeli bowiem a i b są jednakowego znaku, kąt φ będzie mniejszy od kąta prostego, gdy zaś a i b są znaków przeciwnych, to najwpierw szukamy kąta, odpowiadającego wartości bezwzględnej $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$, a następnie bierzemy jego spełnienie. Skoro kąt φ znajdziemy, szukamy takiego kąta $x+\varphi$, któregoby wstawa była równa $\frac{c}{a}\cos\varphi$. Jeżeli θ jest jednym z kątów zadośćczyniących równaniu $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$, wszystkie kąty, zadośćczyniące temuż równaniu, dadzą się napisać w kształcie

$$x+\varphi = n\pi + (-1)^n\theta, \text{ stąd}$$

$$x = n\pi + (-1)^n\theta - \varphi,$$

będzie szukanym rozwiązaniem równania danego.

Aby zadanie nasze było możliwe, to jest, aby znalezione wielkości x sprawdzały równanie dane, koniecznym i dostatecznym jest, aby znalezione wielkości zadość czyniły równaniu $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$. Że zaś równanie to daje nam $x+\varphi$ przez jego wstawę, przeto dla możliwości zadania potrzeba, aby $\frac{c}{a}\cos\varphi$ przypadało między -1 i $+1$, trzeba zatym, aby $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqq 1$; lecz $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}$, zatym $\cos^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, powyższy więc warunek wychodzi na $\frac{c^2}{a^2+b^2} \leqq 1$, czyli $a^2+b^2 \geqq c^2$. Otrzymujemy więc warunek możliwości zadania, taki sam jaki przy pierwszym rozwiązaniu. Jeżeli $a^2+b^2 > c^2$, mamy rozwiązanie kształtu $x = n\pi + (-1)^n\theta - \varphi$. Jeżeli $a^2+b^2 = c^2$, natenczas $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi = 1$, a tymsamym $\frac{c}{a}\cos\varphi = \pm 1$. Lecz, gdy $\frac{c}{a}\cos\varphi = +1$, natenczas $\theta = \frac{\pi}{2}$, zatym $x+\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, czyli $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$; gdy zaś $\frac{c}{a}\cos\varphi = -1$, natenczas $\theta = -\frac{\pi}{2}$, a tymsamym $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi$. Jeżeli wreszcie $a^2 + b^2 < c^2$ zadanie jest niemożebne do rozwiązania.

135. *Przykład 5-ty.* Rozwiązać równanie

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c,$$

gdzie a, b, c są liczbami danemi dodatnemi lub ujemnemi.

Zadanie to daje się łatwo sprowadzić do zadania poprzedzającego. Jakoż, kładąc $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, otrzymamy

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c \sin x \cos x,$$

mnożąc przez 2 i pamiętając, że

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,\quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,\quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

otrzymamy

$$c \sin 2x + (a - b) \cos 2x = a + b.$$

Stosując do tego równania rozwiązanie 2-gie zadania poprzedzającego, t. j. kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{c}$, gdzie przez φ rozumiemy kąt dodatny $< \pi$, otrzymamy

$$\sin(2x + \varphi) = \frac{a+b}{c}\cos\varphi.$$

Z równania tego znajdziemy $2x + \varphi$, a tymsamym i x. Warunkiem koniecznym, jakiemu się stawać zadość powinno, aby rozwiązanie było możliwe, jest w tym razie

$$(a - b)^2 + c^2 \geqq (a + b)^2,$$

czyli

$$4ab \leqq c^2.$$

Powyższe równanie możemy także rozwiązać, kładąc $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ przez co przyjdziemy do równania

$$a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0,$$

które nam da dwie wartości $\operatorname{tg} x$ i zarazem pokaże, że rozwiązanie równania danego będzie możliwe przy zachowaniu warunku $4ab \leqq c^2$.

136. *Przykład 6-ty.* Rozwiązać układ równania

$$x + y = \alpha,\quad \frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b},$$

gdzie a i b są liczbami dodatnemi lub ujemnemi, a α danym kątem.

Ponieważ w tym przypadku znaną nam jest summa dwu kątów, przeto najdogodniej będzie znaleść różnicę tych kątów. Z równania drugiego, mamy

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin x - \sin y}{a - b} = \frac{\sin x + \sin y}{a + b},$$

czyli

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{a - b}{a + b},$$

stąd zaś, na zasadzie wzoru (1) art. 106-go,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \frac{a - b}{a + b}, \text{ zatym}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

z tego wzoru możemy znaleść $\frac{1}{2}(x - y)$, a jeżeli przez $\frac{\beta}{2}$ oznaczymy jeden z kątów zadośćczyniących temu równaniu, otrzymamy

$$\frac{1}{2}(x - y) = m\pi + \frac{1}{2}\beta, \text{ że zaś } \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}\alpha,$$

przeto

$$x = n\pi + \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$y = -n\pi + \frac{\alpha - \beta}{2},$$

137. *Przykład 7-my*. Rozwiązać układ równań

$$x - y = \alpha,$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = m,$$

gdzie m jest liczbą daną dodatną, a α kątem danym. Starajmy się naprzód znaleść $x + y$. Ponieważ

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad 2\sin^2 y = 1 - \cos 2y,$$

przeto z równania drugiego, otrzymamy

$$2 - (\cos 2x + \cos 2y) = 2m,$$

czyli

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1 - m).$$

Zamieniając summę dostaw na iloczyn według wzoru (7) art. 105-go, otrzymamy

$$2\cos(x+y)\cos(x-y)=2(1-m),$$

zatym

$$\cos(x+y)=\frac{1-m}{\cos(x-y)}=\frac{1-m}{\cos\alpha}.$$

Z tego równania otrzymamy $x+y$, a że równanie pierwsze dane daje nam $x-y$, przeto mieć będziemy x i y. Abyśmy jednak z równania ostatniego mogli otrzymać $x+y$, trzeba, aby

$$-1\leqq\frac{1-m}{\cos\alpha}\leqq+1.$$

Starajmy się z tej nierówności, otrzymać wartości krańcowe dla m. W tym celu uważmy, że gdy cos $\alpha>0$, obie strony nierówności możemy pomnożyć przez $\cos\alpha$, przez co przyjdziemy do nierówności

$$1-\cos\alpha\leqq m\leqq 1+\cos\alpha,$$

taki zatym jest warunek konieczny i dostateczny, aby rozwiązanie równań było możebne; gdy zaś $\cos\alpha<0$, natenczas z powyższej nierówności, otrzymamy

$$1-\cos\alpha\geqq m\geqq 1+\cos\alpha,$$

taki zatym jest warunek konieczny i dostateczny, aby rozwiązanie równań było możebne. Z obu tych nierówności wypada, że równania dane będą możebne do rozwiązania, gdy m nie będzie większe od żadnej z wartości $1-\cos\alpha$ i $1+\cos\alpha$.

PRZYKŁADY.

Rozwiązać następujące równania:

1) $2\sin x=\operatorname{tg}x$. *Odp.* $x=2n\pi$ i $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

2) $2\sin^2x+4\cos^2x=3$. *Odp.* $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

3) $6\operatorname{cotg}^2x-4\cos^2x=1$. *Odp.* $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

4) $\sin x+\operatorname{cosec}x=2$. *Odp.* $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

5) $\sec^2x-\frac{5}{2}\sec x+1=0$. *Odp.* $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

6) $\sec x=2\operatorname{tg}x$. *Odp.* $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

7) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\operatorname{tg} x=2$. *Odp.* $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

8) $\sec x \operatorname{tg} x=2\sqrt{3}$. *Odp.* $x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$.

9) $\cos x+\cos 7x=\cos 4x$. *Odp.* $x=\dfrac{n\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{8}$ i $x=\dfrac{2}{3}n\pi\pm\dfrac{\pi}{9}$.

10) $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$. *Odp.* $x=\dfrac{1}{2}n\pi$ i $x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

11) $\cos 4x+\cos 2x=\cos x$. *Odp.* $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ i $x=\dfrac{2}{3}n\pi\pm\dfrac{\pi}{9}$.

12) $\sin 5x\cos 3x=\sin 9x\cos 7x$. *Odp.* $x=\dfrac{1}{8}n\pi$ i $x=\dfrac{1}{4}n\pi\pm\dfrac{\pi}{24}$.

13) $\cos 2x+\sin x=1$. *Odp.* $x=n\pi$ i $x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

14) $\operatorname{cosec} x=2\cos 2x+4\cos^2 x$. *Odp.* $x=\dfrac{1}{3}n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{18}$.

15) $\cos ax\cos bx=\cos(a+c)x\cos(b+c)x$.

Odp. $x=-\dfrac{n\pi}{c}$ i $x=\dfrac{n\pi}{a+b+c}$.

16) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{\pi}{6}$. *Odp.* $x=-1\pm\sqrt{2\sqrt{3}}$,

17) $\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x-2}+\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$. *Odp.* $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

18) $4\sin x\sin(x-\alpha)=2\cos\alpha-1$. *Odp.* $x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}$.

19) $\dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2}$, $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\sqrt{3}$. *Odp.* $x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$, $y=n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$.

20) $x-y=\alpha$, $\sin x+\sin y=b$. *Odp.* $\sin\dfrac{1}{2}(x+y)=\dfrac{b}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

21) $x-y=\alpha$, $\sin x-\sin y=b$. *Odp.* $\sin\dfrac{1}{2}(x+y)=\dfrac{b}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

22) $x+y=\alpha$, $\sin x\cos y=b$. *Odp.* $\sin(x-y)=2b-\sin\alpha$.

23) $x+y=\alpha$, $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=b$. *Odp.* $\cos(x-y)=\dfrac{(1+b)\cos\alpha}{1-b}$.

24) $x+y=\alpha$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=m$.

Odp. $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2}m\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2-4\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-m}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

ROZDZIAŁ II.

TABLICE FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

138. Ażebyśmy mogli poznane dotąd funkcyje trygonometryczne i wykryte między niemi związki zastosować z prawdziwym pożytkiem do rozmaitych rachunków, przytrafiających się w dziedzinie nauk matematycznych, należy mieć tablice, za pomocą których moglibyśmy otrzymywać wartości funkcyj trygonometrycznych, danemu kątowi odpowiadających; i nawzajem, abyśmy mogli znaleść wielkości kątów, danej funkcyi trygonometrycznej odpowiadających. Ponieważ jednak wartość funkcyj trygonometrycznych kątów dowolnej wielkości nie dają się zawsze dokładnie obliczyć, przeto i tablice, które nam dają wartości tych funkcyj, obejmują wartości przybliżone. Tablice obejmują wartości funkcyj trygonometrycznych jedynie kątów, idących w postępie arytmetycznym od 0^0 do 90^0; bowiem, według tego co się powiedziało w art. 33-im do 42-go włącznie, wartości funkcyj trygonometrycznych kątów większych od 90^0 i kątów ujemnych, dają się wyrazić przez odpowiednią funkcyją trygonometryczną kąta dodatnego mniejszego od 90^0, wziętą z odpowiednim znakiem. Ponieważ wreszcie na zasadzie związków, zachodzących między funkcyjami trygonometrycznemi kątów dopełniających się:

$$\sin(45^0 + \theta) = \cos(45^0 - \theta),$$

$$\cos(45^0 + \theta) = \sin(45^0 - \theta) \text{ i t. d.}$$

przeto mając wartości funkcyj trygonometrycznych wszystkich kątów od 0^0 do 45^0, tymsamym będziemy mieli wartości funkcyj trygonometrycznych kątów od 45^0 do 90^0. Z tych powodów dostatecznym będzie dla ułożenia tablic mieć wartości funkcyj trygonometrycznych kątów od 0^0 do 45^0.

Pokażemy w jaki sposób przychodzimy do ułożenia tablic funkcyj trygonometrycznych kątów od 0^0 do 45^0, idących w postępie arytmetycznym, którego różnicą jest $10''$. Zanim jednak tym się zajmiemy, wyłożymy kilka twierdzeń pomocniczych, gdzie indziej również użytecznych, a które służą za podstawę przy wyrachowaniu tablic.

139. *Twierdzenie 1-sze. Jeżeli przez* θ *oznaczymy miarę teoretyczną kąta dodatnego mniejszego od kąta prostego, natenczas* θ *jest większe od jego wstawy, a mniejsze od jego stycznej, to jest, że mamy* $\sin\theta < \theta < tg\,\theta$.

Niech będzie kąt AOB (fig. 31) mniejszy od kąta prostego, którego miarą teoretyczną jest θ. Z wierzchołka kąta 0, jako ze środka, promieniem równym jednostce, zakreślmy łuk koła między ramionami tegoż kąta. Z punktu A przecięcia się tego okręgu z ramieniem OA poprowadźmy styczną do okręgu koła, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużeniem drugiego ramienia kąta; z punktu zaś B przecięcia się tegoż okręgu koła, z drugim ramieniem OB spuśćmy prostopadłą BC na pierwsze ramię kąta i połączmy punkt B z A. Opierając się na tym, że powierzchnia wycinka AOB jest większa od powierzchnia trójkąta AOB, mniejsza zaś od powierzchni trójkąta OAF, mieć będziemy

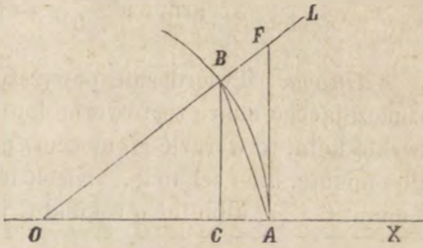

Fig. 31.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{BC} < \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\,.\,\text{łuk AB} < \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{AF},$$

stąd zaś

$$\mathrm{BC} < \text{łuk AB} < \mathrm{AF},$$

że zaś BC jest wstawą kąta AOB, AF zaś styczną trygonometryczną tegoż kąta, przeto

$$\sin\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta.$$

140. *Twierdzenie 2-gie. Jeżeli* θ *oznacza miarę teoretyczną kąta, natenczas granica stosunku* $\frac{\sin\theta}{\theta}$, *gdy* θ *maleje do zera, jest równa jedności.*

Ponieważ $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, przeto z nierówności, wyprowadzonej w poprzednim artykule, wynika

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

a że θ z założenia odpowiada kątowi dodatnemu mniejszemu od 90°, przeto $\sin\theta > 0$; dzieląc powyższą nierówność przez $\sin\theta$, otrzymamy

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Ta nierówność nam pokazuje, że stosunek $\frac{\theta}{\sin\theta}$, zawartym jest między jednością i stosunkiem $\frac{1}{\cos\theta}$, który zmierza do jedności w miarę tego jak θ maleje do zera, zatym

$$\text{granica}\ \frac{\theta}{\sin\theta} = 1, \text{ a tymsamym}$$

$$\text{granica}\ \frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \text{ gdy } \theta \text{ maleje do zera.}$$

Uwaga. Twierdzenie powyższe, jak zaznaczyliśmy odnosi się do θ, oznaczającego miarę teoretyczna kąta. Zważmy, że gdy weźmiemy miarę zwykłą kąta, to wyrazić go możemy przyjmując za jednostkę albo stopień, albo minutę, albo sekundę. Niech ten kąt ma albo n stopni t. j. n^0, albo p minut t. j. p', albo też q sekund t. j. q''; w takim razie, jak wiemy

$$\theta = n^0 \frac{\pi}{180^0} = p' \frac{\pi}{10800'} = q'' \frac{\pi}{648000''},$$

że zaś zawsze $\sin\theta = \sin n^0 = \sin p' = \sin q''$, wskutek tego

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin n^0}{n^0}\,\frac{180^0}{\pi} = \frac{\sin n^0}{n}\,\frac{180}{\pi} = \frac{\sin p'}{p}\,\frac{10800}{\pi} = \frac{\sin q''}{q}\,\frac{648000}{\pi}.$$

Kiedy θ zdąża do zera, jednocześnie n^0, p', q'', jakoteż wstawa tego kąta zdążają do zera, $\frac{\sin\theta}{\theta}$ zdąża zaś do jedności, tak, iż granice do których wtedy zdążają ułamki $\frac{\sin n^0}{n}$, $\frac{\sin p'}{p}$, $\frac{\sin q''}{q}$, których liczniki i mianowniki są liczbami oderwanemi, są liczbami różnemi od jedności, mianowicie odpowiednio $\frac{\pi}{180}$, $\frac{\pi}{10800}$, $\frac{\pi}{648000}$, będącemi miarami teoretycznemi (art. 10-ty) odpowiednio jednego stopnia, jednej minuty i jednej sekundy.

141. *Twierdzenie 3-cie. Jeżeli θ oznacza miarę teoretyczną kąta dodatnego mniejszego od kąta prostego, natenczas różnica między miarą teoretyczną kąta i jego wstawą t. j. $\theta - \sin\theta$ jest mniejsza od szóstej części sześcianu miary teoretycznej kąta.*

Dla dowiedzenia tego twierdzenia można użyć różnych sposobów, najprostszym jest wyjście ze wzoru

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Jakoż, kładąc w tym wzorze zamiast θ, kolejno $\frac{\theta}{3}$, $\frac{\theta}{3^2}$, $\frac{\theta}{3^3}$,..., $\frac{\theta}{3^n}$, otrzymamy

$$3\sin\frac{\theta}{3} - \sin\theta = 4\sin^3\frac{\theta}{3},$$

$$3\sin\frac{\theta}{3^2} - \sin\frac{\theta}{3} = 4\sin^3\frac{\theta}{3^2},$$

$$3\sin\frac{\theta}{3^3} - \sin\frac{\theta}{3^2} = 4\sin^3\frac{\theta}{3^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3\sin\frac{\theta}{3^n} - \sin\frac{\theta}{3^{n-1}} = 4\sin^3\frac{\theta}{3^n},$$

dodając te równania stronami odpowiedniemi, po poprzednim pomnożeniu tych równań: pierwszego przez 1, drugiego przez 3, trzeciego przez 3^2,..., ostatniego przez 3^{n-1}, otrzymamy

$$(1)\qquad \begin{aligned} 3^n\sin\frac{\theta}{3^n} - \sin\theta = 4\Big[\sin^3\frac{\theta}{3} + 3\sin^3\frac{\theta}{3^2} \\ + 3^2\sin^3\frac{\theta}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{\theta}{3^n}\Big], \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \theta\,\frac{\sin\frac{\theta}{3^n}}{\left(\frac{\theta}{3^n}\right)} - \sin\theta = 4\Big[\sin^3\frac{\theta}{3} + 3\sin^3\frac{\theta}{3^2} \\ + 3^2\sin^3\frac{\theta}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{\theta}{3^n}\Big]. \end{aligned}$$

Jeżeli n rośnie bez granic, wyrażenie $\frac{\theta}{3^n}$ zmierza do zera, stosunek zaś $\dfrac{\sin\frac{\theta}{3^n}}{\frac{\theta}{3^n}}$, na zasadzie twierdzenia art. 140-go, dąży do jedności, granicą zatym pierwszej strony powyższego równania jest $\theta - \sin\theta$. Tak samo rzecz się będzie miała i z drugą stroną równania. Z przyczyny, że wstawa kąta mniejszego od kąta prostego jest mniejsza od jego miary teoretycznej, przeto granica drugiej strony równania będzie mniejsza od

$$4\left[\frac{\theta^3}{3^3} + \frac{\theta^3}{3^5} + \frac{\theta^3}{3^7} + \ldots\right],$$

że zaś wyrażenie to, jak wiadomo z nauki o postępach gieometrycznych, jest równe $\frac{\theta^3}{6}$, przeto

$$\theta - \sin\theta < \frac{\theta^3}{6}.$$

142. *Twierdzenie 4-te. Jeżeli* θ *oznacza miarę teoretyczną kąta dodatnego, mniejszego od kąta prostego, natenczas* $\cos\theta$ *przypada między* $1-\frac{\theta^2}{2}$ *i* $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$.

Wiemy, że $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Ponieważ, według art. 139-go i 141-go, $\sin\frac{\theta}{2}$ przypada między $\frac{\theta}{2}$ i $\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^3}{48}$, czyli

$$\frac{\theta}{2} > \sin\frac{\theta}{2} > \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48},$$

przeto biorąc pierwszą nierówność, znajdziemy

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

biorąc zaś drugą nierówność znajdziemy

$$\cos\theta < 1 - 2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48}\right)^2, \text{ czyli}$$

$$\cos\theta < 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - 2\left(\frac{\theta^3}{48}\right)^2,$$

tymbardziej więc

$$\cos\theta < 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}.$$

Otrzymaliśmy więc dwie nierówności, które możemy napisać w kształcie

$$1 - \frac{\theta^2}{2} < \cos\theta < 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}.$$

143. Jakkolwiek twierdzenia wyprowadzone w poprzedzających artykułach są wystarczającemi do ułożenia tablic funkcyj trygonometrycznych, to jednak z uwagi, że większe przybliżenia dla $\sin\theta$ i $\cos\theta$ będą nam potrzebne przy wyprowadzeniu niektórych wzorów trygonometryi kulistej, dowiedziemy jeszcze twierdzenia następującego: *Jeżeli* θ *oznacza miarę teoretyczną kąta dodatnego, mniejszego od kąta prostego, natenczas*

$$\sin\theta < \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!},$$

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}\,.$$

Dla dowiedzenia pierwszej nierówności, uważmy, że wzór (1) art. 141 możemy napisać w kształcie:

$$\sin\theta = 3^n \sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{4}{3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} 3^\lambda \sin^3\frac{\theta}{3^\lambda}\,,$$

gdzie znak $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n}$ wskazuje, że należy wziąć summę wyrazów, jakie otrzymujemy z $3^\lambda \sin\frac{\theta}{3^\lambda}$, gdy za λ zakładamy kolejno $1, 2, 3, \ldots, n$. Ponieważ na zasadzie art. 141-go

$$\sin\theta > \theta - \frac{\theta^3}{3!}\,,$$

przeto
$$\sin\frac{\theta}{3^\lambda} > \frac{\theta}{3^\lambda} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{3^\lambda}\right)^3;$$

podstawiając tę wartość w powyższe równanie, mieć będziemy

$$\sin\theta < 3^n\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{4}{3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} 3^\lambda\left[\frac{\theta}{3^\lambda} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{3^\lambda}\right)^3\right]^3,$$

czyli

$$\sin\theta < 3^n\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{4\,\theta^3}{3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{4}{3}\,\frac{\theta^5}{2!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{3^{4\lambda}}$$
$$-\frac{4}{3}\,\frac{\theta^7}{2!\,3!}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{3^{6\lambda}} + \frac{4}{3}\,\frac{\theta^9}{(3!)^3}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{3^{8\lambda}}\,.$$

Na zasadzie nauki o postępach gieometrycznych, mieć będziemy

$$\sin\theta < 3^n\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{\theta^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) + \frac{\theta^5}{5!}\left(1 - \frac{1}{3^{4n}}\right)$$
$$-\frac{4\theta^7}{(3!)^2(3^6-1)}\left(1 - \frac{1}{3^{6n}}\right) + \frac{4\,\theta^9}{3\,(3!)^3(3^8-1)}\left(1 - \frac{1}{3^{8n}}\right),$$

jeżeli więc przypuścimy, że n rośnie bez granic, mieć będziemy

$$\sin\theta < \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{4\,\theta^7}{(3!)^2}\left(\frac{1}{3^6-1} - \frac{\theta^2}{3.3!(3^8-1)}\right);$$

lecz gdy $\theta < \frac{\pi}{2}$ wyrażenie w nawiasie jest liczbą dodatną, przeto tymbardziej

$$\sin\theta < \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}.$$

Dla dowiedzenia drugiej części twierdzenia, uważmy, że $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, na mocy zaś dowiedzionej pierwszej części twierdzenia

$$\sin\frac{\theta}{2} < \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{2^3 . 3!} + \frac{\theta^5}{2^5 . 5!},$$

podstawiając przeto tę wartość w powyższe równanie otrzymamy:

$$\cos\theta > 1 - 2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{2^3 . 3!} + \frac{\theta^5}{2^5 . 5!}\right)^2.$$

Wykonywając wskazane działania po prawej stronie tej nierówności, mieć będziemy

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} - 2\,\frac{\theta^6}{2^6 . 3^2 . 2^2} - 2\,\frac{\theta^{10}}{2^{12} . 5^2 . 4^2 . 3^2}$$

$$+ 2\,\frac{\theta^4}{2^3 . 3!} - 2\,\frac{\theta^6}{2^5 . 5!} + 4\,\frac{\theta^8}{2^3 . 3!\, 2^5 . 5!},$$

czyli

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - 2\theta^6\left[\frac{1}{2^8 . 3^2} + \frac{1}{2^5 . 5!}\right]$$

$$+ \theta^8\left[\frac{1}{2^2 . 3 . 2 . 2^5 . 5 . 2^2 . 3} - \frac{\theta^2}{2^{11} . 5^2 . 4^2 . 3^2}\right],$$

czyli

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{2^4 . 3^2 . 5} + \frac{\theta^8}{2^{10} . 3^2 . 5}\left[1 - \frac{\theta^2}{2^5 . 5}\right],$$

czyli

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{720} + \frac{\theta^8}{2^{10} . 3^2 . 5}\left[1 - \frac{\theta^2}{2^5 . 5}\right],$$

czyli

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{2^{10} . 3^2 . 5}\left[1 - \frac{\theta^2}{2^5 . 5}\right],$$

że zaś wyrażenie w nawiasie jest dodatne z przyczyny, że $\theta < \frac{\pi}{2}$, przeto tymbardziej

$$\cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}.$$

144. Wyrachowanie wstawy i dostawy kąta 10.″

Miarą teoretyczną kąta 10″ jest jak wiadomo

$$\frac{10\,\pi}{180.60.60}=\frac{\pi}{64800},$$

ponieważ na zasadzie twierdzenia art. 139-go i 141-go, wstawa kąta jest mniejsza od łuku jemu odpowiadającego, większa zaś od tegoż łuku, zmniejszonego o szóstą część sześcianu tegoż łuku, przeto

$$\sin 10'' < \frac{\pi}{64800}, \ \sin 10'' > \frac{\pi}{64800}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3,$$

jeżeli zamiast π weźmiemy wartość przybliżoną

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793,$$

znajdziemy

$$\frac{\pi}{64800}=0{,}000\,048\,481\,368\,110,$$

że zaś

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3=0{,}000\,000\,000\,000\,021,$$

przeto

$$\sin 10'' < 0{,}000\,048\,481\,368\,110,$$

$$\sin 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,089.$$

Te dwie nierówności pokazują nam, że wstawa 10″ przypada między dwiema wartościami, mającemi spólnych 12 cyfr dziesiętnych; jeżeli więc położymy

$$\sin 10''=0{,}000\,048\,481\,368\,1,$$

popełnimy błąd, który będzie mniejszy, od różnicy dwu poprzedzających wartości, między któremi przypada sin 10″, to jest będzie mniejszy od $\frac{1}{2}\,\frac{1}{10^{12}}$; czyli innemi słowy, przyjmując powyższą wartość sin 10″, błąd jaki skutkiem takiego przyjęcia powstanie, będzie jedynie wpływał na 13-tą cyfrę dziesiętną.

Dla znalezienia dostawy kąta 10″ uważmy, że na zasadzie twierdzenia podanego w artykule 142-im, mamy:

$$\cos 10'' > 1-\frac{\varepsilon^2}{2}, \ \cos 10'' < 1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24},$$

gdzie ε oznacza długość łuku 10″ to jest $\frac{\pi}{64800}=0{,}000\,048\,481\,368\,110,$

a że $\varepsilon < 0{,}00005$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{2.10^4}$, przeto $\frac{\varepsilon^4}{24} < \frac{1}{384.10^{16}} < \frac{1}{3.10^{18}}$.

Widzimy więc z tego, że biorąc $1-\frac{\varepsilon^2}{2}$ jako wartość przybliżoną $\cos 10''$, popełnimy błąd mniejszy od połowy jedności na ośmnastym miejscu; że zaś

$$\varepsilon^2 = 0{,}000\,000\,002\,350\,443\,052\,8,$$

następnie

$$1-\frac{\varepsilon^2}{2} = 0{,}999\,999\,998\,824\,473\,6,$$

przeto przyjmując

$$\cos 10'' = 0{,}999\,999\,998\,824\,778\,473,$$

popełnimy błąd, który będzie wpływał jedynie na 19-tą cyfrę dziesiętną.

Do znalezienia wartości $\cos 10''$ moglibyśmy także przyjść, pamiętając, że $\cos 10'' = \sqrt{1-\sin^2 10''}$, i przyjmując, że znana jest nam wartość przybliżona $\sin 10''$; ta jednak droga, z przyczyny że $\sin 10''$ jest dana z przybliżeniem do 12 cyfr dziesiętnych, nie doprowadziłaby nas do wypadku tak dokładnego jak przy użyciu twierdzenia podanego w art. 142-gim.

145. Z poprzedzającego artykułu wynika, że jeżeli wartość wstawy $10''$ weźmiemy z przybliżeniem do 12 cyfr dziesiętnych, wstawa $10''$ będzie równa mierze teoretycznej kąta $10''$, oczywiście więc, jeżeli dla $\sin 1''$ weźmiemy toż samo przybliżenie, wstawa $1''$ będzie równa mierze teoretycznej kąta $1''$. Podobnież przy tym samym przybliżeniu, jeżeli n oznacza taką ilość sekund większą od $10''$ kąta, iż $\frac{n}{10''}$ razy wzięty błąd wstawy $10''$ nie wpływa na dwunastą cyfrę dziesiętną, wstawa kąta n'' będzie równa mierze teoretycznej kąta n'', czyli będzie równa n razy wziętej mierze teoretycznej kąta $1''$ czyli $n.\sin 1''$. Tym sposobem, przyjmując przybliżenie do 12 cyfr dziesiętnych, mieć będziemy

$$n = \frac{\text{mierze teoretycznej kąta } n''}{\text{wstawę kąta } 1''},$$

zatym ilość sekund kąta, przy powyższym zastrzeżeniu, otrzymujemy dzieląc jego miarę teoretyczną, przez wstawę jednej sekundy i naodwrót

$$\text{miara teoretyczna kąta } n'' = n.\sin 1'',$$

że zaś wstawa kąta $1''$ równa się mierze teoretycznej tegoż kąta, a miara teoretyczna kąta $1''$ jest równa (art. 10) $\frac{1}{206265}$, przeto miara teoretyczna kąta $n'' = \frac{n}{206265}$, zaś $\sin n'' = \frac{n}{206265}$. Wyprowadzone w niniejszym artykule związki, między wstawami kątów bardzo małych, a ich miarą teoretyczną, mają ważne zastosowania w Astronomii i Gieodezyi i będziemy się niemi posiłkowali, przy obliczaniu wielkości kątów bardzo małych w zadaniach, tyczących się rozwiązywania trójkątów.

146. Wstawy i dostawy kątów, rosnących w postępie arytmetycznym przy różnicy $10''$.

Jeżeli we wzorach.

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta,$$

założymy $\beta = 10''$, $\alpha = m \,.\, 10''$, gdzie m oznacza liczbę całkowitą dodatną, otrzymamy

$$\sin(m + 1)\, 10'' + \sin(m - 1)\, 10'' = 2 \sin m\, 10'' \cos 10'',$$
$$\cos(m + 1)\, 10'' + \cos(m - 1)\, 10'' = 2 \cos m\, 10'' \cos 10'',$$

czyli

$$(1)\quad \begin{aligned} \sin(m + 1)\, 10'' &= 2 \cos 10'' \sin m\, 10'' - \sin(m - 1)\, 10'', \\ \cos(m + 1)\, 10'' &= 2 \cos 10'' \cos m\, 10'' - \cos(m - 1)\, 10''. \end{aligned}$$

Na mocy tych wzorów możemy otrzymać wstawę i dostawę kąta $(m + 1)\, 10''$, gdy będą nam znane wstawy i dostawy kątów $(m - 1)\, 10''$ i $m\, 10''$. Otóż, jeżeli w tym wzorach przyjmować będziemy kolejno, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3, \ldots$, natenczas, z przyczyny, że wiadome nam są $\sin 10''$ i $\cos 10''$, znajdziemy wstawę i dostawę kątów $20''$, $30'', \ldots$

Zwrócić nam jednak należy uwagę, że przy tego rodzaju obliczeniach wstaw i dostaw kątów, należy za każdym razem wstawę i dostawę kąta poprzednio znalezionego mnożyć przez $2 \cos 10''$; że zaś $\cos 10''$ jest bliskie jedności, przeto rachunki, jakie należy przeprowadzać, będą długie i nużące, a tymsamym nieprowadzące do wypadków dokładnych. Dla uniknienia tego, możemy powyższe wzory odpowiednio przekształcić. Jakoż, skoro $2 \cos 10''$ mało się różni od dwóch jedności, przeto możemy założyć

$$2 \cos 10'' = 2 - k, \text{ gdzie } k = 0{,}000\,000\,002\,350\,4,$$

a wzory (1) dadzą się wtedy napisać w kształcie:

$$\sin(m + 1)\, 10'' = (2 - k) \sin m\, 10'' - \sin(m - 1)\, 10'',$$
$$\cos(m + 1)\, 10'' = (2 - k) \cos m\, 10'' - \cos(m - 1)\, 10'',$$

czyli

$$(2)\quad \begin{aligned} \sin(m + 1)\, 10'' - \sin m\, 10'' &= \sin m\, 10'' - \sin(m - 1)\, 10'' - k \sin m\, 10'', \\ \cos(m + 1)\, 10'' - \cos m\, 10'' &= \cos m\, 10'' - \cos(m - 1)\, 10'' - k \cos m\, 10''. \end{aligned}$$

Wzory te, podane przez *Tomasza Simpsona*, pokazują nam w jaki sposób możemy znaleść różnicę wstaw lub dostaw dwu kątów $(m + 1) 10''$ i $m\, 10''$, gdy dane są różnice wstaw i dostaw dwu kątów $m\,10''$ i $(m-1)\,10''$ t. j. pozwalają nam znaleść

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\sin(m+1)\,10'' - \sin m\,10'', \\ &\cos(m+1)\,10'' - \cos m\,10'', \end{aligned}$$

gdy są dane

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\sin m\,10'' - \sin(m-1)\,10'', \\ &\cos m\,10'' - \cos(m-1)\,10'', \end{aligned}$$

jak również gdy są wiadome $\sin m\,10''$ i $\cos m\,10''$; mając zaś różnice (3) i dodając do pierwszej $\sin m\,10''$, do drugiej zaś $\cos m\,10''$ znajdziemy $\sin(m+1)\,10''$ i $\cos(m+1)\,10''$. Całe więc zadanie sprowadza się do kolejnego wynajdywania wartości różnic (3), gdy są dane różnice (4). Lecz różnice (3) bardzo łatwo otrzymujemy z różnic (4), bowiem, na zasadzie wzorów Simpsona, jedna różnica powstaje z drugiej przez odpowiednie odjęcie $k \sin m\,10''$ lub $k \cos m\,10''$, gdzie k jest czynnikiem stałym; obliczenie zaś $k \sin m\,10''$ i $k \cos m\,10''$ daje się łatwo uskutecznić przez utworzenie iloczynów z liczby k przez pierwsze dziewięć liczb całkowitych (czyli tak zwanego leniwca); w tym bowiem razie zadanie sprowadza się do prostego dodawania i odejmowania liczb dziesiętnych.

147. Postępując drogą wskazaną w poprzedzającym artykule, przyjdziemy do znalezienia wartości wstaw i dostaw kątów od 0^0 do 45^0, rosnących w postępie arytmetycznym przy różnicy $10''$. W obliczaniu jednak możemy się ograniczyć na szukaniu kątów od 0^0 do 30^0. Jakoż na zasadzie wzorów Eulera (art. 106), mamy

$$\sin(30^0+\alpha) + \sin(30^0-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(30^0+\alpha) - \cos(30^0-\alpha) = -\sin\alpha,$$

stąd

$$\sin(30^0+\alpha) = \cos\alpha - \sin(30^0-\alpha),$$

$$\cos(30^0+\alpha) = \cos(30^0-\alpha) - \sin\alpha,$$

kładąc w tym wzorach $\alpha = m\,10''$, mieć będziemy

$$\sin(30^0 + m\,10'') = \cos m\,10'' - \sin(30^0 - m\,10''),$$

$$\cos(30^0 + m\,10'') = \cos(30^0 - m\,10'') - \sin m\,10'',$$

a jeżeli w tych wzorach założymy kolejno $m=1$, $m=2$, $m=3,\ldots$, otrzymamy wzory, które nam pozwolą znaleść wstawy i dostawy wszystkich kątów od 30^0 do 45^0, gdy będziemy już mieli wartości wstaw i dostaw kątów od 0^0 do 30^0.

148. W ten sposób obrachowane wartości wstaw i dostaw kątów od 0^0 do 45^0, skutkiem nieuniknionych błędów rachunkowych, wynikających wskutek wykonywania wielu działań nad liczbami przybliżonemi, nie będą dokładne i dla tego, otrzymywane tą drogą wartości na niektóre kąty należy sprawdzać z wartościami, wprost otrzymać się dającemi. Wartości wstaw i dostaw niektórych kątów podaliśmy w artykułach 54-im, 55-ym, 56-ym i 108-ym do 113-go włącznie, które możemy otrzymać z takim przybliżeniem, jak sami zechcemy, przeto porównywając dwiema drogami znalezione wartości, możemy sobie zapewnić dokładność wartości wstaw i dostaw pozostałych kątów, obliczanych jedna po drugiej, na zasadzie artykułów 144-go i 146-go.

TABLICE LOGARYTMÓW FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

149. Z tego, cośmy powiedzieli w poprzedzających artykułach, wynika, że jesteśmy w możności, na mocy znalezionych wartości wstaw i dostaw kątów od 0^0 do 45^0, ułożyć odpowiednie tablice. Tablice tego rodzaju znajdzie czytelnik w dziełach: Vega, Sammlung mathematischer Tafeln, wydanie stereotypowe Dr. J. A. Hülsse'go, Berlin, 1865; — Schlömilcha, Fünfstellige logaritmische und trigonometrische Tafeln, wydanie stereotypowe, Brunświk, 1886.

Ponieważ w zastosowaniach liczebnych funkcyj trygonometrycznych rachunki bardzo się upraszczają przez użycie logarytmów, przeto w praktyce nie używamy wartości samych funkcyj trygonometrycznych, lecz ich logarytmy. Mając znane wartości wstaw i dostaw, możemy znaleść ich logarytmy i ująć je w odpowiednie tablice. Skoro będziemy mieli logarytmy wstaw i dostaw kątów, bardzo łatwo znajdziemy logarytmy stycznej i dostycznej, gdyż

$$\log \operatorname{tg} \theta = \log \sin \theta - \log \cos \theta,$$

$$\log \operatorname{cotg} \theta = \log \cos \theta - \log \sin \theta = -\log \operatorname{tg} \theta.$$

Będziemy więc w możności ułożyć tablice logarytmów wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych. Logarytmy siecznych i dosiecznych pomijane są w tablicach z tej przyczyny, że funkcyje te są rzadkiego użycia; zresztą logarytmy ich możemy bardzo łatwo znaleść, pamiętając, że sieczna jest odwrotnością dostawy, dosieczna zaś odwrotnością wstawy, a zatym ich logarytmy są równe i znaków przeciwnych odpowiednim logarytmom dostawy i wstawy.

Ponieważ wstawy i dostawy wszystkich kątów, styczne kątów od 0^0 do 45^0, dostyczne od 45^0 do 90^0 są ułamkami mniejszemi od jedności, przeto logarytmy ich są ujemne. Z tego powodu w tablicach, dla uniknienia logarytmów ujemnych, dodaje się do każdego logarytmu 10 jedności, tak, iż wtedy tablice dają nam nie właściwe logarytmy funkcyj trygonometrycznych, lecz powiększone o 10 jedności. W niektórych tablicach, jak w tablicach Dupuis podane są logarytmy właściwe, to jest bez dodania 10 jedności. Dodanie 10 jedności do logarytmu liczby odpowiada pomnożeniu jej przez 10^{10}. Jeżeli więc chcielibyśmy z logarytmu funkcyi trygonometrycznej, podanego w tablicach, obliczyć samę tę funkcyją, należy numerus jej logarytmu podzielić przez 10^{10}. Logarytmy, które i przy tym założeniu wypadają ujemne, należą do funkcyj trygonomecznych, odpowiadających kątom bardzo małym, i nie przytafiającym się w praktyce; największy z tych kątów jest jeszcze mniejszy od kąta równego 0,0001 sekundy *). Tablice zawierają albo logarytmy siedmiocyfrowe jak Vegi, Calleta, Schröna, Bremikera, albo pięciocyfrowe jak Lalande'a, Dupuis'a, Köhlera, Wittsteina, Hoüela, Zecha, Böhma, Schlömilcha, Przewalskiego (Moskwa, 1887), albo wreszcie czterocyfrowe jak Müllera, Hoüela, Wittsteina i Zecha. W większej liczbie przypadków logarytmy pięciocyfrowe są wystarczające dla otrzymania dokładnych wypadków, a w niektórych nawet i czterocyfrowe **).

Przejdziemy teraz do opisania tablic logarytmów funkcyj trygonometrycznych Vegi i Bremikera, jako najwięcej w użyciu będących, ze wskazaniem różnicy jaka zachodzi między temi tablicami, a następnie do opisania tablic logarytmów pięciocyfrowych Schömilcha, ze wskazaniem sposobów użycia tablic przy obliczaniu wartości logarytmów funkcyj trygonometrycznych.

Zwrócić należy uwagę, że przy obliczeniach wartości funkcyj trygonometrycznych, niektórzy autorowie zwłaszcza francuscy i niemieccy używają logarytmów właściwych wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych, nie zaś tablicowych, angielscy zaś autorowie wprowadzają do rachunku logarytmy tablicowe, i przy wykonywaniu działań uwzględniają 10 jedności dodanych do logarytmów właściwych funkcyj trygonometrycznych.

---

*) Jeżeli bowiem x jest miarą teoretyczną kąta, którego wstawa jest mniejsza od $\frac{1}{10^{10}}$, natenczas z przyczyny, że $\sin 10'' < 0{,}000\,048\,481\,368$, będzie

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{10^{10}}\right)} < \frac{\sin 10''}{\text{miara kąta } 10''} < \frac{\text{miary teor. kąta } 10''}{0{,}000048481368},$$

czyli

$$x < \frac{\text{miary teor. kąta } 10''}{484813} < \frac{\text{miary kąta } 1''}{40000}.$$

**) W Niemczech do użytku szkolnego przyjęto pięciocyfrowe logarytmy, na zasadzie postanowienia zjazdu niemieckich nauczycieli, odbytego w Hannowerze 1864 roku.

UKŁAD TABLIC.

150. Tablice Vegi. Tablice logarytmów funkcyj trygnometrycznych Vegi, podzielone są na pewne gruppy. Pierwsze dwie karty obejmują logarytmy w siedmiu cyfrach dziesiętnych wstaw i stycznych wszystkich kątów, rosnących w postępie arytmetycznym co każdą sekundę od $0''$ do $60''$, czyli jednej minuty; pierwsza kolumna wskazuje ilość sekund, druga zaś odpowiedni logarytm. Następne 23 karty obejmują logarytmy wstaw i stycznych wszystkich kątów, rosnących co każdą sekundę od 0^0 do 2^0, a tymsamym logarytmy dostaw i dostycznych kątów od 88^0 do 90^0; stopnie i minuty kątów od 0^0 do 2^0 są wypisane u góry każdej tablicy, u dołu zaś kątów 88^0 do 90^0; pierwsza i ostatnia kolumna obejmują ilości sekund, na wprost zaś sekund, w następującej kolumnie odpowiedni logarytm. Następujące karty obejmują tablice logarytmów wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych wszystkich kątów, rosnących co $10''$ od 0^0 do 6^0, a tymsamym kątów od 84^0 do 90^0; stopnie od 0^0 do 6^0 są wypisane u góry każdej tablicy, stopnie zaś 84^0 do 90^0 u dołu odpowiedniej tablicy, minuty i sekundy umieszczone są w pierwszej i drugiej kolumnie i odnoszą się do stopni wypisanych u góry tablicy; minuty zaś i sekundy, wypisane w ostatniej i przedostatniej kolumnie, odnoszą się do stopni wypisanych u dołu tejże tablicy; na wprost sekund, w kolumnach z odpowiedniemi nadpisami mieszczą się logarytmy właściwych funkcyj trygonometrycznych.

Poczynając od 6^0 podane są logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych wszystkich kątów, rosnących co jedna minuta od 6^0 do 45^0, a tymsamym kątów od 84^0 do 45^0. Stopnie bieżące od 0^0 do 44^0 wypisane są u góry tablicy, stopnie zaś od 84^0 do 44^0 u dołu tablicy; minuty umieszczone są w pierwszej i ostatniej kolumnie i odpowiadają pierwsze stopniom wypisanym u góry, drugie zaś stopniom wypisanym u dołu. Na wprost każdej minuty we właściwej kolumnie wypisane są logarytmy odpowiedniej funkcyi trygonometrycznej. Po każdej kolumnie logarytmów, znajduje się mała kolumna oznaczono D $1''$, która pokazuje różnicę między dwoma po sobie następującemi logarytmami, odpowiadającą dwu kątom różniącym się o $1''$. Kolumna różnic logarytmów dla stycznej i dostycznej jest spólna, gdyż

$$\log \operatorname{tg} \theta = -\log \operatorname{cotg} \theta, \quad \log \operatorname{tg}(\theta + h) = -\log \operatorname{cotg}(\theta + h),$$

zatym

$$\log \operatorname{tg}(\theta + h) - \log \operatorname{tg} \theta = \log \operatorname{cotg} \theta - \log \operatorname{cotg}(\theta + h).$$

Różnice między logarytmami na $1''$ pomieszczone są w kolumnie D $1''$ i wypisane po środku cyfr, odpowiadających danym, po sobie idącym, logarytmom; różnice te dla logarytmów wstaw i stycznych rosną z powiększaniem się kąta, maleją zaś dla logarytmów dostaw i dostycznych, gdy kąt rośnie.

151. TABLICE BREMIKERA. Tablice siedmiocyfrowe Bremikera, tym się różnią od tablic Vegi, że podane są w nich najpierw logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych wszystkich kątów od 0^{0} do 5^{0} co każdą sekundę; następne zaś tablice obejmują logarytmy tychże funkcyj trygonometrycznych wszystkich kątów od 0^{0} do 90^{0} co każde $10''$; nadto wykazane są w odpowiedniej kolumnie różnice między każdemi dwoma logarytmami po sobie następującemi. Ponieważ logarytmy funkcyj trygonometrycznych w tablicach Bremikera podane są dla kątów, rosnących co każde $10''$ to i różnice tablicowe wykazują różnicę między logarytmami dla $10''$ różnicy między kątami. Poczynając od tablic, dających nam logarytmy funkcyj trygonometrycznych kątów od 5^{0} do 85^{0} podane są zewnątrz kolumn, małe kolumny, odpowiadające częściom proporcyjonalnym (partes proportionales), o których znaczeniu mówić będziemy przy opisie użycia tablic Bremikera.

152. TABLICE SCHLÖMILCHA. Układ tablic Schlömilcha jest podobny do układu tablic Vegi, różnica zachodzi jedynie w tym, że tablice obejmują logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych kątów rosnących co jednę minutę. Stopnie kątów są wypisane w pierwszej i ostatniej kolumnie, minuty zaś w drugiej i przedostatniej kolumnie; na wprost zaś minut w odpowiedniej kolumnie logarytmy funkcyj trygonometrycznych; oprócz tego przy logarytmach zamieszczone są w oddzielnej kolumnie różnice między logarytmami, odpowiadające różnicy $1''$ między kątami. Ponieważ tablice Schömilcha obejmują logarytmy pięciocyfrowe, dla pokazania więc, że logarytm w tablicach podany jest większy od logarytmu rzeczywistego, ostatnia cyfra tegoż logarytmu jest podkreśloną i tak np.: na str. 69-ej $\log \sin 7^{0}\,40'$ wykazany jest $9{,}1251\underline{9}$, to podkreślenie cyfry 9 oznacza, że logarytm ten wzięty z tablic jest większy od logarytmu rzeczywistego, t. j. że na tym miejscu była właściwie cyfra 8, lecz pierwsza z opuszczonych następujących cyfr była 5 lub większa.

SPOSÓB UŻYCIA TABLIC.

153. Dla pokazania sposobu użycia tablic, powyżej opisanych, rozwiążemy dwa zadania: 1) znaleść z tablic logarytm pewnej funkcyj trygonometrycznej, danemu kątowi odpowiadającej; 2) znaleść kąt, odpowiadający funkcyi trygonometrycznej, gdy dany jest logarytm tejże funkcyi trygonometrycznej.

154. Znalezienie logarytmu pewnej funkcyi trygonometrycznej, danemu kątowi odpowiadającej.

Przy rozwiązaniu tego zadania mogą zajść dwa przypadki: albo kąt dany jest w ten sposób, że logarytmy jego funkcyj trygonometrycznych podane są w tablicach, albo też podany jest w ten sposób, że tablice nie dają bezpośrednio logarytmów jego funkcyj trygonometrycznych.

155. *Przypadek 1-szy.* Jeżeli kąt podany jest w stopniach i minutach, logarytmy jego funkcyj trygonometrycznych otrzymujemy bezpośrednio zapomocą tablic Vegi, Bremikera i Schlömilcha, jeżeli zaś kąt podany jest w stopniach, minutach i dziesiątkach sekund otrzymujemy logarytmy jedynie zapomocą tablic Bremikera. I tak, przypuśćmy, że chcemy znaleść logarytm wstawy kąta 37° i 44′. Używając tablic Vegi lub Bremikera szukamy naprzód stronnicy, na której u góry jest wypisana liczba 37°. Znalazszy tę stronnicę w kolumnie pierwszej szukamy liczby 44, odpowiadającej danym minutom, mając zaś ją na wprost niej w kolumnie, noszącej u góry nazwę *sin*, znajdziemy liczbę 9,7 867 424, która jest szukanym logarytmem powiększonym o 10 jedności. Odejmując od powyższej liczby 10 jednostek, znajdziemy

$$\log \sin 37^{0}\, 44' = \bar{1},7\,867\,424\,.$$

Dla znalezienia tegoż logarytmu zapomocą tablic Schlömilcha, szukamy stronnicy na której w pierwszej kolumnie wypisaną jest liczba 37°, następnie w drugiej kolumnie liczby 44, na wprost niej, w kolumnie noszącej u góry nazwę *log sin*, znajdziemy liczbę 9,78 674 jako szukany logarytm tablicowy.

Przypuśćmy powtóre, że chodzi nam o znalezienie logarytmu stycznej kąta 68° 52′. Używając tablic Vegi lub Bremikera szukamy najpierw stronnicy, na której u dołu jest wypisana liczba 68°, następnie udajemy się do ostatniej kolumny, w której odszukujemy liczby 52, odpowiadającej danym minutom kąta, na wprost tej liczby w kolumnie zatytułowanej u dołu *tang* znajdziemy liczbę 10,412 809 6, która jest szukanym logarytmem powiększonym o 10 jedności, odejmując 10 jedności od tej liczby znajdziemy

$$\log \operatorname{tg} 68^{0}\, 52' = 0,412\,809\,6\,.$$

Używając do znalezienia logarytmu stycznej kąta 68° 52′, tablic Schlömilcha, szukamy najpierw stronnicy, na której w ostatniej kolumnie jest wypisana liczba 68, następnie zaś w kolumie przedostatniej liczby 52, odpowiadającej danej ilości sekund, na wprost tej ostatniej w kolumnie, zatytułowanej u dołu *log tang* wypisana liczba 10,41 281 będzie szukanym logarytmem, zwiększonym o 10 jednostek, i zarazem większym od logarytmu rzeczywistego. Gdy dany kąt podany jest w stopniach, sekundach dziesiątkach sekund, otrzymujemy logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dostycznych bezpośrednio zapomocą tablic Bremikera.

Gdy wreszcie kąt jest mniejszy od 6°, a podany jest w stopniach, minutach i sekundach, logarytmy jego funkcyj trygonometrycznych otrzymujemy bezpośrednio zapomocą tablic Vegi lub Bremikera, gdyż jak to wspomnieliśmy przy opisie układu tych tablic, logarytmy funkcyj trygonometrycznych tego rodzaju kątów, podane są oddzielnie w tablicach Vegi i Bremikera.

156. *Przypadek 2-gi.* Gdy dany jest kąt większy od 5° i zawiera, oprócz stopni i minut, jeszcze sekundy i ułamki sekund, szukanie logarytmu jego funkcyi trygonometrycznej opieramy na tej zasadzie, że różnice między dwoma logarytmami są proporcyonalne względem różnicy między kątami tymże logarytmom odpowiadającemi, to jest, że jeżeli przez h oznaczymy różnicę między danym kątem, a bezpośrednio od niego mniejszym, którego logarytm funkcyi trygonometrycznej jest podany w tablicy, przez δ zaś różnicę między szukanym logarytmem funkcyi, danemu kątowi odpowiadającej, a logarytmem funkcyi trygonometrycznej kąta bezpośredniego od niego mniejszego, w tablicach podanego, wreszcie przez D różnicę między dwoma logarytmami funkcyi trygonometrycznej kątów, między któremi przypada kąt dany, natenczas, wiedząc, że różnica między dwoma kątami bezpośrednio po sobie następującemi w tablicach Vegi i Schlömilcha wynosi 1′ czyli 60″, będzie

$$\frac{60''}{h} = \frac{D}{\delta}, \text{ ztąd } \delta = \frac{h D}{60''},$$

a jeżeli znalezioną wartość δ dodamy do logarytmu wstawy lub stycznej kąta bezpośrednio mniejszego, lub odejmiemy od logarytmu dostawy lub dostycznej tegoż kąta, znajdziemy logarytm szukany.

Dowodzi się w analizie wyższej, że zasada, którą tu przyjmujemy dla znalezienia logarytmów funkcyj trygonometrycznych jest prawdziwą z przybliżeniem do siedmiu cyfr dziesiętnych, jedynie dla logarytmów funkcyj trygonometrycznych kątów większych od 5°, a mniejszych od 85°, czyli innemi słowy, że przyjęcie tej zasady nie wpływa na siódmą cyfrę dziesiętną logarytmu. Dodać przytym należy, że z tej zasady proporcyjonalności korzystać można tylko dla dwu cyfr dziesiętnych sekund ponad podane w tablicach, gdyż uwzględnianie dalszych cyfr dziesiętnych może spowodować niedokładne wypadki.

Tablice Vegi i Schlömilcha podają nam różnicę dla 1″, czyli wartość $\frac{D}{60''}$ wyrażoną w siedmiu lub pięciu cyfrach dziesiętnych; w tym razie dla znalezienia δ, należy otrzymaną różnicę z tablic pomnożyć przez różnicę, zachodzącą między kątem danym a bezpośrednio od niego mniejszym, w tablicach się znajdującym i otrzymamy iloczyn dodać lub odjąć od logarytmu znalezionego w tablicach, stosownie do tego, czy szukamy logarytmu wstawy lub stycznej, czyteż logarytmu dostawy lub dostycznej; w tym dodawaniu należy pamiętać, że δ wyrażone jest w tablicach Vegi w jednostkach na siódmym, zaś w tablicach Schlömilcha, na piątym miejscu po przecinku.

W tablicach Bremikera, różnice są podane między logarytmami funkcyj trygonometrycznych kątów różniących się o 10″, zatem dziesiąta część tych różnic daje nam różnicę odpowiadającą 1″. Dla znalezienia więc logarytmu funkcyi trygonometrycznej kąta danego, należy, po znalezienie logarytmu funkcyi trygonometrycznej kąta bezpośrednio od niego mniejszego, znaleść różnicę między logarytmami kątów, obejmujących kąt dany, po podzieleniu jej przez 10, pomnożyć przez różnicę, wyrażoną w sekundach, między danym kątem a bezpośrednio od niego mniejszym, otrzymany rezultat dodać do logarytmu funkcyj trygonometrycznych kąta bezpośrednio od niego mniejszego, gdy szukamy logarytmu wstawy lub stycznej, odjąć zaś, gdy szukamy logarytmu dostawy lub dostycznej. Dla ułatwienia w tym względzie rachunku tablice Bremikera obejmują tak zwane części proporcyjonalne (partes proportionales), które wykazują różnice między logarytmami, gdy różnicę między kątami wynoszą 1, 2, 3 . . ., 9 sekund i tak np. dla kątów 37° 44′ i 37° 44′ 10″, różnica między logarytmami wstaw wynosi 272, na skraju tablic wypisana jest kolumna cyfr *), która pokazuje, jakie wtedy są różnice między logarytmami, gdy różnice między kątami wynoszą 1″, 2″. . . I tak, jeżeli różnica między kątami wynosi 6″,8, wtedy dla znalezienia różnicy między logarytmem szukanym (to jest logarytmem wstawy kąta 37° 44′ 6″, 8), a podanym w tablicach logarytmem wstawy kąta 37° 44′ bezpośrednio mniejszego od kąta 37° 44′ 6″, 8, należałoby różnicę 272 podzielić przez 10, a pomnożyć przez 6, 8. Zamiast wykonywania tego mnożenia bierzemy z tabelki liczbę, stojącą na wprost 6 to jest 163, jako odpowiadającą 6″, i do niej dodajemy dziesiątą część liczby, stojącej na wprost liczby 8 to jest 22, skutkiem tego otrzymamy 185, która to liczba będzie różnicą między logarytmem wstawy kąta danego a logarytmem wstawy kąta 37° 44′.

*)	272
1	27.2
2	54.4
3	81.6
4	108.8
5	136.0
6	163.2
7	190.4
8	217.6
9	244.8

157. Jeżeli chodzi nam o znalezienie logarytmu funkcyi trygonometrycznej kąta mniejszego od 5^0 lub większego od 85^0, zasada przyjęta w poprzedzającym artykule nie może być stosowaną i w tym razie postępujemy inną drogą. Kąt dany wyrażamy w sekundach i ułamku dziesiętnym sekund; niech α oznacza ilość sekund, h zaś ułamek dziesiętny. Dla otrzymania $\log\sin(\alpha+h)$ i $\log\operatorname{tg}(\alpha+h)$ możemy przyjąć, że stosunek kątów bardzo małych α i $\alpha+h$ jest równy stosunkowi wstaw lub stycznych tychże kątów (art. 145-ty), to jest możemy przyjąć

$$\frac{\sin(\alpha+h)}{\sin\alpha}=\frac{\alpha+h}{\alpha}, \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha+h)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\alpha+h}{\alpha},$$ będziemy mieli

$$(1)\qquad \begin{aligned} \log\sin(\alpha+h)&=\log\sin\alpha+\log(\alpha+h)-\log\alpha,\\ \log\operatorname{tg}(\alpha+h)&=\log\operatorname{tg}\alpha+\log(\alpha+h)-\log\alpha. \end{aligned}$$

Logarytmy $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, znajdziemy na pierwszych kartach tablic, a następnie w tablicach logarytmów liczb $\log(\alpha+h)$ i $\log\alpha$, przeto z wzorów powyższych otrzymamy logarytmy szukane wstawy i stycznej kąta $\alpha+h$.

Jeżeli wzory powyższe napiszemy w kształcie

$$(2)\qquad \begin{aligned} \log\sin(\alpha+h)&=\log\sin\alpha-\log\alpha+\log(\alpha+h),\\ \log\operatorname{tg}(\alpha+h)&=\log\operatorname{tg}\alpha-\log\alpha+\log(\alpha+h), \end{aligned}$$

natenczas zamiast szukania każdego z logarytmów po prawej stronie tych równań, możemy szukać $\log\sin\alpha-\log\alpha$ i $\log\operatorname{tg}\alpha-\log\alpha$, a następnie do tych różnic dodać $\log(\alpha+h)$. Lecz różnice $\log\sin\alpha-\log\alpha$ i $\log\operatorname{tg}\alpha-\log\alpha$, możemy otrzymać bezpośrednio z tablic Delambre'a, podanych w tablicach Bremikera. Jakoż, w tablicach liczb naturalnych Bremikera u dołu każdej tablicy podane są powyższe różnice dla logarytmów wstawy i stycznej, odpowiadające kątom wyrażonym w sekundach. W powyższych różnicach tablicowych litera S oznacza różnicę, odpowiadającą logarytmowi wstawy, litera zaś T oznacza różnicę, odpowiadającą logarytmowi stycznej, dla obu tych różnic charakterystyka i pierwsze trzy cyfry mantyssy są spólne.

Dla objaśnienia sposobu szukania logarytmu wstawy kąta małego przypuśćmy, że chcemy znaleść logarytm wstawy kąta $3'\,27'',355=207'',355$, natenczas używając wzoru (1), otrzymamy

$$\begin{array}{lr} & \log\sin 207''=7{,}0015451\\ & \log 207{,}355=\underline{2{,}3167145}\\ & \log\sin\alpha+\log(\alpha+h)=9{,}3182596\\ \text{że zaś} & \log 207=\underline{2{,}3159703}\\ \text{przeto} & \log\sin 207'',355=7{,}0022893 \end{array}$$

mamy więc logarytm tablicowy wstawy kąta danego.

Dla znalezienia logarytmu wstawy tegoż kąta zapomocą różnicy $\log \sin \alpha - \log \alpha$, podanej w tablicach Bremikera, szukamy w tablicach logarytmów liczb tej stronnicy, na której znajduje się 207″. Na stronnicy 2-ej tych tablic znajdujemy 200″, które przyjmujemy jako odpowiadające 207″ i bierzemy różnicę S, wypisaną na wprost 200″ t. j. 4,6855748, a jeżeli do niej dodamy logarytm 207,355 t. j. 2,3167145, otrzymamy 7,0022893 t. j. szukany logarytm tablicowy wstawy kąta danego.

Dla znalezienia logarytmu wstawy kąta bardzo małego możemy także użyć wzoru, podanego w art. 145-ym, mianowicie:

$$\sin n'' = \frac{n}{206\,265}\,.$$

Jeżeli ten wzór zastosujemy do danego przykładu, otrzymamy

$$\begin{aligned} \log n &= 2,3167145 \\ \log 206\,265 &= \underline{5,3144255} \\ \log \sin 207'',355 &= 7,0022890 \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że chodzi nam o znalezienie logarytmu stycznej kąta 3′ 27″,355. Jeżeli dla rozwiązania zadania użyjemy drugiego z wzorów (1), otrzymamy

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 207'' &= 7,0015454 \\ \log 207,355 &= \underline{2,3167145} \\ \log \operatorname{tg} \alpha + \log \operatorname{tg} (\alpha + h) &= 9,3182599 \\ \text{odejmując} \qquad \log 207 &= \underline{2,3159703} \\ \text{otrzymamy} \qquad \log \operatorname{tg} 207'',355 &= 7,0022896 \end{aligned}$$

mamy więc logarytm tablicowy stycznej kąta danego.

Jeżeli dla znalezienia logarytmu stycznej kąta danego, używamy tablic Delambre'a, natenczas szukamy naprzód, w tablicach Bremikera logarytmów liczb naturalnych, tej stronnicy, na której znajduje się 207″. Na stronicy 2-ej tych tablic znajdujemy jedynie 200″, które przyjmujemy, jako odpowiadające 207″ i bierzemy różnicę T, wypisaną na wprost 200″ t. j. 4,6855750. Dodając tę liczbę do logarytmu 207,355 t. j. do 2,3167145, otrzymamy 7,0022895, jako szukany logarytm stycznej kąta danego.

Jeżeli chodzi nam o znalezienie logarytmu dostawy kąta bardzo małego $\alpha + h$, natenczas uważmy, że

$$\log \cos (\alpha + h) = \log \sin (\alpha + h) - \log \operatorname{tg} (\alpha + h);$$

otrzymamy więc logarym dostawy kąta danego, szukając logarytmów wstawy i stycznej kąta $\alpha + h$ i odejmując je od siebie. Wzór ten jednak na mocy wzoru (1) przyjmie kształt

$$\log\cos(\alpha + h) = \log\sin\alpha - \log\operatorname{tg}\alpha = \log\cos\alpha,$$

z czego wypada, że kąty $\alpha + h$ i α mają dostawy równe, co też pokazują tablice. Przypuśćmy, że chcemy znaleść $\log\cos 3' 27'',355$. Kąt ten przypada między $3' 20''$ i $3' 30''$, których logarytmy dostaw są jednakie i równe 9,999 999 8, przeto

$$\log\cos 37' 27'', 355 = 9{,}999\,999\,8.$$

158. Pokażemy teraz na przykładach, w jaki sposób szukamy logarytmów funkcyj trygonometrycznych na zasadach, wyłożonych w poprzedzających artykułach.

1) Znaleść logarytm wstawy kąta $37^0 43' 56''$.

Rozwiązanie za pomocą tablic Vegi. Szukamy naprzód logarytmu wstawy kąta, bezpośrednio mniejszego od kąta danego, a znajdującego się w tablicach. Ponieważ tablice Vegi obejmują logarytmy wstaw kątów, rosnących co jednę minutę, przeto tym kątem będzie $37^0 43'$. Następnie szukamy logarytmu wstawy tego kąta i znajdujemy 9,7865791; wreszcie bierzemy z tablic z kolumny D 1″ liczbę, wypisaną między tym logarytmem a logarytmem po nim bezpośrednio następującym; znajdujemy 27,22. Jeżeli tę różnicę pomnożymy przez 56, to jest przez ilość sekund, znajdziemy 1524. Taką zatym jest różnica, wyrażona w jednostkach na siódmym miejscu, między logarytmem wstawy kąta danego a logarytmem kąta bezpośrednio od niego mniejszego. Ponieważ wstawa kąta rośnie, gdy kąt rośnie, przeto i jej logarytm rośnie, otrzymaną więc różnicę należy dodać do logarytmu wziętego z tablic, co uskuteczniwszy, otrzymamy 9,7867315 jako logarytm tablicowy wstawy kąta $37^0 43' 56''$.

Rachunek przy użyciu tablic Vegi wypisuje się w ten sposób

$$\begin{array}{llll}
\log\sin 27^0 43' & = 9{,}7865791 & \qquad & \text{Dif. } 1'' = 27{,}22 \\
\text{różnica dla } 56'' & = \underline{\phantom{9{,}786}1524} & & 56 \times 27{,}22 = 1524{,}32 \\
\log\sin 37' 43' 56'' & = 9{,}7867315 & &
\end{array}$$

Rozwiązanie za pomocą tablic Bremikera. Szukamy naprzód kąta, bezpośrednio mniejszego od kąta danego, a znajdującego się w tablicach, a następnie jego logarytmu. Ponieważ tablice Bremikera obejmują logarytmy wstaw kątów, rosnących co 10 sekund, przeto tym logarytmem będzie 9,7867152, jako odpowiadającym kątowi $37^0 43' 50''$, bezpośrednio mniejszemu od kąta danego. Że zaś różnica między dwoma logarytmami wstaw kątów, bezpośrednio większego i bezpośrednio mniejszego od kąta danego, wynosi 272, to jest dla 10″ wynosi 272, przeto dla 1″ wyniesie 27,2. Mnożąc tę liczbę przez 6, otrzymamy różnicę 163, którą należy dodać do logarytmu wstawy kąta mniejszego, aby otrzymać logarytm szukany. Różnicę tę możemy także otrzymać z tabliczki, znajdującej się na skraju samej tablicy; z tej tabliczki okazuje się, że gdy różnica między logarytmami wynosi 272, wtedy różnica dla 6″ wynosi 163,2. Dodając tę różnicę do logarytmu wziętego z tablicy, otrzymamy 9,7867315, jako szukany logarytm tablicowy wstawy kąta danego.

Rachunek przy użyciu tablic Bremikera zazwyczaj wypisuje się w ten sposób

$\log\sin 37^\circ 43' 50'' = 9{,}7867152$		Dif. 272
różnica dla $6'' =$	163	dla $6'' = 163{,}2$
$\log\sin 37^\circ 43' 56'' = 9{,}7867315.$		

Rozwiązanie za pomocą tablic Schlömilcha Ponieważ tablice Schlömilcha obejmują pięciocyfrowe logarytmy wstaw rosnących co jednę minutę, przeto szukamy logarytmu kąta, bezpośrednio mniejszego od kąta danego; tym kątem jest 37° 43′ a logarytmem jego wstawy 9,78658. Różnicę między logarytmem szukanym a wziętym z tablicy znajdujemy w podobny sposób, jak przy użyciu tablic Vegi, to jest różnicę z tablic dla 1″, to jest 0,27 mnożymy przez 56, przez co otrzymujemy różnicę 15, którą dodając do logarytmu wstawy kąta 37° 43′, otrzymamy 9,78673, jako szukany logarytm wstawy kąta danego.

Rachunek wypisuje się w ten sam sposób, jak przy użyciu tablic Vegi

$\log\sin 37^\circ 43' = 9{,}78658$		Dif. $1'' = 0{,}27$
różnica dla $56'' =$	15	$56 \times 0{,}27 = 15{,}12$
$\log\sin 37^\circ 43' 56'' = 9{,}78673.$		

2) Znaleść logarytm dostawy kąta 21° 32′ 34″,9.

Rozwiązanie za pomocą tablic Vegi. Wiemy, że gdy kąt rośnie od 0° do 90° dostawa jego maleje, przeto i logarytmy dostawy maleją w miarę zwiększania się kąta; w tym razie możemy dwiema drogami dojść do szukanego logarytmu.

Sposób 1-szy. Weźmy z tablic logarytmu dostawy kąta, bezpośrednio mniejszego od kąta danego; znajdujemy w tablicach Vegi kąt 21° 32′ a logarytm jego dostawy 9,9685783, następnie z kolumny D 1″ bierzemy 8,31. Ponieważ 8,31 oznacza różnicę logarytmów dostaw kątów różniących się o 1″, przeto na mocy artykułu 156-go, różnica między logarytmem szukanym a logarytmem z tablic wziętym wyniesie $34{,}9 \times 8{,}31 = 290{,}019$. Ponieważ, jakto na początku zaznaczyliśmy, gdy kąt rośnie, logarytm dostawy maleje, przeto odejmując znalezioną liczbę od logarytmu wziętego z tablic, otrzymamy 9,9685493, jako szukany logarytm tablicowy dostawy kąta 21° 32′ 34″,9, odejmując od niego 10 jedności otrzymamy logarym właściwy

$$\log \cos 21^\circ\, 32'\, 34'',9 = \bar{1},9685493 .$$

Sposób 2-gi. Szukamy w tablicach logarytmu dostawy kąta bezpośrednio większego od kąta danego t j. kąta 21° 33′, znajdujemy 9,9685284. Następnie z kolumny D 1″ bierzemy liczbę wypisaną między tym logarytmem a bezpośrednio nad nim stojącym, t. j. 8,31. Ponieważ 8,31 przedstawia różnicę między logarytmami, gdy różnica między kątami wynosi 1″, a kąt 21° 33′ jest większy od kąta danego o 25″,1 przeto różnica między logarytmami uczyni $25{,}1 \times 8{,}31 = 208{,}581$, czyli 209. Ponieważ logarytm dostawy kąta rośnie, gdy kąt maleje, przeto znalezioną różnicę należy dodać do logarytmu wziętego z tablic, co uskuteczniwszy, otrzymamy 9,9685493, jako logarytm szukany dostawy kąta danego.

Rachunek przedstawiamy w teǹ sposób:

Używając 1-go sposobu

$$\begin{array}{lll} \log\cos 21^\circ\, 32' & = 9{,}9685783 & \text{Dif. } 1'' = 8{,}31 \\ -\text{różnica dla } 34'',9 & = \underline{\qquad\quad 290} & 34{,}9 \times 8{,}31 = 290 \\ \log\cos 21^\circ\, 32'\, 34'',9 & = 9{,}9685493 & \end{array}$$

Używając 2-go sposobu

$$\begin{array}{lll} \log\cos 21^\circ\, 33' & = 9{,}9685284 & \text{Dif. } 8{,}31 \\ +\text{różnica dla } 25'',1 & = \underline{\qquad\quad 209} & 25{,}1 \times 8{,}31 = 208{,}581 \\ \log\cos 21^\circ\, 32'\, 34'',9 & = 9{,}9685493 & \end{array}$$

Rozwiązanie za pomocą tablic Bremikera.

Sposób 1-szy. Bierzemy z tablic logarytm dostawy kąta bezpośrednio mniejszego od kąta danego, znajdujemy w tablicach kąt 21° 32′ 30″, a jego logarytm dostawy 9,9685534; następnie z kolumny zatytułowanej *d.*, bierzemy liczbę 84, stojącą obok tego logarytmu. Ponieważ 84 oznacza różnicę między dwoma logarytmami dostaw kątów, różniących się o 10″, przeto różnica dla 1″ wyniesie 8,4. Mnożąc tę liczbę przez różnicę między kątem danym a wziętym z tablic t. j. przez 4,9 znajdziemy 41,16, czyli 41, jako różnicę między logarytmem szukanym a logarytmem wziętym z tablic. Lecz gdy kąt rośnie logarytm jego dostawy maleje, przeto znalezioną różnicę należy odjąć od logarytmu wziętego z tablic; co uskuteczniwszy, otrzymamy 9,9685493, jako szukany logarytm dostawy kąta danego. Dla znalezienia różnicy powyższej, możemy także użyć tabliczki, umieszczonej na skraju następującej stronnicy. Według tej tabliczki, gdy różnica między logarytmami wynosi 84, natenczas dla 4″ wynosi 33,6, zaś dla 0″,9 wynosi 7,5 zatym dla różnicy między kątami 4″,9 wyniesie 41,1 czyli 41.

Sposób 2-gi. Szukamy w tablicach logarytmu dostawy kąta bezpośrednio większego od kąta danego; znajdujemy, że tym kątem jest 21° 32′ 40″ a jego logarytmem 9,9685450. Następnie z kolumny zatytułowanej *d.*, bierzemy różnicę między tym logarytmem a bezpośrednio od niego większym, znajdujemy 84; że zaś ta różnica odpowiada różnicy 10″ między kątami, przeto dla 1″ wyniesie 8,4. Następnie szukamy różnicy między kątem wziętym z tablic a kątem danym, różnicą tą jest 5″,1. Jeżeli tę różnicę pomnożymy przez 8,4, otrzymamy 43 jako różnicę między logarytmem szukanym a logarytmem wziętym z tablic. Że zaś logarytm dostawy kąta rośnie, gdy kąt maleje, przeto otrzymaną różnicę należy dodać do logarytmu wziętego z tablic, aby otrzymać logarytm dostawy kąta danego, co uskuteczniwszy otrzymamy 9,9685493, jako szukany logarytm dostawy kąta danego. Różnicę między logarytmem szukanym, a wziętym z tablic, znaleść możemy także przy pomocy tabliczki na skraju tablic zamieszczonej. Z tej tabliczki okazuje się, że gdy różnica między logarytmami wynosi 84, wtedy różnica dla 5″ wyniesie 42, zaś dla 0″,1 wyniesie 0,8, czyli razem w przyliżeniu 43. Dodając te różnicę do logarytmu wziętego z tablic otrzymamy szukany logarytm.

Rachunek przy użyciu tablic Bremikera w ten sposób się przedstawia:

Używając 1-go sposobu

log cos 21° 32′ 30″ = 9,9685534	Dif. 84
— różnica dla 4″,9 = 41	84 × 4,9 = 41,16
log cos 21° 32′ 34″,9 = 9,9685493	

albo

	Dif. 84
log cos 21° 32′ 30″ = 9,9685534	dla 4″ dif. 33,6
— różnica dla 4″,9 = 41	dla 0,9 „ 7,5
log cos 21° 32′ 34″. 9 = 9,9685493	dla 4″,9 „ 41,1

Używając 2-go sposobu

log cos 21° 32′ 40″ = 9,9685450	Dif. 84
+ różnica dla 5″,1 = 43	84 × 5,1 = 42,84
log cos 21° 32′ 34″,9 = 9,9685493	

albo

	Dif. 84
log cos 21° 32′ 40″ = 9,9685450	dla 5″ dif. 42
+ różnica dla 5″,1 = 43	dla 0,1 „ 0,8
log cos 21° 32′ 34″,9 = 9,9685493	dla 5″,1 „ 42,8

Rozwiązanie za pomocą tablic Schlömilcha. Dla znalezienia logarytmu dostawy kąta 32° 32′ 34″,9 zapomocą tablic Schlomilcha postępujemy tąż samą drogą jak przy użyciu tablic Vegi. Rachunek następujący pokaże sposób postępowania

$\log\cos 21^0\,32'$	$= 9{,}96858$	Dif. 0,08
— różnica dla $34'',9$	$= \underline{\quad\quad 3}$	$0{,}08 \times 34{,}9 = 2{,}792$
$\log\cos 21^0\,32'\,34'',9$	$= 9{,}96855$	

albo

$\log\cos 21^0\,33'$	$= 9{,}96853$	Dif. 0,08
+ różnica dla $25'',1$	$= \underline{\quad\quad 2}$	$0{,}08 \times 25{,}1 = 2{,}008$
$\log\cos 21^0\,32'\,34'',9$	$= 9{,}96855.$	

3) Znaleść logarytm stycznej kąta $78^0\,35'\,47'',6$.

Rozwiązanie za pomocą tablic Vegi. Szukamy najprzód logarytmu stycznej kąta bezpośrednio mniejszego od kąta danego, a znajdującego się w tablicach Vegi, to jest kąta $78^0\,35'$. W tym celu szukamy naprzód stronnicy, na której wypisane jest u dołu 78^0, następnie idziemy do kolumny ostatniej i tam szukamy liczby $35'$, na wprost tej liczby w kolumnie, oznaczonej u dołu *tangens*, znajdujemy logarytm stycznej kąta $78^0\,35'$, mianowicie 10,6947817. Z kolumny następującej, licząc od prawej ku lewej ręce, zatytułowanej D 1'', bierzemy różnicę 108,6, wypisaną między tym logarytmem, a bezpośrednio po nim następującym, postępując od dołu do góry. Ponieważ 108,6 stanowi różnicę między logarytmami stycznej, gdy kąty różnią się o 1'', przeto dla różnicy $47'',6$ między kątami, różnica między logarytmami wyniesie $47{,}6 \times 108{,}6 = 5169{,}36$. Ponieważ styczna rośnie, gdy kąt rośnie, a tymsamym i jej logarytm, przeto znalezioną różnicę należy dodać do logarytmu wziętego z tablic przez co otrzymamy 10,6952986, jako szukany logarytm stycznej kąta $78^0\,35'\,47'',6$.

Rozwiązanie za pomocą tablic Bremikera. Logarytm stycznej kąta danego znajdujemy w podobny sposób jak logarytm wstawy kąta t. j. zapomocą tabliczki na skraju tablic zamieszczonej, a mianowicie według rachunku następującego:

		Dif. 1086
$\log \mathrm{tg}\, 78^0\,35'\,40''$	$= 10{,}6952160$	dla 7'' dif. 760
+ różnica dla $7'',6$	$= \underline{\quad\quad 825}$	dla 0,6 „ $\underline{65}$
$\log \mathrm{tg}\, 78^0\,35'\,47'',6$	$= 10{,}6952985$	dla $7'',6$ „ 825.

Rozwiązanie za pomocą tablic Schlömilcha. Sposób rozwiązania zapomocą tablic Schlömilcha, wskazuje najlepiej rachunek następujący:

$\log \mathrm{tg}\, 78^0\,35'$	$= 10{,}69478$	Dif. 1.08
+ różnica dla $47'',6$	$= \underline{\quad\quad 51}$	$1{,}08 \times 47{,}6 = 51{,}4$
$\log \mathrm{tg}\, 78^0\,35'\,47'',6$	$= 10{,}69529.$	

4) Znaleść logarytm dostycznej kąta $48^0\,15'\,42'',3$.

Rozwiązanie za pomocą tablic Vegi. Sposób szukania logarytmu dostycznej kąta jest zupełnie taki sam jak dostawy, mianowicie bierzemy z tablic logarytm dostycznej kąta bezpośrednio mniejszego od kąta danego, to jest kąta $48^0\,15'$, znajdujemy 9,9506248, następnie z kolumny, zatytułowanej D 1'', bierzemy 42,38 i mnożymy przez ilość sekund kąta danego t. j. przez 42,3 przez co otrzymamy różnicę 1793 między logarytmem szukanym, a logarytmem wziętym z tablicy. Z przyczyny, że dostyczna kąta maleje, gdy kąt rośnie, znalezioną różnicę odejmujemy od logarytmu wziętego z tablic, przez co otrzymujemy 9,9504455 jako logarytm tablicowy dostycznej kąta $48^0\,15'\,42'',3$. Do tego samego wypadku moglibyśmy przyjść biorąc z tablic logarytm dostycznej kąta bezpośrednio większego od kąta danego to jest kąta $48^0\,16'$, i szukając różnicy między logarytmami, gdy różnica między kątami wynosi 17'',2. Ponieważ różnica tablicowa wynosi 42, 38, przeto różnica między logarytmem wziętym z tablic, a logarytmem szukanym wyniesie $17,7 \times 42,38$, czyli 750, którą dodając do logarytmu dostycznej kąta $48^0\,16'$, otrzymamy szukany logarytm.

Rozwiązanie za pomocą tablic Bremikera. Szukanie logarytmu dostycznej kąta danego zapomocą tablic Bremikera najdogodniej doprowadza do celu zapomocą tabliczki, zamieszczonej na skraju tablic, jakto wskazuje następujący rachunek

			Dif. 424
log cotg $48^0\,15'\,40''$	= 9,9504553	dla 2''	dif. 84,8
— różnica dla 2'',3	= 98	dla 0,3	„ 12,7
log cotg $48^0\,15'\,42'',3$	= 9,9504455	dla 2'',7	„ 97,5

albo

			Dif. 424
log cotg $48^0\,15'\,50''$	= 9,9504129	dla 7''	dif. 296,8
+ różnica dla 7'',7	= 326	dla 0,7	„ 29,6
log cotg $48^0\,15'\,42'',3$	= 9,9504455	dla 7'' 7	„ 326,4

Rozwiązanie za pomocą tablic Schlömilcha. Sposób szukania logarytmu dostycznej kąta zapomocą tablic Schlömilcha jest podobny do sposobu szukania logarytmów dostawy kąta. Rachunek objaśnia sposób postępowania

log cotg $48^0\,15'$	= 9,95062	Dif. 0,42
— różnica dla 42'',3	= 18	$0,42 \times 42,3 = 17,766$
log cotg $48^0\,15'\,42'',3$	= 9,95044	

albo

$$\begin{array}{lll} \log\operatorname{cotg} 48^0\,16' & = 9{,}95037 & \text{Dif. } 0{,}42 \\ + \text{ różnica dla } 17'',7 & = \underline{\qquad 7} & 0{,}42 \times 17{,}7 = 7{,}434 \\ \log\operatorname{cotg} 48^0\,15'\,42'',3 & = 9{,}95044. & \end{array}$$

5) Znaleść logarytm wstawy lub stycznej kąta 22′ 57″,72.

Z przyczyny, że kąt jest bardzo mały, używamy w tym razie metody wyłożonej w art. 157-ym. Wyrażając wielkość kąta w sekundach, otrzymamy 1377″,72, mamy więc w tym razie $\alpha = 1377$, $h = 0{,}72$. Używając tablic siedmiocyfrowych znajdziemy

$$\log\sin 1377'',72 = \log\sin 1377'' - \log 1377 + \log 1377{,}72$$
$$= 7{,}8245056 - 3{,}1389339 + 3{,}1391610 = 7{,}8247327.$$

Jeżeli dla otrzymania tego wypadku użyjemy tablic Delambre'a, pomieszczonych pod logarytmami liczb naturalnych w tablicach Bremikera, znajdziemy

$$\begin{array}{ll} S \text{ dla } 1380'' & = 4{,}6855716 \\ \log 1377{,}72 & = \underline{3{,}1391610} \\ \log 1377'',72 & = 7{,}8247326. \end{array}$$

W podobny sposób postępujemy jeżeli chodzi nam o znalezienie logarytmu stycznej kąta 22′ 57″,72. Na mocy art. 157-go, mamy

$$\log\operatorname{tg} 1377'',72 = \log\operatorname{tg} 1377'' - \log 1377 + \log 1377{,}72$$
$$= 7{,}8245153 - 3{,}1389339 + 3{,}1391610 = 7{,}8247424.$$

Używając tablic Delambre'a, umieszczonych pod logarytmami liczb naturalnych w tablicach Bremikera, znajdziemy

$$\begin{array}{ll} T \text{ dla } 1380'' & = 4{,}6855813 \\ \log 1377{,}72 & = \underline{3{,}1391610} \\ \log\operatorname{tg} 1377'',72 & = 7{,}8247423. \end{array}$$

PRZYKŁADY.

1) Znaleść zapomocą tablic Vegi, Bremikera lub Schlömilcha logarytmy

$$\sin 16^0\,27'\,14{,}6$$
$$\cos 24^0\,54'\,19{,}4$$
$$\operatorname{tg} 39^0\,16'\,24{,}5$$
$$\operatorname{cotg} 44^0\,15'\,52'',4$$

$$\sin 64^0\ 28'\ 19'',6$$

$$\cos 74^0\ 39'\ 20'',9$$

$$\mathrm{tg}\ 72^0\ 15'\ 12'',4$$

$$\mathrm{cotg}\ 82^0\ 46'\ 54''$$

$$\sin 0^0\ 2'\ 32'',45$$

$$\mathrm{tg}\ 0^0\ 4'\ 12'',6.$$

ZNALEZIENIE KĄTA, ODPOWIADAJĄCEGO DANEMU LOGARYTMOWI FUNKCYI TRYGONOMETRYCZNEJ.

159. Gdy dany jest logarytm funkcyi trygonometrycznej, szukamy go przedewszystkim między liczbami jednej z kolumn nazwę danej funkcyi trygonometrycznej noszącej. Jeżeli dany logarytm znajdziemy w tablicach, należy zauważyć, czy tytuł tej kolumny, noszący nazwę danej funkcyi trygonometrycznej, jest wypisany u góry, czy też u dołu kolumny; w pierwszym razie za stopnie kąta należy brać tę ilość, która jest wypisaną u góry tablicy (przy użyciu tablic Schlömilcha z kolumny pierwszej), w przeciwnym razie tę ich ilość, która jest wypisaną u dołu (przy użyciu tablic Schlömilcha z kolumny ostatniej); minuty kąta szukanego będą stały na wprost logarytmu, w pierwszym przypadku w kolumnie pierwszej, (w tablicach Schlömilcha w kolumnie drugiej), w drugim zaś przypadku w kolumnie ostatniej (w tablicach Schlömilcha w kolumnie przedostatniej). I tak, jeżeli mamy dany logarytm wstawy kąta równy 9,5806986, znajdujemy go w tablicach Vegi na str. 281, że zaś ten logarytm znajduje się w kolumnie, zatytułowanej u góry *sinus*, przeto należy wziąć ilość stopni 22, wypisaną u góry tablicy, wprost zaś tego logarytmu w kolumnie pierwszej, mamy ilość minut 23, przeto szukanym kątem będzie $22^0\ 23'$. Jeżeli logarytm wstawy kąta jest $= 9,9659806$, który znajdujemy na tejże stronnicy tablic Vegi w kolumnie, zatytułowanej u dołu *sinus*, wtedy dla znalezienia kąta należy wziąć ilość stopni 67^0, wypisaną u dołu; minuty kąta znajdziemy z ostatniej kolumny biorąc liczbę, stojącą na wprost danego logarytmu to jest 37, tym sposobem szukanym kątem będzie $67^0\ 37'$.

160. Gdy dany logarytm funkcyi trygonometrycznej nie znajduje się w tablicach, szukamy w kolumnie, danej funkcyi trygonometrycznej odpowiadającej, dwu logarytmów po sobie idących, któreby obejmowały dany logarytm. Znalazszy takie dwa logarytmy, będziemy wiedzieli, że kąt szukany będzie przypadał między kątami, tymże logarytmom odpowiadającemi. Jeden z tych kątów możemy wziąć za przybliżoną wielkość kąta szukanego, który według tablic Vegi lub Schlömilcha będzie pokazywał ilość stopni i minut; sekundy kąta szukanego znajdziemy, z przyjętej w art. 156-ym zasady proporcyjonalności między kątami i logarytmami funkcyi trygononometrycznej im odpowiadającemi t. j. z wyrażenia

$$h = \frac{\delta\, 60''}{D},$$

gdzie δ oznacza różnicę między logarytmem danym, a wziętym z tablicy, jako przybliżoną wielkość logarytmu kąta szukanego, D różnicę między logarytmami, obejmującemi dany logarytm, h zaś różnicę między szukanym kątem, a kątem przyjętym, jako przybliżoną wielkość tegoż kąta; że zaś $\frac{D}{60''} = \text{Dif. } 1''$, podane jest w tablicach, przeto ilość sekund h znajdziemy dzieląc δ przez Dif. 1″. Jeżeli przyjęta wielkość przybliżona kąta odpowiada logarytmowi mniejszemu od danego logarytmu, natenczas, gdy mamy logarytm wstawy lub stycznej, należy znalezioną różnicę dodać do przybliżonej wielkości kąta; jeżeli zaś przyjęta wielkość odpowiada logarytmowi większemu, należy ją odjąć; gdy zaś mamy dany logarytm dostawy lub dostycznej należy postąpić odwrotnie.

W tablicach Bremikera, które obejmują logarytmy funkcyj trygonometrycznych kątów co 10″, a nadto podane są części proporcyjonalne, możemy albo postępować tą samą drogą jak przy użyciu tablic Vegi i Schlömilcha, lub też używając części proporcyjonalnych, jakto na przykładach poniżej wyjaśnimy.

161. Jeżeli różnice między logarytmami są bardzo znaczne, droga do wyszukiwania kątów, którąśmy powyżej wskazali, nie doprowadza do celu; zdarza się to wtedy, gdy mamy do wyznaczenia bardzo małe kąty przez ich wstawy lub styczne. W tych przypadkach postępujemy w ten sposób. Szukamy przedewszystkim w pierwszej części tablic, w których podane są logarytmy funkcyj trygonometrycznych kątów, różniących się o jednę sekundę, kąta, któregoby logarytm wstawy lub stycznej najwięcej zbliżał się do logarytmu danego, kąt ten wyrażamy w sekundach. Jeżeli α oznacza ilość sekund tego kąta, zaś $\alpha + h$ ilość sekund kąta, odpowiadającego danemu logarytmowi funkcyi trygonometrycznej, to tę ilość $\alpha + h$ znajdujemy, trzymając się zasady przyjętej w art. 157-ym t. j, że w tym razie stosunek kątów bardzo małych jest równy stosunkowi wstaw lub stycznych, tymże kątom odpowiadających. Lecz na mocy wzorów (2) artykułu 157-go, mamy

$$(1) \quad \begin{aligned} \log(\alpha + h) &= \log\sin(\alpha + h) - \log\sin\alpha + \log\alpha, \\ \log(\alpha + h) &= \log\operatorname{tg}(\alpha + h) - \log\operatorname{tg}\alpha + \log\alpha, \end{aligned}$$

przeto z tych wzorów otrzymać będziemy mogli logarytmy sekund kąta szukanego. Jeżeli wzory powyższe napiszemy w kształcie:

$$(2)\quad \begin{aligned} \log(\alpha+h) &= \log\sin(\alpha+h) - [\log\sin\alpha - \log\alpha], \\ \log(\alpha+h) &= \log\operatorname{tg}(\alpha+h) - [\log\operatorname{tg}\alpha - \log\alpha], \end{aligned}$$

natenczas $\log(\alpha+h)$ możemy także otrzymać zapomocą tablic Delambre'a, podanych pod logarytmami liczb naturalnych w tablicach Bremikera. Jakoż, tablice te, jakto już wspomnieliśmy w art. 157-ym, dają nam różnicę $\log\sin\alpha - \log\alpha$ i $\log\operatorname{tg}\alpha - \log\alpha$; jeżeli więc od logarytmu danego funkcyi trygonometrycznej odejmiemy odpowiednio różnicę $\log\sin\alpha - \log\alpha$ lub $\log\operatorname{tg}\alpha - \log\alpha$, wiadome z tablic, otrzymamy $\log(\alpha+h)$, a następnie $\alpha+h$ t. j. ilość sekund kąta szukanego.

Dla objaśnienia sposobu szukania kątów bardzo małych, danemu logarytmowi wstawy lub stycznej odpowiadających, przypuśćmy, że chcemy znaleść kąt odpowiadający danemu logarytmowi wstawy 7,0022893. Znajdujemy w tablicach Vegi, że najbliższym logarytmem jest 7,0015451, i odpowiada kątowi 3′27″, czyli 207″; że zaś $\log 207 = 2{,}3159703$, przeto na mocy pierwszego z wzorów (1), mieć będziemy:

$$\log(\alpha+h) = 7{,}0022893 - 7{,}0015451 + 2{,}3159703 = 2{,}3167145.$$

Szukając liczby temu logarytmowi odpowiadającej znajdziemy 207,355; kątem więc szukanym będzie 3′27″,355.

Jeżeli dla rozwiązania tego zadania, będziemy chcieli użyć tablic Delambre'a, to jak i w pierwszym przypadku szukamy w tablicach Bremikera przedewszystkim logarytmu wstawy kąta bezpośrednio mniejszego od logarytmu danego; znajdujemy w tym razie 7,0015451, który odpowiada kątowi 3′27″, czyli 207″. Jeżeli od logarytmu danego odejmiemy z tablic S odpowiadające 200″, czyli 4,6855748, otrzymamy 2,3167145, czyli $\log(\alpha+h)$. Szukając następnie $\alpha+h$ znajdziemy, jak i w powyższym rozwiązaniu, że kąt szukany jest równy 3′27″,355.

Przypuśćmy, że chcemy znaleść kąt, odpowiadający logarytmow stycznej 7,0022896. Znajdujemy w tablicach Vegi, że najbliższym logarytmem jest wtedy 7,0015454 i odpowiada kątowi 3′27″ = 207″, że zaś $\log 207 = 2{,}3159703$, przeto na mocy drugiego z wzorów (1), mieć będziemy

$$\log(\alpha+h) = 7{,}0022896 - 7{,}0015454 + 2{,}3159703 = 2{,}3167145.$$

Szukając liczby danemu logarytmowi odpowiadającej, znajdziemy 207,355; kątem więc szukanym będzie 3′27″,355.

Jeżeli dla rozwiązania tego ostatniego zadania użyjemy tablic Delambre'a, należy znaleść przedewszystkim logarytm stycznej, bezpośrednio mniejszy od logarytmu danego, którym jest w tym razie 7,0015454 i odpowiada kątowi $3'27'' = 207''$. Jeżeli następnie od logarytmu danego 7,0022896 odejmiemy wzięte z tablic Delambre'a T, odpowiadające $200''$, to jest 4,6855750, otrzymamy $\log(\alpha + h) = 2{,}3167146$. Szukając następnie $\alpha + h$, znajdziemy, że kątem szukanym jest $3'27'',355$.

Jeżeli chodzi nam o wyznaczenie kąta małego danemu logarytmowi dostawy odpowiadającego, natenczas zadania tego dokładnie rozwiązać nie możemy, albowiem gdybyśmy chcieli znaleść kąt, którego logarytmem dostawy jest np. 9,9999991, natenczas przekonalibyśmy się z tablic, że ten logarytm odpowiada wszystkim kątom zawartym między $6'45''$ i $7'25''$, szukany przeto kąt otrzymalibyśmy z niedokładnością, wyrównywającą $40''$.

ZADANIA.

1) Znaleść kąt którego $\log\sin = 9{,}7432684$. Szukamy najpierw w tablicach Vegi, w kolumnie zatytułowanej *sinus*, logarytmu bezpośrednio mniejszego od danego logarytmu, na str. 292 znajdujemy

$$\log\sin 33^0\,37' = 9{,}7432226$$

że zaś $\qquad \log\sin x = \underline{9{,}7432684}$

przeto $\qquad$ różnica δ wynosi $\quad 458$

że zaś różnica dla $1''$ w tablicach wynosi 31,66, przeto ilość sekund $h = \dfrac{458}{31{,}66} = 14{,}46$, że zaś wstawa i jej logarytm rośnie, gdy kąt rośnie, przeto dodając znalezioną ilość sekund do kąta $33^0\,37'$, znajdziemy $33^0\,37'\,14'',46$ jako wielkość kąta, danemu logarytmowi wstawy odpowiadającego.

Rachunek powyższy wypisuje się w ten sposób:

$$\begin{array}{lll} \log\sin x & = 9{,}7432684 & \text{Dif. } 1'' = 31{,}66 \\ \log\sin 33^0\,37' & = \underline{9{,}7432226} & \\ \text{różnica} & \dfrac{458}{31{,}66} = 14'',46, & \end{array}$$

$$x = 33^0\,37'\,14'',46.$$

Jeżelibyśmy szukali kąta zapomocą tablic Bremikera, znalezlibyśmy, że

$$\begin{array}{r} \log\sin x = 9{,}7432684 \\ \log\sin 33^0\,37'\,10'' = \underline{9{,}7432543} \\ \text{różnica} \qquad 141 \end{array}$$

Według tablic różnica dla $10''$ wynosi 316 i w tabliczce części proporcyonalnych znajdujemy, że najbliższą cyfrą 141 jest 126,4, która odpowiada 4″, zatym bierzemy 4″, odejmując 126,4 od 141, pozostanie 14,6, które daje 0″,4, pozostanie 1,96, ta zaś różnica w tejże tabliczce daje 0,06. Szukanym więc kątem będzie 33° 37′ 14″,46. Rachunek ten daje się przedstawić w ten sposób: dla różnicy 316 między logarytmami mamy różnicy 10″ między kątami, zatym

	126,4	daje	4″
	12,64	„	0,4
	1,89	„	0,06
przeto dla	140,93	mamy	4″,46

2) Znaleść kąt, którego logarytmem dostawy jest 9,9046539. Szukamy w tablicach Vegi, w kolumnie zatytułowanej *cosinus*, logarytmu najbliżej przystępującego do danego logarytmu, a od niego większego; znajdujemy na str. 295-ej

	$\log\cos 36^\circ 35'$	$= 9,9047106$
że zaś	$\log\cos x$	$= 9,9046539$
przeto	różnica wynosi	567

Z tablic znajdujemy, że różnica dla 1″ wynosi 15,63, zatym ilość sekund znajdziemy dzieląc 567 przez 15,63; lecz $\frac{567}{15,63} = 36,28$, przeto kąt szukany jest równy 36° 35′ 36″,28.

Tablice Bremikera prowadzą nas do następującego rachunku

$$\log\cos 36^\circ 35' 30'' = 9,9046637$$
$$\log\cos x = 9,9046539$$
$$\text{różnica} \quad 98$$

różnica między logarytmami w tablicach wynosi 156, której części proporcyjonalne są wypisane na boku tablic,

	dla różnicy 93,6	mamy	6″
	„ 3,12	„	0,2
	„ 1,248	„	0,08
przeto	dla różnicy 97,968	mamy	6″,28

szukanym więc kątem jest 36° 35′ 36″,28.

3) Znaleść kąt, którego logarytmem stycznej jest 10,74765. Według tablic Schlömilcha, mamy

$$\log\operatorname{tg} x = 10,74765 \qquad \text{Dif. } 1'' = 1,22$$
$$\log\operatorname{tg} 79^\circ 51' = 10,74708$$
$$\text{różnica} \quad 57$$

$$\frac{57}{1,22} = 46,72 \text{ kąt szukany } 79^0\, 51'\, 46'',72.$$

4) Znaleść kąt, którego logarytmem dostycznej jest 10,36608. W tablicach Schlömilcha znajdujemy

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{cotg} 23^0\, 17' & = 10,36621 & \text{Dif. } 1'' = 0,58 \\ \log \operatorname{cotg} x & = \underline{10,36608} & \\ \text{różnica} & \quad\quad 13 & \end{array}$$

$$\text{ilość sekund} = \frac{13}{0,58} = 22,4,$$

$$\text{zatym } x = 23^0\, 17'\, 22'',4.$$

PRZYKŁADY.

Znaleść kąty odpowiadające danym logarytmom

1) $\log \sin x = 9,9473542.$
2) $\log \cos x = 9,5027389.$
3) $\log \operatorname{tg} x = 9,5162428.$
4) $\log \operatorname{cotg} x = 10,5036442.$
5) $\log \sin x = 9,95735.$
6) $\log \cos x = 9,50274.$
7) $\log \operatorname{tg} x = 9,51624.$
8) $\log \operatorname{cotg} x = 10,50364.$

ROZDZIAŁ III.

ZASTOSOWANIA FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

ZASTOSOWANIE FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH DO ROZWIĄZYWANIA TRÓJKĄTÓW.

162. W każdym trójkącie mamy do rozważania sześć elementów, mianowicie trzy boki i trzy kąty trójkąta. Wiemy z Gieometryi, że trójkąt jest wyznaczony, gdy mamy dane trzy jego elementy, byleby między niemi był przynajmniej jeden bok, t. j., że mając trzy tego rodzaju elementy trójkąta, możemy, za pomocą wykreślenia, wyznaczyć pozostałe elementy trójkąta. Lecz te wykreślenia, jako sposoby graficzne, nie mogą być wykonane z dostateczną ścisłością, z przyczyny nieuchronnej niedokładności narzędzi, używanych do wykreślenia, tudzież błędów samego wykonania, a tymsamym dają nam wypadki jedynie przybliżone. Dla uniknienia tych niedokładności starano się, za pomocą rachunku, otrzymywać wypadki, które przy użyciu funkcyj trygonometrycznych, otrzymujemy z taką dokładnością, jak sami zechcemy. Znalezienie za pomocą rachunku z trzech elementów, wyznaczających trójkąt, pozostałych elementów trójkąta zowie się *rozwiązaniem trójkąta*, a zastosowanie funkcyj trygonometrycznych do rozwiązywania trójkątów zowie się właściwą *trygonometryją*.

Długości boków trójkąta odnosić będziemy do pewnej jednostki np. metra, stopy, mili i t. p.; wielkości zaś kątów wyrażać będziemy w jednostkach kąta prostego. Przy wykładzie samych funkcyj trygonometrycznych używaliśmy przeważnie miary teoretycznej kąta, przy rozwiązywaniu trójkątów używać będziemy zwykłej miary kątów t. j. kąty wyrażać będziemy w stopniach, minutach i sekundach. Rozwiązywanie trójkątów opiera się na pewnych związkach, zachodzących między bokami trójkąta, a funkcyjami trygonometrycznemi kątów trójkąta, wyprowadzeniem których obecnie się zajmiemy. Przy wyprowadzaniu tych związków oznaczać będziemy kąty trójkąta literami greckiemi α, β, γ, boki zaś przeciwległe tym kątom oznaczać będziemy literami łacińskiemi odpowiednio a, b, c. W przypadku, gdy trójkąt jest prostokątny, kąt jego prosty oznaczać będziemy przez α, a przeciwprostokątną przez a.

ZWIĄZKI MIĘDZY BOKAMI I KĄTAMI TRÓJKĄTA.

163. *Twierdzenie 1-sze. W trójkącie prostokątnym, ramię kąta prostego jest równe iloczynowi przeciwprostokątnej przez wstawę kąta przeciwległego, albo przez dostawę kąta przyległego.*

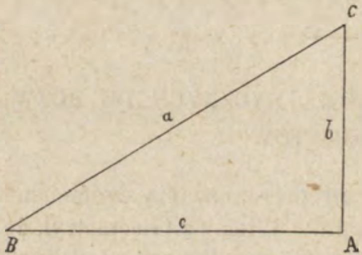

Fig 32.

Niech będzie trójkąt prostokątny ABC (fig. 32), w którym kąt ABC jest prosty $= \alpha$, natenczas rozważając kąt ABC, w którym BA jest ramieniem początkowym kąta, a BC jego ramieniem końcowym, mamy na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych

$$\sin \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}, \quad \text{czyli} \quad \sin\beta = \frac{b}{a}.$$

tudzież

$$\cos \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}, \quad \text{czyli} \quad \cos\beta = \frac{c}{a},$$

ztąd zatym

$$b = a\sin\beta, \quad c = a\cos\beta,$$

a że kąty β i γ są dopełniającemi się, przeto $\sin\beta = \cos\gamma$, $\cos\beta = \sin\gamma$, mamy więc

$$b = a\sin\beta = a\cos\gamma, \quad c = a\cos\gamma = a\sin\gamma,$$

co dowodzi naszego twierdzenia.

164. *Twierdzenie 2-gie. W trójkącie prostokątnym ramię kąta prostego równa się iloczynowi drugiego ramienia przez styczną kąta przeciwległego lub przez dostyczną kąta przyległego.*

Na zasadzie definicyi funkcyj trygonometrycznych, mamy

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}} \text{ i } \mathrm{tg}\,\mathrm{BCA} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AC}},$$

czyli

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b},\ \text{stąd}$$

$$b = c \operatorname{tg}\beta,\quad c = b \operatorname{tg}\gamma,$$

a że kąty β i γ są dopełniającemi się, przeto $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{cotg}\beta$, mamy więc

$$b = c \operatorname{tg}\beta,\ \text{albo} = c \operatorname{cotg}\gamma,$$

$$c = b \operatorname{tg}\gamma,\ \text{albo} = b \operatorname{cotg}\beta.$$

co dowodzi naszego twierdzenia.

165. *Twierdzenie 3-cie. W trójkącie kwadrat jednego boku jest równy summie kwadratów boków pozostałych, zmniejszonej o podwójny iloczyn tychże boków i dostawy kąta, między niemi zawartego.*

Rozróżnimy dwa przypadki:

1) Przypuśćmy, że kąt $BAC = \alpha$, jest ostry (fig. 33). Jeżeli z wierzchołka C spuścimy prostopadłą CD na bok AB, natenczas według znanego twierdzenia z gieometryi, mieć będziemy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 AB . AD.$$

Lecz z trójkąta ACD na zasadzie twierdzenia art. 163-go, mamy

$$AD = AC \cos DAC,$$

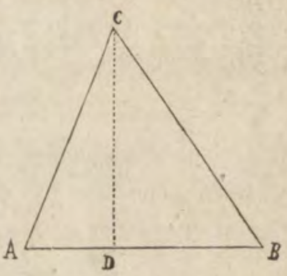

Fig. 33.

przeto podstawiając tę wartość w powyższe równanie, będziemy mieli

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 AB . AC \cos DAC,$$

czyli

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha.$$

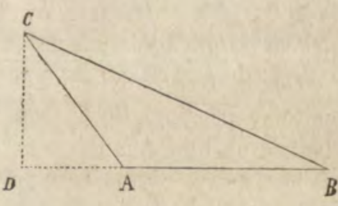

Fig. 33*a*.

2) Przypuśćmy powtóre, że kąt BAC jest rozwarty (fig 33*a*). Jeżeli z wierzchołka C spuścimy prostopadłą CD na przedłużenie boku BA, natenczas, według znanego twierdzenia z gieometryi, otrzymamy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 AB . AD.$$

Lecz z trójkąta ADC, na zasadzie twierdzenia art. 163-go, mamy $AD = AC \cos DAC$, że zaś kąty DAC i BAC są spełniającemi się, przeto cos DAC = — cos BAC, zatym AD = — AC cos BAC. Podstawiając to wyrażenie w powyższe równanie, znajdziemy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB\,.\,AC\cos BAC, \text{ czyli}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Podobne związki otrzymamy i dla pozostałych boków trójkąta, czyli, że z twierdzenia powyższego otrzymamy następujące związki:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

166. *Twierdzenie 4-te. W trójkącie jeden z jego boków jest równy summie rzutów pozostałych boków na tenże bok trójkąta.*

Niech będzie trójkąt ABC, w którym AB $= c$, BC $= a$, AC $= b$, kąty zaś im przeciwległe α, β, γ. Jeżeli liniją łamaną ACB rzucimy na liniją AB, natenczas, na zasadzie twierdzenia o rzutach, mieć będziemy

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Podobne związki otrzymamy dla boków a i b. Z twierdzenia więc powyższego otrzymujemy trzy następujące związki:

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

167. *Twierdzenie 5-te. W trójkącie boki są proporcyjonalne względem wstaw kątów im przeciwległych.*

Dowód 1-szy. Niech będzie trójkąt ABC (fig. 33). Z wierzchołka C spuśćmy prostopadłą na bok AB, spodek D tej prostopadłej znajdować się będzie na linii AB lub też zewnątrz niej, stosownie do tego, czy kąt CAB jest ostry, czyteż rozwarty. W pierwszym przypadku z trójkątów prostokątnych CAD i CBD, otrzymamy

$$CD = b\sin\alpha, \quad CD = a\sin\beta,$$

zatym

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

W drugim zaś przypadku z trójkątów ACD i BCD, otrzymamy

$$CD = b\sin CAD = b\sin(180^0 - \alpha) = b\sin\alpha, \quad CD = a\sin\beta,$$

zatym

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\,.$$

W podobny sposób możemy dowieść, że

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

mamy więc

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\,. \tag{1}$$

Widzimy więc, że w trójkącie stosunek boku do wstawy kąta przeciwległego jest stały.

Dowód 2-gi. Opiszmy na danym trójkącie ABC (fig. 34) okrąg koła, poprowadźmy średnicę $AD=2R$ i połączmy punkt D z punktem C, natenczas kąt CDC będzie równy kątowi $ABC=\beta$, z trójkąta prostokątnego ADC, otrzymamy

$\sin ADC=\frac{AC}{AD}$, czyli $\sin\beta=\frac{b}{2R}$, podobnież $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$, stąd

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

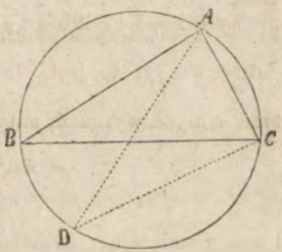

Fig. 34.

Widzimy więc, że stały stosunek boku trójkąta do wstawy kąta przeciwległego jest równy podwójnemu promieniowi koła na tymże trójkącie opisanego.

168. Układ równań (1) art. 165-go, lub układ równań (1) art. 166-go, lub wreszcie układ równań (1) art. 167-go, łącznie ze związkiem $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, są dostateczne do wyznaczenia trójkąta, to jest, do znalezienia trzech jego elementów, gdy pozostałe trzy (między niemi przynajmniej jeden bok) są dane. Jakoż, gdyby istniało jeszcze czwarte równanie, dające związek między bokami i kątami trójkąta, natenczas, przez wyrugowanie wszystkich kątów z tego nowego równania i trzech równań któregokolwiek układu, przyszlibyśmy do nowego związku między samemi bokami. Przyszlibyśmy więc do równania, któreby nam pozwalało znaleść bok trójkąta, gdy dane są dwa jego boki, co jest rzeczą niemożebną.

169. Ponieważ między sześcioma elementami trójkąta znaleźliśmy trzy układy po trzy równania t. j. wogóle dziewięć równań, a potrzebujemy tylko trzech warunków go wyznaczenia trójkąta, łatwo przyjdziemy do przekonania, że z każdego z układów, powyżej wyprowadzonych, możemy otrzymać dwa pozostałe. Pokażemy w jaki sposób z jednego układu równań, przez proste przekształcenia algiebraiczne, dają się wyprowadzić dwa układy pozostałe.

170. Wyprowadzimy naprzód układ równań (1) art. 166-go i układ równań (1) art. 167-go z układu równań (1) art. 165-go.

1) Aby z układu równań (1) art. 165-go wyprowadzić układ równań (1) art. 167-go, uważmy, że pierwsze równanie układu (1) art. 165-go daje

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\text{, stąd}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}.$$

a następnie

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Druga strona tego równania jest symetryczna, to jest, nie zmienia się, gdy przemieniamy a i b, b i c lub a i c pomiędzy sobą, więc i pierwsza strona nie zmienia się także wtedy, to jest, że szukając wartości $\frac{\sin^2\beta}{b^2}$ i $\frac{\sin^2\gamma}{c^2}$ przyszlibyśmy do tych samych wyrażeń, zatym

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{\sin^2\gamma}{c^2},$$

stąd zaś, pamiętając, że każdy z kątów α, β, γ jest mniejszy od 180^0, a tymsamym ich wstawy są dodatne, otrzymujemy

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Żeby z układu równań (1) art. 165-go wyprowadzić związek $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, należy z tych równań wyrugować boki trójkąta a, b, c, a jeżeli zważymy, że z powyższych stosunków, równych np. k, mamy $a = k\sin\alpha$, $b = k\sin\beta$, $c = k\sin\gamma$ i te wartości podstawimy w pierwsze z równań (1) art. 165-go, mieć będziemy

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$

czyli

$$\cos^2\alpha - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 1 = 0,$$

to zaś wyrażenie, na zasadzie tego, co się powiedziało w art. 117-ym, daje się napisać w kształcie:

$$4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 0.$$

Aby ten iloczyn był równy zeru, dostatecznym jest, aby przynajmniej jeden z jego czynników był równy zeru, zatym być powinno

$$\text{albo } \alpha + \beta + \gamma = 4n \cdot 180^0 \pm 180^0,$$

$$\text{albo } \gamma + \beta - \alpha = 4n \cdot 180^0 \pm 180^0,$$

$$\text{albo } \alpha + \gamma - \beta = 2n \cdot 180^0,$$

$$\text{albo } \alpha + \beta - \gamma = 2n \cdot 180^0.$$

Lecz żadne z trzech ostatnich przypuszczeń nie stosuje się do trójkąta, pozostaje tylko pierwsze, w którym należy wziąć $n = 0$ i pominąć kąty ujemne, przez co otrzymamy

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

2) Aby z układu równań (1) art. 165-go wyprowadzić równania (1) art. 166-go, dodajmy do siebie dwa pierwsze z równań (1) art. 165-go stronami odpowiedniemi, przez co otrzymamy

$$0 = 2c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ac\cos\beta,$$

stąd zaś po podzieleniu przez $2c$, otrzymamy

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

W podobny sposób otrzymamy i dwa pozostałe równania układu (1) art. 166-go.

171. Z układu równań (1) art. 166-go wyprowadzimy układy równań (1) art. 165-go i (1) art. 167-go.

1) Aby z układu równań (1) art. 166-go, wyprowadzić układ równań (1) art. 165, uważmy, że jeżeli równania art. 166-go, pomnożywszy odpowiednio przez $-a$, $+b$, $+c$ i iloczyny dodamy stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos\alpha, \text{ a stąd}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

W podobny sposób otrzymamy pozostałe dwa równania układu (1) art. 165-go.

2) Aby z równań (1) art. 166-go wyprowadzić układ równań (1) art. 167-go, uważmy, że jeżeli z dwu pierwszych równań układu (1) art. 166-go wyrugujemy $\cos\gamma$, znajdziemy

$$a^2 - b^2 = c(a\cos\beta - b\cos\alpha),$$

a jeżeli to równanie pomnożymy stronami odpowiedniemi przez trzecie równanie układu (1) art. 166-go t. j. przez $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$, otrzymamy

$$a^2 - b^2 = a^2\cos^2\beta - b^2\cos^2\alpha,$$

albo

$$a^2\sin^2\beta - b^2\sin^2\alpha = 0,$$

czyli

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Skąd wnosimy, że

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Dla wyprowadzenia związku $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, uważmy, że jeżeli w pierwszym z równania (1) art. 166-go położymy $a = k\sin\alpha$, $b = k\sin\beta$, $c = k\sin\gamma$, będziemy mieli

$$\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta = \sin(\beta + \gamma);$$

ten zaś związek dla trójkąta prowadzi do następującego $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Otrzymujemy więc wiadome twierdzenie, że summa trzech kątów trójkąta równa się dwu kątom prostym.

172. Wyprowadzimy teraz z układu równań (1) art. 167-go, w połączeniu ze związkiem $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, układy równań (1) art. 165-go i 166-go.

1) Aby z równania (1) art. 167-go wyprowadzić układ (1) art. 165-go uważmy, że gdy $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, natenczas

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Z tego równania przy pomocy równań (1) art. 167-go starajmy się wyrugować kąty β i γ. Lecz te równania dają

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}\,,\quad \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}\,,$$

następnie

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{b^2\sin^2\alpha}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}\,,$$

podstawiając te wartości w ostatnie równanie, otrzymamy, po opuszczeniu spólnego czynnika $\frac{\sin\alpha}{a}$,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\cos\alpha,$$

stąd przez oddzielenie pierwiastka i podniesienie do kwadratu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

W podobny sposób otrzymamy dwa pozostałe równania układu (1) art. 165-go.

2) Aby z układu (1) art. 167-go otrzymać układ (1) art. 166-go, uważmy, że równania $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ daje

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma,$$

pozostałe zaś równania układu (1) art. 167-go dają

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}\,,\quad \sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}\,;$$

podstawiając te wartości w powyższe równanie, otrzymamy

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

W podobny sposób wyprowadzimy i dwa pozostałe równania układu (1) artykułu 166-go.

173. Z powyższych dowodzeń widzimy, że którykolwiek z układów weźmiemy za układ zasadniczy, pozostałe układy z niego bezpośrednio dają się wyprowadzić. Który z układów należy wziąć za podstawę naszych rachunków jest rzeczą obojętną i dlatego każdy z nich możemy nazwać wzorami zasadniczemi toeryi rozwiązywania równań.

174. *Twierdzenie. Jeżeli a, b, c, oznaczają trzy odcinki dodatne, zaś α, β, γ, kąty dodatne i mniejsze od 180° i jeżeli te sześć wielkości zadośćczynią któremukolwiek z układów zasadniczych, natenczas stanowią one sześć elementów trójkąta.*

Jakoż, jeżeli te wielkości zadośćczynią któremukolwiek z tych układów, to zadośćczynią w ogólności układowi (1) art. 165-go. Lecz $b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ jest mniejsze od $(b+c)^2$, zatym pierwsze z równań układu (1) art. 165-go, daje

$$a < b + c,$$

podobnież z równań pozostałych układu (1) art. 165-go otrzymamy

$$b < a + c \text{ i } c < a + b.$$

Każda z wielkości a, b, c, jest mniejsza od summy dwu pozostałych, zatym z tych trzech wielkości możemy utworzyć trójkąt. Jeżeli α', β', γ' będą kątami utworzonego trójkąta, na zasadzie twierdzenia 3-go, art. 165-go, będzie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha',$$

że zaś według założenia

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

przeto z porównania drugich stron tych równań wypada $\cos\alpha = \cos\alpha'$. Lecz kąty α i α' jako dodatne i mniejsze od 180°, mające równe dostawy, są równe przeto $\alpha' = \alpha$, podobnież będzie $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$. Zatym sześć powyższych wielkości, zadośćczyniących któremukolwiek z zasadniczych układów, są elementami trójkąta. Z tego wynika, że ilekroć rozwiązujemy trójkąt t. j. obliczamy jego boki i kąty za pomocą równań jednego z układów art. 165-go, 166-go, lub 167-go, nie potrzebujemy sprawdzać, czy otrzymane z rachunku boki trójkąta są mniejsze każdy, od summy dwu pozostałych, ani też czy summa kątów jest równa 180°, o ile tego ostatniego warunku nie wprowadzaliśmy do znalezienia kątów; twierdzenie bowiem powyższe obejmuje już warunki możebności istnienia trójkąta.

175. Z odpowiedniego przekształcenia układów równań art. 165-go, 166-go i 167-go możemy otrzymać nowe wzory, z których wyprowadzimy te, które są częstszego użycia przy rozwiązywaniu trójkątów. I tak, z pierwszego równania układu (1) art. 165-go t. j. z równania

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

lecz wiemy, że

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

podstawiając w te wyrażenia wartość $\cos\alpha$, otrzymamy

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Podobne wzory otrzymamy na dostawę i wstawę kątów $\frac{1}{2}\beta$ i $\frac{1}{2}\gamma$. Jeżeli dla skrócenia położymy $a+b+c=2p$, skąd $-a+b+c=2(p-a)$,

$$a-b+c=2(p-b), \quad a+b-c=2(p-c),$$

otrzymamy następujące dwa układy wzorów

(1)
$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
$$\cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$
$$\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

(2)
$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$
$$\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

Z wzorów (1) i (2), otrzymujemy dość częstego użycia wzory na wstawę kąta. Jakoż, z pomnożenia pierwszych wzorów układów (1) i (2) stronami odpowiedniemi otrzymujemy

$$\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}},\ \text{zatym}$$

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{podobnież}\\ \sin\beta&=\frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\\ \sin\gamma&=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}\right.$$

Dzieląc zaś przez siebie odpowiednio wzory (1) i (2), przyjdziemy do nowego układu

$$(4)\qquad\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.\end{aligned}$$

We wszystkich powyższych wzorach bierzemy pierwiastki tylko ze znakiem dodatnim, albowiem połowy kątów trójkąta są mniejsze od 90°, a zatym ich funkcyje trygonometryczne są dodatne.

176. Układ równań (1) art. 167-go, mianowicie:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c},$$

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0,$$

daje nam

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

że zaś $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=90^0-\frac{1}{2}\gamma$, przeto

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

(1)

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

przychodzimy do wzorów, znanych pod nazwą wzorów Mollweidego. *)

Z podzielenia równań (1) stronami odpowiedniemi znajdziemy

$$\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma,$$

że zaś $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, przeto

(2) $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

W szczególności, jeżeli kąt $\alpha=90^0$, wzór powyższy przyjmie kształt

$$\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{a-b}{a+b},$$

a że w tym razie $\beta=90^0-\gamma$, przeto

(3) $$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\gamma=\frac{a-b}{a+b}.$$

PRZYKŁADY.

1) $\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\sin\beta}=\frac{a\pm b}{b}.$

2) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{a+b}{a-b}.$

3) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{a+b-c}{a-b+c}.$

4) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{a-b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$

*) Zach's Monatliche Correspondenz 1808.

5) $\dfrac{a+c-b}{4c} = \dfrac{b\sin^2\frac{\alpha}{2}}{a+b-c}$.

6). $\cos\gamma = \dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}$.

7) $a+b+c = (a+b)\cos\gamma + (a+c)\cos\beta + (b+c)\cos\alpha$.

8) $(a+b)(1-\cos\gamma) = c(\cos\alpha + \cos\beta)$.

9) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma} = \operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$.

10) $c(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta) = \cos\gamma(a\cos\alpha + b\cos\beta)$.

11) Jeżeli $c\cos\beta = b\cos\gamma$, trójkąt jest równoramienny ($b=c$).

12) Jeżeli $a\sec\beta = 2c$, trójkąt jest równoramienny ($b=c$).

13) Jeżeli trójkąt jest równoramienny ($a=b$), natenczas $c = 2a\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

14) Jeżeli $c = 2a\sin\dfrac{\gamma}{2}$, trójkąt jest równoramienny, albo $c = \sqrt{a(a-b)}$.

15) Jeżeli $(p-a)(p-b) = ab$ trójkąt jest niemożebny.

16) Jeżeli $p(p-c) = \dfrac{ab}{2}$, kąt γ jest prosty.

17) $b\cos^2\dfrac{\gamma}{2} + c\cos^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$.

18) $(b-c)\cos\dfrac{\alpha}{2} = a\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

19) $\dfrac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{b} + \dfrac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{c} = \dfrac{p-a}{bc}$.

20) $\dfrac{a}{b}\,\dfrac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$.

21) $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

22) $(a+c)\sin\dfrac{\beta}{2} = b\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}$.

23) Jeżeli $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ tworzą postęp arytmetyczny, natenczas $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{3}$.

24) $a(b\cos\gamma - c\cos\beta) = b^2 - c^2$.

25) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\dfrac{a+b}{c}\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$.

26) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$.

27) $a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha = 2ab \sin\gamma$.

28) $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = \dfrac{b^2 - a^2}{ab \sin\gamma}$.

29) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{(a+b+c)^2}{4abc}$.

30) $1 - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{2c}{a+b+c}$.

31) $\dfrac{\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}}{\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2a}{b+c-a}$.

32) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ i $\operatorname{tg}\gamma$ tworzą postęp gieometryczny, natenczas

$$a^4 + c^4 = b^2(a^2 + c^2).$$

33) Jeżeli a^2, b^2 i c^2 tworzą postęp arytmetyczny, wtedy $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta$ i $\operatorname{cotg}\gamma$ tworzą także postęp arytmetyczny i mamy wtedy

$$\sin 3\beta = \left(\frac{a^2 - c^2}{2ac}\right)^2 \sin\beta.$$

34) Jeżeli kąty trójkąta tworzą postęp arytmetyczny, którego różnicą jest δ, wtedy

$$\cos\delta = \frac{a+c}{2b}.$$

35) Jeżeli boki trójkąta a, b, c tworzą postęp arytmetyczny, wtedy $\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\beta$ i $\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\gamma$ tworzą także postęp arytmetyczny.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH.

177. Ponieważ w trójkącie prostokątnym wiadomym jest kąt prosty, przeto dla rozwiązania trójkąta potrzebujemy mieć dwa elementy trójkąta, pomiędzy któremi winien być jeden z boków trójkąta. Skutkiem tego mogą być dane:

1) przeciwprostokątna i jeden z boków, przyległych kątowi prostemu;

2) przeciwprostokątna i jeden z kątów ostrych;

3) jeden z boków, przyległych kątowi prostemu, i jeden z kątów ostrych,

4) dwa boki przyległe kątowi prostemu.

Pokażemy w jaki sposób, w każdym z tych przypadków przychodzimy do rozwiązania trójkąta t. j. do znalezienia pozostałych elementów trójkąta.

178. *Przypadek 1-szy. Mając daną przeciwprostokątną, tudzież bok przyległy kątowi prostemu, rozwiązać trójkąt, to jest znaleść kąty i pozostały bok.*

Dane a i b, szukane β, γ i c.

Kąty β i γ znajdziemy, na zasadzie twierdzenia 1-go art. 163-go, mianowicie:

$$\sin\beta = \cos\gamma = \frac{b}{a},$$

bok zaś c za pomocą wzoru $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Ponieważ kąt β otrzymujemy za pomocą jego wstawy, przeto na β znajdziemy dwa kąty spełniające się; że zaś kąt β jest ostry, przeto z otrzymanych wartości β bierzemy tę, która daje kąt mniejszy od 90^0. Aby wyrażenie boku c uczynić dogodnem do rachunku logarytmami, piszemy je w kształcie $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, wtedy bowiem

$$\log c = \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)].$$

Jeżeli bok b mało się różni od przeciwprostokątnej a, wtedy kąt β jest bliski 90^0 i tablice wstaw nie wyznaczają dokładnie kąta β, albowiem logarytmy wstaw kątów od $89^0\,57'\,10''$ do 90^0 mają teżsame siedmiocyfrowe mantyssy. W takim razie obliczamy naprzód bok c, następnie szukamy kąta β za pomocą wzoru $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$.

Jeżeli bok b jest wielkością bardzo małą względem przeciwprostokątnej, natenczas kąt β mało się różni od 0^0; w tym razie wstawę kąta możemy wziąć za długość łuku, temuż kątowi odpowiadającego; zamiast więc wstawy możemy wziąć ilość sekund, podzieloną przez długość łuku w sekundach równą promieniowi, to jest $\frac{n}{206265}$ (art. 145-ty), w tym razie

$$n = 206265 \, . \, \frac{b}{a} \, .$$

Możemy też w tym razie szukać kąta β, na zasadach wyłożonych w art. 161-ym.

Przykład 1-szy. Niech będzie $a = 1785{,}395$, $b = 1540{,}374$.

Rachunek boku c.	*Rachunek kąta β.*
$\log(a+b) = 3{,}5218921$	$\log b = 3{,}1876262$
$\log(a-b) = \underline{2{,}3892033}$	$\log a = \underline{3{,}2517343}$
$\log c^2 = 5{,}9110954$	$\log\sin\beta = 9{,}9358919$
$\log c = 2{,}9555477$	$\beta = 59^0\,37'\,42''$
zatym $c = 902{,}709$.	$\gamma = 30^0\,22'\,18''$.

Możemy też szukać kątów β i γ, za pomocą wzoru $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, (wzór (3) art. 176-go), wtedy $\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}[\log(a-b) - \log(a+b)]$; w tym razie dla znalezienia boku c mamy już gotowe logarytmy $\log(a-b)$ i $\log(a+b)$

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 2{,}3892033 \\ \log(a+b) &= \underline{3{,}5218921} \\ \log\operatorname{tg}^2\frac{1}{2} &= \bar{2}{,}8673112 \end{aligned}$$

zatym $\log\operatorname{tg}\frac{1}{2} = \bar{1}{,}4336556$, tablicowy zaś $= 9{,}4336556$,

a stąd $\frac{1}{2}\gamma = 15^{0}\,11'\,9'',01$,

zatym $\gamma = 30^{0}\,22'\,18'',02$, $\beta = 59^{0}\,37'\,41'',98$,

Przykład 2-gi. Niech będzie $a = 59473$, $b = 59472{,}9734$.

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log(a+b) &= 5{,}0753497 \\ \log(a-b) &= \underline{\bar{2}{,}4248816} \\ 2\log c &= 3{,}5002313 \\ \log c &= 1{,}7501156 \\ c &= 56{,}2491. \end{aligned}$$

Szukając kąta γ, jako bardzo małego, w tym założeniu, że łuk, jemu odpowiadający, jest równy jego wstawie, będziemy mieli $\gamma = 206265 \cdot \frac{c}{a}$.

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}7501156 \\ \log 206265 &= \underline{5{,}3144255} \\ & \; 7{,}0645411 \\ -\log a &= \underline{4{,}7743198} \\ \log\gamma &= 2{,}2902203 \\ \gamma &= 195{,}083 \text{ sekund} \end{aligned}$$

zatym $\gamma = 3'\,15'',083$,

następnie $\beta = 89^{0}\,56'\,44'',917$.

Przykład 3-ci. Niech będzie $a = 23{,}5215$, $b = 19{,}7186$; używając logarytmów pięciocyfrowych, znajdziemy

Rachunek kąta β	*Rachunek boku c*
$\log b = 1{,}29488$	$\log a = 1{,}37147$
$\log a = \underline{1{,}37147}$	$\log\cos\beta = \underline{9{,}73654}$
$\log\sin\beta = 9{,}92341$	$\log c = 1{,}10801$
$\beta = 56^0\, 57'\, 46''$	$c = 12{,}824$

179. *Przypadek 2-gi. Mając daną przeciwprostokątną i kąt ostry, rozwiązać trójkąt t. j. znaleść pozostałe boki, tudzież kąt.*

Dane a i β, szukane b, c i γ.

Kąt γ jest dopełnieniem kąta β, zatym $\gamma = 90^0 - \beta$. Pozostałe boki trójkąta b i c znajdziemy za pomocą wzorów

$$b = a\sin\beta,\quad c = a\cos\beta,$$

stąd

$$\log b = \log a + \log\sin\beta,$$

$$\log c = \log a + \log\cos\beta.$$

Przy obliczaniu boków b i c należy pamiętać, że tablice dają logarytmy wstaw i dostaw powiększone o 10 jednostek; dla tego też, ile razy logarytm funkcyi trygonometrycznej dodajemy, od rezultatu trzeba odjąć 10 jednostek; jeżeli zaś logarytm funkcyi trygonometrycznej odejmujemy, należy do rezultatu dodać 10 jednostek. Powyższe zatym wyrażenia na $\log b$ i $\log c$, po wzięciu logarytmu tablicowego $\sin\beta$ i $\cos\beta$, przedstawią się w kształcie

$$\log b = \log a + \log\sin\beta - 10,$$

$$\log c = \log a + \log\cos\beta - 10.$$

Jeżeli kąt β będzie bardzo mały, wyrażony w sekundach, natenczas zamiast jego wstawy możemy wziąć długość łuku, temuż kątowi odpowiadającego, jeżeli więc kąt wynosi n'', to jego długość, w jednostce promienia, wyrazi się $\dfrac{n}{206265}$, wtedy

$$\log b = \log a + \log n - \log 206265.$$

Przykład 1-szy. Niech będzie $a = 272{,}28$, $\beta = 32^0\, 24'\, 3'',2$; zatym kąt $\gamma = 57^0\, 35'\, 56'',8$

Rachunek boku b	*Rachunek boku c*
$\log a = 2{,}4350157$	$\log a = 2{,}4350157$
$\log\sin\beta = \underline{9{,}7290350}$	$\log\cos\beta = \underline{9{,}9265069}$
$\log b = 2{,}1640507$	$\log c = 2{,}3615226$
$b = 145{,}8985.$	$c = 229{,}891.$

Przykład 2-gi. Niech będzie $a = 3874600$, $\beta = 7'',54$

Rachunek boku b

$$\log b = \log 3874600 + \log 7,54 - \log 206265$$

$$\begin{aligned} \log a &= 6,5882269 \\ \log 7,54 &= \underline{0,8773713} \\ & 7,4655982 \\ \log 206265 &= \underline{5,3144255} \\ \log b &= 2,1511727 \\ b &= 141,636. \end{aligned}$$

Przykład 3-ci. $a = 2487,1$, $\beta = 37^0\, 39'\, 50''$.

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log a &= 3,39570 \\ \log \sin\beta &= \underline{9,78606} \\ \log b &= 3,18176 \\ b &= 1519,7 \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log a &= 3,39570 \\ \log \cos\beta &= \underline{9,89851} \\ \log c &= 3,29421 \\ c &= 1968,8 \end{aligned}$$

180. *Przypadek 3-ci. Mając dany jeden bok przyległy kątowi prostemu i jeden kąt ostry rozwiązać trójkąt t. j. znaleść pozostały kąt ostry, tudzież bok i przeciwprostokątną.*

Dane b i β, szukane γ, c i a.

Kąt γ jest dopełnieniem kąta β, zatym $\gamma = 90^0 - \beta$. Przeciwprostokątną a i bok c znajdziemy za pomocą wzorów

$$a = \frac{b}{\sin\beta}, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta},$$

stąd

$$\log a = \log b - \log \sin\beta,$$

$$\log c = \log b - \log \operatorname{tg}\beta.$$

Jeżeli kąt β jest bardzo mały i wyrażony w sekundach, możemy logarytm jego wstawy obliczyć na zasadach, wyłożonych w artykule 157-ym, alboteż możemy zamiast wstawy wziąć długość łuku koła, odpowiadającego kątowi, wyrażonemu w sekundach, tak, że jeżeli kąt β wynosi n sekund, to zamiast wstawy możemy wziąć $\frac{n}{206265}$. Jeżeli kąt β jest bliski 90^0 i różni się od kąta prostego o n sekund, natenczas wynajdujemy bok c za pomocą wzoru $c = b \operatorname{tg}\gamma$, a że $\gamma = n''$ przeto wtedy zamiast $\operatorname{tg}\gamma$ bierzemy $\frac{n}{206265}$.

Przykład 1-szy. Niech będzie $b = 4238{,}82$, $\beta = 42^0\, 2'\, 38''{,}3$, wtedy

$$\gamma = 47^0\, 57'\, 21''{,}7.$$

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}6272450 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}8258808} \\ \log a &= 3{,}8013642 \\ a &= 6329{,}425 \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}6272450 \\ \log \mathrm{tg}\,\beta &= \underline{9{,}9551077} \\ \log c &= 3{,}6721373 \\ c &= 4700{,}427. \end{aligned}$$

Przykład 2-gi. Niech będzie $b = 831{,}982$, $\beta = 52^0\, 46'\, 10''$, wtedy

$$\gamma = 37^0\, 13'\, 50''.$$

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}92011 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}90103} \\ \log a &= 3{,}01908 \\ a &= 1044{,}9 \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}92011 \\ \log \mathrm{tg}\,\beta &= \underline{10{,}11925} \\ \log c &= 2{,}80086 \\ c &= 632{,}21 \end{aligned}$$

Przykład 3-ci. Niech będzie $b = 387548$, $\beta = 89^0\, 59'\, 27''{,}2$, wtedy

$$\gamma = 32''{,}8.$$

W tym razie możemy przyjąć

$$c = \frac{b\gamma}{206265},$$

$$\begin{aligned} \log b &= 5{,}5883255 \\ \log\gamma &= \underline{1{,}5158738} \\ & \ 7{,}1041993 \\ \log 206\,265 &= \underline{5{,}3144255} \\ \log c &= 1{,}7897738 \\ c &= 61{,}6274 \end{aligned}$$

Przykład 4-ty. Niech będzie $b = 164$, $\beta = 21''{,}6$. Szukamy przeciwprostokątnej na mocy art. 145-go,

$$a = b\,\frac{206265}{\beta},$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}2148438 \\ \log 206265 &= \underline{5{,}3144255} \\ & \ 7{,}5292693 \\ \log 21{,}6 &= \underline{1{,}3344538} \\ \log a &= 6{,}1948155 \\ a &= 1566086. \end{aligned}$$

181. *Przypadek 4-ty. Mając dane dwa boki przyległe kątowi prostemu rozwiązać trójkąt t. j. znaleść kąty, tudzież przeciwprostokątną.*

Dane b i c, szukane β, γ i a. Kąty β i γ obliczamy na zasadzie wzorów

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c},$$

znając zaś kąty, przeciwprostokątną znajdziemy za pomocą wzoru

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\cos\beta}.$$

Możemy przeciwprostokątną otrzymać bezpośrednio za pomocą wzoru $a^2 = b^2 + c^2$, z przyczyny jednak, że wyrażenie to nie jest dogodne do rachunku logarytmami, szukamy zazwyczaj najpierw któregokolwiek z kątów β lub γ, a następnie, na mocy powyższego wzoru znajdziemy a. Możemy wyrażenie $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ przez wprowadzenie kąta posiłkowego, uczynić dogodnym do rachunku logarytmami; jakoż w tym razie wzór powyższy możemy napisać w kształcie

$$a = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}.$$

a kładąc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c}$, otrzymamy

$$a = \frac{b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

znalazszy kąt φ, znajdziemy następnie a. Należy jednak zauważyć, że kąt posiłkowy, jaki wprowadzamy do rachunku, jest wtedy równy kątowi β trójkąta, przeto drugi sposób postępowania dla znalezienia bezpośredniego przeciwprostokątnej, sprowadza się do sposobu pierwszego, t. j. do znalezienia najpierw kąta β, a następnie przeciwprostokątnej a.

Jeżeli bok b jest bardzo mały względem c, natenczas kąt β znajdziemy w sekundach za pomocą wzoru $n'' = \frac{b}{c}\, 206265$, albo też, używając metody, wyłożonej w art. 161-ym.

Przykład 1-szy. $b = 769$, $c = 895$.

Rachunek kąta β	*Rachunek przeciwprostokątnej* a
$\log b = 2{,}8859263$	$\log b = 2{,}8859263$
$\log c = \underline{2{,}9518230}$	$\log\sin\beta = \underline{9{,}8140465}$
$\log\operatorname{tg}\beta = 9{,}9341033$	$\log a = 3{,}0718798$
$\beta = 40^0\, 40'\, 11'',13$	$a = 1179{,}99.$
$\gamma = 49^0\, 19'\, 48'',87$	

Przykład 2-gi. $b = 784{,}983$, $c = 370{,}879$.

Rachunek kąta β

$$\log b = 2{,}89486$$
$$\log c = 2{,}56923$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}32563$$
$$\beta = 64^0\,42'\,39''$$

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log b = 2{,}89486$$
$$\log \sin \beta = 9{,}95625$$
$$\log a = 2{,}93861$$
$$a = 868{,}18$$

Przykład 3-ci. $b = 16$, $c = 48784$,

$$\beta = \frac{16}{48784}\,206265,$$
$$\log 16 = 1{,}2041200$$
$$\log 206\,265 = 5{,}3144255$$
$$6{,}5185455$$
$$\log 48784 = 4{,}6882774$$
$$\log \beta = 1{,}8302681$$
$$\beta = 67'',65 \text{ czyli } 1'\,7'',65$$

PRZYKŁADY.

a	b	c	β	γ
3367,237	2267,02	2489,76	42° 19′ 8″,5	47° 40′ 51″,5
6192,944	3681,974	4979,52	36 28 48,3	53 31 11,7
7831,33	2353,30	7469,39	17 29 15,1	72 30 44,9
12739,7	7994,54	9919,04	38 52 5,2	51 7 54,8
1915,60	1455,97	1244,86	49 28 10	40 31 50
13273,96	10359,6	8299,2	51 18 4,9	38 41 55,1
11072,75	9157,66	6224,4	55 47 46,9	34 12 13,1
13109,7	12435,64	4149,6	71 32 48,7	18 27 11,3
12116,85	11583,06	3556,8	72 55 47,6	17 4 12,4
18129,27	17916,96	2766,4	81 13 22	8 46 38
40067,0	40021,20	1915,213	87 15 36,7	2 44 23,3
1869,36	1523,92	1082,67	54 36 29,1	35 23 30,9
5892,51	5439,24	2266,35	67 22 48,5	22 37 11,5

182. Trójkąt prostokątny zowiemy wymiernym, gdy trzy jego boki są liczbami wymiernemi i tak np.:

$$a = 5,\ b = 3,\ c = 4;\quad a = 17,\ b = 8,\ c = 15;\ \text{i t. p.}$$

Ponieważ te liczby odpowiadać winny twierdzeniu Pytagorasa, mianowicie, że kwadrat przeciwprostokątnej równa się summie kwadratów boków pozostałych, przeto liczby powyższe zowią się jeszcze liczbami Pytagorasa, a odpowiadające im trójkąty trójkątami Pytagorasa albo także trójkątami egipskiemi.

Przykłady trójkątów egipskich.

a	b	c	β	γ
5	3	4	36° 52′ 11″,6	53° 7′ 48″,4
13	5	12	22 37 11,5	67 22 48,5
17	15	8	61 55 39,1	28 4 20,9
25	7	24	16 15 36,7	73 44 23,3
29	21	20	46 23 49,9	43 36 10,1
41	9	40	12 40 49,4	77 19 10,6
37	35	12	71 4 31,3	18 55 28,7
61	11	60	10 23 19,9	79 36 40,1
53	45	28	58 6 33,2	31 53 26,8
65	33	56	30 30 36,8	59 29 23,2

ZADANIA.

1) Rozwiązać trójkąt prostokątny, w którym jedno z ramion kąta prostego jest równe odcinkowi przeciwprostokątnej od spodka prostopadłej, spuszczonej na nią z wierzchołka kąta prostego, do drugiego ramienia.

Jeżeli odcinek drugi oznaczymy przez x, będziemy mieli

$$b^2 = x(b + x),\ \text{stąd}\ x = b\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \text{zatym}$$

$$a = b + x = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}),\ \sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{1+\sqrt{5}},\ \beta = 38^0\,10'\,21'',8.$$

2) Daną jest summa dwu boków przyległych kątowi prostemu i kąt β, znaleść te boki

Dane $b + c = s$ i kąt β, ponieważ $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$, przeto

$$b = \frac{s \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}, \quad c = \frac{s}{1 + \operatorname{tg}\beta},$$

czyli
$$b = \frac{s \sin\beta}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \beta)}, \quad c = \frac{s\cos\beta}{\sqrt{2}\sin(45^0+\beta)}.$$

3) W trójkącie prostokątnym różnica między przeciwprostokątną i większym bokiem jest równa różnicy między bokami trójkąta, znaleść kąty trójkąta.

Mamy wtedy $a - b = b - c$, a że $a^2 = b^2 + c^2$, przeto $\sqrt{b^2+c^2} = 2b - c$, stąd $3b = 4c$, czyli $b : c = 4 : 3$. Z tego wypada, że każdy trójkąt prostokątny, w którym ramiona kąta prostego są w stosunku $4 : 3$, zadość czyni warunkom zadania. Dla znalezienia kątów mamy $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b} = \frac{3}{4}$, zatym $\log\operatorname{tg}\gamma = \log 3 - \log 4 = \bar{1},8750613$, logarytm zaś tablicowy $9,8750613$, zatym $\gamma = 36^0\,52'\,11'',6$.

4) W trójkącie prostokątnym daną jest summa boków przyległych kątowi prostemu i wysokość trójkąta, odpowiadająca przeciwprostokątnej, znaleść kąty trójkąta.

Dane $b + c = s$ i h. Wiemy, że $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$, zatym $\frac{b+c}{c} = 1 + \operatorname{tg}\beta$, czyli $\frac{s}{c} = 1 + \operatorname{tg}\beta$; że zaś $h = c\sin\beta$, przeto $\frac{s\sin\beta}{h} = 1 + \operatorname{tg}\beta$, z którego to wzoru otrzymamy kąt β, mianowicie

$$\sin 2\beta = \frac{2h}{s^2}\left(+h + \sqrt{s^2 + h^2}\right).$$

5) Daną jest summa przeciwprostokątnej i odpowiadającej jej wysokości trójkąta, tudzież kąt trójkąta, znaleść przeciwprostokątną.

Dane $a + h = s$, i kąt β

$$\sin\beta = \frac{h}{c}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a}, \text{ zatym}$$

$$h = a\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}a\sin 2\beta, \text{ a że } h = s - a, \text{ przeto}$$

$$a = \frac{2s}{2 + \sin 2\beta}.$$

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW JAKICHKOLWIEK.

183. Dla rozwiązania trójkąta jakiegokolwiek potrzebujemy mieć dane trzy jego elementy, między któremi byłby jeden bok; że zaś z 6 elementów trójkąta, to jest trzech boków i trzech kątów, biorąc po trzy elementy, możemy ułożyć 20 kombinacyj, z wyłączeniem więc kombinacyi trzech kątów trójkąta, dziewiętnaście kombinacyj, i tyleż możebnych zagadnień; wszystkie te jednak zagadnienia, jak to łatwo przekonać się można, dadzą się sprowadzić do czterech różnych przypadków, mianowicie, gdy są dane:

1) jeden bok i dwa kąty trójkąta;
2) dwa boki i kąt między niemi zawarty;
3) dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy;
4) trzy boki trójkąta.

184. *Przypadek 1-szy. Mając bok i dwa kąty trójkąta, znaleść pozostałe boki i kąt.*

Gdy mamy dane a, β i γ, natenczas $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Na mocy związków (1) art. 167-go,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

otrzymamy
$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

stąd znajdziemy

$$\log b = \log a + \log\sin\beta - \log\sin\alpha,$$
$$\log c = \log a + \log\sin\gamma - \log\sin\alpha.$$

Możemy też znaleść boki b i c za pomocą wzorów (1) art. 176-go, bowiem

$$b + c = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)},$$

$$b - c = \frac{a\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)};$$

z tych więc wzorów znajdziemy $b + c$ i $b - c$, a następnie b i c.

Przykład 1-szy. $a = 123{,}4$, $\beta = 65^0\,43'\,20''$, $\gamma = 54^0\,32'\,10''$, zatym $\alpha = 59^0\,44'\,30''$.

Rachunek boku b		*Rachunek boku c*	
$\log a =$	2,0913152	$\log a =$	2,0913152
$\log\sin\beta =$	9,9597866	$\log\sin\gamma =$	9,9108811
	12,0511018		12,0021963
$\log\sin\alpha =$	9,9363942	$\log\sin\alpha =$	9,9363942
$\log b =$	2,1147076	$\log c =$	2,0658021
$b =$	130,229	$c =$	116,3596.

Przykład 2-gi. Dane $a = 105$, $\beta = 59^0\, 29',4$, $\gamma = 53^0\, 7',8$. Rozwiążemy to zadanie, używając logarytmów pięciocyfrowych. Mamy

$$\alpha = 67^0\, 22',8.$$

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}02119 \\ \log\sin\beta &= 9{,}93528 \\ &\quad 11{,}95647 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}96524 \\ \log b &= 1{,}99123 \\ b &= 98. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}02119 \\ \log\sin\gamma &= 9{,}90309 \\ &\quad 11{,}92428 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}96524 \\ \log c &= 1{,}95904 \\ c &= 91. \end{aligned}$$

Albo, używając wzorów Mollweide'go.

Rachunek b + c

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}02119 \\ \log\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 9{,}99933 \\ &\quad 12{,}02052 \\ \log\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}74406 \\ \log(b+c) &= 2{,}27646 \\ b+c &= 189, \\ b &= 98. \end{aligned}$$

Rachunek b — c.

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}02119 \\ \log\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 8{,}74408 \\ &\quad 10{,}76527 \\ \log\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= 9{,}92015 \\ \log(b-c) &= 0{,}84512 \\ b-c &= 7, \\ c &= 91. \end{aligned}$$

Rozwiążemy toż zadanie, używając siedmiocyfrowych logarytmów.

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}0211893 \\ \log\sin\beta &= 9{,}9352758 \\ &\quad 11{,}9564651 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}9652374 \\ \log b &= 1{,}9912277 \\ b &= 98. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}0211893 \\ \log\sin\gamma &= 9{,}9030894 \\ &\quad 11{,}9242787 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}9652374 \\ \log c &= 1{,}9590413 \\ c &= 91. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
β	γ	a	b	c	α
78° 2′ 18″,9	54° 48′ 27″,3	52,4081	69,9283	58,4153	47° 9′ 13″,8
46 18 27,3	77 51 19,6	44,3267	38,7348	52,3718	55 50 13,1
58 48 19,3	71 8 17,4	227,076	253,3577	280,2772	50 3 23,3
24 57 21,8	45 17 29	992,16	444,786	749,204	109 45 9,2
74 42 16	68 11 26	112,9161	180,5411	173,7742	37 6 18
23 49 48,7	17 55 39,4	11299,47	6854,97	5222,58	138 14 31,9
30 1 19,5	108 51 42,6	633,394	481,926	911,487	41 6 57,9
62 13 28,7	47 31 40,5	47,294	44,4609	37,0652	70 14 50,8
74 42 16	51 21 44,3	115,8495	138,2426	111,9481	53 55 59,7
62 13 28,7	70 14 50,8	370,648	444,604	472,934	47 31 40,5

Uwaga. Jeżeli kąt β jest bardzo mały i β oznacza ilość sekund, natenczas $b = \frac{a\beta}{206265 \sin\alpha}$. Jeżeli zaś oba kąty β i γ są bardzo małe a β i γ oznaczają ilości sekund tych kątów, wtedy $\sin\beta = \frac{\beta}{206265}$, $\sin\gamma = \frac{\gamma}{206265}$, $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \frac{\beta+\gamma}{206265}$, mamy więc wtedy $b = \frac{\beta}{\beta+\gamma}a$, $c = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}a$, $c : b = \gamma : \beta$, np. $a = 12000$, $\beta = 7'',5$, $\gamma = 12'',5$

$$b = \frac{7,5}{20}\,12000 = 4500, \quad c = \frac{12,5}{20}\,12000 = 7500,$$

185. *Przypadek 2-gi. Mając dane dwa boki trójkąta i kąt między niemi zawarty, znaleść pozostałe kąty i bok.*

Niech będą dane b, c i α.

Przedewszystkim szukamy kątów β i γ. Na mocy wzorów (2) art. 176-go, mamy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha.$$

Z tego wzoru znajdziemy $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, że zaś $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, przeto będziemy mieli wiadome $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ i $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, a tymsamym znajdziemy kąty β i γ. Mając zaś wiadome kąty β i γ, znajdziemy bok trzeci trójkąta za pomocą wzoru

$$a = b \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Lecz ten sposób wyznaczenia boku a wymaga szukania trzech nowych logarytmów, dla tego też dogodniej w tym razie użyć wzorów (1) art. 176-go, mamy bowiem wtedy

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}, \tag{1}$$

a dla znalezienia boku a potrzebujemy szukać jedynie logarytmów $\sin\frac{1}{2}\alpha$ i $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, gdyż $\log(b+c)$, będzie nam znany z wzoru, dającego $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Zdarza się często w zastosowaniach, że zamiast boków b i c dane są ich logarytmy, wtedy dla wyznaczenia $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ należałoby najpierw znaleść w tablicach liczby, odpowiadające tym logarytmom i następnie szukać $\log\frac{b-c}{b+c}$. Przez wprowadzenie kąta posiłkowego możemy uniknąć tego i zarazem skrócić rachunek, a tymsamym zmniejszyć błędy przybliżeń. Jakoż, jeżeli założymy $\frac{b}{c} = \operatorname{tg}\varphi$, otrzymamy

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\frac{b}{c}-1}{\frac{b}{c}+1} = \frac{\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+1} = \operatorname{tg}(\varphi-45^0),$$

a następnie

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \operatorname{tg}(\varphi-45^0)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha. \tag{2}$$

W tym więc razie najpierw szukamy kąta φ za pomocą wzoru

$$\log\operatorname{tg}\varphi = \log b - \log c,$$

w którym $\log b$ i $\log c$ są nam wiadome, a następnie kąta $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$.

186. Toż samo zadanie możemy rozwiązać także za pomocą wzorów

$$a\sin\beta = b\sin\alpha,$$
$$a\cos\beta = c - b\cos\alpha,$$

skąd

(1) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}.$$

Wprawdzie ten wzór nie jest dogodny do rachunku logarytmami, z uwagi jednak, że w zadaniach, przytrafiających się w Astronomii, bok b jest dany przez swój logarytm, bok zaś c podany bezpośrednio, wzór powyższy w tym razie daje się bardzo łatwo stosować, gdyż

$$\log\operatorname{tg}\beta = \log b + \log\sin\alpha - \log(c - b\cos\alpha),$$

szukamy najpierw $b\cos\alpha$, następnie $c - b\cos\alpha$, w końcu zaś zwykły rachunek przeprowadzamy.

Wszakże wzór (1) przez wprowadzenie kąta posiłkowego możemy zamienić na dogodny do rachunku logarytmami. Jakoż, kładąc $\frac{b\sin\alpha}{c} = \operatorname{tg}\varphi$, mieć będziemy

(2) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

187. W rozwiązaniach poprzedzających szukaliśmy naprzód kątów β i γ, a następnie boku a, możemy jednak bok a znaleść bezpośrednio. Jakoż, na mocy wzorów (1) artykułu 165-go, mamy

(1) $$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Wzór ten jednak nie jest dogodny do rachunku logarytmami. Aby go odpowiednio przekształcić, zważmy przedewszystkim, że jeżeli w tym wzorze weźmiemy zamiast $\cos\alpha$ raz $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$, drugi raz $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ otrzymamy

(2) $$a = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$

(3) $$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Z obu tych wzorów przez pomnożenie pierwszego wyrazu pod pierwiastkiem przez $1 = \cos^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\alpha$, przyjdziemy do następującego wzoru

(4) $$a = \sqrt{(b+c)^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha + (b-c)^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Jeżeli we wzorze (2) napisanym w kształcie:

$$a = (b+c)\sqrt{1 - \frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$

położymy $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\varphi$, co możemy przyjąć, gdyż średnia gieometryczna $\sqrt{bc}$ jest mniejsza od średniej arytmetycznej $\frac{1}{2}(b+c)$, otrzymamy

$$(5) \qquad a = (b+c)\cos\varphi.$$

Jeżeli we wzorze (3) napisanym w kształcie:

$$a = (b-c)\sqrt{1+\frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{1}{2}\alpha},$$

położymy $\frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$, otrzymamy

$$(6) \qquad a = \frac{b-c}{\cos\varphi}.$$

Jeżeli wreszcie we wzorze (4) napisanym w kształcie:

$$a = (b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{1+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha},$$

założymy $\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\psi$, otrzymamy

$$(7) \qquad a = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\psi},$$

Tym sposobem otrzymujemy wzory dogodne do rachunku logarytmami. Z porównania wyrażeń $\operatorname{tg}\psi$ i $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ (art. 185-ty) widzimy, że kąt ψ jest tymsamym kątem co $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, czyli że wzór (7) jest identyczny z wzorem (1) art. 185-go; szukanie przeto boku a za pomocą kąta posiłkowego ψ sprowadza się do szukania tegoż boku sposobem, podanym w art. 185-ym. Jeżeli we wzorze (2), zamiast wprowadzania kąta posiłkowego, założymy $2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}\alpha = m$, otrzymamy

$$(8) \qquad a = \sqrt{(b+c)^2 - m^2} = \sqrt{(b+c+m)(b+c-m)},$$

wzór bardzo dogodny do rachunku logarytmami.

Przykład 1-szy. $b = 615{,}454$, $c = 290{,}907$, $\alpha = 25^0\,41'$. Rozwiążemy zadanie za pomocą metody, wyłożonej w art. 185-ym. Mamy wtedy $b-c = 324{,}547$, $b+c = 906{,}361$, $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 77^0\,9'\,30''$.

Rachunek kątów β *i* γ

za pomocą wzoru $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$,

$$\begin{aligned}
\log(b-c) &= 2{,}5112776\\
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma) &= \underline{10{,}6421427}\\
&\ 13{,}1534203\\
\log(b+c) &= \underline{2{,}9573012}\\
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= 10{,}1961191
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=57^0\ 31'\ 5'',9,$$

że zaś
$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=77^0\ 9'\ 30'',$$

przeto
$$\beta=134^0\ 40'\ 35'',9$$
$$\gamma=\ 19^0\ 38'\ 24'',1.$$

Rachunek boku a

za pomocą wzoru $a=b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$$\begin{aligned}
\log b &= 2{,}7891956\\
\log\sin\alpha &= \underline{9{,}6368859}\\
&\ 12{,}4260815\\
\log\sin\beta &= \underline{9{,}8519222}\\
\log a &= 2{,}5741593
\end{aligned}$$

$$a=375{,}1106,$$

za pomocą wzoru $a=c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

$$\begin{aligned}
\log c &= 2{,}4637542\\
\log\sin\alpha &= \underline{9{,}6368859}\\
&\ 12{,}1006401\\
\log\sin\gamma &= \underline{9{,}5264810}\\
\log a &= 2{,}5741591
\end{aligned}$$

$$a=375{,}1104.$$

Możemy też szukać boku a za pomocą wzoru (1) art. 185-go

$$\begin{aligned}
\log(b+c) &= 2{,}9573012\\
\log\sin\frac{1}{2}\alpha &= \underline{9{,}3468566}\\
&\ 12{,}3041578\\
\log\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) &= \underline{9{,}7299987}\\
\log a &= 2{,}5741591
\end{aligned}$$

$$a=375{,}1104.$$

Przykład 2-gi. Niech będą dane $\log b = 2{,}7891956$, $\log c = 2{,}4637542$, $\alpha = 25^0\,41'$. Dla rozwiązania tego zadania użyjemy wzoru (2), podanego w art. 185-ym, w którym $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c}$. Szukamy naprzód kąta posiłkowego φ.

$$\log b = 2{,}7891956$$

$$\log c = \underline{2{,}4637542}$$

$$\log \operatorname{tg}\varphi = 10{,}3254414$$

$$\varphi = 64^0\,42'\,4'',6,$$

$$\varphi - 45^0 = 19^0\,42'\,4'',6.$$

Następnie szukamy kąta $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$

$$\log \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = 9{,}5539764$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = \underline{10{,}6421427}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 10{,}1961191$$

$$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 57^0\,31'\,5'',9.$$

Dalszy ciąg rachunku przeprowadza się jak w przykładzie 1-szym.

Przykład 3-ci. Niech będą dane $\alpha = 25^0\,41'$, $\log b = 2{,}7891956$, $c = 290{,}907$. Dla znalezienia kąta β używamy wzoru $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$, Szukamy naprzód $b\cos\alpha$, mamy

$$\log b = 2{,}7891956$$

$$\log\cos\alpha = \underline{9{,}9548227}$$

$$\log b\cos\alpha = 2{,}7440183$$

$$b\cos\alpha = 554{,}649$$

zatym

$$c - b\cos\alpha = -263{,}742.$$

Mamy zatym $\operatorname{tg}\beta = -\frac{b\sin\alpha}{263{,}742}$, stąd zaś

$$\operatorname{tg}(180^0 - \beta) = \frac{b\sin\alpha}{263{,}742},$$

$$\log b = 2{,}7891956$$
$$\log \sin \alpha = 9{,}6368859$$
$$12{,}4260815$$
$$\log 263{,}742 = 2{,}4211793$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - \beta) = 10{,}0049022$$

stąd
$$180^0 - \beta = 45^0\, 19'\, 24'',1$$
$$\beta = 134^0\, 40'\, 35'',9.$$

Przykład 4-ty. Niech będą dane $b = 14985{,}7$, $c = 14018{,}5$,

$$\alpha = 53^0\, 7'\, 42''.$$

Rozwiążemy to zadanie, używając metody art. 185-go i pięciocyfrowych logarytmów

$$\log (b - c) = 2{,}98552$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = 10{,}30105$$
$$13{,}28657$$
$$\log (b + c) = 4{,}46246$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = 8{,}82411$$

$$\frac{1}{2} (\beta - \gamma) = 3^0\, 48'\, 57'',$$

$$\frac{1}{2} (\beta + \gamma) = 63^0\, 26'\, 9'',$$

$$\beta = 67^0\, 15'\, 6'', \quad \gamma = 59^0\, 37'\, 12''.$$

Rachunek boku a

$$\log (b - c) = 2{,}98552$$
$$\log \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = 9{,}95155$$
$$12{,}93707$$
$$\log \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = 8{,}82315$$
$$\log a = 4{,}11392$$
$$a = 12999{,}4.$$

Przykład 5-ty. $\log b = 2{,}37146$, $\log c = 2{,}28504$

$$\alpha = 44^0\, 41'\, 38''.$$

Rozwiążemy to zadanie za pomocą wzoru (2) art. 186-go i pięciocyfrowych logarytmów

Rachunek kąta φ

$$\log b = 2{,}37146$$
$$\log \sin \alpha = \underline{9{,}84715}$$
$$12{,}21861$$
$$\log c = \underline{2{,}28504}$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 9{,}93357$$
$$\varphi = 40^0\, 38'\, 7'',$$
$$\alpha - \varphi = 4^0\, 3'\, 31''.$$

Rachunek kąta β

$$\log \sin \alpha = 9{,}84715$$
$$\log \sin \varphi = \underline{9{,}81374}$$
$$19{,}66089$$
$$\log \sin (\alpha - \varphi) = \underline{8{,}84989}$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}81100$$
$$\beta = 81^0\, 12'\, 57'',$$
$$\gamma = 54^0\ \ 5'\, 25''.$$

Rachunek boku a

$$\log b = 2{,}37146$$
$$\log \sin \alpha = \underline{9{,}84715}$$
$$12{,}21861$$
$$\log \sin \beta = \underline{9{,}99488}$$
$$\log a = 2{,}22373$$
$$a = 167{,}39.$$

Możemy też użyć wzoru (2), art. 185-go. Szukamy kąta φ

$$\log b = 2{,}37146$$
$$\log c = \underline{2{,}28504}$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 10{,}08642$$
$$\varphi = 50^0\, 39'\, 49''.$$

Rachunek kąta $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$

$$\log \operatorname{tg}(\varphi-45^0) = 8{,}99637$$

$$\log \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = 10{,}38607$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 9{,}38244$$

$$\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 13^0\,33'\,46'',$$

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 67^0\,39'\,11'',$$

$$\beta = 81^0\,12'\,57'',\quad \gamma = 54^0\,5'\,25''.$$

Przykład 6-ty. Niech będą dane $b = 0{,}5783462$, $c = 0{,}9013018$, $\alpha = 85^0\,37'\,41'',78$ i przypuśćmy, że zachodzi potrzeba znalezienia jedynie boku a. Dla rozwiązania tego zadania używamy wzorów, podanych w art. 187-ym.

1) Rozwiązanie za pomocą wzoru (5) art. 187-go, czyli za pomocą wzoru

$$a = (b+c)\cos\varphi,\ \text{gdzie}\ \sin\varphi = \frac{2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}\alpha}{b+c}.$$

Rachunek kąta φ

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\frac{1}{2}\log b = \bar{1}{,}8810939$$

$$\frac{1}{2}\log c = \bar{1}{,}9774351$$

$$\log\cos\frac{1}{2}\alpha = 9{,}8654370$$

$$10{,}0249960$$

$$\log(b+c) = 0{,}1701584$$

$$\log\sin\varphi = 9{,}8548376$$

$$\varphi = 45^0\,42'\,54'',03.$$

Rachunek boku a

$$\log(b+c) = 0{,}1701584$$
$$\log\cos\varphi = \underline{9{,}8439971}$$
$$\log a = 0{,}0141555$$
$$a = 1{,}033131$$

2) Rozwiązanie za pomocą wzoru (6) art. 187-go, czyli za pomocą wzoru

$$a = \frac{b-c}{\cos\varphi}, \quad \text{gdzie } \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{bc}\sin\frac{1}{2}\alpha}{b-c},$$

Rachunek kąta φ

$$\log 2 = \phantom{\bar{1}}0{,}3010300$$
$$\frac{1}{2}\log b = \bar{1}{,}8810939$$
$$\frac{1}{2}\log c = \bar{1}{,}9774351$$
$$\log\sin\frac{1}{2}\alpha = \underline{9{,}8322676}$$
$$9{,}9918266$$
$$\log(b-c) = \underline{\bar{1}{,}5091428}(-)\ ^{*})$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi = 10{,}4826838\,(-)$$
$$\varphi = 180^0 - 71^0\,47'\,2'',7 = 108^0\,12'\,57'',3.$$

Rachunek boku a

$$\log(b-c) = 1{,}5091428\,(-)$$
$$\log\cos\varphi = \underline{9{,}4949873}\,(-)$$
$$\log a = 0{,}0141555$$
$$a = 1{,}033131.$$

3) Rozwiązanie za pomocą wzoru (7) art. 187-go, czyli za pomocą wzoru

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\psi}, \quad \text{gdzie } \operatorname{tg}\psi = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha.$$

*) Znak (—) oznacza, że $b-c$ jest ujemne, a tymsamym, że bierzemy $\log(c-b)$.

Rachunek kąta ψ

$$\begin{aligned}
\log(b-c) &= \bar{1},5091428\,(-)\\
\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha &= \underline{10,0331693}\\
&\ 9,5423121\,(-)\\
\log(b+c) &= \underline{\ 0,1701584}\\
\log\operatorname{tg}\psi &= \ 9,3721537\,(-)\\
\psi &= -13^{0}\,15'\,23'',36.
\end{aligned}$$

Rachunek boku a

$$\begin{aligned}
\log(b+c) &= \ 0,1701584\\
\log\sin\frac{1}{2}\alpha &= \underline{\ 9,8322676}\\
&\ 10,0024260\\
\log\cos\psi &= \underline{\ 9,9882705}\\
\log a &= \ 0,0141555\\
a &= 1,033131.
\end{aligned}$$

4) Rozwiązanie za pomocą wzoru (8) art. 187-go, czyli za pomocą wzoru

$$a=\sqrt{(b+c+m)\,(b+c-m)},\ \text{gdzie}\ m=2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Rachunek wielkości m

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300\\
\frac{1}{2}\log b &= \bar{1},8810939\\
\frac{1}{2}\log c &= \bar{1},9774351\\
\log\cos\frac{1}{2}\alpha &= \underline{9,8654370}\\
\log m &= 0,0249960\\
m &= 1,0592440
\end{aligned}$$

Rachunek boku a

$$\begin{aligned}
b+c+m &= 2,5388920\\
b+c-m &= 0,4204040\\
\log(b+c+m) &= 0,4046442\\
\log(b+c-m) &= \underline{\bar{1},6236668}\\
\log a^{2} &= 0,0283110\\
\log a &= 0,0141555\\
a &= 1,033131.
\end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
b	c	α	β	γ	a
1837,9	1719,9	29° 2′ 34″	82° 46′ 32″	68° 10′ 54″	899,37
1010,3	2409,3	58 11 42	24 34 57,7	97 13 20,3	2063,91
8174,9	2579,8	97 13 15	66 1 14,3	16 45 30,7	8876,15
86155,6	110277	68 10 41,2	45 37 36,4	66 11 42,4	111894,4
120463	10241,5	58 11 41,6	117 28 45,9	4 19 32,5	115394,2
353481,4	268487,4	49 41 40,0	81 35 39,8	48 42 40,2	272494
104,76	22,55	9 1 1,2	168 31 46,84	2 27 11,96	82,5643

188. *Przypadek 3-ci. Mając dane dwa boki trójkąta i kąt jednemu z nich przeciwległy, znaleść pozostałe kąty i bok.*

Niech będą dane a, b i α.

Na zasadzie wzorów (1) art. 167-go, mamy

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}, \tag{1}$$

z tego wzoru znajdziemy β; mając zaś kąt β, znajdziemy kąt γ z wzoru $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; wreszcie bok c otrzymamy z wzoru

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Rozwiązanie to, z przyczyny, że kąt szukany β otrzymujemy za pomocą jego wstawy, prowadzi do następujących uwag. Ponieważ wstawa kąta nie może być większa od jedności, przeto, żeby rozwiązanie było możliwe, koniecznym warunkiem jest, aby a nie było mniejsze od $b\sin\alpha$. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, to ze względu, że kąt β otrzymujemy za pomocą wstawy, każdej zaś wstawie odpowiadają dwa kąty spełniające się, z których każdy jest mniejszy od 180^0, będziemy mieli na odpowiedź dwa kąty. Jeżeli oznaczymy przez M kąt ostry, danej wstawie odpowiadający i znaleziony z tablic, natenczas nietylko kąt M, ale i kąt $180^0 - M$ będzie kątem zadośćczyniącym równaniu (1). To nam wskazuje, że na odpowiedź otrzymać możemy dwa trójkąty, złożone z tych samych danych elementów, i dla tego przypadek ten rozwiązania trójkątów zowie się przypadkiem wątpliwym. Wątpliwość, zachodzącą tu usunąć mogą albo warunki zadania, albo własności trójkąta rozważanego.

Jeżeli bok a jest większy od boku b, wtedy, na zasadzie twierdzenia z Planimetryi, że na przeciwko boków większych leżą kąty większe, będzie i kąt α większy od kąta β; w tym zaś przypadku, kąt β będzie mniejszy od kąta prostego czyli ostry.

Jeżeli bok $a = b$, natenczas wzór (1) daje $\sin\beta = \sin\alpha$; w tym więc wypadku kąt $\beta = \alpha$, jeżeli więc kąt α jest ostry, mamy trójkąt równoramienny, w którym $\alpha = \beta$, jeżeli zaś kąt α jest $> 90^0$, czyli rozwarty, zadanie jest niemożebne do rozwiązania.

Jeżeli nakoniec bok a jest mniejszy od boku b, wtedy kąt $\alpha <$ kąta β, aby więc rozwiązanie zadania było możebne, potrzeba, aby kąt α był mniejszy od kąta prostego. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, zagadnienie ma dwa rozwiązania, albo tylko jedno stosownie do tego, czy $b\sin\alpha < a$, czyteż $b\sin\alpha = a$. Jakoż, jeżeli $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} < 1$, wtedy $\sin\beta > \sin\alpha$, że zaś kąt α jest ostry z założenia, przeto $\beta > \alpha$ i $180^0 - \beta > \alpha$ oba kąty czynią warunkom zadania i otrzymujemy dwa rozwiązania. Jeżeli $\frac{b\sin\alpha}{a} = 1$, wtedy $\beta = 90^0$, mamy więc wtedy trójkąt prostokątny, jako jedyne rozwiązanie i to w założeniu, że $\alpha < 90^0$; gdy zaś w tym przypadku $\alpha > 90^0$, zadanie jest niemożebne.

189. Powyższy rozbiór przypadku wątpliwego daje się objaśnić gieometrycznie. Jakoż, nakreślmy (fig. 35) kąt XAY równy danemu

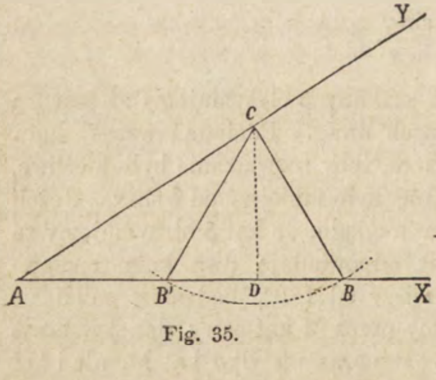

Fig. 35.

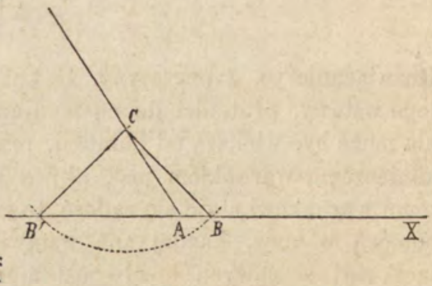

Fig. 35a.

kątowi α; na ramieniu AY weźmy, poczynając od wierzchołka kąta, odcinek AC równy bokowi b i spuśćmy z punktu C prostopadłą CD na ramię AX, natenczas prostopadła ta będzie równa $b\sin\alpha$.

1) Jeżeli $a > b \sin \alpha$, natenczas z punktu C, jako ze środka promieniem równym a, zakreślmy okrąg koła, ten okrąg koła przetnie ramię AX kąta α w dwu punktach, które oznaczmy przez B i B'.

Dla roztrząśnienia różnych przypadków, jakie wtedy zajść mogą, przypuśćmy naprzód, że kąt $\alpha < 90^0$, następnie $\alpha > 90^0$ i wreszcie $\alpha = 90^0$.

a) Kąt $\alpha < 90^0$. Jeżeli wtedy $a < b$, okrąg koła zakreślony z punktu C przetnie ramię AX kąta α w dwu punktach, położonych po prawej stronie wierzchołka A; otrzymujemy wtedy dwa trójkąty ABC i ACB', które rozwiązują zadanie; jeżeli $a = b$, punkt B' przypada wtedy w wierzchołku A kąta α, trójkąt ACB' sprowadza się do linii prostej, trójkąt zaś ACB, będący rozwiązaniem zadania, będzie trójkątem równoramiennym; jeżeli wreszcie $a > b$, wtedy punkty B i B' znajdują się po stronach przeciwnych wierzchołka A kąta α i trójkąt ACB daje nam wtedy jedyne rozwiązania zadania.

b) Kąt $\alpha > 90^0$. Jeżeli $a > b$ (fig. 35a), okrąg koła przecina prostą AX w dwu punktach B i B', położonych po przeciwnych stronach wierzchołka A, pierwszy z nich t. j. ACB daje nam rozwiązanie, drugi zaś ACB' nie odpowiada warunkom zadania. Jeżeli $a = b$, punkt B przypada w wierzchołku A i trójkąt ACB zamienia się na liniją prostą, trójkąt zaś ACB' nie odpowiada warunkom zadania. Jeżeli wreszcie $a < b$ punkty B i B' przecięcia okręgu koła znajdują się po lewej stronie wierzchołka A, a utworzone trójkąty nie odpowiadają warunkom zadania, a tymsamym rozwiązanie jest nie możliwe.

c) Kąt $\alpha = 90^0$. W tym przypadku, jeżeli $a > b$ okrąg koła przecina prostą AX w dwu punktach B i B', położonych po przeciwnych stronach wierzchołka A i symetrycznie położonych względem punktu A, a utworzone trójkąty ACB i ACB' stanowią rozwiązanie zadania; ponieważ zaś są one równe, przeto mówimy, że zadanie ma jedno rozwiązanie. Jeżeli $a = b$ trójkąt ABC zamienia się na liniją prostą i nie mamy wtedy rozwiązania, jak również i wtedy, gdy $a < b$, wtedy bowiem $a < b \sin \alpha$, co jest warunkiem niemożliwości zadania.

2) Jeżeli $a = b \sin \alpha$ okrąg koła zakreślony z punktu C promieniem równym a będzie styczny do boku AC i jako rozwiązanie otrzymujemy trójkąt, którego kąt B jest prosty.

3) Jeżeli wreszcie $a < b \sin \alpha$, natenczas okrąg koła zakreślony z punktu C, jako ze środka promieniem równym a, nie przetnie ramienia AX, ani go nie dotknie i zadanie będzie niemożebne do rozwiązania.

Powyższe wnioski, wynikające także z rozumowań, przeprowadzonych w art. 186-ym, dają się przedstawić w sposób następujący:

$$\begin{array}{lll} a < b\sin\alpha & & \text{żadna odpowiedź} \\ a \geqq b\sin\alpha & \left\{\begin{array}{ll} \alpha < 90^0 & \left\{\begin{array}{ll} a = b\sin\alpha & \text{jedna odpowiedź} \\ a < b & \text{dwie odpowiedzi} \\ a \geqq b & \text{jedna odpowiedź} \end{array}\right. \\ \alpha > 90^0 & \left\{\begin{array}{ll} a > b & \text{jedna odpowiedź} \\ a \leqq b & \text{żadna odpowiedź} \end{array}\right. \\ \alpha = 90^0 & \left\{\begin{array}{ll} a > b & \text{jedna odpowiedź} \\ a \leqq b & \text{żadna odpowiedź.} \end{array}\right. \end{array}\right. & \end{array}$$

190. W rozwiązaniu poprzedzającym zadania, szukaliśmy boku c, za pomocą, wpierw znalezionych boków β i γ; możemy jednak znaleść bok c bezpośrednio. Jakoż, na zasadzie wzoru (1) art. 165-go, mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

(1) $$\text{stąd } c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}.$$

Wzór ten nie jest dogodny do rachunku logarytmami, dla tego też należy go przekształcić przez wprowadzenie kąta posiłkowego. Ponieważ $b\sin\alpha$ powinno być $\leqq a$, przeto, aby na c wypadły wartości rzeczywiste, możemy wziąć taki kąt posiłkowy φ, aby było

$$\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\varphi, \text{ stąd } b = \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Podstawiając tę wartość w wyrażenie (1), otrzymamy

$$c = \frac{a\sin\varphi\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm a\cos\varphi, \text{ czyli}$$

$$c = \frac{a\sin(\varphi \pm \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Znalazszy kąt φ, możemy za pomocą logarytmów obliczyć bok c; łatwo jednak zauważyć, że kąt φ jest właśnie kątem β. Widzimy więc, że powyżej wskazany sposób znalezienia boku c niczym się nie różni od sposobu, podanego w art. 188-ym.

191. Podany w poprzedzającym artykule wzór (1), daje nam możność wyprowadzenia wszystkich warunków możliwości zadania, jakie przytoczyliśmy w art. 188-ym i 189-ym. Jakoż, aby znaleziona wartość c była możliwa, potrzeba, aby wzór (1) art. 190-go dawał wartości rzeczywiste i dodatne. Pierwszemu warunkowi stanie się zadość, gdy $a \geqq b\sin\alpha$. Jeżeli $a = b\sin\alpha$, wzór powyższy sprowadza się do $c = b\cos\alpha$, i c będzie dodatne, gdy $\cos\alpha > 0$, gdy $\alpha < 90^0$, i wtedy mamy jednę odpowiedź, gdy zaś $\alpha > 90^0$, wtedy $\cos\alpha < 0$ nie otrzymujemy żadnej odpowiedzi.

Jeżeli zaś $a > b \sin\alpha$ mamy dwie wartości rzeczywiste c i obie dodatne, gdy α jest kątem ostrym, nadto $b\cos\alpha > \sqrt{a^2 - b^2\cos^2\alpha}$, stąd wypada, że $b > a$; mamy jednę odpowiedź; gdy kąt α jest rozwarty, a $\sqrt{a^2 - b^2\cos^2\alpha} > b\cos\alpha$, stąd $a > b$; jak również mamy jednę odpowiedź, gdy $a = b\sin\alpha$, a kąt $\alpha < 90^0$. Otrzymujemy więc teżsame warunki, jakie wskazaliśmy w poprzedzających artykułach.

Przykład 1-szy. Niech będą dane $a = 2840{,}351$, $b = 3683{,}983$, $\alpha = 35^0\,33'\,11''$.

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned} \log\sin\alpha &= 9{,}7645172 \\ \log b &= \underline{3{,}5663176} \\ & 13{,}3308348 \\ \log a &= \underline{3{,}4533720} \\ \log\sin\beta &= 9{,}8774628 \end{aligned}$$

Ponieważ $a < b$, kąt $\alpha < 90^0$, nadto $b\sin\alpha < a$, przeto z trzech danych elementów można utworzyć dwa trójkąty; jeden, w którym kąt $\beta = 48^0\,57'\,6'',9$, a drugi, w którym kąt $\beta = 131^0\,2'\,53'',1$.

Rachunek boku c

dla pierwszego trójkąta, to jest, gdy $\beta = 48^0\,57'\,6'',9$. W tym razie $\gamma = 95^0\,29'\,42'',1$

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}4533720 \\ \log\sin\gamma &= \underline{9{,}9979996} \\ & 13{,}4513716 \\ \log\sin\alpha &= \underline{9{,}7645172} \\ \log c &= 3{,}6868544 \\ c &= 4862{,}44. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

dla drugiego trójkąta, to jest, gdy $\beta = 131^0\,2'\,53'',1$; wtedy $\gamma = 13^0\,23'\,55'',9$,

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}4533720 \\ \log\sin\gamma &= \underline{9{,}3649796} \\ & 12{,}8183516 \\ \log\sin\alpha &= \underline{9{,}7645172} \\ \log c &= 3{,}0538344 \\ c &= 1131{,}969. \end{aligned}$$

Przykład 2-gi. Niech będą dane

$$a = 51597, \quad b = 53660, \quad \alpha = 72^0\, 31'\, 30''.$$

Rozwiążemy to zadanie, używając logarytmów pięciocyfrowych

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned} \log\sin\alpha &= 9{,}97948 \\ \log b &= \underline{4{,}72965} \\ & 14{,}70913 \\ \log a &= \underline{4{,}71263} \\ \log\sin\beta &= 9{,}99650 \end{aligned}$$

$$\beta = 82^0\, 44',$$

albo

$$\beta = 97^0\, 16,$$

ponieważ $a < b$, kąt $\alpha < 90^0$, nadto $b \sin\alpha < a$, przeto otrzymamy dwa trójkąty.

Rachunek boku c

1) W założeniu, że $\beta = 82^0\, 44'$, w tym razie $\gamma = 24^0\, 44'\, 30''$,

$$\begin{aligned} \log a &= 4{,}71263 \\ \log\sin\gamma &= \underline{9{,}62172} \\ & 14{,}33435 \\ \log\sin\alpha &= \underline{9{,}97948} \\ \log c &= 4{,}35487 \end{aligned}$$

$$c = 22639.$$

2) W założeniu, że kąt $\beta = 97^0\, 16'$, w tym razie $\gamma = 10^0\, 12'\, 30''$,

$$\begin{aligned} \log a &= 4{,}71263 \\ \log\sin\gamma &= \underline{9{,}24853} \\ & 13{,}96116 \\ \log\sin\alpha &= \underline{9{,}97948} \\ \log c &= 3{,}98168 \end{aligned}$$

$$c = 9587.$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
a	b	α	β	γ	c
34397,8	44747,9	49° 41′ 40″,	{ 82° 46′ 45″,	47° 31′ 35″,	33269,4
			{ 97 13 15	33 5 5	24622,2
104822,28	107327,7	72 31 34,4	{ 77 35 41,5	29 52 44,1	54745,4
			{ 102 24 18,5	5 4 7,1	9708,98
355048	228009	16 45 31,2	10 40 15,8	152 34 13,0	567233
18754	30476	26 27 40	{ 46 23 39,2	107 8 40,8	40217,76
			{ 133 36 20,8	19 55 59,2	14348,76
15238	9377	19 56 24	12 6 51,6	147 56 44,4	23713,52
223,54	105,26	54 21 30	22 29 57,4	103 8 32,6	267,8616

Uwaga. Jeżeli kąt α jest bardzo mały, natenczas $\beta = \frac{\alpha b}{a}$.

Przykład. $a = 3856$, $b = 2987$, $\alpha = 17'',5$, wtedy

$$\beta = 13'',556,$$

bok zaś c bliski $a + b = 6843$.

192. *Przypadek 4-ty. Mając dane trzy boki trójkąta, znaleść kąty tegoż trójkąta.*

Niech będą dane a, b, c.

Dla znalezienia kątów trójkąta, gdy dane są trzy jego boki, należy użyć wzorów, dających nam związki między trzema bokami trójkąta a jednym z jego kątów. Związki tego rodzaju, podane w art. 165-ym, nie są jednak dogodne do rachunku logarytmami, dla tego też użyjemy wzorów (1), (2) i (3) art. 175-go

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\quad \sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\quad \sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\ \sin\frac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

gdzie $2p=a+b+c$.

Jeżeli chodzi nam o znalezienie jednego kąta trójkąta, będzie obojętną rzeczą, którego z tych trzech wzorów użyjemy; każdy bowiem wzór wymaga szukania czterech logarytmów. Ale, gdy chodzi o znalezienie wszystkich kątów trójkąta, wtedy najkorzystniej użyć wzorów, dających połowę kąta przez jego styczną, potrzebujemy bowiem wtedy szukać jedynie logarytmów czterech liczb $p, p-a, p-b$ i $p-c$, gdy tymczasem wzory, dające nam dostawy połowy kątów, wymagają szukania logarytmów siedmiu liczb $p, p-a, p-b, p-c, a, b$ i c; wzory zaś, dające wstawy połowy kątów, wymagają szukania logarytmów sześciu liczb $a, b, c, p-a, p-b$ i $p-c$. Zwrócić jeszcze należy uwagę, że przy użyciu wzorów na styczną połowy kąta rachunek daje się znacznie uprościć. Jakoż, ponieważ wzór na styczną $\frac{1}{2}\alpha$ możemy napisać w kształcie

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

przeto oznaczając przez r wartość pierwiastka po prawej stronie, wyrażającego, jakto poniżej zobaczymy, promień koła wpisanego w trójkąt, będziemy mieli

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{r}{p-a},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=\frac{r}{p-b},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=\frac{r}{p-c},$$

a stąd

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\log r-\log(p-a),$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=\log r-\log(p-b),$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=\log r-\log(p-c).$$

Widzimy więc, że w tym razie należy znaleść $\log r$ i od niego odejmować $\log(p-a)$, $\log(p-b)$, $\log(p-c)$, aby otrzymać logarytmy $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ i $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$.

193. Zobaczmy teraz, przy jakich warunkach zadanie będzie możebne do rozwiązania. Warunki te otrzymamy z wzorów na wstawę, dostawę i styczną połowy kątów. Jakoż, abyśmy mogli z powyższych wzorów otrzymać wartości wstawy, dostawy i stycznej połowy kąta, potrzeba, aby pierwiastki, wchodzące do wzorów powyższych były rzeczywiste, nadto wartości wstawy i dostawy były mniejsze od jedności. Rozważmy każdy z tych wzorów;

1) abyśmy ze wzoru, dającego $\sin\frac{1}{2}\alpha$, mogli otrzymywać wartości rzeczywiste i mniejsze od jedności potrzeba, aby $\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ było dodatne i mniejsze od jedności. Pierwszemu warunkowi stanie się zadość, gdy czynniki $p-b$ i $p-c$ są oba jednakowego znaku; że zaś oba te czynniki nie mogą być jednocześnie ujemne, bo ich summa jest równa a, przeto musi być koniecznie $p > b$ i $p > c$, stąd $a + c > b$, $a + b > c$, drugiemu zaś warunkowi

$$(p-b)(p-c) < bc, \text{ czyli}$$

$$p^2 - (b+c)p < 0, \text{ albo}$$

$$p < b + c,$$

stanie się zadość, gdy $b + c > a$, zadanie więc będzie możebne do rozwiązania, gdy summa każdych dwu boków będzie większa od trzeciego;

2) abyśmy ze wzoru, dającego $\cos\frac{1}{2}\alpha$, mogli otrzymywać wartości rzeczywiste i mniejsze od jedności, potrzeba, aby $\frac{p(p-a)}{bc}$ było dodatne i mniejsze od jedności. Pierwszemu warunkowi stanie się zadość, gdy $p - a > 0$, skąd $b + c > a$, drugi warunek prowadzi do nierówności

$$p(p-a) < bc, \text{ to jest}$$

$$(a+b+c)(b+c-a) < 4bc, \text{ czyli}$$

$$(b+c)^2 - a^2 < 4bc, \text{ czyli}$$

$$a^2 > (b-c)^2.$$

Zatym jeden z boków winien być mniejszy od summy dwu pozostałych, a większy od ich różnicy;

3) abyśmy ze wzoru, dającego $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, mogli otrzymywać wartości rzeczywiste, trzy czynniki $p-a$, $p-b$, $p-c$ powinny być dodatne, lub też jeden dodatny, a dwa ujemne, z przyczyny jednak, że ostatni wypadek jak to wyżej wykazaliśmy, nie może mieć miejsca, pozostaje pierwszy, który prowadzi do nierówności

$$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c.$$

Przyszliśmy więc ze wzorów, podanych na wstawę, dostawę i styczną połowy kąta do znanych z Gieometryi warunków możebności istnienia trójkąta.

Przykład 1-szy. Niech będą dane $a = 1936{,}7$, $b = 3498{,}9$, $c = 3124{,}4$. Szukajmy kątów α, β, γ używając pięciocyfrowych logarytmów:

Mamy w tym przypadku:

$$p = 4280,\quad p - a = 2343{,}3,$$

$$p - b = 781{,}1,\quad p - c = 1155{,}6.$$

1) Używając wzoru na dostawę połowy kąta mieć będziemy *)

Rachunek kąta α

$$\begin{aligned}
\log p &= 3{,}63144 \\
\log (p-a) &= 3{,}36983 \\
\text{comp.}\log b &= 6{,}45607 - 10 \\
\text{comp.}\log c &= \underline{6{,}50523 - 10} \\
2\log\cos\frac{1}{2}\alpha &= 19{,}96257 - 20 \\
\log\cos\frac{1}{2}\alpha &= 9{,}98129 \\
\frac{1}{2}\alpha &= 16^0\,42',
\end{aligned}$$

zatym $\alpha = 33^0\,24'\,0''$.

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned}
\log p &= 3{,}63144 \\
\log (p-b) &= 2{,}89271 \\
\text{comp.}\log a &= 6{,}71294 - 10 \\
\text{comp.}\log c &= \underline{6{,}50523 - 10} \\
2\log\cos\frac{1}{2}\beta &= 19{,}74232 - 20 \\
\log\cos\frac{1}{2}\beta &= 9{,}87116 \\
\frac{1}{2}\beta &= 41^0\,59'\,15'',
\end{aligned}$$

zatym $\beta = 83^0\,58'\,30''$.

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned}
\log p &= 3{,}63144 \\
\log (p-c) &= 3{,}06281 \\
\text{comp.}\log a &= 6{,}71294 - 10 \\
\text{comp.}\log b &= \underline{6{,}45607 - 10} \\
2\log\cos\frac{1}{2}\gamma &= 19{,}86326 - 20 \\
\log\cos\frac{1}{2}\gamma &= 9{,}93163 \\
\frac{1}{2}\gamma &= 31^0\,18'\,45'',
\end{aligned}$$

zatym $\gamma = 62^0\,37'\,30''$.

---

*) W tym przykladzie zamiast odejmowania logarytmów, używać będziemy tak zwanych dopełnień (complementum), które w skróceniu oznaczamy przez comp.

2) Używając wzoru na wstawę połowy kąta, mieć będziemy

Rachunek kąta α

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 2{,}89271 \\
\log(p-c) &= 3{,}06281 \\
\text{comp.}\log b &= 6{,}45607 - 10 \\
\text{comp.}\log c &= \underline{6{,}50523 - 10} \\
2\log\sin\frac{1}{2}\alpha &= 18{,}91682 - 20 \\
\log\sin\frac{1}{2}\alpha &= 9{,}45841 \\
\frac{1}{2}\alpha &= 16^0\,41'\,57'', \\
\alpha &= 33^0\,23'\,54''.
\end{aligned}$$

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 3{,}36983 \\
\log(p-c) &= 3{,}06281 \\
\text{comp.}\log a &= 6{,}71294 - 10 \\
\text{comp.}\log c &= \underline{6{,}50523 - 10} \\
2\log\sin\frac{1}{2}\beta &= 19{,}65081 - 20 \\
\log\sin\frac{1}{2}\beta &= 9{,}82540 \\
\frac{1}{2}\beta &= 41^0\,59'\,13'', \\
\beta &= 83^0\,58'\,26''.
\end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 2{,}89271 \\
\log(p-a) &= 3{,}36983 \\
\text{comp.}\log b &= 6{,}45607 - 10 \\
\text{comp.}\log a &= \underline{6{,}71294 - 10} \\
2\log\sin\frac{1}{2}\gamma &= 19{,}43155 - 20 \\
\log\sin\frac{1}{2}\gamma &= 9{,}71577 \\
\frac{1}{2}\gamma &= 31^0\,18'\,49'', \\
\gamma &= 62^0\,37'\,38''.
\end{aligned}$$

3) Używając wzoru na styczną połowy kąta, mieć będziemy

Rachunek kąta α

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 2{,}89271 \\
\log(p-c) &= 3{,}06281 \\
\text{comp.}\log p &= 6{,}36856 - 10 \\
\text{comp.}\log(p-a) &= \underline{6{,}63017 - 10} \\
2\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha &= 18{,}95425 - 20 \\
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha &= 9{,}47712 \\
\frac{1}{2}\alpha &= 16^0\,41'\,57'', \\
\alpha &= 33^0\,23'\,54''.
\end{aligned}$$

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 3{,}36983 \\
\log(p-c) &= 3{,}06281 \\
\text{comp.}\log p &= 6{,}36856-10 \\
\text{comp.}\log(p-b) &= \underline{7{,}10729-10} \\
2\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta &= 19{,}90849-20 \\
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta &= 9{,}95424 \\
\frac{1}{2}\beta &= 41^0\,59'\,14'', \\
\beta &= 83^0\,58'\,28''.
\end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 3{,}36983 \\
\log(p-b) &= 2{,}89271 \\
\text{comp.}\log p &= 6{,}36856-10 \\
\text{comp.}\log(p-c) &= \underline{6{,}93719-10} \\
2\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma &= 19{,}56829-20 \\
\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma &= 9{,}78414 \\
\frac{1}{2}\gamma &= 31^0\,18'\,49'', \\
\gamma &= 62^0\,37'\,38''.
\end{aligned}$$

Znalezione wartości kątów α, β, γ za pomocą trzech różnych wzorów doprowadziły nas, jak widzimy, do wypadków, które nie są z sobą zgodne w sekundach, a nadto ich summa w ogóle nie jest równa, jak być powinno, 180^0. Przyczyną tego jest to, żeśmy używali logarytmów pięciocyfrowych, które jak wiadomo, dają wartości przybliżone, a tymsamym nie mogły dać dokładnych wartości kątów w sekundach. Jeżelibyśmy do tego przykładu zastosowali logarytmy siedmiocyfrowe, otrzymalibyśmy następujące wartości

$$\begin{aligned}
\alpha &= 62^0\,37'\,37'',5, \\
\beta &= 83^0\,58'\,27'',9, \\
\gamma &= 33^0\,23'\,54'',6,
\end{aligned}$$

których summa równa jest 180^0.

Przykład 2-gi. Niech będą dane $a = 9459{,}31$, $b = 8032{,}29$, $c = 8242{,}58$. Rozwiążemy zadanie, używając siedmiocyfrowych logarytmów, tudzież wzorów

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \log r - \log (p - a),$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \log r - \log (p - b),$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \log r - \log (p - c),$$

gdzie

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Rachunek przedwstępny

$$\begin{array}{rlrl} p = & 12867{,}09 & \log (p-a) = & 3{,}5324716 \\ p - a = & 3407{,}78 & \log (p-b) = & 3{,}6843785 \\ p - b = & 4834{,}80 & \log (p-c) = & 3{,}6650657 \\ p - c = & 4624{,}51 & \text{comp.} \log p = & \underline{5{,}8905197-10} \\ \log p = & 4{,}1094803 & \log r^2 = & 6{,}7724355 \\ & & \log r = & 3{,}3862177 \end{array}$$

Rachunek kąta α

$$\begin{aligned} \log r &= 3{,}3862177 \\ \log (p-a) &= \underline{3{,}5324716} \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha &= 9{,}8537461 \\ \frac{1}{2} \alpha &= 35^\circ\, 31'\, 47'',4, \\ \alpha &= 71^\circ\, 3'\, 34'',8 \end{aligned}$$

Rachunek kąta β

$$\begin{aligned} \log r &= 3{,}3862177 \\ \log (p-b) &= \underline{3{,}6843785} \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta &= 9{,}7018392 \\ \frac{1}{2} \beta &= 26^\circ\, 43'\, 0'',34, \\ \gamma &= 53^\circ\, 26''\, 0'',7. \end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log r &= 3{,}3862177 \\ \log (p-c) &= \underline{3{,}6650657} \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma &= 9{,}7211520 \\ \frac{1}{2} \gamma &= 27^\circ\, 45'\, 12'';27, \\ \gamma &= 55^\circ\, 30''\, 24'',5. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
a	b	c	α	β	γ
371	357	364	61° 55′ 39″,1	58° 6′ 33″,1	59° 57′ 47″,8
100	68	48	118 4 20,9	36 52 11,6	25 3 27,5
4015	4121	678	76 18 52	94 14 31,9	9 26 36,1
8030	8242	2544	76 18 52	85 45 28,1	17 55 39,9
6347	5820	12121	5 12 18,4	4 46 18,8	170 1 22,8
138,2426	111,9481	115,8495	74 42 16	51 21 44,3	53 55 59,7
204,629	151,4947	192,7707	71 48 16,9	44 41 38,2	63 30 4,9
106,895	82,680	47,294	107 30 59,6	47 31 39,6	24 57 20,8
795,729	752,774	524,081	74 42 15,9	65 51 15,3	39 26 28,8
235,211	227,076	427,580	22 45 40,8	21 55 56,6	135 18 22,6
487,365	523,794	774,306	38 19 17,5	41 47 29,6	99 53 12,9
54,4	81,6	122,4	20 44 30,9	32 5 21,1	127 10 8

ZASTOSOWANIA FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH DO GIEOMETRYI.

194. Powierzchnia trójkąta.

Powierzchnia trójkąta, jak nam wiadomo z Gieometryi, jest równa połowie iloczynu podstawy trójkąta przez jego wysokość, to jest, przez prostopadłą, spuszczoną z wierzchołka przeciwległego podstawie na tęż podstawę. Jeżeli więc ABC (fig. 36) jest trójkątem, którego bok BC bierzemy za podstawę, a AD oznacza długość prostopadłej, spuszczonej z punktu A na bok BC, natenczas powierzchnia trójkąta ABC będzie równa $\frac{1}{2}$BC.AD; że zaś AD = AB sin ABC, przeto, oznaczając przez Δ powierzchnią trójkąta, mieć będziemy

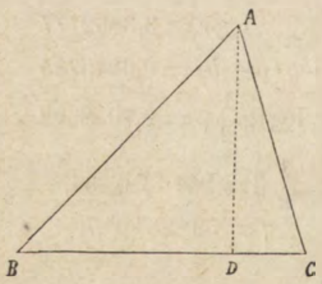

Fig. 36.

$$\Delta = \frac{1}{2} \mathrm{BC} . \mathrm{AB} \sin \mathrm{ABC},$$

a wprowadzając oznaczenia boków i kątów trójkąta, przyjęte w poprzedzających artykułach, mieć będziemy

$$\Delta = \frac{1}{2} ac \sin\beta. \tag{1}$$

Zatym powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu dwu jego boków i wstawy kąta, między niemi zawartego.

Jeżeli we wzorze (1) podstawimy wartość $\sin\beta$ z wzorów (3) art. 175-go, otrzymamy

$$(2) \qquad \Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Przychodzimy do wzoru na powierzchnią trójkąta, wyrażoną przez trzy boki trójkąta. *) Jeżeli we wzorze (1) zamiast a i c podstawimy wartości ze wzorów (1) art. 167-go, mianowicie:

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta},$$

przyjdziemy do wzoru

$$\Delta = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta},$$

a że

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

przeto $\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma)$; mamy więc

$$(3) \qquad \Delta = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Przychodzimy do wzoru, który nam pozwala wyrazić powierzchnią trójkąta, gdy dany jest jego bok i dwa kąty doń przyległe.

Jeżeli znowu we wzorze (1) zamiast a weźmiemy wartość ze wzorów (1) art. 167-go to jest $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, zaś zamiast c wartość z równania (1) art. 190-go, to jest $c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$, otrzymamy

$$(4) \qquad \Delta = \frac{b\sin\alpha}{2}\left[b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}\right],$$

wzór, dający nam powierzchnią trójkąta dla przypadku, gdy mamy dane dwa boki trójkąta a i b i kąt α pierwszemu z nich przeciwległy.

Oprócz wzorów powyżej podanych, możemy znaleść wiele innych wzorów na powierzchnią trójkąta, i tak, jeżeli wzory dające nam $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$, $\sin\frac{1}{2}\gamma$ (art. 175-ty) pomnożymy stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc},$$

*) Ten wzór zowie się wzorem trzech braci, gdyż pochodzi on od trzech sławnych matematyków arabskich. Twierdzenie to było znane już na dwa wieki przed Chrystusem i podane przez starszego Herona z Alexandryi, w piśmie geodezyjnym περὶ διόπτρας (Baltzer str. 127). Dowód gieometryczny podał Leonardo w dziele p. t. Practica geometriae (1220 r.) [wydanie Boncompagni'ego, 1857, 1862].

a że według wzoru (2) niniejszego artykułu

$$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \text{ przeto}$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{\Delta^2}{pabc}, \text{ a stąd}$$

(5) $$\Delta^2 = pabc \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma;$$

z wzorów, dających nam $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}\gamma$, otrzymamy

(6) $$\Delta = \frac{abc}{p} \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma;$$

wreszcie z wzorów $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$, otrzymamy

(7) $$\Delta = p^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

Jeżeli we wzorze (3) wstawę w mianowniku zastąpimy summą iloczynów wstaw i dostaw kątów α i γ, a następnie licznik i mianownik podzielimy przez $\sin\alpha \sin\gamma$, otrzymamy

(8) $$\Delta = \frac{b^2}{2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\gamma)}.$$

Jeżeli w szczególności trójkąt jest prostokątny i kąt $\alpha = 90^\circ$, natenczas z wzorów powyższych, otrzymamy

(9) $$\Delta = \frac{1}{2}bc,$$

gdy dane są dwa boki przyległe kątowi prostemu;

(10) $$\Delta = \frac{1}{2}b\sqrt{(a+b)(a-b)},$$

gdy dana jest przeciwprostokątna i bok przyległy kątowi prostemu;

(11) $$\Delta = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\gamma,$$

gdy dany jest bok przyległy kątowi prostemu i kąt temuż bokowi przeciwległy;

(12) $$\Delta = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\beta,$$

gdy dana jest przeciwprostokątna i jeden z kątów.

Jeżeli trójkąt jest równoramienny, wtedy wzór (2), w założeniu $a = b$, daje

$$\Delta = \frac{1}{2} c \sqrt{\left(a + \frac{c}{2}\right)\left(a - \frac{c}{2}\right)}; \tag{13}$$

jeżeli wreszcie trójkąt jest równoboczny, wtedy $a = b = c$, i

$$\Delta = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}. \tag{14}$$

195. Zowiemy trójkąt ukośnokątny *trójkątem wymiernym*, gdy jego boki jak również jego wysokości są liczbami wymiernemi, albo krócej, gdy powierzchnia trójkąta jest liczbą wymierną. Najdawniej ze znanych trójkątów wymiernych jest trójkąt, który znajdujemy u Hindusów i Arabów, a w którym boki są proporcyjonalne względem liczb 13 : 15 : 14. Najprostszemi tego rodzaju trójkątami są trójkąty średnioboczne (mittelseitige) to jest takie trójkąty, w których każdy z boków jest średnią arytmetyczną dwu boków pozostałych. Trójkąty wymierne ukośnokątne możemy utworzyć przez odpowiednie zestawienie dwu trójkątów prostokątnych wymiernych (art. 182). Wielki zbiór zadań, dotyczących trójkątów wymiernych zawiera dzieło Grebe'go, wydane 1864 r. p. t. Zusammenstellung von Stücken rationaler ebener Dreiecke; a także dzieło Kleyer'a, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Stuttgardt 1888, str. 128—129. Przytoczymy kilkanaście tego rodzaju trójkątów wraz ze wskazaniem wielkości kątów, wysokości i powierzchni trójkąta.

PRZYKŁADY.

BOKI			KĄTY			Wysokość odpowiadająca bokowi a.	Powierzchnia trójkąta.
a	b	c	α	β	γ		
14	15	13	59° 29′ 23″,2	67° 22′ 48″,4	53° 7′ 48″,4	12	84
150	25	145	96 43 58,5	9 31 38,2	73 44 23,3	14	1800
120	29	101	124 58 33,6	11 25 16,3	43 36 10,1	20	1200
408	41	401	96 57 20,1	5 43 29,3	77 19 10,6	40	8160
40	13	37	93 41 42,8	18 55 28,7	67 22 48,5	12	240
44	15	37	107 56 42,9	18 55 28,7	53 7 48,4	12	264
102	61	109	66 59 25,4	33 23 54,6	79 36 40	60	3060
232	61	229	85 11 58,6	15 11 21,4	79 36 40	60	6960
312	109	229	131 24 44	15 11 21,4	33 23 54,6	60	9360
240	53	197	139 56 16,8	8 10 16,4	31 53 26,8	28	3360
200	85	205	74 36 28,4	24 11 22,3	81 12 9,3	84	8400
450	85	445	87 55 0,3	10 52 50,4	81 12 9,3	84	18900

196. Promień koła opisanego na trójkącie.

Jeżeli przez R oznaczymy promień koła opisanego na danym trójkącie, natenczas na zasadzie dowodu drugiego na proporcyjonalność wstaw względem boków, podanego w art. 167-ym, mieć będziemy

$$(1) \qquad R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

mamy zatym wyrażenie promienia koła, opisanego na trójkącie w funkcyi jednego boku i kąta jemu przeciwległego.

Jeżeli chcemy promień koła opisanego na trójkącie wyrazić przez same boki trójkąta, dostatecznym będzie zamiast wstawy kąta α podstawić jej wyrażenie z równań (3) art. 175-go, to jest

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

przez co otrzymamy

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

stąd zaś na mocy wzoru (2) art. 194-go, mieć będziemy

$$(2) \qquad R = \frac{abc}{4\Delta},$$

z którego to wzoru możemy otrzymać wyrażenie powierzchni trójkąta $\Delta = \frac{abc}{4R}$ przez promień koła opisanego i trzy boki trójkąta.

Możemy też otrzymać powierzchnią trójkąta w funkcyi tegoż promienia i trzech kątów trójkąta. Jakoż, na zasadzie wzoru (1), mieć będziemy

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma;$$

podstawiając te wartości we wzorze (2), otrzymamy

$$\Delta = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

197. Promień kół stycznych do trójkąta wewnętrznie i zewnętrznie.

Niech ABC (fig. 37) będzie trójkątem danym, zaś O środkiem koła wpisanego w ten trójkąt. Ze środka O spuśćmy prostopadłe OD, OE i OF na boki trójkąta; jak wiemy, prostopadłe te przecinać będą boki trójkąta w punktach styczności okręgu koła z bokami trójkąta. Powierzchnia trójkąta BOC, jak wiemy, wyrazi się $\frac{1}{2}$ BC.OD, jeżeli więc przez

r oznaczymy promień koła wpisanego w trójkąt, boki zaś trójkąta oznaczać będziemy w ten sam sposób jak w artykułach poprzedzających, na-

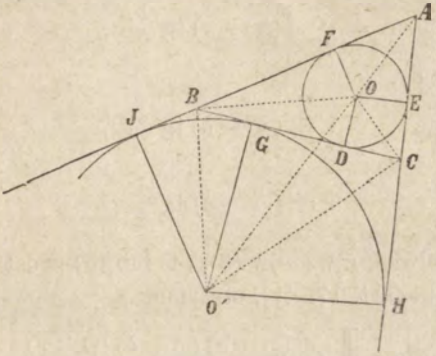

Fig. 37.

tenczas powierzchnia trójkąta BOC wyrazi się przez $\frac{1}{2}ar$, podobnie powierzchnia trójkąta AOC wyrazi się przez $\frac{1}{2}br$, powierzchnia zaś trójkąta AOB przez $\frac{1}{2}cr$. Że zaś powierzchnia trójkąta danego ABC jest summą trzech powyższych powierzchni, przeto

$$\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \text{powierzchni trójkąta } ABC = \Delta,$$

że zaś $a + b + c = 2p$, przeto będzie $rp = \Delta$, a stąd

$$r = \frac{\Delta}{p}. \tag{1}$$

Zatym promień koła wpisanego w dany trójkąt jest równy ilorazowi z podzielenia powierzchni trójkąta przez połowę jego obwodu.

Ponieważ $\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, przeto

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \tag{2}$$

otrzymujemy więc wzór na promień koła wpisanego w dany trójkąt, o którym wspomnieliśmy w artykule 192-im. Możemy jeszcze do wzoru (2) przyjść inną drogą. Ponieważ summa odcinków BD, CE i AF jest równa połowie obwodu trójkąta, przeto $BD + CE + AF = p$, czyli

$AF + a = p$, stąd $AF = p - a$. Z trójkąta AFO prostokątnego, w którym kąt $OAF = \frac{1}{2}\alpha$, mamy

$$(3) \qquad r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha,$$

podobnież otrzymamy

$$(4) \qquad r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta,$$

$$(5) \qquad r = (p - c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma.$$

Jeżeli w którymkolwiek z wzorów (3), (4) lub (5) podstawimy wartości za styczną połowy kąta (art. 175-ty), otrzymamy

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Promień koła wpisanego w dany trójkąt możemy wyrazić przez połowę jego obwodu i kąty. Jakoż, z pomnożenia wzorów (3), (4) i (5) stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$r^3 = (p - a (p - b)(p - c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma,$$

że zaś

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}, \text{ przeto}$$

$$(6) \qquad r = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma.$$

Z tego wzoru otrzymamy

$$(7) \qquad p = r \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma.$$

Wzory (6) i (7) pozwalają nam wyrazić powierzchnią trójkąta przez połowę jego obwodu i kąty, albo przez promień koła wpisanego w trójkąt i kąty. Jakoż, mnożąc równanie (6) przez p, równanie zaś (7) przez r i pamiętając, że na zasadzie wzoru (1) $\Delta = rp$, otrzymamy

$$(8) \quad \Delta = p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = r^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma.$$

Starajmy się teraz znaleść promienie kół stycznych zewnętrznie do trójkąta, to jest promienie kół stycznych do jednego z boków trójkąta, tudzież do przedłużeń boków pozostałych. Niech ABC (fig. 37) będzie danym trójkątem O' środkiem koła stycznego do boku BC, tudzież do przedłużeń boków AB i AC; niech I, G i H będą punktami styczności, natenczas, gdy spuścimy z punktu O′ prostopadłe na boki trójkąta, przecinać one będą boki tegoż trójkąta w punktach styczności I, G i H. Oznaczmy przez r_a promień tegoż koła. Z czworokąta ABO′C, mieć będziemy

$$\text{pow. } ABC = \text{pow. } ABO' + \text{pow. } ACO' - \text{pow. } BCO';$$

wyrażając odpowiednie powierzchnie tych trójkątów przez boki danego trójkąta i promień koła stycznego zewnętrznie, mieć będziemy

$$\Delta = \frac{1}{2} r_a c + \frac{1}{2} r_a b - \frac{1}{2} r_a a, \text{ czyli}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} r_a (c + b - a), \text{ a że } \frac{c + b - a}{2} = p - a,$$

przeto

$$(9) \qquad r_a = \frac{\Delta}{p - a}, \text{ podobnież}$$

$$(10) \qquad r_b = \frac{\Delta}{p - b},$$

$$(11) \qquad r_c = \frac{\Delta}{p - c}.$$

Do tych samych wzorów przyjść możemy, jeżeli zauważymy, że $AH = p$.*) Jakoż, wtedy w trójkącie AO′H, mamy $O'H = AH \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, czyli

$$(12) \qquad r_a = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha;$$

podobnież otrzymamy

$$(13) \qquad r_b = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta,$$

$$(14) \qquad r_c = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma,$$

a podstawiając w te wzory wyrażenia $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$ i $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$ (art. 175-ty), przyjdziemy do wzorów (9), (10) i (11).

Za pomocą wzorów, powyżej podanych, możemy wyrazić powierzchnią trójkąta przez promień koła stycznego wewnętrznie i promienie kół sty-

---

*) Mamy bowiem $AH = AI$, $BG = BI$, $CG = CH$, zatym $AB + BC + AC = AB + BG + GC + AC = AI + AH = 2AH = 2p$.

cznych zewnętrznie. Jakoż, mnożąc równania (1), (9), (10) i (11) stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$r r_a r_b r_c = \frac{\Delta^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

a że $p(p-a)(p-b)(p-c) = \Delta^2$, przeto

$$\Delta = \sqrt{r r_a r_b r_c}.$$

198. Między promieniem koła opisanego na trójkącie i promieniami kół stycznych wewnętrznie i zewnętrznie zachodzą godne uwagi związki, z których ważniejsze tu przytoczymy. I tak, z wzorów (1), (9), (10) i (11) (art. 197-my), mamy

$$\frac{\Delta}{r} = p, \quad \frac{\Delta}{r_a} = p - a, \quad \frac{\Delta}{r_b} = p - b, \quad \frac{\Delta}{r_c} = p - c,$$

odejmując od pierwszego z tych równań summę trzech pozostałych stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$\Delta\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right] = a + b + c - 2p = 0, \text{ zatym}$$

(1)
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Z trzech ostatnich wzorów, przytoczonych powyżej, otrzymamy

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{p}{\Delta} - \frac{1}{r_a}, \quad \frac{b}{\Delta} = \frac{p}{\Delta} - \frac{1}{r_b}, \quad \frac{c}{\Delta} = \frac{p}{\Delta} - \frac{1}{r_c}, \text{ czyli}$$

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}, \quad \frac{b}{\Delta} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}, \quad \frac{c}{\Delta} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}, \text{ stąd}$$

$$\frac{abc}{\Delta^3} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right),$$

że zaś $\Delta^2 = r r_a r_b r_c$, przeto

$$\frac{abc}{\Delta r r_a r_b r_c} = \frac{1}{r^3} - \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$+ \left[\frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_a r_c}\right]\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a r_b r_c},$$

lecz dwa pierwsze wyrazy po prawej stronie znoszą się, na zasadzie wzorów (1), przeto

$$\frac{abc}{\Delta r r_a r_b r_c} = \left[\frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_a r_c}\right]\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a r_b r_c},$$

a stąd

$$\frac{abc}{\Delta} = r_a + r_b + r_c - r,$$

a że $\dfrac{abc}{\Delta} = 4\mathrm{R}$, zatym

(2) $$4\mathrm{R} = r_a + r_b + r_c - r,$$

taki jest związek między promieniem koła opisanego na trójkącie a promieniami kół stycznych wewnętrznie i zewnętrznie.

199. Promień koła wpisanego w wielokąt foremny i promień koła, na nim opisanego.

Niech AB (fig. 38) będzie bokiem wielokąta foremnego o n bokach, O środkiem koła opisanego i wpisanego w dany wielokąt foremny, OC promieniem koła wpisanego, OA promieniem koła opisanego, niech nadto $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$, $\mathrm{OC} = r$. Jeżeli mamy wielokąt foremny o n bokach, natenczas kąt AOB jest n-tą częścią kąta pełnego, zatym kąt $\mathrm{AOB} = \dfrac{2\pi}{n}$, $\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{n}$.

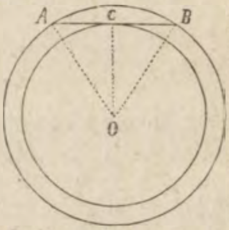

Fig. 38.

Z trójkąta AOC, mamy

$$\mathrm{AC} = \frac{a}{2} = \mathrm{AO} \sin \mathrm{AOC} = \mathrm{OC} \operatorname{tg} \mathrm{AOC}, \text{ czyli}$$

$$\frac{a}{2} = \mathrm{R} \sin \frac{\pi}{n} = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

stąd

(1) $$\mathrm{R} = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

(2) $$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

Możemy też znaleść obwód wielokąta foremnego i jego powierzchnią za pomocą promieni kół wpisanego i opisanego na wielokącie foremnym. Jakoż, obwód wielokąta foremnego będzie równy na, zatym

(3) $$\text{obwód} = 2n\mathrm{R} \sin \frac{\pi}{n} = 2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Ponieważ powierzchnia trójkąta $AOB = \frac{1}{2} AB . OC = \frac{a}{2} . \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$ $= \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$, przeto powierzchnia wielokąta foremnego wyrazi się

(4) $$\text{pow. wielokąta} = \frac{na^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} = n R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

podstawiając zamiast a wartość z wzoru (2), otrzymamy

(5) $$\text{pow. wielokąta} = n r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} = n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Z wzorów (1) i (4) możemy wyprowadzić wzór na obwód koła, jakoż, obwód wielokąta

$$= 2 r n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2r \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}};$$

jeżeli chcemy otrzymać okrąg koła, trzeba przypuścić, że ilość boków wielokąta rośnie bez granic, lecz w tym razie $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$, gdy n nieskończenie wielkie jest równe π, przeto obwod koła $= 2\pi r$.

W podobny sposób możemy wyprowadzić, ze wzoru (4), że powierzchnia koła jest $= \pi r^2$.

PRZYKŁADY.

1) Znaleść powierzchnią trójkąta, gdy dane są dwa boki trójkąta i kąt między niemi zawarty.

DANE			SZUKANE
a	b	γ	Δ
25	12	36° 52′ 12″	90,2
10	21	53 7 48	84
10	9	126 52 12	36,05
583	561	59 57 48	141571,3
87,25	478,5	31 2 54	10766,28
444,29	407,4	170 1 22,8	15679,7

2) Znaleść powierzchnią trójkąta, gdy dany jest bok i dwa kąty przyległe

DANE			SZUKANE
a	β	γ	Δ
17	28° 4′ 18″	25° 3′ 30″	36
53	58 6 36	3 49 6	90
1071,4	16 15 37	117 20 33	197132
1359,25	34 12 19,6	12 40 49,4	156160
81,5714	8 10 16,4	147 38 21,3	617,684

3) Znaleść powierzchnią trójkąta, gdy dane są trzy boki trójkąta

DANE			SZUKANE
a	b	c	Δ
4	15	13	24
13	20	21	126
51	52	53	1170
308	275	187	25410
281,05	288,47	47,46	6651,04
1608,75	345,51	1302,84	116083

4) Znaleść promienie kół opisanego na trójkącie, stycznych do trójkąta wewnętrznie i zewnętrznie, gdy dane są trzy boki trójkąta

DANE			SZUKANE				
a	b	c	R	r	r_a	r_b	r_c
13	14	15	$8\frac{1}{8}$	4	$10\frac{1}{2}$	12	14
4	15	13	$8\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	2	24	8
13	20	21	$10\frac{5}{6}$	$4\frac{2}{3}$	9	18	21
51	52	53	$30\frac{1}{30}$	15	$43\frac{1}{3}$	45	$46\frac{4}{5}$
308	275	187	$155\frac{5}{6}$	66	330	231	$128\frac{1}{3}$

5) Mając trzy kąty trójkąta i połowę jego obwodu, lub połowę obwodu zmniejszoną o jeden z boków, znaleść promień koła opisanego na trójkącie, tudzież promienie kół stycznych wewnętrznie i zewnętrznie.

Otrzymamy

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{p-a}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

$$r = 4R\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma,$$

$$r_a = 4R\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

$$r_b = 4R\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

$$r_c = 4R\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma.$$

6) Dowieść, że $r_a + r_b = c\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

7) Dowieść, że $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$.

8) Dowieść, że $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r r_a}{r_b r_c}$.

9) Dowieść, że $r_a r_b r_c = rp^2$.

10) Dowieść, że powierzchnią trójkąta wyraża się w kształcie

$$Rr(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

11) Dowieść, że $\Delta = \frac{abc}{p}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}\gamma$,

12) Dowieść, że $\Delta = \frac{2p^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}$.

13) Jeżeli h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości trójkąta, odpowiadające podstawom a, b i c, natenczas

$$h_a h_b h_c = \frac{8p^3 r^3}{abc}.$$

14) Dowieść, że powierzchnia trójkąta wyraża się wzorem

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha).$$

15) Dowieść, że powierzchnia trójkąta $= \frac{a^2 - b^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

16) Jeżeli w sześciokącie foremnym poprowadzimy proste, łączące pierwszy jego wierzchołek z trzecim, drugi z czwartym i t. d., to odcinki tych pro-

stych utworzą wewnętrzny sześciokąt foremny. Gdy w nim znowu poprowadzimy podobne proste, otrzymamy nowy sześciokąt foremny i t. d. Dowieść, że summa powierzchni wszystkich sześciokątów foremnych w ten sposób utworzonych jest równa $\frac{S}{2}$, gdzie S oznacza powierzchnią danego sześciokąta foremnego.

17) Dowieść, że

$$r_a r_b r_c = r^3 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma.$$

18) Dowieść, że summa średnic koła stycznego wewnętrznie do trójkąta i opisanego na trójkącie jest równa

$$a \operatorname{cotg} \alpha + b \operatorname{cotg} \beta + c \operatorname{cotg} \gamma.$$

19) Jeżeli z wierzchołków ABC trójkąta spuścimy prostopadłe na boki przeciwległe i spodki $A'B'C'$ tych prostopadłych połączymy linijami prostemi, utworzy się trójkąt $A'B'C'$, w którym $A'B' = R \sin 2\gamma$, $B'C' = R \sin 2\alpha$- $A'C' = R \sin 2\beta$.

20) Jeżeli utworzymy trójkąt przez połączenie z sobą prostemi spodków prostopadłych, spuszczonych z wierzchołków danego trójkąta na boki przeciwległe, a przez R i R_1 oznaczymy promienie kół opisanych na danym trójkącie i na nowoutworzonym, zaś przez r_1 promień koła wpisanego w ten ostatni trójkąt, natenczas

$$R_1 = \frac{1}{2} R, \quad r_1 = 2R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

21) Jeżeli trzy boki trójkąta a, b, c tworzą postęp arytmetyczny, tak prostopadła, spuszczona z wierzchołka na bok średni trójkąta jak i promień koła stycznego zewnętrznie do tegoż boku są równe trzy razy wziętemu promieniowi koła wpisanego wewnętrznie to jest, że $h_b = r_b = 3r$.

22) Odległości środka koła wpisanego w dany trójkąt od środków kół stycznych zewnętrznie wyrażają się przez $a \sec \frac{\alpha}{2}$, $b \sec \frac{\beta}{2}$, $c \sec \frac{\gamma}{2}$.

23) Dowieść, że powierzchnia trójkąta jest równa

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \left(\frac{a^2}{\sin\alpha} + \frac{b^2}{\sin\beta} + \frac{c^2}{\sin\gamma} \right).$$

24) Dowieść, że dla trójkąta prostokątnego promień koła wpisanego równa się połowie przewyżki summy dwu boków, przyległych kątowi prostemu nad przeciwprostokątną.

25) Dowieść, że odległość między środkami kół: wpisanego wewnętrznie w dany trójkąt i opisanego na trójkącie jest równa $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

200. Czworokąt wpisany w koło.

Mając dane cztery boki czworokąta wpisanego w koło, znaleść jego kąty, powierzchnią, przekątne i promień koła opisanego.

Obliczenie kątów. Niech a, b, c, d będą bokami AB, BC, CD i DA czworokąta ABCD wpisanego w koło (fig. 39) a α, β, γ i δ jego kątami, których wierzchołkami są A, B, C i D. Poprowadźmy przekątne BD i AC. Z trójkątów ABD i BDC, mamy

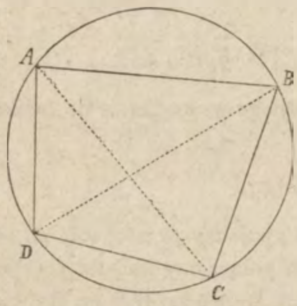

Fig. 39.

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma.$$

Ponieważ kąty α i γ są spełniającemi się, przeto $\cos\gamma = -\cos\alpha$, zatym z porównania powyższych wyrażeń, mamy

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

stąd $$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}.$$

Za pomocą tego wzoru znajdziemy kąt α. Lecz ten wzór nie jest dogodny do rachunku logarytmami, przeto przekształcimy go na inny wprowadzając kąt $\frac{\alpha}{2}$. Wiemy, że

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\ \text{zatym}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad+bc)} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{2(ad+bc)},\ \text{stąd}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c+d-a)(a+b+c-d)}{ad+bc}},$$

podobnież

$$1 + \cos\alpha = \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)}$$

$$= \frac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{2(ad+bc)},$$

stąd

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+d+b-c)(a+d+c-b)}{ad+bc}}.$$

Jeżeli przez $2p$ oznaczymy obwód czworokąta

$$a + b + c + d = 2p, \text{ natenczas}$$

$$b + c + d - a = 2(p - a),$$

$$a + c + d - b = 2(p - b),$$

$$a + b + d - c = 2(p - c),$$

$$a + b + c - d = 2(p - d),$$

a zatym

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

stąd

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}, \text{ podobnież}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

Znajdziemy więc kąty α i β następnie zaś kąty γ i δ, które są spełnieniami α i β.

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, koniecznym i dostatecznym będzie, aby znalezione wartości $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ były rzeczywiste, czyli potrzeba, aby było

$$\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)} > 0,$$

albo żeby iloczyn $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ był dodatny. Warunkiem potemu koniecznym i dostatecznym jest, aby, albo $p-a$, $p-b$, $p-c$, $p-d$ były wszystkie dodatne, albo, aby dwie z tych wielkości były dodatne pozostałe zaś ujemne, albo, aby wszystkie cztery były ujemne. Lecz, dwie z tych wielkości nie mogą być jednocześnie ujemne, albowiem jeżelibyśmy mieli $p-a<0$ i $p-b<0$, wtedy $2p-a-b<0$, zatym $c+d<0$, co jest niemożebnym; zatym powyższe wielkości muszą być dodatne. Warunkami więc możebności zadania są

$$p-a>0, \; p-b>0, \; p-c>0, \; p-d>0,$$

czyli co na jedno wychodzi, że każdy bok czworokąta powinien być mniejszym od summy trzech pozostałych.

Obliczenie powierzchni. Powierzchnia Δ czworokąta ABCD jest summą powierzchni trójkątów ABD i BCD. Lecz powierzchnia trójkąta

$ABD = \frac{1}{2} ad \sin\alpha$, powierzchnia trójkąta $BCD = \frac{1}{2} bc \sin\gamma$, a że kąt α i γ są spełniającemi się, przeto wstawy ich są równe i mamy

$$\Delta = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin\alpha = (ad + bc)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

podstawiając za $\sin\frac{1}{2}\alpha$ i $\cos\frac{1}{2}\alpha$, wyrażenia powyżej znalezione znajdziemy

$$\Delta = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Obliczenie przekątnych. Rugując kąt α z równań

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

znajdziemy

$$\overline{BD}^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{bc + ad},$$

czyli

$$\overline{BD}^2 = \frac{ab(ac + bd) + cd(ac + bd)}{bc + ad},$$

albo nakoniec

$$\overline{BD}^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad},$$

podobnież znajdziemy

$$\overline{AC}^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd},$$

Z porównania dwu ostatnich wzorów przychodzimy do godnego uwagi twierdzenia, pokazującego związek między przekątnemi i bokami czworokąta wpisanego w koło. Jakoż, z pomnożenia tych równań stronami odpowiedniemi, znajdziemy $\overline{BD}^2 \times \overline{AC}^2 = (ac + bd)^2$, czyli

$$BD \times AC = ac + bd.$$

W czworokącie wpisanym w koło iloczyn jego przekątnych jest równy summie iloczynów boków przeciwległych (tw. Ptolemeusza). Dzieląc zaś przez siebie powyższe równania stronami odpowiedniemi znajdziemy

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{(ad + bc)^2}{(ab + cd)^2}, \text{ stąd}$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

W czworokącie wpisanym w koło stosunek dwu przekątnych jest równy stosunkowi summy iloczynów par boków schodzących się z sobą w wierzchołkach pierwszej przekątnej, do takiejże summy, odpowiadającej drugiej przekątnej.

Obliczenie promienia koła opisanego. Jeżeli przez R oznaczymy promień koła opisanego, z trójkąta ABD otrzymamy

$$R = \frac{BD}{2 \sin \alpha},$$

lecz

$$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}},$$

zaś

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = 2 \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc},$$

zatym

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

ZADANIA SZCZEGÓLNE, ODNOSZĄCE SIĘ DO ROZWIĄZYWANIA TRÓJKĄTÓW.

201. W ustępie o zastosowaniach funkcyj trygonometrycznych do rozwiązywania trójkątów, zajmowaliśmy się rozwiązywaniem trójkątów w przypadkach, gdy są dane trzy z jego sześciu elementów. Obecnie chcemy pokazać, w jaki sposób rozwiązujemy trójkąty, to jest znajdujemy jego elementy, gdy pośród danych wielkości są dane nie same elementy trójkąta, ale inne wielkości, odnoszące się do szukanego trójkąta, jak np. jego obwód, powierzchnia i t. p. Zajmiemy się niektóremi z takich zadań.

202. *Zadanie 1-sze. Mając bok trójkąta, kąt doń przyległy, tudzież summę lub różnicę boków pozostałych, rozwiązać trójkąt.*

Rozwiązanie 1-sze.

Przypadek 1-szy. Niech będą dane a, β i $b + c = s$. Szukamy naprzód kąta γ. Na zasadzie wzorów Mollweidego (art. 176-ty), mamy

$$a : s = \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

stąd

$$s + a : s - a = \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma : \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta : \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma,$$

zatym

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{s-a}{s+a} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta.$$

Z tego wzoru znajdziemy kąt γ, mając zaś kąty β i γ i bok a, znajdziemy wiadomym sposobem pozostałe elementy trójkąta.

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, koniecznym i dostatecznym będzie, aby kąt $\frac{\gamma}{2}$, otrzymany z powyższego wzoru, był kątem ostrym, a tymsamym, aby styczna połowy kąta γ była dodatna. Temu warunkowi stanie się zadość, gdy $s > a$.

Możemy też drogą gieometryczną przyjść do rozwiązania zadania. Przypuśćmy, że trójkąt ABC (fig. 40) rozwiązuje zadanie. W tym trójkącie wiadomy jest bok $BC = a$, kąt $ABC = \beta$, tudzież summa boków pozostałych $AB + AC = s$. Przedłużmy bok BA i na przedłużeniu od punktu A odetnijmy $AD = AC$, wtedy $BD = s$. W trójkącie BCD, będziemy mieli wiadome dwa boki BC i BD, tudzież kąt DBC między temiż bokami zawarty. Wykreślamy więc naprzód trójkąt BCD, a następnie z punktu C przy linii CD kreślimy kąt ACD = kątowi ADC; do czego przyjdziemy, jeżeli ze środka linii CD poprowadzimy prostopadłą do boku CD aż do przecięcia się z liniją BD i punkt przecięcia A połączymy z punktem C. Jeżeli prostopadła wyprowadzona ze środka boku CD przecina liniją BD w punkcie A, położonym między punktami B i D, trójkąt ABC będzie szukanym trójkątem. Aby jednak prostopadła wyprowadzoną ze środka boku CD do tegoż boku przecinała bok BD w punkcie A, położonym między punktami B i D, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, aby $s > a$. Przychodzimy więc do warunku powyżej otrzymanego.

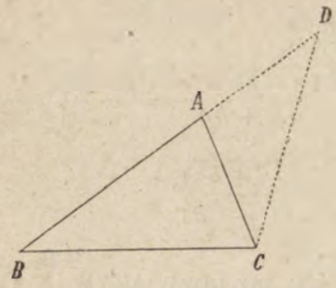

Fig. 40.

Przypadek 2-gi. Niech będą dane a, β i $b - c = l$.

Na zasadzie wzorów Mollweidego, mamy

$$a : b - c = \sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

$$a : l = \sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

skąd

$$a + l : a - l = \sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma : \cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma,$$

$$a + l : a - l = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta : \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma,$$

stąd $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{a-l}{a+l}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta.$$

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, potrzeba, aby $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma > 0$, skąd otrzymujemy $a > l$. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, z powyższego wzoru znajdziemy kąt γ, następnie pozostałe elementy trójkąta, na zasadach wyłożonych w art. 184-ym.

Abyśmy jednak z otrzymanej wielkości kąta γ, tudzież danego boku a i kąta β, mogli utworzyć trójkąt, koniecznym i dostatecznym warunkiem będzie, aby $\beta + \gamma < 180^0$, skąd $\frac{1}{2}\gamma < 90^0 - \frac{\beta}{2}$; że zaś kąty $\frac{\gamma}{2}$ i $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ są mniejsze od 90^0, przeto być powinno $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma < \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$, czyli $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma < 1$. Po podstawieniu wartości $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ otrzymamy $\frac{a-l}{a+l}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta < 1$, czyli $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta < \frac{a+l}{a-l}$. Ponieważ $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$, przeto warunek poprzedzający wychodzi na $\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} < \frac{a+l}{a-l}$, że zaś mianowniki są dodatne, przeto z tej nierówności otrzymujemy $l + a\cos\beta > 0$, czyli $l > -a\cos\beta$. Lecz według założenia $a > l$, przeto warunkiem koniecznym i dostacznym jest

$$a > l > -a\cos\beta.$$

Jeżeli $\beta < 90^0$, otrzymujemy jedyny warunek $a > l$, jeżeli zaś $\beta > 90^0$ potrzeba dwu warunków, aby zadanie było możebne do rozwiązania.

Jeżeli $b - c = -l$, gdzie l oznacza liczbę dodatną, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{a+l}{a-l}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta.$$

Abyśmy mogli otrzymać możebną wartość $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$, potrzeba, aby wyrażenie było dodatne, to jest potrzeba, aby $a > l$. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, kąt γ znajdziemy z powyższego wzoru, pozostałe zaś elementy trójkąta, na zasadach wyłożonych w art. 184-ym. Lecz, abyśmy mogli, z otrzymanego kąta γ i danego boku a i kąta β, utworzyć trójkąt, koniecznym i dostatecznym warunkiem jest, aby $\beta + \gamma < 180^0$. Postępując drogą powyżej wskazaną, znajdziemy, że wtedy być powinno $l < a\cos\beta$. Zważmy wreszcie, że według założenia $b - c = -l$, zatym $b < c$, a więc kąt β jest ostry, jego dostawa jest dodatna i < 1, przeto warunek $l < a\cos\beta$ obejmuje warunek $l < a$. Otrzymujemy więc jedyny warunek $l < a \cos\beta$, który jest konieczny i dostateczny, aby zadanie było możebne do rozwiązania.

Możemy też drogą gieometryczną przyjść do rozwiązania zadania. Przypuśćmy naprzód, że $b > c$ i że trójkąt ABC (fig. 41) rozwiązuje zadanie. W tym trójkącie mamy dany bok $BC = a$, kąt $ABC = \beta$ i różnicę boków $AC - AB = l$. Na przedłużeniu linii AB, od punktu A odetnijmy $AD = AC$, wtedy $BD = AC - AB = l$. W trójkącie BDC mamy wiadome dwa boki $BC = a$ i $BD = l$, tudzież kąt między niemi zawarty $CBD = 180^0 - \beta$; możemy przeto wykreślić ten trójkąt. Następnie przy linii DC w punkcie C kreślimy kąt $ACD = ADC$, skutkiem czego otrzymamy szukany trójkąt ABC. Trójkąt w ten sposób wykreślony będzie o tyle odpowiadał warunkom zadania, o ile ramię CA kąta DCA przecina przedłużenie boku BD po nad punktem B. Aby to miało miejsce potrzeba, aby kąt BDC, jako będący jednym z dwu kątów równych trójkąta równoramiennego DAC, był ostry, nadto, aby kąt DCA, który jest równy ADC był większy od kąta BCD; warunek ten wymaga, aby $a > l$. Zatym, warunkami koniecznemi i dostatecznemi, otrzymanemi drogą gieometryczną, aby zadanie było możebne, są

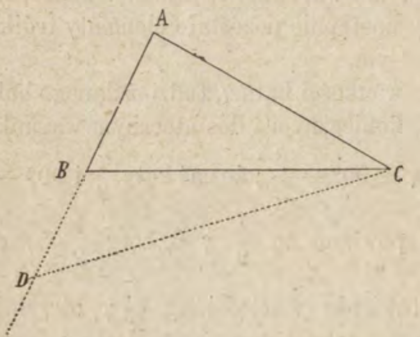

Fig. 41.

$$a > l \text{ i kąt } ADC < 90^0.$$

Łatwo okazać, że warunki te są zgodne z warunkami powyżej otrzymanemi. Jakoż, z trójkąta DBC, mamy

$$\frac{a}{\sin BDC} = \frac{l}{\sin DCB} = \frac{l}{\sin(\beta - BDC)} = \frac{l}{\sin\beta \cos BDC - \cos\beta \sin BDC},$$

stąd
$$\operatorname{tg} BDC = \frac{a \sin\beta}{l + a\cos\beta}.$$

Lecz z warunku poprzedzającego mamy $ADC = BDC < 90^0$, zatym $\operatorname{tg} BDC > 0$, a że a i $\sin\beta$ są dodatne, przeto mamy warunek $l + a\cos\beta > 0$, albo $l > -a\cos\beta$. Przychodzimy więc do warunku powyżej otrzymanego.

Przypuśćmy teraz, że $b < c$ i że trójkąt ABC (fig. 42) zadośćczyni warunkom zadania. Odetnijmy na boku AB odcinek $AD = AC$, wtedy odcinek $BD = AB - AC = l$. W trójkącie BDC mamy wiadome dwa boki $BC = a$ i $BD = l$ i kąt β między niemi zawarty, możemy więc ten trójkąt wykreślić. Następnie przy linii CD w punkcie C nakreślmy kąt $DCA = ADC$, skutkiem czego utworzy nam się trójkąt szukany ABC, o ile ramię CA kąta, nakreślonego przy linii CD, przecina przedłużenie boku BD ponad punktem D. Aby to mogło mieć miejsce, potrzeba, aby kąt ADC, który jest jednym z kątów równych trójkąta równoramiennego ACD, był ostry, a tymsamym aby kąt BDC był rozwarty, zatym kąt $BDC > 90^0$. Aby temu warunkowi stawało się zadość, potrzeba, aby $a > l$, gdyż w trójkącie BDC kąt BDC jest największy. Warunek zatym $BDC > 90^0$ jest konieczny i dostateczny.

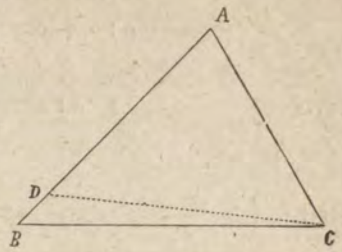

Fig. 42.

Łatwo z tego warunku wyprowadzić warunek $l < a \cos\beta$, otrzymany drogą trygonometryczną. Jakoż, z trójkąta BDC, mamy

$$\frac{a}{\sin BDC} = \frac{l}{\sin DCB} = \frac{l}{\sin(ADC - DBC)} = \frac{l}{\sin BDC \cos\beta + \cos BDC \sin\beta},$$

stąd
$$\operatorname{tg} BDC = \frac{a \sin\beta}{1 - a\cos\beta},$$

warunek $BDC > 90^0$ wymaga, aby $\operatorname{tg} BDC < 0$, a że $\sin\beta > 0$, przeto być powinno $l < a\cos\beta$.

Rozwiązanie 2-gie. Bardzo proste rozwiązanie zadania, w obu przypadkach otrzymujemy za pomocą wzorów (4) art. 175-go. Mamy bowiem

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

stąd otrzymamy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{p-a}{p} \text{ i } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta = \frac{p-b}{p-c}.$$

Gdy daną jest summa $b + c = s$, będą wiadome $p = \frac{1}{2}(s+a)$ i $p-a$; gdy daną jest różnica $b - c = l$, będą wiadome $p - b$ i $p - c$. W pierwszym przypadku wzór pierwszy, w drugim zaś wzór drugi pozwolą znaleść kąt γ. Mając zaś kąt γ, pozostałe elementy trójkąta znajdziemy na zasadach, wyłożonych w art. 184-ym.

203. *Zadanie 2-gie. Mając dany bok trójkąta, kąt przeciwległy, tudzież summę lub różnicę dwu boków pozostałych, rozwiązać trójkąt.*

Przypadek 1-szy. Niech będą dane a, α i $b+c=s$.

Na mocy wzorów Mollweidego (art. 176-ty), mamy

$$a : b+c = \sin\frac{1}{2}\alpha : \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

czyli

$$a : s = \sin\frac{1}{2}\alpha : \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

stąd

$$\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{s\,.\sin\frac{1}{2}\alpha}{a}.$$

Przychodzimy do wzoru, który nam pozwala znaleść $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, a ponieważ wiadomą jest nam summa $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, przeto znajdziemy β i γ, a następnie pozostałe elementy trójkąta.

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, potrzeba przedewszystkim, aby $\frac{s\,.\sin\frac{1}{2}\alpha}{a}$, jako wyobrażające $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ było mniejsze od jedności. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość kąty β i γ, otrzymujemy za pomocą znanych wartości $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ i $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$. Abyśmy jednak mogli otrzymać kąty β i γ, potrzeba, aby $\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, czyli $\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$. Ponieważ oba te kąty są ostre, przeto $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) > \cos\left(90^0 - \frac{1}{2}\alpha\right)$, czyli $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) > \sin\frac{1}{2}\alpha$; że zaś $\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{s}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha$, przeto być powinno $a < s$. Zadanie więc będzie możebne do rozwiązania, gdy zadość się stawać będzie następującym warunkom

$$s\,.\sin\frac{1}{2}\alpha < a < s.$$

Jeżeli tym warunkom staje się zadość, otrzymujemy wartości β i γ dodatne, których summa jest spełnieniem kąta α, i mieć będziemy tylko jedno rozwiązanie.

Rozwiążemy toż samo zadanie gieometrycznie i pokażemy, że warunki możebności zadania, wyprowadzone drogą gieometryczną, będą też same, jakieśmy powyżej otrzymali.

Przypuśćmy, żeśmy zadanie rozwiązali i że trójkąt ABC (fig. 43), zadośćczyni warunkom zadania. Wiadome nam są $BC = a$, kąt $CAB = \alpha$ summa boków $AB + AC = s$. Na przedłużeniu linii BA weźmy odcinek AD równy AC i utwórzmy trójkąt DCB. W tym trójkącie mamy bok $BC = a$, $BD = s$, tudzież kąt $CDA = \frac{\alpha}{2}$. Możemy więc nakreślić trójkąt ADC. W tym celu bierzemy kąt $BDC = \frac{1}{2}\alpha$, na ramieniu DB tego kąta $DB = s$; następnie z punktu B, jako ze środka, promieniem równym a, zakreślamy okrąg koła. Niech C i C′ będą punktami przecięcia się tegoż okręgu koła z ramieniem CD. Jeżeli w punkcie C nakreślimy przy linii CD kąt $DCA = ADC$, trójkąt ABC będzie zadośćczynił warunkom zadania. Podobnież, jeżeli w punkcie C′ nakreślimy kąt $DC'A'$ równy kątowi BDC', otrzymamy trójkąt $A'B'C'$, który również będzie zadośćczynił warunkom zadania. Zdawałoby się więc, że dwa trójkąty zadośćczynią warunkom zadania i skutkiem tego mamy dwa rozwiązania. Lecz trójkąty ABC i $A'BC'$ są równe, a tymsamym dają tożsamo rozwiązanie. Jakoż, według wykreślenia $BC = BC'$, kąt $BAC =$ kątowi $BA'C$, jako kąty, odpowiadające względem dwu równoległych, przeciętych trzecią sieczną, wreszcie kąty ABC i $BC'A'$ są także równe, gdyż $ABC = BCC' - BDC$, $BC'A' = BC'C - A'C'D$, że zaś kąt $BCC' = BC'C$, z przyczyny, że boki BC i BC′ są równe, kąt zaś $A'C'D = BDC$ według wykreślenia, przeto kąty ABC i $B'C'A$ są równe. Stąd wnosimy, że i pozostałe kąty są równe, zatym i trójkąty mające równe boki przyległe kątom równym są równe. Zadanie więc, jeżeli jest możebne, ma jedno rozwiązanie.

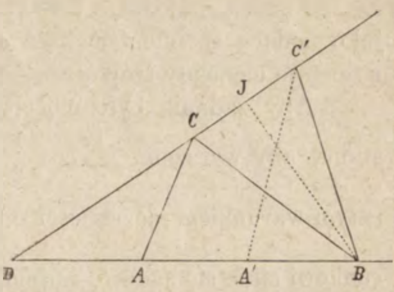

Fig. 43.

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, potrzeba, aby okrąg koła zakreślony z punktu B, jako ze środka promieniem $= a$, przecinał ramię DC kąta BDC, czyli potrzeba, aby $a < BD$, a większe od prostopadłej BI, spuszczonej z punktu B na ramię CD. Że zaś $BD = s$, $BI = s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, przeto zadanie będzie możebne do rozwiązania, gdy $s \cdot \sin\frac{\alpha}{2} < a < s$.

Przypadek 2-gi. Niech będą dane a, α i $b - c = l$.

Na mocy wzorów Mollweidego (art. 176-ty), mamy

$$a : b - c = \cos\frac{1}{2}\alpha : \sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

stąd $$\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{l}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Z tego wzoru znajdziemy $\beta-\gamma$, a że znaną nam jest summa kątów $\beta+\gamma$, jako będąca spełnieniem kąta α, przeto znajdziemy β i γ, a następnie pozostałe elementy trójkąta.

Aby zadanie było możebne do rozwiązania, potrzeba przedewszystkim, aby wyrażenie $\frac{l}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha$, było mniejsze od jedności. Pierwszym zatym warunkiem możebności zadania jest $a > l\cos\frac{\alpha}{2}$. Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, możemy znaleść kąt $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, a następnie kąty β i γ. Abyśmy jednak mogli znaleść te kąty, potrzeba, aby $\frac{\beta-\gamma}{2}<\frac{\beta+\gamma}{2}$, stąd $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}$, że zaś $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{l}{a}\cos\frac{\alpha}{2}$, przeto być powinno $a > l$. Jeżeli temu warunkowi stawać się będzie zadość, będzie również się stawać zadość i warunkowi pierwszemu. Jedynym zatym warunkiem możebności zadania będzie $a > l$.

Rozwiążemy toż zadanie gieometrycznie. Przypuśćmy, żeśmy zadanie rozwiązali i trójkąt ABC (fig. 44) jest trójkątem szukanym.

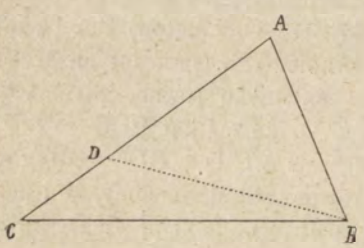

Fig. 44.

W tym trójkącie mamy wiadome $BC=a$, kąt $CAB=\alpha$ i różnicę boków $AC-AB=l$. Na boku większym AC trójkąta weźmy $AD=AB$, wtedy odcinek CD będzie równy l. W trójkącie CDB, mamy bok $BC=a$, bok $CD=l$, nadto kąt $CDB=CAB+ABD$; że zaś summa kątów $ABD+ADB$, czyli dwa razy wzięty kąt ABD jest spełnieniem kąta $CAB=\alpha$, zatym kąt $ABD=90^0-\frac{\alpha}{2}$, kąt zaś $CDB=\alpha+90^0-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}+90^0$. Możemy przeto wykreślić trójkąt CDB, w którym mamy dane dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy, a ponieważ kąt $90^0+\frac{\alpha}{2}$ jest rozwarty, otrzymujemy przeto jedno rozwiązanie. Mając zaś wykreślony trójkąt BDC, przyjdziemy do trójkąta szukanego, gdy w punkcie B przy linii BD nakreślimy kąt $ABD=BDA$ i ramię BA przedłużymy aż do przecięcia się z przedłużeniem boku CD.

204. *Zadanie 3-cie. Mając obwód trójkąta i dwa jego kąty, rozwiązać trójkąt.*

Niech będą dane $a + b + c = 2p$ i kąty β i γ. Szukamy naprzód jednego z boków trójkąta np. boku a. Wiemy, że

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \text{ stąd}$$

$$a : 2p = \sin\alpha : \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

lecz wiemy, że

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ przeto}$$

$$a : 2p = \sin\alpha : 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ stąd}$$

$$a = \frac{2p\sin\alpha}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

a że $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, przeto

$$a = \frac{p\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{p\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

W podobny sposób możemy znaleść pozostałe boki trójkąta.

Wzór powyższy pozwala nam wykreślić trójkąt, odpowiadający danym warunkom. Jakoż, wykreślmy trójkąt DCE (fig. 45), którego bokiem DE jest obwód $2p$, trójkąta szukanego, kąty zaś $CDE = \frac{1}{2}\alpha$, i $CED = \frac{1}{2}\beta$, natenczas

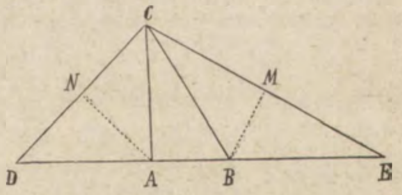

Fig. 45.

$$CE = \frac{2p\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \text{ zatym}$$

$$a = \frac{\frac{1}{2}CE}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

Jeżeli linią CE podzielimy na dwie równe części i z punktu M wyprowadzimy prostopadłą do CE to ona przetnie bok DE w punkcie B, i będzie $BE = a$; podobnież znajdziemy $DA = b$. Łącząc punkty A i B z punktem C, otrzymamy trójkąt szukany ABC.

205. *Zadanie 4-te. Mając dany bok trójkąta, różnicę dwu kątów przyległych i summę dwu boków pozostałych, rozwiązać trójkąt.*

Niech będą dane bok a, $\beta - \gamma = \delta$ i $b + c = s$.

Na zasadzie wzorów Mollweidego (art. 176-y), mamy

$$a : b + c = \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

stąd

$$a : s = \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

$$\cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{a \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{s} = \frac{a \cos \frac{1}{2}\delta}{s}.$$

Z tego wzoru znajdziemy $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, a że znamy $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, przeto znajdziemy kąty β i γ i zadanie sprowadzimy do zwykłych przypadków rozwiązywania trójkątów. Możemy także za pomocą wzoru powyższego przyjść do wykreślenia trójkąta szukanego. Jakoż, wzór powyższy możemy napisać w kształcie

$$a : s = \sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right] : \sin\left[90^0 + \frac{1}{2}\delta\right].$$

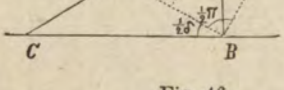

Fig. 46.

Jeżeli utworzymy trójkąt BCD (fig. 46), w którym bok $BC = a$, kąt $CBD = 90^0 + EBC = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$ i $CD = s$, natenczas na mocy powyższego wzoru kąt $CDB = 90^0 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, a że $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = DEB$, zatym kąt

$$DCB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \gamma.$$

Jeżeli więc weźmiemy kąt $ABE = AEB$, do czego przyjdziemy wyprowadzając ze środka boku BE prostopadłą do EB, aż do przecięcia z bokiem CD i połączymy punkt przecięcia A z punktem B, natenczas kąt $ABC = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \beta$ i trójkąt ABC będzie trójkątem szukanym.

206. *Zadanie 5-te. Mając podstawę trójkąta, odpowiadającą jej wysokość, tudzież summę dwu boków pozostałych, rozwiązać trójkąt.*

Niech będą dane a, h_a i $b + c = s$. Szukajmy kąta α przeciwległego danej podstawie.

Jeżeli przez Δ oznaczymy powierzchnią trójkąta, natenczas

$$bc \sin\alpha = 2\Delta = ha, \text{ stąd}$$

$$bc = \frac{ha}{\sin\alpha}.$$

Lecz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha)$, zatym

$$a^2 = s^2 - 2ha\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = s^2 - 2ha \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha,$$

stąd

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{2ha}{s^2 - a^2}.$$

Możemy przy pomocy tego wzoru wykreślić trójkąt szukany. W tym celu, załóżmy $s^2 = an$, wtedy $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = h : \frac{1}{2}(n - a)$.

Utwórzmy trójkąt prostokątny BEC (fig. 47), w którym jednym bokiem jest $BC = a$, przeciwprostokątną $BE = s$, z punktu E popro-

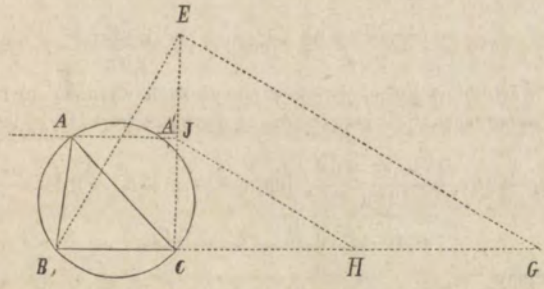

Fig. 47.

wadźmy prostopadłą do BE, aż do przecięcia z przedłużeniem boku BC w punkcie G i podzielmy liniją GC w punkcie H na dwie równe części, natenczas $BG = n$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{h}{CH}$.

Na linii CE weźmiemy $CI = h$, natenczas z trójkąta ICH, mieć będziemy

$$\operatorname{tg} IHC = \frac{CI}{CH} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha, \text{ stąd wypada, że kąt } IHC = \frac{1}{2}\alpha.$$

Jeżeli więc na linii BC jako na cięciwie opiszemy koło, w któreby wpisany był kąt $= 2IHC$, a przez punkt I poprowadzimy równoległą do BC, linija ta przetnie koło w dwu punktach A i A' skutkiem czego, otrzymamy dwa trójkąty ABC i A'BC, zadośćczyniące danemu zadaniu.

207. *Zadanie 6-te. Mając dane dwa boki trójkąta, tudzież długość dwusiecznej kąta, między niemi zawartego, rozwiązać trójkąt.*

Dane boki a, b tudzież dwusieczna kąta γ, którą oznaczmy przez w_c.

Jeżeli przez c_1 i c_2 oznaczymy odcinki powstałe na boku c przez dwusieczną kąta γ, wtedy mieć będziemy *)

---

*) Związek, jaki zachodzi między bokami trójkąta i odcinkami, powstałemi na boku trzecim przez dwusieczną kąta, między danemi bokami zawartego, jest szczególnym przypadkiem twierdzenia *Stewarta*, które się odnosi do jakiejkolwiek poprzecznej poprowadzonej przez wierzchołek trójkąta. Pokażemy, w jaki sposób długości poprzecznych, poprowadzonych przez wierzchołek kąta, do boku przeciwległego, wyrażają się przez boki przyległe temuż kątowi i odcinki powstałe na boku trzecim przez też poprzeczne. Niech będzie trójkąt ABC, z wierzchołka C poprowadźmy jakąkolwiek prostą CD, która na boku AB odetnie dwa odcinki $AD = c_1$ i $BD = c_2$, jeżeli długość CD oznaczymy przez w_c, natenczas z trójkątów ADC i BDC, mieć będziemy

$$w_c{}^2 = b^2 + c_1{}^2 - 2bc_1 \cos\alpha, \quad \text{i} \quad w_c{}^2 = a^2 + c_2{}^2 - 2ac_2 \cos\beta.$$

Jeżeli poprzeczna CD poprowadzona jest zewnątrz trójkąta, wtedy

$$w_c{}^2 = b^2 + c_1{}^2 - 2bc_1 \cos\alpha, \quad \text{i} \quad w_c{}^2 = a^2 + c_2{}^2 - 2ac_2 \cos(180^0 - \beta).$$

Lecz z danego trójkąta

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Podstawiając te wartości w którekolwiek z powyższych wyrażeń w_c i pamiętając, że w przypadku, gdy poprzeczna jest poprowadzona zewnątrz trójkąta, c_2 jest ujemne, znajdziemy

$$w_c{}^2 = b^2 + c_1{}^2 - 2bc_1 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{lub} \quad w_c{}^2 = a^2 + c_2{}^2 - 2ac_2 \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

stąd

$$w_c{}^2 = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2 - c c_1 c_2}{c},$$

podobnież znajdziemy

$$w_a{}^2 = \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2 - a a_1 a_2}{a}, \quad w_b{}^2 = \frac{a^2 b_1 + c^2 b_2 - b b_1 b_2}{b}.$$

Takie są wyrażenia na długości poprzecznych podanych przez Stewarta. Jeżeli w szczególności linije poprzeczne dzielą kąty na dwie równe części wtedy, z przyczyny, że $c_1 = \dfrac{bc}{a+b}$, $c_2 = \dfrac{ac}{a+b}$, mamy $w_c{}^2 = ab - c_1 c_2$. Jeżeli linije poprzeczne dzielą boki przeciwległe na dwie równe części. wtedy $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2} c$, a jeżeli oznaczymy długości poprzecznych przez m_a, m_b i m_c, otrzymamy

$$m_c{}^2 = \frac{a^2 \frac{c}{2} + b^2 \frac{c}{2} - c \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}{c}, \quad \text{a stąd} \quad a^2 + b^2 = 2m_c{}^2 + \frac{c^2}{2}.$$

$$w_c^2 = ab - c_1 c_2, \quad c_1 : c_2 = b : a, \quad c_1 = \frac{bc}{a+b}, \quad c_2 = \frac{ac}{a+b},$$

zatym

$$w_c^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2},$$

stąd znajdziemy

$$c = (a+b)\sqrt{\frac{ab - w_c^2}{ab}}.$$

Dla znalezienia kąta γ, mamy $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{b^2 + w_c^2 - c_1^2}{2bw_c}$, a podstawiając zamiast c_1 wartość, otrzymaną z powyższego wyrażenia po podstawieniu wartości c, otrzymamy $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{(a+b)w_c}{2ab}$, stąd znajdziemy kąt γ, a następnie pozostałe elementy trójkąta.

208. *Zadanie 7-me. Rozwiązać trójkąt, mając dane trzy jego wysokości.*

Jeżeli oznaczymy przez h_a, h_b i h_c wysokości szukanego trójkąta, odpowiadające bokom a, b i c, natenczas

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2\Delta = 2pr, \text{ (art. 197-my)}$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta, r promień koła wpisanego wewnętrznie.

Z tego wzoru otrzymamy

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{2p}{\frac{1}{r}}.$$

Te równania pokazują nam, że trójkąt szukany ABC będzie podobny do trójkąta A′B′C′, mającego za boki odwrotności wysokości danego trójkąta; możemy więc na zasadzie art. 192-go, znaleść kąty tego trójkąta. I tak, kładąc $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{p_1}$ i

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_c}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{p_1}}} = \frac{1}{r_1},$$

znajdziemy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_a}} \text{ i podobne wzory na } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \text{ i } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

Starajmy się teraz znaleść boki trójkąta. Ponieważ trójkąty ABC i A′B′C′ są podobne, przeto ich powierzchnie są w stosunku kwadratów z boków odpowiednich, to jest

$$\frac{pr}{\frac{1}{p_1 r_1}} = \frac{a^2}{\frac{1}{h_a{}^2}}, \text{ że zaś } pr = \frac{a h_a}{2}, \text{ przeto}$$

$$a h_a = b h_b = c h_c = \frac{p_1 r_1}{2},$$

zatym

$$a = \frac{p_1 r_1}{2 h_a}, \quad b = \frac{p_1 r_1}{2 h_b}, \quad c = \frac{p_1 r_1}{2 h_c}.$$

Z rozwiązania tego zadania możemy wyprowadzić powierzchnią trójkąta, promienie kół: wpisanego wewnętrznie i opisanego na trójkącie w funkcyi trzech wysokości trójkąta.

Jakoż, równanie

$$a h_a = b h_b = c h_c = \frac{p_1 r_1}{2}, \text{ daje}$$

$$2\Delta = a h_b = \frac{p_1 r_1}{2};$$

podstawiając wartość r_1, będziemy mieli

$$\Delta = \frac{\frac{p_1}{4}\sqrt{\frac{1}{p_1}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{h_c}\right)}},$$

czyli

$$\Delta = \frac{p_1{}^2}{4}\sqrt{\frac{h_a h_b h_c}{(h_a - p_1)(h_b - p_1)(h_c - p_1)}}.$$

W celu znalezienia promienia koła opisanego na trójkącie, zważmy, że

$$a h_a \,.\, b h_b \,.\, c h_c = 8\Delta^3, \text{ zatym}$$

$$\frac{abc}{4\Delta} = \frac{2\Delta^2}{h_a h_b h_c} = \mathrm{R},$$

stąd

$$\mathrm{R} = \frac{p_1{}^4}{8(h_a - p_1)(h_b - p_1)(h_c - p_1)};$$

zważywszy wreszcie, że $2p = a + b + c$, nadto, że

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{2p}{\frac{1}{r}},$$

otrzymamy
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

209. *Zadanie 8-me.* (Pascala). *Mając daną podstawę trójkąta, kąt przeciwległy i stosunek różnicy dwóch boków pozostałych do wysokości trójkąta, rozwiązać trójkąt.*

Niech będą dane, bok a, kąt α i stosunek różnicy boków $b-c$ do wysokości h_a równy m. Wiemy, że
$$\Delta=\frac{1}{2}a h_a=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha},$$
stąd
$$h_a=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Na zasadzie zaś wzorów Mollweidego (art. 176-ty), mamy
$$b-c=\frac{a\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

zatym
$$\frac{b-c}{h_a}=m=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

stąd
$$m\sin\beta\sin\gamma=2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

Lecz, wiemy, że
$$\sin\beta\sin\gamma=\sin^2\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma),$$
przeto
$$m\sin^2\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-m\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

a że $\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\cos\left(90^0-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)=\cos\frac{1}{2}\alpha,$

przeto
$$m\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=m\cos^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Z tego równania możemy znaleść $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, a że mamy dane $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ $=90^0-\frac{1}{2}\alpha$, przeto znajdziemy kąty β i γ; a następnie boki b i c trójkąta.

Równanie powyższe jest stopnia drugiego i ma pierwiastki rzeczywiste, jeden dodatny, drugi ujemny; pierwiastek ujemny, nie odpowiada zadaniu, pozostanie więc jedynie pierwiastek dodatny. Pierwiastek ten, jako wyrażający wstawę kąta $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ winien być mniejszy od jedności, nadto kąt ten, takim być winien, aby rozwiązywał dane zadanie. Lecz wiadomo, że kąt $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ jest równy nachyleniu dwusiecznej kąta α względem wysokości h, albo co na jedno wychodzi równa się nachyleniu dwusiecznej kąta α względem strzały odcinka okręgu koła, w który ten kąt jest wpisany; żeby więc kąt $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ rozwiązywał zadanie powinno być: $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\frac{1}{2}\alpha < 90^0$, stąd $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < \cos\frac{1}{2}\alpha$, mamy więc warunek konieczny i dostateczny. Temu warunkowi staje się zadość w niniejszym zadaniu, gdyż równanie ostatnie dowodzi, że

$$m\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma) < m\cos^2\frac{1}{2}\alpha,\ \text{czyli}\ \sin\frac{1}{2}(\beta-c) < \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

Zadanie więc jest zawsze możebne; ma jedno rozwiązanie, co można było przewidzieć, gdyż, gdy bok a i kąt przeciwległy α są dane, stosunek $\frac{b-c}{h}$ może przybierać wszelkie możliwe wartości.

PRZYKŁADY.

1) Mając dane trzy odcinki, łączące wierzchołki trójkąta ze środkami boków przeciwległych rozwiązać trójkąt i znaleść jego powierzchnią w funkcyi tychże odcinków. Dowieść przytym, że powierzchnia trójkąta danego jest równa $\frac{4}{3}$ powierzchni trójkąta utworzonego z tychże odcinków.

2) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane dwa boki trójkąta i wiemy, że kąt pierwszemu z nich przeciwległy jest równy dwa razy wziętemu kątowi przeciwległemu drugiemu bokowi.

3) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane dwa boki trójkąta, tudzież wysokość trójkąta, odpowiadająca bokowi trzeciemu.

4) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane dwa kąty trójkąta i wysokość, odpowiadająca przyległemu bokowi trzeciemu.

5) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane dwa boki trójkąta tudzież odcinek, łączący środek boku trzeciego z wierzchołkiem mu przeciwległym.

6) Rozwiązać trójkąt, gdy dany jest bok, odpowiadająca mu wysokość i odcinek łączący środek tegoż boku z wierzchołkiem przeciwległym.

7) Rozwiązać trójkąt, gdy dany jest jego bok, wysokość odpowiadająca bokowi przyległemu i odcinek, łączący środek tegoż boku z wierzchołkiem przeciwległym.

8) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane odcinki, łączące środki dwu boków z wierzchołkami przeciwległemi, tudzież kąt między temiż odcinkami zawarty.

9) Rozwiązać trójkąt, gdy dany jest bok, odcinek łączący jego środek z wierzchołkiem przeciwległym, tudzież takiż odcinek odpowiadający jednemu z boków pozostałych.

10) Rozwiązać trójkąt, gdy dany jest kąt trójkąta, długość jego dwusiecznej i wysokość trojkąta, odpowiadająca przeciwległemu bokowi.

11) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane dwa kąty trójkąta, tudzież summa lub różnica dwu boków, przeciwległych tymże kątom.

12) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane różnica dwu boków, różnica kątów, tymże bokom przeciwległych i kąt między temi bokami zawarty.

13) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane summa dwu boków trójkąta, kąt między niemi zawarty, tudzież wysokość bokowi trzeciemu odpowiadająca.

14) Rozwiązać trójkąt, gdy są dane summa dwu boków trójkąta i wysokości trójkąta, tymże bokom odpowiadające.

15) Dowieść, że gdy są dane trzy boki trójkąta, długości w_a, w_b, w_c dwusiecznych kątów trójkąta wyrażają się

$$w_a = \frac{1}{(b+c)} \sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}, \quad w_b = \frac{1}{(a+c)} \sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)},$$

$$w_c = \frac{1}{(a+b)} \sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}.$$

16) Dowieść, że jeżeli spodki prostopadłych, spuszczonych z wierzchołków trójkąta na boki przeciwległe połączymy linijami prostemi, bokami utworzonego w ten sposób trójkąta będą $a \cos \alpha$, $b \cos \beta$ i $c \cos \gamma$.

17) Dowieść, że jeżeli odległościami punktu przecięcia się wysokości trójkąta od jego wierzchołków są l, m i n, natenczas powierzchnia trójkąta wyraża się $\frac{1}{4}(la + mb + nc)$. Dowieść, że w tym razie

$$a^2 l \operatorname{cosec} \alpha + b^2 m \operatorname{cosec} \beta + c^2 n \operatorname{cosec} \gamma = 2abc.$$

18) Dowieść, że iloczyn trzech wysokości trójkąta jest równy $\frac{[(a+b+c)r]^3}{abc}$, gdzie r oznacza promień koła stycznego wewnętrznie.

19) Dowieść, że jeżeli na bokach trójkąta jakiegokolwiek wystawimy trójkąty równoboczne i środki tych trójkątów połączymy linijami prostemi, otrzymamy trójkąt równoboczny.

WYKREŚLENIA WYRAŻEŃ, ZAWIERAJĄCYCH FUNKCYJE TRYGONOMETRYCZNE.

210. Chcemy pokazać w jaki sposób z równań, w które wchodzą funkcyje trygonometryczne, możemy niekiedy gieometrycznie wyznaczyć funkcyje trygonometryczne z tychże równań wynikające.

211. *Znaleść za pomocą wykreślenia kąty x, których* $\sin x = \frac{a}{b}$, $\cos x = \frac{c}{d}$, $tg\, x = \frac{m}{n}$, $cotg\, x = \frac{p}{q}$, *gdzie a, b, c,... są danemi odcinkami.*

Kąt szukany znajdziemy w każdym z tych przypadków, jeżeli utworzymy w przypadku pierwszym trójkąt prostokątny, któregoby jednym bokiem BC (fig. 48) był odcinek a, przeciwprostokątną $AC = b$; wtedy kąt CAB będzie kątem szukanym; w przypadku drugim trójkąt prostokątny, któregoby jednym bokiem AB był odcinek c przeciwprostokątną $AC = d$, wtedy kąt CAB będzie kątem szukanym; w przypadku trzecim, trójkąt prostokątny ABC, którego bokami byłyby odcinki $BC = m$ $AB = n$, wtedy kąt CAB będzie kątem szukanym; nareszcie w przypadku czwartym trójkąt prostokątny ABC, którego odcinkami byłyby $AB = p$ i $BC = q$, kąt CAB będzie kątem szukanym. Wszystkie te wykreślenia doprowadzają do szukanych kątów, na zasadzie samej definicyi funkcyj trygonometrycznych.

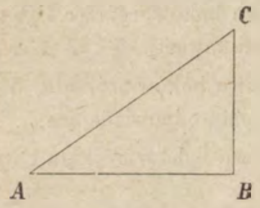

Fig. 48.

212. Wykreślenie tego rodzaju wyrażeń jak $m \cos \alpha$, $m : \cos \alpha$, $m \sin \alpha$, $m : \sin \alpha$, $m\, tg\, \alpha$, $m : tg\, \alpha$, gdzie m oznacza dany odcinek, a α kąt wiadomy, sprowadza się do wykreślenia odpowiedniego trójkąta prostokątnego, na zasadzie związków, zachodzących między bokami i funkcyjami trygonometrycznemi kątów trójkąta prostokątnego.

213. Wykreślenie odcinka x z wyrażenia

$$x = \frac{m \sin \alpha}{\sin \beta},$$

gdzie odcinek m i kąty α i β są dane, oraz wykreślenie kąta θ z wyrażenia

$$\sin \theta = \frac{m \sin \alpha}{n},$$

gdzie dane są odcinki m i n i kąt α, daje się łatwo uskutecznić za pomocą twierdzenia, podanego w artykule 167-ym.

214. *Podzielić dany kąt α na takie dwa kąty x i y, aby stosunek wstaw tych kątów był równy stosunkowi dwu danych liczb $m:n$.*

Jeżeli utworzymy trójkąt ABC (fig. 49), któregoby dwa boki AB i AC były w stosunku $m:n$, a kąt między niemi zawarty BAC był równy α, natenczas z połączenia wierzchołka A kąta α ze środkiem O boku jemu przeciwległego BC, otrzymamy liniją prostą, która podzieli kąt dany na takie dwa kąty, których stosunek wstaw będzie równy $m:n$. Jakoż, jeżeli kąt $OAC = x$, $BAO = y$ i z punktów B i C spuścimy prostopadłe na AO, prostopadłe te z przyczyny, że $BO = OC$, będą równe, zatym $n \sin x = m \sin y$, a stąd $\sin x : \sin y = m:n$.

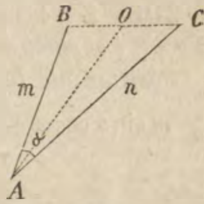

Fig. 49.

Gdybyśmy chcieli znaleść takie dwa kąty, którychby różnica była równa danemu kątowi α, a ich wstawy były w stosunku $m:n$, natenczas po wykreśleniu trójkąta, jak w zadaniu poprzedzającym, należałoby przez wierzchołek kąta prowadzić równoległą do boku przeciwległego kątowi α, linija ta z bokami trójkąta utworzy dwa kąty szukane.

Gdybyśmy znowu szukali takich kątów x i y, których stosunek dostaw był równy $m:n$, natenczas wykreślamy trójkąt, którego bokami są m i n, kątem zaś między niemi zawartym kąt $90^0 - \alpha$; jeżeli podzielimy kąt $90^0 - \alpha$ na takie dwa kąty, których wstawy są w stosunku $m:n$, natenczas dopełnienia tych kątów będą kątami szukanemi.

215. *Dany kąt α podzielić na takie dwa kąty x i y, aby stosunek stycznych trygonometrycznych tych kątów był równy $m:n$.*

Według założenia $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} y = m:n$, stąd

$$m + n : m - n = \sin(x+y) : \sin(x-y), \text{ stąd}$$

$$\sin(x-y) = \frac{m-n}{m+n} \sin \alpha .$$

Z tego równania wykreślimy kąt $x - y$ w sposób wskazany w art. 213-ym, a następnie mając summę i różnicę kątów znajdziemy kąty szukane.

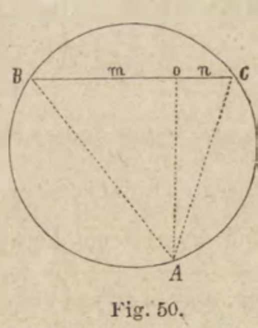

Fig. 50.

Zadanie to można rozwiązać jeszcze w ten sposób. Jeżeli weźmiemy odcinek równy $m+n$, na nim jako na cięciwie opiszemy taki okrąg koła, aby w odcinek jego był wpisany kąt α, a z punktu O (fig. 50), połączenia odcinków m i n wyprowadzimy prostopadłą aż do przecięcia się z okręgiem koła, punkt przecięcia połączymy z końcami odcinka $m + n$ otrzymamy kąt α, który przez prostopadłą OA podzielonym zostanie na dwa kąty, których styczne trygonometryczne będą równe stosunkowi m i n. Wykreślenie to wynika z definicyi stycznej trygonometrycznej.

216. *Z równania $m \sin(\alpha + x) = n \sin(\beta + x)$, gdzie dane są kąty α i β i odcinki m i n, wykreślić kąt x.*

Rozwiązanie 1-sze. Równanie powyższe daje

$$m \sin\alpha \cos x + m \cos\alpha \sin x = n \sin\beta \cos x + n \cos\beta \sin x, \text{ stąd}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{m \sin\alpha - n \sin\beta}{n \cos\beta - m \cos\alpha}.$$

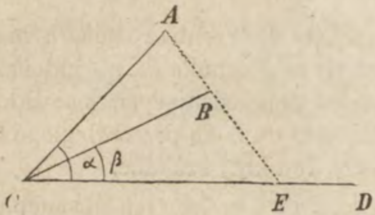

Fig. 51.

Weźmy (fig. 51) kąt ACE $= \alpha$ BCE $= \beta$, CA $= m$, CB $= n$, połączmy punkty A i B liniją prostą i przedłużamy ją aż do przecięcia się z liniją CE, wtedy kąt AEC $= x$ Jakoż, jeżeli z punktów A i B spuścimy prostopadłe na bok CE łatwo okazać, że tg AEC zadośćczyni powyższemu wyrażeniu. Prawdziwość naszego wykreślenia daje się dowieść na figurze; mamy bowiem z trójkąta ABC

$$n : m = \sin \mathrm{CAB} : \sin \mathrm{CBA} = \sin(a + x) : \sin(\beta + x).$$

Rozwiązanie 2-gie. Z równania danego, napisanego w kształcie:

$$\sin(\alpha + x) : \sin(\beta + x) = n : m,$$

otrzymamy

$$\frac{\sin(\alpha + x) + \sin(\beta + x)}{\sin(\alpha + x) - \sin(\beta + x)} = \frac{n + m}{n - m},$$

zatym

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{n + m}{n - m}.$$

Z tego równania otrzymamy $x + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, a następnie x.

Dla wykreślenia kąta x z tego wyrażenia, napiszmy je w kształcie:

$$n + m : n - m = \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right) : \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - x\right).$$

Wykreślamy trójkąt ABC, którego bokami byłyby $CB = n$, $CA = m$, kątem zaś, między niemi zawartym, kąt $ACB = \alpha - \beta = ACE - BCE$; natenczas na zasadzie wzoru (2) art. 176-go, mieć będziemy

$$n + m : n - m = \operatorname{tg}\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(BAC - ABC),$$

lecz mamy

$$\frac{1}{2}(BAC - ABC) = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - x,$$

podstawiając wartość $BAC = 180^0 - (\alpha - \beta) - ABC$, po uskutecznionych redukcyjach, otrzymamy $x = ABC - \beta$; przedłużając więc AB aż do przecięcia się z CE w punkcie E, otrzymamy kąt AEC równy x.

217. *Z równania $a\cos x + b\sin x = c$, gdzie a, b, c są danemi odcinkami, wykreślić kąt x.*

Kładąc $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$ otrzymamy

$$\frac{c\sin\varphi}{a} = \sin(x + \varphi) \text{ albo } = \sin(180^0 - x - \varphi),$$

Wykreślenie. Wykreślmy trójkąt prostokątny MNO, (fig. 52) którego bok $ON = a$, $OM = b$, natenczas kąt $NMO = \varphi$. Następnie wykreślamy $\frac{c\sin\varphi}{a}$ (art. 213-ty) w ten sposób, że od punktu M na linii MP odcinamy $MP = c$, a z punktu P promieniem równym a, zakreślamy okrąg

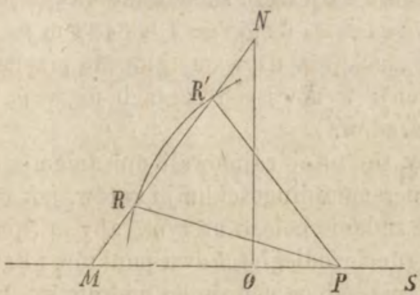

Fig. 52.

koła, który przetnie liniją MN w dwu punktach R i R'. Prowadząc linije PR i PR' mieć będziemy $x + \varphi = PRM$, albo PR'M. Szukanym więc kątem będzie kąt RPM, albo R'PM.

Jeżelibyśmy szukali kąta x, zadośćczyniącego równaniu $a\cos x - b\sin x = c$, natenczas stosując powyższe wykreślenie, znajdziemy kąty RPS i R'PS, zadośćczyniące temu równaniu.

ZASTOSOWANIA FUNKCYJ TRYGONOMETRYCZNYCH DO GIEOMETRYI PRAKTYCZNEJ.

218. Z zadań Gieometryi praktycznej, zajmiemy się temi, które się odnoszą do wyznaczenia wysokości przedmiotów, ich odległości lub kątów, jakie dwie proste z sobą tworzą; tego rodzaju zadania łatwo dają się rozwiązywać zapomocą funkcyj trygonometrycznych.

219. Dla wymierzenia odległości dwu punktów na powierzchni ziemi używamy w gieometryi praktycznej różnych przyrządów. Przy pomiarach, przy których nie idzie o bardzo wielką dokładność używamy tak zwanego łańcucha; przy pomiarach zaś, wymagających bardzo wielkiej ścisłości używa się odpowiednio ustawionych wzorców (étalon), przyczym się uwzględnia wpływ na zmianę temperatury, na rozszerzalność i t. d. U nas łańcuch mierniczy (zwany także staja) dzielił się na 10 prętów, po 10 pręcików, a każdy pręcik po 10 ławek i zawierał od 1764 roku prawnie określonych 75 łokci koronnych (łokieć koronny = 264 linij paryskich, linija = 0,616969 metr.), zaś od roku 1819 zawierał 75 łokci nowopolskich (łokieć miary nowopolskiej = 576 milimetrów), w Rossyi sażeń (od r. 1839 równy ściśle 7 stop. angielskim = 2,13358 metr.) ze swemi podziałami jest jednostką mierniczą. We Francyi i od niedawna w Niemczech łańcuch mierniczy ma 10 metrów. W Austryi przy mierzeniu obszarów gruntu są jeszcze zachowane dawne jednostki, oparte na sążniu wiedeńskim (sążeń = 6 stóp = 1,896484 m)

Do mierzenia zaś kątów używamy głównie przyrządu zwanego kątomiarem (astrolabium); w nowszych czasach używają teodolitu, sextansu i t. p. przyrządów.

Nie będziemy się tutaj zajmowali opisaniem szczegółowym narzędzi, służących do mierzenia długości linij i kątów, jak również sposobu ich użycia, gdyż nasze zadanie polega na tym, aby przypuszczając, że potrafimy mierzyć na gruncie odległości dwu punktów i kąty między linijami, módz niektóre zadania, odnoszące się do miernictwa, rozwiązać przez zastosowanie funkcyj trygonometrycznych.

220. *Zadanie 1-sze. Zmierzyć wysokość wieży, budynku, góry lub jakiego innego przedmiotu.*

Przy rozwiązywaniu tego rodzaju zadań przytrafić się mogą dwa przypadki: 1) albo podstawa przedmiotu zmierzyć się mającego jest przystępna; 2) albo podstawa jest niedostępna.

Co do 1-go. Niech AB (fig. 53) będzie wysokością wieży, którą chcemy zmierzyć, a której podstawa B jest dla nas dostępna, a nadto grunt płaski, taki, że na nim możemy wymierzyć prostą poziomą BC. Jeżeli wymierzymy za pomocą łańcucha odległość jakąkolwiek punktu C, na powierzchni ziemi obranego, od podstawy wieży B, za pomocą zaś kątomiaru lub teodolitu (ustawionego na podstawce CD) zmierzymy kąt ADE, otrzymamy z trójkąta prostokątnego ADE odległość AE, do której dodając wysokość CD podstawy narzędzia, znajdziemy tym samym wysokość wieży. I tak, jeżeli odległość $CB = a$, wysokość podstawy narzędzia $CD = l$, kąt zaś $ADE = \alpha$, natenczas

Fig. 53.

$$AB = l + a \operatorname{tg} \alpha.$$

Co do 2-go. Jeżeli podstawa wieży jest dla nas niedostępna, a grunt pozwala nam wymierzyć prostą poziomą ku podstawie wieży, wtedy na tej prostej obieramy dwa punkty C i D (fig. 54), mierzymy ich odległość

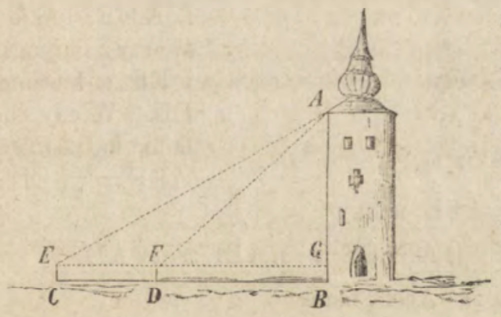

Fig. 54.

$CD = d$, w tychże punktach ustawiamy teodolit i mierzymy kąty, jakie kierunki AE i AF tworzą z liniją poziomą. Jeżeli kąt $AEG = \alpha$, $AFG = \beta$, natenczas z trójkąta AEF, mieć będziemy

$$\frac{AE}{EF} = \frac{\sin\beta}{\sin EAF} = \frac{\sin\beta}{\sin(AFG - AEG)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)},$$

stąd
$$AE = EF \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Lecz z trójkąta prostokątnego AEG, mamy

$$AG = AE \sin AEG = AE \cdot \sin\alpha,$$

podstawiając zamiast AE powyższą wartość, znajdziemy

$$AG = d \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)},$$

dodając zaś do AG wysokość podstawy narzędzia, znajdziemy wysokość wieży.

Jeżeli podstawa wieży jest niedostępna, a grunt nie pozwala nam prowadzić linii poziomej ku podstawie wieży, wtedy wysokość wieży znajdujemy sposobem wskazanym w następującym artykule.

221. Niech będzie góra, której chcemy znaleść wysokość względem pewnej płaszczyzny poziomej. Obieramy na płaszczyźnie poziomej takie dwa punkty C i D, (fig. 55), abyśmy mogli wymierzyć odległość między niemi, i takie, aby z nich można było celować do wierzchołka góry. W tych dwu punktach za pomocą kątomiaru wymierzamy kąty AFG, AFE i AEF, jakie kierunek AF tworzy z linijami poziomemi GF i EF a kierunek AE z liniją EF. Wtedy będą nam wiadome kąt $AFG = \alpha$, $AFE = \beta$, $AEF = \gamma$ i $CD = EF = d$.

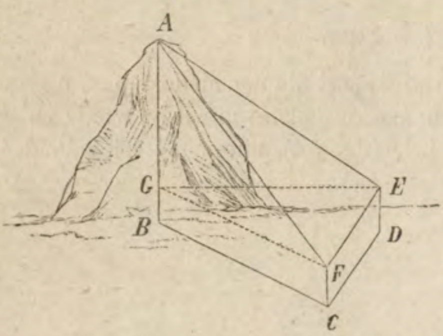

Fig. 55.

Z trójkąta AFE, mamy

$$AF : FE = \sin AEF : \sin FAE.$$

Z trójkąta zaś AGF, mamy

$$AG = AF \cdot \sin AFG = AF \cdot \sin\alpha$$

zatym
$$AG = \frac{FE \cdot \sin AEF}{\sin FAE} \sin\alpha.$$

czyli
$$AG = d \cdot \frac{\sin\gamma \sin\alpha}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Znajdziemy zatym AG, a dodając wysokość podstawy narzędzia, znajdziemy wysokość góry.

222. *Zadanie 2-ie. Wyznaczyć odległość punktu nieodostępnego od punktu dostępnego.*

Niech będzie potrzeba znaleść odległość punktu A (fig. 56) z drugiej strony rzeki się znajdującego, od punktu danego B z tej strony rzeki położonego. W tym celu wymierzamy od punktu B jakąkolwiek podstawę BC, lecz taką, aby z punktu C punkt A był widzialny; następnie za pomocą kątomiaru mierzymy kąty, jakie kierunki BA i CA tworząc z tą podstawą. Jeżeli kąt $ABC = \alpha$, $ACB = \beta$, podstawa $BC = a$, natenczas z trójkąta ABC mamy

$$AB : BC = \sin ACB : \sin BAC, \text{ czyli}$$

$$AB : a = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta),$$

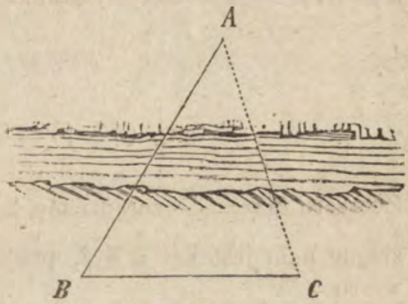

Fig. 56.

stąd
$$AB = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

223. *Znaleść odległość wzajemną dwu punktów nieprzystępnych, ale widzialnych.*

Niech A i B (fig. 57) będą dwoma nieprzystępnemi np. z drugiej strony rzeki względem nas znajdującemi się punktami, których odległość chcemy wymierzyć. W tym celu wymierzamy podstawę $CD = d$ i kąty jakie kierunki CA, CB, DA i DB tworzą z liniją CD, tudzież kąt ACB. Z trójkątów ACD i BCD, w których mamy bok CD i dwa kąty, znajdziemy boki AC i CB; z trójkąta zaś ACB, w którym kąt ACB jest znany, boki zaś AC i CB znalezione rachunkiem, otrzymamy szukaną odległość AB. Pokażemy w jaki sposób w praktyce najprościej przeprowadza się rachunek. Oznaczmy kąty trójkąta ABC przez α, β i γ, boki zaś odpowiednie przez a, b i c, nadto odległość $CD = d$. Z trójkątów BCD i ACD, mamy

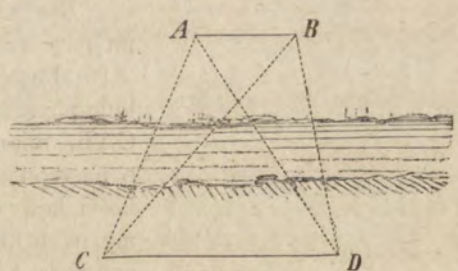

Fig. 57.

$$a = \frac{d \,.\sin BDC}{\sin CBD}, \quad b = \frac{d \,.\sin ADC}{\sin CAD}.$$

Z trójkąta ABC mamy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma,$$

a jeżeli przez φ oznaczymy taki kąt posiłkowy, aby

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}, \text{ natenczas}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\varphi-45^{\circ})\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma.$$

Ze wzoru $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}$ znajdziemy kąt φ; z ostatniego zaś kąt $\alpha-\beta$, a że znamy nam jest kąt $\alpha+\beta$, przeto znajdziemy kąty α i β. W końcu ze wzoru

$$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

znajdziemy bok c, czyli szukaną odległość dwu punktów A i B.

Należy w tym zadaniu zauważyć, że koniecznym jest wymierzenie kąta ACB; kąt ten bowiem jest tylko wtedy równy różnicy dwu kątów ACD i BCD, gdy wszystkie punkty A, B, C i D znajdują się na jednej płaszczyźnie.

224. *Zadanie 4-te. Przez punkt dany na powierzchni ziemi nakreślić liniją równoległą, do linii nieprzystępnej.*

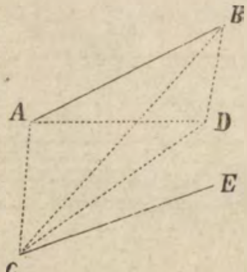

Fig. 58.

Niech C (fig. 58) będzie danym punktem na powierzchni ziemi, liniją zaś niedostępną AB. Postępujemy drogą wskazaną w artykule poprzedzającym, celem znalezienia kąta CAB, mianowicie obieramy podstawę CD, a następnie rachunkiem dochodzimy do wielkości kąta CAB. Mając kąt CAB, będziemy mieli i kąt spełniający ACE, w kierunku ramienia CE tego kąta wytknięta linija będzie liniją szukaną.

225. *Zadanie 5-te. Przedłużyć daną prostą na poziomie po za przedmiot, niepozwalający nam widzieć jej przedłużenia.*

Niech AB (fig. 59) będzie daną prostą, którą chcemy przedłużyć po za przedmiot D (np. górę, las). Wymierzamy naprzód prostą AB, a następnie obieramy taki punkt E, abyśmy z niego mogli obserwować punkty A i B i mogli widzieć tę część powierzchni ziemi, na której przypadać będzie przedłużenie linii AB. W punktach A i B mierzymy kąty

EAB i EBA trójkąta ABE i obliczamy odległość AE; z punktu E wyznaczamy taki kierunek EC, któryby przecinał przedłużenie prostej AB po za przedmiotem D, to jest mierzymy kąt AEC, a jeżeli punkt C oznacza szukany punkt przecięcia się tego kierunku z przedłużeniem odcinka AB, wtedy z trójkąta ACE, w którym wiadome będą bok AE i kąty CAE i CEA potrafimy obliczyć odległość EC, a tymsamym za pomocą łańcucha oznaczyć punkt C. Wyznaczając następnie taką linię CF, aby z linią EC tworzyła kąt ECF = AEC + CAE, będziemy mieli żądane przedłużenie prostej AB.

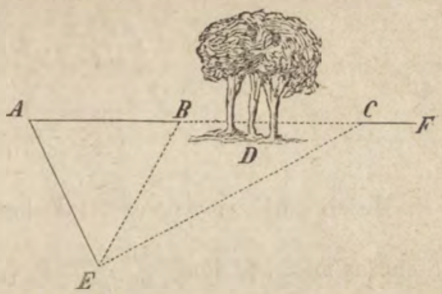

Fig. 59.

Jeżeli linija AB jest niedostępna, wtedy za pomocą odpowiednio dobranej podstawy obliczamy elementy trójkąta ABE, w sposób wskazany w zadaniu trzecim.

Niekiedy przy rozwiązywaniu tego rodzaju okazuje się potrzebnem wprowadzenie nie jednego, lecz kilku takich punktów pomocniczych, jak punkt E.

226. *Mając dane trzy punkty na gruncie A, B, C, wyznaczyć taki punkt czwarty M, aby odległości AB i BC były widziane z tego punktu pod kątami danemi* (tw. Pothenota, podług autorów niemieckich Snelliusa).

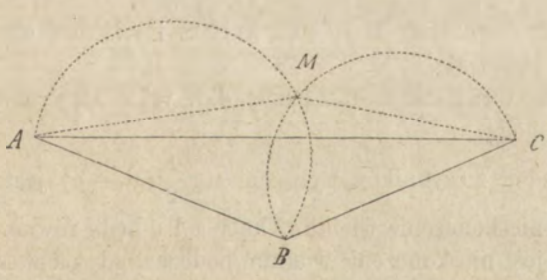

Fig. 60.

Niech będą dane trzy punkty A, B, C (fig. 60) na powierzchni ziemi; chcemy wyznaczyć czwarty punkt M taki, aby kąt AMB był równy danemu kątowi α, kąt zaś BMC był równy danemu kątowi β. Niech AB $= a$, BC $= b$; weźmy za niewiadome kąty MAB $= x$ i MCB $= y$. Z trójkątów AMB i CMB, mamy

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \quad BM = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

stąd

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Jeżeli oznaczymy przez φ taki kąt posiłkowy, aby $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$, natenczas mieć będziemy $\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg} \varphi$, stąd

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}, \text{ czyli}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 45^0}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 45^0} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0).$$

Oznaczając przez w kąt ABC będziemy mieli

$$\frac{1}{2}(x + y) = 180^0 - \frac{\alpha + \beta + w}{2},$$

zatym

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta + w}{2}\right).$$

Za pomocą tego wzoru, obliczymy kąt $\frac{1}{2}(x - y)$, a że kąt $\frac{1}{2}(x + y)$ jest wiadomy, przeto będziemy znali oba kąty x i y, które wyznaczać nam będą szukany punkt M.

Rozważmy teraz szczególne przypadki, jakie przy rozwiązaniu tego zadania zajść mogą.

Jeżeli jeden z czynników wyrażenia $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)$ jest zerem, gdy drugi nie jest nieskończenie wielkim, kąty x i y będą równe. Lecz, gdy drugi czynnik jest nieskończenie wielkim podczas, gdy pierwszy jest zerem wyrażenie $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)$ przyjmuje kształt $\frac{0}{0}$. Można łatwo okazać, że zadanie w tym razie jest nieoznaczone. Jakoż, żeby czynnik

$$\operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta + w}{2}\right),$$

był nieskończenie wielkim, potrzeba, aby

$$\alpha + \beta + w = 180^0,$$

a to jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby czworokąt ABCM był wpisany w koło. Zatym w tym przypadku dwa odcinki kół, obejmujące kąty α i β, których przecięcie wyznacza punkt M, należą do tegoż samego okręgu koła. Następnie czynnik $\operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$ jest w tym razie zerem, jakoż, mamy $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{\sin\beta} : \frac{a}{\sin\alpha}$ lecz $\frac{b}{\sin\beta}$ i $\frac{a}{\sin\alpha}$ są średnicami kół opisanych na trójkątach ABM i BCM, a ponieważ te koła są jednym kołem, przeto $\operatorname{tg}\varphi = 1$, zatym $\varphi = 45$ i $\operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = 0$.

227. Sprowadzenie kąta do prawdziwego jego wierzchołka.

Przy pomiarach gieodezyjnych często się przytrafia, iż chcąc wymierzyć kąt jaki, nie możemy ustawić narzędzia w wierzchołku tegoż kąta, z przyczyny, że w jego wierzchołku znajdują się pewne przeszkody, jak np. drzewo, wieża, krzyż, budynek i t. p., w tego rodzaju wypadkach obieramy stanowisko dogodne, o ile można jak najbliżej położone wierzchołka kąta wymierzyć się mającego i wymierzamy w tym nowym stanowisku kąt.

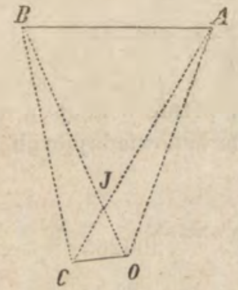

Fig. 61*a*.

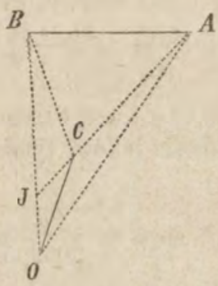

Fig. 61*b*.

Kąt ten nie będzie dawał rzeczywistej wielkości kąta, tylko wielkość przybliżoną, skutkiem czego zajdzie potrzeba znalezienia różnicy, jaka zachodzić może między kątem wymierzonym, a jego wielkością rzeczywistą. Sposób znalezienia tej różnicy zowie się s p r o w a d z e n i e m k ą t a d o ś r o d k a, czyli do jego wierzchołka rzeczywistego (Reductio anguli ad centrum). Niech będzie kąt ACB (fig. 61), którego wielkość chcemy wymierzyć, ale w jego wierzchołku nie możemy ustawić kątomiaru. W tym razie obieramy o ile można najbliżej wierzchołka punkt O, i taki, w którym możemy ustawić narzędzie i zmierzyć kąt AOB. W obecnym zadaniu chodzi o to, w jaki sposób z wymierzonego kąta AOB można obliczyć kąt ACB z dostatecznym przybliżeniem. Oznaczmy przez μ i ν kąty OAC i OBC a przez I punkt przecięcia się ramion AC i BO. Jeżeli punkt O weźmiemy zewnątrz kąta ACB (fig. 61*a*), mieć będziemy z trójkątów IAO i IBC,

$$\text{kąt } AIB = O + \mu = C + \nu, \text{ stąd}$$
$$C = O + \mu - \nu.$$

Aby więc mieć kąt szukany C, trzeba do wymierzonego kąta O dodać różnicę $\mu - \nu$, która może być dodatna lub ujemna, a nawet równa zeru, gdy punkt O znajduje się na okręgu koła opisanym na trójkącie ABC. Jeżeli punkt O obierzemy między przedłużeniami ramion kąta ACB (fig. 61*b*), będziemy mieli

$$\text{kąt } AIB = O + \mu = C - \nu, \text{ stąd}$$
$$C = O + \mu + \nu.$$

w tym razie poprawka jest dodatna i równa się summie kątów μ i ν.

Nareszcie, gdy punkt O obrany został wewnątrz trójkąta ABC poprawka będzie ujemna $-(\mu + \nu)$.

Starajmy się teraz pokazać, w jaki sposób możemy znaleść kąty μ i ν. Oznaczmy dla skrócenia boki trójkąta ABC odpowiednio przez a, b, c, zaś przez d odległość OC; z trójkątów OCA i OCB, będziemy mieli

$$\frac{\sin\mu}{d} = \frac{\sin AOC}{b}, \quad \frac{\sin\nu}{d}, \quad \frac{\sin BOC}{a}.$$

Ponieważ zaś kąty μ i ν są bardzo małe, przeto w miejscu ich wstaw możemy wziąć długości łuków, tymże kątom odpowiadających, to jest położyć (art. 145-ty)

$$\sin\mu = \frac{\mu}{206265}, \quad \sin\nu = \frac{\nu}{206265},$$

i będziemy mieli

$$\mu = 206265 \,.\, \frac{d}{b} \sin AOC, \quad \nu = 206265 \,.\, \frac{d}{a} \sin BOC.$$

Zatym jeżeli poprawkę, którą trzeba dodać do kąta wymierzonego, aby otrzymać kąt rzeczywisty, oznaczymy przez ε_1, będzie

$$\varepsilon_1 = 206265 \,.\, d\left[\frac{\sin AOC}{b} - \frac{\sin BOC}{a}\right].$$

Kąty AOC i BOC otrzymamy za pomocą kątomiaru, za sprawdzenie służyć będzie kąt O; co się tyczy boków a i b, to albo takowe wymierzymy, albo też mogą być nam wiadome z rachunku, jeżeli, jak to się zdarza przy pomiarach, stanowią boki innych trójkątów, które rachunkiem znaleźliśmy. Zwrócić należy uwagę, że przy obliczaniu ε_1, wzór powyższy nie nadaje się do rachunku logarytmami, uczynimy go jednak dogodnym do rachunku logarytmami, jeżeli wprowadzimy takie dwa kąty posiłkowe φ i ψ, aby

$$\frac{\sin AOC}{b} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{\sin BOC}{a} = \operatorname{tg}\psi,$$

mamy bowiem wtedy

$$\varepsilon_1 = 206265 . d \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\varphi \cos\psi} .$$

PRZYKŁADY.

1) Znaleść odległość punktu, na poziomie się znajdującego, od przedmiotu pionowego, jeżeli z dwu punktów tegoż przedmiotu możemy obserwować tenże punkt na poziomie się znajdujący.

Jeżeli odległość punktów, z których obserwujem punkt na poziomie, oznaczymy przez d, a przez δ i δ' kąty, jakie tworzą kierunki od punktów obserwowanych do punktu na poziomie z kierunkiem pionowym, odległość szukana $= \dfrac{d \sin\delta \sin\delta'}{\sin(\delta - \delta')}$.

2) Znaleść promień wieży niedostępnej. Wymierzamy podstawę dowolną równą d i kąty α i α' β i β', jakie tworzą kierunki z końców tej podstawy poprowadzone stycznie do wieży, z tąż podstawą. Szukany promień wieży $= \dfrac{d \sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin\frac{1}{2}(\beta + \beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \beta + \beta')}$.

3) Z wierzchołka wieży, której wysokość h jest wiadomą, a nadto odległość a wieży od brzegu rzeki, mierzymy kąt α pod jakim z wierzchołka wieży widzimy szerokość rzeki; znaleść szerokość rzeki

$$x = h \frac{a + h \operatorname{tg}\alpha}{h - a \operatorname{tg}\alpha} - a.$$

4) Dwu obserwatorów, znajdujących się w odległości a, obserwują jednocześnie balon znajdujący się w powietrzu na jednej płaszczyźnie pionowej obu obserwatorów. Obaj obserwatorowie w jednej i tej samej chwili mierzą kąty wyniesienia się balonu nad poziom. Znaleść odległość balonu od każdego z obserwatorów, tudzież wzniesienie balonu nad poziom.

5) Z balonu obserwujemy spodki dwu budynków, znajdujących się na tej samej płaszczyźnie poziomej, a których odległość a jest nam znana, nadto mierzymy kąt α, jaki tworzą z sobą kierunki, idące od oka obserwatorów do tychże spodków, tudzież kąty δ i δ', jakie też kierunki tworzą z kierunkiem pionowym idącym na dół; znaleść wzniesienie sią balonu nad poziom

$$x = \frac{a \sin \delta \sin \delta'}{\sqrt{\sin^2 \delta + \sin^2 \delta' - 2 \sin \delta \sin \delta' \cos \alpha}}.$$

6) Z trzech stanowisk A, B i C, położonych na jednej prostej w ten sposób, że $AB = a$, $BC = b$, mierzymy kąty α, β i γ wysokości wierzchołka budynku. Znaleść wysokość budynku

$$x^2 = \frac{ab(a+b) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{a \sin^2 \alpha \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) - b \sin^2 \gamma \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

7) Na jednej płaszczyźnie poziomej stoją dwie wieże A i B, z których pierwszej znana nam jest wysokość h. Z wierzchołka wieży drugiej, na której się znajdujemy, mierzymy kąty: α, jaki tworzą dwa kierunki idące od naszego oka do wierzchołka i spodka wieży pierwszej, nadto kąt β, jaki tworzy drugi kierunek z prostopadłą, spuszczoną od naszego oka do płaszczyzny poziomej. Znaleść wysokość drugiej wieży i wzajemną odległość obu wież.

$$\text{Wysokość} = \frac{h \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\text{odległość} = h \sin(\alpha + \beta).$$

8) Na płaszczyźnie poziomej spodka H wieży HS mierzymy prostą AB tudzież kąty $BAH = \alpha$, $ABH = \beta$, $SAH = \gamma$ i $SBH = \delta$. Znaleść wysokość wieży i wyprowadzić związek, jaki wtedy istnieć winien między kątami α, β, γ i δ

$$x = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \delta \text{ albo } = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \gamma,$$

związek zaś $\sin \alpha \operatorname{tg} \delta = \sin \beta \operatorname{tg} \gamma$.

9) Znaleść szerokość rzeki AB, jeżeli na przedłużeniu AB od jakiegokolwiek punktu C możemy wymierzyć pod kątem α, nachylonym do linii AB, prostą $CD = a$, a z punktu D kąty $CDB = \beta$ i $CDA = \gamma$.

$$x = \frac{a \sin \alpha \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma)}.$$

10) Z ulicy prostej wychodzi na lewo pod kątem 30^0 ulica boczna, w odległości zaś $1\frac{1}{2}$ wiorsty wychodzi druga ulica na prawo pod kątem 60^0. Na pierwszej z tych ulic bocznych w odległości 4 wiorst od początku tej ulicy znajduje się budynek A, na ulicy zaś drugiej w odległości $2\frac{1}{2}$ wiorst budynek B. Znaleść odległość tych dwu budynków

$$x = 4{,}2258 \text{ wiorst.}$$

TRYGONOMETRYJA KULISTA.

ROZDZIAŁ I.

WZORY ZASADNICZE TRYGONOMETRYI KULISTEJ.

PRZEDMIOT TRYGONOMETRYI KULISTEJ.

1. W trójkącie kulistym, podobnie jak w płaskim, mamy do rozważania sześć elementów, mianowicie trzy boki i trzy kąty. Boki trójkąta kulistego są, jak wiadomo, łukami kół wielkich, na kuli nakreślonych i zazwyczaj wyrażają się w zwykłej mierze kątów t. j. w stopniach, minutach i sekundach. Długość tych boków bardzo łatwo jednak znaleść potrafimy z wiadomej ich miary teoretycznej i długości promienia kuli. Jakoż, na zasadzie proporcyjonalności kątów względem łuków, im odpowiadających, mamy

$$\text{długość łuku kąta } \alpha^0 = \frac{2\pi r}{360}\alpha = 0{,}0174532925\,\alpha r,$$

$$\text{długość łuku kąta } \alpha' = \frac{2\pi r}{360 \times 60}\alpha = 0{,}0002908882\,\alpha r,$$

$$\text{długość łuku kąta } \alpha'' = \frac{2\pi r}{360 \times 60 \times 60}\alpha = 0{,}0000048481\,\alpha r,$$

Wiemy, że trójkąt kulisty jest wyznaczony, gdy mamy dane trzy któregokolwiek jego elementy, to jest, że mając trzy któregokolwiek elementy, możemy przez wykreślenie znaleść pozostałe elementy. Lecz wykreślenia te nie dają się wykonać z dostateczną ścisłością, a przezto prowadzą nas jedynie do wypadków przybliżonych. Dla uniknienia niedokładności w otrzymywaniu drogą gieometryczną elementów trójkąta kulistego, podobnież jak przy szukaniu elementów trójkąta płaskiego, staramy się otrzymywać wypadki za pomocą rachunku.

Znalezienie za pomocą rachunku z trzech elementów trójkąta kulistego pozostałych jego elementów zowie się *rozwiązaniem trójkąta kulistego*.

Wykazanie związków, jakie zachodzą między kątami i bokami trójkąta kulistego, a następnie zastosowanie ich do rozwiązywania trójkątów kulistych, jest przedmiotem T r y g o n o m e t r y i k u l i s t e j.

Rozważać będziemy tylko takie trójkąty kuliste, których boki są mniejsze od 180°. W tym razie, jeżeli ABC jest trójkątem kulistym nakreślonym na kuli, której środkiem jest punkt O, natenczas z połączenia punktu O z wierzchołkami trójkąta kulistego utworzy się nam kąt bryłowy, którego kąty płaskie i kąty dwuścienne będą odpowiednio równe bokom i kątom trójkąta kulistego. Przy wyprowadzaniu związków między bokami i kątami trójkąta kulistego oznaczać będziemy jego kąty literami greckiemi α, β, γ, boki zaś im odpowiednie literami łacińskiemi a, b, c.

ZWIĄZKI MIĘDZY KĄTAMI I BOKAMI TRÓJKĄTA KULISTEGO.

2. *Twierdzenie 1-sze. W trójkącie kulistym dostawa jednego z jego boków jest równa iloczynowi dostaw pozostałych boków, zwiększonemu o iloczyn wstaw tychże boków i dostawy kąta między temiż bokami zawartego.*

Niech będzie trójkąt kulisty ABC, nakreślony na kuli, mającej środek O i promień równy jedności (fig. 1). Połączmy wierzchołki trójkąta kulistego ABC ze środkiem kuli O, w punkcie A poprowadźmy styczne AS i AR do boków AC i AB trójkąta kulistego, kąt zawarty między temi stycznemi będzie miarą kąta BAC trójkąta kulistego czyli kąta α. Z punktu C na płaszczyźnie AOC spuśćmy prostopadłą CH na promień OA, niech H

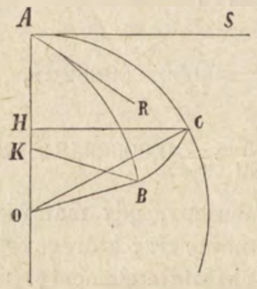

Fig. 1.

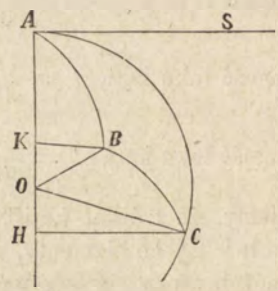

Fig. 1a.

będzie spodkiem tej prostopadłej. Jeżeli na płaszczyźnie AOC kierunek OA weźmiemy za kierunek początkowy kątów, kierunek zaś od A do C za kierunek dodatny kątów, wstawa boku AC, czyli kąta AOC to jest $\sin b$ będzie dodatna, gdyż bok AC jest mniejszy od 180° i będzie równa $+$ HC, gdy HC przypada w kierunku AS, który przyjmujemy za dodatny. Co się tyczy dostawy tegoż boku, to jest $\cos b$ będzie ona równa $+$ OH lub

— OH, stosownie do tego czy postępujemy od punktu O do H, w kierunku OA czyteż wprost przeciwnym. To wiedząc, szukajmy rzutów na liniją OB linii OC_1 tudzież linii łamanej OHC. Na zasadzie twierdzenia o rzutach oba rzuty będą równe, to jest będziemy mieli

$$\text{rzut } OC = \text{rzut } OH + \text{rzut } HC.$$

Lecz,

$$\text{rzut } OC = 1 . \cos a = \cos a,$$

$$\text{rzut } OH = \cos b \cos (\widehat{OA, OB}) = \cos b \cos c,$$

$$\text{rzut } HC = \sin b \cos (\widehat{HC, OB}) = \sin b \cos (\widehat{AS, OB}),$$

mamy zatym

(1) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos (\widehat{AS, OB}).$$

Spuśćmy z wierzchołka B prostopadłą BK na promień OA, niech K będzie spodkiem tej prostopadłej. Jeżeli na płaszczyźnie AOB kierunek OA weźmiemy za kierunek początkowy kątów w płaszczyźnie AOB, kierunek zaś od A do B za kierunek dodatny kątów, a tymsamym i łuków im odpowiadających, natenczas wstawa boku AB t. j. $\sin c$ będzie równa KB, dostawa zaś tegoż kąta czyli boku AB t. j. $\cos c$ będzie równa OK. Jeżeli teraz weźmiemy rzuty na liniją AS, tak linii OB, jak i linii łamanej OKB, mieć będziemy

$$\text{rzut } OB = \text{rzut } OK + \text{rzut } KB.$$

Lecz

$$\text{rzut } OB = 1 . \cos (\widehat{AS, OB}) = \cos (\widehat{AS, OB})$$

$$\text{rzut } OK = \cos c \cos (\widehat{OA, AS}) = 0,$$

$$\text{rzut } KB = \sin c \cos (\widehat{KB, AS}) = \sin c \cos \alpha,$$

mamy zatym

$$\cos (\widehat{AS, OB}) = \sin c \cos \alpha,$$

podstawiając tę wartość w równanie (1), otrzymamy

(2) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Jeżeli powyższe dowodzenie zastosujemy do pozostałych boków trójkąta kulistego, otrzymamy wzory na $\cos b$ i $\cos c$. Tym sposobem przychodzimy do następujących trzech związków

(3) $$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \end{aligned}$$

Ponieważ trójkąt kulisty jest wyznaczony, gdy dane są trzy z sześciu jego elementów, przeto między temi elementami istnieć mogą jedynie trzy różne od siebie związki. Równania powyższe są różne od siebie i żadne z nich nie daje się wyprowadzić z pozostałych. Z tej uwagi wynika, że wszystkie inne związki, jakie otrzymać możemy między sześciu elementami trójkąta kulistego, dają się wyprowadzić z wzorów (3) za pomocą przekształceń algiebraicznych; z tego powodu wzory powyższe zowią się w z o r a m i z a s a d n i c z e m i trygonometryi kulistej.

3. Dowód powyższy oparty na teoryi rzutów jest ogólny. Podamy obecnie drugi dowód, pozornie prostszy od poprzedzającego, ale nie tak ogólny, gdyż wymaga pewnych uzupełnień.

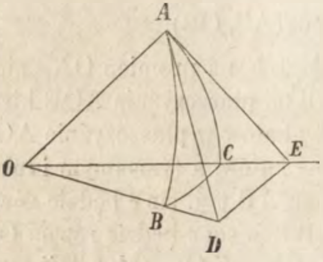

Fig. 2.

Niech ABC (fig. 2) będzie trójkątem kulistym, nakreślonym na powierzchni kuli o promieniu równym jedności i niech O będzie środkiem tej kuli.

Przypuśćmy naprzód, że boki AB i AC są mniejsze od 90°. Połączmy wierzchołki trójkąta kulistego, ze środkiem kuli i poprowadźmy w wierzchołku A styczne AD i AE do boków AB i AC trójkąta kulistego i przedłużamy je aż do przecięcia się z przedłużeniami promieni OB i OC, niech D i E będą punktami przecięcia się. Mamy $AD = \operatorname{tg} c$, $OD = \sec c$, $AE = \operatorname{tg} b$, $OE = \sec b$, $DAE = \alpha$, $DOE = a$. To wiedząc, z trójkątów DAE i DOE, otrzymamy

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\,AD\,.\,AE \cos DAE,$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\,OD\,.\,OE \cos DOE.$$

Z porównania tych wyrażeń otrzymamy

$$2\,OD\,.\,OE \cos DOE = \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 + 2\,AD\,.\,AE \cos DAE;$$

podstawiając powyższe wartości i pamiętając, że

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = 1,$$

mieć będziemy

$$\sec b \sec c \cos a = 1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos \alpha.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $\cos b \cos c$, otrzymamy

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

przychodzimy więc do szukanego wzoru, ale w założeniu że boki b i c są mniejsze od 90°.

Dajmy teraz, że $c > 90^0$, a $b < 90^0$, przedłużmy boki BA i BC (fig. 3) aż do przecięcia się w punkcie B', przez co otrzymamy trójkąt AB'C, z którego oznaczając $AB' = c'$, $CB' = a'$, otrzymamy na zasadzie dowodzenia w przypadku poprzedzającym

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos B'AC,$$

albowiem boki c' i b są mniejsze od 90^0. Podstawiając zamiast a', c' i B'AC ich wartości $180^0 - a$, $180^0 - c$, $180^0 - \alpha$ i zmnieniając znaki, otrzymamy

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

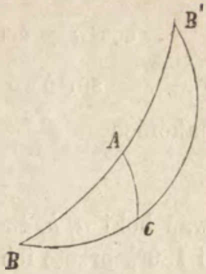

Fig. 3.

Dajmy wreszcie, że $b > 90^0$ i $c > 90^0$, przedłużmy boki AB i AC (fig. 4) aż do przecięcia się w punkcie A'. Jeżeli założy $A'C = b'$, $A'B = c'$ z trójkąta CBA', w którym boki A'C i A'B są mniejsze od 90^0, otrzymamy

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos BA'C,$$

a podstawiając za b', c' i BA'C ich wartości $180^0 - b$, $180^0 - c$, α przyjdziemy do wzoru

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Przyszliśmy więc do szukanego wzoru, który ma miejsce dla wszelkich trójkątów kulistych.

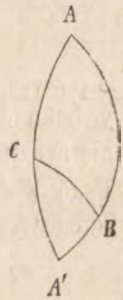

Fig. 4.

4. *Twierdzenie 2-gie. W trójkącie kulistym, wstawy jego boków są proporcyjonalne względem wstaw kątów im przeciwległych t. j.*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \tag{1}$$

Związki te dają się łatwo wyprowadzić z wzorów (3), art. 2-gi. Dajmy, że chcemy naprzód dowieść, że $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$. Zważmy, że to równanie jest niezależne od boku c i kąta γ, przeto żeby je otrzymać, potrzeba z równań (3) art. 2-go, wyrugować bok c i kąt γ. Ponieważ dwa pierwsze równania są niezależne od kąta γ, przeto dostatecznym będzie wyrugować z tych równań bok c. Dodając i odejmując od siebie dwa pierwsze równania (3) art. 2-go stronami odpowiedniemi znajdziemy

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin b \cos \alpha + \sin a \cos \beta),$$

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos \alpha - \sin a \cos \beta).$$

Mnożąc te równania stronami odpowiedniemi i pamiętając, że $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$, mieć będziemy

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 \alpha - \sin^2 a \cos^2 \beta, \text{ czyli}$$

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \sin^2 b \cos^2 \alpha - \sin^2 a \cos^2 \beta,$$

czyli nakoniec

$$\sin^2 b \sin^2 \alpha = \sin^2 a \sin^2 \beta.$$

Ponieważ boki a, b, tudzież kąty α i β trójkąta kulistego są zawarte między 0 i 180°, przeto ich wstawy są dodatne, wyciągając zatym pierwiastki z obu stron powyższego równania znajdziemy

$$\sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta, \text{ czyli}$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że w trójkącie kulistym stosunek wstawy boku do wstawy kąta przeciwległego jest stały. Stosunek ten zowie się **modułem** trójkąta kulistego. *)

Tego ważnego twierdzenia możemy także dowieść wprost. Jakoż, niech będzie trójkąt kulisty ABC (fig. 5); połączmy jego wierzchołki A, B, C ze środkiem kuli, z wierzchołka C spuśćmy prostopadłą CH na płaszczyznę, przechodzącą przez bok AB i środek kuli O, ze spodka H tej prostopadłej spuśćmy prostopadłe HK i HL na promienie OA i OB, wreszcie połączmy punkty K i L z wierzchołkiem C. Według znanego twierdzenia ze Stereometryi CK i CL będą odpowiednio prostopadłe do OA i OB; kąty zatym CKH i CLH będą miarami kątów dwuściennych BOAC i AOBC lub też spełnieniami kątów, będących miarą kątów dwuściennych, stosownie do tego, czy te kąty oba są ostre, czyteż jeden z nich rozwarty. W obu razach z trójkątów CHK i CHL, otrzymamy

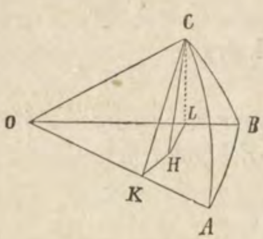

Fig. 5.

$$CH = CK \sin CKH = CL \sin CLH;$$

lecz $CK = \sin b$, $CL = \sin a$, albowiem wstawy tych kątów są dodatne; zresztą $\sin CKH$ jest równa $\sin \alpha$, jeżeli α jest kątem ostrym, zaś

*) Bretschneider, Journal Crellego, t. XIII, str. 85.

$\sin(180^0 - \alpha)$ także równe $\sin\alpha$, gdy α jest kątem rozwartym; podobnież $\sin CLH = \sin\beta$, w każdym więc przypadku, mamy

$$\sin b \sin\alpha = \sin a \sin\beta, \text{ zatym}$$

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}.$$

5. Z układów równań (3) art. 2-go i (1) art. 4-go, możemy wyprowadzić bardzo wiele związków, użytecznych przy rozwiązywaniu trójkątów.

I tak, dajmy, że chcemy znaleść związek między dwoma bokami trójkąta kulistego, kątem, między niemi zawartym, i kątem, jednemu z boków przeciwległym, to jest np. między a, b, γ i α, W tym celu z układów przytoczonych, należy wyrugować bok c i kąt β. Uważmy, że równanie pierwsze i trzecie układu (3) art. 2-go są niezależne od β; do równania $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ również nie wchodzi kąt β; znalezienie więc szukanego związku sprowadza się do wyrugowania z tych trzech równań boku c. Podstawiając w równanie pierwsze układu (3) art. 2-go, zamiast $\cos c$ wyrażenie z równania trzeciego tegoż układu, zamiast $\sin c$ wyrażenie $\frac{\sin a \sin\gamma}{\sin\alpha}$, otrzymamy

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma) + \sin a \sin b \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

czyli

$$\cos a \sin^2 b = \cos b \sin a \sin b \cos\gamma + \sin a \sin b \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha,$$

z podzielenia obu stron tego równania przez $\sin a \sin b$, otrzymamy

(1) $$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha,$$

to jest szukany związek.

6. Związek ten, w kształcie powyżej przedstawionym nie jest łatwy do zapamiętania, możemy go jednak przekształcić na inny, dzieląc przez $\cos b \cos\gamma$ i przenosząc wyraz ostatni na pierwszą stronę równania, wskutek czego otrzymamy

(1) $$\frac{\operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} b}\cdot\frac{1}{\cos\gamma} - \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\gamma}\cdot\frac{1}{\cos b} = 1,$$

a jeżeli zauważymy, że w trójkącie kulistym elementy a, γ, b, α po sobie bezpośrednio następują, wzór powyższy możemy wysłowić jak następuje:

W trójkącie kulistym stosunek dostycznych dwu boków podzielony przez dostawę kąta między niemi zawartego, zmniejszony stosunkiem do-

stycznych dwu kątów wziętych w porządku odwrotnym, podzielonym przez dostyczną boku między niemi zawartego, jest równy jedności.

7. W podobny sposób jak w art. 6-ym możemy wyprowadzić inne wzory między każdemi dwoma bokami trójkąta, kątem, między niemi zawartym i kątem, jednemu z boków przeciwległym, w ten sposób otrzymamy łącznie ze związkiem (1) art. 6-go sześć następujących związków

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha, \\ \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha, \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\beta, \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{cotg}\beta, \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg}\gamma, \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{cotg}\gamma. \end{aligned}\right.$$

8. Postarajmy się teraz znaleść związek między jednym z boków trójkąta kulistego a trzema jego kątami. Do tego celu przyjdziemy, jeżeli z wzorów (3) art. 2-go i wzorów (1) art. 4-go postaramy się wyprowadzić związek do którego nie wchodziłyby dwa boki trójkąta. W tym celu podstawmy w dwa pierwsze równania układu (3) art. 2-go, wyrażenie $\cos c$ z równania trzeciego tegoż układu, mieć będziemy

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma) + \sin b \sin c \cos\alpha,$$

$$\cos b = \cos a\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma) + \sin a \sin c \cos\beta,$$

czyli

$$\cos a \sin^2 b = [\cos b \sin a \cos\gamma + \sin c \cos\alpha] \sin b,$$

$$\cos b \sin^2 a = [\cos a \sin b \cos\gamma + \sin c \cos\beta] \sin a.$$

Upraszczając te równania i postawiając zamiast $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, liczby względem nich proporcyjonalne, z równań (1) art. 4-go otrzymamy

$$\cos a \sin\beta = \cos b \sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha,$$

$$\cos b \sin\alpha = \cos a \sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\beta.$$

Pozostaje nam wyrugować z tych równań bok b, do tego dostatecznym będzie podstawić w równaniu pierwszym zamiast $\cos b \sin\alpha$ wyrażenia, otrzymane z równania drugiego, przez co otrzymamy

$$\cos a \sin\beta = \cos a \sin\beta \cos^2\gamma + \sin\gamma \cos\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha,$$

czyli

$$\cos a \sin\beta \sin^2\gamma = \sin\gamma \cos\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha,$$

a stąd

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a.$$

W podobny sposób znajdziemy wartości $\cos\beta$ i $\cos\gamma$.

Zatym przychodzimy do następującego układu równań:

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a, \\ \cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b, \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \end{cases}$$

9. Wzory, wyprowadzone w poprzedzającym artykule, dają się bardzo prosto otrzymać za pomocą trójkąta biegunowego. Każdemu trójkątowi kulistemu odpowiada trójkąt spełniający czyli tak zwany biegunowy.

Trójkątem biegunowym danego trójkąta kulistego nazywamy taki trójkąt kulisty, którego boki są spełnieniami kątów trójkąta danego, kąty zaś spełnieniami boków tegoż trójkąta danego i nawzajem. Jeżeli więc przez $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ oznaczymy elementy trójkąta kulistego danego, a przez $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ odpowiednie elementy jego trójkąta biegunowego, natenczas mieć będziemy

$$a' = 180^0 - \alpha,\quad b' = 180^0 - \beta,\quad c' = 180^0 - \gamma,$$

$$\alpha' = 180^0 - a,\quad \beta' = 180^0 - b,\quad \gamma' = 180^0 - c.$$

Gdy do trójkąta biegunowego zastosujemy twierdzenie art. 2-go mieć będziemy

$$\cos a' = \cos b'\cos c' + \sin a'\sin b'\cos\alpha',$$

$$\cos b' = \cos a'\cos c' + \sin a'\sin c'\cos\beta',$$

$$\cos c' = \cos a'\cos b' + \sin a'\sin b'\cos\gamma',$$

a jeżeli zamiast a' b', c', α', β' i γ' podstawimy ich wartości $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, i t. d., otrzymamy

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b,$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

10. Układ równań (3) art. 2-go pozwala nam znaleść kąty trójkąta, gdy dane są trzy jego boki. Wzory te jednak nie są dogodne do rachunku logarytmami, dlatego też postaramy się przekształcić je na inne.

Jeżeli w równaniu pierwszym układu (3) art. 2-go zamiast $\cos\alpha$, podstawimy $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$, otrzymamy

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\left(2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1\right)$$

$$= \cos(b + c) + 2\sin b\sin c\cos^2\frac{1}{2}\alpha,$$

stąd

$$2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \cos a - \cos (b + c),$$

czyli

$$\sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a),$$

a stąd

$$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Jeżeli połowę obwodu trójkąta t. j. $\frac{1}{2}(a + b + c)$ oznaczymy przez p, natenczas $\frac{1}{2}(b + c - a) = p - a$, a wzór powyższy przyjmie kształt

$$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin p \sin (p - a)}{\sin b \sin c}, \text{ podobnież}$$

(1)
$$\cos^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{\sin p \sin (p - b)}{\sin a \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sin p \sin (p - c)}{\sin a \sin b}.$$

Jeżeli teraz w pierwszym wzorze układu (3) art. 2-go zamiast $\cos \alpha$ weźmiemy $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, otrzymamy

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha\right)$$

$$= \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

a stąd

$$2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \cos (b - c) - \cos a,$$

czyli

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b + c) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin b \sin c}.$$

Jeżeli założymy $a + b + c = 2p$ i zważymy, że podobne wzory otrzymać możemy na $\sin^2 \frac{1}{2} \beta$ i $\sin^2 \frac{1}{2} \gamma$, znajdziemy

(2)
$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$
$$\sin^2\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c},$$
$$\sin^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}.$$

Jeżeli równania (2) podzielimy stronami odpowiedniemi przez równania układu (1) przyjdziemy do następujących wzorów

(3)
$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)},$$
$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)},$$
$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}.$$

Jeżeli wzory (3) podzielimy przez siebie stronami odpowiedniemi a z ilorazów wyciągniemy pierwiastki kwadratowe, otrzymamy

(4)
$$\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin(p-b)}{\sin(p-a)}, \quad \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin(p-c)}{\sin(p-a)}, \quad \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin(p-c)}{\sin(p-b)}.$$

A jeżeli dla skrócenia położymy

(5)
$$\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}} = \lambda,$$

wzory (3) możemy napisać w kształcie następującym

(6)
$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\lambda}{\sin(p-a)},$$
$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{\lambda}{\sin(p-b)},$$
$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\lambda}{\sin(p-c)}.$$

11. Wzory, wyprowadzone w poprzedzającym artykule, pozwalają za pomocą logarytmów znaleść kąty trójkąta, gdy dane są trzy jego boki. Równania te jednocześnie obejmują warunki, aby z trzech boków można było utworzyć trójkąt kulisty. Jakoż, w równaniach (1) pierwsze strony są dodatne, przeto i drugie powinny być dodatne; że zaś boki trójkąta kulistego są mniejsze od 180°, przeto mianowniki prawych stron są dodatne; aby więc drugie strony równań (1) były dodatne potrzeba, aby ich liczniki były dodatne. Ponieważ liczniki składają się z dwu czynników, przeto oba czynniki powinny być jednakowego znaku, albo oba dodatne, albo oba ujemne. Drugie przypuszczenie nie może mieć miejsca, bo wtedy powinno być p mniejsze od zera, co być nie może. Pozostaje nam więc rozebrać pierwszy przypadek, gdy oba czynniki są dodatne, prowadzący do następujących nierówności

$$p < 180^\circ,\quad p-a>0,\quad p-b>0,\quad p-c>0,\quad \text{czyli}$$

$$a+b+c<360^\circ,\quad b+c-a>0,\quad a-b+c>0,\quad a+b-c>0,$$

a stąd $\quad a+b+c<360^\circ$ i $b+c>a,\quad a+c>b,\quad a+b>c,$

to jest w trójkącie kulistym summa trzech jego boków jest mniejsza od okręgu koła, nadto, summa każdych dwu boków jest większa od boku pozostałego. Stąd podobnie jak w trójkącie płaskim wypada, że każdy bok trójkąta kulistego, jest większy od różnicy dwu boków pozostałych.

Jeżelibyśmy we wzorach (4) założyli $a=b$, natenczas na zasadzie pierwszego z tych równań, mieć będziemy $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, a stąd $\alpha=\beta$ to jest w trójkącie równoramiennym kąty przeciwległe bokom równym są równe. Jeżeli $a=b=c$, natenczas $\alpha=\beta=\gamma$, to jest trójkąt kulisty równoboczny jest równokątny i nawzajem.

12. Za pomocą równań (1) i (2) art. 10-go możemy wyrazić wstawę kąta przez trzy jego boki, ponieważ bowiem $\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, przeto

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

podobnież

$$(1)\qquad \sin\beta=\frac{2}{\sin a\sin c}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

$$\sin\gamma=\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

Jeżeli dla skrócenia położymy

$$(2)\qquad \sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}=\delta,$$

natenczas

$$\sin\alpha = \frac{2\delta}{\sin b \sin c},$$

(3) $$\sin\beta = \frac{2\delta}{\sin a \sin c},$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\delta}{\sin a \sin b}.$$

13. Wzory (1) artykułu 8-go możemy także przekształcić na inne, dogodne do rachunku logarytmami, w sposób podany w art. 11-ym, albotеż wprost stosując wzory (1) i (2) art. 10-go do trójkąta biegunowego $A'B'C'$.

Jeżeli założymy $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = P$, i zwrócimy uwagę na własności trójkątów biegunowych, mieć będziemy:

$$\sin a' = \sin\alpha, \ \sin b' = \sin\beta, \ \sin c' = \sin\gamma,$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha' = \sin\frac{1}{2}a, \ \cos\frac{1}{2}\beta' = \sin\frac{1}{2}b, \ \cos\frac{1}{2}\gamma' = \sin\frac{1}{2}c,$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha' = \cos\frac{1}{2}a, \ \sin\frac{1}{2}\beta' = \cos\frac{1}{2}b, \ \sin\frac{1}{2}\gamma' = \cos\frac{1}{2}c,$$

$$\sin p' = \sin\frac{1}{2}(a' + b' + c') = \sin\left(270^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\right) = -\cos P,$$

$$\sin(p' - a') = \sin\frac{1}{2}(-a' + b' + c') = \sin\left(90^0 - \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma)\right) = \cos(P - \alpha),$$

$$\sin(p' - b') = \sin\frac{1}{2}(a' - b' + c') = \sin\left(90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)\right) = \cos(P - \beta),$$

$$\sin(p' - c') = \sin\frac{1}{2}(a' + b' - c') = \sin\left(90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\right) = \cos(P - \gamma),$$

a następnie zastosujemy wzory (1) i (2) art. 10-go do trójkąta biegunowego, którego elementami są a', b', c', α', β', γ', otrzymamy dwa układy równań

$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{\cos(P - \beta)\cos(P - \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma},$$

(2) $$\cos^2\frac{1}{2}b = \frac{\cos(P - \alpha)\cos(P - \gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma},$$

$$\cos^2\frac{1}{2}c = \frac{\cos(P - \alpha)\cos(P - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{-\cos P \cos (P - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma},$$

(2)
$$\sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{-\cos P \cos (P - \beta)}{\sin \alpha \sin \gamma},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} c = \frac{-\cos P \cos (P - \gamma)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Z równań zaś (1) i (2), otrzymamy

$$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} a = \frac{-\cos P \cos (P - \alpha)}{\cos (P - \beta) \cos P - \gamma)},$$

(3)
$$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} b = \frac{-\cos P \cos (P - \beta)}{\cos (P - \alpha) \cos (P - \gamma)},$$

$$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} c = \frac{-\cos P \cos (P - \gamma)}{\cos (P - \alpha) \cos (P - \beta)}.$$

Z tych równań otrzymać możemy wzory na wstawę boków a, b, c, mianowicie:

$$\sin^2 a = 4 \frac{-\cos P \cos (P - \alpha) \cos (P - \beta) \cos (P - \gamma)}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma},$$

(4)
$$\sin^2 b = 4 \frac{-\cos P \cos (P - \alpha) \cos (P - \beta) \cos (P - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma},$$

$$\sin^2 c = 4 \frac{-\cos P \cos (P - \alpha) \cos (P - \beta) \cos (P - \gamma)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Jeżeli dla skrócenia położymy

(5)
$$\sqrt{-\cos P \cos (P - \alpha) \cos (P - \beta) \cos (P - \beta)} = \Delta,$$

(6)
$$\sqrt{\frac{-\cos (P - \alpha) \cos (P - \beta) \cos (P - \gamma)}{\cos P}} = \rho,$$

wzory na styczną połowy boku i wstawę boku trójkąta kulistego możemy przedstawić w kształcie następującym

(7)
$$\mathrm{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\cos (P - \alpha)}{\rho}, \quad \mathrm{tg} \frac{1}{2} b = \frac{\cos (P - \beta)}{\rho}, \quad \mathrm{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos (P - \gamma)}{\rho},$$

(8)
$$\sin a = \frac{2\Delta}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad \sin b = \frac{2\Delta}{\sin \alpha \sin \gamma}, \quad \sin c = \frac{2\Delta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Wreszcie z równań (3) otrzymamy następujące związki

(9)
$$\frac{\mathrm{tg} \frac{1}{2} a}{\cos (P - \alpha)} = \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{2} b}{\cos (P - \beta)} = \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{2} c}{\cos (P - \gamma)}.$$

W każdym więc trójkącie kulistym styczne połowy jego boków są proporcyjonalne do dostaw przewyżki połowy summy kątów nad kąt przeciwległy temuż bokowi.

14. Wzory, wyprowadzone w poprzedzającym artykule, obejmują znane własności kątów trójkąta kulistego. Jakoż, ponieważ w równaniach (2) pierwsze strony są dodatne, przeto i drugie strony winny być dodatne; że zaś kąt trójkąta kulistego nie może być większy od 180^0, przeto mianowniki drugich stron tych równań są dodatne, aby więc drugie strony równań (2) były dodatne, potrzeba, aby liczniki były dodatne, co wymaga, aby czynniki w licznikach były różnych znaków. Aby czynniki liczników były różnych znaków, potrzeba, aby: albo $90^0 < P < 270^0$, a zarazem $P - \alpha < 90^0$, $P - \beta < 90^0$ i $P - \gamma < 90^0$; albo też $P < 90^0$, a zarazem $90^0 < P - \alpha < 270^0$, $90^0 < P - \beta < 270^0$ i $90^0 < P - \gamma < 270^0$. Ostatnie przypuszczenie jednak nie może mieć miejsca, gdyż mielibyśmy wtedy

$$3P - (\alpha + \beta + \gamma) > 270^0, \text{ czyli } P > 270^0,$$

czyli $\alpha + \beta + \gamma > 540^0$ co się sprzeciwia założeniu. Pozostaje więc nam rozebrać przypuszczenie pierwsze to jest:

$$270^0 > P > 90^0, \quad P - \alpha < 90^0, \quad P - \beta < 90^0, \quad P - \gamma < 90^0,$$

z nierówności tych po podstawieniu zamiast P jego wyrażenia $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, wynika

$$540^0 > \alpha + \beta + \gamma > 180^0,$$

$$\beta + \gamma - \alpha < 180^0, \quad \alpha - \beta + \gamma < 180^0, \quad \alpha + \beta - \gamma < 180^0.$$

Mamy zatym *1) w trójkącie kulistym summa trzech jego kątów jest większa od dwu kątów prostych, a mniejsza od sześciu kątów prostych; 2) różnica między summą dwu kątów, a kątem trzecim jest mniejsza od dwu kątów prostych.*

Jeżeli we wzorach (9) założymy $\alpha = \beta$, wtedy będziemy mieli $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b$, a tymsamym $a = b$, to jest *w trójkącie kulistym o dwu kątach równych, boki im przeciwległe są równe.*

Jeżeli $\alpha = \beta = \gamma$, natenczas $a = b = c$, to jest *trójkąt kulisty równokątny jest jednocześnie trójkątem równobocznym.*

Jeżeli w tychże wzorach $\alpha > \beta$ wtedy $P - \alpha < P - \beta$, a że $P - \alpha < 90^0$ i $P - \beta < 90^0$, $\cos(P - \alpha) > \cos(P - \beta)$, stąd wypada, że $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha > \operatorname{tg} \frac{1}{2} b$, czyli $a > b$, to jest *w trójkącie kulistym, w którym jeden kąt jest większy od drugiego, bok przeciwległy pierwszemu kątowi będzie większy od boku przeciwległego kątowi drugiemu.* Podobnież, gdy

$a > b$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a > \operatorname{tg}\frac{1}{2}b$, a stąd $\cos(P-\alpha) > \cos(P-\beta)$, lecz gdy $P-\alpha < 90^0$ i $P-\beta < 90^0$ będzie $P-\alpha < P-\beta$, czyli $\alpha-\beta > 0$, czyli $\alpha > \beta$, to jest *w trójkącie kulistym, w którym jeden bok jest większy od drugiego, kąt przeciwległy pierwszemu bokowi będzie większy od kąta przeciwległego* czyli innemi słowy *w każdym trójkącie kulistym na przeciwko kątów większych leżą boki większe i nawzajem.*

15. Związki między sześcioma elementami trójkąta. Równania Cagnoli'ego.

Wzory, dające związki między sześcioma elementami trójkąta kulistego podane zostały najpierw przez Cagnoli'ego. *)

Jeżeli obie strony pierwszego z równań (1) artykułu 8-go,

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

pomnożymy przez $\cos a$, będziemy mieli

$$\cos a\cos\alpha = -\cos a\cos\beta\cos\gamma + \cos^2 a\sin\beta\sin\gamma.$$

Kładąc po lewej stronie tego równania

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha,$$

otrzymamy

$$\cos^2\alpha\sin b\sin c + \cos\alpha\cos b\cos c = \cos^2 a\sin\beta\sin\gamma - \cos a\cos\beta\cos\gamma,$$

podstawiając $1-\sin^2\alpha$ zamiast $\cos^2\alpha$ i $1-\sin^2 a$ zamiast $\cos^2 a$, mieć będziemy

$$\sin b\sin c - \sin^2\alpha\sin b\sin c + \cos\alpha\cos b\cos c$$
$$= \sin\beta\sin\gamma - \sin^2 a\sin\beta\sin\gamma - \cos a\cos\beta\cos\gamma;$$

kładąc w drugim wyrazie prawej strony tego równania

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha\sin b}{\sin a}, \quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha\sin c}{\sin a},$$

otrzymamy

$$(1) \qquad \sin b\sin c + \cos b\cos c\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma\cos a.$$

Podobnież

$$(2) \qquad \sin a\sin b + \cos a\cos b\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\cos c,$$

$$(3) \qquad \sin a\sin c + \cos a\cos c\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma\cos b.$$

Takie są związki między sześcioma elementami trójkąta kulistego, podane po raz pierwszy przez Cagnoli'ego.

---

*) Cagnoli, Trigonométrie traduite de l'italien par N. M. Chompré; Paris 1808, str. 325, art. 1139.

Wzory te jednak, jakkolwiek proste pod względem formy, nieprzedstawiają użytku w Trygonometryi, gdyż nie są dogodne do rachunku logarytmami i dlatego przerobimy je na inne, sposobem podanym przez Śniadeckiego w jego Trygonometryi. Jeżeli we wzorze (1) położymy

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1,\ \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a, \text{ otrzymamy}$$

$$-\cos(b+c) + 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos b\cos c = -\cos(\beta+\gamma) + 2\sin^2\frac{1}{2}a\cos\beta\cos\gamma.$$

Lecz na zasadzie tego, co się powiedziało w art. 10-ym i art. 13-ym, mieć będziemy:

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos b\cos c = 2\cos^2\frac{1}{2}a\,[\cos(b-c) - \sin b\sin c]$$

$$= 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos(b-c) + \cos(b+c) - \cos a,$$

zaś
$$2\sin^2\frac{1}{2}a\cos\beta\cos\gamma = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha\,[\cos(\beta-\gamma) - \sin\beta\sin\gamma]$$

$$= 2\sin^2\frac{1}{2}a\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha.$$

Podstawiając te wartości w poprzedzające równanie i znosząc wyrazy odpowiednie, otrzymamy

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos(b-c) - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}a\cos(\beta-\gamma) + \cos a.$$

Kładąc zaś w tym równaniu

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1,\ \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a, \text{ znajdziemy}$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,[\cos(b-c) - 1] = 2\sin^2\frac{1}{2}a\,[\cos(\beta-\gamma) - 1],$$

a że $\cos(b-c) = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(b-c)$, $\cos(\beta-\gamma) = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$,

po podstawieniu tych wartości, zmienieniu znaku i wyciągnięciu pierwiastków przyjdziemy do następującego wzoru

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

W podobny sposób Śniadecki przychodzi do następujących wzorów

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Wzory te znane są pod nazwą wzorów Delambre'a i Gaussa, które wyprowadzimy w następującym artykule, nie opierając się wzorach Cagnoli'ego.

16. Wzory Delambre'a i Gaussa.

Jeżeli we wzorach

$$\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\pm\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\mp\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma,$$

podstawimy wyrażenia wstaw i dostaw kątów $\frac{1}{2}\beta$ i $\frac{1}{2}\gamma$, podane w art. 10-ym i 11-ym, otrzymamy

$$\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\left[\frac{\sin(p-c)\pm\sin(p-b)}{\sin a}\right],$$

$$\cos\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\left[\frac{\sin p\mp\sin(p-a)}{\sin a}\right].$$

Na zasadzie wzorów (1) i (2) art. 10-go, mieć będziemy

$$\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\frac{\sin(p-c)\pm\sin(p-b)}{\sin a}\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\beta\pm\gamma)=\frac{\sin p\mp\sin(p-a)}{\sin a}\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Zamieniając summę i różnicę wstaw w licznikach na iloczyny i kładąc $\sin a=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, otrzymamy

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}, \\
\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}, \\
\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}, \\
\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}.
\end{aligned}
$$

Przez odpowiednie kombinacyje lub też wprost możemy podobnym sposobem wyprowadzić wzory na $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\ldots.$

Takie są zatym wzory, wykazujące związki między sześcioma elementami trójkąta kulistego, a które są znane nam pod nazwą wzorów Delambre'a i Gaussa. *)

Wzory powyższe odznaczają się wielką prostotą i są bardzo dogodne do rachunku logarytmami. Wzory te łatwo dają się zapamiętać, jeżeli zauważymy, że ilekroć w liczniku zachodzi wstawa połowy summy dwu kątów, w mianowniku mamy dostawę połowy kąta trzeciego, gdy zaś

*) Wzory te podane zostały po raz pierwszy przez Delambre'a w Connaissance de temps r. 1808 str. 445, ale bez dowodu, podał je również Mollweide w Zach's Monatlicher Corespondenz 1808 r. Następnie Gauss w dziele swoim Theoria motus Corporum coelestium, wydanym w r. 1809 na str. 51 ogłosił te wzory jako dotąd nieznane, ale także bez dowodu. Śniadecki, uderzony prostotą tych wzorów, usiłował je wyprowadzić co też uskutecznił, opierając się na wzorach Cagnoli'ego i dowód swój przesłał do Akademii Nauk w Petersburgu 21 Marca 1811 r. Delambre w Connaissance de temps z r. 1812, upomniał się o zdanie Gaussa o tych wzorach, jako przez siebie naprzód podanych, ale dowodu nie przytoczył. Dopiero w Astronomii, wydanej w Paryżu 1814 r. tom I str. 161 — 163, przytoczył dowód oparty na Analogijach Napiera; dowód ten jednak jest dosyć zawiły.

w liczniku mamy dostawę połowy summy dwu kątów w mianowniku mamy wstawę połowy kąta trzeciego; jeżeli zaś w liczniku zachodzą wstawy lub dostawy połowy summy dwu boków trójkąta, w mianowniku mamy odpowiednio wstawę lub dostawę połowy boku trzeciego. Prawidło więc na zapamiętanie tych wzorów jest następujące: Jeżeli w liczniku lewej strony równania mamy wstawę połowy summy kątów lub boków, z drugiej strony równania należy brać w liczniku odpowiednią różnicę boków lub kątów, gdy zaś z lewej strony równania będziemy mieli w liczniku dostawę kątów lub boków, z drugiej strony równania należy brać summę odpowiednią boków lub kątów, czyli innemi słowy każdej różnicy odpowiada z drugiej strony równania wstawa, summie zaś dostawa i nawzajem. I tak, gdybyśmy chcieli wypisać wzór drugi z układu (1), to jest mieć $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, natenczas za mianownik należy wziąć dostawę $\frac{1}{2}\alpha$; będzie więc na pierwszej stronie $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, drugą stronę wypiszemy w ten sposób, ponieważ chodzi nam o wstawę różnicy, a wstawie odpowiada znak —, różnicy zaś odpowiada wstawa, przeto należy wziąć $\sin\frac{1}{2}(b-c)$, że zaś mamy wstawę różnicy boków, to za mianownik należy wziąć wstawę połowy boku a i przeto otrzymamy na drugiej stronie

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

17. Analogije Napiera.

Jeżeli równania (1) artykułu poprzedzającego podzielimy stronami odpowiedniemi pierwsze przez trzecie, drugie przez czwarte, czwarte przez trzecie i drugie przez pierwsze przyjdziemy do następujących wzorów:

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma)},$$

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}.$$

Wzory te, których możemy wyprowadzić więcej, mianowicie dla stycznych summy lub różnicy każdych dwu kątów i każdych dwu boków trójkąta zowią się analogijami Napiera (Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614, II, 6).

Wzory te także łatwo zapamiętamy, jeżeli zauważymy, że ilekroć w liczniku pierwszej strony zachodzi summa kątów lub boków, po drugiej stronie mamy dostawę, gdy zaś w liczniku pierwszej strony mamy różnicę, po drugiej mamy wstawę, nadto; że ilekroć w liczniku pierwszej strony mamy summę lub różnicę kątów, w mianowniku zachodzi dostyczna połowy kąta trzeciego, gdy zaś w liczniku mamy styczną połowy summy lub różnicy boków, w mianowniku zachodzi styczna połowy boku trzeciego.

Wzory Delambre'a i Analogije Napiera mają ważne zastosowania przy rozwiązywaniu trójkątów kulistych jak nie mniej w Astronomii sferycznej.

WZORY, ODNOSZĄCE SIĘ DO TRÓJKĄTÓW KULISTYCH PROSTOKĄTNYCH.

18. Jeżeli w trójkącie kulistym jeden z jego kątów jest prosty, mówimy, że trójkąt kulisty jest prostokątny, a bok przeciwległy kątowi prostemu zowiemy przeciwprostokątną. Ponieważ w każdym trójkącie kulistym summa kątów jest większa od dwu kątów prostych, przeto trójkąt kulisty może zamykać dwa a nawet trzy kąty proste, w pierwszym razie trójkąt kulisty zowie się dwuprostokątnym, w drugim zaś trójkątem trójprostokątnym.

Jeżeli trójkąt kulisty zawiera dwa kąty proste czyli jest dwuprostokątny, natenczas dwa jego boki są równe ćwiartkom okręgu koła czyli 90°, trzeci zaś jest miarą kąta trzeciego. Jeżeli trójkąt jest trójprostokątny, natenczas wszystkie trzy boki są ćwiartkami okręgu koła. Z tego powodu ani trójkąt dwuprostokątny, ani trójprostokątny nie prowadzą do żadnych zadań i dlatego niemi zajmować się nie będziemy.

19. Niech A (fig. 6) będzie wierzchołkiem kąta prostego α, trójkąta kulistego ABC, zaś bok $BC = a$ jego przeciwprostokątną, kątami pozostałemi β i γ, bokami zaś b i c.

Jeżeli we wzorze pierwszym układu (1) art. 2-go, (1) art. 4-go, (1) art. 7-go i (1) art. 8-go, założymy $\alpha = 90^\circ$, przyjdziemy do wzorów następujących, służących dla trójkąta kulistego prostokątnego, mianowicie:

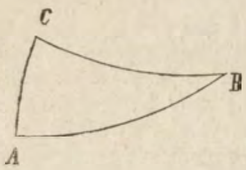

Fig. 6.

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin b = \sin a \sin \beta, \\ \sin c = \sin a \sin \gamma, \end{array} \right.$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos \gamma, \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta, \\ \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} \beta, \\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} \gamma, \end{array} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma, \\ \cos \beta = \cos b \sin \gamma, \\ \cos \gamma = \cos c \sin \beta. \end{array} \right.$$

Wzory te, w ilości dziesięciu, dające nam związki między trzema elementami trójkąta kulistego prostokątnego, dają się wysłowić w sposób następujący:

1) W trójkącie kulistym prostokątnym dostawa przeciwprostokątnej jest równa iloczynowi dostaw pozostałych boków trójkąta;

2) W trójkącie kulistym prostokątnym, wstawa jednego z boków, przyległych kątowi prostemu, jest równa wstawie przeciwprostokątnej pomnożonej przez wstawę kąta przeciwległego temuż bokowi;

3) W trójkącie kulistym prostokątnym styczna boku, przyległego do kąta prostego, jest równa albo iloczynowi stycznej przeciwprostokątnej przez dostawę kąta przyległego do tegoż boku, albo też iloczynowi stycznej kąta przeciwległego temu bokowi przez wstawę boku pozostałego;

4) W trójkącie kulistym prostokątnym dostawa przeciwprostokątnej jest równa iloczynowi dostycznych kątów do niej przyległych, a nadto dostawa jednego z kątów jest równa iloczynowi dostawy boku przeciwległego przez wstawę kąta drugiego.

20. Wzory powyższe dają się przedstawić w kształcie bardzo łatwym do zapamiętania. Jakoż, jeżeli w trójkącie kulistym prostokątnym (fig. 7) w miejsce boków b i c napiszemy ich dopełnienia $90^\circ - b$ i $90^\circ - c$ a kąta prostego nie będziemy brali pod uwagę, będziemy mieli pięć wielkości a, γ, $90^\circ - b$, $90^\circ - c$ i β, które wystawić sobie możemy, jako umieszczone w tymsamym porządku na obwodzie koła.

Owóż, wszystkie wzory wyprowadzone, powyżej dla trójkąta kulistego prostokątnego, dają się wysłowić w sposób następujący: *Dostawa jednej z tych wielkości równa się albo iloczynowi dostycznych dwu wielkości do niej przyległych, albo też iloczynowi wstaw dwu wielkości pozostałych.*

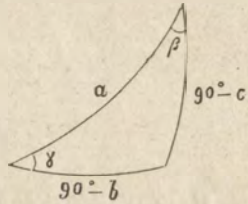

Fig. 7.

Twierdzenie to niejako ogólne dla trójkątów kulistych prostokątnych podane zostało przez Napiera.

I tak: 1) Uważmy wielkość a, ponieważ na kole do wielkości a są przyległe β i γ, przeto na zasadzie tego twierdzenia będziemy mieli

$$\cos a = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma,$$

$$\cos a = \sin(90^\circ - b)\sin(90 - c) = \cos b \cos c,$$

otrzymujemy pierwszy wzór (4) i wzór (1) art. 19-go.

2) Podobnież wychodząc z wielkości $90^\circ - b$, do której są przyległe wielkości γ i $90^\circ - c$, będziemy mieli

$$\cos(90^\circ - b) = \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{cotg}(90^\circ - c),$$

$$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin\beta, \text{ stąd}$$

$$\operatorname{tg}\gamma \sin b = \operatorname{tg} c,$$

$$\sin b = \sin a \sin\beta,$$

otrzymujemy wzór czwarty układu (3) i pierwszy (2) art. 19-go.

21. Powyższe równania przedstawiają niektóre własności trójkątów kulistych prostokątnych i tak: 1) wzór $\cos a = \cos b \cos c$ pokazuje, że dostawy trzech boków a, b, c są albo wszystkie dodatne lub dwie z nich ujemne; zatym albo wszystkie trzy boki są mniejsze od 90°, albo też jeden $< 90^\circ$, a każdy z dwu pozostałych większy od 90°. 2) wzory $\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg}\beta$ i $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg}\gamma$, z przyczyny, że wstawy boków b i c są dodatne, pokazują, że w każdym trójkącie kulistym prostokątnym kąt i bok jemu przeciwległy są oba mniejsze albo oba większe od 90°.

ROZDZIAŁ II.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH PROSTOKĄTNYCH.

22. Trójkąt kulisty prostokątny zawiera pięć elementów, mianowicie trzy boki i dwa kąty. Trójkąt jest wyznaczony, gdy mamy dane dwa którekolwiek z tych elementów, przez co przychodzimy do dziesięciu zagadnień, których jednak rozwiązanie przywodzi się do sześciu różnych przypadków, mianowicie, gdy dane są:

1) dwa boki przyległe do kąta prostego;
2) jeden z boków i przeciwprostokątna;
3) jeden z boków i kąt jemu przeciwległy;
4) jeden z boków i kąt do niego przyległy;
5) przeciwprostokątna i jeden z kątów;
6) dwa kąty.

23. *Przypadek 1-szy. Mając dane boki przyległe do kąta prostego trójkąta kulistego, znaleść przeciwprostokątną i dwa kąty.*

Niech będą dane b i c.

Przeciwprostokątną znajdziemy za pomocą wzoru

$$\cos a = \cos b \cos c, \tag{1}$$

kąty zaś β i γ za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}. \tag{2}$$

Ponieważ przy użyciu logarytmów, otrzymujemy dokładniejsze wypadki, szukając kątów za pomocą stycznych, przeto w niektórych razach zamiast wzoru pierwszego, korzystniej zastąpić go innym. Szukamy naprzód kątów β i γ za pomocą wzoru (2), a następnie przeciwprostokątnej a, za pomocą wzoru $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos\beta}$ lub $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos\gamma}$.

Przykład 1-szy. $b = 15^0\,6'\,20''$, $c = 38^0\,27'\,23''$.

Rachunek kątów β i γ

$$\log \operatorname{tg} b = 9{,}4312427 \qquad \log \operatorname{tg} c = 9{,}8999265$$
$$\log \sin c = 9{,}7937336 \qquad \log \sin b = 9{,}4159713$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 9{,}6375091 \qquad \log \operatorname{tg} \gamma = 10{,}4839552$$
$$\beta = 23^0\,27'\,42'',4, \qquad \gamma = 75^0\,50'\,1'',8.$$

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log \cos b = 9{,}9847286$$
$$\log \cos c = 9{,}8938071$$
$$\log \cos a = 9{,}8785357$$
$$a = 40^0\,53'\,6'',2.$$

Przykład 2-gi. $b = 94^0\,4'\,10''$, $c = 150^0\,34'\,14''$.

Rachunek kątów β γ

$$\log \operatorname{tg} b = 11{,}14785\,(-) \qquad \log \operatorname{tg} c = 9{,}75139\,(-)$$
$$\log \sin c = 9{,}69139 \qquad \log \sin b = 9{,}99891$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 11{,}45646\,(-) \qquad \log \operatorname{tg} \gamma = 9{,}75248\,(-)$$
$$\beta = 92^0\,0'\,8'', \qquad \gamma = 150^0\,30'\,33''.$$

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log \cos b = 8{,}85105\,(-)$$
$$\log \cos c = 9{,}94000$$
$$\log \cos a = 8{,}79105\,(-)$$
$$a = 86^0\,27'\,23''.$$

PRZYKŁADY.

DANE		SZUKANE		
b	c	a	β	γ
$23^0\,18'\,12''$	$55^0\,28'\,24''$	$58^0\,37'\,50'',4$	$27^0\,36'\,6'',3$	$74^0\,46'\,30'',7$
120 10 0	60 0 16	104 33 0	116 43 12,3	63 28 39,6
177 44 11,3	178 56 42,7	2 29 50	114 58 22,4	155 0 22,6
48 19 43	67 48 17	75 27 13,9	50 30 26,7	73 3 2,9

Jeżeli bok b jest bardzo mały $= n$ sekund, natenczas $\beta = \frac{n''}{\sin c}$, $a = c$, $\gamma = 90^0 - n'' \operatorname{cotg} c$.

Przykład. $b = 23'',48$, $c = 121^0 22' 7''$; $\beta = 27'',5$, $\gamma = 90^0 0' 14'',3$.

24. *Przypadek 2-gi. Mając przeciwprostokątną i jeden z boków trójkąta kulistego prostokątnego, znaleść pozostały bok i kąty.*

Niech będą dane a i b.

Bok c znajdziemy za pomocą wzoru

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \tag{1}$$

i otrzymamy jedyną wartość. Kąt β otrzymamy za pomocą wzoru

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}. \tag{2}$$

Z dwu wartości kąta β, wypadających z tego wzoru, weźmiemy tę, która z bokiem b jest albo mniejsza albo większa od 90^0. Nakoniec kąt γ znajdziemy ze wzoru

$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}. \tag{3}$$

Z tego widzimy, że jeżeli trójkąt jest możebny, natenczas istnieje jedno tylko rozwiązanie. Lecz, aby trójkąt był możebny, potrzeba, aby znalezione wartości $\cos c$, $\sin \beta$ i $\cos \gamma$, zadośćczyniły warunkom możebności istnienia trójkąta. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest w tym przypadku, aby przeciwprostokątna a, była zawarta między b i $180^0 - b$. Jakoż, aby równanie (2) wyznaczało wstawę, potrzeba, aby $\frac{\sin b}{\sin a} < 1$, czyli $\sin b < \sin a$. Ponieważ zaś boki b i a są mniejsze od 180^0, przeto, gdy b jest mniejsze od 90^0, być powinno $b < a < 180^0 - b$; gdy zaś b jest większe od 90^0 powinno być $180^0 - b < a < b$; czyli innemi słowy a powinno być zawarte między b i $180^0 - b$. Zresztą, przy tym warunku, wartość $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od jedności, wartość zaś $\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$ jest również zawarta między -1 i $+1$; przeto warunek powyższy jest konieczny i dostateczny.

25. Wzory artykułu poprzedzającego wyznaczają c, β i γ za pomocą dostaw i wstaw, możemy jednak znaleść te wielkości za pomocą stycznej. Jakoż, ponieważ $\frac{c}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$ są mniejsze od 90^0, przeto

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}} = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}}$$
$$= \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}} = \sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}},$$

Wreszcie, ponieważ kąt $45^0 + \frac{\beta}{2}$ może być mniejszy lub większy od 90^0, stosownie do wielkości kąta β względem 90^0, przeto

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} = \pm\sqrt{\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)}}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)}}.$$

Bierzemy znak + gdy b jest mniejsze od 90^0, zaś znak — gdy b jest większe od 90^0; ponieważ b i β są jednocześnie, albo oba $< 90^0$, albo oba $> 90^0$.

Przykład 1-szy. $a = 124^0\,31'\,36''$, $b = 23^0\,18'\,12''$.

Rachunek kątów β i γ

$\log\sin b = 9{,}59726$	$\log\operatorname{tg} b = 9{,}63421$
$\log\sin a = \underline{9{,}91586}$	$\log\operatorname{tg} a = \underline{10{,}16243}\ (-)$
$\log\sin\beta = 9{,}68140$	$\log\cos\gamma = 9{,}47178\ (-)$
$\beta = 28^0\,41'\,50''$	$\gamma = 107^0\,14'\,15''$.

Rachunek boku c

$\log\cos a = 9{,}75342\ (-)$
$\log\cos b = \underline{9{,}96304}$
$\log\cos c = 9{,}79038\ (-)$
$c = 128^0\,6'\,26''$.

Przykład 2-gi. $a = 71^0\,24'\,30''$, $b = 140^0\,52'\,40''$.

Rachunek kątów β i γ

$\log\sin b = 9{,}8000134$	$\log\operatorname{tg} b = 9{,}9102626\ (-)$
$\log\sin a = \underline{9{,}9767235}$	$\log\operatorname{tg} a = \underline{10{,}4731759}$
$\log\sin\beta = 9{,}8232899$	$\log\cos\gamma = 9{,}4370867\ (-)$
$\beta = 138^0\,15'\,45'',4$,	$\gamma = 105^0\,52'\,39''$.

Rachunek boku c

$$\log\cos a = 9{,}5035475$$
$$\log\cos b = 9{,}8897507$$
$$\log\cos c = 9{,}6137968$$
$$c = 114^\circ\, 15'\, 54''.$$

PRZYKŁADY.

DANE		SZUKANE		
a	b	c	β	γ
$86^\circ\, 27'\, 23''$	$85^\circ\, 55'\, 50''$	$29^\circ\, 25'\, 46''$	$87^\circ\, 59'\, 53''$	$29^\circ\, 29'\, 29''$
125 40 0	143 33 0	43 32 31	133 0 18	57 59 17″
121 22 7	23 18 12	124 31 33	27 36 5	105 13 28

Jeżeli bok b jest bardzo mały i wynosi np. n sekund, natenczas kąt β w sekundach możemy otrzymać za pomocą wzoru $\beta = \frac{n}{\sin a}$, nadto $c = a$, $\gamma = 90^\circ - n'' \operatorname{cotg} a$.

Przykład. $b = 43'',35$, $a = 35^\circ\, 9'\, 24''$,

$$\beta = 1'\, 15'',28,\ c = a = 35^\circ\, 9'\, 24'',\ \gamma = 89^\circ\, 58'\, 58'',45.$$

Jeżeli wreszcie boki b i a są oba bardzo małe $b = n$ sekund, $a = p$ sekund, natenczas $\sin\beta = \frac{n}{p}$, $c = \sqrt{p^2 - n^2}$, $\gamma = 90^\circ - \beta$.

26. *Przypadek 3-ci. Mając dany bok przyległy do kąta prostego, trójkąta kulistego i kąt jemu przeciwległy, znaleść pozostały kąt i boki.*

Niech będą dane b i β.

Szukane wielkości otrzymamy za pomocą wzorów

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta},\quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}\beta},\quad \sin\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos b}. \tag{1}$$

Każdy z tych wzorów daje nam odpowiedni element trójkąta, wyrażony przez jego wstawę, byle tylko wartości tych wstaw nie były większe od jedności. Zauważmy naprzód, że aby trójkąt był możebny potrzeba przedewszystkim, aby wstawy powyższych elementów trójkąta były dodatne. Lecz, aby $\sin a$ było dodatne, potrzeba, aby $\sin b$ i $\sin\beta$ były jednakowego znaku, aby zaś $\sin c$ było dodatne, potrzeba, aby $\operatorname{tg} b$ i $\operatorname{tg}\beta$ były jednakowego znaku, zatym w obu razach bok b i kąt β są jednocześnie $> 90^\circ$ lub oba $< 90^\circ$, tensam wniosek otrzymujemy i z wyrażenia $\sin\gamma$.

Pozostaje nam jeszcze pokazać, pod jakim warunkiem wstawy tych elementów są mniejsze od jedności. Warunkiem tym jest, że kąt β powinien być zawarty między 90^0 i b. Jakoż, aby $\sin a$ było mniejsze od jedności, potrzeba, aby $\sin b < \sin \beta$, że zaś b i β są jednocześnie albo $> 90^0$ albo $< 90^0$, przeto gdy $\beta < 90^0$, będzie $b < \beta$, gdy zaś $\beta > 90^0$, będzie $\beta < b$, czyli w pierwszym przypadku $b < \beta < 90^0$, w drugim zaś $90^0 < \beta < b$. Zatym warunkiem koniecznym jest, aby β przypadało między 90^0 i b. Ten warunek jest nie tylko konieczny, ale i dostateczny, albowiem skoro jemu staje się zadość, $\sin b$, które jest dodatne, będzie < 1, również $\sin \beta$ jest dodatne i będzie < 1. Zauważmy w końcu, że powyższy warunek obejmuje jednocześnie i warunek pierwszy, że b i β powinny być jednocześnie $> 90^0$ lub $< 90^0$.

Przypuśćmy, że warunkowi temu staje się zadość i szukajmy, ile istnieje trójkątów danemu zadaniu odpowiadających. Niech a', c' i γ' będą wartości elementów a, c, γ, otrzymane z tablic zaś $a'' = 180^0 - a'$, $c'' = 180^0 - c'$, $\gamma'' = 180^0 - \gamma'$ spełnienia tych elementów, które również jak pierwsze, zadośćczynią równaniom (1). Weźmy naprzód c' mniejsze od 90^0, ponieważ c i γ powinny być jednocześnie $< 90^0$ lub $> 90^0$, przeto należy wziąć γ' mniejsze od 90^0. Ponieważ wiemy, że $\cos a = \cos b \cos c$, $\cos a$ i $\cos c$ są jednakowego znaku, gdy $b < 90^0$, znaków zaś przeciwnych, gdy $b > 90^0$; gdy więc $b < 90^0$, należy wziąć $a = a'$, gdy zaś $b > 90^0$, należy wziąć $a = a'' = 180^0 - a'$.

Weźmy następnie $c = c'' > 90^0$, natenczas trzeba wziąć $\gamma = \gamma''$ większe od 90^0; że zaś, na mocy wzoru $\cos a = \cos b \cos c$, $\cos a$ i $\cos c$ są jednakowego znaku, gdy $b < 90^0$, znaków zaś przeciwnych, gdy $b > 90^0$; gdy więc $b < 90^0$ należy wziąć $a = a'' = 180^0 - a'$, gdy zaś $b > 90^0$, należy wiąć $a = a' < 90^0$. Widzimy więc z tego, że gdy b przypada między 90^0 i b istnieją zawsze dwa trójkąty, rozwiązujące zadanie, mianowicie:

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
b < \beta < 90^0 &\left\{ \begin{array}{lll} c = c', & \gamma = \gamma', & a = a', \\ c = 180^0 - c', & \gamma = 180^0 - \gamma', & a = 180^0 - a', \end{array} \right. \\
90^0 < \beta < b &\left\{ \begin{array}{lll} c = c', & \gamma = \gamma', & a = 180^0 - a', \\ c = 180^0 - c', & \gamma = 180^0 - \gamma', & a = a'. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Jeżeli b jest równe β, mamy $\sin a = \sin c = \sin \gamma = 1$, $a = c = \gamma = 90^0$, a zatym jedno rozwiązanie, mianowicie trójkąt dwuprostokątny.

27. Łatwo możemy się przekonać gieometrycznie, że jeżeli zadanie jest możebne, istnieją w ogóle dwa trójkąty, zadośćczyniące warunkom zadania. Jakoż, jezeli ABC (fig. 8) jest trójkątem kulistym, mającym kąt CAB $= 90^0$ i zadośćczyniącym warunkom zadania, to jest, że kąt ABC $= \beta$, bok AC $= b$, natenczas przedłużając boki BA i BC aż do przecięcia się w punktach B', otrzymamy trójkąt kulisty prostokątny AB'C, który zadośćczynić będzie warunkom zadania, albowiem trójkąt

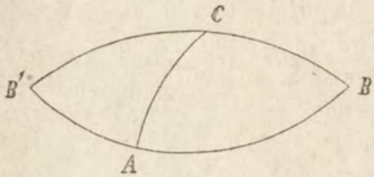

Fig. 8.

otrzymany ma kąt CAB' = 90°, bok AC = b i kąt AB'C, jako równy ABC = β.

28. Możemy też otrzymać szukane elementy za pomocą wprowadzenia stycznych trygonometrycznych. Jakoż, mamy

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} = \pm\sqrt{\frac{\sin\beta + \sin b}{\sin\beta - \sin b}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+b)}}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} b}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sin(\beta+b)}{\sin(\beta-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\gamma}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}} = \pm\sqrt{\frac{\cos b + \cos\beta}{\cos b - \cos\beta}}$$

$$= \pm\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta+b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta-b)},$$

i w tych wzorach bierzmy znak +, jeżeli odpowiedni element a, lub c, lub γ jest mniejszy od 90°, zaś znak — jeżeli odpowiedni element jest większy od 90°; zresztą warunki (2), wyprowadzone w artykule 26-ym, pokażą nam, jakie należy brać znaki w poprzedzających wzorach.

Przykład 1-szy. $b = 124^\circ\,31'\,36''$, $\beta = 105^\circ\,13'\,29''$.

Rachunek boku a

$$\begin{aligned} \log\sin b &= 9{,}91586 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}98449} \\ \log\sin a &= 9{,}93137 \\ a' &= 121^\circ\,22'\,10'', \\ a'' &= 58^\circ\,37'\,50''. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} b &= 10{,}16243\ (-) \\ \log\operatorname{tg}\beta &= \underline{10{,}56518}\ (-) \\ \log\sin c &= 9{,}59725 \\ c' &= 23^\circ\,18'\,10'', \\ c'' &= 156^\circ\,41'\,50''. \end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log\cos\beta &= 9{,}41930\ (-) \\ \log\cos b &= \underline{9{,}75342}\ (-) \\ \log\sin\gamma &= 9{,}66588 \\ \gamma' &= 27^\circ\,36'\,\ 5'', \\ \gamma'' &= 152^\circ\,23'\,55''. \end{aligned}$$

Przykład 2-gi. $b = 35^\circ\,24'\,57'',4$, $\beta = 52^\circ\,41'\,48''$.

Rachunek boku a

$$\begin{aligned} \log\sin b &= 9{,}7630594 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}9006065} \\ \log\sin a &= 9{,}8624529 \\ a' &= 46^\circ\,45'\,50'',7, \\ a'' &= 133^\circ\,14'\,\ 9'',3. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} b &= 9{,}8519196 \\ \log\operatorname{tg}\beta &= \underline{10{,}1181090} \\ \log\sin c &= 9{,}7338106 \\ c' &= 32^\circ\,48'\,13'',8, \\ c'' &= 147^\circ\,11'\,46'',2. \end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log\cos\beta &= 9{,}7824974 \\ \log\cos b &= \underline{9{,}9111398} \\ \log\sin\gamma &= 9{,}8713576 \\ \gamma' &= 48^\circ\,\ 2'\,30'', \\ \gamma'' &= 131^\circ\,57'\,30''. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

DANE		SZUKANE		
b	β	a	c	γ
48° 19′ 43″	50° 30′ 26″,7	75° 27′ 14″	67° 48′ 17″	73° 3′ 3″
		104 32 46	112 11 43	106 56 57
93 4 10	91 30 27	92 40 26	29 23 29	29 25 36
		87 19 34	150 36 31	150 34 24
156 41 48	152 23 54	58 37 51,3	124 31 35	105 13 28,6
		121 22 8,7	55 28 25	74 46 31,4
136 49 37	123 17 19	125 3 51,4	38 1 28,8	48 48 54,8
		54 56 8,6	141 58 31,2	131 11 5,2

29. *Przypadek 4-ty. Mając jeden z boków, przyległych do kąta prostego trójkąta kulistego i kąt doń przyległy, znaleść pozostałe boki i kąt.*

Niech będą dane b i γ.

Szukane elementy otrzymamy za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos\gamma}, \quad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg}\gamma, \quad \cos\beta = \cos b \sin\gamma.$$

Dostawa kąta β przypada między -1 i $+1$, nadto jest tegożsamego znaku co $\cos b$, gdyż $\sin\gamma$ jest dodatne; otrzymujemy więc jednę wartość kąta β i to jednocześnie z $b >$ lub $< 90°$. Boki a i c otrzymujemy za pomocą stycznych trygonometrycznych, przeto będziemy mieli po jednej wartości na każdy. Trójkąt więc jest zawsze możebny i otrzymujemy jedno rozwiązanie.

Przykład 1-szy. $b = 149° 45' 23''$, $\gamma = 110° 42' 25''$.

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log\operatorname{tg} b = 9{,}76569\ (-)$$
$$\log\cos\gamma = \underline{9{,}54850}\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg} a = 10{,}21719$$
$$a = 58° 45' 52''.$$

Rachunek boku c

$$\log\sin b = 9{,}70215$$
$$\log\operatorname{tg}\gamma = \underline{10{,}42250}\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg} c = 10{,}12465\ (-)$$
$$c = 126° 53' 18''.$$

Rachunek kąta β

$$\log\cos b = 9{,}93646\ (-)$$
$$\log\sin\gamma = \underline{9{,}97100}$$
$$\log\cos\beta = 9{,}90746\ (-)$$
$$\beta = 143° 54' 33''.$$

Przykład 2-gi. $b = 82^0\,4'\,32''$, $\gamma = 124^0\,5'\,10''$.

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log\operatorname{tg} b = 10{,}8563721$$
$$\log\cos\gamma = \underline{\ 9{,}7485278}\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg} a = 11{,}1078443\ (-)$$
$$a = 94^0\,27'\,38'',4.$$

Rachunek boku

$$\log\sin b = 9{,}9958329$$
$$\log\operatorname{tg}\gamma = \underline{10{,}1696055}\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg} c = 10{,}1654384\ (-)$$
$$c = 124^0\,20^0\,30'',2.$$

Rachunek kąta

$$\log\cos b = 9{,}1394608$$
$$\log\sin\gamma = \underline{9{,}9181332}$$
$$\log\cos\beta = 9{,}0575940$$
$$\beta = 83^0\,26'\,37''.$$

PRZYKŁADY.

D A N E		S Z U K A N E		
b	γ	a	c	c
$94^0\ 4'\ 10''$	$150^0\ 30'\ 31''$	$86^0\ 27'\ 23''$	$150^0\ 34'\ 14''$	$92^0\ 0'\ 8''$
120 10 0	116 31 20	75 27 0	119 59 44	116 43 12
48 19 43	106 56 57	104 32 46	112 11 43	50 30 27
44 26 21	50 0 0	56 45 19,1	39 50 30,9	56 50 30,8

30. *Przypadek 5-ty. Mając daną przeciwprostokątną trójkąta kulistego i jeden z jego kątów, znaleść pozostałe dwa boki i kąt.*

Niech będą dane a i β.

Szukane elementy trójkąta znajdziemy za pomocą wzorów

$$\sin b = \sin a \sin\beta,\quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos\beta,\quad \operatorname{cotg}\gamma = \cos a \operatorname{tg}\beta.$$

Drugi i trzeci z tych wzorów dają po jednej wartości każdej z wielkości c i γ, oba te elementy c i γ są jednocześnie oba większe lub mniejsze od 90^0, dopóki $\operatorname{tg} c$ i $\operatorname{cotg}\gamma$ mają jednakowe znaki. Wzór pierwszy wyznacza bok b za pomocą jego wstawy, wartość której jest mniejsza od jedności, nadto, ponieważ b i β są jednocześnie mniejsze lub większe od 90^0, przeto bierzemy tę wartość b, która jednocześnie z β jest większa lub mniejsza od 90^0. Zadanie więc jest zawsze możebne i otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie.

Jeżelibyśmy chcieli wyznaczyć bok b za pomocą jego stycznej, natenczas obliczamy najpierw kąt γ za pomocą trzeciego z powyższych wzorów, a następnie bok b za pomocą wzoru $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos\gamma$.

Przykład 1-szy. $a = 75^0\,45'\,28''$, $\beta = 23^0\,59'$.

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log\sin a &= 9{,}98644 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}60903} \\ \log\sin b &= 9{,}59547 \\ b &= 23^0\,12'\,8''. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} a &= 10{,}59547 \\ \log\cos\beta &= \underline{9{,}96079} \\ \log\operatorname{tg} c &= 10{,}55626 \\ c &= 74^0\,28'\,28''. \end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log\cos a &= 9{,}39098 \\ \log\operatorname{tg}\beta &= \underline{9{,}64824} \\ \log\operatorname{cotg}\gamma &= 9{,}03922 \\ \gamma &= 83^0\,45'\,14''. \end{aligned}$$

Przykład 2-gi. $a = 115^0\,20'\,15''$, $\beta = 44^0\,2'\,5''$.

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log\sin a &= 9{,}9560736 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}8420437} \\ \log\sin b &= 9{,}7981173 \\ b &= 38^0\,55'\,10'',2. \end{aligned}$$

Rachunek boku c.

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} a &= 10{,}3246811\,(-) \\ \log\cos\beta &= \underline{9{,}8566798} \\ \log\operatorname{tg} c &= 10{,}1813609\,(-) \\ c &= 123^0\,22'\,11'',9. \end{aligned}$$

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log\cos a &= 9{,}6313925\,(-) \\ \log\operatorname{tg}\beta &= \underline{9{,}9853639} \\ \log\operatorname{cotg}\gamma &= 9{,}6167564\,(-) \\ \gamma &= 112^0\,28'\,41'',5. \end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

DANE		SZUKANE		
a	β	b	c	γ
58° 45′ 51″	36° 5′ 26″,7	30° 14′ 36″,4	53° 6′ 40″,9	69° 17′ 33″,8
104 33 0	63 16 48	59 50 0,3	119 59 44,3	116 31 20,8
75 27 13,8	129 29 33,3	131 40 17	112 11 43,2	106 56 57,2
2 29 49,6	65 1 37,6	2 15 48,7	1 3 17,3	24 59 37,4
93 22 37	92 0 7	93 55 30	30 37 35	30 41 7

31. *Przypadek 6-ty. Mając dane dwa kąty β i γ trójkąta kulistego prostokątnego, znaleść jego boki.*

Niech będą dane β i γ.

Szukane elementy trójkąta znajdziemy za pomocą wzorów:

(1) $$\cos a = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma,$$

(2) $$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

(3) $$\cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Każdy z szukanych elementów otrzymujemy za pomocą jego dostawy, otrzymamy więc jednę wartość każdego elementu, byle tylko wartości tych dostaw przypadały między -1 i $+1$; jeżeli więc zadanie jest możebne do rozwiązania, otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie.

32. Warunki możebności zadania dają się gieometrycznie wprost otrzymać. Jakoż, aby istniał trójkąt zadaniu odpowiadający, powinien istnieć także odpowiedni trójkąt biegunowy, a którego bokami, jak wiadomo będą 90°, $180^\circ - \beta$ i $180^\circ - \gamma$. Aby jednak trójkąt biegunowy był możebny, koniecznym i dostatecznym jest, jak wiadomo, aby każdy z jego boków był mniejszy od summy pozostałych boków, summa zaś trzech jego boków była mniejszą od 360°, to jest, potrzeba, aby było

$$90^\circ < 360^\circ - (\beta + \gamma),\ 180^\circ - \beta < 180^\circ + 90^\circ - \gamma,$$

$$180^\circ - \gamma < 180^\circ + 90^\circ - \beta \text{ i } 360^\circ + 90^\circ - (\beta + \gamma) < 360^\circ,$$

czyli

(1) $$90^\circ < \beta + \gamma < 270^\circ \text{ i } -90^\circ < \beta - \gamma < 90^\circ.$$

Warunkami możebności zadania są: summa kątów $\beta + \gamma$ powinna przypadać między 90° i 270°, różnica zaś tychże kątów $\beta - \gamma$ przypadać powinna między -90° i 90°.

33. Warunki powyższe dają się także otrzymać ze wzorów, podanych w art. 31-ym. W tym celu uważmy równanie (2) art. 31-go. Aby z równania tego można było otrzymać bok b, potrzeba, aby

$$-1 < \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} < 1,$$

że zaś $\sin\gamma$ jest dodatne, przeto

$$-\sin\gamma < \cos\beta < \sin\gamma.$$

Rozważymy tutaj dwa przypadki:

1) Przypuśćmy, że $\beta < 90^\circ$; wtedy $\cos\beta$ jest dodatne, nierówności $-\sin\gamma < \cos\beta$ staje się zadość, przeto pozostaje jedyny warunek

$$\cos\beta < \sin\gamma,$$

czyli
$$\sin(90^0 - \beta) < \sin\gamma.$$

Kąty $90^0 - \beta$ i γ są dodatne i mniejsze od 180^0, aby więc powyższemu warunkowi stawało się zadość, potrzeba, aby kąt γ przypadał między $90^0 - \beta$ i jego spełnieniem $90^0 + \beta$, a ponieważ $90^0 - \beta$ jest mniejsze od $90^0 + \beta$, przeto być powinno $90^0 - \beta < \gamma < 90^0 + \beta$, czyli $\beta + \gamma > 90^0$ i $\beta - \gamma > -90^0$. Ponieważ zresztą $\beta < 90^0$, a γ mniejsze od 180^0, przeto nierówności $\beta + \gamma < 270^0$ staje się zadość; wreszcie różnica $\beta - \gamma$ jest mniejsza od 90^0, albowiem β jest mniejsze od od 90^0. Warunki przeto (4) art. 32-go są konieczne.

2) Przypuśćmy, że $\beta > 90^0$; wtedy $\cos\beta$ jest ujemne, nierówności $\cos\beta < \sin\gamma$ staje się zadość, jedynym warunkiem koniecznym dla możebności zadania jest $-\cos\beta < \sin\gamma$, czyli $\cos(180^0 - \beta) < \sin\gamma$ albo $\sin(90^0 - 180^0 + \beta) < \sin\gamma$ albo wreszcie $\sin(\beta - 90^0) < \sin\gamma$. Każdy z kątów $\beta - 90^0$ i γ jest dodatny i mniejszy od 180^0, nadto kąt $\beta - 90^0$ jest mniejszy od 90^0, przeto mieć powinniśmy

$$\beta - 90^0 < \gamma < 180^0 - (\beta - 90^0),$$

czyli
$$\beta - \gamma < 90^0 \text{ i } \beta + \gamma < 270^0.$$

Zresztą β jest większe od 90^0, summa $\beta + \gamma$ jest mniejsza od 90^0, zaś $\beta - \gamma$ jest większe od -90^0; albowiem, jeżeli γ jest mniejsze od β, różnica $\beta - \gamma$ jest dodatna, a jeżeli γ jest większe od β, z przyczyny, że β jest większe od 90^0, kąty γ i β, jako zawarte między 90^0 i 180^0, dają różnicę $\gamma - \beta$ mniejszą od 90^0, a tymsamym mamy $\beta - \gamma > -90^0$. Zatym warunki (1) art. 32-go w tym przypadku są konieczne.

Warunki (1) art. 32-go są nietylko konieczne ale i dostateczne, albowiem, gdy im się staje zadość, z równania (3) art. 31-go otrzymujemy jednę wartość $\cos c$, o czym się można przekonać powtarzając na wzorze (3) rozumowania powyżej przeprowadzone; nakoniec z równania (1) art. 31-go, wynika jedna wartość $\cos a$, przypadająca między -1 i $+1$. Jakoż, ponieważ $\cos a = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}$, przeto dostatecznym będzie dowieść, że gdy nierównościom (4) art. 32-go staje się zadość, wartość bezwzględna iloczynu $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest większa od jedności.

Jeżeli β i γ są mniejsze od 90^0, iloczyn $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest dodatny i z przyczyny nierówności $\beta + \gamma > 90^0$ czyli $90^0 - \beta < \gamma$, mamy $\operatorname{tg}(90^0 - \beta) < \operatorname{tg}\gamma$, czyli $\operatorname{cotg}\beta < \operatorname{tg}\gamma$, czyli $1 < \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$.

Jeżeli $\beta < 90^0$, $\gamma > 90^0$ iloczyn $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest ujemny, na zasadzie zaś nierówności $\beta - \gamma > -90^0$, czyli $90^0 - \beta < 180^0 - \gamma$, będzie

$\operatorname{tg}(90^0 - \beta) < \operatorname{tg}(180^0 - \gamma)$, czyli $1 < -\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, zatym iloczyn $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest co do wartości bezwzględnej większy od jedności.

Jeżeli $\beta > 90^0$ i $\gamma < 90^0$ iloczyn $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest ujemny, z nierówności $\beta - \gamma < 90^0$, mamy $\beta - 90^0 < \gamma$, a ponieważ oba te kąty są ostre, przeto $\operatorname{tg}(\beta - 90^0) < \operatorname{tg}\gamma$, czyli $1 < \operatorname{tg}(180^0 - \beta)\operatorname{tg}\gamma$ albo $1 < -\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, zatym wartość bezwzględna $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest większa od jedności.

Jeżeli nakoniec $\beta > 90^0$ i $\gamma > 90^0$ iloczyn $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ jest dodatny; z nierówności $\beta + \gamma < 270^0$, otrzymujemy $\beta - 90^0 < 180^0 - \gamma$, że zaś kąty $\beta - 90^0$ i $180^0 - \gamma$ są ostre, przeto $\operatorname{tg}(\beta - 90^0) < \operatorname{tg}(180^0 - \gamma)$, czyli $\operatorname{cotg}(180^0 - \beta) > \operatorname{tg}(180^0 - \gamma)$, czyli $1 < \operatorname{tg}(180^0 - \beta)\operatorname{tg}(180^0 - \gamma)$, czyli $1 < \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$.

Nierówności więc (1) art. 32-go, dają nam warunki konieczne i dostateczne, aby zadanie było możebne do rozwiązania.

34. Wzory art. 31-go wyznaczają elementy a, b, c za pomocą odpowiednich dostaw; możemy tożsame elementy wyznaczyć za pomocą stycznych, a mianowicie:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma}{1+\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma}} = \sqrt{\frac{-\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}} = \sqrt{\frac{\sin\gamma - \cos\beta}{\sin\gamma + \cos\beta}}$$

$$= \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\gamma}{2} + 45^0\right)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}} = \sqrt{\frac{\sin\beta - \cos\gamma}{\sin\beta + \cos\gamma}}$$

$$= \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma-\beta}{2} + 45^0\right)},$$

przed każdym z tych pierwiastków bierzemy znak $+$, albowiem boki a, b, c są mniejsze od 180^0, zatym $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ są mniejsze od 90^0; zresztą pierwiastki są rzetelne na mocy warunków (1) art. 32-go, którym według naszego założenia staje się zadość.

Przykład 1-szy. $\beta = 152^0\, 23'\, 53'',7$, $\gamma = 105^0\, 13'\, 29'',3$.

Rachunek przeciwprostokątnej a	*Rachunek boku b*
$\log\operatorname{cotg}\beta = 10{,}28164\,(-)$	$\log\cos\beta = 9{,}94752\,(-)$
$\log\operatorname{cotg}\gamma = \underline{9{,}43482}\,(-)$	$\log\sin\gamma = \underline{9{,}98449}$
$\log\cos a = 9{,}71646$	$\log\cos b = 9{,}96303\,(-)$
$a = 58^0\, 37'\, 50''$.	$b = 156^0\, 41'\, 35''$.

Rachunek boku c

$$\log\cos\gamma = 9{,}41931\ (-)$$
$$\log\sin\beta = 9{,}66588$$
$$\log\cos c = 9{,}75343\ (-)$$
$$c = 124^0\ 31'\ 38''.$$

Używając siedmiocyfrowych logarytmów, znajdziemy

$$a = 58^0\ 37'\ 50'',3,\quad b = 156^0\ 41'\ 48'',\quad c = 124^0\ 31'\ 36'',1.$$

Przykład 2-gi. $\beta = 48^0\ 2'\ 30''$, $\gamma = 52^0\ 41'\ 48''$.

Rachunek przeciwprostokątnej a

$$\log\operatorname{cotg}\beta = 9{,}9538023$$
$$\log\operatorname{cotg}\gamma = 9{,}8818910$$
$$\log\cos a = 9{,}8356933$$
$$a = 46^0\ 45'\ 50'',6.$$

Rachunek boku b

$$\log\cos\beta = 9{,}8251599$$
$$\log\sin\gamma = 9{,}9006065$$
$$\log\cos b = 9{,}9245534$$
$$b = 32^0\ 48'\ 13'',8.$$

Rachunek boku c

$$\log\cos\gamma = 9{,}7824974$$
$$\log\sin\beta = 9{,}8713576$$
$$\log\cos c = 9{,}9111398$$
$$c = 35^0\ 24'\ 57'',4.$$

PRZYKŁADY.

DANE		SZUKANE		
β	γ	a	b	c
94° 3′ 40″	7° 6′ 50″	124° 40′ 21″,6	124° 52′ 48″,4	5° 50′ 45″
87 5 30	84 9 50	89 42 9	87 4 35	84 9 23
90 36 42,3	90 50 47	89 59 27,5	90 36 42,5	90 50 47,2
129 29 33,3	73 3 2,9	104 32 46,1	131 40 17	67 48 17

PRZYPADKI, W KTÓRYCH ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTA KULISTEGO SPROWADZA SIĘ DO ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTA KULISTEGO PROSTOKĄTNEGO.

35. Zdarzają się trójkąty kuliste, których rozwiązanie sprowadza się bezpośrednio do rozwiązania trójkąta kulistego prostokątnego, i tak:

1) Jeżeli między elementami trójkąta danego znajduje się jeden bok równy ćwiartce okręgu koła, natenczas kąt odpowiedni w trójkącie biegunowym będzie prosty; że zaś dla rozwiązania trójkąta danego są nam dane dwa jego elementy, przeto będziemy mieli wiadome w trójkącie kulistym biegunowym, który będzie prostokątny, dwa jego elementy. Zadanie więc rozwiązania trójkąta kulistego danego sprowadzi się wtedy do rozwiązania trójkąta kulistego biegunowego prostokątnego. Skoro rozwiążemy trójkąt biegunowy, otrzymamy szukane boki i kąty trójkąta danego, biorąc spełnienia odpowiednich kątów i boków trójkąta kulistego biegunowego.

Warunki, jakim się stawać zadość powinno, aby rozwiązanie trójkąta kulistego było w tym razie możebne, wyprowadzimy z warunków dla trójkąta kulistego biegunowego, który jest w tym przypadku trójkątem kulistym prostokątnym.

Zadania, tyczące się rozwiązania trójkąta kulistego, którego jeden z boków jest ćwiartką okręgu koła, dają się bez pomocy trójkąta kuliste-

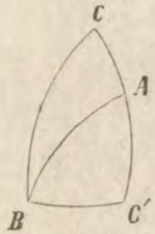

Fig. 9.

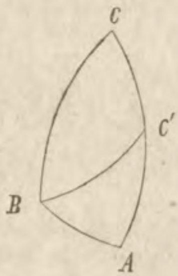

Fig. 9a.

go biegunowego sprowadzić do rozwiązania trójkąta kulistego prostokątnego. Jakoż, jeżeli w trójkącie kulistym ABC (fig. 9) bok $BC = a = 90^0$, natenczas przedłużając bok CA tak, aby $CC' = 90^0$ i łącząc punkty B i C' łukiem koła wielkiego, utworzymy trójkąt ABC', w którym kąt $AC'B = 90^0$. Jeżeli boki BC', C'A i AB trójkąta BAC' oznaczymy przez a', b', c', kąty zaś im przeciwlegle przez α', β', γ', będziemy mieli

$$a' = \gamma,\quad b' = 90^0 - b,\quad c' = c,$$

$$\alpha' = 180^0 - \alpha,\quad \beta' = 90^0 - \beta,\quad \gamma' = 90^0.$$

Jeżeli bok $CA > 90^0$, natenczas odcinając $CC' = BC = 90^0$ (fig. 9a), otrzymamy trójkąt prostokątny kulisty BC'A, którego boki $AB = c$, $BC' = \gamma$, $AC' = b - 90^0$, kąty zaś $BAC' = \alpha$, $BC'A = 90^0$, $C'BA = \beta - 90^0$.

Rozwiązując więc trójkąt kulisty BAC′, w którymkolwiek z sześciu przypadków będziemy tymsamym mieli i rozwiązany trójkąt ABC.

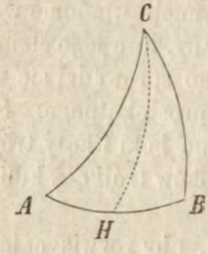

Fig. 10.

2) Jeżeli w trójkącie ABC, (fig. 10) pomiędzy jego elementami znajdują się dwa boki a i b równe sobie, czyli, gdy trójkąt jest równoramienny, natenczas prowadząc z wierzchołka C koło wielkie prostopadłe do boku AB utworzymy dwa trójkąty prostokątne symetryczne ACH i CHB. Jeżeli jeden z tych trójkątów rozwiążemy, mając dane dwa któregokolwiek z jego elementów, mieć będziemy rozwiązanie trójkąta równoramiennego.

3) Jeżeli w trójkącie kulistym ABC (fig. 11) dwa jego boki a i b, albo dwa kąty α i β są spełniającemi się, natenczas przedłużając boki BA i BC aż do przecięcia się w punkcie B′ utworzymy trójkąt

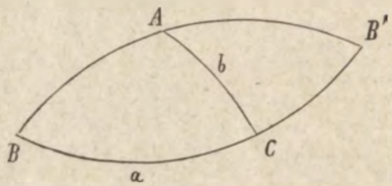

Fig. 11.

równoramienny ACB′, w którym AC = CB′ i CB′A $= \beta' = \beta$. Rozwiązanie więc w tym przypadku trójkąta ABC sprowadza się do rozwiązania trójkąta równoramiennego, a tymsamym do rozwiązania trójkąta kulistego prostokątnego.

Przykład 1-szy. $a = 90^0$, $\beta = 150^0\,34'\,14''$, $b = 150^0\,32'\,7'',2$.

W tym razie rozwiązujemy trójkąt prostokątny biegunowy, w którym $b' = 29^0\,25'\,46''$, $\beta' = 29^0\,27'\,52'',8$, za pomocą wzorów

$$\sin a' = \frac{\sin b'}{\sin \beta'}, \quad \sin \gamma' = \frac{\operatorname{tg} b'}{\operatorname{tg} \beta'}, \quad \sin c' = \frac{\cos \beta'}{\cos b'}.$$

Rachunek boku a′	*Rachunek boku c′*
$\log \sin b' = 9{,}6913822$	$\log \operatorname{tg} b' = 9{,}7513933$
$\log \sin \beta' = 9{,}6918651$	$\log \operatorname{tg} \beta' = 9{,}7520169$
$\log \sin a' = 9{,}9995271$	$\log \sin c' = 9{,}9993764$
$a' = 87^0\,19'\,36''$.	$c' = 86^0\,55'\,49'',1$

Rachunek kąta γ'

$$\log\cos\beta' = 9{,}9398482$$
$$\log\cos b' = 9{,}9399989$$
$$\log\sin\gamma' = 9{,}9998493$$
$$\gamma' = 88^0\,29'\,26'',7.$$

Ponieważ $\beta' < 90^0$, przeto na za zasadzie artykułu 26-go, jako rozwiązanie trójkąta biegunowego będziemy mieli

$$a' = 87^0\,19'\,36'',\quad c' = 86^0\,55'\,49'',1,\quad \gamma' = 88^0\,29'\,26'',7,$$

i
$$a' = 92^0\,40'\,24'',\quad c' = 93^0\;\;4'\,10'',9,\quad \gamma' = 91^0\,30'\,33'',3.$$

Zatym rozwiązaniami trójkąta danego będą:

$$\alpha = 92^0\,40'\,24'',\quad \gamma = 93^0\;\;4'\,10'',9,\quad c = 91^0\,30'\,33'',3,$$

i
$$\alpha = 87^0\,19'\,36'',\quad \gamma = 86^0\,55'\,49'',1,\quad c = 88^0\,29'\,26'',7.$$

Przykład 2-gi. Mając dane boki $a = 152^0\,13'\,30'',4$, $b = 27^0\,46'\,29'',6$, $c = 133^0\;3'\;36''$, *znaleść kąty trójkąta kulistego.*

Ponieważ $a + b = 180^0$, przeto rozwiązanie trójkąta uskutecznimy za pomocą prawidła w punkcie trzecim niniejszego artykułu wyłożonego, to jest rozwiążemy trójkąt AB'C, w którym bok $AB' = c' = 180^0 - c = 46^0\,56'\,24''$, bok $B'C = AC = b = 180^0 - a = a' = 27^0\,46'\,29'',6$, czyli trójkąt, w którym dwa boki są równe $27^0\,46'\,29'',6$, trzeci zaś równy $46^0\,56'\,24''$. Rozwiązujemy więc trójkąt kulisty prostokątny, którego jednym bokiem jest $c' = \dfrac{46^0\,56'\,24''}{2} = 23^0\,28'\,12''$, a przeciwprostokątną $27^0\,46'\,29'',6$. Mamy wtedy

$$\sin\frac{1}{2}\gamma' = \frac{\sin\frac{1}{2}c'}{\sin b},\quad \cos\beta' = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c'}{\operatorname{tg} b}.$$

Rachunek kąta γ'

$$\log\sin\frac{1}{2}c' = 9{,}6001763$$
$$\log\sin b = 9{,}6683849$$
$$\log\sin\frac{1}{2}\gamma' = 9{,}9317914$$
$$\frac{1}{2}\gamma' = 58^0\,43'\,18'',36,$$
$$\gamma' = 117^0\,26'\,36'',7.$$

Rachunek kąta β'

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} c' = 9{,}6376797$$

$$\log \operatorname{tg} b = \underline{9{,}7215470}$$

$$\log \cos \beta' = 9{,}9161327$$

$$\beta' = 34^0\, 28'\, 23'',9,$$

że zaś kąt γ' jest spełnieniem kąta γ, zaś kąt $\beta' = \beta$, przeto

$$\gamma = 62^0\, 33'\, 23'',3, \quad \beta = 34^0\, 28'\, 23'',9.$$

Wreszcie kąt α jako spełniający kąta β, będzie

$$\alpha = 145^0\, 31'\, 36'',1.$$

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH JAKICHKOLWIEK.

36. Wiemy, że trójkąt kulisty, jest w ogólności wyznaczony, gdy dane są trzy którekolwiek jego elementy, zatym i zadania, tyczące się rozwiązywania trójkątów kulistych, sprowadzają się do rozważania tylu przypadków, ile jest kombinacyj z sześciu elementów po trzy na raz branych, czyli do dwudziestu przypadków; przypadki jednak te dają się sprowadzić do sześciu różnych przypadków, mianowicie, gdy są dane:

1) trzy boki trójkąta kulistego;
2) trzy jego kąty;
3) dwa boki i kąt między niemi zawarty;
4) jeden bok i dwa kąty doń przyległe;
5) dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy;
6) dwa kąty i bok jednemu z nich przeciwległy.

Rozbierzemy szczegółowo każdy z tych przypadków.

37. *Przypadek 1-szy. Mając dane trzy boki trójkąta kulistego, znaleść jego kąty.*

Niech będą dane a, b i c.

Kąt α wyznaczyć możemy bezpośrednio za pomocą wzoru pierwszego z wzorów (3) art. 2-go, to jest

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Lecz wzór ten nie jest dogodny do rachunku logarytmami i dlatego do wyznaczenia kąta α używamy wzorów (1), (2) lub (3) art. 10-go, mianowicie:

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p - a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

Jeżeli chodzi o znalezienie jednego z kątów trójkąta kulistego, obojętną jest rzeczą, którego z tych wzorów użyjemy; jeżeli zaś chodzi nam o znalezienie wszystkich kątów trójkąta, najdogodniej użyć wzorów, dających nam styczną połowy kąta; gdyż wzory te wymagają szukania tylko czterech logarytmów dla wszystkich kątów i dają dostateczne przybliżenie.

Zwrócić należy uwagę, że przy użyciu wzorów na styczną połowy kąta rachunek daje się znacznie uprościć. Jakoż, wzór na $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, możemy napisać w kształcie:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{\sin(p-a)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

Jeżeli więc oznaczymy przez λ wartość pierwiastka po prawej, który wyraża, jakto poniżej zobaczymy, styczną trygonometryczną promienia koła wpisanego w trójkąt kulisty, będziemy mieli

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\lambda}{\sin(p-\alpha)},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=\frac{\lambda}{\sin(p-b)},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=\frac{\lambda}{\sin(p-c)},$$

a znalazszy wartość $\log\lambda$ dostatecznym będzie od niego odjąć $\log\sin(p-a)$, $\log\sin(p-b)$, $\log\sin(p-c)$, aby otrzymać logarytmy $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$.

Wzory powyżej przytoczone zarazem wskazują nam znane warunki możebności rozwiązania trójkąta kulistego. Jakoż, w przypadku rozważanym według art. 11-go zadanie będzie zawsze możebne, gdy summa trzech boków trójkąta jest mniejsza od 360^0 i każdy z boków jest mniejszy od summy dwu pozostałych.

Przykład 1-szy. $a=40^0\,28'\,40''$, $b=58^0\,10'\,10''$, $c=34^0\,3'\,20''$.

Rachunek przedwstępny

$p=66^0\,21'\,5''$	$\log\sin(p-a)=\ 9{,}63987$
$p-a=25^0\,52'\,25''$	$\log\sin(p-b)=\ 9{,}15326$
$p-b=\ 8^0\,10'\,55''$	$\log\sin(p-c)=\ 9{,}72778$
$p-c=32^0\,17'\,45''$	comp. $\log\sin p=\ 0{,}03809-10$
$\log\sin p=9{,}96191$	$\log\lambda^2=18{,}55900$
	$\log\lambda\ =\ 9{,}27950$

Rachunek kąta α

$$\log\lambda = 9{,}27950$$
$$\log\sin(p-a) = 9{,}63987$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = 9{,}63963$$
$$\frac{1}{2}\alpha = 23^0\ 33'\ 51''$$
$$\alpha = 47^0\ \ 7'\ 42''.$$

Rachunek kąta β

$$\log\lambda = 9{,}27950$$
$$\log\sin(p-b) = 9{,}15326$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = 10{,}12624$$
$$\frac{1}{2}\beta = 53^0\ 12'\ 44'',$$
$$\beta = 106^0\ 25'\ 28''.$$

Rachunek kąta γ

$$\log\lambda = 9{,}27950$$
$$\log\sin(p-c) = 9{,}72778$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = 9{,}55172$$
$$\frac{1}{2}\gamma = 19^0\ 36'\ 25'',4,$$
$$\gamma = 39^0\ 12'\ 51''.$$

Używając logarytmów siedmiocyfrowych, znaleźlibyśmy następujące wypadki

$$\alpha = 47^0\ \ 7'\ 41'',1,$$
$$\beta = 106^0\ 25'\ 31'',4.$$
$$\gamma = 39^0\ 12'\ 51'',2.$$

Jeżeli dla znalezienia kąt α użyjemy wzoru

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

natenczas wprowadzając taki kąt posiłkowy φ, aby

$$\cos b\cos c = \cos\varphi,$$

otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos\varphi}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi - a)\sin\frac{1}{2}(\varphi + a)}{\sin b\sin c}.$$

Stosując ten wzór do powyższego przykładu, otrzymamy

Rachunek kąta φ

$$\log\cos b = 9{,}72215$$
$$\log\cos c = 9{,}91829$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}64044$$
$$\varphi = 64^0\ 5'\ 23''.$$

Rachunek kąta α

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\varphi - a) = 9{,}31090$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\varphi + a) = 9{,}89820$$

$$19{,}51013$$

$$\log\sin b\,\sin c = 19{,}67740$$

$$\log\cos\alpha = 9{,}83273$$

$$\alpha = 47^0\ 7'\ 46''.$$

Rachunek iloczynu $\sin b\,\sin c$

$$\log\sin b = 9{,}92922$$

$$\log\sin c = 9{,}74818$$

$$\log\sin b\,\sin c = 19{,}67740$$

Używając zaś logarytmów siedmiocyfrowych, znaleźlibyśmy

$$\varphi = 64^0\ 5'\ 24'',7, \quad \alpha = 47^0\ 7'\ 41'',1.$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
a	b	c	α	β	γ
37° 29′ 14″,7	68° 47′ 43″,9	96° 47′ 21″,4	25° 24′ 12″,2	41° 5′ 3″,5	135° 34′ 37″,2
69 3 34,8	75 56 53,2	70 8 32	72 27 47,9	82 3 22,6	73 47 26
50 48 20	116 44 48	129 11 40	59 51 22	94 50 25	120 8 38
109 39 0	38 28 16,4	128 18 46	72 12 53,6	38 58 40,6	127 30 4,5
29 54 40,1	148 26 4,8	162 25 59,6	69 49 29,1	99 49 8,8	145 22 49,9

38. *Przypadek 2-gi. Mając dane trzy kąty trójkąta kulistego, znaleść trzy jego boki.*

Niech będą dane α, β i γ.

Boki a, b, c trójkąta kulistego otrzymamy za pomocą wzorów (1) artykułu 8-go. Jakoż, bok a znajdziemy z pierwszego z tych wzorów

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Wzór ten jednak nie jest dogodny do rachunku logarytmami i moglibyśmy jedynie przez wprowadzenie kąta posiłkowego, uczynić go dogodnym do rachunku logarytmami. Zazwyczaj jednak do wyrachowania boków trójkąta używamy wzorów (1), (2) lub (3) art. 13-go, mianowicie:

$$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-\alpha)}{\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}},$$

gdzie

$$2P=\alpha+\beta+\gamma.$$

Jeżeli zachodzi potrzeba znalezienia jednego z boków trójkąta, obojętną będzie rzeczą, który z tych wzorów weźmiemy za podstawę rachunku; jeżeli zaś potrzebujemy wyrachować wszystkie boki trójkąta, najdogodniej jest używać wzorów na styczną połowy boku; w tym bowiem razie potrzebujemy znaleść logarytmy czterech funkcyj trygonometrycznych, gdy, tymczasem używając wzoru na dostawę połowy boku, potrzebujemy szukać sześciu logarytmów, używając zaś wstawy — siedmiu logarytmów. Zwrócić należy uwagę, że przy użyciu wzorów na styczną połowy boku, możemy, jak w przypadku poprzedzającym, rachunek znacznie uprościć. Jakoż, wzór na styczną połowy kąta możemy napisać w kształcie

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\cos(P-\alpha)\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)\cos(\beta-\gamma)}},$$

jeżeli więc wartość pierwiastka po prawej oznaczymy dla skrócenia przez $\frac{1}{\rho}$, czyli jeżeli

$$\rho=\sqrt{\frac{\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}{-\cos P}},$$

gdzie $\frac{1}{\rho}$, jakto poniżej zobaczymy, oznacza dostyczną promienia koła opisanego na trójkącie kulistym, będziemy mieli

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\frac{\cos(P-\alpha)}{\rho}\ \text{podobnież}\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}b=\frac{\cos(P-\beta)}{\rho},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\frac{\cos(P-\gamma)}{\rho}.$$

Po znalezieniu logarytmu ρ, dostatecznym będzie odjąć go od logarytmów $\cos(P-\alpha)$, $\cos(P-\beta)$ i $\cos(P-\gamma)$, aby znaleść logarytmy stycznych połowy boków.

Wzory powyższe zarazem obejmują warunki, jakim się zadość stawać powinno, aby rozwiązanie trójkąta było możebne. Jakoż, według art. 14-go, zadanie będzie możebne do rozwiązania, gdy summa trzech kątów będzie większa od 180°, a mniejsza od 540°, a nadto summa dwu którychkolwiek kątów zmniejszona o kąt trzeci, będzie mniejsza od 180°.

Zwrócić należy uwagę, że przypadek niniejszy rozwiązania trójkąta kulistego daje się za pomocą trójkąta kulistego biegunowego sprowadzić do przypadku pierwszego, to jest do rozwiązania trójkąta, gdy są dane trzy jego boki.

Przykład. $\alpha = 47^0\,7'\,41'',1,\ \beta = 106^0\,25'\,31'',2,$

$$\gamma = 39^0\,12'\,51'',1.$$

Mamy w tym razie

Rachunek przedwstępny

$P = 96^0\,23'\ \ 1'',7$	$\log\cos(P-\alpha) = 9,81470$
$P - \alpha = 49^0\,15'\,20'',6$	$\log\cos(P-\beta) = 9,99330$
$P - \beta = -10^0\,2'\,29'',5$	$\log\cos(P-\gamma) = 9,73412$
$P - \gamma = 57^0\,10'\,10'',6$	$\text{comp.}\log\cos P = 0,95394-10$
$\log\cos P = 9,04606\ (-)$	$\log\rho^2 = 20,49606$
	$\log\rho = 10,24803$

Rachunek boku a

$$\log\cos(P-\alpha) = 9,81470$$
$$\log\rho = 10,24803$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}a = 9,56667$$
$$a = 40^0\,28'\,40''.$$

Rachunek boku b

$$\log\cos(P-\beta) = 9,99330$$
$$\log\rho = 10,24803$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}b = 9,74527$$
$$b = 58^0\,10'\,12''.$$

Rachunek boku c

$$\log\cos(P-\gamma) = 9,73412$$
$$\log\rho = 10,24803$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = 9,48609$$
$$c = 34^0\,3'\,20''.$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
α	β	γ	a	b	c
72° 12′ 53″	141° 1′ 33″	52° 30′ 0″	109° 39′ 8″,6	141° 32′ 59″,2	51° 41′ 14″,8
139 21 21,3	126 57 52	123 8 11,7	130 0 0	110 0 0	100 0 0
154 35 47,8	41 5 3,5	44 25 22,8	142 30 45,4	68 47 44	83 12 38,6
41 55 45	142 13 58	12 49 37,5	101 22 13,2	116 1 45,4	19 0 33,9
32 32 43,1	52 49 46,6	119 31 27,1	38 4 11,8	65 58 20,7	87 27 9,8
34 58 32,4	127 10 13,4	65 53 26,9	38 4 11,7	121 0 1,1	100 55 40,2

39. *Przypadek 3-ci. Mając dane dwa boki trójkąta kulistego i kąt między niemi zawarty, znaleść pozostały bok c i kąty.*

Niech będą dane a, b i kąt γ.

Na zasadzie wzorów (1) artykułu 7-go, mianowicie pierwszego i trzeciego znajdziemy szukane kąty; jakoż

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos\gamma}{\sin\gamma},$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{cotg} b \sin a - \cos a \cos\gamma}{\sin\gamma},$$

Aby wzory te uczynić dogodnemi do rachunku logarytmami, wprowadzamy takie kąty posiłkowe φ i ψ, aby

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg} a = \cos\gamma \operatorname{cotg}\varphi, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \cos\gamma,$$

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{cotg} b = \cos\gamma \operatorname{cotg}\psi, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg} b \cos\gamma, \quad \text{wtedy}$$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma \sin\varphi}{\sin(b-\varphi)},$$

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\gamma \sin\psi}{\sin(a-\psi)}.$$

Znajdziemy więc kąty α i β, szukając dla każdego pięciu logarytmów. Mając zaś kąty α i β, znajdziemy bok c za pomocą wzoru

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma,$$

który przez wprowadzenie któregokolwiek z kątów posiłkowych φ i ψ daje nam wyrażenie dostawy boku c, dogodne do rachunku logarytmami, mianowicie:

$$\text{(7)} \qquad \cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi} \quad \text{lub} \quad \cos c = \frac{\cos b \cos(a-\psi)}{\cos\psi}.$$

Zdarza się, że bok c nie daje się dokładnie wyznaczyć przez swoją dostawę; wtedy rachujemy naprzód kąty α i β, a następnie znajdujemy bok c za pomocą jego stycznej; jeżeli bowiem wzory

$$\sin c = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ i } \sin c = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin \beta},$$

podzielimy stronami odpowiedniemi przez wzory (7) i uwzględnimy związki (3), (4), (5) i (6), znajdziemy

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(b-\varphi)}{\cos \alpha} \text{ i } \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(a-\psi)}{\cos \beta}.$$

40. Zadanie powyższe możemy także rozwiązać, za pomocą analogij Napiera. Jakoż, na zasadzie pierwszego i drugiego z wzorów artykułu 17-go, mamy

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma.$$

Z tych wzorów znajdziemy $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ i $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, a tymsamym kąty szukane α i β. Pozostały bok c możemy znaleść albo za pomocą wzoru $\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin \gamma$, przypuszczając, że kąt α jest już nam znany, alboteż za pomocą wzoru Delambre'a

$$\cos \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cos \frac{1}{2}\gamma,$$

lub też analogij Napiera

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b),$$

albo
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b),$$

41. Widzimy, że używając do rozwiązania zadania wzorów, podanych w art. 39-ym, potrzebujemy do znalezienia kąta α lub β szukać pięciu logarytmów, używając zaś sposobu, podanego w artykule 40-ym, potrzebujemy szukać także pięciu logarytmów do znalezienia obudwu kątów. Przy szukaniu więc obu kątów α i β korzystniej jest używać analogij Napiera. Podobnież, gdy chodzi o znalezienie, oprócz kątów α i β, boku c, korzystniej jest używać analogij Napiera, gdyż one wymagają szukania jednego logarytmu. Gdy jednak chodzi o znalezienie samego boku c korzystniej jest użyć jednego z wzorów (7) art. 38-go, gdyż on wymaga szukania pięciu logarytmów. Ponieważ przypuszczamy, że dane elementy są zawarte między 0 i 180°, przeto zadanie jest zawsze możebne i posiada jedno rozwiązanie.

42. Gdy zachodzi potrzeba znalezienia jedynie boku c trójkąta kulistego, jeżeli ten przez swoję dostawę nie daje się dokładnie oznaczyć, możemy jeszcze użyć innego wzoru. I tak, jeżeli we wzorze

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

zamiast $\cos\gamma$ weźmiemy $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\gamma$, będziemy mieli

$$\cos c = \cos(a - b) - 2 \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\gamma, \quad \text{czyli}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} c = \sin^2 \frac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2}\gamma.$$

Jeżeli do tego wzoru wprowadzimy taki kąt posiłkowy w, aby

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \sqrt{\sin a \sin b},$$

otrzymamy

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\cos w}.$$

Wzór ten, jak i poprzednie, wymagają szukania pięciu logarytmów.

43. Zadanie powyższe możemy też rozwiązać za pomocą trójkątów kulistych prostokątnych. Jakoż, jeżeli z wierzchołka A (fig. 12) poprowadzimy koło wielkie prostopadłe do boku BC, to koło to przetnie bok BC w punkcie H, albo między punktami C i B alboteż na przedłużeniu boku CB (fig. 12a). Trójkąt ABC będzie wtedy summą albo różnicą dwu trójkątów prostokątnych kulistych ACH i ABH, stosownie do tego czy punkt H przypada na boku CB, czyteż na jego przedłużeniu. Rozważając trójkąt ACH, mamy w nim daną przeciwprostokątną AC $= b$ i kąt ACH $= \gamma$, możemy więc ten trójkąt rozwiązać i znaleść boki AH i CH, mając zaś bok CH, znajdziemy HB $=$ CB $-$ CH $= a -$ CH; z trójkąta zaś AHB prostokątnego, w którym wiadome będą AH i HB, znajdziemy

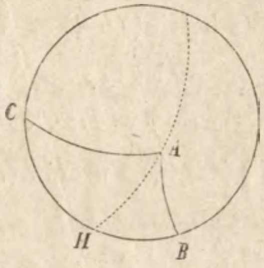

Fig 12.

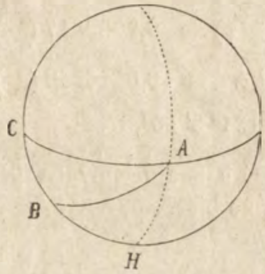

Fig. 12*a*.

pozostałe jego elementy. Jeżeli CH jest mniejsze od a, kąt β trójkąta ABC będzie równy kątowi ABH trójkąta prostokątnego ABH; jeżeli zaś CH jest większe od a, kąt β trójkąta ABC będzie spełnieniem kąta ABH trójkąta prostokątnego ABH. Każdy z trójkątów prostokątnych ma jedno rozwiązanie, zatym istnieje jeden tylko trójkąt, zadośćczyniący warunkom zadania.

Przykład. $a = 127^0\,43'\,40''$, $b = 53^0\,40'\,20''$, $\gamma = 64^0\,50'\,20''$.

1) Szukamy najpierw kątów posiłkowych φ i ψ takich, aby

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \cos\gamma, \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg} b \cos\gamma.$$

Rachunek kąta φ

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} a &= 10{,}1114484\,(-) \\ \log\cos\gamma &= \underline{9{,}6285576} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 9{,}7400060\,(-) \end{aligned}$$

$$\varphi = 151^0\,12'\,32'',66.$$

Rachunek kąta ψ

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} b &= 10{,}1335238 \\ \log\cos\gamma &= \underline{9{,}6285576} \\ \log\operatorname{tg}\psi &= 9{,}7620814 \end{aligned}$$

$$\psi = 30^0\,2'\,12'',08.$$

Następnie kąty α i β znajdujemy za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma \sin\varphi}{\sin(b-\varphi)}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\gamma \sin\psi}{\sin(a-\psi)}.$$

Rachunek kąta α

$$\log \operatorname{tg} \gamma = 10{,}3281466$$
$$\log \sin \varphi = \underline{\ 9{,}6826999}$$
$$20{,}0108465$$
$$\log \sin (b - \varphi) = \underline{\ 9{,}9962317}\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = 10{,}0146148\ (-)$$
$$\alpha = 134^0\ 2'\ 10'',07.$$

Rachunek kąta β

$$\log \operatorname{tg} \gamma = 10{,}3281466$$
$$\log \sin \psi = \underline{\ 9{,}6994514}$$
$$20{,}0275980$$
$$\log \sin (a - \psi) = \underline{\ 9{,}9960754}$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}0315226$$
$$\beta = 47^0\ 4'\ 39'',15.$$

Bok zaś c znajdziemy za pomocą jednego z wzorów (7) art. 39-go, przypuśćmy, że bierzemy wzór

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi},$$

$$\log \cos a = 9{,}7866880\ (-)$$
$$\log \cos (b - \varphi) = \underline{\ 9{,}1178140}\ (-)$$
$$18{,}9045020$$
$$\log \cos \varphi = \underline{\ 9{,}9426939}\ (-)$$
$$\log \cos c = 8{,}9618081\ (-)$$
$$c = 95^0\ 15'\ 16'',56.$$

2) Ten sam przykład rozwiążemy za pomocą analogij Napiera.

Rachunek kąta $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$$\log \cos \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}9021899$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = \underline{10{,}1971610}$$
$$20{,}0993509$$
$$\log \cos \frac{1}{2}(a + b) = \underline{\ 8{,}0869646}\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 12{,}0123863\ (-)$$
$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0\ 33'\ 24'',59.$$

Rachunek kąta $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$$\log \sin \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}7797423$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = \underline{10{,}1971610}$$
$$19{,}9769033$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(a + b) = \underline{\ 9{,}9999676}$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 9{,}9769357$$
$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 43^0\ 28'\ 45'',47,$$

$$\alpha = 134^0\ 2'\ 10'',06, \quad \beta = 47^0\ 4'\ 39'',12.$$

Bok zaś c za pomocą wzoru Delambre'a.

$$\log\cos\frac{1}{2}(a-b) = 9{,}9021899$$

$$\log\cos\frac{1}{2}\gamma = \underline{9{,}9264176}$$

$$19{,}8286075$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \underline{9{,}9999795}$$

$$\log\cos\frac{1}{2}c = 9{,}8286280$$

$$\frac{1}{2}c = 47^0\,37'\,38'',27,$$

$$c = 95^0\,15'\,16'',54$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
a	b	γ	α	β	c
37° 29′ 14″,7	111° 12′ 16″,1	44° 25′ 22″,8	25° 24′ 12″,2	138° 54′ 56″,6	83° 12′ 38″,7
69 3 34,8	104 3 6,8	106 12 34,2	72 27 47,9	97 56 37,4	109 51 28,3
3 43 25,2	177 41 45,5	152 58 55,6	120 57 6	147 56 7,6	178 1 40
70 20 50	38 28 0	52 30 0	107 47 6,5	38 58 26,7	51 41 14
141 55 48,2	114 1 39,1	119 21 27,2	147 27 17	127 10 13,4	87 27 10

44. *Przypadek 4-ty. Mając dany bok trójkąta kulistego i dwa kąty doń przyległe, znaleść pozostałe boki trójkąta i kąt.*

Niech będą dane c, α i β.

Za pomocą wzorów (1) artykułu 7-go, mianowicie drugiego i czwartego, znajdziemy szukane boki, jakoż wzory

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \operatorname{cotg}\alpha \sin\beta + \cos c \cos\beta,$$

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \operatorname{cotg}\beta \sin\alpha + \cos c \cos\alpha,$$

dają

$$(1) \qquad \operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \sin\beta + \cos c\cos\beta}{\sin c},$$

$$(2) \qquad \operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg}\beta \sin\alpha + \cos c\cos\alpha}{\sin c}.$$

Aby te wzory uczynić dogodnemi do rachunku logarytmami, wprowadzamy takie kąty posiłkowe φ i ψ, zawarte między 0 i 180°, aby

$$
\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= -\operatorname{tg}\alpha\cos c, \\ \operatorname{tg}\psi &= -\operatorname{tg}\beta\cos c. \end{aligned}
$$

Wtedy wzory (1) i (2) dadzą się napisać w kształcie:

$$
\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= -\frac{\sin\varphi\operatorname{tg} c}{\sin(\beta-\varphi)}, \\ \operatorname{tg} b &= -\frac{\sin\psi\operatorname{tg} c}{\sin(\alpha-\psi)}. \end{aligned}
$$

Znajdziemy tym sposobem boki a, b, kąt zaś γ znajdziemy za pomocą wzoru

$$
\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c,
$$

który, przez wprowadzenie któregokolwiek z kątów posiłkowych φ lub ψ, da nam wyrażenie dostawy kąta γ, dogodne do rachunku logarytmami, mianowicie:

$$
\text{(5)} \qquad \cos\gamma = -\frac{\cos\alpha\cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi},
$$

$$
\text{(6)} \qquad \cos\gamma = -\frac{\cos\beta\cos(\alpha-\psi)}{\cos\psi}.
$$

Zdarzają się przypadki, że kąt γ nie daje się dokładnie wyznaczyć za pomocą jego dostawy, w tym razie szukamy najpierw boków a i b, a następnie kąt γ za pomocą stycznej, którą znajdziemy, jeżeli wzory

$$
\sin\gamma = \frac{\sin c\sin\alpha}{\cos a}, \quad \sin\gamma = \frac{\sin c\sin\beta}{\sin b},
$$

podzielimy stronami odpowiedniemi przez wzory (5) i (6) i uwzględnimy związki (3) i (4), mianowicie:

$$
\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}(\beta-\varphi)}{\cos a} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\psi)}{\cos b}.
$$

45. Zadanie powyższe możemy także rozwiązać za pomocą analogij Napiera. Jakoż, na zasadzie trzeciego i czwartego z wzorów art. 17-go, mamy

$$
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c,
$$

$$
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c.
$$

Z tych wzorów znajdziemy $\frac{1}{2}(a+b)$ i $\frac{1}{2}(a-b)$, a tymsamym boki a i b.

Kąt γ możemy znaleść, albo za pomocą wzoru $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\sin c = \frac{\sin\beta}{\sin b}\sin c$, w przypuszczeniu, że boki a lub b są znane z poprzedzającego rachunku, alboteż za pomocą wzoru Delambre'a

$$\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cos\frac{1}{2}c,$$

albo wreszcie za pomocą jednego z następujących wzorów analogij Napiera

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

46. Z wzorów, wyprowadzonych w poprzedzających artykułach, na szukane dwa boki a i b, tudzież kąt γ, widzimy, że używając do rozwiązania zadania wzorów, podanych w artykule 44-ym, potrzebujemy szukać pięciu logarytmów, aby otrzymać logarytm stycznej jednego z boków; używając zaś wzorów, podanych w art. 45-ym, potrzebujemy wprawdzie szukać także pięciu logarytmów, ale mając je, przychodzimy do znalezienia logarytmów stycznych połowy summy i różnicy boków szukanych a tymsamym i do znalezienia obu boków. Jeżeli więc chodzi o znalezienie obu boków a i b, korzystniej jest używać analogij Napiera, aniżeli wzorów podanych w art. 44-ym, gdy zaś chodzi o znalezienie samego boku, wtedy wzory art. 44-go daleko prędzej prowadzą do celu aniżeli wzory art. 45-go. Ponieważ przypuszczamy, że dane elementy są zawarte między 0 i 180°, przeto zadanie jest zawsze możebne i posiada jedno rozwiązanie.

47. Jeżeli zachodzi potrzeba znalezienia jedynie kąta γ trójkąta, gdy wyznaczenie dostawy nieprowadzi do dokładnego wypadku, możemy użyć innego wzoru do wyznaczenia tegoż kąta. Jakoż, jeżeli we wzorze

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c,$$

zamiast $\cos c$ weźmiemy $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} c$, otrzymamy

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha \sin\beta \sin^2 \frac{1}{2} c,$$

stąd

$$\sin^2 \frac{1}{2}\gamma = \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta \sin^2 \frac{1}{2} c.$$

Ażeby ten wzór uczynić dogodnym do rachunku logarytmami, wprowadzamy kąt posiłkowy w, taki, aby

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \sqrt{\sin\alpha \sin\beta},$$

W tym razie wzór poprzedzający daje się napisać w kształcie:

$$\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos w}.$$

Wzór ten posłuży do znalezienia kąta γ, i tak, jak i poprzednie, wymaga szukania pięciu logarytmów.

48. Zadanie powyższe możemy sprowadzić do rozwiązania dwu trójkątów kulistych prostokątnych. Jakoż, jeżeli poprowadzimy z wierzchołka A (fig. 13) łuk koła wielkiego prostopadłego do boku BC, to łuk ten przetnie bok BC w punkcie H, który znajdować się może albo na boku BC między punktami B i C, alboteż na przedłużeniu tegoż boku (fig. 13*a*).

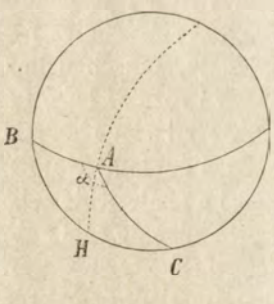

Fig. 13.

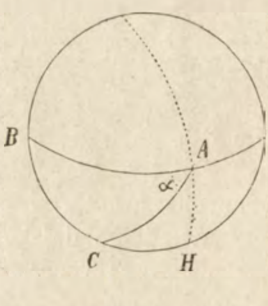

Fig. 13*a*.

Trójkąt ABC będzie albo summą albo różnicą dwu trójkątów prostokątnych kulistych BHA i AHC, stosownie do tego, czy punkt H znajduje się między punktami B i C, czyteż na przedłużeniu boku BC; rozwiązując każdy z trójkątów prostokątnych kulistych, będziemy mieli tymsamym rozwiązanie trójkąta ABC.

Rozważając trójkąt ABH, mamy w nim daną przeciwprostokątną c i kąt β, przeto znajdziemy kąt BAH i boki AH i BH. W trójkącie ACH mamy dane jeden z boków AH kąta prostego, tudzież kąt CAH, który jest równy różnicy między kątem danym α i kątem BAH, znalezionym z rozwiązania pierwszego z trójkątów kulistych prostokątnych, zatym ten trójkąt możemy rozwiązać. Kąt γ trójkąta ABC będzie równy kątowi ACH trójkąta prostokątnego kulistego lub jego spełnieniu stosownie do tego czy kąt BAH jest mniejszy lub większy od kąta danego α. Bok $b = AC$ znajdziemy przez rozwiązanie trójkąta kulistego prostokątnego CAH; nareszcie bok a znajdziemy z boków BH i CH, gdyż bok ten będzie równy ich summie lub ich różnicy stosownie do tego, czy kąt BAH jest mniejszy, czyteż większy od kąta α.

Każdy z trójkątów kulistych prostokątnych ma jedno rozwiązanie, zatym istnieje tylko jeden trójkąt, zadośćczyniący warunkom zadania.

Przykład 1-szy. $c = 11^0\,25'\,56'',3$, $\alpha = 11^0\,18'\,40'',3$,

$\beta = 4^0\,6'\,55'',4$.

1) Szukamy najpierw kątów posiłkowych φ i ψ takich, aby

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\alpha\cos c,\quad \operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}\beta\cos c.$$

Rachunek kąta φ	*Rachunek kąta* ψ
$\log\operatorname{tg}\alpha = 9{,}3010797$	$\log\operatorname{tg}\beta = 8{,}8570360$
$\log\cos c = 9{,}9912968$	$\log\cos c = 9{,}9912968$
$\log\operatorname{tg}\varphi = 9{,}2923765\ (-)$	$\log\operatorname{tg}\psi = 8{,}8483328\ (-)$
$\varphi = 168^0\,54'\,27'',4.$	$\psi = 175^0\,57'\,57'',6.$

Następnie boki a i b znajdujemy za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg}a = -\frac{\sin\varphi\operatorname{tg}c}{\sin(\beta-\varphi)},\quad \operatorname{tg}b = -\frac{\sin\psi\operatorname{tg}c}{\sin(\alpha-\psi)}.$$

Rachunek boku a

$$\log\sin\varphi = 9{,}2841861$$
$$\log\operatorname{tg}c = 9{,}3058288$$
$$18{,}5900149$$
$$\log\sin(\beta-\varphi) = 9{,}4188317\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg}a = 9{,}1711832$$
$$a = 8^0\,26'\,10'',6.$$

Rachunek boku b

$$\begin{aligned}
\log\sin\psi &= 8{,}8472543 \\
\log\operatorname{tg} c &= \underline{9{,}3058288} \\
&\quad 18{,}1530831 \\
\log\sin(\alpha-\psi) &= \underline{9{,}4226453}\ (-) \\
\log\operatorname{tg} b &= 8{,}7304378 \\
b &= 3^0\,4'\,37'',6.
\end{aligned}$$

Kąt γ znajdziemy za pomocą jednego z wzorów (5) lub (6) artykułu 44-go. Weźmy wzór (5)

$$\cos\gamma = \frac{-\cos\alpha\cos(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}, \text{ wtedy}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\alpha &= 9{,}9914814 \\
\log\cos(\beta-\varphi) &= \underline{9{,}9845187}\ (-) \\
&\quad 19{,}9760001 \\
\log\cos\varphi &= \underline{9{,}9918098}\ (-) \\
\log\cos\gamma &= 9{,}9841903\ (-) \\
\gamma &= 164^0\,38'\,1'',4.
\end{aligned}$$

Ten sam przykład rozwiążemy za pomocą analogij Napiera

Rachunek $\frac{1}{2}(a+b)$

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 9{,}9991432 \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c &= \underline{9{,}0004254} \\
&\quad 18{,}9995686 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= \underline{9{,}9960526} \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) &= 9{,}0035160 \\
\tfrac{1}{2}(a+b) &= 5^0\,45'\,24'',13.
\end{aligned}$$

Rachunek $\frac{1}{2}(a-b)$

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 8{,}7976413 \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c &= \underline{9{,}0004254} \\
&\quad 17{,}7980667 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= \underline{9{,}1278046} \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) &= 8{,}6702621 \\
\tfrac{1}{2}(a-b) &= 2^0\,40'\,46'',51.
\end{aligned}$$

$$a = 8^0\,26'\,10'',64, \quad b = 3^0\,4'\,37'',62.$$

Kąt zaś γ za pomocą wzoru Delambre'a

$$\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cos\frac{1}{2}c,$$

wtedy

$$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)= \quad 9{,}1278046$$

$$\log\cos\frac{1}{2}c= \quad \underline{9{,}9978351}$$

$$19{,}1256397$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)= \quad \underline{9{,}9995249}$$

$$\log\cos\frac{1}{2}\gamma= \quad 9{,}1261148$$

$$\gamma = 164^0\, 38'\, 1'',2.$$

Przykład 2-gi. Przypuśćmy, że chcemy rozwiązać trójkąt kulisty, w którym $c = 7^0\, 31'\, 46'',3$, $\alpha = 23^0\, 27'\, 55'',8$, $\beta = 145^0\, 21'\, 58'',9$.

Rozwiążemy ten trójkąt w sposób podany przez Gaussa. *)

Na mocy wzorów Delambre'a

$$\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(b+a)=\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

$$\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(b+a)=\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha),$$

$$\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(b-a)=\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\frac{1}{2}c,$$

$$\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(b-a)=\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}c,$$

Szukamy sześciu logarytmów

$$\log\sin\frac{1}{2}c=8{,}8173026$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=8{,}9979342$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=8{,}9881405$$

$$\log\cos\frac{1}{2}c=9{,}9990618$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=9{,}9416108$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=9{,}6862484$$

*) Gauss, Theoria motus, str. 56.

Następnie mamy

$$\log\left[\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(b+a)\right]=8,5035510$$

$$\log\left[\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(b+a)\right]=8,9872023$$

$$\log\left[\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(b-a)\right]=8,7589134$$

$$\log\left[\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(b-a)\right]=9,9969960$$

Stąd otrzymamy

$$\frac{1}{2}(b+a)=18^0\,10'\,40'',99,\quad \log\sin\frac{1}{2}\gamma=9,0094368,$$

$$\frac{1}{2}(b-a)=3^0\,18'\,28'',57,$$

$$\log\cos\frac{1}{2}\gamma=9,9977202,$$

$$a=14^0\,52'\,12'',42,$$

$$b=21^0\,29'\;\;9'',56,$$

$$\gamma=11^0\,43'\,52'',89.$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
c	α	β	γ	a	b
142⁰ 30′ 45″,3	138⁰ 54′ 56″,5	135⁰ 34′ 37″,2	154⁰ 35′ 47″,7	111⁰ 12′ 16″	96⁰ 47′ 21″,5
78 37 46,9	37 46 2	12 49 37,5	138 4 15	63 58 14,6	19 0 33,9
11 25 56,3	173 35 5,1	11 54 3	5 45 12	167 14 10,2	155 56 8,8
69 50 0	146 58 16,9	24 54 28,4	32 54 24,2	109 38 52	46 41 38,5
29 54 40,1	80 10 51,4	39 9 50	65 58 20,9	32 32 43,1	20 10 10,2

49. *Przypadek 5-ty. Mając dane dwa boki trójkąta kulistego i kąt jednemu z nich przeciwległy, znaleść pozostały bok i dwa kąty.*

Niech będą dane a, b i α.

Szukamy naprzód kąta β za pomocą wzoru

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha. \tag{1}$$

Mając kąt β, pozostały kąt γ i bok c znajdziemy za pomocą analogij Napiera, mianowicie:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

Aby jednak zadanie było możebne do rozwiązania, potrzeba przedewszystkim, aby wyrażenie, dające wstawę kąta β było nie większe od jedności, czyli, innemi słowy, pierwszym warunkiem możebności zadanie jest

$$\sin b \sin\alpha \leqq \sin a.$$

Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, otrzymujemy dwie wielkości kąta β, spełniające się. Lecz, aby którakolwiek z tych wielkości zadośćczyniła zadaniu, koniecznym jest, aby wartości $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ i $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ były dodatne, a temu warunkowi staje się zadość, gdy $\alpha-\beta$ i $a-b$ są jednakowego znaku. Jeżeli temu warunkowi nie czyni zadość żadna z dwu znalezionych wielkości kąta β, w takim razie zadanie jest niemożebne do rozwiązania; jeżeli zaś którakolwiek z wielkości kąta β zadośćczyni powyższemu warunkowi, mamy zawsze odpowiednie rozwiązanie. Jakoż, ponieważ $\alpha-\beta$ i $a-b$ są jednakowego znaku, otrzymamy za pomocą analogij Napiera wielkości kąta γ i boku c między 0° i 180°. Lecz te wielkości kąta γ i boku c będą teżsame, jakie wynikają z pozostałych wzorów Napiera, albowiem wyprowadzają się one z dwu pierwszych, przy użyciu wzorów

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{albo} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Z tego wynika, że znalezione wielkości kątów β i γ i boku c zadośćczynią czterem wzorom Napiera. Jeżeli więc postawimy sobie za zadanie znalezienie trójkąta, którego danemi bokami są a, b, a kątem danym γ zadanie będzie zawsze możebne i szukanemi elementami będą kąty α, β i bok c.

Dwa przypadki, o których powyżej mowa, stanowią **przypadki wątpliwe** trójkąta kulistego, albowiem skutkiem otrzymania dwu wielkości kąta β powstaje wątpliwość, która z wielkości odpowiada trójkątowi szukanemu. W zastosowaniach jednak należy rozważyć warunki, w jakich zadanie jest postawione.

50. Zadanie powyższe możemy jeszcze rozwiązać za pomocą wzorów (3) art. 2-go i wzorów (1) art. 7-go, wtedy możemy znaleść kąt γ i bok c bez znajomości kąta β. I tak, jeżeli we wzorach

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha,$$

położymy

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\cos b},$$

natenczas otrzymamy

$$(2) \qquad \cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

$$(3) \qquad \cos (\gamma - \psi) = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \cos \psi.$$

Aby rozwiązanie zadania było możebne, koniecznym jest, aby wartości $\cos (c - \varphi)$ i $\cos (\gamma - \psi)$ były zawarte między -1 i $+1$; lecz łatwo się przekonać, że oba te warunki dają się zawrzeć w jednej nierówności

$$\frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} < 1.$$

Jeżeli temu warunkowi staje się zadość, z równań (2) i (3) możemy znaleść kąt $\gamma - \psi$ i bok $c - \varphi$, a tymsamym kąt γ i bok c. Wątpliwość, wskazana w poprzedzającym artykule; i tutaj ma miejsce, jeżeli bowiem, kąt $\gamma - \psi = Q$, bok $c - \varphi = N$ sprawdzają powyższe równania, sprawdzać je także będą: kąt $\gamma - \psi = -Q$ i bok $c - \varphi = -N$, a zatym i dwa kąty i dwa boki będą zadośćczyniły powyższym równaniom i pozostanie wątpliwość, który z kątów i który z boków należy przyjąć do rozwiązania zadania. Wypada nam teraz pokazać, którą z wielkości boku c i kąta γ należy wziąć, aby, łącznie z odpowiednią wielkością kąta β, dawały trójkąt, zadośćczyniący warunkom zadania. Jeżeli kąty posiłkowe φ i ψ wprowadzimy do wzorów

$$\operatorname{cotg} b \sin c - \operatorname{cotg} \beta \sin \alpha = \cos c \cos \alpha,$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b,$$

otrzymamy

$$(4) \qquad \sin (c - \varphi) = \sin \varphi \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \sin (\gamma - \psi) = \sin \psi \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Wzory te pokazują, że różnice $c-\varphi$ i $\gamma-\psi$ będą jednakowego znaku. Z tych wzorów nadto widzimy, że gdy te różnice są obie dodatne, kąty α i β są albo oba mniejsze albo oba większe od 90^0; gdy zaś różnice te są ujemne, z kątów α i β, jeden jest mniejszy, drugi zaś większy od 90^0. Z tego rozumowania wynika, że jeżeli przez M oznaczymy wielkość kąta β mniejszą od 90^0, natenczas wielkości β, γ i c, zadośćczyniące warunkom zadania, dadzą się ugrupować w sposób następujący:

$$(5)\qquad \begin{array}{llll} \beta=M, & c=\varphi+N, & \gamma=\psi+Q & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{gdy } \alpha<90^0,} \\ \beta=180^0-M, & c=\varphi-N, & \gamma=\psi-Q & \\ \beta=180^0-M, & c=\varphi+N, & \gamma=\psi+Q & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{gdy } \alpha>90^0.} \\ \beta=M, & c=\varphi-N, & \gamma=\psi-Q & \end{array}$$

Z równań (2), (3) i (4) przy uwzględnieniu równania (1) i równania $\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$, otrzymamy

$$(6)\qquad \operatorname{tg}(c-\varphi)=\operatorname{tg}a\cos\beta,\quad \operatorname{tg}(\gamma-\psi)=\frac{\operatorname{cotg}\beta}{\cos a}, \text{ stąd}$$

$$(7)\qquad \operatorname{tg}(c-\varphi)=\sin b\sin\alpha\operatorname{tg}(\gamma-\psi).$$

Jeżeli zachodzi potrzeba znalezienia wszystkich trzech nieznanych elementów trójkąta, i jeżeli znajdziemy kąt β zapomocą wzoru (1), możemy z korzyścią użyć wzorów (6) i (7); gdyż wzory te wymagają szukania o jeden logarytm mniej aniżeli wzory (2) i (3), nadto wyznaczają różnice $c-\varphi$ i $\gamma-\psi$ zapomocą stycznych. Przy przeprowadzeniu rachunku możemy różnice te uważać jako dodatne, to jest, jako równe $+N$ i $+Q$; lecz gdy bierzemy dla kąta β wielkość M należy zmienić znak drugiej strony równania (6), gdy kąt α jest większy od 90^0.

51. Wprowadzenie kątów posiłkowych φ i ψ, do rozwiązania zadania sposobem podanym w artykule poprzedzającym wychodzi na po-

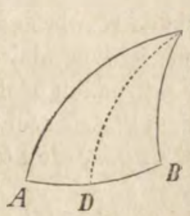

Fig. 14.

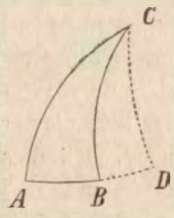

Fig. 14a.

dzielenie trójkąta kulistego ABC za pomocą koła wielkiego CD, poprowadzonego przez wierzchołek C, prostopadle do boku AB na dwa trojkąty prostokątne. Jakoż, jeżeli bok CD (fig. 14) z bokiem AB tworzą kąt prosty, natenczas z trójkąta ACD mamy $\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} b \cos \alpha$, $\operatorname{cotg} ACD = \cos b \operatorname{tg} \alpha$, stąd wynika, że bok $AD = \varphi$, kąt $ACD = \psi$. Zadanie więc w tym razie sprowadza się do rozwiązania dwu trójkątów prostokątnych kulistych ACD i BCD, po rozwiązaniu których znajdziemy szukane elementy trójkąta danego w sposób, podany przy rozwiązaniu przypadków 3-go i 4-go za pomocą rozkładu trójkąta na dwa trójkąty kuliste prostokątne.

52. Z rozwiązania powyższego zadania widzimy, że otrzymujemy dwie wielkości kąta β, a skutkiem tego mamy wątpliwość, która z nich zadośćczyni warunkom zadania.

Rozbiór szczególnych przypadków pozwala częstokroć bez szukania kąta β, wyprowadzić możebność rozwiązania zadania. Rozbiór ten, jakkolwiek dość długi, nie przedstawia jednak trudności w otrzymaniu pożądanych rezultatów.

Zanim przystąpimy do rozbioru przypadku ogólnego zadania, zauważmy naprzód, że, gdy $a = b$, natenczas $\alpha = \beta$. Na mocy wzorów Napiera, mamy

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cos a, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \operatorname{tg} a \cos \alpha,$$

a że $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma$ i $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ są dodatne, przeto kąt α i bok a są jednocześnie mniejsze lub większe od 90^0, stąd wypada, że gdy $a = b$, będziemy mieli tylko wtedy rozwiązanie, gdy α i a są jednocześnie oba mniejsze lub oba większe od 90^0; jeżeli α i a będą równe, każdy 90^0, wtedy $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma$ i $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ będą nieoznaczone i będziemy mieli nieskończoną ilość rozwiązań. Z rozbioru przypadku ogólnego, oprócz przypadku gdy $a = b$, pominiemy również przypadki, gdy kąt α lub którykolwiek z boków a i b są równe 90^0; przypadki bowiem tego rodzaju sprowadzają się do rozwiązania trójkąta kulistego prostokątnego, które podaliśmy we właściwym miejscu.

Przechodzimy do rozbioru zadania w przypadku ogólnym.

Przedewszystkim pierwszym warunkiem możebności zadania, jak to wyżej zauważyliśmy, jest, aby $\sin b \sin \alpha < \sin a$. Jeżeli temu warunkowi nie staje się zadość, zadanie jest niemożebne do rozwiązania. Jeżeli zaś warunek ten ma miejsce, otrzymujemy dwie wielkości kąta β, mianowicie M i $M' = 180^0 - M$, gdzie $M < 90^0$. Aby którakolwiek z tych wielkości odpowiadała warunkom zadania, potrzeba, aby $\alpha - \beta$ i $a - b$ były jednakowego znaku, czyli jeżeli M ma odpowiadać warunkom zadania, potrzeba, aby $\alpha - M$ i $a - b$ były jednakowego znaku; podobnież jeżeli M' ma odpowiadać warunkom zadania, potrzeba, aby $\alpha - M'$ i $a - b$ były jednakowego znaku. Rozbierzemy dwa przypadki, gdy $\alpha < 90^0$ i gdy $\alpha > 90^0$, przy odpowiednich wielkościach boku $b < 90^0$ i $b > 90^0$.

1) gdy $\alpha < 90^0$ i $b < 90^0$, natenczas $a < b$ lub $a > b$, przypadek $a = b$ pomijamy, jako powyżej już rozebrany;

a) gdy $a < b$ wzór $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} \sin\alpha$ daje $M > \alpha$, tymbardziej więc $M' > \alpha$, mamy zatym w tym razie dwa rozwiązania;

b) gdy $a > b$, natenczas mogą zajść trzy przypadki: $a + b < 180^0$, $a + b = 180^0$, $a + b > 180^0$; w przypadku pierwszym mamy $b < 180^0 - a$, zatym $\sin b < \sin a$, wtedy $M < \alpha$ czyni zadość warunkom zadania; zaś $M' > \alpha$ nie odpowiada warunkom zadania, mamy więc jedno rozwiązanie; w przypadku drugim, gdy $a + b = 180^0$, mamy $b = 180^0 - a$ i $\sin b = \sin a$, a zatym $M = \alpha$, zaś $M' > \alpha$; nie mamy więc żadnego rozwiązania; wreszcie w przypadku trzecim, gdy $a + b > 180^0$, mamy $b > 180^0 - a$, $\sin b > \sin a$, zatym $M > \alpha$, tymbardziej $M' > \alpha$; nie mamy więc żadnego rozwiązania.

2) gdy $\alpha < 90^0$ i $b > 90^0$, natenczas może być albo $a < b$ albo $a > b$, przypadek $a = b$ pomijamy, jako wyżej rozebrany;

a) gdy $a < b$, natenczas mogą zajść trzy przypadki: $a + b < 180^0$, $a + b = 180^0$, $a + b > 180^0$; w przypadku pierwszym, gdy $a + b < 180^0$, mamy $\sin b > \sin a$, kąty M i M' są większe od α i oba czynią zadość warunkom zadania, mamy więc dwa rozwiązania; w przypadku drugim, gdy $a + b = 180^0$, $\sin b = \sin a$, a stąd $M = \alpha$, nie czyni zadość warunkom zadania zaś $M' > \alpha$ czyni zadość, mamy więc jedno rozwiązanie; wreszcie w przypadku trzecim, gdy $a + b > 180^0$, $\sin b < \sin a$, kąt $M < \alpha$ nie czyni zadość warunkom zadania, kąt zaś $M' > \alpha$ czyni zadość warunkom zadania, mamy więc jedno rozwiązanie.

b) gdy $a > b$, wtedy $\sin a < \sin b$, albowiem boki a i b są $> 90^0$, wtedy kąt $M > \alpha$, tymbardziej $M' > \alpha$ i nie mamy żadnego rozwiązania.

Przypadek, w którym kąt $\alpha > 90^0$, daje się w podobny sposób rozebrać, a tymsamym przyjść możemy do rezultatów, które wykazane są w następującej tabliczce:

$$\alpha < 90^0 \begin{cases} b < 90^0 \begin{cases} a < b & \text{dwa rozwiązania} \\ a > b \text{ i } a + b < 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ a > b \text{ i } a + b = 180^0 \text{ lub } > 180^0 & \text{żadne rozwiązanie} \end{cases} \\ b > 90^0 \begin{cases} a < b \text{ i } a + b < 180^0 & \text{dwa rozwiązania} \\ a < b \text{ i } a + b = 180^0 \text{ lub } > 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ a > b & \text{żadne rozwiązanie} \end{cases} \end{cases}$$

$$
\alpha > 90^\circ \begin{cases} b < 90^\circ \begin{cases} a < b & \text{żadne rozwiązanie} \\ a > b \text{ i } a + b = \text{lub} < 180^\circ & \text{jedno rozwiązanie} \\ a > b \text{ i } a + b > 180^\circ & \text{dwa rozwiązania} \end{cases} \\ b > 90^\circ \begin{cases} a < b \text{ i } a + b > 180^\circ & \text{jedno rozwiązanie} \\ a < b \text{ i } a + b = \text{lub} < 180^\circ & \text{żadne rozwiązanie} \\ a > b & \text{dwa rozwiązania} \end{cases} \end{cases}
$$

53. Wypadki, powyżej otrzymane, dają się także objaśnić gieometrycznie. Jakoż, nakreślmy na kuli połowę okręgu koła wielkiego ADA′ (fig. 15), następnie kąt A′AC $= \alpha$; weźmy bok AC $= b$ i przedłużmy go aż do przecięcia się z kołem AA′ w punkcie A′, z punktu zaś C jako bieguna promieniem kulistym równym bokowi danemu a, nakreślmy łuk koła; łuk ten spotka półokrąg ADA′ albo w dwu punktach B i B′, albo w jednym punkcie D, albo wreszcie nie spotka się z tym półokręgiem koła. To pokazuje nam, że zadanie nasze może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie,

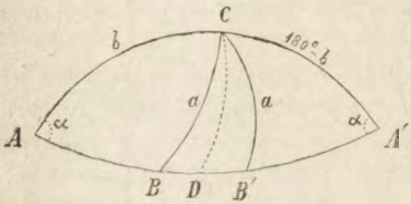

Fig. 15.

lub nie mieć żadnego rozwiązania. Z punktu C poprowadźmy łuk koła wielkiego prostopadły do AA′, niech CD będzie długością tego łuku; natenczas w trójkącie prostokątnym kulistym ACD, bok CD będzie mniejszy od 90°, gdy kąt jemu przeciwległy α jest ostry, jest zaś większy od 90°, gdy kąt jemu przeciwległy jest rozwarty; w pierwszym przypadku CD jest najmniejszym, w drugim zaś największym łukiem koła wielkiego, jaki z punktu C do półokręgu ADA′ poprowadzić można. Na tej zasadzie opiera się cały rozbiór gieometryczny zadania.

1) Gdy bok a jest zawarty między b i jego spełnieniem $180^\circ - b$ zadanie ma zawsze jedno rozwiązanie, jakikolwiek będzie kąt α, albowiem okrąg koła, zakreślony z punktu C jako bieguna i promieniem kulistym równym a, przecina jeden z łuków CA albo CA′ i przedłużenie drugiego, więc przecina półokręg ADA′ w jednym punkcie i wyznacza trójkąt kulisty. Przypadek ten to jest, gdy $b \lesseqgtr a \lesseqgtr 180^\circ - b$ prowadzi do następujących przypadków: $a < b$, $a + b > 180^\circ$ i $a > b$, $a + b < 180^\circ$, które zawarte są w podanej powyżej tabliczce.

2) Gdy bok a nie jest zawarty między b i $180^0 - b$, i jednocześnie z wielkości a i α jedna jest mniejsza od 90^0, a druga większa, zadanie jest niemożebne do rozwiązania. Jakoż, przypuszczając, że bok a jest większy od b i od $180^0 - b$, wtedy $a > b$ i $a + b > 180^0$, a więc byłoby $a > 90^0$; przypuszczając przeciwnie, że bok a jest mniejszy od b i od $180^0 - b$, czyli $a < b$ i $a < 180^0 - b$, wtedy mielibyśmy $a < 90^0$. Gdy więc kąt $\alpha < 90^0$ prostopadła $CD < 90^0$, a że bok $a > 90^0$, wtedy bok a jest większy od pochyłych CA i CA', a tymsamym większy od prostopadłej CD, nie może przecinać koła wielkiego ADA'. Gdy zaś kąt $\alpha > 90^0$, $CD > 90^0$, zaś $a < 90^0$, wtedy bok a jest mniejszy od pochyłych CA i CA' a tymsamym mniejszy od prostopadłej CD i nie może przecinać koła wielkiego ADA'. Z tego wynika, że przy jakiejkolwiek wielkości kąta α trójkąt w tym razie nie istnieje. Przypadek ten prowadzi do warunków: $a > b$ i $a > 180^0 - b$, stąd $a > 90^0$; lub $a < b$, $a < 180^0 - b$, stąd $a < 90^0$, pierwszy prowadzi do warunku $\alpha < 90^0$, drugi zaś do warunku $\alpha > 90^0$. W pierwszym przypadku, gdy $\alpha < 90^0$, $a > b$ i $a + b > 180^0$, jak wskazuje nasza tabliczka niema rozwiązania, podobnież w drugim przypadku, gdy $\alpha > 90^0$, a nadto $a < b$ i $a + b < 180^0$ według naszej tablicy niema również rozwiązania.

3) Jeżeli bok a nie jest zawarty między b i $180^0 - b$, ale jednocześnie z α jest mniejszy lub większy od 90^0, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania, albo tylko jedno, albo żadnego rozwiązania. Jakoż, przypuszczając, że $a < b$ i od $180^0 - b$ będzie $a < 90^0$ i $\alpha < 90^0$ ponieważ z założenia a i α są jednocześnie oba mniejsze lub oba większe od 90^0, wtedy CD jest prostopadłą mniejszą. Jeżeli zaś $a > b$ i $a > 180^0 - b$ będzie $a > 90^0$ i $\alpha > 90^0$, wtedy CD jest prostopadłą większą. Ponieważ bok a, w pierwszym razie mniejszy od pochyłych CA i CA' jest większy od prostopadłej mniejszej CD, w drugim zaś, ten bok większy od pochyłych CA i CA' jest mniejszy od prostopadłej większej CD, przeto okrąg koła nakreślony z punktu C jako bieguna promieniem kulistym a przecina koło wielkie ABA' w dwu punktach, równo oddalonych od punktu D i mamy wtedy trójkąty ACB i ACB' rozwiązujące zadanie.

Gdy bok a, mniejszy albo większy od obudwu pochyłych CA i CA' jest równy prostopadłej kulistej, odpowiadającej kątowi α, wtedy trójkąt ACD jest jedynym rozwiązaniem zadania.

Jeżeli wreszcie bok a jest mniejszy albo większy od obudwu prostoprostopadłych kulistych, zagadnienie jest nie możebne do rozwiązania.

Zauważmy teraz, że gdy $a < b$ i $a < 180^0 - b$ mamy $a < 90^0$, jeżeli więc $\alpha < 90^0$, jak tego założenie wymaga, mamy zawsze dwa rozwiązania, które powyższa tabliczka wykazuje, gdy zaś $a > b$ i $a > 180^0 - b$, mamy $a > 90^0$, jeżeli więc $\alpha > 90^0$, jak tego założenie wymaga, mamy również dwa rozwiązania w tabliczce podane. W obu przypadkach, gdy $a + b = 180^0$, tabliczka również pokazuje jedno rozwiązanie. Wreszcie, gdy bok a jest mniejszy od prostopadłej kąta $\alpha < 90^0$, a większy dla prostopadłej kąta $\alpha > 90^0$ nie mamy żadnego rozwiązania, co też wynika z warunku, że $\frac{\sin\alpha \sin b}{\sin a}$ powinno być mniejsze od jedności.

Przykład 1-szy. Niech będą dane $a = 72^0\,42'$, $b = 117^0\,36'$, $\alpha = 38^0\,14'$.

Ponieważ w tym przykładzie $a < 90^0$, $b > 90^0$, $a + b > 180^0$, przeto mieć będziemy jedno rozwiązanie. Szukamy najpierw kąta β, zapomocą wzoru $\sin\beta = \frac{\sin\alpha \sin b}{\sin a}$

$$\begin{aligned}
\log\sin\alpha &= 9,7915963 \\
\log\sin b &= \underline{9,9475335} \\
& 19,7391298 \\
\log\sin a &= \underline{9,9798946} \\
\log\sin\beta &= 9,7592352
\end{aligned}$$

a że kąt β powinien być większy od 90^0, przeto

$$\beta = 144^0\,56'\,25'',64.$$

Szukamy następnie kąta γ i boku c za pomocą analogij Napiera

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 10,1284715(-) \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(a + b) &= \underline{9,9982433} \\
& 20,1267148(-) \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(a - b) &= \underline{9,5819236}(-) \\
\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma &= 10,5447912 \\
\tfrac{1}{2}\gamma &= 15^0\,55'\,12'',78 \\
\gamma &= 31^0\,50'\,25'',56.
\end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a - b) &= 9,6161514(-) \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= \underline{9,9998334} \\
& 19,6159848\,(-) \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \underline{9,9043552}\,(-) \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c &= 9,7116296 \\
\tfrac{1}{2}c &= 27^0\,14'\,20'',16 \\
c &= 54^0\,28'\,40'',32.
\end{aligned}$$

Ten sam przykład rozwiążemy sposobem, podanym w art. 50-ym. Szukamy naprzód kątów posiłkowych φ i ψ za pomocą wzorów:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos b}.$$

Rachunek kąta φ	*Rachunek kąta* ψ
$\log \operatorname{tg} b = 10{,}2816749\ (-)$	$\log \operatorname{cotg} \alpha = 10{,}1035483$
$\log \cos \alpha = \underline{9{,}8951445}$	$\log \cos b = \underline{9{,}6658586}\ (-)$
$\log \operatorname{tg} \varphi = 10{,}1768194\ (-)$	$\log \operatorname{tg} \psi = 10{,}4376897\ (-)$
kąt $56^\circ\, 21'\, 25'',33$,	kąt $69^\circ\, 56'\, 49'',83$,
$\varphi = 123^\circ\, 38'\, 44'',67$.	$\psi = 110^\circ\ \ 3'\, 10'',17$.

następnie boku c za pomocą wzoru

$$\cos(c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

$$\begin{aligned}
\log \cos a &= \ \ 9{,}4733043 \\
\log \cos \varphi &= \underline{\ \ 9{,}7435539}\ (-) \\
&\ \ \ \ 19{,}2168582 \\
\log \cos b &= \underline{\ \ 9{,}6658586}\ (-) \\
\log \cos(c - \varphi) &= \ \ 9{,}5509996 \\
\varphi - c &= 69^\circ\, 10'\ \ 4'',36 \\
c &= 54^\circ\, 28'\, 40'',31.
\end{aligned}$$

Kąta γ za pomocą wzoru

$$\cos(\gamma - \psi) = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \cos \psi.$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{cotg} a &= \ \ 9{,}4934097 \\
\log \operatorname{tg} b &= 10{,}2816749\ (-) \\
\log \cos \psi &= \underline{\ \ 9{,}5351502}\ (-) \\
\log \cos(\gamma - \psi) &= \ \ 9{,}3102348 \\
\psi - \gamma &= 78^\circ\, 12'\, 44'',64, \\
\gamma &= 31^\circ\, 50'\, 25'',53.
\end{aligned}$$

Wreszcie kąt β znajdziemy sposobem, podanym przy pierwszym rozwiązaniu zadania.

Przykład 2-gi. Niech będą dane $a = 29^\circ\, 54'\, 40'',1$, $b = 31^\circ\, 33''\, 55'',2$, $\alpha = 69^\circ\, 49'\, 29'',13$.

W tym przykładzie $\alpha < 90^\circ$, $b < 90^\circ$ i $a < b$, przeto mieć będziemy dwa rozwiązania. Szukamy najpierw kąta β

$$\log \sin \alpha = 9,9725000$$
$$\log \sin b = \underline{9,7188922}$$
$$19,6913922$$
$$\log \sin a = \underline{9,6978013}$$
$$\log \sin \beta = 9,9935909$$
$$\beta_1 = 80^0\, 10'\, 50'',83,$$
$$\beta_2 = 99^0\, 49'\, 9'',17.$$

Bierzemy kąt β_1 i szukamy jemu odpowiednich: kąta γ i boku c za pomocą analogij Napiera

Rachunek kąta γ

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 8,9572252\ (-)$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(a + b) = \underline{9,7085200}$$
$$18,6657452$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(a - b) = \underline{8,1594189}$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma_1 = 10,5063263$$
$$\frac{1}{2}\gamma_1 = 17^0\, 18'\, 35''6,$$
$$\gamma_1 = 34^0\, 37'\, 11'',2.$$

Rachunek boku c

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = 8,1594642\ (-)$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \underline{9,9849494}$$
$$18,1444136$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \underline{8,9554492}\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} c_1 = 9,1889644$$
$$\frac{1}{2} c_1 = 8^0\, 47'\, 0'',5,$$
$$c_1 = 17^0\, 34'\, 1''.$$

Bierzemy teraz drugą wielkość kąta β

$$\beta_2 = 99^0\, 49'\, 9'',17,$$

i szukamy jemu odpowiednich kąta γ i boku c za pomocą analogij Napiera:

Rachunek kąta γ

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 9,4279684$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(a + b) = \underline{9,7085200}$$
$$19,1364884$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(a - b) = \underline{8,1594189}$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma_2 = 10,9770695$$
$$\frac{1}{2}\gamma_2 = 6^0\, 1'\, 4'',8.$$
$$\gamma_2 = 12^0\, 2'\, 9'',6.$$

Rachunek boku c

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = 8,1594642\ (-)$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \underline{9,9982240}$$
$$18,1576882$$
$$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \underline{9,4129178}\ (-)$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} c_2 = 8,7447704$$
$$\frac{1}{2} c_2 = 3^0\, 10'\, 48'',5.$$
$$c_2 = 6^0\, 21'\, 37''.$$

Mamy więc dwa rozwiązania

1) $\beta = 80^0\,10'\,50'',83,\ \gamma = 34^0\,37'\,11'',2,\ c = 17^0\,34'\,1''.$

2) $\beta = 99^0\,49'\,\ 9'',17,\ \gamma = 12^0\,\ 2'\,9'',6,\ c = \ 6^0\,21'\,37''.$

PRZYKŁADY. *)

DANE			SZUKANE		
a	b	α	β	γ	c
31° 33′ 55″,2	29° 54′ 40″,1	80° 10′ 51″,4	69° 49′ 29″,4	34° 37′ 9″,7	17° 34′ 0″,2
43 49 54	75 45 28	23 59 0,2	34 40 21,7	147 14 5,2	112 46 0,5
			145 19 38,3	20 16 22,4	36 10 54,2
31 33 55,2	150 5 19,9	80 10 51,4	110 10 30,7	145 22 50,2	162 25 59,8
29 54 40,1	147 27 16,9	65 58 20,9	99 49 8,9	140 50 9,8	159 49 49,5
			80 10 51,1	163 25 10,2	171 2 13,3
116 1 45,2	160 59 26,1	142 13 58,1	167 10 22,5	138 4 15,1	78 37 47,2
162 38 11,4	162 31 41,5	97 55 0,3	94 49 31,8	13 20 57,2	3 59 20,6
			85 10 28,2	3 14 22,8	0 58 32,6
104 3 6,8	70 8 32	97 56 38	73 47 25,7	107 32 10,2	110 56 23,5
150 5 19,9	32 32 43,1	115 1 39,1	80 10 51,1	140 50 10,2	159 49 49,5
			99 49 8,9	163 25 9,8	171 2 13,3

54. *Przypadek 6-ty. Mając dane dwa kąty trójkąta kulistego i bok jednemu z nich przeciwległy, znaleść pozostały kąt i dwa boki.*

Niech będą dane kąty α, β i bok a.

Przedewszystkim bok b znajdziemy za pomocą wzoru

$$\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha},$$

który da nam dwie wielkości boku b spełniające się.

Następnie bok c i kąt γ znajdziemy za pomocą analogij Napiera

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

*) Używając do rozwiązania przykładu czwartego, szóstego i siódmego sposobu, podanego w artykule 50-ym, znaleźlibyśmy w przykładzie czwartym $\varphi = 165^0\,26''\,1'',4$, $\psi = 152^0\,7'\,40''$, w przykładzie szóstym $\varphi = 2^0\,28'\,56'',6$, $\psi = 8^0\,17'\,40''$; w przykładzie siódmym $\varphi = 159^0\,3'\,36''$, $\psi = 157^0\,40'\,2'',2$.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Jeżelibyśmy chcieli znaleść wprost bok c, należy użyć wzoru

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha, \text{ czyli}$$

$$\operatorname{cotg} a \sin c - \cos c \cos\beta = \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha,$$

i wprowadzić kąt posiłkowy φ taki, aby

$$\operatorname{cotg} a = \cos\beta \operatorname{cotg}\varphi,$$

przez co wzór poprzedzający zamieni się na

$$\sin(c-\varphi) = \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\alpha \sin\varphi.$$

Znalazszy kąt φ, z tego wzoru znajdziemy $c - \varphi$, a tymsamym bok c.

Dla znalezienia wprost kąta γ należy użyć wzoru

$$\cos\alpha = \sin\beta \sin\gamma \cos a - \cos\beta \cos\gamma,$$

w którym zakładając

$$\sin\beta \cos a = \cos\beta \operatorname{cotg}\psi, \text{ czyli } \operatorname{cotg}\psi = \operatorname{tg}\beta \cos a,$$

otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\psi}(\sin\gamma\cos\psi - \cos\gamma\sin\psi),$$

a stąd

$$\sin(\gamma-\psi) = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{\cos\beta}.$$

55. Zadanie powyższe możemy także rozwiązać za pomocą trójkąta kulistego biegunowego. Jakoż, jeżeli potrafimy rozwiązać trójkąt kulisty $A'B'C'$, którego bokami są $a' = 180^\circ - \alpha$, $b' = 180^\circ - \beta$, kątem zaś α' przeciwległym bokowi $180^\circ - \alpha$ jest $180^\circ - a$, natenczas trójkąt biegunowy, odpowiadający trójkątowi $A'B'C'$ będzie trójkątem szukanym i stosownie do tego, ile rozwiązań otrzymamy z trójkąta $A'B'C'$, będziemy mieli tyleż rozwiązań w zadaniu przez nas postawionym. Rozwiązanie trójkąta $A'B'C'$ uskutecznimy na mocy przypadku, podanego w art. 49-ym.

56. Zadanie to, podobnież jak i zadanie, objęte przypadkiem piątym, może mieć dwa rozwiązania, albo tylko jedno, a nawet nie mieć żadnego rozwiązania. Rozbiór szczególnych przypadków możemy przeprowadzić, bądź sposobami wskazanemi przy przypadku piątym, bądźteż przez rozważanie trójkąta kulistego biegunowego. Rozbioru tego nie podajemy tylko ograniczymy się na wskazaniu rezultatów, jakie z tego rozbioru wynikają, z tym nadmienieniem, że przypadki, w których jeden z kątów α lub β lub oba jednocześnie są równe 90°, alboteż w którym bok $a = 90^\circ$, jako stanowiące przypadki rozebrane przy rozwiązaniu trójkątów kulistych prostokątnych, przez nas zostają pominięte. Rezultatami temi są:

$$a < 90^0 \begin{cases} \beta < 90^0 \begin{cases} \alpha > \beta \text{ i } \alpha + \beta < 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha > \beta \text{ i } \alpha + \beta \geqq 180^0 & \text{żadne rozwiązanie} \\ \alpha < \beta & \text{dwa rozwiązania} \end{cases} \\ \beta > 90^0 \begin{cases} \alpha > \beta & \text{żadne rozwiązanie} \\ \alpha < \beta \text{ i } \alpha + \beta \geqq 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha < \beta \text{ i } \alpha + \beta < 180^0 & \text{dwa rozwiązania} \end{cases} \end{cases}$$

$$a > 90^0 \begin{cases} \beta > 90^0 \begin{cases} \alpha < \beta \text{ i } \alpha + \beta > 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha < \beta \text{ i } \alpha + \beta \leqq 180^0 & \text{żadne rozwiązanie} \\ \alpha > \beta & \text{dwa rozwiązania} \end{cases} \\ \beta < 90^0 \begin{cases} \alpha > \beta \text{ i } \alpha + \beta \leqq 180^0 & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha > \beta \text{ i } \alpha + \beta > 180^0 & \text{dwa rozwiązania} \\ \alpha < \beta & \text{żadne rozwiązanie} \end{cases} \end{cases}$$

Przykład 1-szy. Niech będą dane $a = 144^0\,9'\,47''$, $\alpha = 160^0\,27'\,47''$, $\beta = 30^0\,31'\,31''$.

Rachunek boku b

$$\begin{aligned} \log\sin a &= 9{,}7675125 \\ \log\sin\beta &= \underline{9{,}7057940} \\ & 19{,}4733065 \\ \log\sin\alpha &= \underline{9{,}5242852} \\ \log\sin b &= 9{,}9490213 \\ b_1 &= 62^0\,46'\,42'',6, \\ b_2 &= 117^0\,13'\,17'',4. \end{aligned}$$

Kąta γ i boku c szukamy za pomocą analogij Napiera. Bierzemy naprzód $b = 62^0\,46'\,42'',6$.

Rachunek kąta γ

$$\begin{aligned} \log\sin\frac{1}{2}(a+b) &= 9{,}9878847 \\ \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \underline{10{,}3307120} \\ & 20{,}3185967 \\ \log\sin\frac{1}{2}(a-b) &= \underline{9{,}8142451} \\ \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma_1 &= 10{,}5043516 \\ \frac{1}{2}\gamma_1 &= 17^0\,23'\,2'',5, \\ \gamma_1 &= 34^0\,46'\,5''. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\begin{aligned} \log\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 9{,}9980002 \\ \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b) &= \underline{9{,}9344486} \\ & 19{,}9324488 \\ \log\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \underline{9{,}9571656} \\ \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_1 &= 9{,}9752832 \\ \frac{1}{2}c_1 &= 43^0\,22'\,13'',6. \\ c_1 &= 86^0\,44'\,27'',2. \end{aligned}$$

Bierzemy następnie $b = 117^0\, 13'\, 17'',4$,

Rachunek kąta γ

$$\log\sin\frac{1}{2}(a+b) = 9,8797965$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \underline{10,3307120}$$
$$20,2105085$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(a-b) = \underline{9,3672616}$$
$$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma_2 = 10,8432469$$
$$\frac{1}{2}\gamma_2 = 8^0\; 9'\, 51'',7,$$
$$\gamma_2 = 16^0\, 19'\, 43'',4.$$

Rachunek boku c

$$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 9,9980002$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b) = \underline{9,3793870}$$
$$19,3773872$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \underline{9,9571656}$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_2 = 9,4202216$$
$$\frac{1}{2}c_2 = 14^0\, 44'\, 37'',4,$$
$$c_2 = 29^0\, 29'\, 14'',8.$$

Rozwiążemy ten sam przykład za pomocą trójkąta kulistego biegunowego, szukanemu trójkątowi odpowiadającego. Jeżeli α' β' γ', będą kątami, zaś a' b' c' bokami trójkąta kulistego biegunowego, natenczas

$$\alpha' = 180^0 - a = 35^0\, 50'\, 13'',$$
$$a' = 180^0 - \alpha = 19^0\, 32'\, 13'',$$
$$b' = 180^0 - \beta = 149^0\, 28'\, 29''.$$

Mamy więc w trójkącie biegunowym dane dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy, rozwiązanie więc tego trójkąta sprowadza się do przypadku piątego. Rozwiążmy ten trójkąt, używając metody, podanej w artykule 50-ym. W tym celu połóżmy

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b' \cos\alpha', \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\cos b'},$$

i szukajmy kątów φ i ψ.

Rachunek kąta φ

$$\log\operatorname{tg} b' = 9,7705865\ (-)$$
$$\log\cos\alpha' = \underline{9,9088529}$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi = 9,6794394\ (-)$$
$$\varphi = 154^0\, 27'\, 5'',8.$$

Rachunek kąta ψ

$$\log\operatorname{cotg}\alpha' = 10,1413405$$
$$\log\cos b' = \underline{9,0352075}\ (-)$$
$$\log\operatorname{tg}\psi = 10,2061330\ (-)$$
$$\psi = 121^0\, 53'\, 10''.$$

Bok c' znajdziemy na mocy wzoru

$$\cos(c' - \varphi) = \frac{\cos a' \cos \varphi}{\cos b'}.$$

$$\begin{aligned} \log\cos a' &= 9{,}9742473 \\ \log\cos\varphi &= \underline{9{,}9553131}\ (-) \\ &\ 19{,}9295604 \\ \log\cos b' &= \underline{9{,}9352075}\ (-) \\ \log\cos(c' - \varphi) &= 9{,}9943529 \\ c' - \varphi &= 9^0\, 13'\, 11'' = \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha' < 90^0$, zatym

$$c_1' = \varphi + \mathrm{N} = 163^0\, 40'\, 16'',8,$$

$$c_2' = \varphi - \mathrm{N} = 145^0\, 13'\, 54'',8,$$

kąty więc szukane danemu zadaniu odpowiadające są

$$\gamma_1 = 16^0\, 19'\, 43'',2,$$

$$\gamma_2 = 34^0\, 46'\ \ 5'',2.$$

Kąt γ' trójkąta biegunowego znajdziemy za pomocą wzoru

$$\cos(\gamma' - \psi) = \operatorname{cotg} a' \operatorname{tg} b' \cos\psi,$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{cotg} a' &= 10{,}4499621 \\ \log\operatorname{tg} b' &= 9{,}7705865\ (-) \\ \log\cos\psi &= \underline{9{,}7228251}\ (-) \\ \log\cos(\gamma' - \psi) &= 9{,}9433737 \\ \gamma' - \psi &= \mathrm{P} = 28^0\, 37'\, 37'',8, \end{aligned}$$

ponieważ $\alpha' < 90^0$, zatym

$$\gamma_1' = \psi + \mathrm{P} = 150^0\, 30'\, 47'',8,$$

$$\gamma_2' = \psi - \mathrm{P} = \ 93^0\, 15'\, 27'',8,$$

szukane więc boki są

$$c_2 = 29^0\, 29'\, 12'',2,$$

$$c_1 = 86^0\, 44'\, 32'',2.$$

Wreszcie szukane boki b_1 i b_2 znajdziemy sposobem podanym przy pierwszym rozwiązaniu zadania, mianowicie:

$$b_1 = 62^0\, 46'\, 42'',6, \quad b_2 = 117^0\, 13'\, 17'',4.$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE		
a	α	β	b	c	γ
19°32′13″,1	76°20′ 9″,4	42°57′10″	13°33′45″	17°49′14″	62°46′40″,2
38 4 11,8	34 58 32,4	52 49 46,6	58 59 59,1	79 4 20	114 6 33,2
			121 0 0,9	151 34 40	153 44 18,4
76 20 9,4	17 28 18,5	173 10 29,8	157 22 49,1	82 4 58,8	17 49 13,9
38 4 11,8	32 32 43,1	127 10 13,4	114 1 39,3	92 32 50,2	60 38 33
			65 58 20,7	36 48 9,8	31 30 35,4
121 1 0,9	127 10 13,4	145 1 27,6	141 55 48,2	79 4 20,2	114 6 33,4
144 9 47,2	160 27 46,9	149 28 29,4	117 13 19,9	93 15 30	145 13 54,4
			62 46 40,1	150 30 50	163 40 17,7
162 31 41,5	94 49 34,5	13 21 0	3 59 21,6	162 38 11,4	97 55 0,4
141 55 48,2	145 1 27,6	52 49 46,6	58 59 59,1	100 55 40	65 53 26,8
			121 0 0,9	28 25 20	26 15 41,6

ROZDZIAŁ III.

POWIERZCHNIA TRÓJKĄTA KULISTEGO. PROMIENIE KÓŁ STYCZNYCH DO TRÓJKĄTA KULISTEGO.

POWIERZCHNIA TRÓJKĄTA KULISTEGO.

57. Wiemy z Gieometryi, że powierzchnia trójkąta kulistego równa się przepełnieniu czyli nadmiarowi trzech jego kątów nad dwa kąty proste, to jest, że jeżeli α, β i γ oznaczają kąty trójkąta kulistego, a ε jego powierzchnią, natenczas

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180. \tag{1}$$

Aby to wyrażenie należycie zrozumieć, potrzeba pamiętać, że za jednostkę do mierzenia powierzchni trójkątów kulistych bierzemy taki trójkąt kulisty, którego wszystkie kąty są proste, a więc każdy z boków równa się 90°. Skutkiem tego powyższe wyrażenie oznacza, że powierzchnia danego trójkąta kulistego jest taką częścią powierzchni trojkąta trójprostokątnego, którą przyjmujemy za jednostkę, jaką częścią kąta prostego jest przepełnienie czyli nadmiar $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180$. A że powierzchnia trójkąta przyjętego za jednostkę jest $\frac{1}{8}$ częścią powierzchni kuli, powierzchnia zaś kuli, gdy jej promień $= r$, wyraża się przez $4\pi r^2$, przeto powierzchnia trójkąta przyjętego za jednostkę równa się $\frac{1}{2}\pi r^2$. Mamy zatym proporcyją

$$\text{powierzchnia trójkąta} : \frac{1}{2}\pi r^2 = \varepsilon : 90, \tag{2}$$

stąd

$$\text{powierzchnia trójkąta} = \frac{1}{2}\pi r^2 \frac{\varepsilon}{90}.$$

Jeżeli powierzchnią trójkąta kulistego trójprostokątnego $\frac{1}{2}\pi r^2$ przyjmiemy za jednostkę powierzchni, kąt prosty czyli 90^0 za jednostkę kąta, wtedy z poprzedzającego wyrażenia otrzymamy

$$\text{powierzchnia trójkąta} = \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180,$$

co uzasadnia powyższe przyjęte w Gieometryi zwięzłe określenie powierzchni trójkąta kulistego.

Jeżeli przy danym promieniu kuli r, wyrażonym w jednostkach linijowych, chcemy otrzymać w odpowiednich jednostkach kwadratowych, powierzchnią S trójkąta kulistego, wtedy według wzoru (1), mamy

$$S = \varepsilon\,\frac{\pi r^2}{180},$$

czyli

(3) $$S = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{180}\,\pi r^2 - \pi r^2.$$

Przy użyciu wzoru (3) do obliczania powierzchni trójkątów kulistych, należy mieć na uwadze, czy nadmiar kulisty jest podany w stopniach, czyteż w minutach, czy wreszcie w sekundach, mamy bowiem

$S = \frac{\pi}{180}\,\varepsilon r^2$, gdy nadmiar ε wyrażony jest w stopniach;

$S = \frac{\pi}{180.60}\,\varepsilon r^2 = \frac{\pi}{10800}\,\varepsilon r^2$, gdy nadmiar ε wyrażony jest w minutach;

$S = \frac{\pi}{180.60.60}\,\varepsilon r^2 = \frac{\pi}{648000}\,\varepsilon r^2$, gdy nadmiar ε wyrażony jest w sekundach.

Lecz wiemy, że długość łuku o promieniu równym jedności, odpowiadającego jednej sekundzie, wyraża się przez

$$\frac{\pi}{180.60.60} = \frac{1}{206265} = \text{arc}\sin 1'',$$

przeto powierzchnia trójkąta kulistego, gdy nadmiar jego podany jest w sekundach, wyraża się przez

$$(\alpha + \beta + \gamma - 180)\, r^2 \sin 1''.$$

Jeżeli więc nadmiar trójkąta kulistego, wyrażony w sekundach oznaczymy przez ε'', natenczas powierzchnia trójkąta kulistego S będzie równa $\varepsilon'' r^2 \sin 1''$, że zaś $\sin 1'' = 0{,}0000048481368$, przeto

(4) $$S = 0{,}0000048481368\,\varepsilon'' r^2.$$

Tego ostatniego wzoru używamy najczęściej przy wielkich pomiarach ziemi, gdyż mierzone trójkąty na powierzchni ziemi mało się różnią od trójkątów płaskich, a tymsamym nadmiar ich kątów zaledwie w sekundach daje się wyrazić.

Zazwyczaj przy układzie kart gieograficznych przyjmuje się piętnastą część średniego stopnia południka, jako równą jednej mili gieograficznej, skąd wyprowadzamy, że promień kuli ziemskiej jest równy $\frac{54000}{2\pi} = 859{,}437$ mil gieograficznych (ściślej 859,43669). Zatym powierzchnia trójkąta kulistego w milach gieograficznych wyrazi się przez

$$S = 0{,}0000048481368 \,.\, \varepsilon\, (859{,}437)^2,$$

stąd $\quad \log S = \log 0{,}0000048481368 + \log \varepsilon + 2 \log 859{,}437$

że zaś $\quad \log 0{,}0000048481368 = \log \sin 1'' = 4{,}6855749 - 10$

$$2 \log 859{,}437 = \underline{5{,}8684282}$$

$$\log 0{,}0000048481368 + 2 \log 859{,}437 = 0{,}5540031$$

przeto

$$\log S = 0{,}5540031 + \log \varepsilon. \tag{5}$$

Dla znalezienia więc logarytmu powierzchni trójkąta kulistego w milach gieograficznych należy do 0,5540031 dodać tylko logarytm nadmiaru, wyrażonego w sekundach. Przypuśćmy, że nadmiar trójkąta kulistego wynosi 3″, wtedy

$$\log S = 0{,}5540031 + \log 3 = 0{,}5540031 + 04771213 = 1{,}0211244,$$

a stąd $S = 10{,}508$ mil gieograficznych kwadratowych. Z tego przykładu widzimy, jak wielkiego trójkąta płaskiego powierzchnia, odpowiada powierzchni trójkąta kulistego, którego nadmiar wynosi 3″ i jak wielkie należy mierzyć trójkąty na powierzchni ziemi, iżby nadmiar ich kątów można było otrzymać w sekundach.

58. Zajmiemy się teraz podaniem wzorów na powierzchnią trójkąta kulistego, gdy nie są podane wprost jego kąty, ale inne elementy trójkąta, tenże trójkąt wyznaczające. Przypuśćmy naprzód, że chcemy znaleść nadmiar czyli przepełnienie trójkąta kulistego, gdy dane są dwa boki trójkąta kulistego i kąt między niemi zawarty. Na zasadzie wzorów Delambre'a, mamy

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} \gamma, \tag{1}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}\gamma, \tag{2}$$

Jeżeli pierwsze z tych równań pomnożymy przez $\cos\frac{1}{2}\gamma$, drugie zaś przez $\sin\frac{1}{2}\gamma$, i tak pomnożone równania dodamy do siebie stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\gamma,}{\cos\frac{1}{2}c,},$$

a że $\alpha+\beta+\gamma-180=\varepsilon$, przeto

$$\cos\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}, \text{ czyli}$$

$$\cos\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}. \tag{3}$$

Jeżeli następnie równanie (1) pomnożymy przez $\sin\frac{1}{2}\gamma$, równanie zaś (2) przez $\cos\frac{1}{2}\gamma$ i tak otrzymane równania odejmiemy stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

czyli

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}. \tag{4}$$

Z podzielenia równań (3) i (4) stronami odpowiedniemi, znajdziemy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\sin\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos\gamma}. \tag{5}$$

Otrzymaliśmy więc wzór, za pomocą którego możemy znaleść nadmiar kulisty, gdy są dane dwa boki trójkąta kulistego i kąt między niemi zawarty.

Wzór (5) jednak nie jest dogodny do rachunku logarytmami i dla tego przekształcimy go przez wprowadzenie kąta posiłkowego, na inny dogodny do tego rachunku. Jeżeli położymy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos\gamma = \operatorname{tg}\varphi,$$

otrzymamy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\gamma\sin\frac{1}{2}b\sin\varphi}{\cos\left(\varphi-\frac{1}{2}b\right)}.$$

Przykład. 1-szy. $a = 127°43'40''$, $b = 53°40'20''$, $\gamma = 64°50'20''$. Szukamy naprzód kąta φ:

$$\begin{aligned} \log\cos\gamma &= 9{,}6285576 \\ \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}a &= \underline{10{,}3092046} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 9{,}9377622 \end{aligned}$$

$$\varphi = 40°\,54'\,30'',7,$$

zatym

$$\varphi - \frac{1}{2}b = 15°\,4'\,20'',7,$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg}\gamma &= 10{,}3281466 \\ \log\sin\frac{1}{2}b &= 9{,}6546000 \\ \log\sin\varphi &= 9{,}8161440 \\ \text{comp.}\log\cos\left(\varphi-\frac{1}{2}b\right) &= \underline{0{,}0132331} \\ \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon &= 9{,}8121237 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon = 32°\,58'\,34'',6,$$

$$\varepsilon = 65°\,57'\,9'',2.$$

Zatym $\varepsilon = 237429'',2$; jeżeli więc przypuścimy, że promień kuli $r = 17^m,188$, natenczas powierzchnią trójkąta w metrach kwadratowych znajdziemy ze wzoru $S = \sin 1''.\,\varepsilon\,.\,(17{,}188)^2$.

$$\log r = 1{,}2352253$$
$$\log r^2 = 2{,}4704506$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}6855749-10$$
$$\log 237429{,}2 = \underline{5{,}3755341}$$
$$\log S = 2{,}5315596$$
$$S = 340{,}063 \text{ metrów kwadratowych.}$$

PRZYKŁADY.

DANE			SZUKANE
a	b	γ	ε
37° 29′ 15″	68° 47′ 44″	153° 34′ 37″	22° 3′ 53″,3
110 56 25	75 56 53	106 12 34	115 48 8,1
164 45 17	160 7 32	159 12 11	317 25 50,8

59. Przypuśćmy, że chcemy znaleść nadmiar trójkąta kulistego, gdy dane są trzy jego boki.

Wiemy, że

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ) = \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(180^\circ-\gamma)\right]$$
$$= \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

To zaś wyrażenie na mocy wzorów Delambre'a:

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma,$$
$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma,$$

daje się napisać w kształcie następującym:

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\right]$$
$$= \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b.$$

Podstawiając zamiast $\sin\gamma$ wyrażenie ze wzorów (1) art. 12-go otrzymamy

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\,\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}\,,$$

a stąd

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\,. \tag{1}$$

Przychodzimy do wzoru na wstawę połowy nadmiaru trójkąta kulistego, wyrażoną przez jego boki.

Wzór ten znany jest pod nazwą wzoru Cagnoli'ego.

Do tegoż samego wzoru moglibyśmy przyjść wprost, podstawiając we wzorze (4) art. 58-go wyrażenie $\sin\gamma$, podane w art 12-ym.

60. Możemy także otrzymać bardzo prosty wzór na $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon$, w funkcyi boków trójkąta kulistego. Jakoż, na zasadzie wzorów Delambre'a mamy

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \cos\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(a-b) : \cos\frac{1}{2}c, \text{ stąd}$$

$$\left(\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\cos\frac{1}{2}\gamma\right) : \left(\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\cos\frac{1}{2}\gamma\right)$$
$$= \left(\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c\right) : \left(\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c\right).$$

Rozkładając summy i różnice na iloczyny, znajdziemy

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180)\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+180)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+180)} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)}\,. \tag{1}$$

Postępując w ten sam sposób z równaniami Delambre'a

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(a+b) : \cos\frac{1}{2}c, \text{ otrzymamy}$$

$$\left(\sin\frac{1}{2}\gamma-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right) : \left(\sin\frac{1}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)$$
$$= \left(\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}(a+b)\right) : \left(\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}(a+b)\right),$$

a stąd

$$(2)\qquad \frac{\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma-180)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+180)\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180)} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}.$$

Mnożąc równania (1) i (2) stronami odpowiedniemi znajdziemy

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180)=$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(-a+b+c),$$

kładąc $\frac{1}{2}(a+b+c)=p$, a że $\alpha+\beta+\gamma-180=\varepsilon$, otrzymamy

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{4}\varepsilon=\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c),\text{ a stąd}$$

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)}.$$

Przychodzimy do szukanego wzoru, znanego pod nazwą wzoru Lhuillier'a.

Przykład 1-szy. $a=40^\circ 28' 40''$, $b=58^\circ 10' 10''$, $c=34^\circ 3' 20''$,

$$\frac{1}{2}p=33^\circ 10' 32'',5,\quad \frac{1}{2}(p-a)=12^\circ 56' 12'',5,$$

$$\frac{1}{2}(p-b)=4^\circ 5' 27'',5,\quad \frac{1}{2}(p-c)=16^\circ 8' 52'',5,$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}p=\ 9,8154290$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)=\ 9,3611737$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)=\ 8,8544428$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)=\ \underline{9,4617106}$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=17,4927561$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon=\ 8,7463780$$

$$\frac{1}{4}\varepsilon=\ 3^\circ 11' 30'',89,$$

$$\varepsilon=12^\circ 46'\ 3'',56.$$

PRZYKŁADY.*)

DANE			SZUKANE
a	b	c	ε
150° 5′ 19″,9	147° 27′ 16″,9	20° 10′ 10″	73° 0′ 37″
141 55 48,2	58 59 59,1	100 55 40	83 44 41
29 54 40	32 32 43	20 10 10	5 19 2,2
59 2 54,8	147 56 7,2	152 58 55,6	352 0 6,5
3 43 25,2	2 18 14,5	1 58 17,1	0 2 2,428

61. *Twierdzenie Legendre'a.* ***Jeżeli boki trójkąta kulistego są bardzo małemi wielkościami względem promienia kuli, natenczas jego powierzchnia jest równa powierzchni trójkąta płaskiego, którego boki są równe długościom boków trójkąta kulistego, kąty zaś są równe odpowiednio kątom trójkąta kulistego zmniejszonym o trzecią część nadmiaru czyli przepełnienia kulistego.***

Niech α, β i γ będą kątami trójkąta kulistego a, b i c długościami jego boków, r promieniem kuli, natenczas $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ i $\frac{c}{r}$ będą miarami teoretycznemi tychże boków trójkąta. Kąt α znajdziemy za pomocą wzoru

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}. \tag{1}$$

Zważmy, że gdy θ oznacza miarę teoretyczną kąta bardzo małego wtedy na zasadzie art. 141-go i 143-go Trygonometryi płaskiej mamy

$$\sin\theta > \theta - \frac{\theta^3}{6},$$

$$\sin\theta < \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{1}{120}\theta^5.$$

*) W zadaniu czwartym dla obliczenia $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon$ kładziemy $\operatorname{tg} 89^0\,59'\,29'',4 = \frac{1}{\operatorname{tg} 30'',6}$ i szukamy $\log\operatorname{tg} 30'',6$, według metody wyłożonej w art. 161-ym Trygonometryi płaskiej; w zadaniu zaś piątym używamy tejże metody przy szukaniu logarytmów stycznej kątów bardzo małych.

Ponieważ w tym razie $\frac{\theta^5}{120}$ jest wielkością bardzo małą, przeto kładąc

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}, \tag{2}$$

popełnimy błąd mniejszy od $\frac{1}{120}\theta^5$.

Podobnież na zasadzie art. 142 i 143-go Trygonometryi płaskiej, mamy

$$\cos\theta < 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4.$$

$$\cos\theta > 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6.$$

Ponieważ wyrażenia po prawej różnią się o $\frac{1}{720}\theta^6$, przeto jeżeli przyjmiemy powyższe przybliżenie, mieć będziemy

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4. \tag{3}$$

Jeżeli wzory (2) i (3) zastosujemy do kątów $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ i $\frac{c}{r}$ i otrzymane wartości podstawimy w równanie (1), nadto opuścimy wyrazy do których wchodzą potęgi $\frac{1}{r}$ wyższe od czwartej, będziemy mieli

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1 - \dfrac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}$ i ograniczając się na potęgach $\frac{1}{r}$ niższych od czwartej otrzymamy

*) Jeżeli wzory (2) i (3) zastosujemy do kątów $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ i $\frac{c}{r}$, odpowiadających bokom trójkąta kulistego i przyjmiemy, że mamy do czynienia z kulą ziemską, dla której możemy w przybliżeniu przyjąć $r = 860$ mil gieograficznych, nadto przyjmiemy jeden z boków trójkąta $= 50$ mil gieograficznych, wtedy $\frac{1}{120}\theta^5 = \frac{1}{120}\left(\frac{5}{86}\right)^5 = 0{,}00000007$ to jest, używając wzorów (2) i (3) popełnimy w tym razie błąd, który nie będzie wpływał na siódmą cyfrę dziesiętną.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{(b^2+c^2)^2-a^2(b^2+c^2)}{12bcr^2} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24bcr^2},$$

czyli

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}. \tag{4}$$

Wyobraźmy sobie trójkąt płaski A′B′C′, którego bokami są długości a, b i c boków trójkąta kulistego danego, kąty zaś trójkąta A′B′C′ oznaczmy przez α', β' i γ', wtedy

$$\cos\alpha' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

zaś

$$\sin^2\alpha' = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}.$$

Podstawiając wartości $\cos\alpha'$ i $\sin\alpha'$ w równanie (4), otrzymamy

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2\alpha'. \tag{5}$$

Ten związek między kątami α i α' daje się uprościć, jeżeli zauważymy, że kąt α mało się różni od kąta α'. Połóżmy $\alpha - \alpha' = x$, wtedy $\alpha = \alpha' + x$, a stąd $\cos\alpha = \cos\alpha'\cos x - \sin\alpha'\sin x$, a ponieważ kąt x jest bardzo mały, przeto możemy przyjąć $\cos\alpha = 1$, zaś $\sin x = x$, będziemy mieli

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - x\sin\alpha'. \tag{6}$$

Z porównania wartości $\cos\alpha$ (5) i (6), otrzymamy

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin\alpha' = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{1}{2}bc\sin\alpha'}{r^2}.$$

Że zaś $\frac{1}{2}bc\sin\alpha'$ wyraża powierzchnią trójkąta płaskiego A′B′C′, przeto jeżeli tę powierzchnią oznaczymy przez Δ', mieć będziemy $x = \frac{\Delta'}{3r^2}$. Przychodzimy zatem do następujących związków

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta'}{r^2},$$

$$\beta = \beta' + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta'}{r^2},$$

$$\gamma = \gamma' + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta'}{r^2},$$

stąd zaś

$$\alpha' = \alpha - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2},$$

(7)
$$\beta' = \beta - \frac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2},$$

$$\gamma' = \gamma - \frac{1}{3}\frac{\Delta'}{r^2}.$$

że zaś $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0$, przeto $180^0 = \alpha + \beta + \gamma - \frac{\Delta'}{r^2}$, czyli

$$\frac{\Delta'}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - 180^0.$$

Widzimy więc, że stosunek $\frac{\Delta'}{r^2}$ jest równy nadmiarowi kulistemu ε trójkąta kulistego ABC. Podstawiając we wzorach (7) ε zamiast stosunku $\frac{\Delta'}{r^2}$, otrzymamy

$$\alpha' = \alpha - \frac{1}{3}\varepsilon,\ \beta' = \beta - \frac{1}{3}\varepsilon,\ \gamma' = \gamma - \frac{1}{3}\varepsilon,$$

Przychodzimy więc do twierdzenia Legendre'a, powyżej przytoczonego.

62. Twierdzenie Legendre'a ma ważne zastosowania przy pomiarach gieodezyjnych na powierzchni ziemi i pozwala trójkąty kuliste, których boki są małemi wielkościami względem promienia kuli, rozwiązywać za pomocą trójkątów płaskich i tak:

1) przypuśćmy, że są dane długości a, b i c boków trójkąta kulistego. Wtedy za pomocą Trygonometryi płaskiej potrafimy znaleść kąty α', β' i γ' trójkąta płaskiego i jego powierzchnią, następnie za pomocą wzorów (7) kąty trójkąta kulistego;

2) przypuśćmy, że są dane długości dwu boków trójkąta kulistego tudzież kąt γ, między niemi zawarty. Mamy wtedy $\Delta' = \frac{1}{2}ab\sin\gamma'$, a że γ' różni się od γ w wyrazach rzędu $\frac{1}{r^2}$, przeto możemy przyjąć $\sin\gamma' = \sin\gamma$ i będziemy mieli $\Delta' = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Lecz $\alpha' = \alpha - \frac{\Delta'}{3r^2}$, przeto w trójkącie płaskim będziemy mieli wiadome dwa boki, kąt między niemi zawarty, będziemy więc mogli trójkąt rozwiązać, to jest znaleść bok c, tudzież kąty α' i β'. Ze wzoru (7) znajdziemy następnie kąty α i β.

3) Niech będą dane długości boków a i b i kąt α, pierwszemu z nich przeciwległy. Mamy wtedy

$$\Delta' = \frac{1}{2} b \sin\alpha \, (b\cos\alpha' \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha'}),$$

zastąpiwszy w tym wzorze α' przez α będziemy mieli Δ' a następnie kąt α' za pomocą wzorów (7). Rozwiązawszy trójkąt płaski, w którym będą wiadome boki a i b tudzież kąt przeciwległy α', znajdziemy bok c, tudzież kąty β i γ przy użyciu wzorów (7).

4) Niech będą dane dwa kąty α i β tudzież długość boku c obu kątom przyległego. Mamy wtedy

$$\Delta' = \frac{c^2 \sin\alpha' \sin\beta'}{2\sin(\alpha' + \beta')}, \text{ w przybliżeniu} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Mając Δ' kąty α' i β', znajdziemy za pomocą wzorów (7); następnie w trójkącie płaskim będziemy mieli wiadome dwa kąty i bok im przyległy, znajdziemy a, b i γ' a następnie γ.

5) Przypuśćmy wreszcie, że mamy dane kąty α i β, tudzież długość boku a, pierwszemu z nich przeciwległego. Możemy wtedy Δ' znaleść za pomocą wzoru

$$\Delta' = \frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha}.$$

Następnie znajdziemy kąty α' i β' za pomocą wzoru (7), a z trójkąta płaskiego, w którym wiadomemi będą a, α' i β', pozostałe elementy trójkąta.

63. Twierdzenie Legendre'a może służyć do rozwiązywania trójkątów kulistych, których dwa boki mało się różnią od 180^0; przedłużając bowiem te dwa boki aż do przecięcia się, utworzymy trójkąt kulisty, którego boki będą spełnieniami boków trójkąta kulistego danego i będą wielkościami bardzo małemi. Rozwiązawszy ten trójkąt, rozwiążemy tym samym trójkąt kulisty szukany.

Wreszcie możemy zastosować twierdzenie Legendre'a do rozwiązywania trójkątów kulistych, których dwa kąty mało się różnią od 180^0, wtedy bowiem trójkąt biegunowy, odpowiadający trójkątowi danemu, będzie miał dwa boki mało różniące się od 180^0; przeto rozwiążemy go sposobem podanym powyżej w niniejszym artykule.

POWIERZCHNIA WIELOKĄTA KULISTEGO.

64. Niech n oznacza ilość boków wielokąta kulistego, zaś Σ summę wszystkich jego kątów, wyrażonych w mierze teoretycznej. Jeżeli wewnątrz tego wielokąta na powierzchni kuli obierzemy punkt dowolny i połączymy go łukami kół wielkich z wierzchołkami wielokąta, utworzy nam się n trójkątów kulistych. Na mocy art. 57-go, mieć będziemy

$$\text{powierzchnia wielokąta} = (\text{summie kątów trójkątów} - n\pi)r^2.$$

Lecz summa wszystkich kątów trójkątów jest równa Σ, zwiększonej o summę czterech kątów, utworzonych około spólnego wierzchołka czyli $\Sigma + 2\pi$, zatym

$$\text{powierzchnia wielokąta} = [\Sigma - (n-2)\pi]\, r^2.$$

Wyrażenie to utrzymuje się i wtedy, gdy między kątami wielokąta kulistego znajdują kąty większe od dwu kątów prostych, bowiem tego rodzaju wielokąt kulisty możemy zawsze podzielić na trójkąty.

PROMIENIE KÓŁ: STYCZNYCH WEWNĘTRZNIE I ZEWNĘTRZNIE DO TRÓJKĄTA KULISTEGO I OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE KULISTYM.

65. Niech będzie trójkąt kulisty ABC (fig. 16). Podzielmy kąty α i β łukami kół wielkich na dwie równe części i przypuśćmy, że łuki tych kół przecinają się w punkcie P. Z punktu P poprowadźmy łuki kół wielkich PD, PE i PF prostopadłe do boków trójkąta. Można łatwo dowieść, że długości tych łuków PD, PE i PF będą sobie równe, jak również, że AE = AF, BF = BD i CD = CE. Zatym BC + AF będzie równe połowie summy boków trójkąta kulistego. Jeżeli summę boków trójkąta oznaczymy przez $2p$, natenczas $AF = p - a$. Oznaczmy PF promień koła stycznego wewnętrznie do trójkąta kulistego przez r, wtedy, z przyczyny, że $\operatorname{tg} PF = \operatorname{tg} PAF \sin AF$ (art. 18-ty), będzie

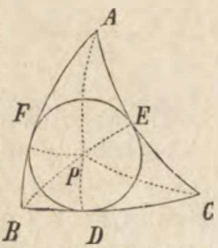

Fig. 16.

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin(p-a), \tag{1}$$

Przychodzimy do wzoru na styczną promienia koła małego stycznego wewnętrznie do trójkąta kulistego. Wyrażenie $\operatorname{tg} r$ daje się jeszcze przedstawić w innych kształtach. I tak, ponieważ

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

przeto podstawiając tę wartość we wzorze (1), otrzymamy

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \tag{2}$$

Ponieważ na mocy wzorów Delambre'a jest

$$\sin(p-a)=\sin\left[\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a\right]$$

$$=\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}a$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\left[\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right],\ \text{stąd}$$

$$\sin(p-a)=\frac{\sin a\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha},\ \text{przeto}$$

$$\operatorname{tg} r=\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\sin a. \tag{3}$$

Ponieważ znowu $\sin a=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, przeto podstawiając zamiast $\sin\frac{1}{2}a$ i $\cos\frac{1}{2}a$ ich wartości ze wzorów (1) i (2) art. 13-go, mieć będziemy

$$\sin a=\frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\left[-\cos P\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)\right]^{\frac{1}{2}};$$

podstawiając tę wartość we wzorze (3) znajdziemy

$$\operatorname{tg} r=\frac{\sqrt{-\cos P\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}. \tag{4}$$

66. W celu znalezienia promieni kół stycznych zewnętrznie do trójkąta kulistego, uważmy, że jeżeli boki AB i BC (fig. 17) trójkąta kulistego ABC, przedłużymy aż do przecięcia się w punkcie A′, natenczas promieniem koła stycznego zewnętrznie do boku BC trójkąta kulistego, będzie promień koła stycznego wewnętrznie do trójkąta kulistego A′BC. A że bokami tego trójkąta są $BC=a$, $A'C=180^\circ-b$, $A'B=180^\circ-c$,

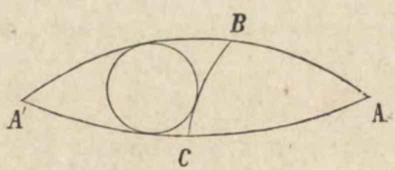

Fig. 17.

przeto, jeżeli promień tego koła oznaczymy przez r_a, na zasadzie artykułu poprzedzającego, mieć będziemy

$$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\sin(p_a - a),$$

gdzie $2p_a = a + 180^0 - b + 180^0 - c = 360^0 + a - b - c$, stąd

$$p_a = 180^0 - \frac{-a + b + c}{2} = 180^0 - p + a,$$

zatym

(1) $$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\sin p.$$

W podobny sposób znajdziemy promienie kół stycznych zewnętrznie do boków b i c; jeżeli te promienie oznaczymy przez r_b i r_c, otrzymamy

(2) $$\operatorname{tg} r_b = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\sin p,$$

(3) $$\operatorname{tg} r_c = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\sin p.$$

Z tych wzorów na styczną promieni kół stycznych zewnętrznie do trójkąta kulistego dają się wyprowadzić inne wzory. Jeżeli wzory artykułu poprzedzającego zastosujemy do trójkąta A'BC, którego kątami są α, $180^0 - \beta$ i $180^0 - \gamma$, i położymy, jak dawniej, $a + b + c = 2p$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\mathrm{P}$, znajdziemy

(4) $$\operatorname{tg} r_a = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}} = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin(p-a)},$$

(5) $$\operatorname{tg} r_a = \frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\sin a.$$

(6) $$\operatorname{tg} r_a = \frac{\sqrt{-\cos\mathrm{P}\cos(\mathrm{P}-\alpha)\cos(\mathrm{P}-\beta)\cos(\mathrm{P}-\gamma)}}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Należy zauważyć, że w szczególnym przypadku, gdy $a=b=c=90^{\circ}$, t. j. gdy mamy trójkąt kulisty o trzech kątach prostych, natenczas

$$\operatorname{tg} r=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ stąd } r=35^{\circ}\,15'\,51'',8,$$

i takież same promienie kół stycznych zewnętrznie.

67. W celu znalezienia promienia koła, opisanego na danym trójkącie kulistym, poprowadźmy ze środków boków CB i CA (fig. 18) trójkąta ABC t. j. z punktów D i E, łuki kół wielkich prostopadłe do tychże boków, punkt przecięcia O tychże dwu łuków kół wielkich będzie środkiem koła małego, opisanego na danym trójkącie kulistym. Poprowadźmy łuki kół wielkich OA, OB i OC, natenczas z trójkątów prostokątnych OCD i OBD wypada OB = OC, z trójkątów zaś OCE i OAE OA = OC, zatym OA = OB = OC. Tym sposobem kąt OAB = kątowi OBA, kąt OBC = kątowi OCB i kąt OCA = kątowi OAC. Zatym $OCB+\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, stąd $OCB=P-\alpha$. Oznaczmy promień OC przez R, z trójkąta OCD, mamy

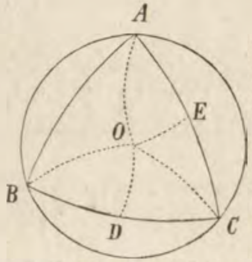

Fig. 18.

$$\operatorname{tg} CD=\operatorname{tg} CO \,.\cos OCD, \text{ czyli } \operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\operatorname{tg} R\cos(P-\alpha), \text{ stąd}$$

$$\operatorname{tg} R=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\cos(P-\alpha)}. \tag{1}$$

Wyrażenie tg R możemy jeszcze przedstawić w innych kształtach. I tak podstawiając wartość $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$, ze wzorów (3) art. 13-go, otrzymamy

$$\operatorname{tg} R=\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}}. \tag{2}$$

Ponieważ

$$\cos(P-\alpha)=\cos\left[\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-\frac{1}{2}\alpha\right]$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

przeto na zasadzie wzorów Delambre'a

$$\cos(P-\alpha)=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}\left[\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}(b-c)\right]$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c,\text{ zatym}$$

(3) $$\operatorname{tg}R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Podstawiając w tym wzorze zamiast $\sin\alpha$, jego wartość ze wzoru (1) art. 12-go, otrzymamy

(4) $$\operatorname{tg}R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

68. Możemy też otrzymać wzory na promienie kół, opisanych na trójkątach kulistych, powstałych z przedłużeń każdych dwu boków trójkąta. Jeżeli oznaczymy przez R_a promień koła, opisanego na trójkącie, utworzonym z boku a i przedłużeń boków b i c trójkąta kulistego danego, natenczas, stosując wzory artykułu poprzedzającego do trójkąta, w ten sposób utworzonego, którego bokami będą a, 180^0-b, 180^0-c, kątami zaś α, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$, otrzymamy

(1) $$\operatorname{tg}R_a=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{-\cos P},$$

(2) $$\operatorname{tg}R_a=\sqrt{\frac{\cos(P-\alpha)}{-\cos P\cos(P-\beta)\cos(P-\gamma)}},$$

(3) $$\operatorname{tg}R_a=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\alpha\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},$$

(4) $$\operatorname{tg}R_a=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}},$$

gdzie p i P mają tożsamo znaczenie co i w artykule poprzedzającym. Podobne wzory otrzymamy na $\operatorname{tg}R_b$ i $\operatorname{tg}R_c$, gdzie R_b i R_c oznaczają promienie kół małych, opisanych na trójkątach, utworzonych z boku b i przedłużeń boków a i c, tudzież boku c i przedłużeń boków a i b.

Jeżeli w szczególności $a=b=c=90^0$, t. j. gdy trójkąt kulisty dany ma trzy kąty proste, natenczas

$$\operatorname{tg} R=\sqrt{2}, \quad \text{stąd} \quad R=54^0\,44'\,8'',2.$$

Z porównania wyrażeń $\operatorname{tg} r$ i $\operatorname{tg} R$ dla przypadku, gdy trójkąt kulisty ma wszystkie kąty proste wynika, że promień koła stycznego wewnętrznie do trójkąta i promień koła, opisanego na tymże trójkącie są dopełniającemi się.

ROZDZIAŁ IV.

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA DO STEREOMETRYI.

69. Zastosujemy teraz wzory Trygonometryi kulistej do niektórych zadań gieometrycznych. Wiemy ze Stereometryi, w jaki sposób znajdują się objętości równoległościanu i graniastosłupów z wiadomych podstaw tychże figur i ich wysokości. Zdarzają się przypadki, w których dane są inne elementy tych figur i zachodzi potrzeba znalezienia ich objętości, powierzchni i t. p. W tych przypadkach, wzory Trygonometryi kulistej najprościej prowadzą do celu, jak to pokażemy w następujących artykułach, rozwiązując zadania, tyczące się równoległościanu, czworościanu i wielościanów foremnych.

RÓWNOLEGŁOŚCIAN.

70. Przypuśćmy, że zachodzi potrzeba znaleść objętość równoległościanu, gdy dane są trzy jego krawędzie przyległe, tudzież kąty, jakie te krawędzie tworzą między sobą.

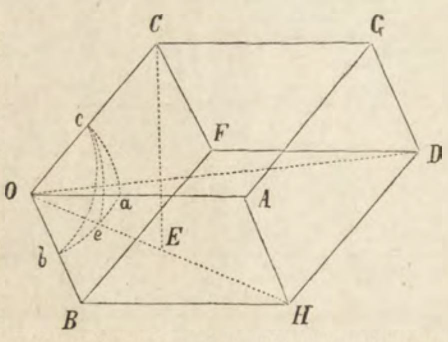

Fig. 19.

Niech OA $= l$, OB $= m$, OC $= n$ (fig. 19) będą trzema krawędziami przyległemi równoległościanu, kątami zaś między temi krawędziami: COB $= \lambda$, AOC $= \mu$, AOB $= \nu$. Spuśćmy prostopadłą CE z wierzchołka C na podstawę AOBH równoległościanu. Objętość równoległościanu będzie równa, jak wiadomo, iloczynowi podstawy AOBH

$=$ OA . OB sin AOB $= lm \sin\nu$; przeto objętość równoległościanu równa się lm . CE $\sin\nu$. Ponieważ CE $=$ OC sin COE $= n \sin$ COE, przeto objętość równoległościanu będzie równa $lmn \sin\nu \sin$ COE.

Jeżeli z wierzchołka O, jako środka, zakreślimy powierzchnią kuli, która przetnie krawędzie OA, OB i OC, tudzież liniją OH w punktach a, b, c i e, utworzy nam się trójkąt kulisty cae prostokątny przy e. Z tego trójkąta mieć będziemy

$$\sin c\mathrm{O}e = \sin \mathrm{COE} = \sin c\mathrm{O}a \sin \widehat{cae} = \sin\mu \sin \widehat{cab}.$$

Jeżeli więc oznaczymy przez V objętość równoległościanu, mieć będziemy

(1) $$\mathrm{V} = lmn \sin\mu \sin\nu \sin \widehat{cab}.$$

Iloczyn wstaw, który należy pomnożyć przez iloczyn krawędzi, aby otrzymać objętość równoległościanu, nazwany został przez Staudt'a (*) wstawą kąta bryłowego i przez $\sin lmn$ oznaczony, gdzie l, m, n są krawędziami równoległościanu. Tym sposobem

(2) $$\mathrm{V} = lmn \sin lmn.$$

W celu znalezienia wyrażenia $\sin lmn$ uważmy, że według powyższego określenia

$$\sin lmn = \sin\mu \sin\nu \sin \widehat{cab},$$

gdzie $\sin \widehat{cab}$ oznacza wstawę kąta, jaki tworzą między sobą ściany AOC i AOB, czyli boki ac i ab trójkąta kulistego abc, będzie więc

$$\sin lmn = \sin\mu \sin\nu \sin \widehat{(ac, ab)}.$$

Lecz z trójkąta kulistego abc, w którym $ab = \nu$, $bc = \lambda$, $ac = \mu$ wstawę kąta kulistego bac, czyli kąta zawartego między bokami ac i ab znajdziemy za pomocą wzorów (1) art. 12-go, mianowicie:

$$\sin bac = \sin \widehat{(ac, ab)} = \frac{2}{\sin\mu \sin\nu} \sqrt{\sin p \sin(p-\lambda) \sin(p-\mu) \sin(p-\nu)},$$

gdzie $2p = \lambda + \mu + \nu$; będzie więc

$$\sin lmn = 2 \sqrt{\sin p \sin(p-\lambda) \sin(p-\mu) \sin(p-\nu)}.$$

Jeżeli pierwiastek po prawej stronie tego wzoru oznaczymy przez δ, otrzymamy

(3) $$\mathrm{V} = 2 lmn\delta.$$

---

*) Crelle, Journal, Tom XXIV, str. 252.

Z tego wzoru widzimy, że $\frac{1}{2}\delta$ oznacza połowę wstawy kąta bryłowego. Mamy zatym

$$V = 2lmn\sqrt{\sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)}. \tag{4}$$

Według art. 117-go Trygonometryi płaskiej jest

$$\sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)$$
$$= \frac{1}{4}(1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu),$$

przeto

$$V = lmn\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}; \tag{5}$$

to zaś wyrażenie pokazuje nam, że

$$\sin^2 lmn = 1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Że zaś wyrażenie to możemy przedstawić w kształcie wyznacznika*).

$$\sin^2 lmn = \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix},$$

przeto

$$V^2 = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

71. Przy tych samych warunkach zadania możemy znaleść długości przekątnych równoległościanu. Jakoż, przyjmując też same oznaczenia co i w artykule poprzedzającym, poprowadźmy przekątne OD i CH. Na zasadzie wiadomej własności równoległoboków, mieć będziemy

$$\overline{OD}^2 + \overline{CH}^2 = 2\overline{OC}^2 + 2\overline{OH}^2,$$
$$\overline{AF}^2 + \overline{BG}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AG}^2,$$

zatym $\overline{OD}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{BG}^2 = 4\overline{OC}^2 + 2(\overline{AB}^2 + \overline{OH}^2)$,

lecz $\overline{AB}^2 + \overline{OH}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OB}^2 = 2l^2 + 2m^2$, przeto

$$\overline{OD}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{BG}^2 = 4(l^2+m^2+n^2). \tag{1}$$

W celu otrzymania przekątnej OD rozważajmy ją z pozostałemi przekątnemi; będziemy mieli

---

*) Baltzer. Determinanten § 15 art. 3.

$$\overline{OD}^2 + \overline{BG}^2 = 2\overline{OG}^2 + 2\overline{OB}^2 = 2\overline{OG}^2 + 2m^2,$$

że zaś $OG^2 = l^2 + n^2 + 2ln\cos\mu$, przeto

$$(2) \qquad \frac{1}{2}(\overline{OD}^2 + \overline{BG}^2) = l^2 + m^2 + n^2 + 2ln\cos\mu;$$

podobnież otrzymamy

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(\overline{OD}^2 + \overline{AF}^2) = l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos\lambda,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2}(\overline{OD}^2 + \overline{HC}^2) = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm\cos\nu.$$

Po dodaniu wzorów (2), (3) i (4) stronami odpowiedniemi i uwzględnieniu wzoru (1), otrzymamy

$$\overline{OD}^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm\cos\nu + 2ln\cos\mu + 2mn\cos\lambda.$$

W podobny sposób znajdziemy pozostałe przekątne:

$$\overline{AF}^2 = l^2 + m^2 + n^2 - 2lm\cos\nu - 2ln\cos\mu + 2mn\cos\lambda,$$

$$\overline{BG}^2 = l^2 + m^2 + n^2 - 2lm\cos\nu - 2mn\cos\lambda + 2ln\cos\mu,$$

$$\overline{HC}^2 = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos\lambda - 2ln\cos\mu + 2lm\cos\nu.$$

CZWOROŚCIAN.

72. Przypuśćmy, że chodzi nam o znalezienie objętości czworościanu, gdy dane są trzy krawędzie przyległe tudzież kąty, jakie z sobą tworzą też krawędzie.

Niech będzie czworościan OABC (fig. 20), w którym są dane $OA = l$, $OB = m$, $OC = n$, kąt $AOB = \nu$, kąt $AOC = \mu$, kąt $BOC = \lambda$. Wiemy, że objętość czworościanu jest szóstą częścią równoległościanu, który ma też samę wysokość co czworościan, a podstawę równą dwa razy wziętej podstawie czworościanu. Zatym, gdy mamy dane trzy krawędzie przyległe czworościanu i kąty między niemi zawarte, znajdziemy jego objętość biorąc $\frac{1}{6}$ część objętości równoległościanu, czyli biorąc $\frac{1}{6}$ wyrażenia znalezionego w art. 70-ym. Jeżeli więc oznaczymy przez v objętość czworościanu, będziemy mieli

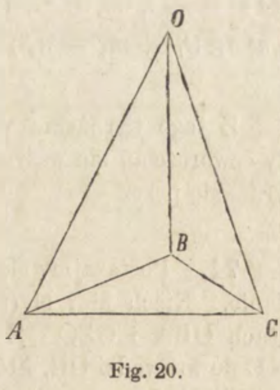

Fig. 20.

$$v = \frac{1}{3} lmn \sqrt{\sin p \sin(p-\lambda) \sin(p-\mu) \sin(p-\nu)},$$

gdzie $2p = \lambda + \mu + \nu$.

Że zaś pierwiastek po prawej stronie tego wzoru, jakto wykazaliśmy w art. 70-ym, oznacza połowę wstawy kąta bryłowego O, przeto

$$v = \frac{1}{6} lmn \sin lmn.$$

73. Możemy także znaleść objętość czworościanu, gdy dane są wszystkie jego krawędzie. Niech $OA = l$, $OB = m$, $OC = n$, $BC = l_1$, $AC = m_1$ i $AB = n_1$, wtedy

$$l_1{}^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos\lambda,$$

$$m_1{}^2 = l^2 + n^2 - 2ln \cos\mu,$$

$$n_1{}^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos\nu,$$

stąd

$$\cos\lambda = \frac{m^2 + n^2 - l_1{}^2}{2mn}, \quad \cos\mu = \frac{l^2 + n^2 - m_1{}^2}{2ln}, \quad \cos\nu = \frac{l^2 + m^2 - n_1{}^2}{2lm}.$$

Jeżeli te wartości podstawimy w równanie (5) art. 70-go i weźmiemy szóstą część w ten sposób otrzymanego wyrażenia, przyjdziemy do objętości czworościanu w funkcyi jego krawędzi, mianowicie:

$$144 v^2 = 4 l^2 m^2 n^2 - l^2 (m^2 + n^2 - l_1{}^2)^2 - m^2 (l^2 + n^2 - m_1{}^2)^2$$
$$- n^2 (l^2 + m^2 - n_1{}^2)^2 + (m^2 + n^2 - l_1{}^2)(l^2 + n^2 - m_1{}^2)(l^2 + m^2 - n_1{}^2).$$

Wyrażenie to daje się napisać jeszcze w kształcie

$$144 v^2 = - l_1{}^2 m_1{}^2 n_1{}^2 + l^2 l_1{}^2 (m_1{}^2 + n_1{}^2 - l_1{}^2) + m^2 m_1{}^2 (l_1{}^2 + n_1{}^2 - m_1{}^2)$$
$$+ n^2 n_1{}^2 (l_1{}^2 + m_1{}^2 - n_1{}^2) - l_1{}^2 (l^2 - m^2)(l^2 - n^2) - m_1{}^2 (m^2 - n^2)(m^2 - l^2)$$
$$- n_1{}^2 (n^2 - l^2)(n^2 - m^2).$$

Z tego wyrażenia wynika, że gdy czworościan jest foremny, czyli gdy czworościan ma wszystkie krawędzie równe np. a, wtedy jego objętość wyrazi się przez

$$144 v^2 = 2 a^3.$$

74. Postarajmy się teraz znaleść promień kuli opisanej na czworościanie. Niech M i N (fig. 21), będą środkami kół, opisanych na trójkątach OBA i OBC. Z punktów M i N poprowadźmy prostopadłe ME i NE do krawędzi OB, które przetną tę krawędź w punkcie E jej środku. Z punktu M poprowadźmy prostopadłą do płaszczyzny OAB, z punktu zaś N prostopadłą do płaszczyzny OBC, te dwie prostopadłe, jak wiadomo, przetną się; niech S będzie punktem ich przecięcia. Wreszcie poprowadźmy linije OM, ON i OS, natenczas OS będzie promieniem kuli opisanej na czworokącie danym. Z trójkąta OME, otrzymamy

$$\mathrm{ME} = \mathrm{OE} \operatorname{cotg} \mathrm{OME} = \frac{1}{2} m \operatorname{cotg} \mathrm{OME} = \frac{1}{2} m \operatorname{cotg} \mathrm{OAB}.$$

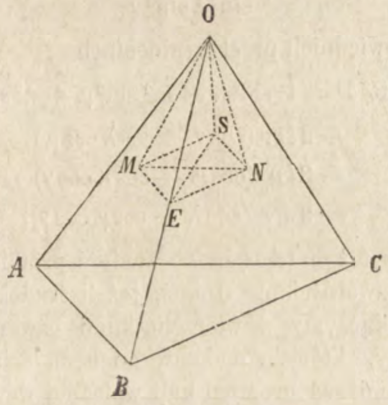

Fig. 21.

Lecz, na zasadzie art. 186-go Trygonometryi płaskiej

$$\operatorname{tg} \mathrm{OAB} = \frac{m \sin \nu}{l - m \cos \nu},$$

zatym

$$\mathrm{ME} = \frac{1}{2} \frac{l - m \cos \nu}{\sin \nu}, \text{ podobnież } \mathrm{EN} = \frac{1}{2} \frac{n - m \cos \lambda}{\sin \lambda}.$$

Że zaś kąt MEN jest równy nachyleniu ścian AOB i OBC to jest $= \mu$, zaś SE jest średnicą koła opisanego na trojkącie MEN, przeto na mocy wzoru (1) art. 196-go Trygonometryi płaskiej

$$\mathrm{SE} = \frac{\mathrm{MN}}{\sin \mu},$$

stąd zaś

$$\overline{\mathrm{SE}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{ME}}^2 + \overline{\mathrm{EN}}^2 - 2\,\mathrm{ME} . \mathrm{EN} \cos \mathrm{AOBC}}{\sin^2 \mu}.$$

Podstawiając w wyrażeniu promienia SO $=$ R kuli, opisanej na czworościanie to jest w wyrażeniu

$$\mathrm{R}^2 = \overline{\mathrm{SE}}^2 + \overline{\mathrm{OE}}^2 = \overline{\mathrm{SE}}^2 + \frac{1}{4} m^2,$$

zamiast $\overline{SE}^2$ jego wartość, po podstawieniu wartości MN i EN i kładąc

$$\cos AOBC = \frac{\cos m - \cos n \cos\lambda}{\sin\nu \sin\lambda},$$

stąd

$$\sin^2 AOBC = \frac{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu.\cos\nu}{\sin^2\lambda\sin^2\nu} = \frac{4\delta^2}{\sin^2\lambda\sin^2\nu},$$

otrzymamy po odpowiednich przekształceniach

$$\begin{aligned} 16R^2\delta^2 = {} & l^2\sin^2\lambda + m^2\sin^2\mu + n^2\sin^2\nu \\ & -2lm(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu) \\ & -2ln(\cos\mu - \cos\lambda\cos\nu) \\ & -2mn(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu). \end{aligned}$$

75. Możemy też bardzo łatwo znaleść promień kuli wpisanej wewnętrznie w dany czworościan. Jakoż, jeżeli środek kuli wpisanej w dany czworościan połączymy z wierzchołkami czworościanu, otrzymamy cztery czworościany, których podstawami będą ściany danego czworościanu, wysokościami zaś promień kuli wpisanej wewnętrznie. Objętość czworościanu będzie trzecią częścią summy powierzchni ścian czworościanu, pomnożonej przez promień kuli. Jeżeli więc oznaczymy promień kuli wpisanej w czworościan przez r, a powierzchnie ścian czworościanu odpowiednio przez I_a, I_b, I_c i I_d, jego zaś objętość przez v znajdziemy

$$3v = r(I_a + I_b + I_c + I_d),$$

stąd

$$r = \frac{3v}{I_a + I_b + I_c + I_d}.$$

WIELOŚCIANY FOREMNE.

76. *Twierdzenie Euler'a. Jeżeli W oznacza ilość wierzchołków wielościanu S ilość jego ścian, zaś K ilość krawędzi, natenczas*

$$W + S = K + 2.$$

Weźmy wewnątrz wielościanu jakikolwiek punkt i z niego jako środka nakreślmy kulę promieniem dowolnym r, poprowadźmy linije proste od środka kuli do wierzchołków kątów bryłowych wielościanu; punkty przecięcia się tych linij z powierzchnią kuli połączmy łukami kół wielkich, natenczas powierzchnia kuli będzie podzieloną na tyle wielokątów kulistych, ile ścian posiada wielościan. Niech s oznacza summę kątów jednego z tych wielokątów kulistych, m zaś ilość jego boków, wtedy na zasadzie art. 64-go, powierzchnia tego wielokąta wyrazi się przez $r^2[s-(m-2)\pi]$. Summa powierzchni wszystkich tych wielokątów kulistych będzie równa powierzchni kuli, to jest $4\pi r^2$. Stąd wynika, że jeżeli przez S oznaczymy ilość ścian wielościanu, mieć będziemy

$$4\pi r^2 = \Sigma s r^2 - \pi r^2 \Sigma m + 2\pi r^2 S,$$

czyli
$$4\pi = \Sigma s - \pi \Sigma m + 2 S \pi.$$

Lecz Σs oznacza summę wszystkich kątów wielokątów kulistych, utworzonych na kuli, jest zatym równa tyle razy powtórzonemu 2π ile wielościan posiada wierzchołków czyli jest równa $2\pi W$. Podobnież Σm jest równe summie ilości boków wielokątów kulistych, zatym jest równe 2K, gdyż każdej krawędzi odpowiada jeden bok wielokąta kulistego, który jest spólny dla dwu wielokątów. Zatym $4\pi = 2\pi W - 2\pi K + 2 S \pi$, stąd

$$W + S = K + 2,$$

przychodzimy więc do twierdzenia Euler'a powyżej wysłowionego.

77. Okażemy, że wielościanów foremnych może być tylko pięć. Jakoż, niech m oznacza ilość boków każdej ściany wielościanu n zaś ilość kątów płaskich każdego kąta bryłowego, wtedy całkowita ilość kątów płaskich wielościanu foremnego wyrazi się przez mS, albo przez nW, albo przez $2K$; tym sposobem $mS = nW = 2K$. Na mocy zaś twierdzenia Euler'a $W + S = K + 2$, przeto

$$W = \frac{4m}{2(m+n) - mn}, \quad K = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}, \quad S = \frac{4n}{2(m+n) - mn}.$$

Ażeby te wyrażenia były liczbami całkowitemi dodatnemi, powinno być przedewszystkim $2(m+n) - mn > 0$, czyli $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ powinno być większe od $\frac{1}{2}$. Lecz n nie może być mniejsze od 3, zatym $\frac{1}{n}$ nie może być większe od $\frac{1}{3}$, a więc $\frac{1}{m}$ musi być większe od $\frac{1}{6}$, czyli m mniejsze od 6. A że m nie może być liczbą mniejszą od 3, przeto może przyjąć jedynie wartości 3, 4 lub 5. Znajdziemy więc, że jedyne wartości m i n, które zadość czynią powyższym warunkom prowadzą do pięciu wielościanów foremnych, jak wskazuje następująca tabliczka

m	n	W	K	S	Nazwa wielościanu foremnego
3	3	4	6	4	Czworościan
4	3	8	12	6	Sześcian
3	4	16	12	8	Ośmościan
5	3	20	30	12	Dwunastościan
3	5	12	30	20	Dwudziestościan

78. Dowiedziemy, że summa kątów płaskich tworzących kąty bryłowe wielościanu jest równa $2(W-2)\pi$.

Jeżeli m oznacza ilość boków wielokąta, stanowiącego jednę ścianę wielościanu, natenczas summa kątów wewnętrznych wielokąta, jak wiadomo jest równa $(m-2)\pi$. Stąd, summa wszystkich kątów wewnętrznych ścian wielościanu będzie równa $\Sigma(m-2)\pi = \Sigma m\pi - 2S\pi = 2(K-S)\pi$. A że $K - S = W - 2$, przeto summa kątów płaskich wielościanu jest równa $2(W-2)\pi$.

79. Przypuśćmy, że chcemy znaleść kąty, jakie tworzą z sobą ściany sąsiednie wielościanów foremnych.

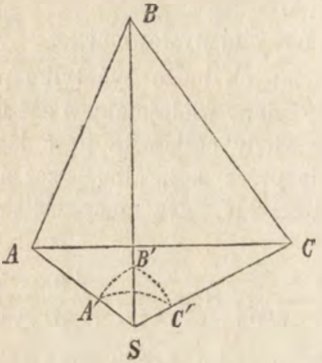

Fig. 22.

Niech BA, BS i BC (fig. 22), będą kątami płaskiemi jednego z wielościanów foremnych, schodzącemi się w jednym wierzchołku; wtedy $BA = BS = BC$. Kąty ABS i SBC będą kątami płaskiemi kąta bryłowego i będą sobie równe. Jeżeli więc oznaczymy przez m ilość boków każdej ściany wielościanu foremnego, natenczas

$$\text{kąt } ABS = \frac{m-2}{m}180^0 = 180^0 - \frac{360^0}{m}.$$

Poprowadźmy proste AS i SC, wtedy z przyczyny równości krawędzi BA, BS i BC kąt $BAS = BSA = BSC$, zatym

$$2BSA = 180^0 - ABS = 180^0 - 180^0 + \frac{360^0}{m} = \frac{360^0}{m}.$$

Jeżeli rozważać będziemy którykolwiek z wielościanów foremnych łatwo dostrzeżemy, że proste AS i SC są równe między sobą, co też z równości trójkątów ABS i SBC wypada, nadto stanowią one boki wielokąta foremnego, który jest trójkątem (dla czworościanu, sześcianu i dwunastościanu), kwadratem (dla ośmiościanu) lub pięciokątem (dla dwudziestościanu). Jeżeli więc oznaczymy przez n ilość boków tego wielokąta foremnego, mieć będziemy

$$\text{kąt } ASC = \frac{n-2}{n}180^0 = 180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

To wiedząc, z wierzchołka S jako środka, promieniem równym jednostce, nakreślmy kulę. Powierzchnia tej kuli przetnie ściany ASB, BSC i ASC podług kół wielkich $A'B'$, $B'C'$ i $A'C'$ i otrzymamy trójkąt kulisty $A'B'C'$. W trójkącie tym będą nam wiadome boki $A'B'$, B'C' i A'C', przeto będziemy mogli znaleść kąt A'B'C', który będzie miarą pochyłości ścian ASB i BSC wielościanu foremnego. Jeżeli założymy $A'B' = c$, $B'C' = a$, $A'C' = b$, kąt $A'B'C' = \beta$, natenczas na zasadzie drugiego z wzorów (2) art. 10-go, to jest wzoru

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}, \text{ gdzie } 2p = a + b + c,$$

przy uwzględnieniu, że w przypadku rozważanym $a = c$, mieć będziemy

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin a}.$$

Lecz wyżej okazaliśmy, że $a = \frac{180^0}{m}$, $b = 180^0 - \frac{360^0}{n}$, przeto

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\cos\frac{180^0}{n}}{\sin\frac{180^0}{m}}.$$

Jeżeli ten wzór zastosujemy do wielościanów foremnych otrzymamy

1) dla czworścianu (Tetraedr)

$$m = 3,\ n = 3,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \operatorname{cotg} 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

2) dla sześcianu (Hexaedr)

$$m = 4,\ n = 3,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\cos 60^0}{\sin 45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

3) dla ośmiościanu (Oktaedr)

$$m = 3,\ n = 4,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\cos 45^0}{\cos 30^0} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

4) dla dwunastościanu (Dodekaedr)

$$m = 5,\ n = 3,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\cos 60^0}{\sin 36^0} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}},$$

5) dla dwudziestościanu (Icosaedr)

$$m = 3,\ n = 5,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

Z tych wzorów możemy znaleść $\cos\frac{1}{2}\beta$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ i $\operatorname{tg}\beta$ i przezto otrzymać wymierne wartości funkcyj trygonometrycznych, mianowicie:

dla czworościanu: $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\beta = 70^0\,31'\,43'',6$,

„ sześcianu: $\sin\beta = 1$, $\beta = 90^0$,

„ ośmiościanu: $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\beta = 109^0\,28'\,16'',4$,

„ dwunastościanu: $\operatorname{tg}\beta = -2$, $\beta = 116^0\,33'\,54'',23$,

„ dwudziestościanu: $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\beta = 138^0\,11'\,22'',87$.

80. Możemy też wyprowadzić wzory na promień kuli wpisanej w jeden z wielościanów foremnych i na promień kuli opisanej na wielościanie foremnym.

Niech O będzie środkiem kuli wpisanej i opisanej na wielościanie foremnym. Oznaczmy przez r promień kuli wpisanej, a przez R promień kuli opisanej, oznaczmy nadto przez r_1 i R_1 promienie kół wpisanych i opisanych na wielokątach foremnych, będących ścianami wielościanu foremnego.

Jeżeli oznaczymy przez a bok jednego z tych wielokątów foremnych, będący krawędzią wielościanu foremnego, na zasadzie art. 199-go, Trygonometryi płaskiej, mieć będziemy

$$r_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^0}{m}}, \quad R_1 = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{m}}.$$

Że zaś, jakto łatwo zauważyć $r = r_1 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, przeto

(1) $$r = \frac{1}{2}\,a \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\frac{180^0}{m}.$$

Podobnież, mieć będziemy $R^2 = R_1^2 + r^2$, podstawiając zaś wartości R_1 i r otrzymamy

$$R^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^0}{m}} + \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}^2\frac{180^0}{m}.$$

Wzór ten daje się uprościć przez wyrugowanie kąta $\frac{180^0}{m}$ za pomocą wzoru $\sin\frac{1}{2}\beta = \dfrac{\cos\frac{180^0}{n}}{\sin\frac{180^0}{m}}$. Jakoż

$$R^2 = \frac{a^2}{4}\left[\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{180^0}{n}} + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta - \cos^2\frac{180^0}{n}}{\cos^2\frac{180^0}{n}}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{180^0}{n}}\left[1 + \frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta - \cos^2\frac{180^0}{n}}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{180^0}{n}}\left[\frac{1-\cos^2\frac{180^0}{n}}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\right] = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}^2\frac{180^0}{n}.$$

Zatym

(2) $$R = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.$$

Jeżeli wzory (1) i (2) zastosujemy do każdego z wielościanów foremnych znajdziemy:

1) dla czworościanu: $m = 3,\ n = 3,$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a,\quad R = \frac{\sqrt{6}}{4}a,$$

2) dla sześcianu: $m = 4,\ n = 3,$

$$r = \frac{1}{2}a,\quad R = \frac{1}{2}\sqrt{3}a,$$

3) dla ośmiościanu: $m = 3,\ n = 4,$

$$r = \frac{1}{6}\sqrt{6}a,\quad R = \frac{1}{2}\sqrt{2}a,$$

4) dla dwunastościanu: $m = 5,\ n = 3,$

$$r = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}a,\quad R = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}a,$$

5) dla dwudziestościanu: $m = 3,\ n = 5,$

$$r = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a,\quad R = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}a.$$

81. Podamy wreszcie wzory na powierzchnią i objętość wielościanów foremnych. Oznaczmy przez m ilość boków wielokątów foremnych, będących ścianami wielościanu foremnego, przez S ilość ścian, przez P powierzchnią, wreszcie przez V objętość wielościanu foremnego. Ponieważ powierzchnia wielościanu foremnego jest równa summie powierzchni jego ścian, przeto będzie równa S razy wziętej powierzchni ściany. A że ściana wielościanu foremnego, jest wielokątem foremnym o m bokach, przeto jej powierzchnia, jak wiadomo, będzie równa $\frac{a^2}{4} m \operatorname{cotg} \frac{180^0}{m}$, zatym

$$P = \frac{1}{4} a^2 m S \operatorname{cotg} \frac{180^0}{m}.$$

Ponieważ objętość wielościanu foremnego, możemy uważać jako summę objętości piramid, mających za podstawy ściany wielościanu foremnego, a za wierzchołek środek kuli wpisanej lub opisanej na wielościanie foremnym; objętość zaś piramidy równa się $\frac{1}{3}$ części iloczynu powierzchni podstawy przez wysokość, która w tym razie jest promieniem kuli wpisanej w wielościan foremny, przeto objętość jednej piramidy wyrazi się jako iloczyn $\frac{1}{3} r$ przez powierzchnią ściany czyli będzie równa

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg} \frac{180^0}{m} \times \frac{a^2}{4} m \operatorname{cotg} \frac{180^0}{m}$$
$$= \frac{1}{24} a^3 m \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg}^2 \frac{180^0}{m}.$$

Że zaś objętość wielościanu foremnego jest równa S razy wziętej objętości piramidy, przeto

$$V = \frac{a^3}{24} m S \operatorname{cotg}^2 \frac{180^0}{m} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta.$$

Jeżeli ten wzór zastosujemy do każdego z wielościanów foremnych, otrzymamy:

1) dla czworościanu: $m = 3$, $S = 4$,

$$P = \sqrt{3} a^2, \quad V = \frac{1}{12} \sqrt{2} a^3,$$

2) dla sześcianu: $m = 4$, $S = 6$,

$$P = 6a^2, \quad V = a^3,$$

3) dla ośmiościanu: $m = 3$, $S = 8$,

$$P = 2\sqrt{3} a^2, \quad V = \frac{1}{3} \sqrt{2} a^3,$$

4) dla dwunastościanu: $m = 5$, $S = 12$,

$$P = 3 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^2, \quad V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3,$$

5) dla dwudziestościanu: $m = 3$, $S = 20$,

$$P = 5\sqrt{3} a^2, \quad V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3.$$

ROZDZIAŁ V.

NIEKTÓRE ZADANIA Z ASTRONOMII SFERYCZNEJ.

---

82. Sprowadzenie kąta do poziomu.

Niech będzie kąt BAC (fig. 23), położony na płaszczyźnie nachylonej pod pewnym kątem do płaszczyzny poziomej. Z wierzchołka A tego kąta i punktów B i C, dowolnie obranych na jego ramionach, spuśćmy prostopadłe AD, BE i CF na płaszczyznę poziomą i połączmy spodki tych prostopadłych prostemi DE i EF. Skutkiem tego utworzy się nam kąt EDF, który będzie rzutem kąta BAC na płaszczyznę poziomą i zowie się kątem sprowadzonym do poziomu. Znalezienie kąta EDF, gdy dany jest kąt BAC, tudzież kąty BAD i CAD, jakie ramiona kąta danego czynią z liniją pionową AD, zowie się sprowadzeniem kąta danego do poziomu.

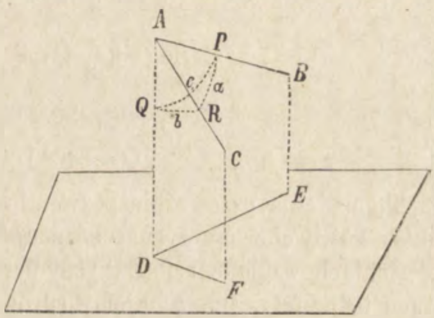

Fig. 23.

Aby rozwiązać to zagadnienie, to jest znaleść kąt EDF, gdy są dane kąty BAC, BAD i CAD, zakreślmy z wierzchołka A jako środka kulę promieniem równym jednostce. Skutkiem przecięcia się tej kuli z płaszczyznami BAC, BAD i CAD utworzy się trójkąt kulisty PQR, którego boki będą miarami kątów danych, kąt zaś PQR będzie kątem szukanym. Możemy więc wyrachować ten kąt za pomocą jednego z wzorów przypadku pierwszego rozwiązywania trójkątów kulistych jakichkolwiek. Przypuśćmy, że dla wyznaczenia kąta EDF = Q używamy wzoru

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

wtedy należy w nim założyć kąt $\alpha = Q$, bok $a = QR$, bok $b = PR$, bok $c = PQ$. Jeżeli w szczególności

$$a = QR = 37^0\,19'\,40'',\ b = PR = 67^0\,24'\,25'',\ c = PQ = 53^0\,42'\,35'',$$

wtedy $$a + b + c = 2p = 158^0\,26'\,40'',$$

$$p = 79^0\,13'\,20'',\ p - b = 11^0\,48'\,55'',\ p - c = 25^0\,30'\,45''.$$

Rachunek kąta $Q = DEF$

$$\begin{aligned}
\log\sin(p-b) &= \ \ 9{,}3112389\\
\log\sin(p-c) &= \ \ 9{,}6341830\\
\text{comp.}\log\sin b &= \ \ 0{,}0346775\\
\text{comp.}\log\sin c &= \ \ \underline{0{,}0936494}\\
2\log\sin\frac{1}{2}Q &= 19{,}0737488\\
\log\sin\frac{1}{2}Q &= \ \ 9{,}5368744\\
\frac{1}{2}Q &= 20^0\ \ 8'\ \ 9'',8,\\
Q &= 40^0\,16'\,19'',6.
\end{aligned}$$

To zadanie przeważnie przytrafia się przy pomiarach ziemi, gdy punkty, które chcemy wyznaczać znajdują się, jak zwykle, na różnych wzniesieniach względem płaszczyzny poziomej, a kąty, jakie tworzą linije łączące te punkty, potrzebujemy sprowadzać do płaszczyzny poziomej.

83. *Znaleść odległość dwu punktów na kuli ziemskiej, gdy dane są ich szerokości i długości gieograficzne.*

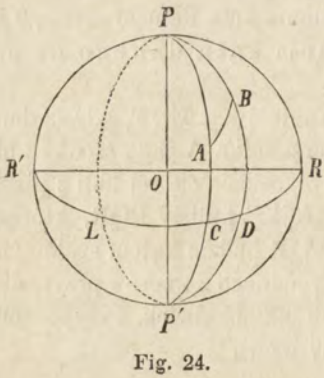

Fig. 24.

Niech A i B (fig. 24) będą dwiema miejscowościami położonemi na kuli ziemskiej, P biegunem północnym, P' biegunem południowym, zaś R'LR równikiem ziemskim, wreszcie PAP' i PBP' południkami danych miejscowości. Natenczas łuk AC, wyrażający odległość miejscowości A od równika, będzie szerokością gieograficzną miejscowości A, zaś łuk BD szerokością gieograficzną miejscowości B. Jeżeli PLP' będzie południkiem, od którego liczymy na równiku długości gieograficzne miejscowości na ziemi położonych, natenczas łuk LC będzie długością gieograficzną miejscowości A, łuk zaś LD długością gieograficzną miejscowości B.

Przypuśćmy nadto, że te długości przyjmujemy w kierunku LR, jako wschodnie, w kierunku zaś LR' jako zachodnie, pierwsze z nich uważać będziemy za dodatne, drugie za ujemne.

Poprowadźmy przez A i B łuk koła wielkiego; utworzy się wtedy trójkąt kulisty PAB, w którym będą wiadome boki AP i BP, jako równe dopełnieniom szerokości gieograficznych danych miejscowości, tudzież kąt APB, który mając za miarę łuk CD będzie równy różnicy lub summie długości gieograficznych danych miejscowości stosownie do tego, czy długości danych miejscowości są jednocześnie obie długościami wschodniemi lub zachodniemi, czyteż jedna jest wschodnią, a druga zachodnią. Tym sposobem z trójkąta kulistego APB będziemy mogli znaleść bok AB (na mocy przypadku trzeciego teoryi rozwiązywania trójkątów kulistych jakichkolwiek) to jest odległość dwu punktów na kuli ziemskiej, wyrażoną w stopniach. W rozwiązaniu tego zadania przyjmujemy, że ziemia jest kulą.

Przykład. Znaleść odległość między Warszawą i Paryżem.

Według Annuaire pour l'an 1891 publié par le bureau des Longitudes, mamy dla Paryża (obserwatoryum): szerokość gieograficzną $48^{0}\,50'\,11''$, długość równą 0^{0}, przyjmują bowiem południk paryski jako pierwszy, to jest jako południk, od którego liczą się długości gieograficzne; dla Warszawy (obserwatoryum): szerokość gieograficzną $52^{0}\,13'\,5''$, długość zaś (względem południka paryskiego) $18^{0}\,41'\,42''$. Mamy w tym razie

$$\text{kąt } P = 18^{0}\,41'\,42'', \quad \text{bok } BP = 90^{0} - 52^{0}\,13'\,5'' = 37^{0}\,46'\,55'',$$

$$\text{bok } AP = 90^{0} - 48^{0}\,50'\,11'' = 41^{0}\,9'\,49''.$$

W trójkącie więc ABP będziemy mieli $a = BP = 37^{0}\,46'\,55''$, $b = AP = 41^{0}\,9'\,49''$, kąt $\gamma =$ kątowi $P = 18^{0}\,41'\,42''$. Jeżeli więc do tego trójkąta zastosujemy wzory, podane w art. 39-ym Trygonometryi kulistej to jest wzór (3) i (7) mianowicie:

$$\operatorname{tg}\psi = \cos\gamma \operatorname{tg} a, \quad \cos c = \frac{\cos a \cos(b - \psi)}{\cos\psi},$$

otrzymamy naprzód kąt posiłkowy ψ, a następnie bok c, to jest AB i będziemy mieli zadanie rozwiązane

Rachunek kąta ψ

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} a &= 9{,}8893997 \\ \log\cos\gamma &= \underline{9{,}9764593} \\ \log\operatorname{tg}\psi &= 9{,}8658590 \\ \psi &= 36^{0}\,17'\,20''. \end{aligned}$$

Rachunek boku c

$$\log\cos a = 9{,}8978184$$
$$\log\cos(b - \phi) = 9{,}9984263$$
$$\text{comp.}\log\cos\phi = \underline{0{,}0936417}$$
$$\log\cos c = 9{,}9898864$$
$$c = 12^0\,19'\,1''.$$

Taką zatym jest odległość w stopniach między Warszawą i Paryżem. Jeżeli tę odległość chcemy wyrazić w milach gieograficznych, to ze względu, że 1^0 przyjmuje się jako równy 15 mil gieograficznych, odległość między Warszawą i Paryżem w milach gieograficznych będzie równa 184,75 mil gieograficznych.

Przykłady: 1) odległość między Warszawą i Petersburgiem, gdy szerokość Petersburga $59^0\,56'\,30''$, długość zaś względem Paryża $27^0\,59'\,8''$, wyraża się w stopniach $9^0\,6'\,11'',8$, czyli 136,55 mil gieograficznych;

2) odległość między Warszawą i Moskwą, gdy szerokość Moskwy $55^0\,45'\,19''$, długość zaś względem Paryża $35^0\,14'\,4''$, wyraża się $10^0\,23'\,35''$ czyli 155,9 mil gieograficznych;

3) odległość między Warszawą i Berlinem, gdy szerokość Berlina $52^0\,30'\,17''$, długość zaś względem Paryża $11^0\,3'\,30''$, wyraża się w stopniach $4^0\,40'\,13''$, czyli 70,75 mil gieograficznych;

4) odległość między Warszawą i Wiedniem, gdy szerokość Wiednia $48^0\,12'\,33''$, długość zaś względem Paryża $14^0\,2'\,27''$, wyraża się w stopniach $4^0\,59'\,31'',7$, czyli 74,88 mil gieograficznych.

WSCHÓD I ZACHÓD SŁOŃCA. DZIEŃ NAJDŁUŻSZY I NAJKRÓTSZY.

84. Za nim przystąpimy do rozwiązania zadania, dotyczącego wschodu i zachodu słońca, wypada nam podać pewne określenia znane z Kosmografii.

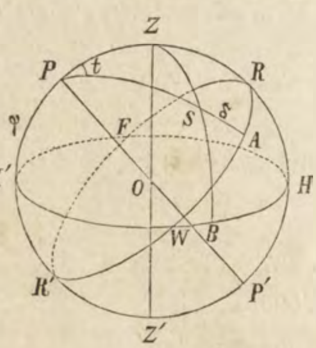

Fig. 25.

Niech punkt O (fig. 25) będzie miejscem obserwatora, zaś POP′ osią świata, P biegunem północnym, P′ biegunem południowym, natenczas płaszczyzna, poprowadzona przez środek ziemi prostopadle do osi świata, przetnie sklepienie niebieskie podług koła wielkiego RWR′F, które się zowie **równikiem** niebieskim. Jeżeli przez punkt obserwatora poprowadzimy płaszczyznę styczną do kuli ziemskiej, ta płaszczyzna przetnie sklepienie niebieskie podług koła wielkiego H'BHF, które się zowie poziomem. Prostopadła do tej płaszczyzny w punkcie obserwatora przecina sklepienie niebieskie w dwu punktach Z i Z', z których pierwszy, znajdujący się nad obserwatorem zowie się zenitem, położony zaś z drugiej strony zowie się nadirem. Koło wielkie poprowadzone przez P i Z będzie południkiem danej miejscowości O, łuk ZR jako równy PH' wskazuje wyniesienie bieguna nad poziom i jest równy szerokości gieograficznej φ danej miejscowości, zatym $PZ = 90^0 - \varphi$. Niech S będzie położeniem słońca lub gwiazdy. Koło wielkie przechodzące przez zenit Z i położenie gwiazdy S, a które będzie pionowe względem poziomu zowie się kołem wierzchołkowym; koło zaś wielkie, przechodzące przez biegun i położenie gwiazdy S, a które będzie pionowym względem równika zowie się kołem zboczenia gwiazdy S; wreszcie przecięcia się południka PZP' z równikiem w punktach R i R' zowią się punktami północnym i południowym poziomu.

Jeżeli gwiazda znajduje się w punkcie S, natenczas jej położenie znaleść potrafimy, gdy będą wiadome: 1) albo odległość SB gwiazdy od poziomu i kąt, jaki koło wierzchołkowe gwiazdy S czyni z południkiem PZR. Odległość gwiazdy od poziomu zowiemy wysokością gwiazdy i oznaczamy przez h; zatym $SB = h$, a więc $ZS = 90^0 - h$. Kąt między południkiem a kołem wierzchołkowym, liczony w kierunku pozornego ruchu sklepienia niebieskiego, czyli kąt BZH, mający za miarę łuk BH zowiemy azymutem gwiazdy S i oznaczamy przez A (liczymy go od 0^0 do 360^0); zatym $PZS = 180^0 - A$; 2) albo odległość SA gwiazdy od równika, tudzież kąt, jaki koło zboczenia PSA tworzy z południkiem niebieskim. Odległość gwiazdy od równika zowiemy zboczeniem gwiazdy i oznaczamy przez δ, zatym $SA = \delta$, a więc $PS = 90^0 - \delta$. Kąt między kołem zboczenia i południkiem niebieskim, liczony w kierunku pozornego ruchu sklepienia niebieskiego czyli kąt RPA, mający za miarę łuk AR, zowiemy kątem godzinnym gwiazdy i oznaczamy przez t.

Zadanie wschodu i zachodu gwiazd w ogólności, a w szczególności słońca, sprowadza się przedewszystkim do rozwiązania zadania, w jak sposób mając wiadome: wysokość gwiazdy h i jej azymut A możemy znaleść zboczenie gwiazdy δ i kąt godziny t; i nawzajem.

85. Jeżeli chcemy znaleść δ i t, gdy są wiadome A i h, natenczas rozważamy trójkąt kulisty PSZ, w którym mamy dane boki i kąt między niemi zawarty, mianowicie $SZ = 90^0 - h$, $PZ = 90^0 - \varphi$, $SZP = 180^0 - A$, a więc znajdziemy $PS = 90^0 - \delta$ i kąt $SPZ = t$. Na mocy zasadniczych twierdzeń Trygonometryi kulistej mieć będziemy

$$\cos PS = \cos PZ \cos ZS + \sin PZ \sin ZS \cos PZS,$$

$$\sin ZPS : \sin PZS = \sin ZS : \sin PS,$$

a stąd

(1) $$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A,$$

(2) $$\sin t = \frac{\sin h \sin A}{\cos\delta}.$$

Z tych wzorów, po przerobieniu pierwszego na inny dogodny do rachunku logarytmami, znajdziemy δ i t, gdy będą dane h i A. Jeżeli zaś chcemy znaleść h i A, gdy są dane δ i t, natenczas z trójkąta ZSP, w którym będziemy mieli dane dwa boki i kąt między niemi zawarty, mianowicie $PZ = 90^0 - \varphi$, $PS = 90^0 - \delta$, $SPZ = t$, znajdziemy $ZS = 90^0 - h$ i $SZP = 180^0 - A$, za pomocą wzorów

$$\cos ZS = \cos PS \cos PZ + \sin PS \sin PZ \cos SPZ,$$

$$\sin PZS : \sin ZPS = \sin PZ : \sin ZS,$$

czyli

(3) $$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t,$$

(4) $$\sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h}$$

Z tych wzorów, po przerobieniu pierwszego na inny dogodny do rachunku logarytmami, znajdziemy A i h, gdy będą dane δ i t.

86. Ponieważ gwiazda w ruchu pozornym opisuje koła równoległe do równika, przeto jeżeli chcemy mieć położenie gwiazdy przy jej wschodzie lub zachodzie, to jest punkty, w których ona przecina poziom należy założyć $h = 0$.

Jeżeli więc we wzorze (1) założymy $h = 0$, otrzymamy

(5) $$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

to jest azymut gwiazdy przy jej wschodzie i zachodzie.

Jeżeli we wzorze (3) założymy $h = 0$, otrzymamy

(6) $$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

to jest połowę łuku dziennego gwiazdy; a gdy będziemy znali czas górówania gwiazdy to jest chwilę przejścia jej przez południk, będziemy mieli czas wschodu i zachodu gwiazdy. Wzór zatym (6) służy nam do rozwiązania zadania, dotyczącego wschodu i zachodu gwiazd dla danej miejscowości, gdy znane nam zboczenie gwiazdy.

87. Zastosujemy teraz wzory podane w poprzedzających artykułach do kilku przykładów:

1) Która jest godzina w Warszawie ($\varphi = 52^0\, 13'\, 5''$) 9 sierpnia, gdy wysokość słońca jest $40^0\, 31'\, 10''$, zboczenie zaś słońca tego dnia wynosi $15^0\, 53'$ *).

Dla rozwiązania tego zadania używamy wzoru (3) art. poprzedzającego, z którego otrzymamy

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}, \text{ a jeżeli położymy } \sin\varphi \sin\delta = \sin\lambda,$$

mieć będziemy

$$\cos t = \frac{2\cos\frac{1}{2}(h+\lambda)\sin\frac{1}{2}(h-\lambda)}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Rachunek kąta λ

$$\begin{aligned} \log\sin\varphi &= 9{,}8978185 \\ \log\sin\delta &= \underline{9{,}4372422} \\ \log\sin\lambda &= 9{,}3350607 \\ \lambda &= 12^0\, 29'\, 30'',9. \end{aligned}$$

Rachunek kąta t

$$\begin{aligned} \log\cos\frac{1}{2}(h+\lambda) &= 9{,}9517697 \\ \log\sin\frac{1}{2}(h-\lambda) &= 9{,}3840934 \\ \log 2 &= 0{,}3020300 \\ \text{comp.}\log\cos\varphi &= 0{,}2127819 \\ \text{comp.}\log\cos\delta &= \underline{0{,}0169058} \\ \log\cos t &= 9{,}8665808 \\ t &= 42^0\, 39'\, 2'',8. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc dwie wartości t jednę $t = 42^0\, 39'\, 2'',8$ i $t = 317^0\, 20'\, 57'',2$, z których pierwsza odpowiada położeniu słońca po południu, druga zaś położeniu słońca przed południem. Jeżeli te wartości wyrazimy w czasie otrzymamy: 2 godz. 50 min. 35 sek. po południu i 9 godz. 9 min. 25 sek. przed południem.

---

*) Annuaire pour l'an 1891 str. 20.

2) O której godzinie 9 Sierpnia w Warszawie słońce wschodzi i zachodzi.

Mamy w tym razie $\varphi = 52^0 13' 5''$, $\delta = 15^0 53'$.

W celu rozwiązania tego zadania używamy wzoru (6)

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

$$\log\operatorname{tg}\varphi = 10{,}1106003$$

$$\log\operatorname{tg}\delta = \underline{\ 9{,}4541479\ }$$

$$\log\cos t = 9{,}5647482\ (-)$$

$$\text{kąt} = 68^0 27' 54'',$$

zatym

$$t = 111^0 32' 6'',$$

$$t = 248^0 27' 54''.$$

Zamieniając stopnie na czas, znajdziemy, że słońce zachodzi o godzinie 7 min. 26 sek 8, wschodzi zaś o godz. 4 min. 33 sek. 52. Długość dnia wyniesie 2×7 godz. 26 min. 8 sek., czyli 14 godz. 52 min. 16 sek.

88. Aby otrzymać dzień najdłuższy i najkrótszy dla danej miejscowości, należy zwrócić się do wzoru (6) i zauważyć, że wzór (6) dawać będzie największą wartość t, gdy δ będzie największe. W tym bowiem razie iloczyn $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ będzie największy, a więc dostawa będzie wtedy najmniejsza, a że $\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$, przeto kąt t będzie tym większy im będzie mniejsza dostawa kąta przedstawionego przez iloczyn $+\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$. Odwrotnie będą się rzeczy miały, gdy będziemy szukali najkrótszego dnia to jest najmniejszej wartości t.

Ponieważ zboczenie największe słońca przypada 21 Czerwca i jest równe $23^0 27'$, przeto tego dnia będziemy mieli dzień najdłuższy; ponieważ zaś zboczenie najmniejsze słońca przypada 21 Grudnia i wynosi $-23^0 27'$, przeto tego dnia będziemy mieli dzień najkrótszy.

Długość dnia najdłuższego znajdziemy ze wzoru (6) przez założenie $\delta = 23^0 27'$, długość zaś dnia najkrótszego przez założenie $\delta = -23^0 27'$.

Jeżeli we wzorze (6) założymy $\delta = 23^0 27'$, otrzymamy

$$t = 124^0 1' 37'',$$

$$t = 235^0 58' 23'',$$

zatym wschód słońca o	8 godz.	16 min.	7 sek.
zachód „	3 „	43 „	53 „
długość więc dnia najdłuższego	16 „	32 „	14 „

Długość dnia najkrótszego znajdziemy, kładąc we wzorze (6) $\delta = -23^{0}27'$, przez co otrzymamy

$$t = 55^{0}\ 58'\ 23'' \text{ dla zachodu}$$

$$t = 304^{0}\ 1'\ 37'' \text{ dla wschodu,}$$

zatym

wschod słońca o 8 godz. 16 min. 7 sek.

zachód słońca o 3 „ 43 „ 53 sek.

długość zatym dnia najkrótszego 7 godz. 27 min. 46 sek.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma „Bibl. mat.-fiz."
A. Czajewicz.

BŁĘDY DOSTRZEŻONE.

str.	*wiersz*		*zamiast*	*powinno być*
5	5	*od dołu*	opuścić kąt $1^0 =$	
5	4	„	θ^0 i θ	1^0 i 1
11	2	*od góry*	jącemu	jącym
24	2	*od dołu*	pierwszej ćwiartce	pierwszej i drugiej ćwiartce
26	8	*od góry*	$OQ = ON$.	$OQ = OP$
28	8	*od dołu*	stycznej i siecznej	stycznej, dostycznej i siecznej
36	4	*od góry*	$-\text{cotg } 75^0$	$+ \text{cotg } 75^0$
42	1	„	OP	OP_1
„	„	„	OP_1	OP
43	12	*od dołu*	przed wyrazem „Jeżeli” postawić art. **46.**	
46	16	*od góry*	daje	dają
47	10	„	Arc cos cosinus	Arcus cosinus
55	6	*od dołu*	sec	$\sec \theta$
56	5	„	$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{1}\pi\right)$	$\cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$
„	2	„	$\text{cose}\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$	$\sec\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$
57	4	*od góry*	$-\text{cotg}\frac{\pi}{6}$	$-\text{tg}\frac{\pi}{6}$
„	5	„	$-\text{tg}\frac{\pi}{6}$	$-\text{cotg}\frac{\pi}{6}$
96	12	*od dołu*	YOP_2	XOP_2
100	3	„	$(2n\pi + 1)\pi$	$(2n + 1)\pi$
107	2	„	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
109	1	*od góry*	$\sin(\alpha - \beta)$	$\cos(\alpha - \beta)$
„	„	„	$\sin\beta$	$\cos\beta$
110	11	„	$\sin(30^0 - \alpha)$	$\sin(30^0 + \alpha)$
114	3	„	$\sin 72^0$	$\text{tg } 72^0$
124	16	„	$\sin(\alpha + 1'')$	$\sin(\alpha + 1')$
126	11	„	na kąt	zamiast kąta

str.	*wiersz*		*zamiast*	*powinno być*
130	14	„	$\sqrt{2}\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)}{a\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi}$	$\sqrt{2}\,a\sin\alpha\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{4}\pi-\varphi\right)}{\sin\theta\cos\varphi}$
132	16	*od góry*	$2-\sin^2 x$	$2-2\sin^2 x$
133	11 i 12	„	$\cos^2 x$	$2\cos^2 x$
135	14	„	$\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$	$\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}$
147	6	„	$\sin\dfrac{\theta}{3\lambda}$	$\sin^3\dfrac{\theta}{3\lambda}$
150	5	„	8244736	8247784736
167	14	„	$17'',2$	$17'',7$
176	12	„	ABC	BAC
„	7	*od dołu*	$a\cos\gamma$ (wzór drugi)	$a\cos\beta$
179	11	*od góry*	CDC	ADC
185	1	*od dołu*	$\dfrac{a+b}{c}$	$\dfrac{a-b}{c}$
186	6	*od góry*	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\gamma$	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta):\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\gamma$
190	4	*od dołu*	2,2902203	2,2902213
213	1	„	art. 186	art. 188
215	2 i 4	*od góry*	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$
227	11	*od dołu*	14	24
237	7	*od góry*	$\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$	$\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}^2\dfrac{\beta}{2}\operatorname{cotg}^2\dfrac{\gamma}{2}$
243	8	„	$90^0-\dfrac{\alpha}{2}$	$90^0-\dfrac{\beta}{2}$
245	19	„	$1-a\cos\beta$	$l-a\cos\beta$
247	17	*od dołu*	BA′C	BA′C′
„	11	„	B′C′A	BC′A′
254	13	*od góry*	ah_b	ah_a
270	18	„	$\dfrac{\sin\nu}{d},\ \dfrac{\sin BOC}{a}$	$\dfrac{\sin\nu}{d}=\dfrac{\sin BOC}{a}$
275	3	„	OC_1	OC
285	2	*od dołu*	(2)	(1)
286	11 i 14	*od góry*	$-\cos P\ \dfrac{\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)}{\cos(P-\beta)}$	$-\cos P\ \dfrac{\cos(P-\alpha)\cos(P-\beta)}{\cos(P-\gamma)}$
290	4	*od góry*	wzorach	na wzorach
294	1	„	(1) art. 2-go	(3) art. 2-go
297	6	„	$75^0\ 50'\ 1'',8$	$71^0\ 50''\ 1'',8$
308	19	„	mniejsza	większa
309	10	„	$>\operatorname{tg}(180^0-\gamma)$	$<\operatorname{tg}(180^0-\gamma)$
312	6	*od dołu*	$\sin\gamma'$	$\sin c'$
„	„	„	$\sin c'$	$\sin\gamma'$
„	4	„	9,6913822	9,6913922
320	4	*od góry*	$141^0\ 32'\ 59'',2$	$141^0\ 31'\ 59'',2$
321	12	„	$\cos\dfrac{1}{2}(a+b)$	$\sin\dfrac{1}{2}(a+b)$

str.	*wiersz*		*zamiast*	*powinno być*
322	9	„	art. 38-go	art. 39-go
326	9	*od dołu*	$\cos a$	$\sin a$
344	2	*od góry*	$\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$	$\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
346	3	*od dołu*	9,0352075	9,9352075
347	13	*od góry*	γ_1	γ_2
„	14	„	γ_2	γ_1
348	8	„	121 1 0,9	121 0 0,9
351	13	*od dołu*	1,0211244	1,0311244
„	12	„	10,508	10,743
354	10	*od góry*	153° 34′ 37″	135° 34′ 37″
368	1	*od dołu*	po wyrazie „podstawy" dodać: przez jego wysokość, a że powierzchnia podstawy	
373	4	*od dołu*	$\sin^2\mu$	$\sin^2\mu_1$
„	6 i 8	„	μ	μ_1
374	2	*od góry*	$\cos m$	$\cos\mu$
„	„	„	$\cos n$	$\cos\nu$

DO NABYCIA

WE WSZYSTKICH KSIĘGARNIACH NASTĘPUJĄCE DZIEŁA

WYDANE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM,

lub ofiarowane na rzecz Kasy.

DZIEŁA MATEMATYCZNE.

Biblioteki matematyczno-fizycznej, wydawanej pod redakcyją *M. A. Baranieckiego* i *A. Czajewicza*, następujące tomy:

Seryi I tom I: **Początki arytmetyki**, *Berkmana*. Warszawa, 1884, w 12-ce, str. X, 266, z drzeworyt. w tekście. W oprawie. Cena zniżona kop. 30.

Seryi I t. II i III: **Wiadomości początkowe z fizyki**, *S. Kramsztyka*. Książeczka I Wydanie drugie, str. XII, 105, drzeworytów 61. Cena w oprawie kop. 40. Książeczka II Wydanie drugie str. XI, 171, drzeworytów 77. Cena w oprawie kop. 65.

Seryi I tom IV: **Wiadomości z gieografii fizycznej i meteorologii**. *A. W. Witkowskiego*. Warszawa. 1884. W 12-ce, str. 108, drzeworytów 22, litografij 4. W oprawie. Cena zniżona kop. 25.

Seryi III tom I: **Arytmetyka**, kurs teoretyczny *M. A. Baranieckiego*, Warszawa, 1884. W 8-ce, str. LVIII, 375, z drzeworyt. w tekście. Cena zniżona rs. 1.

Seryi III tom V: **Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych**, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem, *A. M. Baranieckiego*. Warszawa, 1885, w 8-ce, str. XVI, 131, drzeworytów 63. Cena zniżona kop. 40.

Seryi III tom VI. **Trygonometryja płaska i kulista**, *A. Czajewicza*. Warszawa, 1891, w 8-ce, str. XX, 389, drzeworyt. 86. Cena rs. 2.

Seryi III tom IX: **Kosmografija**, *J. Jędrzejewicza*, ze wstępem historycznym *H. Merczynga*. Warszawa, 1886, w 8-ce, str. XLVIII, 400, drzeworytów 215 tab. X. Cena zniżona rs. 2.

Seryi IV tom II: **Rozwiązywanie równań liczebnych**, *J. Sochockiego*. Warszawa, 1884, w 8-ce Lex, str. XI!, 212. Cena zniżona kop. 60.

Seryi IV tom IV: **Geometryja analityczna**, *W. Zajączkowskiego*. Warszawa, 1884, w 8-ce Lex, str. XL, 511, dzeworytów 85. Cena zniżona rs. 1.

Seryi IV tom X: **Mechanika teoretyczna**, *J. N. Frankego*, Warszawa, 1889, w 8-ce, str. XXXI, 645, drzeworytów 72. Cena rs. 3.

Danielewicz Bolesław. **Z dziedziny statystyki matematycznej**. Warszawa, 1884, w 8-ce, str. 20. Cena zniżona kop. 10.

Rozmarynowicz Teofil. **Matematyczne podstawy ubezpieczenia na wypadek niezdolności do pracy**, w zastosowaniu do urządzenia kas emerytalnych. Wydał Bolesław Danielewicz, Warszawa, 1886, w 8-ce więk. str. IV, 53. Cena zniżona kop. 10.

Gino Loria. **Przeszłość i stan obecny najważniejszych teoryj gieometrycznych**. Przekład uzupełniony licznemi dodatkami, wydany za upoważnieniem autora przez *S. Dicksteina*. Warszawa, 1889, w 8-ce, str. VIII, 113, V. Cena kop. 60.

DZIEŁA PRZYRODNICZE I ETNOGRAFICZNE.

Sprawozdania z piśmiennictwa naukowego polskiego, w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodniczych.

Rok 1. 1882. Warszawa, 1883, str. VIII, 188. Cena rs. 1.
Rok 2. 1883. Warszawa, 1885, str. IV, 220. Cena rs. 1.
Rok 3. 1884. Warszawa, 1886, str. IV, 294. Cena rs. 1.
Rok 4. 1885. Warszawa, 1887, str. VII, 300. Cena rs. 1.

I. D. Everett. **Jednostki i stałe fizyczne.** Przekład z 2-go wyd. angielskiego, dokonany przez *J. J. Boguskiego.* Staraniem Redakcyi „Wszechświata", Warszawa, 1885, w 8-ce, str. XX, 168, IV. Cena zniżona kop. 30.

T. X. Hurley. **Wykład biologii praktycznej.** Za upoważnieniem autora przełożył z angielskiego *August Wrześniowski,* prof. uniwersytetu. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. VIII, 271. Cena zniżona kop. 30.

F. W. Szokalski. **Początek i rozwój umysłowości w przyrodzie.** Warszawa, 1885, w 8-ce, str. VIII, 468. Cena zniżona kop. 60.

Dr. Kazimierz Filipowicz. **Wiadomości początkowe z botaniki** (podług dzieła D-ra Le Maout: „Leçons élementaires de botanique") z 194 drzeworytami w tekście. Warszawa, 1884, 16-ka, str. III, 234, II. Kartonowane. Cena zniżona kop. 25.

W. K. **Mapa hydrograficzna dawnej Słowiańszczyzny.** Część zachodnio-północna. Cenu zniżona kop. 10.

W. K. **Rzeki i jeziora,** tekst objaśniający do mapy hydrograficznej dawnej Słowiańszczyzny, części północno-zachodniej. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. II, 125. Cena zniżona kop. 10.

Dr. Berdau Feliks. **Flora Tatr, Pienin i Beskidu Zachodniego.** Warszawa, 1890, w 8-ce, str. IV, 827, 55. Cena rs. 3.

BIBLIOTEKA PRZYRODNICZA „WSZECHŚWIATA".

Dr. Edward Strasburger prof. **Krótki przewodnik do zajęć praktycznych z botaniki mikroskopowej.** W 8-ce, str. X, 368, VI ze 115 drzeworytami w tekście. Cena 2. (Wyczerpane).

H. Mohn. **Zasady meteorologii,** przełożył *St. Kramsztyk,* 8-o, str. XVI, 318, VI, z 46 drzeworytami i 24 tablicami litografowanemi. Cena rs. 2.

J. D. Dan. **Podręcznik gieologii.** Spolszczył *Dr. I. Siemiradzki.* Z 261 drzeworytami w tekście. Warszawa, 1891. W 8-ce str. 219. Cena rs. 1 kop. 20.

DZIEŁA LEKARSKIE.

D-ra Juljusza Cohnheima. **Odczyty z patologii ogólnej.** Podręcznik dla lekarzy i studentów. Przekład z 2-go przerobionego wydania, z 1882 r. Warszawa, 1884, w 8-e. Tom I, str. VIII, 607. Tom II, str. V, 262. Tom III, str. VI, 340, 20. Cena rs. 5.

S. Jaccoud. **Wykład patologii szszegółowej.** Przekład z siódmego wydania francuskiego z r. 1883. Dzieło ozdobione drzeworytami i tablicami chromolitograficznemi. Warszawa, 1884, w 8-ce. Tom I, str. 931. Tom II, str. 984. Tom III, str. 961. Cena rs. 6.

A. Baginsky. **Wykład chorób dzieci.** Podręcznik dla lekarzy i studentów. Przekład z wydania niemieckiego z r. 1883, dokonany przez D-ra *Wiktoryna Kosmowskiego.* Tom I. Warszawa, 1886, w 8-ce str. VIII, 279. Tom II, 1886, 272. Tom III, 1887, str. 272. Cena każdego tomu rs. 2.

Dr. F. V. Birch-Hirschfeld. **Wykład anatomii patologicznej.** Część ogólna, ze 128 drzeworytami w tekście. Z 2-go, zupełnie przerobionego wydania przełożył *Dr. Wacław Mayzel.* Warszawa, 1884, w 8-ce, str. XVI, 338. Cena zniżona kop. 30. (Wyczerpane).

H. Haeser. **Historyja medycyny.** Przekład trzeciego wydania dzieła: **Lehrbuch der Geschichte der Medicin** dokonany przez prof. *D-ra H. Łuczkiewicza.* Tom drugi. Dzieje medycyny nowożytnej. Warszawa, 1886, w 8-ce, str 1092. Cena rs. 5.

Toż samo dla b. prenumeratorów Biblioteki Umiejętności lekarskich, od ark. 68 (str. 737 do 1062), cena z przesyłką rs. 2. Arkusze poprzednie zniszczone i zagubione, księgarnia E. Wendego i Sp. uzupełnia bezpłatnie.

(NB. Tom pierwszy powyższego dzieła, obejmujący medycynę wieków starożytnych i średnich, wydany w r. 1876 w Bibl. Umiej. lekarsk., str. 387 i II, znajduje się w handlu księgarskim po rs. 1).

A. Korneliusza Celsa. **O lecznictwie ksiąg ośmioro** (A. Corn. Celsi: De medicina libri octo), z najlepszych wydań na język polski przełożył Dr. Med. i Chir. *Henryk Łuczkiewicz.* Warszawa, 1889, str. XXXVII, 630. Cena rs. 2.

G. Bunge. **Wykład chemii fizyologicznej i patologicznej** w 20 odczytach dla lekarzy i uczących się. Przełożyli *Dr. Wacław Mayzel* i *Maksymilijan Flaum,* kand. chemii. Warszawa, 1889, w 8-ce, str. VIII, 399, XI. Cena rs. 2.

Cybulski Napoleon prof. **Fizyologija człowieka,** wydana staraniem *Stanisława Markiewicza.* Część I Krew. Limfa. Mięśnie. Układ nerwowy. Warszawa, 1891, w 8-ce, str. 239 z 63 cynkotypami. Cena kop. 75. (Część druga w druku).

Dr-a Fryderyka Sandera. Zarys nauki o **Publicznej Ochronie Zdrowia,** według drugiugo wydania z r. 1885, przełożył *St. Markiewicz.* 40 arkuszy. Warszawa. 1891. Cena rs. 1 kop. 50.

Dr. Dawid Wassercug. **Objawy Oczne,** przy zaburzeniach układu nerwowego, oraz wartość ich przy rozpoznawaniu siedliska i natury chorób mózgowych. (Z rysunkami szematycznemi). Warszawa 1891, w 16-ce, str. 256. Cena rs. 1.

DZIEŁA FILOZOFICZNE, HISTORYCZNE, FILOLOGICZNE I PEDAGOGICZNE.

Biblioteka filozoficzna, wydawana pod redakcyją prof. *Henryka Struvego.* Dotąd wyszły następujące pisma:

Platon. **Obrona Sokratesa.** Przełożył z greckiego i objaśnienia dodał *Adam Maszewski,* Magister nauk filologiczno-historycznych b. Szkoły Głównej Warszawskiej. Warszawa, 1885, w 8-ce str. XII, 68, nlb. 4. Cena kop. 40.

Platon. **Fileb. Dyjalog o rozkoszy.** Przełożył z greckiego *Br. Kąsinowski.* Warszawa, 1888, w 8-ce, str. XL, 103, nlb. Cena kop. 70.

Kartezyjusz. **Rozmyślania nad zasadami filozofii,** dowodzące istnienia Boga i różnicy pomiędzy duszą ludzką i ciałem. Przełożył z łacińskiego *Ignacy Karol Dworzaczek.* Warszawa, 1885, w 8-ce str. XX, 110, nlb. 4. Cena kop. 70.

Spinoza. **Etyka,** sposobem geometrycznym wyłożona. Przełożył z łacińskiego *Antoni Paskal.* Warszawa, 1888, str. XLVII, 254. Cena rs. 1 kop. 50.

Berkeley. **Rzecz o zasadach poznania.** Przełożył z angielskiego *Feliks Jezierski.* Warszawa 1890, w 8-ce str. XXXII, 152, nlb. 6. Cena kop. 50.

Kondyllak. **Traktat o wrażeniach zmysłowych.** Przełożył z francuskiego *Antoni Lange.* Warszawa, 1887, w 8-ce, str. XXXVII. 220. Cena rs. 1 kop. 20.

Wierzbowski Teodor. **Krzysztofa Warszewickiego** niewydane pisma, listy do znakomitych ludzi, tudzież inne dokumenty, odnoszące się do jego życia i działalności, wraz ze spisem dzieł tegoż autora, dotąd drukiem ogłoszonych. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. VII, 276. Cena rs. 2.

Wierzbowski Teodor. **Krzysztof Warszewicki** 1544 — 1600 i jego dzieła. Monografia historyczno-literacka. Warszawa, 1877, w 8-ce, str. XII, 406. Cena rs. 3.

Biblioteka zapomnianych poetów i prozaików polskich:

Zeszyt I. **Wenecyja,** poemat historyczno-polityczny z końca XVI wieku. Warszawa, 1886, str. XXXVIII, 90, V. Cena rs. 3.

Zeszyt II. **Mowy Krzysztofa Warszewickiego,** wypowiedziane i wydane w r. 1602. Warszawa, 1885, str. VII, II. Cena rs. 1.

Wierzbowski Teodor. **Uchańsciana,** czyli zbiór dokumentów, wyjaśniających życie i działalność Jakóba Uchańskiego, arcybiskupa gnieźnieńskiego, † 1581. Warszawa, 1884—1890 w 8-ce.

Tom I. korespondencyja Uchańskiego z lat 1549 — 1581 i wyjątki z Acta decretorum kapituły gnieźnieńskiej z lat 1562—1581, str. VIII, XV, XLIV, 441.

*

Tom II. różne dokumenty z lat 1537 — 1581 i Uchańsciana Vladislaviensia, lat 1557 — 1562, zebrane przez *Zenona Chodyńskiego*, prałata kustosza katedry kujawskiej. str. IV, XVII, 480.

Tom III, zawierający: 1) korespondencyję Uchańskiego z Hozyuszem 1554 — 1573; listy rozmaitych osób do Uchańskiego, 1554 — 1565; 3) poselstwa polskie do Rzymu, 1548 — 1578; 4) biografię Uchańskiego przez I. A. Załuskiego; 5) Achacego Cureusa Elegia gratulatoria, 1559. Warszawa, 1890. Cena każdego tomu rs. 3.

Wierzbowski Teodor. **Jana Ostroroga Pamiętnik** ku pożytkowi Rzeczypospolitej zebrany, poprzedzony przedmową. Warszawa, 1891. Cena rs. 1 kop. 25.

Korneliusa Neposa. **Żywoty znakomitych mężów**, przełożył i objaśnienia historyczne dodał *A. Mierzyński.* Warszawa 1883, w 8-ce str. 361. Cena zniżona kop. 15.

J. Szastecki. **Gramatyka czeska**, wydana nakładem *Kazimierza Kaszewskiego.* Warszawa, 1884, w 8-ce str. VIII, 204. Cena rs. 1 kop. 20.

Prace filologiczne, wydawane przez *J. Baudouina de Courtenay*, *J. Karłowicza*, *Ad. Ant. Kryńskiego* i *L. Malinowskiego.*

Tom I. Warszawa, 1885 i 1886, w 8-ce, str. 818. Cena rs. 4 kop. 30.

Tom II. Warszawa, 1887—1888, w 8-ce str. 881. Cena rs. 4 kop. 50.

Tom III. Warszawa, 1887—1891, str. 846. Cena rs. 3.

Iliada Homera, przetłomaczył hexametrem *Augustyn Szmurło*, b. prof. literatury greckiej i rzymskiej i t. d. Warszawa, 1887. W 8-ce więk. str. XXX, 531. Cena zniżona rs. 1.

Rocznik pedagogiczny, przegląd postępów w dziedzinie wychowania i nauczania, wydawany staraniem i pod redakcyją *S. Dicksteina.* Tom II. 1882—1883. Warszawa, 1884, w 8-ce str. IX, 470. Cena zniżona kop. 50.

Gajsler J. F. **Rys dziejów czeskich**, skreślił według źródeł... Tom I. Warszawa, 1888. W 8-ce str. IV, 228, z mapą chromolitograf. Cena rs. 1 kop. 20. Tom II. 1892. Str. 361. Cena rs. 1.

DZIEŁA TREŚCI ROZMAITEJ.

Zieliński Dominik, b. obrońca przy senacie. **O wekslach** (fragment). Wydanie pośmiertne. Warszawa, 1883, w 8-ce, str. IV, 410. Cena rs. 2 kop. 50.

Jezierański Feliks. **Ustawy hypoteczne i przepisy o zatwierdzeniu aktów notaryjalnych**, obowiązujące w Królestwie Polskiem, z objaśnieniami. Część II. Ustawa sejmowa z r. 1818. Tom I. Warszawa, 1892. W 8-ce str. 575, VI.

Kleczkowski Kazimierz arch. **Analiza kształtów architektury.** Warszawa, 1885, w 8-ce, str. 101, z 22 tablicami rysunków, sposobem foto-litograficznym wykonanych. Cena rs. 2.

Toż. Część II. Warszawa, 1890, w 8-ce str. X, 114, z 65 rysunkami w tekście. Cena rs. 2.

CZAJEWICZ

TRYGONOMETRYJA
PŁASKA
I KULISTA

T. N. W.