Dar p. Biernackiej
L. 14.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA.

PLAN BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNÉJ.

SERYJA PIÉRWSZA (12-mo).

Tom I. **Początki arytmetyki** M. BERKMANA. Str. X+266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. KRAMSZTYKA. Książeczka I. Str. X + 77; drzeworytów 47. W oprawie kop. 30.
Tom III. Toż. Książeczka II. Str. VIII+132; drzeworytów 56. W oprawie kop. 45.
Tom IV. **Wiadomości początkowe z gieografii fizycznéj i meteorologii** A. W. WITKOWSKIEGO. *Wkrótce wyjdzie z druku.*
Tom V. **O najprostszych figurach gieometrycznych** M. BERKMANA. *W. w. z d.*

. . . .

SERYJA DRUGA (12-mo).

Tom I. **Arytmetyka** M. BERKMANA. *W. w. z d.*
Tom II. **Gieometryja elementarna w wykładzie przystępnym.**
Tom III. **Krótki wykład początków algiebry.**
Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
Tom V. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją**
Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**

. . . .

SERYJA TRZECIA (8-vo).

Tom I. **Arytmetyka,** kurs teoretyczny M. A. BARANIECKIEGO, z przypiskami A. ŻBIKOWSKIEGO i J. N. FRANKEGO. Str. 375+XXX..., z drzeworytami w tekście. Rubel 1 kop. 60.
Tom II. **Zadania arytmetyczne.** *W. w. z d.*
Tom III. **Algiebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych**
Tom IV. **Gieometryja elementarna.**
Tom V. **Krótki wykład syntetyczny elementarnych własności przecięć stożkowych.**
Tom VI. **Trygonometryja płaska i kulista.**
Tom VII. **Miernictwo.**
Tom VIII. **Fizyka.**
Tom XI. **Kosmografija i gieografija fizyczna z meteorologiją** J. JĘDRZEJEWICZA. *W. w. z d.*
Tom X. **Gieometryja wykréślna.**
Tom XI. **Mechanika elementarna.**

. . . .

SERYJA CZWARTA (8-vo Lex.).

Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. SOCHOCKIEGO. *W. w. z d.*
Tom III. **Teoryja równań algiebraicznych.** (*)
Tom IV. **Gieometryja analityczna** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Str. 511 + XL; drzeworytów 85. Rubli 3.
Tom V. **Gieometryja syntetyczna.** (**)
Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy.** (***)
Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego.**
Tom VIII. **Rachunek waryjacyjny.**
Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
Tom X. **Zasady mechaniki teoretycznéj.**
Tom XI. **Rachunki wykréślne.**

. . . .

TOM DODATKOWY «BIBLIJOTEKI». **Słownik matematyczno-fizyczny.**

Jako uzupełniające seryją IV «Bibl. mat.-fiz.» należy uważać następujące dzieła, ogłoszone przez BIBLIJOTEKĘ KÓRNICKĄ:

(*) **Teoryja wyznaczników,** kurs uniwersytecki M. A. BARANIECKIEGO. Paryż, 1879. 8-vo, str. XII+600. Marek 12.

(**) **Wykład gieometryi wykréślnéj** E. SĄGAYŁY. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablic miedziorytów. Marek 24.

(***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV+904. Marek 20.

Inw Kat

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,
WYDAWANA POD REDAKCYJĄ
M. A. BARANIECKIEGO
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.
SERYJA IV. TOM IV.

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA.

NAPISAŁ

Dr. WŁADYSŁAW ZAJĄCZKOWSKI,
CZŁONEK-KORESPONDENT AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI W KRAKOWIE,
B. PROFESOR SZKOŁY GŁÓWNÉJ WARSZAWSKIÉJ,
PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNÉJ WE LWOWIE.

WARSZAWA.
W DRUKARNI NOSKOWSKIEGO.
1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава 16 Декабря 1883 г.

Składał zecer W. Iwański.
Drzeworyty ciął W. Bojarski.
Papiér z papiérni w Pilicy.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ PIÉRWSZA.
GIEOMETRYJA ANALITYCZNA PŁASKA.

CZĘŚĆ DRUGA.
GIEOMETRYJA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI.

PRZEDMOWA.

Wobec nadzwyczajnych postępów, jakie nauka o przestrzeni wogóle, a gieometryja analityczna wszczególności, poczyniła wciągu bieżącego wieku, wobec mnóstwa teoryj i metod analityczno-gieometrycznych, z których każda posiada właściwe sobie zalety, zapewniające jéj wyższość nad innymi w pewnym zakresie zagadnień, napisanie dobréj książki elementarnéj o gieometryi analitycznéj, którąby odpowiadała obecnemu stanowi téj nauki, jest dziś zadaniem niełatwym. Niedość bowiém pozbiérać z lepszych dzieł rzeczy wiadome, ale potrzeba prawdy znane odniéść do najwłaściwszego początku i wyłożyć je zapomocą jednolitego sposobu postępowania; słowem, szczegóły nauki należy tak z sobą powiązać, aby one złożyły się na całość organiczną. Nadto baczyć należy, aby rachunek, lubo on jest właściwym środkiem badania, nie zasłaniał sobą prawd gieometrycznych, które przy jego pomocy wydobyć zamierzamy; dlategotéż wszelkie działania rachunkowe powinny być przeprowadzane w sposób najprostszy, aby nie sam rachunek, lecz cały tok rozumowań, jakie on zastępuje, zajmował nasz umysł. Walczenie bowiém samym rachunkiem, zostawiające rozum w bezczynności, sprawia ten skutek, że po przeczytaniu książki i sama nauka wypada z pamięci. Nakoniec, chociaż spośród teoryj analityczno-gieometrycznych jedne znalazły większe a inne mniejsze zastosowanie w praktyce, pomimo tego, dając słuszną przewagę piérwszym, nie można zapominać o drugich; albowiém, chociażby w obecnym czasie nie wyciągnęła z nich praktyka pożytku bespośredniego, korzyść ich naukowa, przez rosszérzenie naszych o przestrzeni wiadomości, jest niezaprzeczona. Książka więc elementarna o gieometryi analitycznéj powinna w zarysie podać obraz dokładny spółczesnego stanu téj umiejętności, teoryje najważniejsze wyłuszczać z wszelką gruntownością i nie pomijać mniéj narazie ważnych, jeżeli one zawiérają źródło nowych poglądów i dalszych postępów. Albowiém, jak Gergonne, jeden z najzasłużeńszych gieometrów, słusznie powiedział, »naród, któryby uprawiał umiejętności jedynie ze względu na ich zastosowania praktyczne i bespośrednie, nie może sobie pochlebiać, aby one pośród niego długo kwitnąć mogły«.

Tymi zasadami kierowałem się w moich wykładach gieometryi analitycznéj początkowo w b. Szkole Głównéj w Warszawie, a następnie w Szkole Politechnicznéj i w Uniwersytecie we Lwowie; one mi również przewodniczyły przy układaniu téj książki, która owym wykładom początek swój zawdzięcza.

Przeznaczając tę książkę jako podręcznik dla studentów tak uniwersytetów, jak i wyższych zakładów naukowych technicznych, do piérwszéj nauki gieometryi analitycznéj, ograniczyłem się w niéj rozważaniem linij i powierzchni algiebraicznych, albowiém badanie cokolwiek gruntowniejsze linij i powierzchni przestępnych wymaga użycia rachunku nieskończonościowego, który się dopiéro po gieometryi analitycznéj w tych szkołach wykłada. Atoli i w tym ograniczonym zakresie nie można było wyjść poza zagadnienie styczności, gdyż zagadnienia ponad tymi stojące, jak teoryja krzywizny i pomiar długości łuków, powierzchni i objętości brył, bez obszernych wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego nie mogą być wyłożone. Pomimo takiego ograniczenia treści, dzieło to przybrało znaczne rozmiary; nie mogło jednak stać się inaczéj, jeżeli najgłówniejsze z nowszych metod badania miały być, choć w tym zakresie, należycie uwzględnione.

Nie ubiegając się za oryginalnością, która zresztą w wykładzie elementarnym nauki tylko do pewnego stopnia jest możebna, lecz starając się o jak największą swéj pracy użyteczność, i pragnąc, aby ona mogła rozniecić w czytelniku zamiłowanie do téj gałęzi nauk matematycznych i pobudziła go do samodzielnych na tym polu poszukiwań, korzystałem przy układaniu téj książki nietylko z licznych monografij, zamieszczonych w różnych czasopismach, a osobliwie w »Nouvelles annales de mathématiques«, ale nadto z wielu najprzedniejszych podręczników niemieckich i angielskich. Najwięcéj w tym względzie pomocnymi były mi dzieła:

Ottona Hesse'go: »Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes« (Lipsk, 1861),

George'a Salmon'a: »A Treatise on conic sections« (wyd. 6-te, Londyn, 1879),

tegoż: »A Treatise on the higher plane curves« (wyd. 3-ie, Londyn, 1879),

tegoż: »A Treatise on the analytic geometry of three dimensions« (wyd. 3-ie Londyn, 1874),

Williama Allena Withworth'a: »Trilinear coordinates« (Cambridge, 1866),

Todhunter'a: A Treatise on the plane coordinate geometry« (wyd. 6-te, Londyn, 1880),

Percival'a Frost'a: »Solid geometry« (wyd. 2-ie, Londyn, 1875),

Józefa Wolstenholme'a: »Mathematical problems« (wyd. 2-ie, Londyn, 1878),

Ferdynanda Lindemann'a: »Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch« (Lipsk, 1876),

Ryszarda Heger'a: »Analytische Geometrie« w »Handbuch der Mathematik« Schlömilch'a (Wrocław, 1881).

Wymienienie szczegółowe, co z każdego z tych dzieł przeniosłem do swéj książki, a co należy uważać za owoc moich studyjów, uważam za rzecz zbyteczną i niełatwą. Światły czytelnik, któremu nie będą obcymi owe dzieła, bezwarunkowo najlepsze dziś w tym dziale nauki, sam to dostrzeże, a przyzna, że cokolwiek z nich wyjąłem, uprzednio na swój sposób przerobiłem; starałem się bowiém tak je wyzyskać, aby swéj pracy zapewnić jak największą użyteczność, o co mi głównie chodziło. Najwięcéj zaczerpnąłem z dzieł Hesse'go i Salmon'a, z których piérwsze zaleca się wielką wytwornością wykładu, a drugie bogactwem treści przewyższają wszystkie inne.

Aby czytelnikowi dać możność wypróbowania własnych sił w stosowaniu wyłożonych teoryj, dołączyłem do każdego rozdziału odpowiednio dobrane zadania do ćwiczeń, a odpowiedzi i krótkie wskazówki rozwiązywania tych zadań, które przy stopniowym czytaniu książki przedstawiaćby mogły pewne trudności, zamieściłem na końcu każdéj z dwu części, z których się ta książka składa. Niektóre z tych ćwiczeń zawiérają teoryje ważne, których wszakże, aby nie zwiększać objętości dzieła, nie mogłem umieścić w samym tekscie.

Nakoniec sam wykład poprzedziłem krótką historyją rozwoju gieometryi analitycznéj, osnutą na podstawie znakomitéj pracy Chasles'a: »Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie« i jego sprawozdaniu, wygotowanym dla ministerstwa oświaty we Francyi, o postępie gieometryi w bieżącym wieku, »Rapport sur les progrés de la géométrie« (Paryż, 1870). A nadto, po tym ogólnym zarysie historycznym, umieściłem obszerniejszą cokolwiek wzmiankę o tych matematykach polskich, którzy gieometryją analityczną u nas uprawiali, jéj znajomość roskrzewiali i chociażby skromnym przyczynkiem do jéj budowy się przyłożyli.

Kończąc tę krótką przedmowę poczuwam się do miłego obowiązku wynurzenia najserdeczniejszego podziękowania zacnemu Koledze i Przyjacielowi Drowi Maryjanowi Baranieckiemu, który mnie do ogłoszenia téj pracy zachęcił, ważnymi sprostowaniami ją udoskonalił i nad poprawnym jéj wydaniem troskliwie czuwał.

Pisałem we Lwowie w listopadzie r. 1883.

KRÓTKI RYS
ROZWOJU GIEOMETRYI ANALITYCZNÉJ.

Historyja poucza, że żadne z odkryć naukowych, które zmieniło postać pewnéj umiejętności i na nowe pchnęło ją tory, nie było dziełem jednéj chwili, lecz pracą wieków zwolna się przygotowywało, dopóki nie zjawił się gienijusz, który, objąwszy bystrym wzrokiem dotychczasowy pochód umiejętności, przez szczęśliwe zbliżenie i skojarzenie myśli swych poprzedników do dalszych badań nowéj nie utorował drogi. Taksamo rzecz się ma z gieometryją analityczną. Lubo wielki pomysł spółrzędnych jest wyłączną własnością Descartes'a, który go po raz piérwszy przedstawił w swéj gieometryi, wydanéj r. 1637 w Leodyjum, to jednak inne podstawowe myśli, na których spoczywa wspaniała budowa nauki Descartes'a, jak badanie własności miejsca gieometrycznego punktu przez przekształcenie związku pomiędzy pewnymi wielkościami, wyrażającego własność tego miejsca charakterystyczną, czyli jego określenie, tudzież wprowadzenie rachunku algiebraicznego jako środka badania, już są złożone w pracach jego poprzedników. Chcąc więc dać obraz początku i rozwoju gieometryi analitycznéj, nie można zaczynać jéj dziejów od chwili pojawienia się gieometryi Descartes'a, lecz należy wprzód przebiéc dzieje umiejętności matematycznych od piérwszych ich zawiązków, aby wydobyć na jaw te prace, owę epokę poprzedzające, w których tkwią piérwsze zawiązki téj nowéj nauki.

Przebiegając historyją umiejętności matematycznych, spostrzegamy piérwszy zaród gieometryi analitycznéj u starożytnych Greków, owego dziwnie utalentowanego narodu, który nietylko położył podwaliny do wszystkich sztuk i umiejętności, ale i wiele z nich, między innymi gieometryją, doprowadził do bardzo wysokiego stopnia udoskonalenia.

Euklides (około r. 285 przed Chr.), uczeń szkoły Platona i piérwszy szkoły aleksandryjskiéj przedstawiciel, według świadectwa jednego z późniejszych gieometrów greckich (Proclus w V wieku po Chr.), »zebrał elementy gieometryi, uporządkował wiele rzeczy znalezionych przez Eudoksyjusza, udoskonalił to, co był zaczął Teotetes, i dowiódł tego, co dotychczas niedostatecznie było udowodnione.« Jeżeli więc duch grecki już w téj epoce wzniósł się do badania figur gieometrycznych metodą zbliżoną do metody Descartes'a, to ślady tego powinny się dać odnaléść w dziełach Euklidesa. Głównym dziełem Euklidesa jest trzynaście ksiąg jego *Elementów,* do których pospolicie dołącza się dwie księgi o pięciu bryłach foremnych, przypisywane Hypsiklesowi, o 150 lat późniejszemu gieometrze aleksandryjskiemu. Oprócz tego dzieła (którego przekład polski, obejmujący 6 ksiąg początkowych i księgi 11-tą i 12-tą, dokonany przez Józefa Czecha, wyszedł w dwu wydaniach w Wilnie w r. 1807 i 1817) i księgi p. t. *Dane,* są nam znane tytuły jeszcze trzech innych dzieł EUKLIDESA, a mianowicie: cztéry księgi *o przecięciach stożkowych,* dwie księgi *o miejscach na powierzchni* i nakoniec trzy księgi *poryzmów,* które wszakże z wielką dla nauki szkodą zaginęły.

PAPPUS, gieometra grecki póżniejszéj daty (wieku IV po Chr.), powiada w swych »zbiorach matematycznych« (PAPPI *Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico* COMMANDINO *in latinum conversae, et commentariis illustratae,* w Pizie 1588, toż w Bononii 1660, in fol.), że trzy księgi poryzmów odznaczały się zadziwiającą bystrością i głębokością poglądów i że były nader użyteczne przy rozwiązaniu najzawilszych zagadnień, odnoszących się do poszukiwania miejsc gieometrycznych. W tych zbiorach, zawiérających rozmaite odkrycia najsławniejszych gieometrów i wielkie mnóstwo twierdzeń ciekawych i podań pomocniczych, mających ułatwiać czytanie ich dzieł, podaje PAPPUS 38 podań, potrzebnych do zrozumienia dzieła EUKLIDESA o poryzmach. Rozmaici matematycy w XVII i XVIII stuleciu, znakomici znawcy gieometryi starożytnych, jak FERMAT (1590—1663), HALLEY (1656—1742) i SIMSON (1687—1768), usiłowali odgadnąć rzeczywiste znaczenie poryzmów; wszakże dopiéro CHASLES'owi, jednemu z największych matematyków obecnego wieku, udało się przebić pomrokę, pokrywającą tę kwestyją.

Na podstawie ścisłéj analizy wskazówek PAPPUSA dochodzi CHASLES w swéj historyi gieometryi, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (2-gie wyd. w Paryżu r. 1875), tudzież w znakomitym studyjum: *Les trois livres de porismes d'* EUCLIDE, *rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de* PAPPUS *et conformement au sentiment de R.* SIMSON *sur la forme des énoncés de ces propositions, par* CHASLES (w Paryżu r. 1860), do wniosku, że zbiór poryzmów był zestawieniem rozmaitych własności lub rozmaitych wyrażeń linij krzywych (prostych i kołowych w dziele EUKLIDESA), przedstawiającym zarazem przekształcenia tych własności jednych na drugie, czyli, że poryzmy były poniekąd równaniami tych krzywych i służyły starożytnym do rozwiązania zagadnienia następującego: »wyznaczywszy miejsce gieometryczne zapomocą wykréślenia spólnego wszystkim jego punktom, lub zapomocą pewnego układu spółrzędnych, odnaléść inne wykréślenie lub inny układ spółrzędnych, któryby czynił zadość wszystkim punktom tego miejsca i dał poznać jego naturę i jego położenie«.

Starożytni bowiém nie posiadali, jak my od czasów DESCARTES'a, możności porównywania z sobą miejsc, do jakich dochodzili w swych poszukiwaniach gieometrycznych. Dla nas dość wyrazić miejsce we spółrzędnych, aby poznać bespośrednio jego naturę, a rozbiór jego równania pouczy nas o jego osobliwościach i o stanowisku śród familii miejsc, do jakiéj należy. Starożytni, przeciwnie, nie posiadali takiego postępowania ogólnego i jednolitego, wskutek czego musieli wynajdywać rozmaite środki pomocnicze, aby rospoznać związek miejsca, po raz piérwszy napotkanego, z innymi miejscami, już znanymi. Tymi środkami mogły być tylko zmiany w opisaniu, czyli we spółrzędnych miejsca (biorąc wyraz spółrzędne w znaczeniu najogólniejszym), aby przez to dojść do sposobu opisania prostszego, lub nawet tożsamościowego ze sposobem opisania miejsc znanych.

Z tego przedstawienia rzeczy wynika, że nauka poryzmów zastępowała u starożytnych analizę DESCARTES'a, która w swych zastosowaniach jest jeno poryzmem ciągłym, zawsze téj saméj natury, a kształtu nader dogodnego dla celów, jakim służy. Jakoż, zadaniem téj analizy jest także: z warunków miejsca wyciągnąć wyrażenie nowe tego miejsca, któreby było nam znane, a przez swe związki z elementami, do których się je odnosi, dozwoliło z łatwością poznać naturę i położenie tego miejsca. Słowem, nauka poryzmów była rzeczywistą gieometryją analityczną starożytnych, różniącą się od nauki DESCARTES'a jedynie brakiem symbolów i sposobów algiebraicznych, i prawdopodobnie, gdyby była nas doszła, znalezionoby w niéj piérwszy zarodek dzisiejszéj gieometryi analitycznéj.

Lubo dopiéro po EUKLIDESIE pojawili się najznakomitsi gieometrowie greccy: ARCHIMEDES *(Oeuvres d'*ARCHIMÈDE, *traduites littéralement, avec un commentaire par F.* PEYRARD, w Paryżu r. 1807, in fol.) (287 — 212 przed Chr.), który swą »metodą wyczerpywania« (methodus exhautionis) uprzedził i przygotował wielkie odkrycie rachunku nieskończonościowego, i APOLLONIUS z PERGI (APOLLONII PERGAEI *conicorum libri octo, edidit* HALLEY, Oxoniae, 1710, in fol.) (około 247 przed Chr.), autor 8 ksiąg przecięć ostrokręgu: wszelako ani ci gieometrowie, anitéż ich następcy nie stworzyli gieometryi analitycznéj w duchu DESCARTES'a, gdyż popiérwsze, rachunek algiebraiczny zaczął być uprawiany dopiéro w epoce, kiedy umiejętność grecka chyliła się do upadku (przez DIOFANTOSA z ALEKSANDRYI w wieku IV po Chr.), a powtóre, chociażby algiebra wcześniéj im była znaną, charakter metody naukowéj Greków nie dopuściłby skojarzenia algiebry z gieometryją, a dopiéro ze skojarzenia tych dwu gałęzi matematyki mogła wyniknąć gieometryja analityczna DESCARTES'a.

Do końca zeszłego wieku mniemano, że Arabom zawdzięczamy wielki pomysł posługiwania się algiebrą w poszukiwaniach gieometrycznych. Lecz na początku bieżącego stulecia oryjentaliści angielscy, TAYLOR, STRACHEY i COLEBROOKE, poznawszy dzieła matematyczne dwu autorów indyjskich, BRAHMEGUPTY i BHASKARA AKARJA (z których piérwszy żył w wieku VI, a drugi w wieku XII naszéj ery), znaleźli w nich źródło téj metody. Nie znając tych dzieł, musimy się tu ograniczyć podaniem wniosków, jakie CHASLES w swéj historyi gieometryi *(Aperçu* i t. d., Note XII) wyciągnął z nader gruntownéj ich analizy.

Według opinii CHASLES'a, Indusowie posługiwali się algiebrą dla skrócenia i ułatwienia dowodzeń swych twierdzeń gieometrycznych, a gieometryją dla udowodnienia swych prawideł algiebraicznych i dla uwidocznienia, zapomocą figur, wypadków analizy. To połączenie tych dwu działów umiejętności matematycznych występuje jaśniéj w dziełach BHASKARY, aniżeli w BRAHMEGUPTY (prawdopodobnie dlatego, że dzieło BRAHMEGUPTY jest zwięźlejsze, zawiéra daleko mniéj prawideł algiebry i wcale ich nie dowodzi); a z doszłych do nas wywodów wolno się domniemywać, że u Indusów oba te działy matematyki dosięgły wysokiego rozwoju. Nie możemy podawać licznych przykładów, zaczerpniętych z dzieł tych matematyków, jakimi CHASLES popiéra to twierdzenie, wszakże nie możemy się powstrzymać, aby nie wspomnieć o sposobie dowodzenia twierdzenia PITAGORASA i o sposobie rozwiązania, w liczbach wymiernych, równania nieoznaczonego stopnia 2-go. — Co do piérwszego, BHASKARA kreśli wewnętrznie na bokach kwadratu cztéry trójkąty prostokątne sobie równe, których przeciwprostokątne są bokami kwadratu, i powiada: »patrzcie«. Istotnie, widok figury wystarcza, aby okazać, że pole kwadratu jest równe sumie pól cztérech trójkątów (czyli cztéry razy wziętemu polu jednego z nich), zwiększonéj polem małego kwadratu, którego bok jest różnicą ramion kąta prostego w każdym z tych trójkątów. Jakoż, oznaczając przez c przeciwprostokątną każdego z trójkątów, zaś przez a i b pozostałe jego boki, mamy $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2$, czyli $c^2 = a^2 + b^2$, co było do okazania. — Co się zaś tyczy rozwiązania równania nieoznaczonego stopnia 2-go $ax + by + c = xy$ w liczbach wymiernych, Bhaskara okazuje zapomocą figury, przedstawiającéj znaczenie gieometryczne tego równania, że to równanie daje się przekształcić na następujące: $(x-b)(y-a) = ab + c$, skąd wnosi, że wziąć można $x = b + n$, $y = a + \frac{ab+c}{n}$, gdzie n jest liczbą dowolną.

Na podstawie analizy dzieł tych gieometrów indyjskich, tak różniących się metodą od dzieł greckich, wnosi Chasles, że przystosowanie algiebry do gieometryi jest pomysłem Indusów i pochodzi z czasów daleko wcześniejszych, aniżeli wiek Bhaskary, tymwięcéj, że występuje ono także w dziełach Arabów już z wieku IX, a nie ulega wątpliwości, że Arabowie mogli ten sposób postępowania, wcale nieużywany przez Greków, zaczerpnąć jedynie ze zródeł indyjskich.

Z tego, cośmy dotychczas powiedzieli, okazuje się, że dwie podstawowe myśli, których połączenie szczęśliwe doprowadziło Descartes'a do odkrycia metody spółrzędnych, już są złożone w dziełach gieometrów, znacznie wyprzedzających wiek Descartes'a; a mianowicie, zawdzięczamy gieometrom greckim sposób badania własności miejsc gieometrycznych, a gieometrom indyjskim wprowadzenie algiebry jako narzędzia do badań gieometrycznych.

Przez długi przeciąg czasu, bo od wieku VIII aż do XIII, kiedy Europa w grubych ciemnościach była pogrążona, jedynie Arabowie Bagdadu i Korduby zajmowali się uprawą umiejętności. Począwszy od wieku VIII, pod panowaniem oświeconych książąt z domu Abassidów, przyswoili oni sobie dotychczasowe zdobycze naukowe umysłu ludzkiego tak ze źródeł greckich, jak i indyjskich, i za ichto pośrednictwem Europa dowiedziała się o nich jeszcze przedtym, nim ze źródłami oryginalnymi zapoznać się mogła. Nie naszym jest zadaniem rostaczać szczegółowy obraz działalności naukowéj Arabów; ograniczymy się jedynie tym, co w ścisłym związku zostaje z odkryciem gieometryi analitycznéj.

Wiek IX po Chr. jest wiekiem największego rozwoju nauk matematycznych u Arabów. Wtedy trzéj bracia, Muhammed, Hamet i Hasan, synowie Musy ben Szaker'a, szczególniéj wsławili się przekładami rozmaitych dzieł greckich i indyjskich, oraz własnymi pracami we wszystkich działach matematyki. Najważniejszym dla nas jest traktat algiebry Muhammeda, albowiém jest on tym dziełem, z którego Europa czerpała piérwsze wiadomości algiebraiczne; dlatego kilka słów o nim powiemy.

W tym dziele używa Muhammed, podobnie jak Indusowie, gieometryi, aby wykazać pewność działań algiebry; uwagi godnym jest przedewszystkim sposób, jakim dowodzi tą metodą, prawideł na rozwiązanie równania stopnia 2-go. Autor rozróżnia trzy przypadki równania stopnia 2-go, które, używając dzisiejszych znaków, tak przedstawić można:

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad ax^2 - bx - c = 0 \quad \text{i} \quad ax^2 - bx + c = 0,$$

(naturalnie spółczynniki a, b, c są u niego liczbami wymienionymi); czwartym przypadkiem, $ax^2 + bx + c = 0$, w którym wszystkie trzy spółczynniki są dodatne, nie zajmuje się wcale. Tych równań wynajduje tylko pierwiastki dodatne, a ujemne odrzuca, jako nie mające żadnego znaczenia. W przypadku trzecim, kiedy oba pierwiastki są dodatne (wrazie, gdy są rzeczywiste), powiada, że należy obliczyć obadwa, a potym zbadać, który z nich odpowiada zagadnieniu. Dzieło Muhammeda zawiéra nadto (podobnie jak dzieła indyjskie) część gieometryczną o pomiarze pól. Natomiast nie znajdujemy w nim nic o równaniach nieoznaczonych nietylko stopnia 2-go, ale nawet 1-go, lubo skądinąd wiadomo, że Arabowie i tymi równaniami podług wzorów indyjskich się zajmowali, jak również nie znajdujemy sposobu gieometrycznego rozwiązania równania stopnia 3-go kształtu $x^3 - ax - b = 0$, zapomocą dwu paraból, które zawiéra urywek algiebry arabskiéj, jaki odkrył Sédillot. Przyczynę tego uszczuplonego zakresu podaje sam autor w przedmowie, z któréj się dowiadujemy, że to dzieło, napisane na roskaz kalifa Al Mamuna, miało jedynie ułatwić te działania, które się trafiają w życiu codziennym.

To dzieło, uważane za elementarne w wieku IX, było w 700 prawie lat później dla Europejczyków *Ars magna* i onoto stanowiło podstawę i początek dalszych odkryć w naukach matematycznych. Jakoż, wszyscy historycy umiejętności matematycznych zgadzają się na to, że znajomość algiebry rospowszechnił w Europie Kamil Leonard z Pizy (w początkach wieku XV), zwany Fibonacci, poznawszy ją u Arabów, a piérwsze dzieło drukowane: *Summa de arithmetica et geometria* Łukasza Paccioli, zwanego de Burgo, z roku 1494, zawiérające prawidła rachunku algiebraicznego, nie wychodzi poza to, co znajdujemy w dziele Muhammeda.

Nie możemy śledzić szczegółowo rozwoju algiebry po jéj wprowadzeniu do Europy; powiemy tylko, że, lubo zaraz w piérwszych chwilach, nowością rzeczy zachwyceni, liczni matematycy, naprzód włoscy, jak: Scipio, Ferreo, Tartatglia, Cardan, Ferrari i Bombelli, do lepszego uzasadnienia prawd znanych się przyłożyli i pewne przyczynki do téj nauki wnieśli (jak np. rozwiązanie algiebraiczne równania stopnia 3-go), to jednak, aż do czasów Viète'a (1540—1603), algiebra, wykonywająca wszelkie działania jedynie na liczbach szczególnych, nie miała téj cechy ogólności, aby dała się użyć jako środek do badania własności figur gieometrycznych. Dopiéro przez gienijalny pomysł oznaczania wszelkich liczb, tak wiadomych jak i niewiadomych, znakami ogólnymi i przez zastosowanie tego do rozwiązania równań stopnia 2-go i 3-go, Viète zrobił piérwszy krok na drodze ściślejszego związku algiebry z gieometryją, który z czasem doprowadził do wielkiego odkrycia Descartes'a.

Jakoż, wskutek tego uogólnienia Viète'a, algiebra stała się narzędziem dogodnym do badania własności linij krzywych. Wiadomo, że każda własność linii krzywéj zależy na tym, iż pewne wymiary pozostają w określonym stosunku do innych wymiarów. Tak np., w kole kwadrat, wystawiony na prostopadłéj, spuszczonéj z punktu obwodu na średnicę, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu na obu jéj odcinkach. Oznaczając przez y liczbę jednostek długości zawartych w téj prostopadłéj, a przez x i $2a-x$ liczby jednostek zawartych w obu odcinkach średnicy, któréj długość równa się $2a$, mamy równanie $y^2 = x(2a-x)$, wyrażające powyższą własność koła, czyli równanie koła, a przez rozbiór tego równania można znaléść wszystkie inne jego własności. Istotnie, tym sposobem matematycy spółcześni Descartes'owi (1596—1650), jak Fermat (1590—1653) i Roberval (1602—1673), jeszcze przed pojawieniem się jego gieometryi, badali własności kilku krzywych, wziętych pojedyńczo, i zawsze metodami od siebie różnymi, nie przedstawiającymi żadnego z sobą związku. Dopiéro gieometryja Descartes'a, przez wprowadzenie metody spółrzędnych, dała tym badaniom kierunek należyty. Ona bowiém wprowadziła sposób postępowania jednolity, a zarazem tak ogólny, że dozwala przedstawiać własności ogólne nie jednéj krzywéj, ale całéj familii linij krzywych jednym wzorem, wskutek czego, wyprowadziwszy z tego wzoru własność jednéj krzywéj, znajdujemy jednocześnie własności odpowiednie wszystkich innych linij krzywych, które do téj familii należą.

Dzieło Descartes'a, *Géométrie*, wyszło, jak już powiedzieliśmy, w roku 1637 w Leodyjum; składają je trzy księgi, w obszerności ogólnéj 104 kartek małéj ćwiartki.

W księdze piérwszéj autor pokazuje naprzód, jak można przedstawić gieometrycznie działania zasadnicze arytmetyki: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, a następnie przechodzi do wykréślenia równań stopnia 1-go i 2-go, i tu wyjaśnia po raz piérwszy znaczenie pierwiastków ujemnych.

W drugiéj księdze zajmuje się autor t. z. zagadnieniami wyższego stopnia i teoryją linij krzywych. Starożytni rozróżniali trzy rodzaje zagadnień: płaskie, bryłowe i linijowe. Piérwsze rozwiązywali zapomocą linii prostéj i koła, drugie zapomocą przecięć stożkowych, a trzecie zapomocą krzywych wyższych, które dla odróżnienia od przecięć stożkowych, występujących na figurze gieometrycznéj, a więc »gieometrycznych«, nazwali »mechanicznymi«. Autor następnie pokazuje, jak w algiebrze zagadnieniom płaskim odpowiadają równania stopnia 1-go i 2-go, bryłowym równania stopnia 3-go, a linijowym równania stopnia 4-go i stopni wyższych. Nakoniec przechodzi do opisania swego układu spółrzędnych, zapomocą którego tak gienijalnie sprowadził badanie własności linij krzywych do badania własności równań algiebraicznych. Linije krzywe, które Descartes brał pod uwagę, wyłącznie są takie, iż równania ich są algiebraiczne stopnia skończonego. Te krzywe nazywa on »gieometrycznymi«, a wszystkie inne »mechanicznymi«; dopiéro późniéj Leibnitz nazwał piérwsze »algiebraicznymi«, a drugie »przestępnymi«.

W trzeciéj księdze traktuje Descartes o niektórych własnościach równań algiebraicznych, a potym przechodzi do rozwiązania sławnych zagadnień starożytności: podwojenia sześcianu i podzielenia kąta na trzy równe części, przyczym dowodzi, że wszelkie zagadnienia stopnia 3-go dają się do tych dwu sprowadzić, co zresztą już Viète był poznał. Najwięcéj wszakże wagi przywiązał Descartes do swéj metody stycznych. Dla starożytnych styczna byłato prosta, która z krzywą ma jeden punkt spólny; dopiéro Descartes i współczesny mu Fermat uważali ją jako granicę siecznéj, któréj dwa punkty przecięcia się z krzywą schodzą się z sobą razem w jednym punkcie styczności. Jest to określenie dzisiaj powszechnie używane; jednak dzisiejszy sposób wyznaczenia linij stycznych nie jest sposobem Descartes'a, lecz więcéj się zbliża do sposobu Fermat'a.

Do rospowszechnienia gieometryi Descartes'a głównie przyczynili się ówcześni młodzi matematycy holenderscy; spółczesny bowiém znakomity francuski uczony, Fermat, lubo miał być w posiadaniu metody spółrzędnych jeszcze przed ogłoszeniem tego wynalazku przez Descartes'a, w swych poszukiwaniach gieometrycznych zbliżał się więcéj do metody starożytnych, a Roberval nawet odmawiał metodzie Descartes'a tych zalet, jakie rzeczywiście posiadała, i dopiéro na schyłku życia do niéj się zwrócił; inni zaś, z wyjątkiem de Beaune'go, zrażeni zwięzłością i ciemnością przedstawienia dzieła Descartes'a, doniosłości téj nowéj metody wcale nie pojmowali.

W gronie uczonych holenderskich, którym gieometryja analityczna zawdzięcza tak swe rospowszechnienie, jak i dalsze postępy, piérwsze miejsce zajmuje Franciszek von Schooten (16.. — 1659), profesor w Leodjyum, który gieometryją Descartes'a przełożył na język łaciński i razem ze swym komentarzem wydał w r. 1649. [Drugie tego przekładu wydanie wyszło w r. 1859, razem z komentarzem dawniéj napisanym przez de Beaune'go.] Głównym wszakże dziełem Schooten'a są jego *Exercitationes mathematicae* z roku 1646, w których metodę Descartes'a stosuje do wielu nowych i trudnych zagadnień gieometryi wyższéj. Nadto Schooten napisał rosprawę: *De organica sectionum conicarum descriptione,* w któréj uczy rozmaitych sposobów kreślenia tych krzywych zapomocą ruchu ciągłego. Schooten jest dla nas ważny z tego także powodu, że piérwszy zwrócił uwagę świata uczonego na pracę naszego ziomka Macieja Głoskowskiego: *Geometria peregrinans* (wydaną w Gdańsku, prawdopodobnie w r. 1646), w któréj tenże podaje kilkanaście zadań z gieometryi praktycznéj, żądając, aby je rozwiązano używając tylko linijału.

Po Schooten'ie zasługują na wzmiankę Sluze (1623 — 1685), Hudde (1640 — 1704), de Witt (1625 — 1672) i nakoniec Huygens (1629 — 1695), jeden z największych myślicieli w wieku XVII.

Piérwsi dwaj stosowali metodę Descartes'a do nowych zagadnień i przyczynili się do jéj postępu także przez udoskonalenie nauki o równaniach algiebraicznych; Witt obmyślił nową teoryją przecięć stożkowych, polegającą na rozmaitych opisaniach tych krzywych na płaszczyźnie bez wprowadzania stożka, a Huygens, lubo z większym zamiłowaniem uprawiał gieometryją starożytnych i za jéj pomocą w swym *Horologium oscilatorium* położył podwaliny do teoryi cyklojdy i do teoryi krzywych rozwijających (evoluta, t. j. miejsce punktu przecięcia się dwu sąsiednich normalnych do krzywéj danéj), to jednak, powagą swego imienia i niektórymi zastosowaniami metody Descartes'a, niemało się do jéj szybszego rospowszechnienia przyłożył.

Obok tych badaczów należy wymienić jeszcze matematyka angielskiego Wallis'a (1616 — 1703), który napisał piérwszy traktat analityczny przecięć stożkowych podług metody Descartes'a, a w swéj *Arithmetica infinitorum* zrobił zastosowania do archimedesowéj metody wyczerpywania, wznowionéj przez Cavalieri (1598 — 1647) pod nazwą »metody niepodzielnych«, i poczynił ważne postępy w traktowaniu tych zagadnień gieometryi, które dziś należą do rachunku całkowego; tudzież uczonego niemieckiego Tschirnhausen'a (1651 — 1708), sławnego między innymi z badań nad linijami kaustycznymi, t. j. nad obwiedniami promieni światła odbitych lub załamanych.

Matematycy, których wymieniliśmy, jako piérwszych krzewicieli metody Descartes'a, stosowali ją jedynie do linij krzywych płaskich, lubo Descartes, objąwszy doniosłość i potęgę spółrzędnych, wskazał ich użycie także w teoryi krzywych skośnych. Zdaje się, mimo tego, że dopiéro po upływie zgórą pięćdziesięciu lat zaczęła się rozwijać gieometryja analityczna w przestrzeni. Chasles w swéj historyi gieometryi wskazuje, iż matematyk francuski Parent (1666 — 1716) był piérwszym pracownikiem na tym polu [w roku bowiém 1700 miał on przedstawić powierzchnią przez równanie z trzema zmiennymi w rosprawie, czytanéj w akademii nauk], a Clairault (1713 — 1765) był piérwszym, który w *Traité des courbes à double courbure* z roku 1731 wyłożył w sposób metodyczny teoryją spółrzędnych w przestrzeni z zastosowaniem jéj do powierzchni krzywych i do linij krzywych skośnych.

W pół wieku po ogłoszeniu gieometryi Descartes'a powstał nowy algorytm, którego odkrycie stanowi doniosłą epokę w historyi rozwoju nauk matematycznych; mówimy o rachunku wielkości nieskończenie małych, czyli rachunku różniczkowym i całkowym. Zasługę tego odkrycia przypisują jedni Newton'owi (1684), inni Leibnitz'owi (1687). Nie wdając się w szczegóły toczącego się dotąd sporu, któremu z tych gienijalnych mężów owo odkrycie przypisać należy, powiemy tylko, że jeżeli Newton poddał jednolitemu postępowaniu teoryje swych poprzedników, odnoszące się do prowadzenia stycznych, największości i najmniejszości (Fermat, Barrow), jak również do pomiaru długości łuków i powierzchni ograniczonéj linijami krzywymi (Cavalieri, Wallis), to jednak w tym postępowaniu nie uwydatniały się jeszcze prawa nowego rachunku tak jasno, aby go można było z łatwością używać. Leibnitz zaś, przez szczęśliwie pomyślane postawienie zasad téj metody, odrazu ją ujął w pewien systemat i uczynił zdolną do dalszego a szybkiego rozwoju, robiąc z niéj tymsamym najpotężniejszy środek badania, mający niebawem opanować cały obszar umiejętności matematycznych.

Wielkość tego odkrycia tak była uderzająca, dzielność rachunku nieskończenie małych zaraz w piérwszych zastosowaniach okazała się tak potężną, że najznakomitsi matematycy w ciągu całego wieku XVIII, jak sami wynalazcy Newton i Leibnitz, bracia Bernouilli, Maclaurin, Taylor, d'Alembert, Euler, Legendre i Lagrange, prawie wyłącznie jego doskonaleniu poświęcili swe usiłowania. Zwracając się do gieometryi, możemy powiedziéć, że wszelkie metody gieometryczne, z małymi wyjątkami, poszły na chwilę w zapomnienie, a jedynie gieometryja analityczna, rzeczywista tego nowego rachunku podwalina, rosszérzyła w tym okresie swe szranki, gdyż ten nowy rachunek dozwolił przystąpić do rozwiązania takich zagadnień, w których rachunek algiebraiczny, czyli rachunek ilości skończonych, był za słaby, jak np. do teoryi krzywych przestępnych i teoryi krzywizny linij i powierzchni krzywych. Nie możemy wymieniać szczegółowo prac, które stały się fundamentem, na jakim wzniosły się teoryje, odpowiednie tym zagadnieniom gieometrycznym, gdyż rzecz ta więcéj do historyi rachunku nieskończenie małych należy; dlatego ograniczymy się wykazaniem tych postępów, jakie w wieku XVIII uczyniła gieometryja analityczna, posługująca się samą algiebrą, zasiloną jedynie wzorem Taylor'a (*Methodus incrementorum*, 1715), zaczerpniętym z analizy nieskończenie małych.

Na piérwszym miejscu położyć należy prace samego Newton'a, który piérwszy zastosował metodę Descartes'a do poszukiwania własności ogólnych i charakterystycznych linij krzywych algiebraicznych. Jemuto zawdzięczamy cztéry twierdzenia, któreśmy umieścili w części piérwszéj jako ćwiczenia 210, 211, 216 i 217, a z których dwa piérwsze, w przystosowaniu do przecięć stożkowych, udowodniliśmy w art. 117 i 118. Newton podał te twierdzenia w swym dziele: *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1607), którego głównym zadaniem jest wyznaczenie ilości wszystkich krzywych rzędu trzeciego. Newton znalazł 72 rozmaite rodzaje krzywych rzędu 3-go (tę ilość powiększył następnie Stirling cztérema), które się roskładają na 5 działów, albowiém, podobnie jak koło, postawione naprzeciw punktu świécącego, daje przez swój cień wszystkie krzywe rzędu 2-go, taktéż istnieje pięć krzywych rzędu 3-go (paraból rozbieżnych), które tym samym sposobem dają wszystkie krzywe rzędu 3-go. Dzieło jest zakończone opisaniem organicznym krzywych stopnia 2-go, które daliśmy w części piérwszéj jako ćwiczenie 36. Wszystkie te twierdzenia były wypowiedziane bez dowodu; ich dowody podali Stirling i Clairault.

Godnym spółzawodnikiem Newton'a na polu badań własności linij krzywych algiebraicznych był Maclaurin (1698 — 1746), który w tym przedmiocie ogłosił dwa dzieła: *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis* i *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus.* W piérwszym z nich znajdujemy owo ciekawe twierdzenie, któreśmy umieścili w części piérwszéj jako ćwiczenie 219; atoli daleko większym mistrzowstwem odznacza się druga z tych prac, polegająca całkowicie na dwu twierdzeniach, z których jedno dowiódł był Cotes (ćwiczenie 215 w części piérwszéj), a inne (ćwiczenie 218) jest uogólnieniem twierdzenia Newton'a (ćwiczenie 217). Maclaurin, podobnie jak i Newton, należy do tych niewielu gieometrów wieku XVIII, którzy z zamiłowaniem uprawiali także gieometryją starożytnych i jéj metody stosowali do najzawilszych zagadnień, chcąc niejako okazać, że i te metody zdolne się wznieść do tego stopnia doskonałości, jaką w przekonaniu ówczesnym posiadała jedynie analiza nieskończenie małych. Praca MACLAURIN'a nad figurą ziemi, w której on z taką prostotą rozwiązuje zagadnienie o przyciąganiu elipsojdy obrotowéj na punkt położony na jéj powierzchni, lub wewnątrz téjże, oraz cała osnowa *Philosophiae naturalis principia mathematica* NEWTON'a zawiérają liczne zagadnienia, których ówczesna analiza rozwiązać nie zdołała, a które ci mistrzowie rozwiązali jedynie zapomocą gieometryi czystéj.

Do rozwoju analizy DESCARTES'a w wieku XVIII, oprócz dwu powyższych mężów, przyczyniło się wielu innych matematyków piérwszorzędnych, a wszczególności Jan Paweł DE GUA (1712 – 1786), EULER (1707—1783), CRAMER (1704—1752), WARING (1734—1798).

DE GUA podał w znakomitym dziele *(Usage de l'analyse de* DESCARTES *pour découvrir les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres,* 1740) sposób wyznaczenia stycznych, asymptot i punktów osobliwych (wielokrotnych, odosobnionych, zwrotu i przegięcia) krzywych płaskich wszelkich rzędów, oraz piérwszy okazał, zapomocą zasad perspektywy, że niektóre z tych punktów mogą się znajdować w nieskończoności. To dało wyjaśnienie a priori osobliwéj analogii między rozmaitymi rodzajami punktów i rozmaitymi rodzajami gałęzi nieskończonych, analogii, do której doprowadził go uprzednio rachunek. Zamiarem tego badacza było dowiedzenie, że analiza DESCARTES'a może być używana z takim samym skutkiem, jak rachunek różniczkowy w większéj części poszukiwań w teoryi krzywych gieometrycznych. Analizę nieskończenie małych uważał za pożyteczną jedynie do rozwiązania zagadnień gieometryi pomiaru, wchodzących w zakres rachunku całkowego, i w zagadnieniach dotyczących krzywych mechanicznych.

EULER swym dziełem *Introductio in analysin infinitorum* (1748), jeszcze więcéj rosszérzył zakres badań gieometryi analitycznéj. W piérwszym tomie tego dzieła wyłożył teoryją rachunku algiebraicznego, a w drugim przystosował ją do gieometryi linij krzywych płaskich (algiebraicznych i niektórych przestępnych), oraz do gieometryi powierzchni krzywych. Część piérwsza tomu drugiego zawiéra w 22 rozdziałach wykład gieometryi analitycznéj płaskiéj w takiéj ogólności, jakiéj się doówczas w żadnym dziele nie spotykało; osobliwie poszukiwania gałęzi nieskończonych i asymptot odznaczają się szczegółowością w opracowaniu, gdyż na nich oparł następnie swój podział krzywych rzędu 3-go i 4-go na rodzaje. Zasada tego podziału jest następująca. Wiadomo, że kierunek asymptot zależy od zbioru wyrazów stopnia najwyższego w równaniu linii krzywéj. Otóż, stosownie do tego, czy czynniki pierwiastkowe tego zbioru wyrazów są wszystkie rzeczywiste, czy częściowo rzeczywiste a częściowo urojone, czy czynniki rzeczywiste są wszystkie od siebie różne, czytéż pośród nich znajdują się równe sobie, mogą być rozmaite przypadki, a w każdym przypadku jeszcze, stosownie do kształtu gałęzi asymptotycznych, rozmaite rodzaje krzywych. Tym sposobem wszystkie krzywe rzędu 3-go podzielił EULER na 16 rozmaitych rodzajów, z których każdy zawiéra jeszcze pewne odmiany, a krzywe rzędu 4-go na 146 rodzajów, z których każdy zawiéra jeszcze po większéj części kilka odmian, znacznie się między sobą różniących. W téj części znajdujemy także piérwsze poszukiwania krzywych homotetycznych, czyli podobnych i podobnie położonych, i nowe poglądy o powinowactwie (affinitas) linij krzywych, zawiérającym homotezyją jako przypadek szczególny. Część druga znacznie krótsza, obejmuje bowiém 6 rozdziałów, zawiéra oprócz ogólnych uwag o przedstawianiu powierzchni krzywych zapomocą równań z trzema zmiennymi, o podziale tych powierzchni na rzędy i o ich przekrojach płaskich, teoryją zmiany spółrzędnych w przestrzeni, w któréj spotykamy poraz piérwszy podane wzory (art. 57 części drugiéj), razem z modyfikacyją potrzebną, aby otrzymać równanie przekroju płaskiego powierzchni (art. 110 części drugiéj), i dyskusyją równania stopnia 2-go. Tutaj pokazał Euler po raz piérwszy, że takie równanie przedstawia, oprócz walców i stożków, pięć powierzchni, z których trzy posiadają środek, a dwie go nie mają. W rozdziale ostatnim mówi pokrótce o przecięciu się dwu powierzchni i o krzywych stąd wynikających.

W innéj pracy (ogłoszonéj w *Memoires de l'Académie de Berlin,* 1760) Euler przystąpił piérwszy do badania krzywizny powierzchni krzywych, i tam znajduje się ów sławny wzór, wyrażający promień krzywizny jakiegokolwiek przekroju normalnego w funkcyi promieni krzywizny dwu przekrojów normalnych głównych, podawany dotychczas w zastosowaniach rachunku różniczkowego do gieometryi.

Cramer w swéj pracy: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750) wyłożył jeszcze szczegółowiéj i obszerniéj teoryją linij krzywych algiebraicznych. To dzieło jeszcze dzisiaj może służyć za wstęp do różnych poszukiwań w téj obszernéj i ważnéj gałęzi gieometryi.

Waring złożył owoce swych badań w dwu dziełach: *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus* (1762) i *Proprietates geometricarum curvarum* (1772), a nadto w licznych rosprawach, zamieszczonych w *Philosophical Transactions* (od 1763 do 1791), w których daléj posunął badania nad teoryją krzywych algiebraicznych.

Nie możemy téj epoki rozwoju gieometryi analitycznéj godniéj zamknąć, jak robiąc tu wzmiankę o *Rachunku algiebraicznego teoryi, przystosowanéj do linij krzywych,* dziele Jana Śniadeckiego, wydanym w dwu tomach w Krakowie (1783), które, lubo przeznaczone do nauki szkolnéj tego przedmiotu, chlubnie się wyróżnia pośród podręczników dawniejszych, a jeszcze i dziś za wzór niedościgniony służyć może. Dzieło to bowiém streszcza wszelkie odkrycia do chwili jego wyjścia znane, i wiele teoryj, jak np. teoryją asymptot i wogóle gałęzi nieskończonych, w daleko lepszym świetle przedstawia, aniżeli najlepsze dzieła mistrzów poprzednio wymienionych; nie prowadzi ono poza granice tych odkryć, ale jest sumiennym i dokładnym odzwierciedleniem ówczesnego stanu téj gałęzi nauk matematycznych. Wspomnieć jeszcze musimy, że wykład teoryi linij krzywych rzędu 2-go, po uczynieniu pewnych dodatków, byłby jeszcze dzisiaj jednym z najlepszych w tym przedmiocie.

Przechodzimy teraz do ostatniego okresu historyi rozwoju gieometryi analitycznéj, zainaugurowanego wiekopomnymi dziełami Monge'a i Carnot'a, które wywarły przeważny wpływ na kierunek badań gieometrycznych w tym okresie, a przeto stały się powodem wzbogacenia analizy Descartes'a nowymi metodami, daleko ogólniejszymi od poprzednio używanych. Jakoż, dzieła tych dwu matematyków wywołały badania w nowym kierunku, które z czasem utworzyły gieometryją syntetyczną, nie posługującą się ani symbolami, ani działaniami algiebraicznymi, jakiéj ślady znajdują się już w cennych »Zbiorach matematycznych« wzmiankowanego powyżéj Pappus'a, a piérwsze początki w utworach całego szeregu gieometrów wieku XVII i XVIII, jak Pascal (1623—1662), Desargues (1593—1662), de la Hire (1640—1718), Newton, Maclaurin, Simson (1687—1868), Stewart (1717—1785) i Lambert (1728—1777).

Mimo całéj potęgi analizy Descartes'a, gieometryja syntetyczna, ugruntowana pracami Monge'a i Carnot'a, a udoskonalona przez ich następców, jak Poncelet, Steiner i Chasles, zdołała ją wyprzedzić w odkrywaniu coraz nowych prawd gieometrycznych. To dało powód i bodźca pracownikom na polu gieometryi analitycznéj do obmyślenia nowych metod, któreby wzmocniły jéj środki badania, aby tym sposobem dotrzéć tam, dokąd dawne metody dojść nie dozwalały. Lubo nie może być naszym zadaniem pisanie historyi początku i rozwoju gieometryi syntetycznéj, wszakże z uwagi, że twierdzenia zasadnicze i wiele prawd nowszych, poraz piérwszy otrzymanych metodami gieometryi syntetycznéj, weszło już dzisiaj w zakres gieometryi analitycznéj, nie podobna już teraz, mówiąc o postępach gieometryi Descartes'a, nie wzmiankować o postępach gieometryi syntetycznéj.

Monge swą gieometryją wykréślną (*Géometrie descriptive*, 1800), w któréj, uogólniając wszelkie działania gieometryczne, nastręczające się doówczas w kamieniarce, ciosiołce, perspektywie i t. d., sprowadził je po raz piérwszy do niewielu zasad oderwanych i niezmiennych, a do wykréśleń łatwych i zawsze pewnych, przyczynił się w dwu kierunkach do rozwoju gieometryi wogóle. Popiérwsze, przez naturę swych działań, które mają za cel ustanowienie odpowiedniości zupełnéj i pewnéj między figurami rzeczywiście na płaszczyźnie wykréślonymi, a ciałami pomyślanymi w przestrzeni, oswoiła gieometryja wykréślna z kształtami tych ciał i dozwoliła wyobrazić je sobie dokładnie i szybko, przez co niejako zdwoiła nasze środki poszukiwania w badaniu przestrzeni. Powtóre, przez swe zasady i związek, który ustanawia między figurami o trzech wymiarach a figurami płaskimi, stała się ona prawdziwym narzędziem w poszukiwaniach i dowodzeniach w gieometryi syntetycznéj, a swym postępowaniem, które w gieometryi praktycznéj jest tym, co cztéry działania arytmetyczne przy zagadnieniach liczebnych, dostarczyła środka nowego przy rozwiązywaniu zagadnień, których dotknąć się nie mogła gieometryja Descartes'a, tak potężna w innych razach, z powodu, iż algiebra nie dozwala pokonać trudności rachunkowych.

Monge sam dał nam w swéj gieometryi wykréślnéj piérwsze przykłady użyteczności związku ścisłego między figurami o trzech wymiarach a figurami płaskimi; tym bowiém sposobem dowiódł on pięknych twierdzeń, które stanowią obecnie teoryją biegunów krzywych rzędu 2-go, własności środków podobieństwa trzech kół, branych po dwa, rosciągnionéj następnie na krzywe rzędu 2-go homotetyczne, i wielu innych zagadnień gieometryi płaskiéj.

Nim przejdziemy do wykazania zasług, jakie położył Carnot, musimy na tym miejscu wspomniéć o drugim dziele Monge'a, *Application de l'analyse à la géométrie*, którego piérwsze wydanie p. t. *Feuilles de l'analyse appliquée à la géométrie* wyszło w r. 1795, a piąte i zarazem ostatnie z notami Liouville'a w r. 1850. Jeżeli gieometryja wykréślna była doniosłą w zestawieniu z gieometryją analityczną, to ostatnie dzieło bespośrednio na rozrost gieometryi analitycznéj wpłynęło, rosszérzając zakres jéj badań. Powiedzieliśmy, że Euler piérwszy zastosował rachunek różniczkowy do badania krzywizny powierzchni; otóż, Monge posunął te badania daléj i odkrył istnienie linij krzywiznowych na powierzchni, dowiódszy, że przez każdy punkt na powierzchni krzywéj przechodzą zawsze dwie linije takie, iż kolejne normalne do powierzchni w punktach każdéj z tych krzywych wzajemnie się przecinają. Tym dziełem posunął Monge także samę analizę nieskończenie małych w jednym z najtrudniejszych jéj działów, w całkowaniu równań różniczkowych czątkowych, a mianowicie przez podwójne wyrażenie analityczne pewnych familij powierzchni, zapomocą równania różniczkowego, wyprowadzonego z własności, odnoszących się do ich płaszczyzn stycznych, linij normalnych, lub krzywizny, i zapomocą równania skończonego, wyprowadzonego ze sposobu tworzenia tych powierzchni. Otóż, to ostatnie równanie, zawiérające funkcyje dowolne, jest rozwiązaniem ogólnym piérwszego.

Carnot'a dzieła: *Géométrie de position* (1803) i *Essai sur la théorie des transversales* przedstawiają uzupełnienie gieometryi wykréślnéj Monge'a i wraz z nią stanowią podstawę dzisiejszéj gieometryi syntetycznéj. Jakoż, między figurami uważanymi w gieometryi i ich elementami istnieją dwa rodzaje związków: jedne odnoszą się do ich kształtów i położeń; są to związki wykréślne lub opisowe; inne dotyczą ich wielkości i zowią się metrycznymi. Tak np. twierdzenie: »jeżeli około punktu stałego, wziętego na płaszczyźnie linii krzywéj rzędu 2-go, będziemy obracali prostą (poprzeczną), i jeżeli przez dwa punkty, w których ona krzywą spotyka, w każdym z jéj położeń poprowadzimy styczne do téj krzywéj, natenczas punkt przecięcia się tych dwu stycznych będzie się znajdował na prostéj stałéj, biegunowéj punktu stałego«, wyraża własność wykréślną krzywéj rzędu 2-go, czyli związek wykréślny między punktem a jego biegunową. Jeżeli zaś to twierdzenie tak wypowiemy: »wziąwszy na każdéj poprzecznéj punkt, harmonicznie sprzężony z punktem stałym względem obu punktów, w których ta poprzeczna przecina krzywą rzędu 2-go, to ten punkt będzie leżał na biegunowéj punktu stałego«, mieć będziemy własność metryczną krzywéj rzędu 2-go, czyli związek metryczny między punktem a jego biegunową. Te dwa rodzaje własności figur wystarczają, każda zosobna, do rozwiązania wielkiéj ilości twierdzeń; wszakże zawsze pożyteczna, a często nieuchronna, rozważać jednocześnie tak jedne jak i drugie.

Są więc dwa rodzaje metod w gieometryi syntetycznéj: metoda własności wykréślnych i metoda własności metrycznych. Poprzednicy Monge'a i Carnot'a, Desargues, Pascal, la Hire, używali obu rodzajów związków: wykréślnych, posługując się perspektywą w celu przeształcenia figur, i metrycznych, stosując proporcyją harmoniczną, związek inwolucyi i rozmaite inne twierdzenia, należące do teoryi poprzecznych. Gieometryja wykréślna Monge'a stosuje piérwszą z tych dwu metod, a gieometryja położenia Carnot'a ma za zadanie zbliżenie i porównanie obu sposobów uwidocznienia związków między wielkościami gieometrycznymi.

Nie możemy rozbiérać wielu ważnych twierdzeń, którymi Carnot wzbogacił gieometryją. Ograniczymy się tylko uwagą, że jego gieometryja położenia zawiéra nader szczęśliwy pomysł o naturze wielkości dodatnych i ujemnych, który dozwala uogólniać każde twierdzenie tak, iż jedno dowodzenie wystarcza, jakiekolwiek byłyby położenia rozmaitych części figury, gdy przed tym każde twierdzenie wymagało tylu dowodzeń, ile mogło być odmiennych położeń punktów i linij figury. Teoryja zaś poprzecznych Carnot'a, wyłożona już w zarysie w jego gieometryi położenia, wysnuwa cały szereg związków metrycznych z twierdzenia (art. 59 w części piérwszéj) o sześciu odcinkach, wyznaczonych na bokach trójkąta przez prostą tę boki przecinającą, twierdzenia, na którym Ptolomeusz (125 po Chr.) oparł swą trygonometryją, i zawiéra owę własność ogólną krzywych algiebraicznych, któréśmy podali jako ćwiczenie 212, a w zastosowaniu do krzywych rzędu 2-go udowodnili w art. 119 części piérwszéj.

Powiedzieliśmy, że Monge i Carnot rospoczęli nową erę w historyi nauki w przestrzeni. Istotnie, ichto dzieła sprawiły, że gieometryja syntetyczna, długo zaniedbana, zaczęła się odtąd szybko rozwijać i niebawem wyprzedziła w odkrywaniu nowych prawd gieometryją analityczną, tak, iż zwolennicy téj ostatniéj musieli rozwinąć wszelkie zasoby nowoczesnéj analizy, aby objąć i opanować zdobycze, nagromadzone jedynie przy pomocy metod gieometryi syntetycznéj. Z powodu wpływu, jaki rozwój gieometryi syntetycznéj wywarł w bieżącym wieku na rozwój gieometryi analitycznéj, nie podobna odtąd dziejów jednéj odłączyć od dziejów drugiéj; wszakże różnorodność i niezmierny ogrom prac, dokonanych w jednym i drugim kierunku, niech nas wytłómaczą z tego, że ograniczymy się na ogólnikowym przedstawieniu najważniejszych momentów w ich rozwoju.

Założeniu szkoły politechnicznéj (1795), w któréj uczyli tak znakomici mężowie, jak Monge i Lagrange, a następnie założeniu piérwszych czasopism matematycznych, jak *Correspondance sur l'école polytechnique*, a nadewszystko Gergonne'a *Annales de mathématiques* (1810), które młodym badaczom dawały możność ogłaszania szybkiego płodów swego talentu, zawdzięcza Francyja swe wybitne stanowisko naukowe w początkach bieżącego stulecia. Cały zastęp matematyków francuskich wystąpił do szlachetnego spółzawodnictwa, wzbogacając naukę i okrywając sławą swą ojczyznę. Na czele raźnego ruchu naukowego stanęli, jedni z piérwszych, Dupin i Poncelet. Dupin, uczeń Monge'a, w swych pracach: *Développements de géométrie* (1813) i *Applications de géom. et de mécanique* (1822) posunął daléj badania Monge'a nad krzywizną powierzchni. W piérwszym z tych dzieł wzbogaca teoryją krzywizny powierzchni ważnym pomysłem stycznych sprzężonych i szczegółowymi rostrząsaniami, które rosświetliły piérwsze badania na tym polu, dokonane przez Euler'a, i niezmiernie ważnym twierdzeniem o układzie potrójnym powierzchni ortogonalnych, orzekającym mianowicie, że takie powierzchnie przecinają się według linij krzywiznowych. Zastosowanie tego twierdzenia do powierzchni rzędu 2-go dało początek teoryi powierzchni spółogniskowych i teoryi linij ogniskowych. Wykrycie istnienia linij ogniskowych, jako granic układu powierzchni rzędu 2-go spółogniskowych, jest téż zasługą Dupin'a. W drugim dziele Dupin stosuje teoryje, wyłożone w piérwszym, do nader ważnych zagadnień, jak stałość równowagi ciał pływających, teoryja przypływu i odpływu i t. d. — W obu dziełach używa Dupin naprzód gieometryi syntetycznéj, a następnie gieometryi analitycznéj jako środka badania; dlategotéż te prace dały nowego bodźca do uprawiania metod gieometrycznych.

Poncelet wzbogacił gieometryją syntetyczną nową metodą. Jakoż, w swym dziele *Traité des propriétés projectives des figures* (którego wydanie z roku 1866 zawiéra w dodatku wszyskie następne prace tego autora) przedsięwziął on ustanowić pewne związki między dwiema figurami, z których jedna jest perspektywą drugiéj. W perspektywie leżą obie figury na dwu różnych płaszczyznach; gdy obierzemy jednę z tych płaszczyzn za nieruchomą, a drugą obrócimy około spólnéj krawędzi obu, to te figury będą jeszcze w perspektywie, t. j. proste, które łączą punkty odpowiednie obu, będą się zbiegały w jednym i tym samym punkcie przestrzeni. To samo ma miejsce i wtedy, gdy płaszczyzna obracająca zejdzie się z nieruchomą. Otóż, w tym położeniu rozważa Poncelet obie figury i nazywa takie dwie figury homologicznymi; punkt zbiegania się prostych, które łączą odpowiednie punkty obu figur, środkiem homologii, a krawędź spólną obu płaszczyzn osią homologii. Ten sposób postępowania dozwala sprowadzić poszukiwanie własności jednéj figury do poszukiwania własności drugiéj figury, np. krzywych rzędu 2-go do koła, i tymto sposobem wykrył Poncelet wiele nowych własności krzywych rzędu 2-go. Wspomnę tu tylko o teoryi biegunowych wzajemnych, które dały początek zasadzie, nazwanéj przez Gergonne'a (1827) zasadą dwoistości, jak również o teoryi ognisk, które Poncelet uważa jako przecięcie się stycznych do krzywéj rzędu 2-go, wyprowadzonych z dwu punktów urojonych koła, leżących w nieskończoności, a któreto okréślenie ognisk rosszérzył następnie Plücker (1837) na wszelkie krzywe algiebraiczne. Poncelet rosciągnął także swą teoryją figur homologicznych na figury o trzech wymiarach i za ich pomocą okazał, że przez liniją przecięcia się dwu powierzchni rzędu 2-go przechodzą — mówiąc wogólności — cztéry stożki rzędu 2-go.

Pomijając innych badaczów francuskich, którzy oddzielnymi odkryciami wzbogacili naukę przestrzeni w piérwszéj ćwierci tego wieku, jak Hachette, kontynuator Monge'a na polu gieometryi wykréślnéj i gieometryi analitycznéj, Livet, Brianchon, Binet, zasłużeni swymi pracami w zakresie gieometryi analitycznéj linij i powierzchni rzędu 2-go, Rodrigues, który wyprzedził Gauss'a w badaniu krzywizny całkowitéj powierzchni krzywych, i Lamé, którego prace nad spółrzędnymi krzywolinijowymi (zebrane późniéj w dziele *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 1859) rozwinęły i zużytkowały teoryją układu potrójnego powierzchni ortogonalnych, przechodzimy wprost do rzeczywistych twórców gieometryi nowoczesnéj, Steiner'a i Chasles'a.

Obaj ci uczeni rospoczęli swą działalność naukową w sławnych rocznikach Gergonne'a, a celem ich usiłowań było odszukanie i wyłuszczenie tych myśli podstawowych, z których, jak z istotnego źródła, wypływają wszystkie prawdy gieometryczne.

Liczne prace Steiner'a, porozrzucane po czasopismach Gergonne'a, Crelle'go i Liouville'a, tudzież ogłaszane w pamiętnikach akademii berlińskiéj, zebrał Weierstrass i ogłosił w 1881 — 1882 p. t. *Jakob* Steiner'*s gesammelte Werke*. W tomie piérwszym téj publikacyi jest zamieszczona praca, wydana po raz piérwszy w r. 1832: *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten*, w któréj autor naszkicował niejako program gieometryi nowoczesnéj; dlatego szczegółowiéj nieco wyłożymy główną myśl tego dzieła.

Autor zamierzył wykazać w tym dziele, że właściwą podstawą gieometryi są następujące utwory zasadnicze: *a)*. linija prosta, którą uważa jako szereg punktów rosciągający się, począwszy od pewnego z nich, w dwu kierunkach sobie przeciwnych do nieskończoności; *b)*. pęk promieni na płaszczyźnie, t. j. nieskończoność linij prostych na płaszczyźnie, wychodzących z jednego punktu, środka pęku; *c)*. płaszczyzna, jako zbiór nieskończonéj ilości prostych (szeregów prostolinijowych punktów) i punktów (środków pęków promieni na płaszczyźnie); *d)*. pęk płaszczyzn, t. j. nieskończoność płaszczyzn, przecinających się według spólnéj krawędzi, osi pęku; *e)*. pęk promieni w przestrzeni, zawiérający w sobie nieskończenie wiele pęków promieni na płaszczyźnie i nieskończenie wiele pęków płaszczyzn (albowiém przez środek tego pęku przechodzi nieskończenie wiele promieni, leżących na jednéj płaszczyźnie, o dowolnym kierunku, i podobnie wszystkie płaszczyzny, które przechodzą przez jeden którykolwiek z jego promieni, tworzą pęk płaszczyzn).

Rozważanie tych pięciu utworów zasadniczych, przez odnoszenie jednych do drugich tak, aby elementy dwu utworów do siebie odniesionych wzajemnie sobie odpowiadały, jest źródłem wszelkich prawd gieometrycznych. W szczególności, odnosząc do siebie i niejako sobie przeciwstawiając: *a)*. proste i pęki promieni na płaszczyźnie; *b)*. proste i pęki płaszczyzn; *c)*. pęki promieni płaskie i pęki płaszczyzn; *d)*. płaszczyzny i pęki promieni w przestrzeni, przez jednoczesne badanie obu rodzajów przeciwstawianych sobie utworów otrzymuje się za każdym razem po dwa twierdzenia, pośród których są téż takie, które sobie odpowiadają według zasady dwoistości.

Nie podobna wyliczyć wszystkich odkryć, do jakich ta metoda doprowadziła Steiner'a; ograniczymy się tylko uwagą, że ona nietylko się utrzymała w gieometryi syntetycznéj, ale przeszła następnie i do gieometryi analitycznéj.

Godnym spółzawodnikiem Steiner'a w ugruntowaniu metod gieometryi nowoczesnéj był Chasles, jeden z najgienijalniejszych i najuczeńszych badaczów, któremu równych niewielu historyja gieometryi wykazuje. Piérwszym większym dziełem tego uczonego była wymieniona już historyja gieometryi, któréj piérwsze wydanie wyszło w r. 1837, a drugie (niezmienione) w r. 1875. Ponieważ w tym dziele złożył Chasles piérwsze początki prawie wszystkich swych prac późniejszych, jak np. *Traité de géometrie supérieure* (1852) i *Traité des sections coniques* (1865), przeto szczegółowiéj je rozbierzemy.

Historyja gieometryi Chasles'a składa się z trzech części. Piérwsza jest wykładem historycznym początku i rozwoju rozmaitych gałęzi gieometryi od piérwszych téj nauki zawiązków do czasów Monge'a i Carnot'a. Na tym głównie wykładzie, a w części i na ogłoszonym w końcu zeszłego wieku 2-im wyd. dzieła Montucla: *Histoire des mathématiques* (4 tomy) oparliśmy nasz rys historyczny. – W drugiéj części znajdują się przypiski, zawiérające rozwinięcie histroryczne różnorodnych zagadnień, zawartych w dziełach różnych gieometrów, będących zarodkiem późniéj odkrytych prawd gieometrycznych. Trzecia część zawiéra dwie rosprawy: o zasadzie dwoistości i o zasadzie jednokréślności; ta część trzecia dała powód do napisania całego dzieła. Z przypisków wymienić należy naprzód III, w którym Chasles wykazuje znaczenie istotne poryzmów Euklidesa. Myśli tu rzucone rozwinął on następnie i nawet odtworzył prawdopodobną osnowę dzieła Euklidesa w pracy już powyżéj wspomnionéj *(Les trois livres de porismes d'*Euclide....). — W przypisku IX znajdujemy określenie i własności główne stosunku nieharmonicznego cztérech punktów i cztérech promieni, t. j. tego stosunku, któryśmy, idąc za Moebius'em, spółczesnym matematykiem, nazwali stosunkiem podwójnego podziału. Tu okazuje Chasles, że twierdzenie o niezależności stosunku podwójnego podziału cztérech punktów przecięcia się poprzecznéj z cztérema promieniami pęku od położenia téj poprzecznéj było znane już Pappusowi. — Przypisek X poświęcony wyłożeniu teoryi inwolucyi. Chasles okazuje znowu, że już Pappus znał inwolucyją trzech par punktów, w których poprzeczna przecina dwie pary boków przeciwległych i parę przekątnych czworoboku, że następnie Desargues uogólnił to twierdzenie, podstawiwszy zamiast pary przekątnych krzywą rzędu 2-go, opisaną na czworoboku. — W przypiskach XV i XVI wyprowadza Chasles ze wspomnianego dopiéroco twierdzenia Desargues'a owe twierdzenia, któreśmy udowodnili w art. 51 części piérwszéj, a które prowadzą do opisania krzywych rzędu 2-go zapomocą dwu jednokréślnych szeregów punktów lub pęków promieni; z nich wyprowadzić można nieomal wszystkie własności krzywych rzędu 2-go. — Przypisek XXVIII zawiéra rozwiązanie zagadnienia: »gdy dane są cztéry powierzchnie rzędu 2-go, wpisane w jednę powierzchnią tegoż samego rzędu U, znaléść inną powierzchnią rzędu 2-go, wpisaną także w U, a styczną do owych cztérech powierzchni danych«. Jako przypadek szczególny zjawiają się tu zagadnienia o kuli stycznéj do cztérech kul danych (dość bowiém przyjąć, że U sprowadza się do płaszczyzny koła urojonego w nieskończoności), oraz ogólniejsze o powierzchni rzędu 2-go, stycznéj i homotetycznéj z cztérema innymi powierzchniami rzędu 2-go. — Przytaczamy nakoniec przypisek XXXI, w którym Chasles wyłożył wiele nowych własności powierzchni rzędu 2-go, a między innymi teoryją krzywych ogniskowych. Lubo już Dupin wpadł na te krzywe, a następnie matematyk niemiecki Magnus w tomie XVI roczników Gergonne'a dowiódł istnienia i własności prostych ogniskowych w stożku rzędu 2-go, wszakże dopiéro Chasles i spółczesny mu uczony dubliński Mac-Cullagh wykazali ich rzeczywiste znaczenie i związali je z teoryją powierzchni rzędu 2-go spółogniskowych.

Pominąć musimy inne przypiski niemniéj ważne, jak np. XXVI, w którym rzuca Chasles trafne myśli o wielkościach urojonych w gieometryi, a przechodzimy do części trzeciéj. Przekształcanie figur gieometrycznych jednych na inne i wyprowadzenie własności jednych z własności innych jest jednym z najdzielniejszych środków w badaniach gieometrycznych. W téj części uzasadnia Chasles dwie metody takiego przekształcenia: metodę, polegającą na zasadzie dwoistości, t. j. zależności między dwiema figurami, w których punktom i płaszczyznom jednéj odpowiadają odpowiednio płaszczyzny i punkty drugiéj, i metodę, polegającą na zasadzie jednokréślności, t. j. zależności między dwiema figurami, w których równanie jednéj jest przekształceniem linijowym drugiéj (art. 73 w części piérwszéj). Piérwsza z tych metod wyrosła na gruncie teoryi Poncelet'go biegunowych wzajemnych, a pomysł drugiéj należy przypisać Moebius'owi, który go ogłosił w swym dziele: *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie* (1827).

Gieometryja syntetyczna znalazła w pracach Steiner'a i Chasles'a tak potężne, a przytym tak proste środki badania, że, jakeśmy już wspomnieli, wyprzedziła metodę analityczną w odkrywaniu nowych prawd gieometrycznych, co pobudziło zwolenników gieometryi analitycznéj do przyswojenia sobie tych myśli podstawowych, którym gieometryja syntetyczna swą potęgę zawdzięcza, do udoskonalenia samego rachunku i do obmyślenia nowych układów spółrzędnych. Nie podobna wymienić wszystkich badaczów, którzy pracowali nad udoskonaleniem gieometryi analitycznéj w tym kierunku; wskażemy tylko główniejszych.

Uprzednio jednak powiedzieć nam nieco wypada o najważniejszych pracach gieometrycznych Gauss'a, jednego z największych matematyków wogóle. Niéma gałęzi matematyki czystéj i stosowanéj, w któréjby Gauss nie zostawił niezatartych śladów swego gienijuszu. Gieometryja analityczna zawdzięcza mu znaczny postęp w teoryi krzywizny powierzchni. Przed nim badano krzywiznę nie powierzchni krzywéj, ale przecięć płaskich téj powierzchni. Dopiéro Gauss (*Disquisitiones generales circa superficies curvas* w Gauss *Werke* tom IV) z pewnego twierdzenia, dowiedzionego przez Rodrigues'a, wyprowadził nader ważne pojęcie krzywizny zupełnéj w każdym punkcie powierzchni. Ta teoryja krzywizny zupełnéj, wraz z teoryją linij gieodezyjnych i teoryją rozwijania jednych powierzchni na innych, także przez Gauss'a rospoczętą, otworzyła nowe pole do badań, na którym odznaczył się cały szereg matematyków, jak Joachimsthal, Kummer, Christoffel u Niemców, a Bour, Bonnet, Tissot u Francuzów.

Przejdźmy teraz do reformatorów gieometryi analitycznéj.

O Moebius'ie wspomnieliśmy, jako piérwszym, który wpadł na pomysł przekształcenia figur, polegającego na zasadzie ogólnéj jednokréślności, obejmującéj w sobie, jako przypadki szczególne, teoryją figur przystających, homotetycznych i podobnych. Moebius'owi zawdzięcza gieometryja analityczna wprowadzenie obszernego użycia teoryi stosunku podwójnego podziału i teoryi inwolucyi, jako podstawy swych badań, a nadto w wyrażeniu punktu na płaszczyźnie zapomocą trzech, a w przestrzeni zapomocą cztérech danych punktów tkwi piérwsza myśl spółrzędnych płaszczyzny w przestrzeni.

Plücker należy do najważniejszych reformatorów metody analitycznéj. Już bowiém w drugim tomie swych *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (1828 — 1831) wprowadził w sposób systematyczny spółrzędne linii prostéj na płaszczyźnie i na nich oparł wykład gieometryi analitycznéj płaskiéj, idącéj równolegle z gieometryją analityczną płaską, opartą na spółrzędnych Descartes'a, a wyłożoną przez niego w piérwszym tomie tego dzieła. W drugim swym dziele: *System der analytischen Geometrie auf neue Betrachtungsweisen gegründet* (1835) wprowadził Plücker w sposób systematyczny spółrzędne jednorodne do gieometryi analitycznéj płaskiéj, lubo pomysł tych spółrzędnych nie jest jego, ale Bobillier'go, matematyka francuskiego, który w rosprawie: *Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue*, zamieszczonéj w tomie XVIII roczników Gergonne'a, przedstawił krzywą rzędu 2-go, opisaną na trójkącie, którego boków równania są $A=0$, $B=0$, $C=0$, przez równanie kształtu: $aBC+bCA+cAB=0$, gdzie a, b, c są spółczynnikami stałymi. W każdym razie zasługą Plücker'a jest popiérwsze, wykazanie w szeregu zastosowań użyteczności tych spółrzędnych w badaniu własności figur wykréślnych, a powtóre, sprowadzenie równań algiebraicznych do jednorodności, co, z punktu widzenia analizy, niezmiernie ułatwia ich badanie.

Zasługi Plücker'a nie kończą się na wprowadzeniu tych nowych spółrzędnych; pozostawił on bowiém, oprócz wielu innych prac, jeszcze dwa większe dzieła, gieometryi analitycznéj poświęcone: *Theorie der algebrischen Curven....* (1839) i *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (1868).

W piérwszym z tych dzieł oparł teoryją krzywych algiebraicznych na nowym pomyśle liczenia stałych, od których zależy krzywa. Wyznaczenie następne ilości punktów podwójnych, punktów zwrotu i przegięcia, tudzież ilości stycznych podwójnych i stycznych zwrotu, zachodzących w krzywéj pewnego rzędu i pewnéj klasy, doprowadziło go do znanych pod jego nazwą wzorów (art. 222 w części piérwszéj), na których odtąd opiéra się klasyfikacyja krzywych tego samego rzędu. W drugim z wymienionych dzieł oparł cały system gieometryi analitycznéj w przestrzeni na uważaniu linii prostéj, jako podstawowego elementu figur gieometrycznych. Sam ten jednak pomysł spółrzędnych linii prostéj w przestrzeni jest własnością gieometry p. Cayley'ego, który go ogłosił w *Philosophical Transactions* (1865), mówiąc o momencie dwu prostych w przestrzeni (art. 37 części drugiéj). Na tym nowym polu, które Plücker tym dziełem otworzył, powstają liczne prace spółczesnych matematyków, z grona których wyróżniają się pp. Klein i Sophus Lie, ozdabiający swymi pracami *Mathematische Annalen*, założone przez Clebsch'a.

Wprowadzenie spółrzędnych jednorodnych punktu i linii prostéj na płaszczyźnie, a płaszczyzny w przestrzeni, jak również oparcie badań na teoryi stosunku podwójnego podziału, teoryi inwolucyi i wogóle podziałów jednokréślnych było piérwszym krokiem do przekształcenia gieometryi analitycznéj w duchu metod Steiner'a i Chasles'a. Odtąd gieometryja analityczna i syntetyczna, wychodząc z tych samych zasad, na dwu różnych drogach dążą do tego samego celu.

Pozostało jeszcze zmniejszyć trudności, jakie w poszukiwaniach ogólnych stawiał sam rachunek algiebraiczny. Walny środek zmniejszenia tych trudności znalazła gieometryja analityczna w teoryi wyznaczników, rozwiniętéj pracami Vandermonde'a, Cauchy'ego i Jacobi'ego, a następnie w teoryi form, stworzonéj przez p. Artura Cayley'ego, a stanowiącéj przedmiot usilnych badań najznakomitszych matematyków spółczesnych, jak jéj twórca, pp. Sylvester, Salmon, Hermite, Aronhold, Weierstrass, niedawno zgaśli Hesse, Clebsch i Brioschi, oraz wielu innych.

Na tym kończymy nasz krótki rys historyczny początku i rozwoju gieometryi analitycznéj; przedstawienie obecnego stanu zasad téj nauki jest rzeczą samego jéj wykładu.

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA W POLSCE.

Peryjodowi żywego ruchu naukowego na zachodzie, w którym się poczęła gieometryja analityczna, odpowiada upadek nauk w Polsce, spowodowany tak rosterkami wewnętrznymi, jak i zwichnioną edukacyją narodową. Wprawdzie możnaby wnosić, że znakomitym gieometrom polskim z czasów panowania Władysława IV, Maciejowi Głoskowskiemu, autorowi *Geometria peregrinans*, i Janowi Brożkowi (Broscius), autorowi *Arithmetica integrorum*, tudzież, z czasów Jana III, Stanisławowi Solskiemu, autorowi *Gieometry i architekty polskiego*, nieobcą była znajomość doktryny Descartes'a, wszakże aż do połowy wieku XVIII nieznana nam żadna praca, w tym przedmiocie przez Polaka ogłoszona.

Piérwszym z uczonych polskich, którzy zostawili ślad piśmienny zajmowania się gieometryją analityczną, był prawdopodobnie Michał Hube, urodzony r. 1737 w wiosce pod Toruniem, którego dziad wyrokiem Jana Kazimirza przeciw socynianom był zmuszony opuścić Litwę ojczystą. Hube już w 17 roku życia swego wydał w Lipsku (1755) dzieło: *De sectionibus conicis*, które mu zjednało przyjaźń Euler'a. Jak jego naukę Euler cenił, dowodzi najlepiéj list Euler'a do Hubego (31/V r. 1759), w którym mu przyznaje piérwszeństwo w jasnym wytłómaczeniu natury różniczek. Pomimo powołania do Rosyi, pozostał Hube w kraju, początkowo na posadzie piérwszego sekretarza w Toruniu, a następnie od r. 1782 na posadzie jeneralnego dyrektora naukowego Korpusu kadetów w Warszawie. Z prac późniejszych bardzo cenione są jego dzieła niemieckie: «Gospodarz wiejski» i «O kształcie ziemi», tudzież znakomity plan fizyki elementarnéj, hidrauliki i historyi naturalnéj, napisany na wezwanie Komisyi edukacyjnéj, który w części tylko urzeczywistnił, wypracowawszy wydane przez owę Komisyją: *Wstęp do fizyki dla szkół narodowych* (1783) i *Mechanikę*, jako część I *Fizyki dla szkół narodowych* (1792). Hube umarł 16/VII 1807 w Potyczy, przelawszy na syna Karola, profesora na uniwersytecie Jagiellońskim, zamiłowanie do studyjów matematycznych.

Do rospowszechnienia znajomości gieometryi w Polsce przyczyniło się głównie wprowadzenie téj umiejętności do programu szkoły Korpusu artyleryi narodowéj i obu Szkół Głównych, koronnéj w Warszawie i litewskiéj w Wilnie, po ich zreformowaniu przez Komisyją edukacyjną. Jako podręcznik w szkole artyleryi służyła: *Nauka matematyki, do użytku artyleryi francuskiéj napisana przez p.* Bezout......, *a na język polski przełożona przez kap. art.* Józefa Jakubowskiego (Warszawa 1781, 4 tomy). Drugi tom tego dzieła zawiéra w części drugiéj teoryją analityczną przecięć ostrokręgowych, piérwszą w języku polskim.

Dla użytku zaś w Szkołach Głównych napisał Jan Śniadecki znakomite dzieło: *Rachunku algiebraicznego teoryja przystosowana do linij krzywych* (Kraków, 1783, 2 tomy), o którym wyżéj (str. XXIV) była już mowa (to dzieło było również używane w gimnazyjum wołyńskim w Krzemieńcu). Rozliczne zajęcia na polu organizacyi i administracyi szkół, tudzież prace astronomiczne nie dozwoliły Śniadeckiemu zrobić drugiego wydania tego dzieła, w którymby mógł uwzględnić późniejsze postępy gieometryi analitycznéj. Dlategotéż już w początkach bieżącego wieku zaczęto myśléć o nowym podręczniku, więcéj odpowiednim posuniętemu stanowi umiejętności. Wszakże nim o pracach w tym kierunku podjętych mówić będziemy, wypada nam w porządku chronologicznym wspomniéć o kilku mężach, którzy pracami samodzielnymi kilka cegiełek dorzucili do budowy gieometryi analitycznéj.

Piérwsze między tymi mężami miejsce zajmuje Jan Joachim Livet, były repetytor w szkole politechnicznéj paryskiéj, a od r. 1809 profesor matematyki wyższéj w szkole artyleryi i inżynieryi w Warszawie. Jeszcze przed powołaniem swym do Warszawy, Livet ogłosił kilka prac z gieometryi analitycznéj. I tak, znajdujemy w *Correspondance sur l'école polytéchnique:* na rok 1804 pracę »O powierzchniach stopnia 2-go«; na rok 1805 »O dotknięciu powierzchni stożkowych z powierzchnią stopnia 2-go« z rozważaniem przypadków, kiedy wiérzchołek stożka opisuje liniją prostą, liniją krzywą płaską, płaszczyznę i jakąkolwiek powierzchnią stopnia 2-go; na rok 1806 »O krawędzi zwrotu powierzchni będącéj obwiednią przestrzeni, którą kula przebiegła, opisując swym środkiem cyklojdę«; na rok 1809 »O krawędziach zwrotu powierzchni rozmaitych, będących obwiedniami przestrzeni przebieżonej przez powierzchnią stopnia 2-go«. Druga z tych rospraw znajduje się obszerniéj wyłożona także w *Journal de l'école polytéchnique* (Cahier XIII), gdzie także znajduje się jego praca »O formułach przejścia z jednego układu spółrzędnych prostopadłych do innego układu spółrzędnych równoległych, lub także prostopadłych, i o własnościach powierzchni stopnia 2-go, odniesionych do swych średnic sprzężonych«. W téjto pracy piérwszy Livet użył wzorów symetrycznych, na zmianę spółrzędnych i piérwszy dowiódł dwu ważnych twierdzeń: a mianowicie, że suma kwadratów długości średnic sprzężonych, jakotéż objętość równoległościanu, zbudowanego na średnicach sprzężonych, jest stałą. Twierdzenie, że suma kwadratów ścian tego równoległościanu jest stałą, udowodnił poraz piérwszy Binet.

W czasie cztéroletniego pobytu w Warszawie Livet kończył (według świadectwa Feliksa Bentkowskiego w *Rocznikach* towarzystwa przyjaciół nauk w Warszawie, tom X) rosprawę, w któréj śledził historycznie, jakimi drogami postępowało wielu w teoryi równań stopnia 5-go i wyższych, i okazywał, jaka korzyść z tych badań, co do celu samego nieużytecznych i nadaremnych, wogóle dla nauk matematycznych wynika. Ta praca po śmierci autora (r. 1812) zaginęła. Jeżeli te prace wskazują męża wielkich zdolności, to znowu wykład ustny Livet'a miał się odznaczać niepospolitą jasnością i ścisłością. Nie dziw więc, że z jego szkoły wyszło wielu zdolnych matematyków, jak Sapalski, autor piérwszéj gieometryi wykréślnéj w języku polskim (jeżeli nie będziemy liczyli Potier'go *Gieometryi rysunkowéj*, przełożonéj przez Hreczynę), i Rembieliński, o którym będzie mowa poniżéj, oraz że ta szkoła i w latach następnych nie zboczyła z drogi, wytkniętéj przez Livet'a.

Jak Livet swoimi cennymi wykładami przyczynił się do rozbudzenia u nas zamiłowania do nauk matematycznych, tak znowu inny Francuz z rodu Paschalis Poullin cennym dziełem: *Teoryja przecięć ostrokręgowych,* ich kwadrowania, jakotéż kilku innych linij krzywych znanych pod nazwiskami: konchojdy Nikomedesa, cysojdy Dioklesa, logarytmiki, cyklojdy, kwadratrycy Dinostratesa, wężownicy (spiralnéj) Archimedesa, wężownicy równorzutniowéj (parabolicznéj), wężownicy hiperbolicznéj, wężownicy logarytmicznéj, czyli traktat rozbiorowy tych linij krzywych... przez Paschalisa Poullin, członka towarzystwa królewsko-warszawskiego przyjaciół nauk« (we Wrocławiu, 1813) wzbogacił literaturę naukową przybranéj swéj ojczyzny. Dzieło to jeszcze dzisiaj z zajęciem może być czytane, tak dla samego przedmiotu nader jasno i wielu częściach samodzielnie wyłożonego, jakotéż dla obfitości cytat historycznych, świadczących o rozległych i gruntownych autora wiadomościach. *)

Założenie towarzystwa przyjaciół nauk w Warszawie, a w Krakowie towarzystwa naukowego z uniwersytetem Jagiellońskim złączonego było wynikiem silniéj rozbudzonego ruchu umysłowego w dzielnicach dawnéj Polski. Prace tych towarzystw odnosiły się głównie do zakresu nauk moralnych; wszelako i nauki ścisłe miały w ich łonie kilku dzielnych przedstawicieli. I tak *Roczniki* towarzystwa naukowego krakowskiego od piérwszego jego zawiązku wzbogacał cennymi rosprawami Karol Hube, profesor matematyki na uniwersytecie Jagiellońskim. Oprócz prac czysto algiebraicznych, jak: O różnych dowodzeniach twierdzenia, że każde zrównanie algiebraniczne na czynniki rzetelne 1-go albo 2-go stopnia rozłożonym być może z r. 1816 (tom IV), O pewnym twierdzeniu z teoryi liczb (tom XVII) i (tom XVIII) O przybliżonym sposobie wyrachowywania pierwiastków równań liczebnych (z których ostatnia wykazuje, że autorowi sposób oddzielenia pierwiastków, podobny do sposobu Fourier'go, jeszcze w r. 1804 był znany), roczniki tow. nauk. krak. zawiérają nader cenne rosprawy z gieometryi analitycznéj tego uczonego, które do najlepszych w naszéj literaturze zaliczone być mogą. — Jakoż, rosprawa Hubego w tomie V *O trygonometryi kulistéj* daje nowy dowód twierdzenia fundamentalnego i dwa nowe dowody wzorów Delambre'a, przypisywanych Gauss'owi; tom VIII zawiéra rosprawę *O wyznaczeniu bryłowatości klina ostrokręgowego,* odciętego od ostrokręgu płaszczyzną, jakiekolwiek położenie względem jego podstawy mającą, która rozwiązuje zadanie niezupełnie rozwiązane w tomie II *Correspondance sur l'éc. pol.* — Tom IX zawiéra: *Rozprawę o początkach gieometryi analitycznéj czyli o linii prostéj i płaszczyźnie.* Początek téj pracy dała rozprawa Chasles'a w tomie III *Correspondance sur l'éc. pol.* o własnościach średnic sprzężonych elipsojdy, których 35 Chasles podaje. Dla udowodnienia tych własności potrzeba rozwiązać kilka zadań o linii prostéj i płaszczyźnie, nie znajdujących się w ogłoszonych podręcznikach. Tutaj znajdujemy dowód twierdzenia: Jeżeli S oznacza pole figury zamkniętéj płaskiéj, a T pole jéj rzutu na inną płaszczyznę, dokonanego równolegle do prostéj r, to

$$\mathrm{T}=\mathrm{S}\frac{\sin(r,\mathrm{S})}{\sin(r,\mathrm{T})}.$$

W tomie XI znajdujemy *Dalszy ciąg zadań linii prostéj i płaszczyzny tyczących się, jako i o tworzeniu się powierzchni krzywych przez linije proste.* — W tomie XIII czytamy *Rozprawę o fenomenach niektórych pochodzących z ruchu wirowego ciał, z przydaniem uwag nad przerobieniem współrzędnyah i niektórymi twierdzenia-*

*) Słownictwo, którego używa Poullin, jest często dość dziwne. Przed ogłoszeniem dzieła przedstawił jego program Dyrekcyi edukacyi narodowéj księstwa warszawskiego; ta instytucyja swe uwagi przesłała autorowi przez prefekta departamentu poznańskiego, który jednak po dwu dopiéro latach (w r. 1814) zakomunikował je Poullinowi. Wskutek tego ten ostatni pisze o owych uwagach do Dyrekcyi ed. nar. »Bardzo mi jest bolesnem, żem je odebrał tak nie rychło, gdyż gdyby mnie były natychmiast doszły, byłbym miał sobie za powinność stosować się do woli Prześwietnéj Dyrekcyi, abym.... nie wystawiał się na używanie wyrazów polskich nie przyjętych, albo nieotartych..... Wreszcie, gdybym wydał powtórną edycyą, wtedy zamieniłbym wyrazy techniczne w piérwszéj użyte na wyrazy, które Prześwietna Dyrekcya raczy mi wskazać« (z Wrocławia, 25 lutego r. 1814).

mi tyczącymi się momentów. — W tomie XIV pomieścił HUBE *Rozprawę o twierdzeniach p.* MONGE *stykania się powierzchni stopnia 2-go tyczących się, uwagi nad dowodzeniem ich przez* CHASLES'a *ogłoszonym i dowód analityczny twierdzenia, że dwie powierzchnie 2-go stopnia na trzeciéj opisane zawsze się w dwu krzywych płaskich przecinają.* (CHASLES dowiódł tego twierdzenia gieometrycznie.) — W tomie nakoniec XVII i XVIII znajdujemy dowód analityczny twierdzenia MONGE'a, że jakakolwiek powierzchnia skośna może być zawsze dotknięta wpodłuż każdéj tworzącéj przez nieskończoną liczbę powierzchni stopnia 2-go rodzaju tych, które się zowią hiperbolojdą o jednéj powłoce i parabolojdą hiperboliczną.

Z tego zestawienia prac HUBEGO widzimy, że gieometryja analityczna miała w nim godnego u nas reprezentanta, nie poprzestającego na śledzeniu wypadków prac obcych, ale samodzielnie rozwiązującego zagadnienia, będące na porządku dziennym.

Prócz prac HUBEGO, ozdobą rzeczywistą *Roczników* towarzystwa naukowego krakowskiego (tom XII i XV) są dwie rozprawy p. AUGUSTYNA FRĄCZKIEWICZA, czcigodnego nestora matematyków polskich, który naprzód jako profesor liceum krakowskiego, następnie jako profesor uniwersytetu warszawskiego, a po zwinięciu tegoż, jako wykładający w kursach dodatkowych, a nakoniec jako dziekan i profesor b. Szkoły Głównéj warszawskiéj, wytrawnymi i wzorowymi wykładami rozbudzał i utrzymywał zamiłowanie do studyjów matematycznych w kilku gieneracyjach młodzieży. Lubo tak te prace, jak i ogłoszone późniéj w kilku tomach *Biblioteki Warszawskiéj* (między r. 1844 a 1860), odnoszą się przeważnie do gieometryi czystéj, do trygonometryi i do algiebry, wszakże poczytywaliśmy sobie za obowiązek wspomnieć o nich, jako hołd należny od młodszego kolegi, który Jego światłym radom wiele zawdzięcza.

Roczniki warszawskiego towarzystwa przyjaciół nauk zawiérają trzy rosprawy gieometryczne pióra KAJETANA GARBIŃSKIEGO, profesora uniwersytetu warszawskiego i dyrektora szkoły przygotowawczéj do instytutu politechnicznego, autora nader cennéj pracy: *Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych z ich przystosowaniem do konstrukcyi machin*.... (w Warszawie, 1822). W tomie XVIII znajduje się rosprawa: *Sposób graficzny kreślenia stycznych do linii spiralnéj ostrokręgowéj*, t. j. do linii skośnéj, według jakiéj walec prosty, mający za podstawę wężownicę Archimedesa, przecina się z ostrokręgiem prostym, którego oś schodzi się z tworzącą walca, przechodzącą przez początek wężownicy. Ta sama praca została ogłoszona w XVI tomie roczników GERGONNE'a. — Tom XIX zawiéra: *Nowy sposób rozwiązania dwóch zagadnień gieometrycznych* podanych w XV tomie roczników GERGONNE'a: 1° ze wszystkich łuków równych co do długości, a nakreślonych promieniami różnymi, który obejmuje obwodem swoim i cięciwą odcinek koła największy? 2° ze wszystkich kalot kulistych, równych co do powierzchni, ale różnych promieni, która między powierzchnią swoją a powierzchnią koła, będącego jéj podstawą, obejmuje odcinek kuli największy? W téj rosprawie wspomina autor, że te same zagadnienia rozwiązał dr. JANICKI w numerze 2-im *Pamiętnika naukowego* przed nadejściem do Warszawy rozwiązań, w rocznikach GERGONNE'a ogłoszonych. — Tom XXI nakoniec zawiéra rozwiązanie gieometryczne zagadnienia, które podał GERGONNE w XVII tomie swych roczników: wyznaczyć ściśle liniją prostą, przecinającą cztéry linije proste, dane w przestrzeni w ten sposób, iż dwie którekolwiek z nich nie leżą na jednéj płaszczyźnie. To rozwiązanie zamieścił GERGONNE w tomie XVIII swych roczników, razem z rozwiązaniem BOBILLIER'go. Rozwiązanie analityczne tego twierdzenia, dane także przez GARBIŃSKIEGO, znajduje się w tomie V dziennika CRELLE'go.

Na kierunek gieometryczny prac Garbińskiego wpłynęła bezwątpienia tradycyja zaszczepiona przez Livet'a w szkole artyleryi i inżynieryi w Warszawie, która, jakeśmy powiedzieli, wydała autora piérwszéj gieometryi wykréślnéj w języku polskim, Franciszka Sapalskiego, kapitana artyleryi, a późniéj profesora gieometryi wykréślnéj i matematyki stosowanéj na uniwersytecie Jagiellońskim, tudzież Ludwika Rembielińskiego, oficera artyleryi, autora dzieła: *Teoryja krzywych iloczynowych* (w Warszawie, 1826). Aby dać wyobrażenie o tym dziele, weźmy na prostéj dwa punkty stałe, A i B, i punkt bieżący P, kładąc AP $=x$, BP $=x-$AB, i odcinając na prostopadłéj do AB w punkcie P długość $y=x(x-\mathrm{AB})$; wówczas miéć będziemy punkt bieżący krzywéj iloczynowéj rzędu 2-go (krzywa iloczynowa będzie krzywą rzędu n-go, jeżeli ilość punktów stałych jest $=n$). Dziś takie krzywe nazwaćby należało parabolicznymi. Otóż, własności tych krzywych bada autor, a potym stosuje je do teoryi równań algiebraicznych. Praca ta, jako samodzielna, zasługuje ze wszech miar na chlubną wzmiankę i na bliższy rozbiór, czego wszakże musimy sobie odmówić, aby zbyt nie rosszérzać ram tego krótkiego rysu historycznego.

Brakowi podręcznika do nauki gieometryi analitycznéj, odpowiedniego znacznie posuniętemu stanowi umiejętności od chwili wyjścia dzieła Śniadeckiego, zaradził naprzód Antoni Wyrwicz, profesor na uniwersytecie wileńskim, przez przekład znakomitego dzieła Biot'a, zalecającego się wielką jasnością i wytwornością wykładu, i dlatego powszechnie cenionego. Przekład ten wyszedł pod tytułem: *Początki gieometryi analitycznéj, zastosowane do linij krzywych i powierzchni drugiego porządku* (w Wilnie, 1-e wydanie w r. 1819, a 2-gie w r. 1825). Dokładność przekładu i nieporównana czystość języka, a nadto znakomity wstęp, traktujący o sposobach postępowania w wykréślaniu wyrażeń algiebraicznych i zastosowanie tych sposobów do rozwiązania zapomocą wykréślenia zadań gieometrycznych oznaczonych, czynią to dzieło jeszcze dziś, pomimo takich postępów nauki, niezmiernie cennym.

Na podstawie tego dzieła ułożył Wyrwicz dla szkół gimnazyalnych: *Początki gieometryi analitycznéj,* które wyszły w dwu tomikach (w Wilnie 1828—1829) i obejmują, oprócz wstępu, gieometryją analityczną linii prostéj na płaszczyźnie i w przestrzeni, płaszczyzny, koła, elipsy, paraboli i hiperboli. Dziełko to jest nieporównanie lepsze od wszelkich późniejszych aż do obecnéj chwili, używanych w szkołach średnich.

W przedziale czasu między 1-ym i 2-im wydaniem przekładu dzieła Biot'a ogłosił Adryjan Krzyżanowski, późniejszy profesor na uniwersytecie warszawskim, dzieło: *Gieometryja analityczna linij i powierzchni drugiego rzędu* (w Warszawie, 1822). Pod względem obfitości materyjału jest ono pełniejsze, od dzieła Biot'a, osobliwie w części traktującéj o powierzchniach rzędu 2-go wszakże pod względem jasności wykładu i logicznego powiązania szczegółów, tudzież odniesienia tychże do najwłaściwszych źródeł, nie sprosta ono owemu dziełu.

Zamknięcie uniwersytetu warszawskiego, przeniesienie wileńskiego do Kijowa, tudzież zreformowanie krakowskiego na wzór austryjackich spowodowały zastój w ruchu umysłowym u nas, z którego zaczęliśmy się podnosić dopiéro w drugiéj połowie bieżącego wieku.

Nie tu miejsce wskazywać te czynniki, które rozbudziły u nas nanowo uśpiony ruch na polu naukowym, jaki się rospoczął między 1850 a 1860 rokiem. — W zakresie gieometryi analitycznéj pojawiła się w téj epoce naprzód: *Gieometryja analityczna linij i powierzchni drugiego rzędu* przez Jana Kantego Steczkowskiego, profesora uniwersytetu Jagiellońskiego (w Krakowie, 1859). Wydanie tego dzieła było na czasie, pomimo że nie odźwierciadlało ono spółczesnego stanu téj umiejętności; wobec bowiém zupełnego wyczerpania dzieł Śniadeckiego i Wyrwicza, było ono jedynym, które młodym adeptom nauki dało poznać bogactwo, wyrazistość i jędrność języka matematycznego polskiego.

W kilka lat późniéj (we Lwowie, 1861—4) wydał p. Wawrzyniec Żmurko, profesor akademii technicznéj we Lwowie: *Wykład matematyki* (2 tomy), obejmujący w sobie także kurs gieometryi analitycznéj. W tym dziele usiłował autor oprzéć wykład całéj matematyki na nowych podstawach; wszakże skutek nie odpowiedział zamiarowi. W każdym razie, pominąwszy niepoprawność języka, a stąd niejasność wykładu, gieometryja analityczna Żmurki, oile to dotyczy własności metrycznych figur gieometrycznych, wzbogaciła cennym przyczynkiem naszę literaturę. Oprócz tego dzieła, ogłosił p. Żmurko kilka rospraw z zakresu gieometryi analitycznéj, traktujących rzeczy znane cokolwiek odmiennymi sposobami, a nadto obmyślił przyrządy do kréślenia trzech krzywych rzędu 2-go, przynoszące zaszczyt wynalazcy.

Ostatnim podręcznikiem polskim, który wyprzedził naszę pracę, są: *Zasady gieometryi analitycznéj*.... z rysem historycznym początku i rozwoju téj umiejętności.... przez Adolfa Sągayłę, których wyszedł tylko tom I (w Paryżu, 1877) i nie obejmuje całkowitego wykładu gieometryi płaskiéj. Wydany tom I jest ułożony według kursu litografowanego p. Painvin'a; wyszedł on nakładem nieodżałowanego hr. Jana Działyńskiego, który, przez założenie towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu i hojne wspiéranie wydawnictw naukowych, wielce wpłynął na rozwój literatury matematycznéj polskiéj w ostatnich trzydziestu latach.

Pamiętniki towarzystwa nauk ścisłych zawiérają, oprócz wielu prac cennych z innych gałęzi matematyki czystéj, kilka rospraw z gieometryi analitycznéj, jak p. Władysława Trzaski (Kretkowskiego) *O nakréśleniu do trzech kół, danych na powierzchni kuli, czwartego koła stycznego, leżącego na téjże powierzchni* (tom I) i p. M. A. Baranieckiego wykład habilitacyjny: *Zasadnicze wnioski gieometryczne z teoryi algiebraicznéj form kwadratowych podwójnych* (tom VIII). Te dwie prace, jak również rozwiązanie zagadnienia o kuli stycznéj do cztérech kul danych, podane przeze p. Kretkowskiego w jego *Krótkich wiadomościach o wyznacznikach* (Paryż, 1870), były piérwszymi w języku polskim, napisanymi w duchu nowoczesnéj analizy.

Założenie akademii umiejętności w Krakowie (1872), uposażonéj w bogate środki naukowe i materyjalne, wprowadziło wszelkie umiejętności na drogę raźnego i naturalnego postępu. Od lat 10 corocznie wydawany *Pamiętnik* i zbiór mniejszych *Rozpraw* wydziału matematyczno-przyrodniczego téj akademii zawiérają wiele cennych prac, wzbogacających naukę wogóle. Prace p. Jana Nep. Frankego, profesora szkoły politechnicznéj we Lwowie, autora biografii Macieja Głoskowskiego i Jana Brożka, zamieszczone w *Pamiętniku* akademii: *Badania analityczne nad ruchem ciał stałych* (tom I), *O niektórych zagadnieniach kinematyki na zasadzie ruchu powierzchni skośnych* (tom III), *O inwolucyi sześciu prostych jako osi skrętów chwilowych i teoryja analityczna kompleksów śrub chwilowych* (tom VII), lubo odnoszą się do mechaniki, wzbogacają gieometryją analityczną kilku cennymi przystosowaniami. P. Mieczysław Łazarski, nauczyciel szkoły realnéj w Stanisławowie, ogłosił prace: *O konstrukcyi punktów przecięcia krzywych rzędu 2-go*, tudzież *O konstrukcyi osi w perspektywie koła* (*Rozprawy*, tomy VIII i X), odnoszące się do gieometryi syntetycznéj, któréj metody nowoczesne wprowadzone były do naszéj literatury jeszcze w roku 1852 w *Gieometryi* G. H. Niewęgłowskiego, lecz dotychczas nie wielu znajdowały u nas zwolenników.

Wzmiankując powyżéj o pracach ogłoszonych w *Rocznikach* towarzystwa naukowego krakowskiego, umyślnie pominęliśmy dwie, aby już razem wspomnićć o wszystkich tych pracach ich autorów, które mają charakter gieometryczny. Mamy tu na myśli krótką lecz doniosłego znaczenia pracę: *Obliczenie potencyjału dla wielościanów jednorodnych* (tom XXXV) p. Franciszka Mertensa, profesora na uniwersytecie Jagiellońskim, który nadto ogłosił w *Denkschriften* akademii wiedeńskiéj: *Ueber die* Malfatti'*sche Aufgabe und deren Construction und Verallgemeinerung von* Steiner (tom CLXXXVI), a w dzienniku Crelle'go: *Ueber die* Malfatti'*sche Aufgabe für das sphärische Dreieck* (tom LXXVI), *Ueber das grösste Tetraeder mit Flächen von gegebenen Inhalten* (tom LXXXIII), *Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von* Pascal *und* Brianchon. Żałujemy, że szczupłość ram téj historycznéj wzmianki nie dozwala nam szczegółowiéj tu wyłożyć treści tych prac, które, czyto doniosłością rezultatów, czytéż zaletami metody wykładu, stoją na wysokości znakomitych prac p. Mertensa, odnoszących się do innych gałęzi matematyki. — Z téjże przyczyny ograniczymy się tu tylko wyliczeniem prac gieometrycznych innego również poważnego naszego uczonego, p. Edwarda Habicha, dyrektora szkoły budownictwa i górnictwa w Lima, który ogłosił następujące prace gieometryczne: w *Rocznikach* tow. nauk. krak. *O szczególnym układzie spółrzędnych i jego zastosowaniu do linij palących* (tom XXXIX) i toż samo w *Annali* Brioschi'ego (seryja II, tom II), w *Les mondes: Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan* (tomy XIV—XVI), *Sur te centre instantané de rotation et ses applications géométriques* (tom XVIII i XIX), w *Nouvelles annales: Sur la transformation des lignes planes par la méthode des rayons vecteurs réciproques* (seryja II, tom V), a nadto oddzielnie: *Sur le mouvement conchoidal* (Paryż, bez roku), *Études cinématiques* (Paryż, 1879) i *Études géométriques et cinématiques* (Lima, 1880).

ERRATA.

str.	*wiérsz*		*zamiast*	*powinno być.*
5	8	*od dołu*	ją	się
12	1	*od góry*	ONP	OMP
29	5	*od dołu*	widoczne	widocznie
„	13	„	$\equiv$	$\equiv -$
31	9	*od góry*	$=-\frac{x_1u'+y_1v'+1}{x_2u'+y'_2v'+1}$	$\equiv-\frac{x_1u'+y_1v'+1}{x_2u'+y_2v'+1}$
„	18	„	$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$	$(x_2-x)^2+(y_2-y)^2$
32	10	„	Δ'_3D_1	Δ'_3D_2
41	5	„	D_3D_1	D_3D_2
47	12	*od dołu*	D_2 i D'_3	D_2 i D'_2
71	15	*od góry*	$\sin^2\gamma_2$	$\sin^2\gamma_3$
72	13	*od dołu*	L_3, L_3 L_3, L_1 L_3, L_2	L_2, L_3 $L_3, L_1,$ L_1, L_2
78	16	„	$r+1$	$r=1$
100	2	„	x_1''', x_2'''	x'''_1, x'''_2
105	2	„	piérwsza strona	strona lewa
106	2	*od góry*	linii równania (1)	linii, przedstawionéj przez równanie (1)
108	7	„	$\equiv$	$\equiv -$
„	5	*od dołu*	$A_{33}u_2$	$A_{33}u_3$
112	11	„	(13)	(13')
„	12	„	$\equiv$ *i zamiast* α	$\equiv -$ *wszędzie* A
„	13	„	(11')	(10')
115	9, 10, 11, 18	*od dołu*	*zamiast* x_1y_1	$x,\ y,$
116	1	*od dołu*	x_1, y_1	x, y
119	15	*od góry*	x'_1 y'_1	x' y'
„	8, 9	*od dołu*	x_1 y_1	$x,\ y,$
131	5	„	P_0P'	P'_0P'
132	8	*od góry*	$P_1P''_{23}$	$P_2P''_{23}$
149	19	„	a^2	a
153	8	*od dołu*	jest równoważny trójkątowi, utworzonemu	ma pole 2 razy większe od pola trójkąta, utworzonego
158	11	„	TH	FH
168	19	*od góry*	OP	OP'
179	4	*od dołu*	$a_{33}s_1s_2s_3$	$a_{33}s_1s_2x_3$
180	4	„	a_3x	a_3x_2
„	5	„	art. 145	art. 151
184	6—9	„	$a_2x_2{}^2$ $a_3x_3{}^2$	$a_2{}^2x_2{}^2$ $a_3{}^2x_3{}^2$
185	11	*od góry*	art. 145	art. 151
187	6	„	$a_3\grave{a}_1x_3x_1$	$2a_3a_1x_3x_1$
„	10	*od dołu*	a_2a_3	$a_2 : a_3$
188	6	„	$\sin^2$	$\sin^2A_3$
193	8, 9	*od góry*	$\sin A_1$	$\sin A_2$

str.	*wiersz*		*zamiast*	*powinno być.*
210	10	*od dołu*	średnice zaś	gdyż średnice
217	16	*od góry*	x'	x_1
224	23	„	przechodzą	przechodzącą
229	2	„	z	-go stopnia
231	18	„	Y'	Y
232	1	„	(d^2fx)	$d^2f(x)$
„	18	„	je	ją
234	3	„	$p-2$	$n-2$
242	3	*od dołu*	f_2	f_1
249	4, 13	„	y_1	x_2
250	15	*od góry*	wyrazy	wyraz
256	8	„	r	r_1
257	16	„	r_2	r_3
267	11, 15	„	x_2	x^2
„	3	*od dołu*	jak	jako
291	16	*od góry*	z	z'
313	7	*od dołu*	τ	t
332	14	„	$A_1A_3A_4$	$A_2A_3A_4$
351	8	*od góry*	γ_4	γ_3
352	15	„	najprzód	naprzód
357	6	„	te równania	to równanie
358	4	*od dołu*	walca	walca rzędu 2 go
359	10	*od góry*	$a_{23}n$	$a_{33}n$
„	16	„	$a_{44}n$	$a_{43}n$
365	15	*od dołu*	$+2m\mathrm{C}$	$-2m\mathrm{C}$
369	15	„	t. j.	to
372	1, 2	„	μ_i	u_i
„	2	„	u	μ
375	11	„	(17)	(15)
387	19	„	$\alpha_{ik}{}^2+$	$\alpha_{ik}{}^2=$
401	2	*od góry*	art. 78	art. 79
404	16	*od dołu*	ich asymptoty	kierunki ich asymptot
405	12	*od góry*	art. 77,	art. 80,
408	2	*od dołu*	przez płaszczyzny przechodzące	płaszczyznami przechodzącymi
„	3	„	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}^{\frac{1}{2}}$
431	10	„	$\gamma=0,\ \dfrac{\alpha^2}{a^2-b^2}+$	$\gamma=0,\ \dfrac{\alpha^2}{a^2-c^2}+$
435	11	*od góry*	α^2 nazmiemy a'^2 i a''^2	α^2, nazwiemy a'^2 i a''^2,
442	17	„	$\lambda\mu$	$2\lambda\mu$
454	11	„	linijną	liniją
456	1	„	$f=0$	$f_2=0,$
„	16	„	a_{33}	a_{34}
457	6	„	przecinają	przecina
XIX	11	*od dołu*	1653	1663

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA.

W gieometryi analitycznéj zastępuje się figury gieometryczne przez równania i z własności analitycznych równań wyprowadza się własności gieometryczne figur, przez te równania przedstawionych. Figury gieometryczne są albo płaskie, t. j. takie, których wszystkie części składowe znajdują się na jednéj i téj saméj płaszczyźnie, albo przestrzenne, t. j. takie, których części składowe nie leżą na jednéj i téj saméj płaszczyźnie. Stąd téż dzieli się gieometryją analityczną: na gieometryją analityczną figur płaskich, zwaną gieometryją analityczną płaską, i na gieometryją analityczną figur przestrzennych, zwaną gieometryją analityczną w przestrzeni.

CZĘŚĆ PIÉRWSZA.

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA PŁASKA.

ROZDZIAŁ I.

O UKŁADACH SPÓŁRZĘDNYCH.

SPÓŁRZĘDNE PUNKTU.

1. Punkt i linija prosta są najprostszymi figurami gieometrycznymi; dlatego pokażemy przedewszystkim, jak te dwie figury można przedstawić przez równania. Zaczniemy od punktu.

W celu przedstawienia punktu na płaszczyźnie przez równania, użyjemy układu spółrzędnych Descartes'a (Kartezyjusza), t. j. układu dwu prostych, danych na téj płaszczyźnie, tworzących z sobą kąt, różny od 0 i od π. Te dwie proste zowią się osiami spółrzędnych; punkt, w którym się osi przecinają, zowie się początkiem spółrzędnych, a kąt, zawarty między osiami, nazywa się kątem spółrzędnych. Pospolicie używa się układu prostokątnego spółrzędnych, t. j. takiego, w którym osi są do siebie prostopadłe.

Niech X'X i Y'Y będą dwiema osiami spółrzędnych, przecinającymi się w początku O (fig. 1). Z punktu P na płaszczyźnie tych osi wyprowadźmy dwie proste: PM, równoległą do YY', aż do przecięcia się w punkcie M z osią X'X, i PN, równoległą do XX', aż do przecięcia się w punkcie N z osią Y'Y. Odcinki OM i ON, odmierzone na osiach X'X i Y'Y przez wymienione dwie proste, lub im równe i do nich równoległe odcinki NP i MP tychże dwu prostych, zowią się **s p ó ł r z ę d n y m i D e s c a r t e s'a** albo **s p ó ł r z ę d n y m i r ó w n o l e g ł y m i** punktu P.

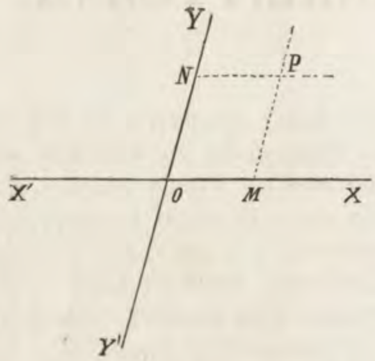


Fig. 1.

Widocznie, że jeżeli punkt P jest dany na płaszczyźnie, to także odcinki OM i ON są dane. Naodwrót, wyznaczymy położenie punktu zapomocą tych dwu odcinków, jeżeli nietylko ich długość jest daną, lecz także ich kierunek.

Ażeby określić kierunek spółrzędnych, należy każdą z osi uważać jako złożoną z dwu części, które wychodzą z początku spólnego O w dwu kierunkach wprost sobie przeciwnych. Jeden którykolwiek z kierunków każdéj osi przyjmujemy za dodatny, a drugi za ujemny; spółrzędne więc punktu będą dodatne lub ujemne, według tego, czy ich kierunki, wzięte od początku O, odpowiadają lub nie kierunkom osi, przyjętym za dodatne.

Za kierunek dodatny osi X'X, którą się zwykle wyobraża poziomą, bierze się pospolicie ten, który wychodzi z O na prawo, t. j. OX, a za kierunek dodatny osi Y'Y bierze się ten, który leży po stronie lewéj osi X'X, gdy, stojąc na płaszczyźnie, ma się wzrok zwrócony w kierunku dodatnym osi X'X, t. j. OY. Wskutek téj umowy, każdy punkt płaszczyzny ma spółrzędne oznaczone i każde dwie liczby rzeczywiste można uważać za spółrzędne Descartes'a pewnego punktu płaszczyzny.

Spółrzędne punktu na płaszczyźnie oznaczamy literami x i y, a mianowicie: odcinek OM na osi X'X lub odcinek NP, równoległy do osi X'X, oznaczamy literą x; odcinek zaś ON na osi Y'Y, lub odcinek MP, równoległy do osi Y'Y, oznaczamy literą y. Stąd téż i osi X'X i Y'Y nazywamy: piérwszą osią x-ów, a drugą osią y-ów. Spółrzędna x nazywa się **o d c i ę t ą**, a spółrzędna y **r z ę d n ą** albo **p r z y s t a w ą**.

Jeżeli więc a, b są spółrzędne punktu danego na płaszczyźnie, to dwa równania

(1) $$x=a\,,\; y=b$$

są wyrażeniem analitycznym tego punktu, i nawzajem: pewien wzupełności oznaczony punkt na płaszczyźnie jest obrazem gieometrycznym tych równań, jeżeli a i b mają wartości rzeczywiste, dodatne lub ujemne. Ten punkt będzie leżał w otworze kąta XOY, gdy $a>0$ i $b>0$; w otworze kąta YOX′, gdy $a<0$, $b>0$; w otworze kąta X′OY′, gdy $a<0$, $b<0$, lub nareszcie w otworze kąta Y′OX, gdy $a>0, b<0$. Jeżeli $a=0$, punkt przedstawiony przez równania (1) będzie leżał na osi y-ów, a jeżeli $b=0$, punkt ten będzie leżał na osi x-ów, jeżeli nakoniec $a=0$ i $b=0$, tenże punkt będzie początkiem spółrzędnych.

SPÓŁRZĘDNE LINII PROSTÉJ.

2. Podobnie, jak punkt, można liniją prostą wyznaczyć na płaszczyźnie przez dwie spółrzędne.

Oznaczmy przez R i S punkty, w których prosta przecina osi spółrzędnych X′X i Y′Y (fig. 2). Widoczna, że jeżeli prosta jest dana, to odcinki OR i OS, które ona odmierza na osiach spółrzędnych, są także dane. Naodwrót, jeżeli dane są te odcinki co do długości i co do kierunku, to prosta, która te odcinki na osiach odmierza, jest także dana. Stosownie do umowy, zrobionéj w artykule poprzedzającym, uważać będziemy te odcinki za dodatne lub ujemne według tego, czy one leżą na kierunkach dodatnych OX i OY, czytéż na kierunkach ujemnych OX′ i OY′ osi spółrzędnych.

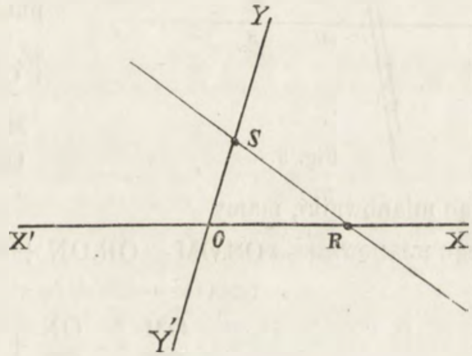


Fig. 2.

Odwrotności odcinków OR i OS, wzięte ze znakami przeciwnymi, nazwał Plücker s p ó ł r z ę d n y m i linii prostéj RS. Te spółrzędne oznacza się pospolicie literami u i v.

Jeżeli więc α i β są spółrzędnymi danéj linii prostéj, to równania

$$u=\alpha \text{ i } v=\beta \tag{2}$$

są jéj wyrażeniem analitycznym; i nawzajem: pewna wzupełności wyznaczona linija prosta na płaszczyźnie jest obrazem gieometrycznym tych dwu równań, jeżeli α i β posiadają wartości rzeczywiste, dodatne lub ujemne. Jeżeli $\alpha<0$ i $\beta<0$, prosta przedstawiona przez równania (2) przecina kierunki dodatne obu osi; jeżeli $\alpha>0$, $\beta<0$, prosta ta przecina kierunek ujemny osi x-ów a dodatny osi y-ów, jeżeli $\alpha>0$ i $\beta>0$, taż prosta przecina kierunki ujemne obu osi; jeżeli nakoniec $\alpha<0$, $\beta>0$, nasza prosta przecina ujemny kierunek osi y-ów a dodatny osi x-ów. Prosta przedstawiona przez równania (2) jest równoległa do osi x-ów, gdy $\alpha=0$, a do osi y-ów, gdy $\beta=0$; schodzi się zaś ona z osią x-ów, lub z osią y-ów, według tego, czy $\beta=\infty$, czyteż $\alpha=\infty$. Jeżeli jednocześnie $\alpha=0$ i $\beta=0$, prosta przedstawiona przez równania (2) leży w odległości nieskończonéj, a jeżeli jednocześnie $\alpha=\infty$ i $\beta=\infty$, ta prosta przechodzi przez początek spółrzędnych.

RÓWNANIE PROSTÉJ I RÓWNANIE PUNKTU.

3. Weźmy pod uwagę prostą RS i punkt na niéj leżący P (fig. 3) i szukajmy związku między spółrzędnymi

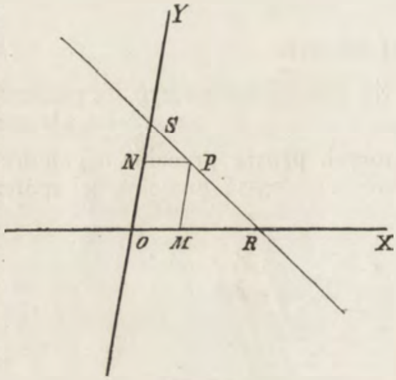


Fig. 3.

(3) $$u=-\frac{1}{\mathrm{OR}},\quad v=-\frac{1}{\mathrm{OS}}$$

prostéj RS i spółrzędnymi

(4) $$x=\mathrm{OM}\ ,\ y=\mathrm{ON}$$

punktu P.

Podobieństwo trójkątów MRP i ORS daje

$$\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{OR}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OS}},\ \text{lub}\ \frac{\mathrm{OR-OM}}{\mathrm{OR}}=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OS}};$$

znosząc mianowniki, mamy

$$-\mathrm{OS.OM}-\mathrm{OR.ON}+\mathrm{OR.OS}=0,$$

lub

$$-\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OR}}-\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OS}}+1=0,$$

czyli, wskutek (3) i (4),

(5) $$ux+vy+1=0.$$

Równanie (5) wyraża związek między spółrzędnymi u i v linii prostéj, i spółrzędnymi x i y punktu, leżącego na niéj. Jeżeli więc prosta jest daną, t. j. jeżeli jéj spółrzędne u i v są liczbami danymi, to spółrzędne wszelkich punktów, leżących na téj prostéj, lecz tylko tych punktów, uczynią zadość równaniu (5). Równanie (5) będzie w tym przypadku równaniem linii prostéj, któréj spółrzędne są u i v.

Jeżeli przeciwnie punkt jest dany, t. j. jeżeli są dane jego spółrzędne x i y, natenczas spółrzędne wszelkich prostych, które przez ten punkt przechodzą, lecz tylko tych prostych, uczynią zadość równaniu (5). Równanie (5) będzie więc w tym przypadku równaniem punktu, którego spółrzędne są x i y.

A zatym: *jeżeli punkt na płaszczyźnie wyznaczymy przez dwie spółrzędne x i y, natenczas wyrażenie analityczne linii prostéj będzie równaniem stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu; jeżeli zaś liniję prostą na płaszczyźnie wyznaczymy przez dwie spółrzędne u i v, natenczas wyrażenie analityczne punktu będzie równaniem stopnia 1-go między spółrzędnymi linii prostéj.*

Nawzajem: *każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu przedstawia liniją prostą, a każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi linii prostéj przedstawia punkt.*

Jakoż, dzieląc równanie ogólne stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu x i y,

$$Ax + By + C = 0,$$

przez C, i kładąc

$$\frac{A}{C} = u, \quad \frac{B}{C} = v,$$

otrzymamy równanie kształtu (5), które przedstawia liniją prostą o spółrzędnych u i v.

Również, dzieląc równanie ogólne stopnia 1-ego między spółrzędnymi linii prostéj u i v,

$$Lu + Mv + N = 0,$$

przez N, i kładąc

$$\frac{L}{N} = x, \quad \frac{M}{N} = y,$$

otrzymamy także równanie kształtu (5), które przedstawia punkt o spółrzędnych x i y.

4. Skoro każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu przedstawia liniją prostą, więc i równania (1) w artykule 1, wyrażające wartości spółrzędnych punktu P, przedstawiają, każde oddzielnie, pewną prostą. A mianowicie: piérwsze z nich przedstawia prostą, któréj spółrzędne są

$$u = -\frac{1}{a}, \; v = 0,$$

t. j. prostą równoległą do osi y-ów i odmierzającą na osi x-ów odcinek równy co do długości i co do kierunku liczbie a; drugie zaś przedstawia prostą, któréj spółrzędne są

$$u = 0, \; v = -\frac{1}{b},$$

t. j. prostą równoległą do osi x-ów i odmierzającą na osi y-ów odcinek równy co do długości i co do kierunku liczbie b. Wyznaczenie punktu przez spółrzędne x i y sprowadza ją więc do wyznaczenia dwu prostych równoległych do osi spółrzędnych, na których przecięciu ten punkt leży.

Podobnie, skoro każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi linii prostéj przedstawia punkt, więc i równania (2) w artykule 2, wyrażające wartości spółrzędnych linii prostéj, przedstawiają, każde oddzielnie, pewien punkt. A mianowicie: piérwsze z nich przedstawia punkt, którego spółrzędne są

$$x = -\frac{1}{\alpha}, \; y = 0,$$

t. j. punkt na osi x-ów, a drugie przedstawia punkt, którego spółrzędne są

$$x = 0 \, , y = -\frac{1}{\beta} ,$$

t. j. punkt na osi y-ów. Wyznaczenie linii prostéj przez spółrzędne u i v sprowadza się więc do wyznaczenia dwu punktów, po jednym na każdéj osi spółrzędnych, przez które ta prosta przechodzi.

LINIJE ALGIEBRAICZNE RZĘDU n-GO I LINIJE ALGIEBRAICZNE KLASY n-ÉJ.

5. Punkt, którego spółrzędne x i y są zupełnie dowolne, zowie się punktem bieżącym; podobnie, prosta, któréj spółrzędne u i v są zupełnie dowolne, zowie się prostą bieżącą. Przez punkt bieżący i przez prostą bieżącą należy więc rozumiéć jakikolwiek punkt lub jakąkolwiek prostą na płaszczyźnie. Jeżeli zaś spółrzędne punktu bieżącego, lub spółrzędne prostéj bieżącéj są połączone z liczbami danymi zapomocą jednego równania stopnia 1-ego, to punkt bieżący może być tylko jakimkolwiek punktem na pewnéj linii prostéj, a prosta bieżąca może być tylko jakąkolwiek prostą przechodzącą przez pewien punkt. Innymi słowy: *miejscem gieometrycznym punktu bieżącego, którego spółrzędne są połączone z liczbami danymi zapomocą jednego równania stopnia 1-go, jest linija prosta, przez to równanie przedstawiona, a miejscem gieometrycznym prostéj bieżącéj, któréj spółrzędne są połączone z liczbami danymi zapomocą jednego równania stopnia 1-go, jest punkt, przez to równanie przedstawiony.* Zachodzi teraz pytanie: jakie miejsce gieometryczne punktu bieżącego lub linii prostéj bieżącéj wyraża jakiekolwiek inne równanie, zachodzące między spółrzędnymi tego punktu lub téj linii prostéj?

6. Niech

$$f(x \, , y) = 0$$

będzie jakimkolwiek równaniem między spółrzędnymi nieoznaczonymi x i y punktu bieżącego P. Widocznie, że jeżeli spółrzędnéj x nadamy jakąkolwiek wartość szczególną x_0, natenczas, przez rozwiązanie równania $f(x_0 \, , y) = 0$ względem jedynéj niewiadoméj y, otrzymamy jednę lub więcéj wartości na y, t. j. spółrzędne pewnego punktu lub pewnych punktów miejsca, wyrażonego przez równanie $f(x, y) = 0$.

Załóżmy dla uproszczenia, że równanie $f(x \, , y) = 0$ daje dla każdéj rzeczywistéj wartości na x tylko jednę wartość na y i że ta wartość jest także rzeczywista. Jeżeli więc spółrzędnéj x nadamy dowolnie szereg wartości x_0, x_1, x_2, x_3, . . . i następnie zapomocą równania $f(x \, , y) = 0$ wyznaczymy szereg odpowiednich wartości na y: y_0, y_1, y_2, y_3, . . . , to otrzymamy wówczas szereg punktów P_0, P_1, P_2, P_3, . . . (fig. 4), których spółrzędne są $(x_0 \, , y_0)$, $(x_1 \, , y_1)$, $(x_2 \, , y_2)$, $(x_3 \, , y_3)$, . . . Te punkty będą leżały na miejscu gieometrycznym przedstawionym przez równanie $f(x \, , y) = 0$. Jeżeli różnice $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, . . . między dwiema po sobie następującymi wartościami na x będą się wciąż zmniejszały, dążąc do granicy 0, wówczas — mówiąc wogólności — także różnice $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, . . . będą wciąż malały, dążąc również do granicy 0. W granicy więc, kiedy x zmieniać będziemy w sposób ciągły, t. j. tak, aby różnica między każdymi dwiema po sobie następującymi wartościami na x była nieskończenie małą, będzie się także spółrzędna y zmieniała — mówiąc wogólności — w sposób ciągły, a punkty P_0, P_1, P_2, P_3, . . . , zrazu od siebie oddalone, będą się do siebie nieskończenie zbliżały i przez swe następstwo utworzą liniją nieprzerwaną i — wogólności — krzywą. A zatym: *miejscem gieometrycznym punktu bieżącego, którego spółrzędne są połączone z liczbami danymi jakimkolwiek równaniem, jest pewna linija — wogólności — krzywa, przez to równanie przedstawiona.*

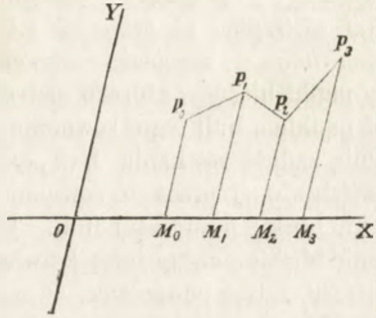


Fig. 4.

7. Weźmy teraz pod uwagę jakiekolwiek równanie między spółrzędnymi linii prostéj

$$F(u, v) = 0.$$

Nadając dowolnie spółrzędnéj u szereg wartości u_0, u_1, u_2, u_3,..., wyznaczymy zapomocą równania $F(u, v) = 0$ szereg odpowiednich wartości na v: v_0, v_1, v_2, v_3,..., i otrzymamy szereg prostych D_0, D_1, D_2, D_3,... (fig. 5), których spółrzędne są (u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3).... Te proste utworzą przez swe następstwo liniją wielokątną $P_0P_1P_2P_3$..., któréj wiérzchołki są punktami przecięcia się każdych dwu prostych, w szeregu D_0, D_1, D_2, D_3, D_4,... po sobie następujących. Jeżeli różnice $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$,... będą się wciąż zmniejszały, dążąc do granicy 0, wówczas — mówiąc wogólności — także różnice $v_1 - v_0$, $v_2 - v_1$, $v_3 - v_2$,... będą coraz więcéj malały, dążąc do granicy 0. W granicy więc, gdy u zmieniać będziemy w sposób ciągły, wiérzchołki P_0, P_1, P_2, P_3,... linii wielokątnéj będą się do siebie nieskoń-

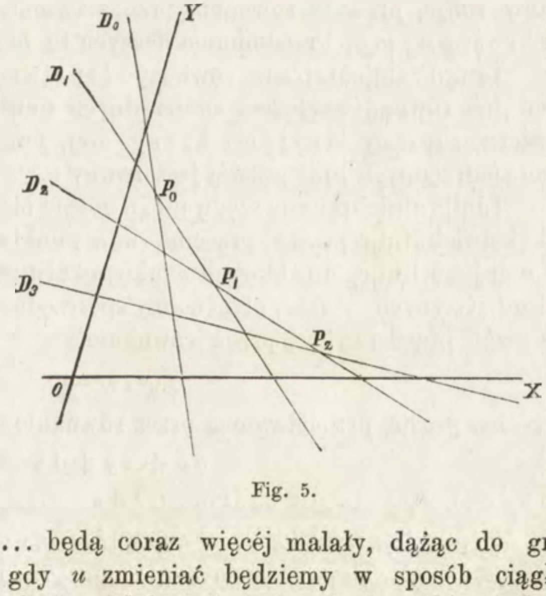


Fig. 5.

czenie zbliżały, wskutek czego ta linija wielokątna przejdzie na liniją — wogólności — krzywą. A zatym: *miejscem gieometrycznym prostéj bieżącéj, któréj spółrzędne są połączone z liczbami danymi jakimkolwiek równaniem, jest pewna linija — wogólności — krzywa, przez to równanie przedstawiona.* Atoli, gdy punkt bieżący, którego spółrzędne x, y czynią zadość równaniu $f(x,y)=0$, jest punktem linii tego równania, to prosta bieżąca, któréj spółrzędne u i v czynią zadość równaniu $F(u,v)=0$, jest otyle tylko częścią składową linii przedstawionéj przez to równanie, oile ona przechodzi przez dwa nieskończenie bliskie punkty téj linii. Prosta, która przechodzi przez dwa nieskończenie bliskie punkty jakiéjkolwiek linii, nazywa się styczną do téj linii. Możemy zatym powiedziéć, że *miejscem gieometrycznym prostéj bieżącéj, któréj spółrzędne u, v czynią zadość równaniu* $F(u,v)=0$, *jest pewna linija — wogólności — krzywa, któréj prosta bieżąca wciąż dotyka.*

8. Podobnie, jak każde równanie między spółrzędnymi punktu lub linii prostéj przedstawia pewną, przez to równanie scharakteryzowaną, liniją, tak nawzajem, z własności charakterystycznéj pewnéj linii można wyprowadzić równanie téj linii. Jako przykład tego odwrotnego postępowania, może służyć sposób wyprowadzenia równania linii prostéj i punktu, podany w artykule 3. Wynika stąd, że jeżeli jest daną pewna linija, t. j. jeżeli znamy pewną jéj własność charakterystyczną, to zadanie gieometryi analitycznéj polega na tym, aby z téj własności charakterystycznéj wyprowadzić równanie téj linii, a następnie, przez rozbiór tego równania, dojść do znajomości wszystkich innych jéj własności gieometrycznych.

Według tego, czy równania między spółrzędnymi x i y punktu, lub spółrzędnymi u i v linii prostéj, są algiebraiczne, czytéż przestępne, nazywamy linije, przez te równania przedstawione, algiebraicznymi, lub przestępnymi. Przedmiotem naszych tu badań będą linije algiebraiczne.

Linije algiebraiczne zowiemy linijami rzędu n-ego, jeżeli stopień ich równań względem spółrzędnych punktu jest równy n; linije algiebraiczne zowiemy linijami klasy n-éj, jeżeli stopień ich równań względem spółrzędnych linii prostéj jest równy n.

Linije algiebraiczne rzędu n-ego można określić jeszcze jako linije, które jakakolwiek linija prosta przecina w n punktach; a linije algiebraiczne klasy n-éj jako linije, do których z jakiegokolwiek punktu można wyprowadzić n linij stycznych. Jakoż, otrzymamy spółrzędne punktu, w którym liniją rzędu n-ego przedstawioną przez równanie

$$f(x,y)=0$$

przecina prosta przedstawiona przez równanie

$$ux+vy+1=0,$$

gdy z tych dwu równań, uważanych jako równania o dwu niewiadomych x i y, wyznaczymy te niewiadome. Ponieważ piérwsze równanie jest z założenia n-ego, a drugie stopnia 1-ego względem x i y, to te dwa równania posiadają n par pierwiastków. Tyleż więc będzie punktów przecięcia.

Podobnie otrzymamy spółrzędne linij prostych, wychodzących z punktu przedstawionego przez równanie

$$xu + yv + 1 = 0,$$

a dotykających linii klasy n-éj przedstawionéj przez równanie

$$F(u, v) = 0,$$

gdy z tych dwu równań, uważanych jako równania o dwu niewiadomych u i v, wyznaczymy te niewiadome. Ponieważ piérwsze z tych równań jest stopnia 1-go, a drugie, z założenia, stopnia n-ego względem u i v, przeto te dwa równania posiadają n par pierwiastków. Tyleż więc będzie stycznych.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH.

PODANIA POMOCNICZE.

9. Jednym z najdzielniejszych środków badania własności figur gieometrycznych, zastąpionych przez równania, jest przekształcenie i uproszczenie tych równań zapomocą zmiany spółrzędnych, t. j. zapomocą przejścia od jednego układu spółrzędnych do innego. Dlatego téż, nim postąpimy daléj, wynajdziemy wzory, wyrażające spółrzędne punktu lub linii prostéj jednego układu przez spółrzędne punktu lub odpowiednio linii prostéj nowego układu. A że wyprowadzenie tych wzorów opiéra się na pewnym twierdzeniu z teoryi rzutów prostokątnych, przeto, określiwszy kilka pojęć zasadniczych, udowodnimy przedewszystkim to twierdzenie.

Liniją ograniczoną dwoma punktami A i B uważamy jako drogę przebieżoną przez punkt bieżący; tę drogę oznaczamy przez AB lub BA, według tego, czy punkt A czytéż punkt B bierzemy za punkt początkowy, a więc B czy A za punkt końcowy téj drogi. Jeżeli AB uważamy jako drogę o kierunku dodatnym, to natenczas należy BA uważać jako drogę o kierunku ujemnym; wskutek tego

$$\text{(1)} \qquad AB = -BA, \quad \text{lub} \quad AB + BA = 0.$$

Weźmy na téj saméj linii trzy punkty A, B, C; będzie wówczas, niezależnie od następstwa tych punktów,

$$\text{(2)} \qquad AB + BC + CA = 0.$$

Jakoż, jeżeli naprzód punkty te idą po sobie w porządku A, B, C, wówczas widocznie suma dróg AB i BC jest równa drodze AC, t. j. $AB + BC = AC$; a że, według (1), $AC = -CA$, zatym mamy $AB + BC + CA = 0$. Jeżeli powtóre punkty te idą po sobie w porządku A, C, B, mamy wówczas z tego samego powodu $AC + CB = AB$. A że $AC = -CA$ i $CB = -BC$, przeto i w tym przypadku będzie $AB + BC + CA = 0$. Jeżeli nareszcie uważane trzy punkty idą na linii w porządku C, A, B, mieć będziemy $CA + AB = CB$, lub, gdy $CB = -BC$, $AB + BC + CA = 0$. Wzór (2) utrzymuje się zatym w każdym przypadku.

Wiedząc to, możemy dowieść twierdzenia następującego:

Jeżeli $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *są n punktami na jednéj linii (prostéj lub krzywéj), wówczas, niezależnie od następstwa tych punktów, mamy*

$$\text{(3)} \qquad A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0.$$

Załóżmy bowiém, że wzór (3) ma miejsce dla $n = m$, a więc, że

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_m A_1 = 0,$$

i dodajmy jeszcze jeden punkt A_{m+1}. Ponieważ, według (2),

$$A_m A_1 + A_1 A_{m+1} + A_{m+1} A_m = 0, \quad \text{czyli}$$
$$A_m A_1 = A_m A_{m+1} + A_{m+1} A_1;$$

więc, wstawiwszy tę wartość na $A_m A_1$, otrzymamy

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_m A_{m+1} + A_{m+1}A_1 = 0.$$

A zatym, wzór (3), jeżeli jest prawdziwy dla $n = m$, będzie także prawdziwym i dla $n = m + 1$; że zaś, według (2), ma on miejsce dla $n = 3$, więc utrzyma się i dla $n = 4, 5, \dots$

10. Przez rzut prostokątny punktu na liniją prostą nieograniczoną rozumiemy spodek prostopadłéj, spuszczonéj z punktu na tę prostą. Prostą, na którą spuszczamy prostopadłą, nazywamy osią rzutu. Na osi rzutu rozróżniamy kierunek dodatny i kierunek ujemny.

Rzutem drogi jakiéjkolwiek jest odcinek osi rzutu, idący od rzutu punktu początkowego do rzutu punktu końcowego téj drogi. Według tego, czy kierunek tego odcinka schodzi się z dodatnym, czytéż z ujemnym kierunkiem osi rzutu, rzut drogi uważanéj będzie dodatny, lubtéż ujemny.

Rzut drogi prostolinijowéj jest, co do wartości liczebnéj i co do znaku, równy długości drogi, pomnożonéj przez dostawę kąta, który kierunek drogi tworzy z kierunkiem dodatnym osi rzutu.

Twierdzenie niniejsze jest widoczne, gdy początek drogi leży na osi rzutu, wyraża bowiém tę własność trójkąta prostokątnego, że przyprostokątna jest równa przeciwprostokątnéj, pomnożonéj przez dostawę kąta przyległego przyprostokątnéj. Jeżeli zaś punkt początkowy drogi nie leży na osi rzutu, wówczas przez ten punkt należy poprowadzić równoległą do osi rzutu aż do przecięcia się z prostopadłą, spuszczoną na oś rzutu z punktu końcowego drogi. Ta równoległa jest równą i równoległą do rzutu drogi i widocznie równą drodze pomnożonéj przez dostawę kąta, zawartego między kierunkiem téj drogi i kierunkiem dodatnym osi rzutu.

Rzut wielokąta zamkniętego jest równy 0.

To twierdzenie należy tak rozumiéć, że jeżeli wielokąt $P_1P_2P_3 \dots P_n$ będziemy uważali jako drogę, przebieżoną przez punkt bieżący w pewnym kierunku (wskutek czego każdy wiérzchołek będzie punktem końcowym drogi prostolinijowéj, poprzednio przebieżonéj, i zarazem punktem początkowym drogi prostolinijowéj, przebieżonéj bespośrednio po tamtéj), to suma algiebraiczna rzutów jego boków $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ i P_nP_1 będzie równa 0.

Aby dowiéść tego twierdzenia, oznaczmy przez $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ rzuty wiérzchołków $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ i uważmy, że $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ są rzutami boków $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$. Ponieważ, według wzoru (3), podanego w artykule poprzedzającym,

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 = 0,$$

przeto istotnie rzut wielokąta jest równy 0.

Ostatnia równość daje

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots\ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$$

a zatym *rzut drogi łamanéj* $P_1P_2P_3 \ldots . P_n$ *jest równy rzutowi prostéj, łączącéj punkt początkowy* P_1 *z punktem końcowym* P_n *téj drogi łamanéj.*

Z tego twierdzenia wypływa wniosek: *Rzuty dwu dróg łamanych, łączących spólny punkt początkowy ze spólnym punktem końcowym, są sobie równe.*

Twierdzenia niniejsze utrzymują się i wtedy, gdy wielokąt nie jest płaski, t. j. gdy jego boki z osią rzutu nie leżą na jednéj i téj saméj płaszczyźnie; należy wtedy przez kąt między dwiema prostymi, które się nie przecinają, rozumiéć kąt między dwoma kierunkami, do tych prostych równoległymi, a z jednego punktu wychodzącymi.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH PUNKTU.

11. a. Zmiana początku spółrzędnych. Oznaczmy przez x i y spółrzędne (fig. 6) punku P względem układu osi OX i OY, a przez x' i y' spółrzędne tego samego punktu względem układu nowych osi O'X' i O'Y', przyjmując, że nowe osi są równoległe do dawnych, a ich kierunki dodatne w tę samę stronę zwrócone, O'X' równoległa do OX, O'Y' równoległa do OY. Jeżeli nadto x_0 i y_0 są spółrzędne początku O' spółrzędnych x' y' względem układu osi OX i OY, miéć będziemy

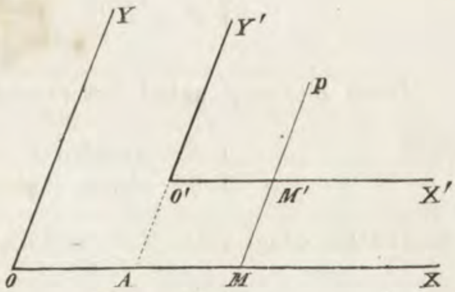


Fig. 6.

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= OM = OA + AM = OA + O'M' = x_0 + x', \\ y &= MP = MM' + M'P = AO' + M'P = y_0 + y'. \end{aligned}$$

A zatym, jeżeli równanie $f(x,y) = 0$ przedstawia pewną liniją, odniesioną do układu osi OX i OY, to równaniem téj saméj linii względem układu osi O'X' i O'Y' będzie $f(x_0 + x', y_0 + y') = 0$. Należy zauważyć, że stopień nowego równania, jeżeli jest ono algiebraiczne, względem x', y' będzie taki sam, jak stopień równania pierwotnego względem x i y.

b. Zmiana kierunków osi. Załóżmy następnie, że oba układy spółrzędnych mają spólny początek. Oznaczmy przez ω kąt między dodatnymi kierunkami OX i OY osi piérwszego układu, przez α i β kąty, jakie kierunki dodatne OX' i OY' osi drugiego układu tworzą z kierunkiem OX, i połóżmy (fig. 7)

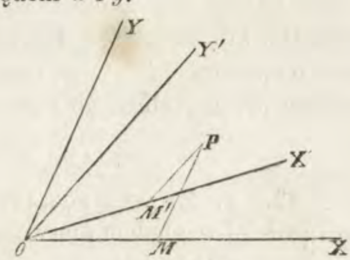


Fig. 7.

$$OM = x, \ MP = y, \ OM' = x', \ M'P = y'.$$

Aby wyrazić x i y przez x' i y', rzućmy dwie drogi łamane ONP i OM'P raz na kierunek OX, a drugi raz na kierunek prostopadły do OX. Ponieważ obie drogi łączą spólny spcząteк O ze spólnym końcem P, przeto rzuty obu dróg muszą być równe. Mamy zatym, po wstawieniu wartości powyższych,

$$x + y\cos\omega = x'\cos\alpha + y'\cos\beta,$$
$$y\sin\omega = x'\sin\alpha + y'\sin\beta,$$

skąd wypływa

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x'\sin(\omega-\alpha) + y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \\ y = \dfrac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\omega}, \end{cases}$$

i nawzajem

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x\sin\beta + y\sin(\beta-\omega)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y' = \dfrac{x\sin\alpha + y\sin(\alpha-\omega)}{\sin(\alpha-\beta)}. \end{cases}$$

Jeżeli piérwszy układ jest prostokątny $\left(\omega = \dfrac{\pi}{2}\right)$, mamy

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \\ y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta; \end{cases}$$

a jeżeli także drugi układ jest prostokątny $\left(\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, będzie

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

I tu należy zauważyć, że skoro wyrażenia (2) do (5) zawiérają spółrzędne obu układów w stopniu 1-szym, czyli, jak się pospolicie mówi, są linijowymi względem spółrzędnych obu układów, to równanie linii, odniesionéj do pewnego układu osi, co do stopnia nie zmieni się, gdy się zmieni kierunki osi tego układu.

c. Zmiana początku spółrzędnych i kierunków osi. W tym przypadku należy obie zmiany wykonać jednę po drugiéj, zaczynając od zmiany początku lub od zmiany kierunków osi, stosownie do potrzeby zachodzącéj. Łatwo spostrzéc, że i w tym najogólniejszym przypadku zmiany spółrzędnych stopień przekształcanego równania algiebraicznego nie ulegnie zmianie.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH LINII PROSTÉJ.

12. a. Zmiana początku spółrzędnych. Jeżeli u i v są spółrzędne linii prostéj względem pierwotnego układu osi, to równanie téj prostéj względem tego układu jest

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Aby otrzymać równanie prostéj względem nowego układu osi $O'X'$, $O'Y'$ (fig. 6), należy podstawić w poprzedzającym równaniu

$$x = x_0 + x', \; y = y_0 + y'.$$

Otrzymamy wtedy

$$ux' + vy' + (ux_0 + vy_0 + 1) = 0.$$

A zatym. jeżeli u' i v' są spółrzędne uważanéj prostéj względem nowego układu, mamy:

$$(1) \qquad u' = \frac{u}{ux_0 + vy_0 + 1}, \qquad v' = \frac{v}{ux_0 + vy_0 + 1},$$

skąd wypływa nawzajem

$$(2) \qquad u = \frac{u'}{1 - u'x_0 - v'y_0}, \qquad v = \frac{v'}{1 - u'x_0 - v'y_0}.$$

b. Zmiana kierunków osi. Jeżeli $ux + vy + 1$ jeżeli równanie linii względem układu XOY (fig. 7), to otrzymamy równanie téj prostéj względem układu X'OY', wstawiając za x i y wartości (2) artykułu poprzedzającego. Znajdziemy tym sposobem

$$\frac{u \sin(\omega - \alpha) + v \sin\alpha}{\sin\omega} x' + \frac{u \sin(\omega - \beta) + v \sin\beta}{\sin\omega} y' + 1 = 0.$$

A zatym, jeżeli u' i v' są spółrzędne prostéj względem układu X'OY', mamy

$$(3) \qquad u' = \frac{u \sin(\omega - \alpha) + v \sin\alpha}{\sin\omega}, \qquad v' = \frac{u \sin(\omega - \beta) + v \sin\beta}{\sin\omega},$$

skąd nawzajem wypływa

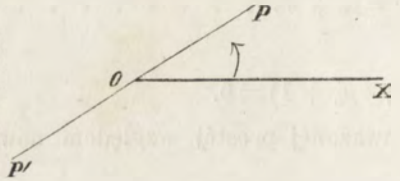
$$(4) \qquad u = \frac{u' \sin\beta - v' \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \qquad v = \frac{u' \sin(\omega - \beta) - v' \sin(\omega - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

c. Zmiana początku spółrzędnych i kierunku osi. W tym przypadku należy obie przemiany wykonać jednę po drugiéj, zaczynając, stosownie do potrzeby, od zmiany początku spółrzędnych lub od zmiany kierunku osi.

Należy zauważyć, że także przez zmianę spółrzędnych linii prostéj nie zmieni się wcale stopień równania algiebraicznego między tymiż spółrzędnymi, wzory bowiem (3) i (4) są linijowe względem spółrzędnych obu układów, a wzory (1) i (2), lubo ułamkowe, mają jednak spólny mianownik, który, podobnie jak i liczniki, jest linijowy względem spółrzędnych.

SPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE PUNKTU.

13. Do wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie używa się niekiedy także spółrzędnych biegunowych. W tym przypadku obiéra się na téj płaszczyźnie punkt stały O (fig. 8), zwany biegunem, i prostą stałą OX, zwaną osią biegunową, która wychodząc z punktu O rosciąga się do nieskończoności w jednym kierunku. Odległość punktu P od bieguna O, czyli t. z. promień wodzący OP, i kąt XOP, między promieniem wodzącym i osią biegunową, są spółrzędnymi punktu P.



Fg. 8.

Promień wodzący mierzy oddalenie punktu od bieguna i dlatego wyraża się przez liczbę bezwzględną. Kąt zaś ma wskazywać wielkość i kierunek obrotu, zapomocą którego promień obracający się około bieguna przechodzi z położenia OX do położonia OP; dlatego wyrazić go należy przez stosunek długości łuku kołowego, mierzącego ten obrot (wziętéj ze znakiem dodatnym lub ujemnym, według tego, czy kierunek obrotu jest dodatny, czyteż ujemny), do długości promienia tego łuku. Za kierunek dodatny obrotu przyjmujemy pospolicie ten, w którym należy przebiéc, od początku do końca, łuk kołowy, mierzący ten obrót, tak, ażeby miéć biegun po ręce lewéj, początek zaś łuku przyjmujemy na osi biegunowéj. Promień wodzący oznacza się zwykle przez r, a kąt przez θ. Widoczna, że do każdego punktu P należy tylko jedna wartość na promień wodzący, gdy tymczasem kąt jego może być powiększony lub zmniejszony o jakąkolwiek wielokrotność całkowitą liczby 2π. Naodwrót, do danego promienia wodzącego i danego kąta należy tylko jeden punkt na płaszczyźnie. Jeżeli więc a i b są dwie liczby rzeczywiste, z których piérwsza jest dodatną, natenczas dwa równania

$$(1) \qquad r=a \text{ i } \theta=b\pi$$

będą przedstawiały pewien, wzupełności wyznaczony, punkt na płaszczyźnie.

Piérwsze z tych równań wskazuje widocznie, że punkt przez nie przedstawiony leży na obwodzie koła, nakréślonego promieniem a z bieguna jako środka, a drugie wyraża, że ten punkt znajduje się na promieniu, który z osią tworzy kąt $b\pi$.

Jeżeli równania (1) przedstawiają punkt P (fig. 8), wtedy punkt P', leżący na wstecznym przedłużeniu promienia OP tak, iż OP'=OP, będzie przedstawiony przez równania

$$r=a \text{ i } \theta=b\pi+\pi.$$

14. Przejście od układu Descartes'a do układu biegunowego i odwrotnie. Dajmy, że kierunek dodatny osi x-ów układu Descartes'a jest równoległy do osi biegunowéj O'X' i zwrócony w tę samę stronę. Oznaczmy przez x_0 i y_0 spółrzędne OA i AO' bieguna O' względem układu XOY, a przez ω kąt między osiami OX i OY. Wyprowadźmy z punktu P prostą PM równoległą do OY i oznaczmy przez M i M' punkty, w których ta prosta przecina oś x-ów i oś biegunową O'X' i połączmy P z O'. Aby otrzymać związek między x=OM, y=MP z jednéj strony, a r=O'P, θ=X'O'P z drugiéj, rzućmy trójkąt O'M'P raz na oś x-ów, drugi raz na prostopadłą do osi x-ów. Ponieważ O'M' = AM = $x-x_0$, M'P = MP — AO' = $y-y_0$, otrzymamy

$$x-x_0+(y-y_0)\cos\omega = r\cos\theta,$$
$$(y-y_0)\sin\omega = r\sin\theta.$$

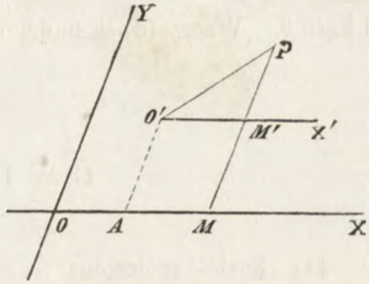


Fig. 9.

Stąd wypływa

$$(2)\quad x-x_0=\frac{r\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega},\quad y-y_0=\frac{r\sin\theta}{\sin\omega}$$

i nawzajem

$$(3)\quad \begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2(x-x_0)(y-y_0)\cos\omega}, \\ \cos\theta &= \frac{x-x_0+(y-y_0)\cos\omega}{r}, \qquad \sin\theta=\frac{(y-y_0)\sin\omega}{r}, \end{aligned}$$

W tym wyrażeniu na r należy wziąć wartość bezwzględną pierwiastka.

W przypadku szczególnym, a najczęstszego użycia, kiedy układ Descartes'a jest prostokątny $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$ i kiedy biegun O' znajduje się w początku O ($x_0=y_0=0$), wzory (2) i (3) przechodzą na prostsze

$$(4)\qquad x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

$$(5)\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r}.$$

Uwaga. Uważmy, że piérwsze równanie (3), t. j.

$$(6)\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2(x-x_0)(y-y_0)\cos\omega},$$

a w układzie prostokątnym $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$

$$(6')\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

daje nam odległość punktu, którego spółrzędne Descartes'a są x i y, od punktu, którego te spółrzędne są x_0 i y_0.

Z równań (2) wyznaczymy także spółrzędne (x, y) punktu bieżącego na prostéj, która wychodzi z punktu o spółrzędnych (x_0, y_0) i tworzy z osią x-ów kąt θ.

Oznaczając

$$(7)\qquad l=\frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega},\qquad m=\frac{\sin\theta}{\sin\omega},$$

możemy równania (2) tak pisać

(8) $$x = x_0 + lr, \qquad y = y_0 + mr.$$

W tych równaniach r oznacza zmienną odległość punktu bieżącego (x, y) od punktu (x_0, y_0), zaś l i m zależą, według (7), tylko od kierunku prostéj, t. j. od kąta θ. Wzory (8) są nader użyteczne.

ĆWICZENIA.

---

(1) Znaléść spółrzędne (u, v) prostéj i odcinki (a, b) odmierzone przez prostą, przedstawioną przed równanie $3x - y + 2 = 0$, na osiach spółrzędnych.

(2) Znaléść spółrzędne środka odległości między dwoma danymi punktami (x', y') i (x'', y'').

(3) Znaléść miejsce punktu równooddalonego od dwu punktów danych A i B.

(4) Znaléść miejsce wiérzchołka trójkąta, w którym jest dana podstawa i różnica kwadratów dwu pozostałych boków.

(5) W trójkącie jest dana podstawa $AB = 2a$ i suma dwu pozostałych boków $AC + CB = m$; na prostopadłéj CD do AB obiéramy punkt P taki, aby było $DP = AC$: znaléść miejsce punktu P.

(6) Znaléść miejsce punktu bieżącego, którego odległość od punktu danego pozostaje niezmienną.

(7) Znaléść miejsce punktu bieżącego P, którego suma lub różnica odległości od dwu punktów danych A i B jest niezmienną.

(8) Znaléść miejsce punktu równooddalonego od punktu danego i od danéj prostéj.

(9) Spółrzędne punktu czynią zadość równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$; przerobić to równanie przez przeniesienie początku spółrzędnych do punktu (2, 3).

(10) Równanie $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$ jest odniesione do osi, tworzących kąt $\frac{\pi}{3}$; przerobić to równanie, przyjąwszy dwusieczne kątów między dawnymi osiami za osi nowe.

(11) Równanie we spółrzędnych prostokątnych punktu $x^2 - y^2 = a^2$ przerobić przez wprowadzenie spółrzędnych biegunowych.

(12) Równanie we spółrzędnych biegunowych $r^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}\theta = a^{\frac{1}{2}}$ przerobić przez wprowadzenie spółrzędnych prostokątnych.

ROZDZIAŁ II.

O PUNKCIE I O LINII PROSTÉJ.

RÓWNANIE LINII PROSTÉJ.

15. Równanie stopnia 1-ego między spółrzędnymi nieoznaczonymi x i y punktu bieżącego

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

przedstawia liniją prostą. Położenie téj linii prostéj zależy od stosunków $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ i $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ między spółczynnikami A, B, C. A mianowicie, jeżeli oznaczmy

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=-\frac{1}{a}, \qquad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}=-\frac{1}{b},$$

skąd wypada

$$\text{(2)} \qquad a=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}, \qquad b=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}},$$

to a i b będą wartościami odcinków OR i OS (fig. 10), które prosta przedstawioną przez równanie (1) odmierza na osiach x-ów i y-ów.

Wprowadziwszy te odcinki do równania (1), otrzymamy równanie symetryczne linii prostéj

$$\text{(3)} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

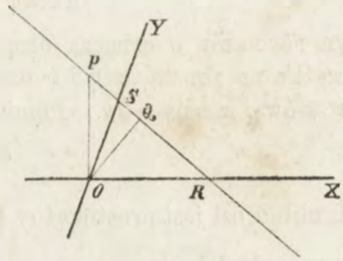


Fig. 10.

Oznaczmy przez α kąt dodatny XRS, jaki prosta RS tworzy z osią x-ów a kąt XOY przez ω. Z trójkąta ORS wypada

$$\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OR}}=\frac{\sin \mathrm{ORS}}{\sin \mathrm{OSR}}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)},$$

lub wskutek (2)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}=\frac{A}{B};$$

skąd wypływa

(4) $$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A\sin\omega}{B-A\cos\omega},$$

a w przypadku szczególnym, kiedy układ osi jest prostokątny $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$,

(5) $$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{A}{B}.$$

Jeżeli więc równanie ogólne (1) linii prostéj rozwiążemy względem y i dla skrócenia nazwiemy $-\frac{A}{B}=m$, $-\frac{C}{B}=b$, to otrzymamy równanie

(6) $$y=mx+b,$$

w którym spółczynnik m zależy jedynie od kierunku prostéj i dlatego nazywa się spółczynnikiem kierunkowym, a b oznacza odcinek, odmierzony przez prostą na osi y-ów. Równanie (6) zowie się równaniem zwyczajnym linii prostéj. Jeżeli $b=0$, równanie (6) sprowadza się do

(7) $$y=mx$$

i przedstawia prostą, przechodzącą przez początek spółrzędnych.

16. Spuśćmy z początku O prostopadłą OQ na prostą RS (fig. 10) i połóżmy

$$OQ=p, \qquad \angle XOQ=\varphi, \qquad \angle QOY=\psi.$$

Z trójkątów prostokątnych ORQ i OQS wypada

$$OQ=OR\cos ROQ=OS\cos QOS, \text{ t. j.}$$

(8) $$p=a\cos\varphi=b\cos\psi.$$

Jeżeli zapomocą tych równań wyrugujemy a i b z równania symetrycznego (3) linii prostéj, otrzymamy t. z. równanie normalne linii prostéj

(9) $$x\cos\varphi+y\cos\psi-p=0.$$

W tym równaniu p oznacza długość prostopadłéj (normalnéj), spuszczonéj z początku na prostą, a φ i ψ oznaczają kąty, jakie ta prostopadła tworzy z osią x-ów i z osią y-ów. Pomiędzy kątami φ i ψ zachodzi związek

(10) $$\varphi+\psi=\omega.$$

Jeżeli układ osi jest prostokątny $\left(\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, równanie normalne prostéj sprowadza się do

(11) $$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0.$$

Związek $\varphi+\psi=\omega$, zachodzący między kątami φ i ψ, jakie prostopadła OQ do prostéj RS czyni z osią x-ów i y-ów, zastąpmy następującym:

$$\cos^2\omega = \cos^2(\varphi + \psi) = (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi)^2,$$

t. j. $$\cos^2\omega = \cos^2\varphi \cos^2\psi + \sin^2\varphi \sin^2\psi - 2\cos\varphi \cos\psi \sin\varphi \sin\psi,$$

i podstawmy w tym związku $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, $\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi$; wtedy, po uskutecznieniu łatwych uproszczeń, otrzymamy

$$\sin^2\omega = \cos^2\varphi + \cos^2\psi - 2\cos\varphi \cos\psi \cos\omega.$$

Z tego równania i z równań (8) wypadają następujące wartości na p, $\cos\varphi$ i $\cos\psi$:

(12) $$\left\{ \begin{aligned} p &= \frac{ab\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}, \\ \cos\varphi &= \frac{b\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}, \\ \cos\psi &= \frac{a\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}. \end{aligned} \right.$$

W tych wzorach, wyrażających p, φ, ψ przez odcinki a i b, jakie prosta odmierza na osiach spółrzędnych, należy wziąć pierwiastek z takim znakiem, aby wartość na p wypadła dodatną.

Podstawiwszy we wzorach (12) za a i b wartości (2), podane w art. 15, otrzymamy

(13) $$\frac{\cos\varphi}{A} = \frac{\cos\psi}{B} = \frac{p}{-C} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

lub, gdy układ osi jest prostokątny $\left(\omega = \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}\right)$,

(14) $$\frac{\cos\varphi}{A} = \frac{\sin\varphi}{B} = \frac{p}{-C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

W tych wzorach, wyrażających p, φ, ψ przez spółczynniki A, B, C równania ogólnego linii prostéj, należy wziąć pierwiastek ze znakiem przeciwnym znakowi spółczynnika C, ażeby p wypadło dodatne.

Równania (13) i (14) wskazują, że chcąc równanie ogólne (1) linii prostéj zamienić na normalne, dość pomnożyć to równanie przez $\mu = \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}$ lub przez $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, według tego, czy układ osi nie jest, czytéż jest prostokątny.

17. Weźmy na prostéj RS (fig. 10) jakikolwiek punkt P i, przyjąwszy początek O za biegun, a oś x-ów za oś układu spółrzędnych biegunowych, nazwijmy $OP = r$, $\angle XOP = \theta$. Z trójkąta prostokątnego OQP wypada

$$OP \cos QOP = OQ \quad \text{t. j.}$$

(15) $$r\cos(\theta - \varphi) = p.$$

To równanie jest równaniem **biegunowym** linii prostéj, wyznaczonéj przez jéj odległość prostopadłą p od bieguna O i przez kąt φ, jaki ta prostopadła czyni z osią OX.

Nawzajem, równanie między spółrzędnymi biegunowymi punktu r, θ kształtu

$$r(\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta) = \mathrm{C}, \tag{16}$$

w którym A, B, C oznaczają liczby dane, przedstawia liniją prostą; jeżeli bowiém w tym równaniu podstawimy

$$\mathrm{A} = \mathrm{D}\cos\varphi, \quad \mathrm{B} = \mathrm{D}\sin\varphi,$$

skąd nawzajem wynika

$$\mathrm{D} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}},$$

to otrzymamy

$$r\mathrm{D}\cos(\theta - \varphi) = \mathrm{C}, \quad \text{czyli} \quad r\cos(\theta - \varphi) = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = p,$$

a równanie to, jakeśmy dopiéroco okazali, przedstawia liniją prostą.

Inna, nader użyteczna, postać równania linii prostéj wypada ze wzorów, podanych w artykule 14. Mianowicie, jeżeli x_0 i y_0 są spółrzędnymi punktu danego na prostéj, która z osią x-ów czyni kąt α, wówczas mamy

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{17}$$

gdzie

$$l = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}, \quad m = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}. \tag{18}$$

Oba zaś stosunki (17) są równe odległości r punktu bieżącego (x, y) od punktu danego (x_0, y_0).

RÓWNANIE PUNKTU.

18. Jeżeli u i v są spółrzędnymi linii prostéj, wówczas równanie ogólne stopnia 1-ego między tymi spółrzędnymi

$$\mathrm{L}u + \mathrm{M}v + \mathrm{N} = 0 \tag{1}$$

przedstawia punkt. Położenie tego punktu zależy od stosunków $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ i $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ pomiędzy trzema spółczynnikami L, M, N; te bowiém stosunki są wartościami spółrzędnych Descartes'a punktu, przedstawionego przez równanie (1),

$$x = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}, \quad y = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}. \tag{2}$$

ZAGADNIENIA O PUNKCIE I O LINII PROSTÉJ.

19. Wypadki otrzymane w artykułach poprzedzających zastosujemy do rozwiązania kilku zagadnień.

Znaléść odległość prostopadłą punktu danego od prostéj danéj.

a. Załóżmy naprzód, że punkt jest dany przez swe spółrzędne (x', y'), a prosta przez równanie między spółrzędnymi punktu, oraz, że to równanie jest równaniem normalnym,

(1) $$x\cos\varphi + y\cos\psi - p = 0.$$

Przez punkt dany poprowadźmy prostą równoległą do danéj: równanie normalne téj drugiéj prostéj będzie kształtu

(2) $$x\cos\varphi + y\cos\psi - p' = 0;$$

kąty φ i ψ mają te same wartości, co w równaniu (1), gdy tymczasem odległość prostopadła początku od prostéj (2), t. j. p', jest odmienną od p. Ponieważ prosta (2) przechodzi przez punkt dany, zatym mamy

(3) $$x'\cos\varphi + y'\cos\psi - p' = 0.$$

Oznaczmy przez δ odległość prostopadłą punktu danego od prostéj danéj; natenczas będzie

$$\delta = \mp (p' - p)$$

lub, wstawiwszy za p' wartość z równania (3),

$$\delta = \mp (x'\cos\varphi + y'\cos\varphi - p).$$

W tym wyrażeniu należy wziąć znak wyższy lub niższy, według tego, czy punkt dany i początek spółrzędnych leżą z téj saméj strony, czyteż po stronach przeciwnych prostéj danéj; wtedy wartość na δ wypadnie w obu razach dodatną. Jeżeli zaś zapomocą znaków chcemy odróżnić, czy prostopadła δ leży po jednéj, czyteż po drugiéj stronie prostéj danéj, wówczas kładzie się zwykle

(4) $$\delta = - (x'\cos\varphi + y'\cos\psi - p).$$

Wskutek tego, wartość na δ wypadnie dodatna, jeżeli początek spółrzędnych i punkt (x', y') leżą z téj saméj strony prostéj danéj (1), a ujemna, jeżeli te dwa punkty leżą po stronach przeciwnych téj prostéj. A zatym: *jeżeli w lewą stronę równania normalnego prostéj za spółrzędne bieżące (x, y) wstawimy spółrzędne punktu danego (x', y') i wypadek podstawienia weźmiemy ze znakiem przeciwnym, to otrzymamy (co do wielkości i znaku) odległość prostopadłą punktu danego od téj prostéj.*

Jeżeli prosta jest dana przez równanie ogólne

(5) $$Ax + By + C = 0,$$

wówczas, przywiódszy to równanie naprzód do postaci normalnéj, znajdziemy, że odległość prostopadła punktu (x', y') od prostéj przedstawionéj przez równanie (5), co do długości i znaku, wyrazi się przez

(6) $$\delta = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}$$

Wszczególności, kiedy układ spółrzędnych jest prostokątny $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, będzie

(7) $$\delta = \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

W tych wyrażeniach należy wziąć pierwiastek ze znakiem spółczynnika C.

b. Dajmy teraz, że prosta jest dana przez swe spółrzędne u' i v', a punkt przez równanie między spółrzędnymi linii prostéj

(8) $$Lu + Mv + N = 0.$$

Ponieważ równanie prostéj o spółrzędnych u', v' jest

$$u'x + v'y + 1 = 0,$$

a spółrzędne punktu równania (8) są

$$x' = \frac{L}{N}, \qquad y' = \frac{M}{N},$$

więc mamy

(9) $$\delta = \frac{(Lu' + Mv' + N)\sin\omega}{N\sqrt{u'^2 + v'^2 - 2u'v'\cos\omega}}.$$

Jeżeli układ spółrzędnych jest prostokątny $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, to

(10) $$\delta = \frac{Lu' + Mv' + N}{N\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

A zatym: *jeżeli w lewą stronę równania punktu* $Lu + Mv + N = 0$, *odniesionego do układu prostokątnego, za spółrzędne bieżące* (u, v) *podstawimy spółrzędne prostéj danéj* (u', v'), *a wyrażenie to podzielimy przez* $N\sqrt{u'^2 + v'^2}$, *to otrzymamy (co do wielkości i znaku) odległość prostopadłą prostéj danéj od tego punktu.*

20. *Znaléść równanie prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty, dane przez spółrzędne* (x', y') *i* (x'', y''), *tudzież równanie punktu, w którym się przecinają dwie proste, dane przez spółrzędne* (u', v') *i* (u'', v'').

a. Niech

(1) $$Ax + By + C = 0$$

będzie równaniem żądanéj prostéj. Skoro ta prosta przechodzi przez punkt (x', y') i przez punkt (x'', y''), zatym mamy

$$Ax' + By' + C = 0,$$
$$Ax'' + By'' + C = 0.$$

Dwa ostatnie równania dają

$$\frac{A}{y' - y''} = \frac{B}{x'' - x'} = \frac{C}{x'y'' - x''y'}.$$

Wstawiwszy te wartości za A : B : C w równanie (1), znajdziemy równanie szukane

(2) $$x(y'-y'')+y(x''-x')+x'y''-x''y'=0$$

czyli, używając znakowania wyznacznikowego,

(2') $$\begin{vmatrix} x\ , & y\ , & 1 \\ x'\ , & y'\ , & 1 \\ x''\ , & y''\ , & 1 \end{vmatrix}=0;$$

równanie to można jeszcze przedstawić w postaci

(2'') $$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Spółrzędne zaś żądanéj prostéj są

(3) $$u=\frac{y'-y''}{x'y''-x''y'},\qquad v=\frac{x''-x'}{x'y''-x''y'}.$$

b. Równanie punktu przecięcia się dwu prostych o spółrzędnych (u', v') i (u'', v'') jest także wypadkiem rugowania L : M : N z trzech równań

$$\begin{aligned} \mathrm{L}u+\mathrm{M}v+\mathrm{N}&=0,\\ \mathrm{L}u'+\mathrm{M}v'+\mathrm{N}&=0,\\ \mathrm{L}u''+\mathrm{M}v''+\mathrm{N}&=0, \end{aligned}$$

a mianowicie

(4) $$\begin{vmatrix} u\ , & v\ , & 1 \\ u'\ , & v'\ , & 1 \\ u''\ , & v''\ , & 1 \end{vmatrix}=0,$$

lub, rozwinąwszy wyznacznik,

(4') $$u(v'-v'')+v(u''-u')+u'v''-u''v'=0;$$

spółrzędne zaś tego punktu są

(5) $$x=\frac{v'-v''}{u'v''-u''v'},\qquad y=\frac{u''-u'}{u'v''-u''v'}.$$

21. *Znaléść spółrzędne punktu przecięcia się dwu prostych, danych przez równania, tudzież spółrzędne prostéj przechodzącéj przez dwa punkty, dane przez równania.*

a. Jeżeli x', y' są spółrzędnymi punktu, w którym przecinają się proste, przedstawione przez równania

(1) $$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \quad \text{i} \quad \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'=0,$$

natenczas mamy

$$\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}=0 \quad \text{i} \quad \mathrm{A}'x'+\mathrm{B}'y'+\mathrm{C}'=0.$$

Te dwa równania z dwiema niewiadomymi x', y' dają:

$$(2) \qquad x' : y' : 1 = \begin{vmatrix} B, & C \\ B', & C' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C, & A \\ C', & A' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{vmatrix}$$

Jeżeli $AB' - A'B = 0$, wówczas wartości na x' i y' wypadną nieskończone; dane proste są więc równoległe. Jeżeli nadto $BC' - B'C = 0$ i $CA' - C'A = 0$, wówczas wyrażenia na x', y' przybiérają postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$; dane proste w tym przypadku przystają do siebie. Należy zauważyć, że jeżeli dwa z tych trzech warunków $AB' - A'B = 0$, $BC' - B'C = 0$ i $CA' - C'A = 0$ są dopełnione, wtedy i trzeciemu staje się zadość; albowiém np. z dwu piérwszych mamy $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, skąd wynika trzecie równanie warunkowe.

b. Podobnie, jeżeli u', v' są spółrzędnymi prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty, przedstawione przez równania

$$(3) \qquad Lu + Mv + N = 0 \quad i \quad L'u + M'v + N' = 0,$$

to wówczas mamy

$$Lu' + Mv' + N = 0 \quad i \quad L'u' + M'v' + N' = 0,$$

skąd wypada

$$(4) \qquad u' : v' : 1 = \begin{vmatrix} M, & N \\ M', & N' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} N, & L \\ N', & L' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} L, & M \\ L', & M' \end{vmatrix}$$

22. *Wyznaczyć kąt między dwiema prostymi, danymi przez równania.* Niech

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0 \quad i \quad A'x + B'y + C' = 0$$

będą równaniami dwu danych prostych. Oznaczmy przez φ, φ' kąty, jakie z dodatnym kierunkiem osi x-ów czynią kierunki prostopadłych z początku O na nie spuszczonych, a przez γ kąt, zawarty między tymi dwiema prostopadłymi. Kąt γ jest zarazem jednym z kątów spełniających się, które proste dane tworzą z sobą.

Podług art. 17 mamy

$$\cos\varphi = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}, \quad \text{a przeto } \sin\varphi = \frac{A\cos\omega - B}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{A'\sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}, \quad \text{a przeto } \sin\varphi' = \frac{A'\cos\omega - B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}};$$

lecz $\gamma = \pm(\varphi' - \varphi)$, zatym

$$\cos\gamma = \cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin\varphi \quad i \quad \sin\gamma = \pm(\sin\varphi' \cos\varphi - \cos\varphi' \sin\varphi);$$

wstawiwszy więc tu wartości powyższe, otrzymamy

$$
(2)\begin{cases}
\cos\gamma = \dfrac{AA' + BB' - (AB' + A'B)\cos\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\,\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}},\\[2ex]
\sin\gamma = \pm\,\dfrac{(AB'-A'B)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\,\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}}, \quad \text{a stąd}\\[2ex]
\operatorname{tg}\gamma = \pm\,\dfrac{(AB'-A'B)\sin\omega}{AA'+BB'-(AB'+A'B)\cos\omega}.
\end{cases}
$$

Z tych wyrażeń wypada

$$(3)\qquad AB' - A'B = 0$$

jako warunek równoległości, zaś

$$(4)\qquad AA' + BB' - (AB' + A'B)\cos\omega = 0$$

jako warunek prostopadłości dwu prostych danych. Jeżeli układ osi jest prostokątny, warunek prostopadłości (4) sprowadza się do

$$(5)\qquad AA' + BB' = 0.$$

A zatym, dwie proste, przedstawione przez równania

$$(6)\qquad y = mx + b \quad \text{i} \quad y = m'x + b',$$

będą do siebie prostopadłe, gdy

$$(7)\qquad 1 + mm' + (m + m')\cos\omega = 0,$$

lub

$$(8)\qquad 1 + mm' = 0,$$

według tego, czy układ osi nie jest, czytéż jest prostokątny.

23. *Znaléść odległość dwu punktów, danych przez równania.*

Spółrzędne punktów, przedstawionych przez równania

$$(1)\qquad Lu + Mv + N = 0 \quad \text{i} \quad L'u + M'v + N' = 0,$$

są $x = \frac{L}{N}$, $y = \frac{M}{N}$ i $x' = \frac{L'}{N'}$, $y' = \frac{M'}{N'}$; odległość d tych dwu punktów wyraża się zatym przez (art. 14.)

$$(2)\quad NN'.d = \sqrt{(LN'-L'N)^2 + (MN'-M'N)^2 + 2(LN'-L'N)(MN'-M'N)\cos\omega}.$$

24. *Wyrazić pole trójkąta przez spółrzędne (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) jego wiérzchołków* P_1, P_2, P_3.

Dajmy, że o b i e g trójkąta $P_1P_2P_3$ jest dodatny, t. j. że, przebiegając obwód w kierunku wskazanym przez następstwo P_1, P_2, P_3 wiérzchołków, mamy pole trójkąta po ręce lewéj, jak na załączonéj figurze 11. Z téj figury widzimy, że

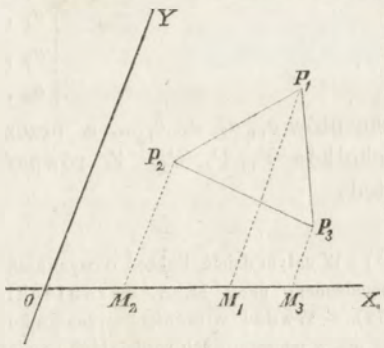


Fig. 11.

$$\triangle P_1P_2P_3 = \text{trapez } P_2M_2M_1P_1 + \text{trapez } P_1M_1M_3P_3 - \text{trapez } P_2M_2M_3P_3.$$

Trapez $P_2M_2M_1P_1$ stoi na podstawie $M_2M_1 = x_1 - x_2$ i ma średnią wysokość równą $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\sin\omega$; jego pole jest więc równe $\frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)\sin\omega$. Podobnie, pole trapezu $P_1M_1M_3P_3$ jest równe $\frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)\sin\omega$, a pole trapezu $P_2M_2M_3P_3$ równe $\frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_3 + y_2)\sin\omega$, lub $-\frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)\sin\omega$. Podstawiwszy te wartości, otrzymamy, co do wartości liczebnéj i co do znaku,

$$\begin{aligned}\triangle P_1P_2P_3 &= \frac{1}{2}\sin\omega\,[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]\\ &= \frac{1}{2}\sin\omega\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]\\ &= \frac{1}{2}\sin\omega\,[y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)],\end{aligned}$$

albo, używając znakowania wyznacznikowego,

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\sin\omega \begin{vmatrix} x_1 , & y_1 , & 1 \\ x_2 , & y_2 , & 1 \\ x_3 , & y_3 , & 1 \end{vmatrix}.$$

Jeżeliby obieg trójkąta $P_1P_2P_3$ był ujemny, wówczas, ażeby wartość pola wypadła dodatna, należałoby wyrażenie powyższe wziąć ze znakiem (—). Będzie wszakże konsekwentniéj, gdy się znaku nie zmieni i gdy się zatym pole trójkąta, i wogólności jakiegokolwiek wielokąta,uważać będzie za dodatne lub za ujemne, według tego, czy jego obieg, wskazany przez następstwo wiérzchołków, jest dodatny, czytéż ujemny.

25. *Wyrazić pole trójkąta przez spółczynniki w równaniach*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

jego boków P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2.

Oznaczmy przez A_1, A_2, A_3, B_1,... ilości dołączone w wyznaczniku*)

$$\begin{vmatrix} a_1 , & b_1 , & c_1 \\ a_2 , & b_2 , & c_2 \\ a_3 , & b_3 , & c_3 \end{vmatrix}$$

do elementów a_1, a_2, a_3, b_1,..., a przez (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), (x_3 , y_3) spółrzędne wiérzchołków P_1, P_2, P_3. Z równań boków, łącząc je po dwa, otrzymamy wtedy

*) W całym dziele, ilekroć o wyznacznikach jest mowa, trzymać się będziemy słownictwa przeprowadzonego przez M. A. Baranieckiego w jego pracy: *Teoryja wyznaczników* (Paryż, 1879). — Wykład własności wyznaczników, które przyjmujemy tu jako znane, czytelnik znajdzie tak w początkowych rozdziałach wzmiankowanéj książki, jak i w *Algiebrze* seryi III »Biblijoteki mat.-fiz.«

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1},\quad y_1 = \frac{B_1}{C_1};\quad x_2 = \frac{A_2}{C_2},\quad y_2 = \frac{B_2}{C_2};\quad x_3 = \frac{A_3}{C_3},\quad y_3 = \frac{B_3}{C_3}.$$

Pole zaś trójkąta znajdziemy, gdy te wartości na x_1, y_1; $x_2\, y_2$; x_3, y_3 wstawimy w wyrażenie podane w artykule poprzedzającym; będzie zatym

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{\sin\omega}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & B_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = \frac{\sin\omega}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

26. *Znaléść warunek, pod jakim prosta przechodzi przez punkt przecięcia się dwu prostych, i warunek, pod jakim punkt leży na prostéj łączącéj dwa punkty dane.*

Te warunki wynikają bespośrednio z dwu artykułów poprzedzających; albowiém, jeżeli trzy proste przecinają się w jednym punkcie, to pole trójkąta, zamkniętego przez te proste, jest równe 0; podobnie, jeżeli trzy punkty leżą na jednéj prostéj, to pole trójkąta, mającego te punkty za wiérzchołki, jest równe 0. Warunki te możemy otrzymać wprost w sposób następujący.

Jeżeli prosta

$$(1)\qquad Ax + By + C = 0$$

przechodzić ma przez punkt przecięcia się prostych

$$(2)\qquad A'x + B'y + C' = 0 \quad\text{i}\quad A''x + B''y + C'' = 0,$$

natenczas wartości na x i y, otrzymane z dwu ostatnich równań, muszą uczynić zadość równaniu piérwszemu; a zatym musi być

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

To samo równanie warunkowe otrzymamy przez wyrugowanie dwu ilości nieoznaczonych $\varkappa : \varkappa' : \varkappa''$ z równań

$$(4)\qquad \begin{cases} \varkappa A + \varkappa' A' + \varkappa'' A'' = 0, \\ \varkappa B + \varkappa' B' + \varkappa'' B'' = 0, \\ \varkappa C + \varkappa' C' + \varkappa'' C'' = 0; \end{cases}$$

z tego zaś wynika, że jeżeli trzy ostatnie równania mają miejsce, to także ma miejsce równanie (3).

Mnożąc równania (4) odpowiednio przez x, y, 1 i dodając iloczyny, znajdziemy

$$(5)\qquad \varkappa(Ax + By + C) + \varkappa'(A'x + B'y + C') + \varkappa''(A''x + B''y + C'') \equiv 0.$$

A zatym: *jeżeli istnieją takie trzy czynniki $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, iż wielomiany równań trzech prostych danych, przez nie pomnożone, dają sumę równą* 0, *wówczas warunek* (3) *jest dopełniony, a przeto te trzy proste przecinają się w jednym punkcie.* Należy to twierdzenie tak rozumiéć, że suma w lewéj stronie równości (5) jest tożsamościowo równa 0, t. j. przy wszelkich wartościach na x i y, gdyż tylko wtedy z równości (5) wypływają naodwrót równości (4). Z tego powodu użyliśmy we wzorze (5) znaku tożsamości ($\equiv$), zamiast znaku równości ($=$).

Podobnie, jeżeli punkt

(6) $$Lu + Mv + N = 0$$

ma leżéć na prostéj, łączącéj dwa punkty

(7) $$L'u + M'v + N' = 0 \quad \text{i} \quad L''u + M''v + N'' = 0,$$

natenczas musi być

(8) $$\begin{vmatrix} L\ , M\ , N \\ L'\ , M'\ , N' \\ L''\ , M''\ , N'' \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie warunkowe (8) otrzymamy także jako wypadek rugowania $\varkappa : \varkappa' : \varkappa''$ z równań

(9) $$\varkappa L + \varkappa' L' + \varkappa'' L'' = 0, \quad \varkappa M + \varkappa' M' + \varkappa'' M'' = 0, \quad \varkappa N + \varkappa' N' + \varkappa'' N'' = 0.$$

A zatym: *jeżeli istnieją trzy takie czynniki* $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, *iż wielomiany równań* (6) *i* (7) *trzech punktów danych, przez nie pomnożone, dają sumę tożsamościowo równą* 0,

(10) $$\varkappa(Lu + Mv + N) + \varkappa'(L'u + M'v + N') + \varkappa''(L''u + M''v + N'') \equiv 0,$$

natenczas warunek (8) *jest dopełniony, a przeto trzy punkty dane leżą na jednéj prostéj.*

Jeżeli, dla skrócenia, przez D oznaczymy wyrażenie stopnia 1-ego względem spółrzędnych punktu x i y, t. j.

(11) $$D \equiv Ax + By + C,$$

a przez P wyrażenie stopnia 1-ego względem spółrzędnych linii prostéj u i v, t. j.

(12) $$P \equiv Lu + Mv + N,$$

natenczas $D = 0$ będzie równaniem s k r ó c o n y m prostéj D o spółrzędnych $u = \frac{A}{C}$, $v = \frac{B}{C}$, a $P = 0$ będzie równaniem s k r ó c o n y m punktu P o spółrzędnych $x = \frac{L}{N}$, $y = \frac{M}{N}$, wypadki zaś dopiéroco otrzymane będziemy mogli tak wypowiedziéć:

Jeżeli trzy proste $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ *przechodzą przez jeden punkt, lub jeżeli trzy punkty* $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ *leżą na jednéj prostéj, natenczas istnieją trzy liczby* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, *przy których zachodzi tożsamość* $\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 \equiv 0$, *lub odpowiednio* $\varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 \equiv 0$.

Naodwrót: *jeżeli istnieją trzy liczby* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, *przy których zachodzi tożsamość* $\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 \equiv 0$, *lub* $\varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 \equiv 0$, *natenczas trzy pro-*

ste D_1, D_2, D_3 *przechodzą przez jeden punkt, lub odpowiednio trzy punkty* P_1, P_2, P_3 *leżą na jednéj prostéj.*

27. Z twierdzenia tylkoco wypowiedzianego wynika następujące:

Jeżeli

$$(1) \qquad D_1 \equiv u_1 x + v_1 y + 1 = 0 \quad i \quad D_2 \equiv u_2 x + v_2 y + 1 = 0,$$

są równaniami dwu prostych danych D_1 *i* D_2, *natenczas równanie*

$$(2) \qquad D \equiv D_1 + \lambda D_2 \equiv (u_1 + \lambda u_2) x + (v_1 + \lambda v_2) y + (1 + \lambda) = 0,$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ, *przedstawia jakąkolwiek prostą* D, *która przechodzi przez punkt przecięcia się prostych* D_1 *i* D_2.

Z powodu wielkiéj ważności tego twierdzenia, dowiedziemy go jeszcze innym sposobem.

Naprzód, widocznie równanie (2) przedstawia jakąś liniją prostą, albowiém jest ono stopnia 1-ego względem spółrzędnych punktu x i y. Powtóre, prosta przedstawiona przez równanie (2) przechodzi przez punkt przecięcia się prostych (1), albowiém wartości na x i y, które czynią zadość jednocześnie obu równaniom (1), uczynią zadość i równaniu (2), t. j. punkt, w którym proste D_1 i D_2 przecinają się, leży na prostéj, przedstawionéj przez równanie (2). Nareszcie, gdy damy na λ wartość odpowiednią, równanie (2) będzie mogło przedstawiać pewną, jakąkolwiek zresztą, prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych D_1 i D_2.

Jakoż, weźmy pod uwagę prostą, która przechodzi przez punkt przecięcia się prostych D_1 i D_2 i nadto przez punkt, którego spółrzędne są np. x', y'. Mamy okazać, że można dać na λ taką wartość, aby równanie (2) przedstawiało tę prostą. Podstawiając w nie x' i y' za x i y

$$(3) \qquad \lambda = -\frac{D'_1}{D'_2} \equiv \frac{u_1 x' + v_1 y' + 1}{u_2 x' + v_2 y' + 1},$$

widzimy, iż ono zamienia się na

$$(4) \qquad \frac{D_1}{D'_1} - \frac{D_2}{D'_2} = 0$$

i przedstawia prostą, która przechodzi i przez punkt przecięcia się prostych D_1 i D_2 i przez punkt x', y'.

A zatym, jeżeli tylko damy na λ wartość odpowiednią, równanie (2) może przedstawiać jąkąkolwiek prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych (1).

Spółrzędne u i v prostéj D są widoczne

$$(5) \qquad u = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}.$$

Znajdziemy jeszcze znaczenie gieometryczne czynnika λ. Dajmy że SD_1 i SD_2 są danymi dwiema prostymi $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$, a SD jest prostą

$$D \equiv D_1 + \lambda D_2 = 0.$$

Z punktu bieżącego $P(x, y)$ na prostéj D spuśćmy prostopadłe PQ_1 i PQ_2 na proste SD_1 i SD_2. Oznaczając te prostopadłe przez δ_1 i δ_2, mamy w układzie prostokątnym, co do wielkości i co do znaku,

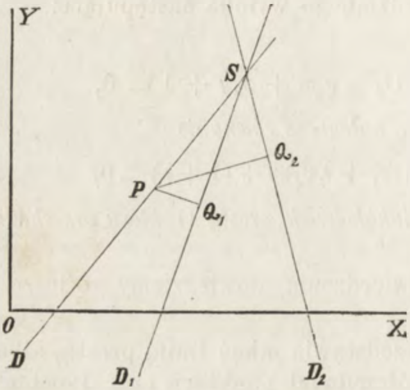


Fig. 12.

$$\delta_1 = \frac{u_1x + v_1y + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \equiv \frac{D_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

$$\delta_2 = \frac{u_2x + v_2y + 1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}} \equiv \frac{D_2}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}},$$

skąd

$$D_1 = \delta_1\sqrt{u_1^2 + v_1^2},\ D_2 = \delta_2\sqrt{u_2^2 + v_2^2}.$$

Atoli z równania

$$D_1 + \lambda D_2 = 0$$

wypada

$$\lambda = -\frac{D_1}{D_2}.$$

Jest więc

(6) $$\lambda = -\varkappa\frac{\delta_1}{\delta_2},$$

gdzie $\varkappa = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} : \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ jest czynnikiem stałym i dodatnym, od położenia prostéj D niezależnym. Wartość (6) na λ wypada ujemna lub dodatna według tego, czy prosta SD leży wewnątrz, czytéż zewnątrz tego kąta między SD_1 i SD_2, wewnątrz którego leży także początek spółrzędnych (art. 19). Oznaczmy przez DD_1 i DD_2 kąty DSD_1 i DSD_2. Gdy $\delta_1 \equiv PQ_1 = SP \sin DD_1$, $\delta_2 \equiv PQ_2 = SP \sin DD_2$, to

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sin DD_1}{\sin DD_2}.$$

Wstawiwszy tę wartość w wyrażenie (6), mieć będziemy także

(6') $$\lambda = -\varkappa\frac{\sin DD_1}{\sin DD_2}$$

28. Tak samo można dowieść twierdzenia analogicznego: *Jeżeli*

(1) $$P_1 \equiv x_1u + y_1v + 1 = 0 \quad i \quad P_2 \equiv x_2u + y_2v + 1 = 0$$

są równaniami dwu punktów P_1 *i* P_2, *natenczas równanie*

(2) $$P \equiv P_1 + \lambda P_2 \equiv (x_1 + \lambda x_2)u + (y_1 + \lambda y_2)v + (1 + \lambda) = 0,$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ, *przedstawia jakikolwiek punkt* P *na prostéj, łączącéj punkty* P_1 *i* P_2.

Istotnie, równanie (2) przedstawia, popiérwsze, punkt, gdyż jest stopnia 1-ego względem u i v. Powtóre, ten punkt leży i na prostéj przechodzącéj przez punkt P_1 i na prostéj przechodzącéj przez punkt P_2, albowiém wartości na u i v, czyniące zadość jednocześnie obu równaniom (1), uczynią zadość i równaniu (2). Nareszcie można na λ dać taką wartość, aby równanie (2) przedstawiało jakikolwiek punkt, oznaczony na prostéj P_1P_2.

Jakoż, weźmy na prostéj P_1P_2 jakikolwiek punkt, leżący także np. na prostéj o spółrzędnych u', v'. Mamy okazać, że na λ można dać taką wartość, aby równanie (2) przedstawiało ten punkt. Wstawiając w równanie (2) u' i v' za u i v, otrzymamy

$$\lambda = -\frac{P'_1}{P'_2} = -\frac{x_1u' + y_1v' + 1}{x_2u' + y'_2v' + 1}, \tag{3}$$

wskutek czego przechodzi ono na

$$\frac{P_1}{P'_1} - \frac{P_2}{P'_2} = 0, \tag{4}$$

i przedstawia właśnie punkt uważany.

Spółrzędne punktu (2) są

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{5}$$

Aby jeszcze znaléść znaczenie gieometryczne czynnika λ, oznaczmy przez P_1P i PP_2 długości odcinków, na jakie punkt P dzieli odległość P_1P_2 punktów (1). W założeniu, że układ osi jest prostokątny, mamy:

$$P_1P = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \qquad PP_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2};$$

stąd zaś wypada

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}, \tag{6}$$

t. j. odcinki P_1P i PP_2 będą miały ten sam kierunek, lub kierunki przeciwne, według tego, czy λ jest liczbą dodatną, czytéż ujemną.

29. Aby lepiéj wyjaśnić znaczenie i doniosłość tych twierdzeń, weźmy pod uwagę trójkąt $P_1P_2P_3$. Niech

$$D_1 \equiv x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0,$$
$$D_2 \equiv x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0,$$
$$D_3 \equiv x\cos\varphi_3 + y\sin\varphi_3 - p_3 = 0$$

będą równaniami normalnymi boków P_2P_3, P_3P_1 i P_1P_2 tego trójkąta we spółrzędnych prostokątnych, których początek przyjmujemy wewnątrz trójkąta. Podzielmy kąty wewnętrzne tego trójkąta linijami prostymi Δ_1, Δ_2, Δ_3 tak, aby, przy dodatnych m_1, m_2, m_3, było

$$\sin D_2\Delta_1 : \sin\Delta_1D_3 = m_3 : m_2,$$
$$\sin D_3\Delta_2 : \sin\Delta_2D_1 = m_1 : m_3,$$
$$\sin D_1\Delta_3 : \sin\Delta_3D_2 = m_2 : m_1;$$

równania prostych Δ_1, Δ_2, Δ_3 będą wtedy (art. 27)

$$\Delta_1 \equiv m_2 D_2 - m_3 D_3 = 0,$$
$$\Delta_2 \equiv m_3 D_3 - m_1 D_1 = 0,$$
$$\Delta_3 \equiv m_1 D_1 - m_2 D_2 = 0.$$

Suma tych trzech równań jest tożsamościowo równa 0, trzy proste Δ_1, Δ_2, Δ_3 przecinają się zatym w jednym punkcie (art. 26). Jeżeli te same kąty podzielimy prostymi Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 w stosunku takim, aby było

$$\sin D_2\Delta'_1 : \sin \Delta'_1 D_3 = -m_3 : m_2,$$
$$\sin D_3\Delta'_2 : \sin \Delta'_2 D_1 = -m_1 : m_3,$$
$$\sin D_1\Delta'_3 : \sin \Delta'_3 D_1 = -m_2 : m_1,$$

będzie wówczas

$$\Delta'_1 \equiv m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0,$$
$$\Delta'_2 \equiv m_3 D_3 + m_1 D_1 = 0,$$
$$\Delta'_3 \equiv m_1 D_1 + m_2 D_2 = 0.$$

Z tych równań widoczna, że także sumy algiebraiczne

$$\Delta'_2 - \Delta'_3 + \Delta_1, \quad \Delta'_3 - \Delta'_1 + \Delta_2 \quad \text{i} \quad \Delta'_1 - \Delta'_2 + \Delta_3$$

są tożsamościowe równe 0. Mamy zatym twierdzenie następujące:

Jeżeli kąty wewnętrzne P_1, P_2, P_3 *trójkąta* $P_1P_2P_3$ *podzielimy wewnętrznie i zewnętrznie na dwie części tak, aby wstawy tych części, co do wartości bezwzględnéj, były odpowiednio w stosunku* $m_3 : m_2$, $m_1 : m_3$ *i* $m_2 : m_1$, *to sześć prostych, tak otrzymanych, przecinają się po trzy w cztérech punktach; w jednym przecinają się proste, podziału wewnętrznego, a w każdym z trzech innych przecinają się dwie proste podziału zewnętrznego z jedną podziału wewnętrznego.*

Na bokach trójkąta P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 obierzmy po dwie pary punktów Π_1, Π'_1; Π_2, Π'_2; Π_3, Π'_3, dzielących te boki wewnętrznie i zewnętrznie w stosunkach, których wartości bezwzględne są równe $m_3 : m_2$, $m_1 : m_3$, $m_2 : m_1$; natenczas równania tych punktów podziału będą

$$\Pi_1 \equiv m_2 P_2 + m_3 P_3 = 0, \quad \Pi_2 \equiv m_3 P_3 + m_1 P_1 = 0, \quad \Pi_3 \equiv m_1 P_1 + m_2 P_2 = 0,$$
$$\Pi'_1 \equiv m_2 P_2 - m_3 P_3 = 0, \quad \Pi'_2 \equiv m_3 P_3 - m_1 P_1 = 0, \quad \Pi'_3 \equiv m_1 P_1 - m_2 P_2 = 0.$$

Ponieważ sumy $\Pi'_1 + \Pi'_2 + \Pi'_3$, $\Pi_2 - \Pi_3 + \Pi'_1$, $\Pi_3 - \Pi_1 + \Pi'_2$, $\Pi_1 - \Pi_2 + \Pi'_3$ są tożsamościowo równe zeru, przeto *sześć punktów trzech par podziału leżą po trzy na cztérech prostych.*

30. $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ *są równaniami trzech prostych, nie przecinających się w jednym punkcie: wyrazić równanie jakiéjkolwiek innéj prostéj* $D = 0$ *pod postacią*

$$\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 = 0.$$

Dość położyć w tym celu

$$D \equiv \varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3$$

i wyznaczyć liczby stałe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ zapomocą trzech równań

$$A = \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3,$$
$$B = \varkappa_1 B_1 + \varkappa_2 B_2 + \varkappa_3 B_3,$$
$$C = \varkappa_1 C_1 + \varkappa_2 C_2 + \varkappa_3 C_3,$$

na które roskłada się powyższa tożsamość. Te równania dają na $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ wartości skończone i oznaczone, gdyż, skoro dane trzy proste D_1, D_2, D_3 nie przecinają się w jednym punkcie, wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}$$

jest od 0 różny (art. 26).

Podobnie okazać możemy, że jeżeli $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ są równaniami trzech punktów, nie leżących na jednéj prostéj, na tenczas równanie jakiegokolwiek innego punktu można przedstawić pod postacią

$$P \equiv \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 = 0.$$

Zagadnienia niniejsze są niezmiernéj wagi; posłużą nam one także przy wprowadzeniu nowego układu spółrzędnych (rozdział IV).

31. Aby wykazać doniosłość zagadnienia art. 30, dowiedziemy następującego twierdzenia:

Jeżeli dwa trójkąty $P_1P_2P_3$ *i* $P'_1P'_2P'_3$ *są spółosiowe, t. j. takie, że boki odpowiednie tych dwu trójkątów* P_2P_3 *i* $P'_2P'_3$, P_3P_1 *i* $P'_3P'_1$, P_1P_2 *i* $P'_1P'_2$ *przecinają się w trzech punktach* Q_1, Q_2, Q_3, *leżących na jednéj prostéj (osi), to dwa te trójkąty są także spółbiegunowe, t. j. proste* $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$, *łączące pary odpowiednich wiérzchołków, przecinają się w jednym punkcie (biegunie), i naodwrót.*

Niech $D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0$ będą równaniami boków P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 piérwszego trójkąta. Równanie osi można wtedy przedstawić pod postacią $\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 = 0$. Ponieważ bok $P'_2P'_3$ trójkąta drugiego przechodzi przez punkt Q_1, w którym bok P_2P_3 trójkąta piérwszego przecina się z osią, to (art. 27) równanie tego boku będzie kształtu $(\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3) + mD_1 = 0$, lub $\varkappa'_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 = 0$. Otrzymujemy podobnie $\varkappa_1 D_1 + \varkappa'_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 = 0$ i $\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa'_3 D_3 = 0$, jako równania boków $P'_3P'_1$ i $P'_1P'_2 = 0$. Biorąc różnice każdych dwu z tych trzech równań, otrzymamy trzy równania następujące

$$(\varkappa'_2 - \varkappa_2)D_2 - (\varkappa'_3 - \varkappa_3)D_3 = 0, \quad (\varkappa'_3 - \varkappa_3)D_3 - (\varkappa'_1 - \varkappa_1)D_1 = 0,$$
$$(\varkappa'_1 - \varkappa_1)D_1 - (\varkappa'_2 - \varkappa_2)D_2 = 0.$$

Te trzy równania przedstawiają, wskutek swego pochodzenia, proste przechodzące odpowiednio przez wiérzchołki P'_1, P'_2, P'_3, wskutek zaś swego składu, proste przechodzące przez wiérzchołki P_1, P_2, P_3; są zatym równaniami prostych $P_1P'_1$, $P_2P'_2$ i $P_3P'_3$. A gdy suma tych równań jest tożsamościowo równa 0, to trzy te proste przecinają się w jednym punkcie, t. j. dwa dane trójkąty spółosiowe są także spółbiegunowymi.

Aby udowodnić twierdzenie odwrotne, t. j. że trójkąty spółbiegunowe są także spółosiowymi, postąpimy analogicznie, używając spółrzędnych linii prostéj zamiast spółrzędnych punktu.

Niech więc $P_1=0$, $P_2=0$, $P_3=0$ będą równaniami wiérzchołków trójkąta piérwszego; równanie bieguna można wtedy przedstawić pod postacią $\varkappa_1P_1+\varkappa_2P_2+\varkappa_3P_3=0$. Równania przeto wiérzchołków P'_1, P'_2, P'_3 trójkąta drugiego, jako punktów leżących na prostych, łączących biegun z wiérzchołkami P_1, P_2, P_3, są następujące (art. 28):

$$\varkappa'P_1+\varkappa_2P_2+\varkappa_3P_3=0,\quad \varkappa_1P_1+\varkappa'_2P_2+\varkappa_3P_3=0,\quad \varkappa_1P_1+\varkappa_2P_2+\varkappa'_3P_3=0.$$

Biorąc różnice każdych dwu z tych równań, otrzymamy

$$(\varkappa'_2-\varkappa_2)P_2-(\varkappa'_3-\varkappa_3)P_3=0,\quad (\varkappa'_3-\varkappa_3)P_3-(\varkappa'_1-\varkappa_1)P_1=0,$$
$$(\varkappa'_1-\varkappa_1)P_1-(\varkappa'_2-\varkappa_2)P_2=0.$$

Te równania przedstawiają, ze względu na swe pochodzenie, punkty leżące na bokach $P'_2P'_3$, $P'_3P'_1$, $P'_1P'_2$, a ze względu na swój skład, punkty leżące na bokach P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Przedstawiają więc one punkty przecięcia się odpowiednich boków dwu danych trójkątów. A gdy ich suma jest tożsamościowo równa 0, to trzy te punkty leżą na jednéj prostéj, t. j. dwa dane trójkąty spółbiegunowe są także spółosiowymi.

ĆWICZENIA.

(13). W równaniu prostéj $x+ay+1=0$, odniesionéj do układu osi, tworzących kąt $\frac{\pi}{3}$, wyznaczyć spółczynnik a tak, aby odległość prostopadła téj prostéj od początku była równa $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(14). Znaléść równanie dwusiecznych kątów, zawartych między dwiema prostymi danymi.

(15). Okazać, że dwusieczne kątów wewnętrznych i zewnętrznych trójkąta przecinają się po trzy w cztérech punktach.

(16). Znaléść równanie prostéj, łączącéj punkt (x_1, y_1) ze środkiem odległości dwu punktów danych (x_2, y_2) i (x_3, y_3).

(17). Okazać, że proste, łączące wiérzchołki trójkąta ze środkami boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.

(18). Znaléść we spółrzędnych prostokątnych równanie prostopadłéj, spuszczonéj z punktu (x_1, y_1) na prostą, łączącą dwa punkty dane (x_2, y_2) i (x_3, y_3).

(19). Okazać, że prostopadłe do boków trójkąta, spuszczone z wiérzchołków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.

(20). Znaléść we spółrzędnych prostokątnych równanie prostopadłéj do prostéj, łączącéj dwa punkty dane (x_1, y_1) i (x_2, y_2), w jéj środku.

(21). Okazać, że prostopadłe do boków trójkąta w ich środkach, przecinają się w jednym punkcie.

(22). Znaléść wartość stosunku B : A z warunku, aby prosta $Ax + By + C = 0$ tworzyła z prostą $2x - 3y + 1 = 0$ kąt $\frac{\pi}{4}$.

(23). Wyznaczyć kąt między dwiema prostymi: $\frac{a}{r} = 4\cos\theta + 3\sin\theta$ i $\frac{b}{r} = 3\cos\theta - 4\sin\theta$.

(24). Jeżeli tak wyznaczymy prostą, aby suma prostopadłych, z pewnych n punktów na nią spuszczonych, po pomnożeniu każdéj przez odpowiedni czynnik oznaczony, była równa 0, to taka prosta przejdzie przez pewien punkt stały.

(25). Dane są dwie proste stałe OA i OB, przecięte trzecią AB, ruchomą, lecz o kierunku stałym; na AB obiéramy punkt P taki, aby było $AP = n AB$: znaléść miejsce punktu P.

(26). Na osi x-ów jest dany punkt stały A, a na osi y-ów punkt stały B. Na piérwszéj osi bierzemy punkt A′, a na drugiéj B′ tak, aby było $OA' + OB' = OA + OB$: znaléść miejsce punktu, w którym się przecinają proste AB′ i A′B.

(27). Znaléść równanie biegunowe prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty dane (r_1, θ_1) i (r_2, θ_2).

(28). Dane są kąty trójkąta ABC, którego wiérzchołek A jest stały, a wiérzchołek B porusza się na prostéj stałéj: znaléść miejsce wiérzchołka C.

ROZDZIAŁ III.

O PĘKACH PROMIENI I O SZEREGACH PUNKTÓW.

STOSUNEK PODZIAŁU PODWÓJNEGO.

32. Proste, wychodzące z jednego punktu, nazywamy promieniami, a ich zbiór pękiem promieni, punkt zaś, z którego promienie wychodzą, nazywa się wiérzchołkiem pęku.

Jeżeli z wiérzchołka S kąta D_1SD_2, zawartego między promieniami SD_1 i SD_2, poprowadzimy jeszcze dwa promienie SD_3 i SD_4 i jeżeli promień SD_3 dzieli kąt D_1SD_2 na dwie części, których stosunek wstaw jest $\lambda:1$, a promień SD_4 dzieli tenże kąt na dwie części, których stosunek wstaw jest $\mu:1$, to natenczas stosunek $\lambda:\mu$ nazywamy stosunkiem podziału podwójnego kąta D_1SD_2 przez promienie SD_3 i SD_4, albo stosunkiem podziału podwójnego pęku cztérech promieni SD_1, SD_2, SD_3, SD_4. Oznaczać będziemy ten stosunek przez $(S\,.\,D_1D_2D_3D_4)$, lub, krócéj, przez $(D_1D_2D_3D_4)$, jeżeli nie zachodzi potrzeba wyraźnego wskazania wiérzchołka S tego pęku, a przez D_iD_k kąt D_iSD_k, zawarty między promieniami SD_i i SD_k, czyli, mówiąc krócéj, między promieniami D_i i D_k.

Według powyższego określenia, jest więc

$$(1)\qquad (D_1D_2D_3D_4)=\frac{\sin D_1D_3}{\sin D_3D_2}:\frac{\sin D_1D_4}{\sin D_4D_2}.$$

Zauważywszy, że kąty D_iD_k i D_kD_i należy brać ze znakami przeciwnymi (porządek bowiém liter wyraża tu kierunek obrotu promienia ruchomego, opisującego te kąty), łatwo sprawdzić równości następujące:

$$(2)\qquad (D_1D_2D_3D_4)=(D_2D_1D_4D_3)=(D_3D_4D_1D_2)=(D_4D_3D_2D_1)$$
$$=\frac{1}{(D_2D_1D_3D_4)}=\frac{1}{(D_1D_2D_4D_3)}=\frac{1}{(D_4D_3D_1D_2)}=\frac{1}{(D_3D_4D_2D_1)}.$$

Tak np.

$$(D_2D_1D_4D_3)=\frac{\sin D_2D_4}{\sin D_4D_1}:\frac{\sin D_2D_3}{\sin D_3D_1}=\frac{\sin D_3D_1}{\sin D_2D_3}:\frac{\sin D_4D_1}{\sin D_2D_4}$$

$$=\frac{\sin D_1D_3}{\sin D_3D_2}:\frac{\sin D_1D_4}{\sin D_4D_2}=(D_1D_2D_3D_4),\ \text{i t. d.},$$

$$(D_2D_1D_3D_4)=\frac{\sin D_2D_3}{\sin D_3D_1}:\frac{\sin D_2D_4}{\sin D_4D_1}=\frac{\sin D_3D_2}{\sin D_1D_3}:\frac{\sin D_4D_2}{\sin D_1D_4}$$

$$=\frac{\sin D_1D_4}{\sin D_4D_2}:\frac{\sin D_1D_3}{\sin D_3D_2}=\frac{1}{(D_1D_2D_3D_4)},\ \text{i t. d.}$$

Z wyrażenia (1) widzimy jeszcze, że stosunek podziału podwójnego jest dodatny albo ujemny, według tego, czy promienie D_3 i D_4 dzielą kąt D_1D_2 oba wewnętrznie, lub oba zewnętrznie, czytéż jeden wewnętrznie, a drugi zewnętrznie.

33. Zbiór punktów, leżących na jednéj linii prostéj, nazywamy *szeregiem prostolinijowym punktów*, albo krócéj, *szeregiem punktów*. Prosta, na któréj ten szereg punktów leży, nazywa się *podstawą* szeregu.

Jeżeli odcinek P_1P_2 podstawy, zawarty między punktami P_1 i P_2, jest podzielony przez punkt P_3 w stosunku $\lambda:1$, a przez punkt P_4 w stosunku $\mu:1$, natenczas stosunek $\lambda:\mu$ nazwiemy stosunkiem *podziału podwójnego odcinka* P_1P_2 przez punkty P_3 i P_4, albo *stosunkiem podziału podwójnego szeregu cztérech punktów* P_1, P_2, P_3, P_4; ten stosunek oznaczać będziemy przez $(P_1P_2P_3P_4)$.

Według tego określenia, mamy

(1) $$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}.$$

Ponieważ $P_iP_k=-P_kP_i$ (porządek bowiém liter wyraża tu kierunek ruchu punktu, kréślącego te odcinki), więc

(2) $$(P_1P_2P_3P_4)=(P_2P_1P_4P_3)=(P_3P_4P_1P_2)=(P_4P_3P_2P_1)$$
$$=\frac{1}{(P_2P_1P_3P_4)}=\frac{1}{(P_1P_2P_4P_3)}=\frac{1}{(P_4P_3P_1P_2)}=\frac{1}{(P_3P_4P_2P_1)}.$$

Z wyrażenia (1) widzimy, że stosunek podziału podwójnego wypadnie dodatny albo ujemny, według tego, czy punkty P_3 i P_4 dzielą odcinek P_1P_2 oba wewnętrznie, lub oba zewnętrznie, czytéż jeden wewnętrznie, a drugi zewnętrznie.

34. Niech

(1) $$D_1\equiv A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{i} \quad D_2\equiv A_2x+B_2y+C_2=0$$

będą równaniami promieni SD_1 i SD_2; równania promieni SD_3 i SD_4 można wtedy wyrazić przez (art. 27)

(2) $$D_3\equiv D_1+\lambda D_2=0 \quad \text{i} \quad D_4\equiv D_1+\mu D_2=0.$$

Ponieważ (art. 27)

$$\lambda = \varkappa \frac{\sin D_1 D_3}{\sin D_3 D_2}, \qquad \mu = \varkappa \frac{\sin D_1 D_4}{\sin D_4 D_2},$$

gdzie $\varkappa = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} : \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$, to stosunek podwójnego podziału pęku promieni D_1, D_2, D_3, D_4 wyrazi się

$$(3) \qquad (D_1 D_2 D_3 D_4) = \lambda : \mu.$$

Zależy więc on tylko od stosunku czynników λ i μ, wchodzących w równania promieni D_3 i D_4, złożone z równań promieni D_1 i D_2.

Jeżeli równania wszystkich cztérech promieni są złożone z równań dwu pewnych promieni D'_1, D'_2, t. j. jeżeli

$$(4) \qquad D_1 \equiv D'_1 + \lambda D'_2 = 0, \quad D_2 \equiv D'_1 + \mu D'_2 = 0,$$

$$(5) \qquad D_3 \equiv D'_1 + \lambda' D'_2 = 0, \quad D_4 \equiv D'_1 + \mu' D'_2 = 0,$$

to, chcąc wówczas otrzymać wartość $(D_1 D_2 D_3 D_4)$, należy równania (5) sprowadzić do kształtu (2), t. j. złożyć je z równań promieni D_1 i D_2. Podstawiając w tym celu w równania (5) wartości na D'_1 i D'_2, wypływające z wyrażeń (4), t. j.

$$D'_1 = \frac{\mu D_1 - \lambda D_2}{\mu - \lambda}, \qquad D'_2 = \frac{D_2 - D_1}{\mu - \lambda},$$

otrzymamy

$$D_3 \equiv \frac{(\mu - \lambda') D_1 + (\lambda' - \lambda) D_2}{\mu - \lambda}, \quad D_4 \equiv \frac{(\mu - \mu') D_1 + (\mu' - \lambda) D_2}{\mu - \lambda}.$$

Równania więc (4) i (5) można zastąpić przez równania

$$(4') \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = 0,$$

$$(5') \qquad D_3 \equiv (\mu - \lambda') D_1 + (\lambda' - \lambda) D_2 = 0, \quad D_4 \equiv (\mu - \mu') D_1 + (\mu' - \lambda) D_2 = 0,$$

z których wynika

$$(6) \qquad (D_1 D_2 D_3 D_4) = \frac{\lambda' - \lambda}{\mu - \lambda'} : \frac{\mu' - \lambda}{\mu - \mu'}.$$

35. Niech.

$$(1) \qquad P_1 \equiv L_1 u + M_1 v + N_1 = 0 \quad \text{i} \quad P_2 \equiv L_2 u + M_2 v + N_2 = 0$$

będą równaniami dwu punktów P_1 i P_2. Równania punktów P_3 i P_4 na prostéj, przez P_1 i P_2 przechodzącéj, wyrazić można przez

$$(2) \qquad P_3 \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0 \quad \text{i} \quad P_4 \equiv P_1 + \mu P_2 = 0.$$

Ponieważ (art. 28)

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} = \lambda \quad \text{i} \quad \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2} = \mu,$$

więc

$$(3) \qquad (P_1 P_2 P_3 P_4) = \lambda : \mu;$$

stosunek zatym podziału podwójnego szeregu punktów P_1, P_2, P_3, P_4 zależy jedynie od stosunków liczb λ i μ, wchodzących w równania punktów P_3 i P_4, złożone z równań punktów P_1 i P_2.

Jeżeli równania cztérech punktów dane są w postaci

$$(4) \qquad P_1 \equiv P'_1 + \lambda P'_2 = 0, \quad P_2 \equiv P'_1 + \mu P'_2 = 0,$$

$$(5) \qquad P_3 \equiv P'_1 + \lambda' P'_2 = 0, \quad P_4 \equiv P'_1 + \mu' P'_2 = 0,$$

natenczas, takim samym sposobem, jak w art. 34, znajdziemy, że

$$(6) \qquad (P_1P_2P_3P_4) = \frac{\lambda' - \lambda}{\mu - \lambda'} : \frac{\mu' - \lambda}{\mu - \mu'}.$$

36. Weźmy pod uwagę cztéry promienie pęku

$$(1) \qquad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad D_3 \equiv D_1 + lD_2 = 0, \quad D_4 \equiv D_1 + mD_2 = 0$$

i cztéry punkty szeregu

$$(2) \qquad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0, \quad P_4 \equiv P_1 + \mu P_2 = 0,$$

oraz załóżmy, że P_1 leży na D_1, P_2 na D_2, P_3 na D_3, P_4 na D_4.

Spółrzędne punktów (2) są odpowiednio

$$x_1 = \frac{L_1}{N_1}, \qquad y_1 = \frac{M_1}{N_1}; \qquad x_2 = \frac{L_2}{N_2}, \qquad y_2 = \frac{M_2}{N_2};$$

$$x_3 = \frac{L_1 + \lambda L_2}{N_1 + \lambda N_2}, \quad y_3 = \frac{M_1 + \lambda M_2}{N_1 + \lambda N_2}; \quad x_4 = \frac{L_1 + \mu L_2}{N_1 + \mu N_2}, \quad y_4 = \frac{M_1 + \mu M_2}{N_1 + \mu N_2}.$$

Podstawmy te wartości za x i y w odpowiednich rówaniach (1); otrzymamy

$$A_1L_1 + B_1M_1 + C_1N_1 = 0,$$

$$A_2L_2 + B_2M_2 + C_2N_2 = 0,$$

$$(A_1 + lA_2)(L_1 + \lambda L_2) + (B_1 + lB_2)(M_1 + \lambda M_2) + (C_1 + lC_2)(N_1 + \lambda N_2) = 0,$$

$$(A_1 + mA_2)(L_1 + \mu L_2) + (B_1 + mB_2)(M_1 + \mu M_2) + (C_1 + mC_2)(N_1 + \mu N_2) = 0.$$

Ostatnie dwa równania warunkowe przywodzą się, wskutek dwu piérwszych, do:

$$\lambda(A_1L_2 + B_1M_2 + C_1N_2) + l(A_2L_1 + B_2M_1 + C_2N_1) = 0,$$

$$\mu(A_1L_2 + B_1M_2 + C_1N_2) + m(A_2L_1 + B_2M_1 + C_2N_1) = 0,$$

z których wypada

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{m}{\mu}, \text{ czyli } \frac{l}{m} = \frac{\lambda}{\mu},$$

t. j. stosunek podziału podwójnego promieni (1) jest równy stosunkowi podziału podwójnego punktów (2).

A zatym: *jeżeli cztéry promienie pęku przetniemy prostą poprzeczną, to stosunek podziału podwójnego promieni jest równy stosunkowi podziału podwójnego punktów przecięcia.*

37. Trzy proste, wychodzące z jednego punktu, lub trzy punkty na jednéj prostéj wyznaczają czwartą prostą, wychodzącą z tegoż punktu, lub czwarty punkt na téjże prostéj, tworzące, wraz z trzema danymi, pęk promieni, lub szereg punktów, o pewnym, zgóry danym, stosunku podziału podwójnego. Jeżeli bowiém stosunek podziału podwójnego cztérech promieni pęku (4) i (5) w art. 34, lub cztérech punktów szeregu (4) i (5) w art. 35, jest dany i równy $\varkappa$, to wtedy, ze związku

$$\frac{\lambda'-\lambda}{\mu-\lambda'}=\varkappa\frac{\mu'-\lambda}{\mu-\mu'},$$

mając dane trzy liczby stosunkowe λ, μ, λ', możemy wyznaczyć czwartą, μ'.

Ten czwarty promień, lub czwarty punkt można znaléść przez wykréślenie w sposób następujący. — Niech (fig. 13) SD_1, SD_2, SD_3 będą trzema promieniami danymi, SD_4 niech będzie promieniem szukanym, mającym uczynić zadość warunkowi $(D_1D_2D_3D_4)=\varkappa$. Poprowadźmy poprzeczną; przetnie ona te promienie odpowiednio w punktach P_1, P_2, P_3, P_4 i natenczas (art. 36) także $(P_1P_2P_3P_4)=\varkappa$. Poprowadźmy jeszcze drugą poprzeczną, równoległą do jednego z danych promieni, np. do promienia SD_3. Ta poprzeczna przetnie promienie SD_1 i SD_2 w punktach P'_1 i P'_2, promień SD_3 w punkcie nieskończenie odległym (∞), a promień szukany w pewnym punkcie P'_4, i również będzie $(P'_1P'_2\infty P'_4)=\varkappa$. Lecz $(\infty P'_2=-P'_1\infty)$

$$(P'_1P'_2\infty P'_4)=\frac{P'_1\infty}{\infty P_2}:\frac{P'_1P'_4}{P'_4P'_2}=\frac{P'_2P'_4}{P'_1P'_4},$$

czyli

$$\frac{P'_2P'_4}{P'_1P'_4}=\varkappa.$$

Stąd zaś, z uwagi, iż

$$P'_2P'_4=P'_1P'_4-P'_1P'_2,$$

wypada

$$P'_1P'_4=\frac{1}{1-\varkappa}P'_1P'_2.$$

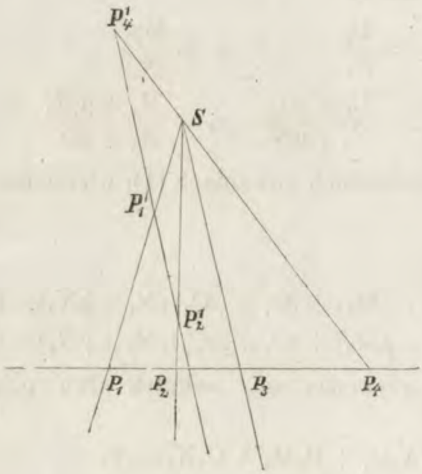


Fig. 13.

Jeżeli więc na poprzecznéj $P'_1P'_2$ wyznaczymy punkt P'_4 taki, aby

$$P'_1P'_4 : P'_1P'_2=1 : 1-\varkappa,$$

i połączymy go z punktem S, to promień P'_4S będzie czwartym promieniem szukanym, gdyż $(D_1D_2D_3D_4)=\varkappa$, i przetnie piérwszą poprzeczną w punkcie P_4 tak, iż $(P_1P_2P_3P_4)=\varkappa$. — Gdybyśmy mieli dla trzech punktów danych P_1, P_2 i P_3 znaléść taki czwarty punkt P_4, żeby $(P_1P_2P_3P_4)=\varkappa$, to połączylibyśmy punkty P_1, P_2, P_3 z jakimkolwiek punktem S, nie leżącym na podstawie tego szeregu, a następnie postąpilibyśmy tak, jak poprzednio, przy odszukiwaniu czwartego promienia.

PODZIAŁ HARMONICZNY.

38. Cztéry promienie pęku, lub cztéry punkty szeregu nazywamy **harmonicznymi**, jeżeli ich stosunek podziału podwójnego jest równy -1.

Cztéry promienie D_1, D_2, D_3, D_4 są więc harmoniczne, jeżeli

$$\frac{\sin D_1D_3}{\sin D_3D_1} + \frac{\sin D_1D_4}{\sin D_4D_2} = 0, \tag{1}$$

a cztéry punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są harmoniczne, jeżeli

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} + \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = 0. \tag{2}$$

Wiemy już (art. 32 i 33), że

$$\begin{aligned}(D_1D_2D_3D_4) &= (D_2D_1D_4D_3) = (D_3D_4D_1D_2) = (D_4D_3D_2D_1) \\ &= (D_2D_1D_3D_4) = (D_1D_2D_4D_3) = (D_4D_3D_1D_2) = (D_3D_4D_2D_1) = -1,\end{aligned}$$

jak również

$$\begin{aligned}(P_1P_2P_3P_4) &= (P_2P_1P_4P_3) = (P_3P_4P_1P_2) = (P_4P_3P_2P_1) \\ &= (P_2P_1P_3P_4) = (P_1P_2P_4P_3) = (P_4P_3P_1P_2) = (P_3P_4P_2P_1) = -1.\end{aligned}$$

Wynika z tego, że, gdy jest mowa o cztérech promieniach lub cztérech punktach harmonicznych, to niéma co brać pod uwagę uporządkowania wszystkich cztérech promieni lub cztérech punktów, lecz tylko ich podział na dwie pary D_1, D_2 i D_3, D_4 lub P_1, P_2 i P_3, P_4; dlatego używać będziemy wyrażenia: **dwie pary promieni** D_1, D_2 i D_3, D_4 lub **dwie pary punktów** P_1, P_2 i P_3, P_4 **są harmoniczne** lub **harmonicznie ze sobą sprzężone**.

Ze wzoru (1) czytamy, że jeden z dwu promieni D_3 i D_4 dzieli kąt między promieniami D_1 i D_2 wewnętrznie, a drugi zewnętrznie; jeżeli bowiém $\frac{\sin D_1D_3 <}{\sin D_3D_2 >} 0$, to odpowiednio $\frac{\sin D_1D_4 >}{\sin D_4D_2 <} 0$. Nadto, jeżeli $\angle D_1D_3 = 0$, wtedy także $\angle D_1D_4 = 0$, jak również, jeżeli $\angle D_3D_2 = 0$, wówczas także $\angle D_4D_2 = 0$, t. j. jeżeli promień D_3 przyjmie kierunek promienia D_1 lub D_2, wtedy z tymże samym promieniem D_1 lub odpowiednio D_2 zejdzie się także promień D_4. Nareszcie, jeżeli $\angle D_1D_3 = \angle D_3D_2$, wtedy $\angle D_1D_4 = -\angle D_4D_2$, t. j. jeżeli promień D_3 jest dwusieczną kąta D_1SD_2, wtedy promień D_4 jest dwusieczną kąta, spełniającego kąt D_1SD_2 do π; promienie D_3 i D_4 będą w tym przypadku do siebie prostopadłe.

Z równania zaś (2) wynika, że jeden z punktów P_3 i P_4 dzieli odcinek P_1P_2 wewnętrznie, a drugi zewnętrznie; jeżeli bowiém $\frac{P_1P_3 >}{P_3P_2 <} 0$, to odpowiednio $\frac{P_1P_4 <}{P_4P_2 >} 0$. Nadto, jeżeli $P_1P_3 = 0$ lub $P_2P_3 = 0$, wtedy także odpowiednio $P_1P_4 = 0$ lub $P_2P_4 = 0$, t. j. jeżeli punkt P_3 zejdzie się z punktem P_1 lub P_2, wtedy w tymże samym punkcie znajdzie się także punkt P_4. Nareszcie, jeżeli $P_1P_3 = P_3P_2$, wtedy $P_1P_4 = -P_4P_2 = P_2P_4$, t. j. jeżeli punkt P_3 znajduje się w środku odcinka P_1P_2, to punkt P_4 leży na prostéj P_1P_2 w nieskończonéj odległości.

39. Rozumiejąc przez R_1 i R_2 wyrażenia stopnia 1-ego bądźto względem spółrzędnych punktu x i y, bądźtéż względem spółrzędnych linii prostéj u i v, będziemy mogli zapomocą układu równań

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0;\ R_3 \equiv R_1 + \lambda R_2 = 0,\ R_4 \equiv R_1 + \mu R_2 = 0 \tag{1}$$

przedstawić tak cztéry promienie jednego pęku, jak i cztéry punkty jednego szeregu.

Według powyższego określenia, pary elementów (promieni lub punktów) $R_1, R_2;\ R_3, R_4$ są harmoniczne, jeżeli (art. 34 i 35)

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{t. j.} \quad \mu = -\lambda. \tag{2}$$

Równania dwu par elementów harmonicznych można zatym sprowadzić do postaci:

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0;\ R_3 \equiv R_1 + \lambda R_2 = 0,\ R_4 \equiv R_1 - \lambda R_2 = 0. \tag{3}$$

Jeżeli równania dwu par elementów są dane w postaci

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_1 \equiv R'_1 + \lambda R'_2 = 0, & R_2 \equiv R'_1 + \mu R'_2 = 0; \\ R_3 \equiv R'_1 + \lambda' R'_2 = 0, & R_4 \equiv R'_1 + \mu' R'_2 = 0, \end{array} \right. \tag{4}$$

natenczas te pary będą harmoniczne, jeżeli (art. 34 i 35)

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\mu - \lambda'} + \frac{\mu' - \lambda}{\mu - \mu'} = 0, \quad \text{czyli}$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu') + \lambda'\mu' = 0. \tag{5}$$

Jeżeli więc są dane trzy elementy, to można znaléść czwarty (ale tylko jeden), który z jednym z danych tworzy parę harmonicznie sprzężoną z parą pozostałych dwu elementów danych. Gdy bowiém są dane trzy liczby stosunkowe λ, μ, λ', natenczas z równania (5) można obliczyć wartość czwartéj μ'.

Czwarty element, który z trzema danymi tworzy dwie pary harmoniczne, znajdziemy przez wykréślenie sposobem, podanym w art. 37. Inny sposób wypadnie z rospatrzenia własności harmonicznych czworoboku i czworokąta zupełnego.

40. Czworobokiem zupełnym nazywamy figurę utworzoną przez cztéry proste, z których jakiekolwiek trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Te cztéry proste D_1, D_2, D_3, D_4 zowią się bokami czworoboku (fig. 14). Boki czworoboku zupełnego przecinają się po dwa w sześciu punktach, które nazywamy wiérzchołkami czworoboku. Punkt przecięcia się boków D_i i D_k oznaczymy przez A_{ik}, wiérzchołkami czworoboku będą zatym punkty $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$. Tak oznaczywszy wiérzchołki, możemy je zebrać we trzy pary $A_{12}, A_{34};\ A_{13}, A_{24};\ A_{14}, A_{23}$ tak, aby punkty téj samej pary nie miały spólnego wskaźnika. Te trzy pary wiérzchołków są trzema parami wiérzchołków przeciwległych. Należy zauważyć, że na każdym boku leżą trzy wiérzchołki, mające jeden wskaźnik spólny. Proste, łączące pary wiérzchołków A_{12} i A_{34}, A_{13} i A_{24}, A_{14} i A_{23}, oznaczymy przez D'_1, D'_2, D'_3; są one przekątnymi czworoboku.

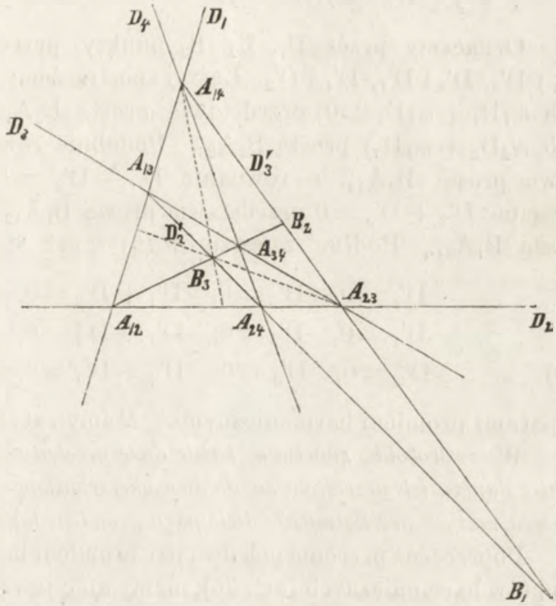


Fig. 14.

Niech $D_1 = 0$, $D_2=0$, $D_3=0$, $D_4=0$, $D'_1=0$, $D'_2=0$ $D'_3=0$ będą równaniami boków i przekątnych czworoboku zupełnego. Ponieważ przekątna D'_1 przechodzi przez punkt A_{12} i przez punkt A_{34}, przeto jéj równanie można przedstawić pod postacią

(1) $$D'_1 \equiv m_1 D_1 + m_2 D_2 = 0$$

i pod postacią

(2) $$D'_1 \equiv m_3 D_3 + m_4 D_4 = 0.$$

Mamy zatym tożsamość

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 \equiv m_3 D_3 + m_4 D_4,$$

z któréj wynika

(3) $$m_1 D_1 - m_3 D_3 \equiv m_4 D_4 - m_2 D_2 \quad \text{i}$$

(4) $$m_1 D_1 - m_4 D_4 \equiv m_3 D_3 - m_2 D_2.$$

Równanie $m_1 D_1 - m_3 D_3 = 0$ przestawia prostą przechodzącą przez A_{13}, a równanie $m_4 D_4 - m_2 D_2 = 0$ przedstawia prostą przechodzącą przez A_{24}. Gdy, według (3), piérwsze strony tych równań są tożsamościowe, przeto oba przedstawiają tę samę prostą, t. j. przekątną D'_2; mamy zatym:

(5) $$D'_2 \equiv m_1 D_1 - m_3 D_3 \equiv m_4 D_4 - m_2 D_2 = 0.$$

Znajdziemy taksamo, zapomocą tożsamości (4),

(6) $$D'_3 \equiv m_1 D_1 - m_4 D_4 \equiv m_3 D_3 - m_2 D_2 = 0.$$

Ze związków (1), (5) i (6) wypływa

$$(7)\quad \begin{cases} D'_1 + D'_2 \equiv m_1 D_1 + m_4 D_4 = 0, & D'_1 - D'_2 \equiv m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0, \\ D'_1 + D'_3 \equiv m_1 D_1 + m_3 D_3 = 0, & D'_1 - D'_3 \equiv m_2 D_2 + m_4 D_4 = 0, \\ D'_2 + D'_3 \equiv m_1 D_1 - m_2 D_2 = 0, & D'_2 - D'_3 \equiv m_4 D_4 - m_3 D_3 = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez B_1, B_2, B_3 punkty przecięcia się par przekątnych D'_2 i D'_3, D'_3 i D'_1, D'_1 i D'_2. Łatwo spostrzeżemy, że równanie $D'_1 + D'_2 = 0$ (lub $m_1 D_1 + m_4 D_4 = 0$) przedstawia prostą $B_3 A_{14}$, a równanie $D'_1 - D'_2 = 0$ (lub $m_2 D_2 + m_3 D_3$) prostą $B_3 A_{23}$. Podobnie równanie $D'_1 + D'_3 = 0$ przedstawia prostą $B_2 A_{13}$, a równanie $D'_1 - D'_3 = 0$ prostą $B_2 A_{24}$. Nareszcie równanie $D'_2 + D'_3 = 0$ przedstawia prostą $B_1 A_{12}$, a równanie $D'_2 - D'_3 = 0$ prostą $B_1 A_{34}$. Podług zaś wzorów (3) w art. 39 pary prostych

$$(8)\qquad D'_1 = 0,\quad D'_2 = 0;\quad D'_1 + D'_2 = 0,\quad D'_1 - D'_2 = 0,$$

$$(9)\qquad D'_1 = 0,\quad D'_3 = 0;\quad D'_1 + D'_3 = 0,\quad D'_1 - D'_3 = 0,$$

$$(10)\qquad D'_2 = 0,\quad D'_3 = 0;\quad D'_2 + D'_3 = 0,\quad D'_2 - D'_3 = 0,$$

są parami promieni harmonicznymi. Mamy zatym twierdzenie:

W czworoboku zupełnym każde dwie przekątne tworzą z prostymi, wychodzącymi z punktu ich przecięcia się do dwu wiérzchołków pozostałych (t. j. do tych, które nie leżą na tych przekątnych), dwie pary promieni harmoniczne.

Poprzeczna przecina pęk dwu par promieni harmonicznych w dwu parach punktów harmonicznych (art. 36); mamy więc jeszcze twierdzenie następujące:

Wiérzchołki czworoboku zupełnego, leżące na każdéj przekątnéj, tworzą z punktami przecięcia się jéj z dwiema przekątnymi pozostałymi dwie pary punktów harmoniczne.

Uważmy nareszcie, że także wiérzchołki A_{12}, A_{24} tworzą z wiérzchołkiem A_{23} i z punktem, w którym bok D_2 przecina prosta $B_3 A_{14}$, dwie pary punktów harmoniczne. Ogólnie więc, jeżeli $iklm$ przedstawia jakąkolwiek przemianę liczb 1, 2, 3, 4,

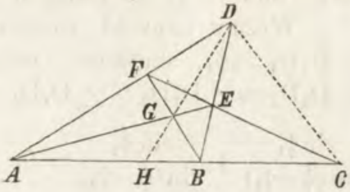
Na każdym boku czworoboku zupełnego wiérzchołki A_{ik} i A_{il} tworzą z wiérzchołkiem A_{im} i z punktem, w którym bok D_i przecina prosta, łącząca wiérzchołek A_{kl} z punktem przecięcia się przekątnych przechodzących przez wiérzchołki A_{ik} i A_{il}, dwie pary punktów harmoniczne.

Jakoż, według powyższych wzorów, równania np. promieni $A_{14}A_{12}$, $A_{14}A_{24}$; $A_{14}B_3$, $A_{14}A_{23}$ są

$$D_1 = 0,\ D_4 = 0;\ D'_1 + D'_2 \equiv m_1 D_1 + m_4 D_4 = 0;\ D'_3 \equiv m_1 D_1 - m_4 D_4 = 0,$$

z których widzimy (art. 39), że te promienie tworzą dwie pary promieni harmoniczne.

Z tych twierdzeń wypada następujący sposób wykréślenia czwartego punktu lub promienia harmonicznego do trzech danych punktów lub promieni. Aby znaléść czwarty punkt harmoniczny dla trzech danych A, B, C, dość, wziąwszy (fig. 15) dowolny punkt D zewnątrz prostéj ABC, poprowadzić proste AD, BD, dowolną poprzeczną CEF i proste AE, BF, DG; prosta DG przetnie ABC w punkcie żądanym H. Aby zaś znaléść czwarty promień harmoniczny do danych DA, DB, DC, należy przeciąć je poprzeczną np. w A, B, C; następnie z C poprowadzić dowolną prostą CEF i proste AE i BF: prosta DG będzie żądanym czwartym promieniem harmonicznym.



Fgi. 15.

41. Czworokątem zupełnym nazywamy figurę, utworzoną przez cztéry punkty P_1, P_2, P_3, P_4, z których trzy jakiekolwiek nie leżą na téj saméj prostéj (fig. 16), i przez sześć prostych L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23}, L_{24}, L_{34}, łączących je po dwa. Punkty P zowią się wiérzchołkami a proste L bokami czworokąta. Pary boków L_{12}, L_{34}; L_{13}, L_{24}; L_{14}, L_{23} zowią się parami boków przeciwległych, a punkty przecięcia się tych par boków przeciwległych, P'_1, P'_2, P'_3, punktami przekątnymi czworokąta.

Jeżeli

$$P_1=0,\ P_2=0,\ P_3=0,\ P_4=0,$$
$$P'_1=0,\ P'_2=0,\ P'_3=0$$

są równaniami wiérzchołków i punktów przekątnych czworokąta, to znajdziemy podobnym sposobem, jak w artykule poprzedzającym, że, przyjąwszy

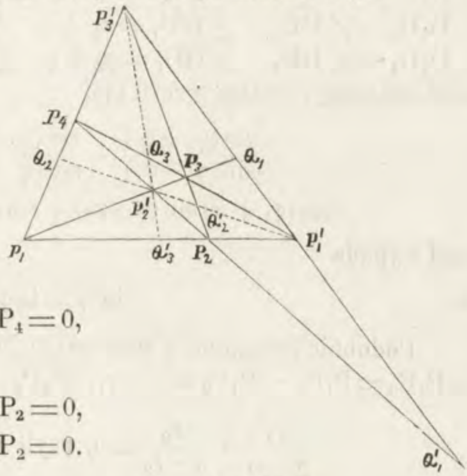


Fig. 16.

$$(1)\quad P'_1 \equiv m_1P_1 + m_2P_2 \equiv m_3P_3 + m_4P_4 = 0,$$

będzie

$$(2)\quad P'_2 \equiv m_1P_1 - m_3P_3 \equiv m_4P_4 - m_2P_2 = 0,$$
$$(3)\quad P'_3 \equiv m_1P_1 - m_4P_4 \equiv m_3P_3 - m_2P_2 = 0.$$

Następnie otrzymamy

$$(4)\quad \begin{cases} P'_1 + P'_2 \equiv m_1P_1 + m_4P_4 = 0, & P'_1 - P'_2 \equiv m_2P_2 + m_3P_3 = 0, \\ P'_1 + P'_3 \equiv m_1P_1 + m_3P_3 = 0, & P'_1 - P'_3 \equiv m_2P_2 + m_4P_4 = 0, \\ P'_2 + P'_3 \equiv m_1P_1 - m_2P_2 = 0, & P'_2 - P'_3 \equiv m_4P_4 - m_3P_3 = 0. \end{cases}$$

Trzy więc grupy po dwie pary punktów:

$$P'_1=0,\ P'_2=0;\ P'_1+P'_2=0,\ P_1'-P'_2=0,$$
$$P'_1=0,\ P'_3=0;\ P'_1+P'_3=0,\ P'_1-P'_3=0,$$
$$P'_2=0,\ P'_3=0;\ P'_2+P'_3=0,\ P'_2-P'_3=0$$

są harmoniczne. Wypadek ten możemy wypowiedzieć jako twierdzenie, które wszakże od poprzedniego będzie się różniło tylko odmiennym wysłowieniem.

42. Równania (art. 38)

$$(1)\quad \frac{\sin D_1D_3}{\sin D_3D_2} + \frac{\sin D_1D_4}{\sin D_4D_2} = 0 \quad \text{i} \quad (2)\quad \frac{P_1P_3}{P_3P_2} + \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = 0,$$

określające dwie pary promieni i dwie pary punktów harmoniczne, sprowadzimy do dwu uwagi godnych postaci.

Weźmy naprzód równanie (1). Kładąc $\angle D_1D_2 = \psi$, $\angle D_1D_3 = \psi_1$, $\angle D_1D_4 = \psi_2$, skutkiem czego $\angle D_3D_2 = \angle D_1D_2 - \angle D_1D_3 = \psi - \psi_1$, $\angle D_4D_2 = \angle D_1D_2 - \angle D_1D_4 = \psi - \psi_2$, otrzymamy

$$\frac{\sin\psi_1}{\sin(\psi-\psi_1)} + \frac{\sin\psi_2}{\sin(\psi-\psi_2)} = 0, \text{ czyli } \sin\psi_1\sin(\psi-\psi_2) + \sin\psi_2\sin(\psi-\psi_1) = 0.$$

Rozwinąwszy i podzieliwszy przez $\sin\psi\sin\psi_1\sin\psi_2$, znajdziemy

$$\frac{2}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi_1} + \frac{1}{\operatorname{tg}\psi_2}. \tag{3}$$

Jeżeli zaś przez D oznaczymy dwusieczną kąta D_1D_2, to, kładąc $\angle DD_2 = -\angle DD_1 = \varphi$, $\angle DD_3 = \varphi_1$, $\angle DD_4 = \varphi_2$, skutkiem czego $\angle D_1D_3 = \angle DD_3 - \angle DD_1 = \varphi_1 + \varphi$, $\angle D_3D_2 = \angle DD_2 - \angle DD_3 = \varphi - \varphi_1$, $\angle D_1D_4 = \angle DD_4 - \angle DD_1 = \varphi_2 + \varphi$, $\angle D_4D_2 = \angle DD_2 - \angle DD_4 = \varphi - \varphi_2$, mieć będziemy, według wzoru (1),

$$\frac{\sin(\varphi_1+\varphi)}{\sin(\varphi-\varphi_1)} + \frac{\sin(\varphi_2+\varphi)}{\sin(\varphi-\varphi_2)} = 0, \text{ czyli}$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi)\sin(\varphi-\varphi_2) + \sin(\varphi_2+\varphi)\sin(\varphi-\varphi_1) = 0,$$

skąd wypada

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2. \tag{4}$$

Podobnie postąpimy z wzorem (2). Niech $P_1P_2 = r$, $P_1P_3 = r_1$, $P_1P_4 = r_2$, to $P_3P_2 = P_1P_2 - P_1P_3 = r - r_1$, $P_4P_2 = P_1P_2 - P_1P_4 = r - r_2$ i

$$\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r-r_2} = 0, \text{ czyli } rr_1 + rr_2 - 2r_1r_2 = 0,$$

lub

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \tag{5}$$

Jeżeli zaś przez O oznaczymy środek odcinka P_1P_2, to, kładąc $OP_2 = -OP_1 = d$, $OP_3 = d_1$, $OP_4 = d_2$, wskutek czego $P_1P_3 = OP_3 - OP_1 = d + d_1$, $P_3P_2 = OP_2 - OP_3 = d - d_1$, $P_1P_4 = OP_4 - OP_1 = d + d_2$, $P_4P_2 = OP_3 - - OP_4 = d - d_2$, mieć będziemy, według wzoru (2),

$$\frac{d+d_1}{d-d_1} + \frac{d+d_2}{d-d_2} = 0, \text{ czyli } (d+d_1)(d-d_2) + (d+d_2)(d-d_1) = 0;$$

skąd

$$d^2 = d_1d_2. \tag{6}$$

Wzory (5) i (6) można wyprowadzić z odpowiadających im wzorów (3) i (4). Jakoż, jeżeli pęk promieni harmonicznych D_1, D_2, D_3, D_4 (fig. 17

i fig. 18) przetniemy poprzeczną prostopadłą do D_1, lub prostopadłą do dwusiecznéj D kąta D_1D_2, miéć będziemy

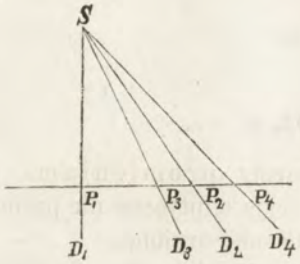


Fig. 17.

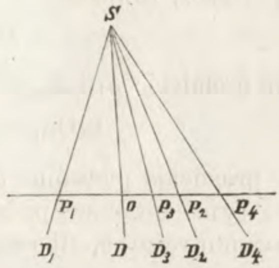


Fig. 18.

w piérwszym razie (fig 17)

$$\operatorname{tg}D_1D_2 = \frac{P_1P_2}{P_1S},\quad \operatorname{tg}D_1D_3 = \frac{P_1P_3}{P_1S},\quad \operatorname{tg}D_1D_4 = \frac{P_1P_4}{P_1S},\ \text{t. j.}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{P_1S},\qquad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{r_1}{P_1S},\qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{r_2}{P_1S},$$

a podstawienie tych wartości na $\operatorname{tg}\psi$, $\operatorname{tg}\psi_1$, $\operatorname{tg}\psi_2$ w (3) da nam wzór (5). W drugim zaś razie (fig. 18) będziemy mieli

$$\operatorname{tg}DD_2 = -\operatorname{tg}DD_1 = \frac{OP_2}{OS},\ \operatorname{tg}DD_3 = \frac{OP_3}{OS},\ \operatorname{tg}DD_4 = \frac{OP_4}{OS},\ \text{t.j.}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{OS},\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{d_1}{OS},\quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{d_2}{OS},$$

a podstawienie tych wartości na $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$ w (4) da nam wzór (6).

INWOLUCYJA PAR PROMIENI I PAR PUNKTÓW.

43. Jeżeli D_1 i D'_1, D_2 i D'_3, D_3 i D'_3,... są parami promieni tego samego pęku, a DD_1, DD'_1, DD_2, DD'_2, DD_3, DD'_3,... są kątami, które te promienie czynią z tym samym promieniem D tegoż pęku, λ zaś jest pewną liczbą stałą, to, wrazie, gdy

(1) $\lambda^2 = \operatorname{tg}DD_1 \,.\, \operatorname{tg}DD'_1 = \operatorname{tg}DD_2 \,.\, \operatorname{tg}DD'_2 = \operatorname{tg}DD_3 \,.\, \operatorname{tg}DD'_3 = \ldots,$

mówimy, że te pary promieni D_1 i D'_1, D_2 i D'_2, D_3 i D'_3,... tworzą *inwolucyją* (kwadratową); promień zaś D nazywa się *osią* inwolucyi.

Stosownie do tego, czy λ jest liczbą rzeczywistą, czytéż urojoną, a więc, czy λ^2 jest liczbą dodatną, czytéż ujemną, promienie każdéj pary będą leżały po jednéj stronie lub po stronach przeciwnych osi D; w piérwszym przypadku inwolucyja zowie się *hiperboliczną*, w drugim zaś *eliptyczną*.

Jeżeli inwolucyja promieni jest hiperboliczna, to istnieją w tym pęku dwa takie promienie rzeczywiste, z których w każdym schodzą się z sobą oba promienie pary, t. j. które przedstawiają promienie podwójne inwolucyi. Jakoż, równanie

$$(2) \qquad \lambda^2 = \mathrm{tgD\Delta}.\mathrm{tgD\Delta}$$

daje dwa promienie Δ_1 i Δ_2, dla których

$$\mathrm{tgD}\Delta_1 = +\lambda \quad \text{i} \quad \mathrm{tgD}\Delta_2 = -\lambda.$$

Te dwa promienie podwójne Δ_1 i Δ_2 nazwiemy promieniami asymptotycznymi inwolucyi promieni. Inwolucyja eliptyczna nie posiada promieni asymptotycznych, albo raczéj są one dla niéj urojone.

Promienie asymptotyczne inwolucyi promieni leżą symetrycznie względem osi, a nadto, ponieważ, według (1) i (2),

$$\mathrm{tg}^2\mathrm{D\Delta} = \mathrm{tgDD}_1.\mathrm{tgDD'}_1 = \mathrm{tgDD}_2.\mathrm{tgDD'}_2 = \ldots,$$

każda (art. 42) pąra promieni inwolucyi, D_1 i D'_1, D_2 i D'_2, D_3 i $D'_3, \ldots$, jest harmonicznie sprzężona z parą jéj promieni asymptotycznych Δ_1 i Δ_2.

44. Jeżeli P_1 i P'_1, P_2 i P'_2, P_3 i $P'_3, \ldots$ są parami punktów tego samego szeregu a O takim punktem na jego podstawie, iż

$$(1) \qquad \lambda^2 = OP_1.OP'_1 = OP_2.OP'_2 = OP_3.OP'_3 = \ldots,$$

to mówimy, iż te pary punktów P_1 i P'_1, P_2 i P'_2, P_3 i $P'_3, \ldots$ tworzą inwolucyją (kwadratową); punkt zaś O nazywa się środkiem inwolucyi. Według tego, czy λ jest liczbą dodatną, czytéż ujemną, punkty jednéj pary będą leżały po jednéj stronie lub po stronach przeciwnych środka inwolucyi. W piérwszym przypadku inwolucyja punktów jest hiperboliczną, w drugim eliptyczną.

Jeżeli inwolucyja punktów jest hiperboliczna, to istnieją w szeregu dwa punkty rzeczywiste, z których w każdym schodzą się z sobą oba punkty pary, t. j. które przedstawiają punkty podwójne inwolucyi. Z równania bowiém

$$(2) \qquad \lambda^2 = O\Pi.O\Pi$$

wypada

$$O\Pi_1 = +\lambda, \quad O\Pi_2 = -\lambda.$$

Te dwa punkty Π_1, Π_2 nazwiemy punktami asymptotycznymi inwolucyi punktów. Jeżeli inwolucyja jest eliptyczna, punktów asymptotycznych niéma, albo raczéj są one wtedy urojone.

Wskutek (1) i (2), mamy

$$O\Pi^2 = OP_1.OP'_1 = OP_2.OP'_2 = OP_3.OP'_3 = \ldots,$$

a zatym (art. 42), każda para punktów inwolucyi P_1 i P'_1, P_2 i P'_2, P_3 i $P'_3, \ldots$ jest harmonicznie sprzężoną z parą jéj punktów asymptotycznych Π_1 i Π_2, które leżą symetrycznie względem środka inwolucyi.

Z tego, cośmy powiedzieli o inwolucyi promieni i punktów, wypada, że pęk inwolucyjny przecina każdą poprzeczną w szeregu inwolucyjnym. Punkty przecięcia się poprzecznéj z osią i z promieniami asymptotycznymi pęku inwolucyjnego są odpowiednio środkiem i punktami asymptotycznymi szeregu inwolucyjnego.

45. Jeżeli przez S_1 i S_2 oznaczymy wyrażenia stopnia 1-go względem spółrzędnych punktu, x i y, lub względem spółrzędnych linii prostéj, u i v, natenczas równania z czynnikami nieoznaczonymi λ_i i λ'_i

(1) $$R_i \equiv S_1 + \lambda_i S_2 = 0, \quad R'_i \equiv S_1 + \lambda'_i S_2 = 0,$$

gdy w nich wskaźnikowi i będziemy nadawali coraz inne wartości: 1, 2, 3,..., będą przedstawiały pary elementów tego samego układu, t. j. pary promieni tego samego pęku, lub pary punktów tego samego szeregu.

a. Te pary elementów tworzą inwolucyją, jeżeli istnieje jedna para elementów

(2) $$R \equiv S_1 + \lambda S_2 = 0, \quad R' \equiv S_1 + \lambda' S_2 = 0,$$

która z każdą z par (1) jest harmonicznie sprzężona. Według wzoru (5) w artykule 39, para elementów (1) jest harmonicznie sprzężona z parą (2), jeżeli

(3) $$\lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda'_i)(\lambda + \lambda') + \lambda_i \lambda'_i = 0.$$

Podstawiając tu $i = 1, 2, 3, \ldots$, otrzymamy warunki, aby pary elementów (1), przy $i = 1, 2, 3, \ldots$, tworzyły inwolucyją, któréj elementami asymptotycznymi są elementy (2).

b. Jeżeli dwie pary elementów (1) są dane,

(4) $$\begin{aligned} R_1 &\equiv S_1 + \lambda_1 S_2 = 0, \quad R'_1 \equiv S_1 + \lambda'_1 S_2 = 0; \\ R_2 &\equiv S_1 + \lambda_2 S_2 = 0, \quad R'_2 \equiv S_1 + \lambda'_2 S_2 = 0, \end{aligned}$$

t. j. jeżeli są dane wartości czynników $\lambda_1, \lambda'_1, \lambda_2, \lambda'_2$, to wówczas nietrudno wyznaczyć parę elementów (2), harmonicznie sprzężoną z każdą z dwu danych par. Z równań bowiém, odpowiadających równaniu (3),

(5) $$\left\{ \begin{aligned} &\lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda'_1)(\lambda + \lambda') + \lambda_1 \lambda'_1 = 0, \\ &\lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda'_2)(\lambda + \lambda') + \lambda_2 \lambda'_2 = 0, \end{aligned} \right.$$

wyznaczymy

(6) $$\lambda + \lambda' = a \quad \text{i} \quad \lambda\lambda' = b;$$

spółczynniki więc λ i λ' są pierwiastkami równania kwadratowego

(7) $$z^2 - az + b = 0.$$

c. Jeżeli dane są dwie pary elementów inwolucyi, to, nie wyznaczywszy uprzednio pary elementów asymptotycznych téj inwolucyi, możemy dla dowolnie wziętego elementu odnaléść taki, któryby z nim przedstawiał parę elementów téj inwolucyi. Jeżeli bowiém do par elementów (4), zapomocą których moglibyśmy wyznaczyć parę elementów asymptotycznych (2), dołączymy dowolnie wzięty element R_3 i szukany element R'_3 trzeciéj pary,

$$(8) \qquad R_3 \equiv S_1 + \lambda_3 S_2 = 0, \quad R'_3 \equiv S_1 + \lambda'_3 S_2 = 0,$$

to natenczas miéć będziemy, według (3),

$$(9) \qquad \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda'_3)(\lambda + \lambda') + \lambda_3\lambda'_3 = 0.$$

Rugując zaś z równań warunkowych (5) i (9) dwie liczby $\lambda\lambda'$ i $\lambda + \lambda'$, wchodzące w nie w stopniu 1-ym, otrzymamy związek między czynnikami λ_1, λ'_1, λ_2, λ'_2, λ_3, λ'_3

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1\lambda'_1, & \lambda_1 + \lambda'_1, & 1 \\ \lambda_2\lambda'_2, & \lambda_2 + \lambda'_2, & 1 \\ \lambda_3\lambda'_3, & \lambda_3 + \lambda'_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

który nam dozwala z pięciu danych czynników λ_1, λ'_1, λ_2, λ'_2, λ_3 obliczyć wartość czynnika λ'_3, wchodzącego weń w stopniu 1-ym, a wyznaczającego szukany element drugi trzeciéj pary.

Wynika z tego, że dwie pary elementów inwolucyi w zupełności ją wyznaczają, t. j. dla jakiegokolwiek elementu można odnaléść drugi element jego pary.

46. Jeżeli $R = 0$ i $R' = 0$ są równaniami pary elementów asymptotycznych, to równania trzech par składników, tworzących inwolucyją, można przywiéść do postaci

$$(1) \qquad R - \lambda_1 R' = 0, \quad R + \lambda_1 R' = 0; \quad R - \lambda_2 R' = 0, \quad R + \lambda_2 R' = 0;$$
$$R - \lambda_3 R' = 0, \quad R + \lambda_3 R' = 0.$$

Kładąc

$$(2) \qquad R - \lambda_1 R' = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad R - \lambda_2 R' = \frac{U_2}{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad R - \lambda_3 R' = \frac{U_3}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

otrzymamy, jako równania piérwszych elementów par (1),

$$(3) \qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0.$$

Wyznaczywszy zaś R i R' raz z drugiego i trzeciego, następnie z trzeciego i piérwszego, nakoniec z piérwszego i drugiego z równań (2) i wstawiając wartości otrzymane w równania drugich elementów odpowiednio piérwszéj, drugiéj, trzeciéj pary (1), sprowadzimy te równania do następujących:

$$(4) \qquad \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_3}{\mu_3} = 0, \quad \frac{U_3}{\mu_3} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0, \quad \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0,$$

gdzie

$$(5) \qquad \mu_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}, \quad \mu_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Uważmy, że z równań (2) wypada

$$U_1+U_2+U_3\equiv 0, \tag{6}$$

co wskazuje, że równania (2) nie są niezależne ze względu na R i R′, a przeto, że dwa którekolwiek z nich dają zawsze te same wartości na R i R′. Równanie (6) wyraża zarazem, że trzy elementy (3) należą do jednego układu, t.j. że trzy promienie (3) przechodzą przez ten sam punkt, lub że trzy punkty (3) leżą na téj saméj prostéj. Podobnie, ponieważ suma lewych stron równań (4) jest tożsamościowo równa 0, więc także trzy elementy (4) należą do jednego układu i tego samego, co układ elementów (3). Widzimy zatym, że równania trzech par elementów, tworzących inwolucyją, możemy zawsze sprowadzić do postaci:

$$\left\{\begin{array}{lll} U_1=0, & U_2=0, & U_3=0; \\ \frac{U_2}{\mu_2}-\frac{U_3}{\mu_3}=0, & \frac{U_3}{\mu_3}-\frac{U_1}{\mu_1}=0, & \frac{U_1}{\mu_1}-\frac{U_2}{\mu_2}=0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Równania jednéj kolumny przedstawiają tu elementy jednéj pary.

47. a. Weźmy czworobok zupełny (art. 40) o wierzchołkach przeciwległych A_{14} i A_{23}, A_{24} i A_{31}, A_{34} i A_{12} i przez nie poprowadźmy promienie z punktu P, dowolnie wybranego na płaszczyźnie tego czworoboku. Niech nadto

$$D_1=0,\quad D_2=0,\quad D_3=0,\quad D_4=0 \tag{1}$$

będą równaniami boków tego czworoboku. Wtedy równanie promienia PA_{14}, przechodzącego przez punkt A_{14}, w którym przecinają się dwa boki D_1 i D_4, jest kształtu

$$m_1D_1+m_4D_4=0.$$

Stosunek zaś $m_4:m_1$ wyznaczymy z warunku, aby prosta przechodziła przez punkt P. Oznaczywszy bowiém przez D'_1 i D'_4 wartości, które otrzymują wyrażenia D_1 i D_4, gdy za spółrzędne punktu bieżącego wstawimy spółrzędne punktu P, mamy

$$m_1D'_1+m_4D'_4=0,\ \text{skąd}\ m_4:m_1=-D'_1:D'_4;$$

jest więc $\frac{D_1}{D'_1}-\frac{D_4}{D'_4}=0$ równaniem promienia PA_{14}. Tym sposobem otrzymujemy

$$\frac{D_1}{D'_1}-\frac{D_4}{D'_4}=0,\quad \frac{D_2}{D'_2}-\frac{D_4}{D'_4}=0,\quad \frac{D_3}{D'_3}-\frac{D_4}{D'_4}=0, \tag{2}$$

jako równania promieni PA_{14}, PA_{24}, PA_{34}, a

$$\frac{D_2}{D'_2}-\frac{D_3}{D'_3}=0,\quad \frac{D_3}{D'_3}-\frac{D_1}{D'_1}=0,\quad \frac{D_1}{D'_1}-\frac{D_2}{D'_2}=0 \tag{3}$$

jako równania promieni PA_{23}, PA_{31}, PA_{12}. Kładąc zaś

$$\frac{D_1}{D'_1}-\frac{D_4}{D'_4}=\frac{U_1}{\mu_1},\quad \frac{D_2}{D'_2}-\frac{D_4}{D'_4}=\frac{U_2}{\mu_2},\quad \frac{D_3}{D'_3}-\frac{D_4}{D'_4}=\frac{U_3}{\mu_3},$$

skutkiem czego

$$\frac{D_2}{D'_2}-\frac{D_3}{D'_3}=\frac{U_2}{\mu_2}-\frac{U_3}{\mu_3},\quad \frac{D_3}{D'_3}-\frac{D_1}{D'_1}=\frac{U_3}{\mu_3}-\frac{U_1}{\mu_1},\quad \frac{D_1}{D'_1}-\frac{D_2}{D'_2}=\frac{U_1}{\mu_1}-\frac{U_2}{\mu_2},$$

przywiedziemy równania trzech par promieni PA_{14} i PA_{23}, PA_{24} i PA_{31}, PA_{34} i PA_{12} do kształtu

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} U_1=0, & U_2=0, & U=0; \\ \dfrac{U_2}{\mu_2}-\dfrac{U_3}{\mu_3}=0, & \dfrac{U_3}{\mu_3}-\dfrac{U_1}{\mu_1}=0, & \dfrac{U_1}{\mu_1}-\dfrac{U_2}{\mu_2}=0. \end{array}\right.$$

Te więc trzy pary promieni tworzą inwolucyją. A zatym: *pary promieni, łączące jakikolwiek punkt na płaszczyźnie czworoboku zupełnego z jego wierzchołkami przeciwległymi, tworzą inwolucyją.*

To twierdzenie daje nam sposób wykreślenia do pięciu promieni, przecinających się w jednym punkcie, szóstego, który jest z nimi w inwolucyi. Oszczędzając miejsca, nie przeprowadzamy tu tego łatwego wykreślenia.

Jeżeli zamiast czworoboku zupełnego weźmiemy czworokąt zupełny i przetniemy go jakąkolwiek poprzeczną, natenczas: *trzy pary punktów, w których jakakolwiek poprzeczna przecina trzy pary boków przeciwległych czworokąta zupełnego, tworzą inwolucyją.* Dowód tego twierdzenia jest taki sam, jak poprzedniego, jeżeli tylko w równaniach powyższych zastąpimy spółrzędne x i y przez spółrzędne u i v. Daje nam ono łatwy sposób wyznaczenia do pięciu punktów na prostéj — szóstego, będącego z nimi w inwolucyi.

b. Wróćmy jeszcze do czworoboku zupełnego. W każdym z jego wierzchołków mamy po trzy proste, mianowicie: dwa boki i jednę z sześciu prostych (2) i (3). Równania sześciu prostych, czwartych harmonicznych do każdych trzech, przechodzących przez wierzchołki A_{14}, A_{24}, A_{34}; A_{23}, A_{31}, A_{12}, są odpowiednio

$$(5)\qquad \frac{D_1}{D'_1}+\frac{D_4}{D'_4}=0,\quad \frac{D_2}{D'_2}+\frac{D_4}{D'_4}=0,\quad \frac{D_3}{D'_3}+\frac{D_4}{D'_4}=0;$$

$$(6)\qquad \frac{D_2}{D'_2}+\frac{D_3}{D'_3}=0,\quad \frac{D_3}{D'_3}+\frac{D_1}{D'_1}=0,\quad \frac{D_1}{D'_1}+\frac{D_2}{D'_2}=0.$$

Suma każdéj pary równań (5) i (6), stojących tu w jednym rzędzie pionowym, daje toż samo równanie

$$(7)\qquad \frac{D_1}{D'_1}+\frac{D_2}{D'_2}+\frac{D_3}{D'_3}+\frac{D_4}{D'_4}=0.$$

Widzimy więc, że te trzy pary prostych (5) i (6) przecinają się w trzech punktach, przez które przechodzi prosta (7). Mamy zatym twierdzenie:

Jeżeli jakikolwiek punkt na płaszczyźnie czworoboku zupełnego połączymy prostymi z jego wierzchołkami, a w każdym z wierzchołków wykreślimy prostą, która *z prostą, przechodzącą przez ów punkt, jest harmonicznie sprzężona względem pary boków, schodzących się w tym wiérzchołku, to trzy punkty przecięcia się każdéj pary z tych sześciu czwartych harmonicznych (utworzonéj przez proste, przechodzące przez przeciwległe wiérzchołki), leżą na jednéj prostéj.*

Temu twierdzeniu odpowié następujące, odnoszące się do czworokąta zupełnego:

Jeżeli przetniemy czworokąt zupełny jakąkolwiek poprzeczną, a na każdym boku znajdziemy punkt, który z punktem jego przecięcia się z ową poprzeczną jest harmonicznie sprzężony względem pary wiérzchołków, połączonych przez ten bok, to trzy proste, łączące każdą parę z tych sześciu czwartych punktów harmonicznych (utworzoną przez punkty, leżące na bokach przeciwległych), przecinają się w jednym punkcie.

PĘKI PROMIENI I SZEREGI PUNKTÓW JEDNOKRÉŚLNE.

48. Wszelkie promienie, wychodzące z jednego punktu S, w którym się przecinają dwie proste D_1 i D_2, można przedstawić przez jedno równanie

(1) $$D_1 + \lambda D_2 = 0,$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ. Można zatym to równanie uważać za wyrażenie analityczne pęku promieni o wiérzchołku S. Różnym wartościom czynnika λ odpowiadają różne promienie tego pęku. — Weźmy pod uwagę jeszcze drugi pęk promieni, mający wiérzchołek w punkcie S', w którym przecinają się dwie proste D'_1 i D'_2; równanie tego pęku będzie

(2) $$D'_1 + \lambda D'_2 = 0.$$

Jeżeli te promienie tych dwu pęków, których równania otrzymamy z (1) i (2), gdy czynnikowi λ nadamy tęż samę wartość szczególną, nazwiemy p r o m i e n i a m i o d p o w i e d n i m i, natenczas stosunek podziału podwójnego cztérech którychkolwiek promieni pęku piérwszego jest równy stosunkowi podziału podwójnego cztérech promieni odpowiednich pęku drugiego. Albowiém stosunek podziału podwójnego cztérech promieni, których równania są kształtu czyto (1), czytéż (2), zależy jedynie od wartości czynnika λ, wchodzącego w ich równania. Stąd wynika, że, jeżeli cztéry promienie pęku (1) są harmoniczne, wówczas cztéry im odpowiednie promienie pęku (2), są także harmoniczne. Podobnie, jeżeli pewne pary promieni pęku (1) tworzą inwolucyją, wtedy pary im odpowiednich promieni pęku (2) tworzą również inwolucyją.

Dwa pęki promieni, wyznaczone przez jednoczesne równania (1) i (2), nazywamy p ę k a m i j e d n o k r é ś l n y m i.

Do dwu szeregów punktów, przedstawionych przez równania

(3) $$P_1 + \lambda P_2 = 0 \text{ i}$$
(4) $$P'_1 + \lambda P'_2 = 0,$$

z których piérwszy ma za podstawę prostą łączącą punkty P_1 i P_2, a drugi prostą łączącą punkty P'_1 i P'_2, możemy odnieść to, cośmy wyżéj powiedzieli o pękach promieni (1) i (2), rozumiejąc przez punkty odpowiednie te, których równania otrzymamy z (3) i (4), gdy czynnikowi λ nadamy tęż samę wartość.

Dwa szeregi punktów, wyznaczone przez jednoczesne równania (3) i (4), nazywamy szeregami jednokréślnymi.

49. W przypadku, gdy w dwu pękach jednokréślnych promień, łączący wiérzchołki tych dwu pęków, jest odpowiedni samemu sobie, dwa te pęki nazywamy pękami perspektywicznymi; wtedy: *punkty przecięcia się każdéj pary odpowiednich promieni dwu pęków perspektywicznych leżą na jednéj prostéj.* Oznaczmy promień SS′ (fig. 19) łączący wiérzchołki pęków, przez D_1, oile należy do pęku piérwszego, a przez D'_1, oile on należy do pęku drugiego; przez punkty przecięcia się dwu par promieni odpowiednich D_2, D'_2 i D_3, D'_3 poprowadźmy prostą, a z wiérzchołków S i S′ dwa jakiekolwiek promienie D_4 i D'_4, przecinające się na téj prostéj. Mamy wtedy (art. 36)

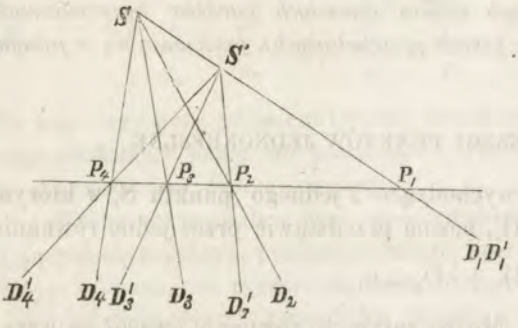


Fig. 19.

$$(D_1D_2D_3D_4) = (P_1P_2P_3P_4) \text{ i } (D'_1D'_2D'_3D'_4) = (P_1P_2P_3P_4),$$

a przeto

$$(D_1D_2D_3D_4) = (D'_1D'_2D'_3D'_4),$$

t. j. promienie D_4 i D'_4 są promieniami odpowiednimi tych dwu pęków.

Podobnie, w przypadku, gdy punkt przecięcia się podstaw dwu szeregów jednokréślnych jest odpowiedni samemu sobie, dwa te szeregi punktów nazywamy szeregami perspektywicznymi; wtedy: *proste, łączące każdą parę odpowiednich punktów dwu szeregów perspektywicznych, przecinają się w jednym punkcie.* Oznaczmy (fig. 20) punkt przecięcia się podstaw przez P_1, oile ten punkt należy do szeregu piérwszego, a przez P'_1, oile on należy do szeregu drugiego; przez punkty odpowiednie dwu par P_2, P'_2 i P_3, P'_3 poprowadźmy proste, a punkt ich przecięcia się C połączmy z jakimkolwiek punktem P_4 szeregu piérwszego i oznaczmy przez P'_4 punkt przecięcia się téj prostéj CP_4 z podstawą szeregu drugiego. Mamy wtedy

Fig. 20.

$$(P_1P_2P_3P_4) = (P'_1P'_2P'_3P'_4) = (C \cdot P_1P_2P_3P_4),$$

t. j. punkty P_4 i P'_4 są punktami odpowiednimi tych dwu szeregów.

50. Jeżeli są dane trzy pary odpowiednich elementów dwu jakichkolwiek układów jednokreślnych, możemy, zapomocą twierdzeń powyższych, dla każdego elementu jednego układu znaléść odpowiedni w układzie drugim.

Jakoż, jeżeli punktom (fig. 21) P_1, P_2, P_3 na podstawie $\Sigma\Sigma$, są odpowiednie punkty P'_1, P'_2, P'_3 na podstawie $\Sigma'\Sigma'$, obierzmy na prostéj $P_1P'_1$ dwa punkty A i A', wyprowadźmy z punktu A proste AP_2, AP_3, a z punktu A' proste $A'P'_2$, $A'P'_3$, oraz połączmy prostą BB punkty Q_2 i Q_3, w których przecinają się pary prostych AP_2, $A'P'_2$ i AP_3, $A'P'_3$. Wtedy, poprowadziwszy z punktu A prostą, przechodzącą przez dowolnie wybrany na podstawie $\Sigma\Sigma$ punkt P, i połączywszy punkt Q, w którym ona przecina prostą BB, z punktem A', otrzymamy na przecięciu się prostéj QA' z podstawą $\Sigma'\Sigma'$ punkt P', odpowiedni punktowi P. Albowiém

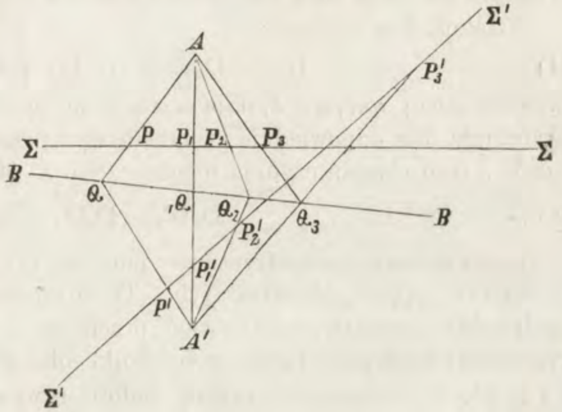


Fig. 21.

$$(P_1P_2P_3P) = (Q_1Q_2Q_3Q) = (P'_1P'_2P'_3P').$$

Podobnie, jeżeli promieniom D_1, D_2, D_3 pęku o wiérzchołku S (fig. 22) są odpowiednie promienie D'_1, D'_2, D'_3 pęku, mającego wierzchołek w punkcie S', poprowadźmy przez punkt przecięcia się promieni D_1, D'_1 dwie proste A, A', a punkty przecięcia się prostych A, A' odpowiednio z promieniami D_2, D'_2 i z promieniami D_3, D'_3 połączmy dwiema prostymi Q_2 i Q_3, które się przecinają w punkcie B. Wtedy, wyprowadziwszy z punktu B promień, który przecina promień dowolny D pęku o wiérzchołku S na prostéj A, i wyznaczywszy punkt przecięcia się tego promienia Q z prostą A', otrzymamy, jako prostą, łączącą ten punkt z wiérzchołkiem S' pęku, promień D' odpowiedni promieniowi D. Albowiém

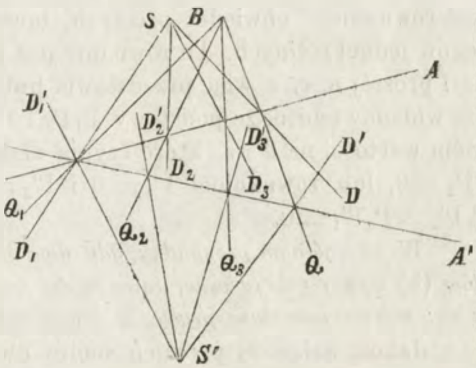


Fig. 22.

$$(S.D_1D_2D_3D) = (B.Q_1Q_2Q_3Q) = (S'.D'_1D'_2D'_3D').$$

51. *Miejscem gieometrycznym punktów przecięcia się odpowiednich promieni dwu pęków jednokréślnych jest linija rzędu 2-go, przechodząca przez wiérzchołki obu pęków, obwiednią zaś prostych, łączących punkty odpowiednie dwu szeregów jednokréślnych, jest linija klasy 2-éj, która dotyka podstaw obu szeregów.*

Jakoż, dwa równania

(1) $$D_1 + \lambda D_2 = 0 \quad i \quad D'_1 + \lambda D'_2 = 0,$$

przy téj saméj wartości λ, dają wartości na spółrzędne punktu, w którym się przecinają dwa odpowiednie promienie dwu pęków jednokréślnych. Rugując zatym z tych równań czynnik nieoznaczony λ, otrzymamy

(2) $$D_1 D'_2 - D_2 D'_1 = 0,$$

równanie miejsca gieometrycznego punktów przecięcia się odpowiednich promieni dwu pęków jednokréślnych. To równanie jest stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu x, y, a więc przedstawia liniją rzędu 2-go. Ta linija przechodzi widocznie przez wiérzchołki obu pęków, albowiém wartości na x i y, które jednocześnie czynią zadość równaniom $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$, jak również te, które jednocześnie czynią zadość równaniom $D'_1 = 0$ i $D'_2 = 0$, uczynią także zadość równaniu $D_1 D'_2 - D_2 D'_1 = 0$.

Podobnie, dwa równania

(3) $$P_1 + \lambda P_2 = 0 \quad i \quad P'_1 + \lambda P'_2 = 0,$$

przy téj saméj wartości λ, dają wartości spółrzędnych prostéj, która łączy dwa odpowiednie punkty dwu szeregów jednokréślnych. Wypadek więc rugowania λ z tych dwu równań

(4) $$P_1 P'_2 - P_2 P'_1 = 0$$

jest równaniem obwiedni prostych, łączących odpowiednie punkty dwu szeregów jednokréślnych. To równanie jest stopnia 2-go względem spółrzędnych linii prostéj u, v, a więc przedstawia liniją krzywą klasy 2-éj. Z tego równania widzimy nadto, że podstawy $P_1 P_2$ i $P'_1 P'_2$ są stycznymi do téj linii; albowiém wartości na u i v, które czynią zadość jednocześnie równaniom $P_1 = 0$ i $P_2 = 0$, lub równaniom $P'_1 = 0$ i $P'_2 = 0$, uczynią zadość także równaniu $P_1 P'_2 - P_2 P'_1 = 0$.

W szczególnym przypadku, gdy dwa pęki promieni (1) *lub dwa szeregi punktów* (3) *są perspektywiczne, linija rzędu 2-go* (2) *i linija klasy 2-éj* (4) *roskładają się: piérwsza na dwie proste, a druga na dwa punkty.*

Jakoż, wziąwszy promień spólny dwu pęków perspektywicznych za promień zasadniczy D_1 i tak samo punkt spólny dwu szeregów perspektywicznych za punkt zasadniczy P_1, otrzymamy, jako równania dwu pęków perspektywicznych,

(5) $$D_1 + \lambda D_2 = 0, \quad D_1 + \lambda D'_2 = 0,$$

a jako równania dwu szeregów perspektywicznych,

(6) $$P_1 + \lambda P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda P'_2 = 0.$$

Rugowanie λ z równań (5) daje

(7) $$D_1 (D'_2 - D_2) = 0,$$

a rugowanie λ z równań (6) daje

(8) $$P_1 (P'_2 - P_2) = 0.$$

Równanie (7) przedstawia istotnie parę prostych

$$D_1 = 0 \quad \text{i} \quad D'_2 - D_2 = 0,$$

a równanie (8) przedstawia podobnież parę punktów

$$P_1 = 0 \quad \text{i} \quad P'_2 - P_2 = 0.$$

Badanie szczegółowe linij rzędu 2-go i klasy 2-éj, będzie przedmiotem dalszych rozdziałów. Uzasadnimy jednak przedtym nowy układ spółrzędnych punktu i linii prostéj, którego użycie wprowadzi w to badanie ważne ułatwienie i uproszczenie.

ĆWICZENIA.

(29). Jeżeli dwie proste OK i OK′ przecinają szereg prostych równoległych KK′, LL′, MM′, NN′ w punktach K, L, M, N i K′, L′, M′, N′, to (KLMN) = (K′L′M′N′).

(30). Okazać, że cztéry elementy $R_2 = 0$, $R_1 + l_1 R_2$, $R_1 + l_2 R_2 = 0$, $R_1 + l_3 R_2$ są harmoniczne, gdy $l_1 = \frac{1}{2}(l_2 + l_3)$.

(31). Okazać, że cztéry elementy $R_1 = 0$, $R_1 + l_1 R_2 = 0$, $R_1 + l_2 R_2 = 0$, $R_1 + l_3 R_2 = 0$ są harmoniczne, gdy $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right)$.

(32). Punkt O, leżący wewnątrz trójkąta ABC, połączmy prostymi AO, BO, CO z wiérzchołkami tego trójkąta i poprowadźmy przez te wiérzchołki A, B, C proste B′C′, C′A′, A′B′, harmonicznie sprzężone z prostymi AO, BO, CO względem pary boków, które z tych wiérzchołków wychodzą: okazać, że trójkąty ABC i A′B′C′ są spółosiowe.

(33). A, A′ są dwa punkty na osi x, a B, B′ dwa punkty na osi y; AB i A′B′ przecinają się w P, a AB′ i A′B w Q: znaléść równanie prostéj PQ i okazać, że ta prosta dzieli osi harmonicznie.

(34). Boki BC, CA, AB trójkąta ABC obracają się około punktów stałych L, M, N, gdy tymczasem dwa jego wiérzchołki, A i B, poruszają się na dwu prostych stałych OA i OB: okazać, że miejscem trzeciego wiérzchołka C jest linija rzędu 2-go przechodząca przez L i M.

(35). Wiérzchołki trójkąta poruszają się na trzech prostych stałych, a dwa jego boki obracają się około dwu punktów stałych: okazać, że obwiednią trzeciego boku jest krzywa klasy 2-éj.

(36). Dwa kąty stałéj wielkości, APB i AQB, obracają się około swych wiérzchołków P i Q, przyczym punkt przecięcia się ramion PA i QA przebiega prostą: okazać, że miejscem przecięcia się dwu pozostałych ramion, PB i QB, jest krzywa rzędu 2-go.

ROZDZIAŁ IV.

O SPÓŁRZĘDNYCH JEDNORODNYCH.

SPÓŁRZĘDNE TRÓJKĄTNE NAJOGÓLNIEJSZE.

52. W badaniach linij, przedstawionych przez równania algiebraiczne, czyto między spółrzędnymi punktu (x, y), czytéż między spółrzędnymi linii prostéj (u, v), zależy wiele na tym, ażeby te równania, jeżeli one nie są jednorodne, zastąpić przez równania jednorodne. Własności bowiém równań jednorodnych upraszczają i ułatwiają ich rostrząsanie, a nadto wprowadzają ujednostajnienie tak w wyrażenia analityczne, jak i w wysłowienie otrzymanych wyników. W tym celu, zamiast spółrzędnych zwyczajnych punktu (x, y), lub linii prostéj (u, v), wprowadzimy nowe spółrzędne, t. z. s p ó ł r z ę d n e j e d n o r o d n e.

Oznaczmy przez x i y spółrzędne Descartes'a punktu i połóżmy

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= \varkappa x_1,\\ a_2x + b_2y + c_2 &= \varkappa x_2,\\ a_3x + b_3y + c_3 &= \varkappa x_3,\end{aligned}\right.$$

gdzie $a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$ są jakiekolwiek liczby stałe, których wyznacznik nie jest równy 0, a $\varkappa$ oznacza czynnik nieoznaczony.

Obecność czynnika $\varkappa$ nie dozwala wyznaczyć dokładnie wartości na x_1, x_2, x_3, odpowiadających pewnym danym wartościom na x i y. Atoli, jeżeli równania (1) przez siebie dzielić będziemy stronami odpowiednimi, wówczas czynnik $\varkappa$ zostanie wyrugowany, wskutek czego każdemu danemu układowi wartości na x i y będzie odpowiadał układ wartości dokładnie wyznaczonych na s t o s u n k i $x_1 : x_2 : x_3$. Naodwrót, każdemu danemu układowi wartości na x_1, x_2, x_3 odpowiada jedyny układ wartości na x i y, który otrzymamy, rozwiązując równania (1) względem $x, y, \varkappa$. Te wartości są widocznie kształtu:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3},\\ y &= \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3},\end{aligned}\right.$$

gdzie A_1, B_1, C_1, A_2,... są ilościami dołączonymi w wyznaczniku

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}$$

do elementów a_1, b_1, c_1, a_2,.... Wartości więc (2) na x i y widocznie zależą jedynie od stosunków $x_1 : x_2 : x_3$, zachodzących między wartościami na x_1, x_2, x_3.

Te nowe zmienne x_1, x_2, x_3, określone równaniami (1), zowią się **spółrzędnymi jednorodnymi punktu.**

53. Tym spółrzędnym jednorodnym, można nadać następujące znaczenie gieometryczne:

Równania $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ przedstawiają odpowiednio trzy proste A_2A_3, A_3A_1 i A_1A_2 (fig. 23), których równania ogólne są

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

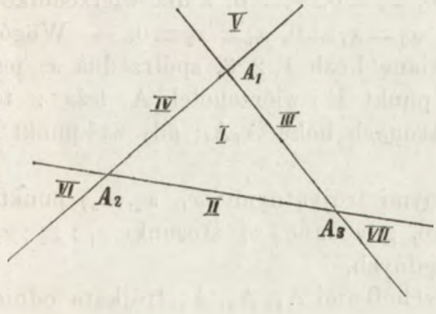


Fig. 23.

Te trzy proste, które będziemy nazywali odpowiednio prostą d_1, prostą d_2 i prostą d_3, zamykają trójkąt $A_1A_2A_3$, którego pole nie jest równe 0, albowiém założyliśmy, że wyznaczenik (3) jest od 0 różny (art. 25).

Przyjąwszy, że układ spółrzędnych Descartes'a jest prostokątny, i oznaczywszy przez δ_1, δ_2, δ_3 długości prostopadłych, spuszczonych z jakiegokolwiek punktu P (x, y) na boki trójkąta $A_1A_2A_3$, będziemy mieli (art. 19)

$$(4) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = \delta_1\sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}, \\ a_2x + b_2y + c_2 = \delta_2\sqrt{a_2{}^2 + b^2{}_2}, \\ a_3x + b_3y + c_3 = \delta_3\sqrt{a_3{}^2 + b^2{}_3}. \end{cases}$$

Weźmy jeszcze pod uwagę trzy inne proste d'_1, d'_2, d'_3; oznaczmy przez $d_1d'_1$, $d_2d'_2$ i $d_3d'_3$ kąty, jakie te nowe proste d'_1, d'_2 i d'_3 tworzą odpowiednio z bokami d_1, d_2 i d_3 trójkąta $A_1A_2A_3$ i połóżmy

$$(5) \quad \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2} = \frac{\varkappa}{\sin d_1d'_1}, \quad \sqrt{a_2{}^2 + b_2{}^2} = \frac{\varkappa}{\sin d_2d'_2}, \quad \sqrt{a_3{}^2 + b_3{}^2} = \frac{\varkappa}{\sin d_3d'_3}.$$

Wskutek (4) i (5), równania (1) zamienią się na

$$(6) \qquad x_1 = \frac{\delta_1}{\sin d_1 d'_1}, \quad x_2 = \frac{\delta_2}{\sin d_2 d'_2}, \quad x_3 = \frac{\delta_3}{\sin d_3 d'_3},$$

t. j. spółrzędne jednorodne (x_1, x_2, x_3) punktu można uważać jako odległości punktu od boków trójkąta $A_1A_2A_3$, wzięte w kierunkach prostych d'_1, d'_2, d'_3, dowolnie obranych. Z tego powodu, spółrzędne jednorodne, określone równaniami (1), zowią się także spółrzędnymi trójkątnymi punktu. Sam zaś trójkąt $A_1A_2A_3$, którego boki A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 są przedstawione odpowiednio przez równania $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, zowie się trójkątem odniesienia.

Boki trójkąta odniesienia, w obu kierunkach nieograniczenie przedłużone, roskładają całą płaszczyznę na siedém pól. Jeżeli przyjmiemy, że początek układu spółrzędnych Descartes'a znajduje się wewnątrz trójkąta, t. j. w polu I, wówczas, jak to z wzorów (6) jest widoczne, wszystkie trzy spółrzędne trójkątne każdego punktu w polu I będą miały znak jednakowy. Przyjąwszy, że te spółrzędne są dodatne, ze spółrzędnych punktów, znajdujących się w polu II, III, IV, mićć będziemy dwie dodatne a jednę ujemną, którą będzie odpowiednio spółrzędna x_1, x_2, x_3; ze spółrzędnych zaś punktów, znajdujących się w polach V, VI, VII, będą dwie ujemne a jedna dodatna, którą będzie odpowiednio spółrzędna x_1, x_2, x_3. Dla punktów, leżących na bokach A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, mamy odpowiednio $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, a dla wiérzchołków A_1, A_2, A_3 odpowiednio $x_2=x_3=0$, $x_3=x_1=0$, $x_1=x_2=0$. — Wogólności, jeżeli ikl jest jakąkolwiek przemianą liczb 1, 2, 3, spółrzędna x_i jest dodatna lub ujemna, według tego, czy punkt P i wiérzchołek A_i leżą z téj saméj strony, czytéż po przeciwnych stronach boku A_kA_l; gdy zaś punkt P leży na boku A_kA_l, to $x_i=0$.

54. Pomiędzy trzema spółrzędnymi trójkątnymi (x_1, x_2, x_3) punktu P zachodzi związek, zapomocą którego, gdy dane są stosunki $x_1 : x_2 : x_3$, można obliczyć wartości samych spółrzędnych.

Jakoż, połączmy punkt P z wiérzchołkami A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia $A_1A_2A_3$, którego obieg jest dodatny (art. 24); otrzymamy wtedy trzy trójkąty PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2, których suma algiebraiczna jest równa trójkątowi $A_1A_2A_3$

$$(7) \qquad PA_2A_3 + PA_3A_1 + PA_1A_2 = A_1A_2A_3.$$

Prawdziwość tego wzoru jest widoczna, kiedy punkt P leży w polu I (fig. 23), albowiém obiegi tych trzech trójkątów, a więc i ich pola, są dodatne, a suma tych pól jest równa polu trójkąta $A_1A_2A_3$. Wzór ten utrzyma się także i wtedy, kiedy punkt P leży w którymkolwiek z sześciu pól pozostałych. Albowiém wtedy, jeżeli punkt P leży w polu II, III, lub IV, to odpowiednio pola trójkątów PA_2A_3, PA_3A_1, lub PA_1A_2 będą ujemne, a jeżeli punkt P leży w polu V, VI, lub VII, to odpowiednio pola par trójkątów PA_3A_1, PA_1A_2; PA_1A_2, PA_2A_3; PA_2A_3, PA_3A_1 będą ujemne.

Wskutek umowy zrobionéj w artykule poprzedzającym, spółrzędne trójkątne (x_1, x_2, x_3) punktu P, a przeto i odległości prostopadłe δ_1, δ_2, δ_3 tego punktu od boków A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, są dodatne lub ujemne, według tego, czy obiegi trójkątów PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2 są dodatne, czyteż ujemne. Kładąc więc

$$A_2A_3 = s_1, \quad A_3A_1 = s_2, \quad A_1A_2 = s_3,$$

mieć będziemy, co do wielkości i co do znaku,

$$PA_2A_3 = \frac{1}{2}s_1\delta_1, \quad PA_3A_1 = \frac{1}{2}s_2\delta_2, \quad PA_1A_2 = \frac{1}{2}s_3\delta_3$$

lub, wskutek (6),

$$PA_2A_3 = \frac{1}{2}s_1x_1\sin d_1d'_1, \quad PA_3A_1 = \frac{1}{2}s_2x_2\sin d_2d'_2, \quad PA_1A_2 = \frac{1}{2}s_3x_3\sin d_3d'_3.$$

Podstawiając te wartości we wzór (7) i oznaczając przez Δ pole trójkąta odniesienia, otrzymamy związek żądany,

$$(7') \qquad s_1x_1\sin d_1d'_1 + s_2x_2\sin d_2d'_2 + s_3x_3\sin d_3d'_3 = 2\Delta.$$

Jeżeli więc spółrzędne trójkątne x_1, x_2, x_3 są proporcyjonalne do trzech danych liczb λ_1, λ_2, λ_3, mamy wówczas, podług znanego twierdzenia arytmetycznego,

$$(8) \qquad \frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3} = \frac{s_1x_1\sin d_1d'_1 + s_2x_2\sin d_2d'_2 + s_2x_3\sin d_3d'_3}{\lambda_1s_1\sin d_1d'_1 + \lambda_2s_2\sin d_2d'_2 + \lambda_3s_3\sin d_3d'_3}$$

$$= \frac{2\Delta}{\lambda_1s_1\sin d_1d'_1 + \lambda_2s_2\sin d_2d'_2 + \lambda_3s_3\sin d_3d'_3}.$$

Zapomocą równania (7') można każde niejednorodne równanie algiebraiczne między x_1, x_2, x_3 uczynić jednorodnym, mnożąc każdy wyraz, którego stopień jest o p niższy od stopnia n równania, przez

$$\left(\frac{s_1x_1\sin d_1d'_1 + s_2x_2\sin d_2d'_2 + s_3x_3\sin d_3d'_3}{2\Delta}\right)^p,$$

czyli, wskutek (7'), przez 1.

55. Wzory (1) służą do przejścia od układu spółrzędnych trójkątnych do układu spółrzędnych Descartes'a; zapomocą zaś wzorów (2), które są rozwiązaniami wzorów (1) względem x i y, można, naodwrót, od spółrzędnych Descartes'a przejść do spółrzędnych trójkątnych.

W równaniu linii prostéj

$$(9) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

podstawmy za x i y wyrażenia (2). Kładąc jeszcze

$$(10) \qquad \begin{cases} A_1u + B_1v + C_1 = \lambda u_1, \\ A_2u + B_2v + C_2 = \lambda u_2, \\ A_3u + B_3v + C_3 = \lambda u_3, \end{cases}$$

mieć będziemy

(11) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$
równanie jednorodne linii prostéj.

Spółczynniki u_1, u_2, u_3 w tym równaniu nazywamy **spółrzędnymi trójkątnymi linii prostéj**, któréj spółrzędne Plücker'a są u i v. W artykule 25 okazaliśmy, że

$$\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}; \frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}; \frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}$$

są odpowiednio spółrzędnymi wiérzchołków A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia $A_1A_2A_3$. Równania więc (10) pokazują, że można uważać spółrzędne trójkątne linii prostéj za odległości trzech wiérzchołków trójkąta odniesienia od téjże linii prostéj, wzięte w pewnych kierunkach dowolnie obranych (art. 19).

Rozwiązując równania (10) względem u, v, λ, znajdziemy

$$u = \frac{\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3}{\gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3},$$
$$v = \frac{\beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3}{\gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3},$$

gdzie α_1, β_1, γ_1, α_2, ... są ilościami dołączonymi w wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix}$$

do elementów A_1, B_1, C_1, A_2, ... Że zaś elementy tego wyznacznika są znowu ilościami dołączonymi do elementów wyznacznika (3), więc, według znanego twierdzenia, mamy:

$$\alpha_1 = D . a_1, \quad \beta_1 = D . b_1, \quad \gamma_1 = D . c_1, \quad \alpha_2 = D . a_2, ...$$

Wskutek tego, powyższe wyrażenia na u i v przywodzą się do kształtu:

(12) $$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3}{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3}, \\ v &= \frac{b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3}{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3}. \end{aligned} \right.$$

Jak zapomocą wzorów (10) można przejść od spółrzędnych trójkątnych linii prostéj do spółrzędnych Plücker'a, tak nawzajem, zapomocą wzorów (12) można od tych ostatnich przejść do poprzednich.

Wstawmy wartości (12) na u i v w równanie punktu

(13) $$xu + yv + 1 = 0,$$

którego spółrzędne Descartes'a są x i y. Kładąc jeszcze

(1) $$\left\{ \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= \varkappa x_1, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= \varkappa x_2, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= \varkappa x_3, \end{aligned} \right.$$

otrzymujemy

(14) $$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0,$$

równanie jednorodne punktu, którego spółrzędne trójkątne są x_1, x_2, x_3.

Z powyższego wypada, że w układzie spółrzędnych trójkątnych tak linija prosta, jak i punkt, wyrażają się przez równania jednorodne stopnia 1-go: prosta przez równanie między spółrzędnymi punktu bieżącego, a punkt przez równanie między spółrzędnymi prostéj bieżącéj. Wypada nadto, że toż samo równanie $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$ stopnia 1-go i jednorodne, tak względem spółrzędnych punktu (x_1, x_2, x_3), jak i względem spółrzędnych linii prostéj (u_1, u_2, u_3), przedstawia prostą lub punkt, według tego, czy piérwsze, czytéż drugie z tych spółrzędnych są liczbami zmiennymi.

56. Połóżmy

(15) $$\begin{cases} x_1=l_1X_1+l_2X_2+l_3X_3, \\ x_2=m_1X_1+m_2X_2+m_3X_3, \\ x_3=n_1X_1+n_2X_2+n_3X_3, \end{cases}$$

i oznaczmy przez L wyznacznik

(16) $$L=\begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3, \\ m_1, & m_2, & m_3, \\ n_1, & n_2, & n_3, \end{vmatrix},$$

a przez $L_1, L_2, L_3, M_1, \ldots$ ilości dołączone do elementów $l_1, l_2, l_3, m_1, \ldots$ w tym wyznaczniku. Rozwiązując równania (15) względem X_1, X_2, X_3 i, dla skrócenia, kładąc

(17) $$L_1=\lambda_1L,\quad L_2=\lambda_2L,\quad L_3=\lambda_3L,\quad M_1=\mu_1L,\ldots,$$

otrzymamy, naodwrót, równania

(18) $$\begin{cases} X_1=\lambda_1x_1+\mu_1x_2+\nu_1x_3, \\ X_2=\lambda_2x_1+\mu_2x_2+\nu_2x_3, \\ X_3=\lambda_3x_1+\mu_3x_2+\nu_3x_3, \end{cases}$$

których wyznacznik

(19) $$\Lambda=\begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{L},$$

wskutek (17) i znanego twierdzenia z teoryi wyznaczników, według którego

$$\begin{vmatrix} L_1, & M_1, & N_1 \\ L_2, & M_2, & N_2 \\ L_3, & M_3, & N_3 \end{vmatrix}=L^2.$$

Zmienne X_1, X_2, X_3 tworzą widocznie nowy układ spółrzędnych trójkątnych. Aby otrzymać równania boków tego nowego trójkąta odniesienia, należy w równaniach $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$ za x_1, x_2, x_3 podstawić ich wartości (1). Tymi bokami są więc proste, przedstawione przez równania

$$(20)\quad \begin{cases} \lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\mu_1(a_2x+b_2y+c_2)+\nu_1(a_3x+b_3y+c_3)=0, \\ \lambda_2(a_1x+b_1y+c_1)+\mu_2(a_2x+b_2y+c_2)+\nu_2(a_3x+b_3y+c_3)=0, \\ \lambda_3(a_1x+b_1y+c_1)+\mu_3(a_2x+b_2y+c_2)+\nu_3(a_3x+b_3y+c_3)=0. \end{cases}$$

Ponieważ zaś, odwrotnie, każdą funkcyją stopnia 1-go względem x i y można przedstawić pod taką właśnie postacią, dobrawszy tylko stosownie stałe $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \ldots$ (art. 30), więc, widocznie, dwa układy spółrzędnych trójkątnych jednego punktu, odpowiadające dwu różnym trójkątom odniesienia, są z sobą połączone równaniami stopnia 1-ego takimi, jak równania (15) i (18).

57. Jeżeli w równaniach (1) założymy $a_1=1$, $b_1=c_1=0$; $b_2=1$, $c_2=a_2=0$; $c_3=1$, $a_3=b_3=0$, to wówczas

$$(21)\qquad x=\varkappa x_1,\quad y=\varkappa x_2,\quad 1=\varkappa x_3, \text{ i}$$

$$(22)\qquad x=\frac{x_1}{x_3},\qquad y=\frac{x_2}{x_3}.$$

Tak określone spółrzędne trójkątne x_1, x_2, x_3 zowią się s z c z e g ó l n y m i s p ó ł r z ę d n y m i j e d n o r o d n y m i p u n k t u.

Według (21), bokami trójkąta odniesienia są teraz: oś y-ów, t. j. $x=0$, oś x-ów, t. j. $y=0$, i prosta, przedstawiona przez równanie $1=0$. Z tego ostatniego równania, napisanego w postaci

$$0.x+0.y+1=0,$$

widać, że przedstawia ono prostą w nieskończoności.

Przy tych samych założeniach, równania (10) przywodzą się do następujących:

$$(23)\qquad u=\lambda u_1,\quad v=\lambda u_2,\quad 1=\lambda u_3,$$

z których

$$(24)\qquad u=\frac{u_1}{u_3},\qquad v=\frac{u_2}{u_3}.$$

Tak określone spółrzędne trójkątne u_1, u_2, u_3 zowią się s z c z e g ó l n y m i s p ó ł r z ę d n y m i j e d n o r o d n y m i l i n i i p r o s t é j.

SPÓŁRZĘDNE TRÓJKĄTNE PROSTOPADŁE.

58. Zajmiemy się jeszcze szczegółowo s p ó ł r z ę d n y m i t r ó j k ą t n y m i p r o s t o p a d ł y m i punktu i linii prostéj, przez które rozumiemy odpowiednio odległości prostopadłe punktu od boków trójkąta odniesienia i odległości prostopadłe wiérzchołków trójkąta odniesienia od linii prostéj.

Jeżeli

$$x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-p_1=0,\; x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2-p_2=0,\; x\cos\varphi_3+y\sin\varphi_3-p_3=0$$

są równaniami normalnymi boków A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta odniesienia $A_1A_2A_3$, wewnątrz którego przyjmujemy początek układu spółrzędnych prostokątnych Descartes'a, to, oznaczając przez x_1, x_2, x_3 spółrzędne trójkątne prostopadłe jakiegokolwiek punktu na płaszczyźnie trójkąta, mamy, co do wielkości i co do znaku (art. 19),

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = -(x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1), \\ x_2 = -(x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2), \\ x_3 = -(x\cos\varphi_3 + y\sin\varphi_3 - p_3). \end{cases}$$

Między tymi spółrzędnymi ma miejsce związek [art. 55, (7')]

$$(2)\qquad s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 2\Delta,$$

który, kładąc $\frac{2\Delta}{s_1} = h_1$, $\frac{2\Delta}{s_2} = h_2$, $\frac{2\Delta}{s_3} = h_3$, przywiedziemy do postaci

$$(3)\qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

h_1, h_2, h_3 oznaczają tu długości prostopadłych, spuszczonych z wierzchołków A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia na boki przeciwległe A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, czyli trzy wysokości trójkąta odniesienia. Ponieważ zaś, według znanego twierdzenia trygonometrycznego, $\frac{s_1}{\sin A_1} = \frac{s_2}{\sin A_2} = \frac{s_3}{\sin A_3} = 2\rho$, gdzie ρ jest promieniem koła opisanego na trójkącie odniesienia, więc, oznaczając jeszcze $\frac{\Delta}{\rho} = S$, możemy związek (2) przedstawić także pod postacią

$$(4)\qquad x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3 = S.$$

59. W artykule 30 okazaliśmy, że równanie wszelkiéj prostéj $D = 0$ można wyrazić zapomocą równań trzech prostych $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ pod postacią $\varkappa_1 D_1 + \varkappa_2 D_2 + \varkappa_3 D_3 = 0$. Z tego wynika bespośrednio, że równanie wszelkiéj prostéj we spółrzędnych trójkątnych punktu daje się przedstawić pod postacią

$$(5)\qquad \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0.$$

Nawzajem, każde równanie kształtu (5) przedstawia liniją prostą, albowiém, podstawiwszy w równaniu (5) za x_1, x_2, x_3 wartości (1), otrzymamy równanie stopnia 1-go względem x i y, a takie równanie przedstawia tylko liniją prostą.

Położenie prostéj, przedstawionéj przez równanie (5), zależy jedynie od wartości stosunków $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$, zachodzących między trzema spółczynnikami $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Wyznaczymy to położenie, gdy znajdziemy spółrzędne punktów L_1, L_2, L_3, w których ta prosta przecina boki A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta odniesienia. Tak np. dla punktu L_1 na boku A_2A_3 mamy $x_1 = 0$, a nadto ze związków (2) i (5) $s_2x_2 + s_3x_3 = 2\Delta$, $\varkappa_2x_2 + \varkappa_3x_3 = 0$, wskutek czego

$$\frac{x'_1}{0} = \frac{x'_2}{\varkappa_3} = \frac{x'_3}{-\varkappa_2} = \frac{2\Delta}{s_2\varkappa_3 - s_3\varkappa_2}.$$

Taksamo znajdziemy spółrzędne (x''_1, x''_2, x''_3) i (x'''_1, x'''_2, x'''_3) punktów L_2 i L_3 na bokach A_3A_1 i A_1A_2.

Między trzema parami odcinków L_1A_2, L_1A_3; L_2A_3, L_2A_1; L_3A_1, L_3A_2 zachodzi związek uwagi godny. Z równania $\varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3 = 0$, któremu zadość czynią spółrzędne punktu L_1, wypada $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = -\frac{x'_3}{x'_2}$. Zaś x'_2 i x'_3 są prostopadłymi, spuszczonymi z punktu L_1 na boki A_3A_1 i A_1A_2, zatym $x'_2 = L_1A_3 \sin A_3$, $x'_3 = L_1A_2 \sin A_2$ i

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = -\frac{L_1A_2 \sin A_2}{L_1A_3 \sin A_3}.$$

Taksamo znajdziemy

$$\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} = -\frac{L_2A_3 \sin A_3}{L_2A_1 \sin A_1}, \qquad \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = -\frac{L_3A_1 \sin A_1}{L_3A_2 \sin A_2}.$$

Mnożąc przez siebie te trzy równania stronami odpowiednimi, otrzymujemy związek

$$\frac{L_1A_2 \,.\, L_2A_3 \,.\, L_3A_1}{L_1A_3 \,.\, L_2A_1 \,.\, L_3A_2} = -1,$$

wyrażający znane twierdzenie Ptolomeusza.

Zauważmy jeszcze, że równania

$$(6) \qquad \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0, \quad \varkappa_3 x_3 + \varkappa_1 x_1 = 0, \quad \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 = 0$$

przedstawiają pewne proste, przechodzące odpowiednio przez wierzchołki A_1, A_2, A_3. Te same jednak równania, napisane w postaciach

$$(\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3) - \varkappa_1 x_1 = 0,$$
$$(\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3) - \varkappa_2 x_2 = 0,$$
$$(\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3) - \varkappa_3 x_3 = 0,$$

przedstawiają także proste, przechodzące odpowiednio przez punkty L_1, L_2 i L_3. Równania więc (6) są równaniami trzech prostych A_1L_1, A_2L_2 i A_3L_3, z których wypada odpowiednio

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = -\frac{x_3}{x_2} = -\frac{\sin L_1A_1A_2}{\sin L_1A_1A_3}, \qquad \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} = -\frac{x_1}{x_3} = -\frac{\sin L_2A_2A_3}{\sin L_2A_2A_1},$$
$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{\sin L_3A_3A_1}{\sin L_3A_3A_2}.$$

Mnożąc te równania przez siebie stronami odpowiednimi, otrzymujemy związek

$$\frac{\sin L_1A_1A_2 \,.\, \sin L_2A_2A_3 \,.\, \sin L_3A_3A_1}{\sin L_1A_1A_3 \,.\, \sin L_2A_2A_1 \,.\, \sin L_3A_3A_2} = -1.$$

Weźmy nakoniec pod uwagę proste A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, które z odpowiednimi prostymi A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 tworzą pary harmonicznie sprzężone z odpowiednimi parami boków A_1A_2, A_1A_3; A_2A_3, A_2A_1; A_3A_1, A_3A_2; równania tych prostych są (art. 39)

$$\varkappa_2 x_2 - \varkappa_3 x_3 = 0,\quad \varkappa_3 x_3 - \varkappa_1 x_1 = 0,\quad \varkappa_1 x_1 - \varkappa_2 x_2 = 0.$$

Suma tych trzech równań jest tożsamościowo równa 0, proste więc A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 przecinają się w jednym punkcie.

60. Aby wyznaczyć spółrzędne trójkątne u_1, u_2, u_3 prostéj, przedstawionéj przez równanie (5), wynajdziemy prostopadłą odległość téj prostéj od punktu, którego spółrzędne trójkątne są (x'_1, x'_2, x'_3), spółrzędne zaś prostokątne (x', y').

Równanie (5), po podstawieniu wyrażeń (1) na x_1, x_2 i x_3, przechodzi na następujące

$$(\varkappa_1\cos\varphi_1 + \varkappa_2\cos\varphi_2 + \varkappa_3\cos\varphi_3)\, x + (\varkappa_1\sin\varphi_1 + \varkappa_2\sin\varphi_2 + \varkappa_3\sin\varphi_3)\, y - (\varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2 + \varkappa_3 p_3) = 0.$$

Podług więc artykułu 19, mamy

$$\delta = -\frac{(\varkappa_1\cos\varphi_1 + \varkappa_2\cos\varphi_2 + \varkappa_3\cos\varphi_3)\, x' + (\varkappa_1\sin\varphi_1 + \varkappa_2\sin\varphi_2 + \varkappa_3\sin\varphi_3)\, y' - (\varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2 + \varkappa_3 p_3)}{\sqrt{(\varkappa_1\cos\varphi_1 + \varkappa_2\cos\varphi_2 + \varkappa_3\cos\varphi_3)^2 + (\varkappa_1\sin\varphi_1 + \varkappa_2\sin\varphi_2 + \varkappa_3\sin\varphi_3)^2}}.$$

Podstawmy tu w liczniku wyrażenia po prawéj

$$-(x'\cos\varphi_1 + y'\sin\varphi_1 - p_1) = x'_1,\quad -(x'\cos\varphi_2 + y'\sin\varphi_2 - p_2) = x'_2,$$
$$-(x'\cos\varphi_3 + y'\sin\varphi_3 - p_3) = x'_3,$$

w mianowniku zaś rozwińmy kwadraty trójmianów, uwzględniając, iż

$$\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3 = \cos(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos(\pi - A_1) = -\cos A_1, \text{ i t. d.};$$

wówczas

$$\delta = \frac{\varkappa_1 x'_1 + \varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]}, \tag{7}$$

gdzie symbol

$$[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3] = \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 - 2\varkappa_2\varkappa_3\cos A_1 - 2\varkappa_3\varkappa_1\cos A_2 - 2\varkappa_1\varkappa_2\cos A_3}. \tag{8}$$

Aby otrzymać spółrzędne trójkątne prostopadłe prostéj (5), dość teraz w wyrażeniu (7) podstawić odpowiednio

$$x'_1 = h_1,\ x'_2 = x'_3 = 0;\quad x'_2 = h_2,\ x'_3 = x'_1 = 0;\quad x'_3 = h_3,\ x'_1 = x'_2 = 0.$$

Tym sposobem znajdziemy

$$u_1 = \frac{\varkappa_1 h_1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]},\quad u_2 = \frac{\varkappa_2 h_2}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]},\quad u_3 = \frac{\varkappa_3 h_3}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]}. \tag{9}$$

Między spółrzędnymi trójkątnymi linii prostéj zachodzi także związek, zapomocą którego z danych ich stosunków można obliczyć ich wartości. Jakoż, z równań (9) wypada, według znanéj własności równych stosunków,

$$\frac{1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]} = \frac{\frac{u_1}{h_1}}{\varkappa_1} = \frac{\frac{u_2}{h_2}}{\varkappa_2} = \frac{\frac{u_3}{h_3}}{\varkappa_3} = \frac{\left[\frac{u_1}{h_1}, \frac{u_2}{h_2}, \frac{u_3}{h_3}\right]}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]}. \tag{10}$$

Otrzymujemy stąd żądany związek

$$\left[\frac{u_1}{h_1}, \frac{u_2}{h_2}, \frac{u_3}{h_3}\right] = 1,$$

czyli, według (8), po podniesieniu obu stron do kwadratu,

$$(10') \quad \frac{u_1^2}{h_1^2}+\frac{u_2^2}{h_2^2}+\frac{u_3^2}{h_3^2}-2\frac{u_2u_3}{h_2h_3}\cos A_1-2\frac{u_3u_1}{h_3h_1}\cos A_2-2\frac{u_1u_2}{h_1h_2}\cos A_3=1.$$

61. Podstawmy w równaniu (5) linii prostéj zamiast $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ wartości wynikające z równań (9); będzie wtedy

$$(11) \qquad \frac{u_1x_1}{h_1}+\frac{u_2x_2}{h_2}+\frac{u_3x_3}{h_3}=0.$$

To równanie wyraża związek między spółrzędnymi trójkątnymi linii prostéj i punktu, leżącego na téj prostéj. A zatym, jeżeli przyjmiemy spółrzędne u_1, u_2, u_3 za dane, a spółrzędne x_1, x_2, x_3 za zmienne, to równanie (11) przedstawia pewną liniją prostą. Jeżeli zaś spółrzędne x_1, x_2, x_3 uważamy jako dane, a spółrzędne u_1, u_2, u_3 jako zmienne, natenczas równanie (11), wyrażając związek pomiędzy spółrzędnymi wszelkich prostych, przechodzących przez jeden punkt, będzie równaniem tego punktu. Równanie (11) jest więc równaniem prostéj, mającéj spółrzędne dane (u_1, u_2, u_3), lub równaniem punktu, mającego spółrzędne dane (x_1, x_2, x_3).

Tego kształtu równanie prostéj lub punktu we spółrzędnych trójkątnych nazywamy równaniem normalnym, piérwsza bowiém jego strona przedstawia długość prostopadłéj z punktu (x_1, x_2, x_3) na prostą (u_1, u_2, u_3). Jakoż, wskutek (9), wyrażenie (7) przechodzi na

$$(12) \qquad \delta=\frac{u_1x'_1}{h_1}+\frac{u_2x'_2}{h_2}+\frac{u_3x'_3}{h_3}.$$

Porównywając równanie ogólne

$$(13) \qquad \varkappa_1x_1+\varkappa_2x_2+\varkappa_3x_3=0$$

linii prostéj z jéj równaniem normalnym (11), otrzymujemy, na mocy związku (10), następujące wartości na spółrzędne téj prostéj:

$$(14) \qquad \frac{\frac{u_1}{h_1}}{\varkappa_1}=\frac{\frac{u_1}{h_2}}{\varkappa_2}=\frac{\frac{u_3}{h_3}}{\varkappa_3}=\frac{1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3]}.$$

Jeżeli prosta oddala się do nieskończoności, wówczas jéj spółrzędne, rosnąc bez granic, dążą do wartości równych sobie. Dla prostéj w nieskończoności mamy więc ze związków (14)

$$\varkappa_1h_1=\varkappa_2h_2=\varkappa_3h_3,$$

wskutek czego

$$(15) \qquad \frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}=0$$

jest równaniem prostéj w nieskończoności. Równanie (15) można pisać w postaci (art. 58)

$$(16) \qquad s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0, \text{ lub } x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3=0.$$

Podobnie, porównywając równanie ogólne punktu

(17) $$\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 = 0$$

z jego równaniem normalnym (11), otrzymujemy, przy uwzględnieniu związku (3),

(18) $$\frac{\frac{x_1}{h_1}}{\varkappa_1} = \frac{\frac{x_2}{h_2}}{\varkappa_2} = \frac{\frac{x_3}{h_3}}{\varkappa_3} = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3}.$$

Z tych wyrażeń widzimy, że punkt, przedstawiony przez równanie (17), znajdzie się w nieskończoności, gdy

(19) $$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0,$$

t. j. gdy suma spółczynników w jego równaniu jest równa 0.

62. Równanie prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty dane (x'_1, x'_2, x'_3) i (x''_1, x''_2, x''_3), jest wypadkiem rugowania $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$ z trzech równań

$$\begin{aligned} \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 &= 0, \\ \varkappa_1 x'_1 + \varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3 &= 0, \\ \varkappa_1 x''_1 + \varkappa_2 x''_2 + \varkappa_3 x''_3 &= 0, \end{aligned}$$

t. j.

(20) $$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nawzajem równanie (20) wyraża warunek, pod jakim trzy punkty leżą na jednéj prostéj. — Podobnie, równanie punktu przecięcia się dwu prostych danych (u'_1, u'_2, u'_3) i (u''_1, u''_2, u''_3) jest

(21) $$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ u'_1, & u'_2, & u'_3 \\ u''_1, & u''_2, & u''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

i nawzajem, równanie (21) wyraża warunek, pod jakim trzy proste przechodzą przez jeden punkt.

Równanie prostéj D, przechodzącéj przez punkt przecięcia się dwu prostych danych

$$\mathrm{D}' \equiv \frac{1}{h_1} u'_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u'_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u'_3 x_3 = 0, \quad \mathrm{D}'' \equiv \frac{1}{h_1} u''_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u''_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u''_3 x_3 = 0,$$

jest

$$\mathrm{D} \equiv \mathrm{D}' + \lambda \mathrm{D}'' = 0.$$

Oznaczając przez u_1, u_2, u_3 spółrzędne téj prostéj, mamy

(22) $$\frac{u_1}{u'_1 + \lambda u''_1} = \frac{u_2}{u'_2 + \lambda u''_2} = \frac{u_3}{u'_3 + \lambda u''_3}.$$

Znaczenie czynnika λ jest tu takież samo, jak w art. 27. — Podobnie, równanie punktu P, leżącego na prostéj, łączącéj dwa punkty dane

$$\mathrm{P}' = \frac{1}{h_1} x'_1 u_1 + \frac{1}{h_2} x'_2 u_2 + \frac{1}{h_3} x'_3 u_3, \quad \mathrm{P}'' = \frac{1}{h_1} x''_1 u_1 + \frac{1}{h_2} x''_2 u_2 + \frac{1}{h_3} x''_3 u_3,$$

jest

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}' + \lambda \mathrm{P}'' = 0.$$

Oznaczając przez x_1, x_2, x_3 spółrzędne tego punktu, mamy

$$\frac{x_1}{x_1 + \lambda x''_1} = \frac{x_2}{x'_2 + \lambda x''_2} = \frac{x_3}{x'_3 + \lambda x''_3}. \tag{23}$$

Znaczenie czynnika λ jest i tu takież samo, jak w art. 28.

63. Wyznaczymy kąt γ między dwiema prostymi, przedstawionymi przez równania

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0, \quad \varkappa'_1 x_1 + \varkappa'_2 x_2 + \varkappa'_3 x_3 = 0, \tag{24}$$

gdy te równania przekształcimy, wprowadzając spółrzędne prostokątne zapomocą równań (1), i gdy następnie tak postąpimy, jak w art. 22. Znajdziemy tym sposobem

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\varkappa_1 \cos\varphi_1 + \ldots)(\varkappa'_1 \sin\varphi_1 + \ldots) - (\varkappa'_1 \cos\varphi_1 + \ldots)(\varkappa_1 \sin\varphi_1 + \ldots)}{(\varkappa_1 \cos\varphi_1 + \ldots)(\varkappa'_1 \cos\varphi_1 + \ldots) + (\varkappa_1 \cos\varphi_1 + \ldots)(\varkappa'_1 \sin\varphi_1 + \ldots)}.$$

Uskuteczniwszy zaś w liczniku i mianowniku wskazane mnożenia, i uwzględniwszy, iż

$\cos(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos(\pi - \mathrm{A}_1) = -\cos\mathrm{A}_1$, $\sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \sin(\pi - \mathrm{A}_1) = \sin\mathrm{A}_1$, i t. d., otrzymamy

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\varkappa_2\varkappa'_3 - \varkappa_3\varkappa'_2)\sin\mathrm{A}_1 + (\varkappa_3\varkappa'_1 - \varkappa_1\varkappa'_3)\sin\mathrm{A}_2 + (\varkappa_1\varkappa'_2 - \varkappa_2\varkappa'_1)\sin\mathrm{A}_3}{\varkappa_1\varkappa'_1 + \varkappa_2\varkappa'_2 + \varkappa_3\varkappa'_3 - (\varkappa_2\varkappa'_3 + \varkappa_3\varkappa'_2)\cos\mathrm{A}_1 - (\varkappa_3\varkappa'_1 + \varkappa_1\varkappa'_3)\cos\mathrm{A}_2 - (\varkappa_1\varkappa'_2 + \varkappa_2\varkappa'_1)\cos\mathrm{A}_3}. \tag{25}$$

Stąd wypada

$$\varkappa_1\varkappa'_1 + \varkappa_2\varkappa'_2 + \varkappa_3\varkappa'_3 - (\varkappa_2\varkappa'_3 + \varkappa_3\varkappa'_2)\cos\mathrm{A}_1 - (\varkappa_3\varkappa'_1 + \varkappa_1\varkappa'_3)\cos\mathrm{A}_2 - (\varkappa_1\varkappa'_2 + \varkappa_2\varkappa'_1)\cos\mathrm{A}_3 = 0 \tag{26}$$

jako warunek prostopadłości, a

$$(\varkappa_2\varkappa'_3 - \varkappa_3\varkappa'_2)\sin\mathrm{A}_1 + (\varkappa_3\varkappa'_1 - \varkappa_1\varkappa'_3)\sin\mathrm{A}_2 + (\varkappa_1\varkappa'_2 - \varkappa_2\varkappa'_1)\sin\mathrm{A}_3 = 0 \tag{27}$$

jako warunek równoległości dwu prostych danych. Równanie (27) wyraża jednocześnie warunek, pod jakim dwie dane proste przetną się na prostéj w nieskończoności, któréj równanie jest (art. 61)

$$x_1 \sin\mathrm{A}_1 + x_2 \sin\mathrm{A}_2 + x_3 \sin\mathrm{A}_3 = 0.$$

Ze wzoru (25) wypadają także wartości na kąty γ_1, γ_2, γ_3, które prosta dana tworzy z bokami $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ trójkąta odniesienia. Jakoż, jeżeli zamiast drugiéj prostéj (24) weźmiemy pokolei proste $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$, mieć będziemy odpowiednio

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\varkappa_3 \sin A_2 - \varkappa_2 \sin A_3}{\varkappa_1 - \varkappa_3 \cos A_2 - \varkappa_2 \cos A_3},$$
$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\varkappa_1 \sin A_3 - \varkappa_3 \sin A_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1 \cos A_3 - \varkappa_3 \cos A_1},$$
$$\operatorname{tg}\gamma_3 = \frac{\varkappa_2 \sin A_1 - \varkappa_1 \sin A_2}{\varkappa_3 - \varkappa_2 \cos A_1 - \varkappa_1 \cos A_2}.$$

Te zaś równania dają

(28) $$\frac{\sin\gamma_1}{\varkappa_3 \sin A_2 - \varkappa_2 \sin A_3} = \frac{\sin\gamma_2}{\varkappa_1 \sin A_3 - \varkappa_3 \sin A_1} = \frac{\sin\gamma_3}{\varkappa_2 \sin A_1 - \varkappa_1 \sin A_2}.$$

Między kątami γ_1, γ_2, γ_3 zachodzą dwa, różne od siebie związki. Mamy naprzód widocznie

(29) $$\sin\gamma_1 \sin A_1 + \sin\gamma_2 \sin A_2 + \sin\gamma_3 \sin A_3 = 0;$$

nadto, gdy $\gamma_2 - \gamma_1 = \pi - A_3$, skąd $\gamma_1 = -[\pi - (A_3 + \gamma_2)]$, także

$$\sin\gamma_1 + \sin A_3 \cos\gamma_2 + \cos A_3 \sin\gamma_2 = 0$$

lub, wyraziwszy $\cos\gamma_2$ przez $\sin\gamma_2$ i zniósszy niewymierność,

(30) $$\sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 + 2\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos A_3 = \sin^2 A_3,$$

i odpowiednio

(31) $$\sin^2\gamma_2 + \sin^2\gamma_3 + 2\sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \cos A_1 = \sin^2 A_1,$$

(32) $$\sin^2\gamma_2 + \sin^2\gamma_1 + 2\sin\gamma_3 \sin\gamma_1 \cos A_2' = \sin^2 A_2.$$

Z cztérech równań (29) — (32) dwa którekolwiek wynikają oczywiście z dwu pozostałych.

64. Znajdziemy jeszcze odległość d dwu punktów P' i P'', których spółrzędne są (x'_1, x'_2, x'_3) i (x''_1, x''_2, x''_3). — W tym celu, na prostéj P'P'', jako na średnicy, nakréślmy koło, poprowadźmy proste $P'A'_1$ i $P'A'_2$, równoległe do boków A_3A_1 i A_3A_2, aż do przecięcia się w punktach A'_1 i A'_2 z tym kołem, i proste $P''A'_1$, $P''A'_2$ i $A'_1A'_2$, oraz poprowadźmy średnicę A'_1X i cięciwę XA'_2. Widocznie

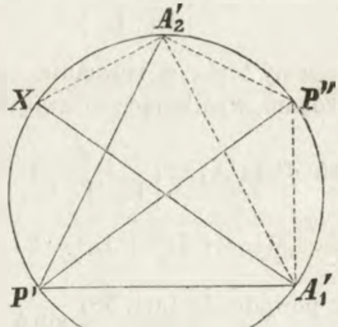


Fig. 24.

$$\begin{aligned} A'_1A'^2_2 &= P''A'^2_1 + P''A'^2_2 - 2P''A'_1 . P''A'_2 \cos A'_1P''A'_2 \\ &= P''A'^2_1 + P''A'^2_2 + 2P''A'_1 . P''A'_2 \cos A_3. \end{aligned}$$

Atoli kąty $A'_1XA'_2$ i $A'_1P'A'_2$ są sobie równe; mamy zatym $\angle A'_1XA'_2 = \angle A_3$, skąd wypada

$$A'_1A'_2 = A'_1X\sin A_3 = P'P''\sin A_3 = d\sin A_3.$$

Nadto $P''A'_1 = x''_2 - x'_2$, $P''A'_2 = x_1'' - x'_1$. — Podstawiwszy w powyższe równanie te wartości na $A'_1A'_2$, $P''A'_1$ i $P''A'_2$, otrzymamy

$$(33) \qquad d^2\sin^2 A_3 = (x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2) + 2(x''_1 - x'_1)(x''_2 - x'_2)\cos A_3.$$

Podobnym sposobem znajdziemy

$$(33') \quad \begin{cases} d^2\sin^2 A_1 = (x''_2 - x'_2)^2 + (x''_3 - x'_3)^2 + 2(x''_2 - x'_2)(x''_3 - x'_3)\cos A_1, \\ d^2\sin^2 A_2 = (x''_3 - x'_3)^2 + (x''_1 - x'_1) \ + 2(x''_3 - x'_3)(x''_1 - x'_1)\cos A_2. \end{cases}$$

Mamy więc trzy wyrażenia na d, symetryczne względem każdych dwu ze spółrzędnych punktów danych.

Aby otrzymać wyrażenie na d symetryczne względem wszystkich trzech spółrzędnych, oznaczmy uprzednio przez L_1, L_2, L_3 wyznaczniki

$$(34) \qquad L_1 = \begin{vmatrix} x'_2, x'_3 \\ x''_2, x''_3 \end{vmatrix}, \quad L_2 = \begin{vmatrix} x'_3, x'_1 \\ x''_3, x''_1 \end{vmatrix}, \quad L_3 = \begin{vmatrix} x'_1, x'_2 \\ x''_1, x''_2 \end{vmatrix},$$

i uważmy, że, uwzględniwszy związek $s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 2\Delta$, mamy

$$\begin{vmatrix} s_2, & s_3 \\ L_2, & L_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & , -s_3 & , s_2 \\ x'_1 & , x'_2 & , x'_3 \\ x''_1 & , x''_2 & , x''_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{s_3} \begin{vmatrix} 0 & , -s_3 & , 0 \\ x'_1 & , x'_2 & , 2\Delta \\ x''_1 & , x''_2 & , 2\Delta \end{vmatrix} = 2\Delta(x'_1 - x''_1).$$

Wtedy

$$(35) \qquad \frac{1}{2\Delta} = \frac{x'_1 - x''_1}{\begin{vmatrix} s_2, & s_3 \\ L_3, & L_3 \end{vmatrix}} \text{ i tak samo } = \frac{x'_2 - x''_2}{\begin{vmatrix} s_3, & s_1 \\ L_3, & L_1 \end{vmatrix}} = \frac{x'_3 - x''_3}{\begin{vmatrix} s_1, & s_2 \\ L_3, & L_2 \end{vmatrix}}.$$

Podstawmy teraz w równaniu np. (33) zamiast $x'_1 - x''_1$ i $x'_2 - x''_2$ wartości tych różnic, wynikające ze związków (35); wówczas

$$4\Delta^2 d^2 \sin^2 A_3 = \begin{vmatrix} s_2, & s_3 \\ L_2, & L_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_3, & s_1 \\ L_3, & L_1 \end{vmatrix}^2 + 2\begin{vmatrix} s_2, & s_3 \\ L_2, & L_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} s_3, & s_1 \\ L_3, & L_1 \end{vmatrix}\cos A_3$$

$$= s_3^2(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3\cos A_1 - 2L_3L_1\cos A_2 - 2L_1L_2\cos A_3)$$

lub, z powodu, że (art. 58) $\dfrac{s_3}{\sin A_3} = 2\rho$, $\dfrac{\Delta}{\rho} = S$,

$$(36) \qquad d^2 = \frac{1}{S^2}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3\cos A_1 - 2L_3L_1\cos A_2 - 2L_1L_2\cos A_3).$$

Wyrażenie (36), w którym L_1, L_2, L_3 mają wartości oznaczone równaniami (34), jest widocznie symetryczne względem wszystkich trzech spółrzędnych każdego z dwu punktów danych.

65. Można z korzyścią używać wtedy spółrzędnych trójkątnych, gdy trójkąt odniesienia może być uważany jako część składowa téj właśnie figury gieometrycznéj, któréj badaniem się zajmujemy. W dwu rozdziałach poprzedzających mieliśmy kilka przykładów takiego postępowania, albowiém wprowadzenie równań skróconych linii prostéj i punktu jest właściwie użyciem spółrzędnych trójkątnych. Innego przykładu dostarcza artykuł 59. Wszakże, gdy chodzi o t. z. własności metryczne figur, t. j. o wyznaczenie pewnych długości, wtedy układ spółrzędnych Descartes'a jest znacznie dogodniejszy. Widzieliśmy np. w ostatnim artykule, jak trudne stosunkowo jest już wyznaczenie odległości dwu danych punktów. Z tego powodu w dalszym ciągu będziemy używali przeważnie spółrzędnych Descartes'a i Plücker'a. Atoli, ażeby skorzystać z dogodności, które daje jednorodność równań rostrząsanych, przedstawiać będziemy te spółrzędne pod postacią ilorazu dwu zmiennych przez tęż samę trzecią, t. j. zamiast x i y będziemy pisali ilorazy $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, a zamiast u i v ilorazy $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{u_2}{u_3}$. Wychodzi to na jedno z wprowadzeniem spółrzędnych jednorodnych szczególnych, określonych w artykule 57.

ĆWICZENIA.

(37). Znaléść spółrzędne trójkątne: *a)* środka koła wpisanego w trójkąt odniesienia, *b)* środków kół wpisanych zewnętrznie w trójkąt odniesienia i *c)* środka koła opisanego na trójkącie odniesienia.

(37). Wyrazić pole trójkąta przez spółrzędne trójkątne wiérzchołków.

(39). Znaléść pole trójkąta, którego wiérzchołki leżą w środkach boków trójkąta odniesienia.

(40). Znaléść pole trójkąta, którego wiérzchołki są spodkami prostopadłych z wiérzchołków trójkąta odniesienia na boki przeciwległe.

(41). Okazać, że $s_1x_1 + s_2x_2 - s_3x_3 = 0$ jest równaniem prostéj, która łączy środki boków A_2A_3 i A_3A_1 trójkąta odniesienia.

(42). Okazać, że $x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 - x_3\cos A_3 = 0$ jest równaniem prostéj, która łączy spodki prostopadłych z A_1 na A_2A_3 i z A_2 na A_3A_1.

(45). Znaléść warunek, aby prosta $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$, była równoległą do dwusiecznéj kąta A_1 w trójkącie odniesienia.

(44). Okazać, że $x_1\sin A_1 - x_2\sin A_2 + x_3\sin(A_1 - A_2) = 0$ jest równaniem prostéj, prostopadłéj do boku A_1A_2 trójkąta odniesienia i dzielącéj ten bok na dwie części równe. Okazać, że tę samę prostą można przedstawić przez równanie $x_1\cos A_1 - x_2\cos A_2 - \frac{s_3}{2}(\sin A_2\cos A_1 - \sin A_1\cos A_2) = 0$, albo przez $\left(x_1 - \frac{s_1\sin A_2\sin A_3}{\sin A_1}\right)\cos A_1 - \left(x_2 - \frac{s_2\sin A_3\sin A_1}{\sin A_2}\right)\cos A_2 = 0$. Dowieść, że trzy proste zagadnienia (21) przecinają się w jednym punkcie.

(45). Znaléść warunek, aby trzy proste $\frac{x_1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{\lambda_2}$, $\frac{x_2}{\lambda_2}=\frac{x_3}{\lambda_3}$, $\frac{x_3}{\lambda_3}=\frac{x_1}{\lambda_1}$ były do siebie równoległe, i warunek, aby te trzy proste były równoległe do prostéj $l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3=0$.

(46). Połączywszy każdy z trzech punktów, w których przecinają się każde dwie z trzech przekątnych czworoboku zupełnego, z parami wiérzchołków przeciwległych tegoż czworoboku, otrzymamy sześć prostych; okazać, że te proste przecinają się po trzy w cztérech punktach.

(47). Z cztérech prostych, przedstawionych przez równania $l_1x_1 \pm l_2x_2 \pm l_3x_3=0$, dwie proste przecinają się w punkcie P, a dwie pozostałe w punkcie P′, dwie z nich w Q, a pozostałe dwie w Q′, i wreszcie dwie z nich w R, a pozostałe dwie w R′; znaléść spółrzędne środków prostych PP′, QQ′, RR′ i okazać, że te środki leżą na jednéj prostéj.

(48). Okazać, że 0, $\pm s_2\cos A_3$, $\pm s_3\cos A_2$ są spółrzędnymi prostopadłéj spuszczonéj z punktu A_1 na prostą A_2A_3.

(49). Okazać, że $u_1+u_2+u_3=0$ jest równaniem środka ciężkości trójkąta $A_1A_2A_3$.

(50). Okazać, że równania $u_1\sin A_1 \pm u_2\sin A_2 \pm u_3\sin A_3=0$ przedstawiają środki kół wpisanych wewnętrznie i zewnętrznie w trójkąt $A_1A_2A_3$.

(51). Okazać, że równanie $u_1\sin 2A_1+u_2\sin 2A_2+u_3\sin 2A=0$ przedstawia środek koła opisanego na trójkącie $A_1A_2A_3$.

(52). Okazać, że środki trzech przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednéj prostéj.

ROZDZIAŁ V.

WIADOMOŚCI Z TEORYI ALGIEBRAICZNÉJ WIELOMIANÓW JEDNORODNYCH STOPNIA 2-GO.

66. Uwaga wstępna. Wyłożywszy twierdzenia najgłówniejsze o figurach gieometrycznych rzędu 1-go i klasy 1-éj, t. j. o linijach prostych i o punktach, przystępujemy obecnie do badania figur rzędu 2-go i klasy 2-éj, czyli linij rzędu 2-go i klasy 2-éj.

Jeżeli przez x_1, x_2, x_3 oznaczymy spółrzędne jednorodne punktu bieżącego, natenczas równanie najogólniejsze linii rzędu 2-go będzie kształtu

$$(1) \qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

W tym równaniu spółczynniki $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, \ldots$ oddzielnych wyrazów są liczbami danymi (stałymi), a dwa wskaźniki, którymi każdy z nich jest opatrzony, odpowiadają wskaźnikom obu czynników zmiennych (spółrzędnych), przy których te spółczynniki się znajdują: przy x_i^2, czyli przy x_ix_i, stawiamy zatym spółczynnik a_{ii}; przy x_ix_k spółczynnik a_{ik}; ponieważ zaś $x_ix_k = x_kx_i$, więc przyjmujemy $a_{ik} = a_{ki}$.

Podstawiwszy w równaniu (1) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, mieć będziemy

$$(2) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

jako równanie najogólniejsze linii rzędu 2-go we spółrzędnych równoległych punktu.

Rodzaj linij, przedstawionych przez równanie (1) lub (2), tudzież własności tych linij zależą od wartości spółczynników a_{ik}. Jedne z tych własności są zawisłe od przyjętego układu spółrzędnych, a inne są tak z istotą linii połączone, że utrzymują się niezmiennie, choćbyśmy przyjęty trójkąt odniesienia zastąpili przez inny, lub odpowiednio zamiast przyjętego układu spółrzędnych równoległych wzięli inny. Aby rozróżnić własności, należące do piérwszéj kategoryi, od należących do drugiéj, wyłożymy tu niektóre własności algiebraiczne strony pierwszéj równania (1), t. j. własności wielomianu jednorodnego stopnia 2-go z trzema zmiennymi (czyli t. z. formy kwadratowéj potrójnéj).

W części drugiéj tego dzieła będziemy mieli podobnie do czynienia z wielomianem jednorodnym stopnia 2-go z cztérema zmiennymi (czyli z t. z. formą kwadratową poczwórną). Aby się więc nie powtarzać, oraz ze względu, że wyprowadzenie odpowiednich własności wielomianu jednorodnego stopnia 2-go (czyli formy kwadratowéj) z ilukolwiek zmiennymi nie przedstawia trudności, weźmiemy pod uwagę przypadek ogólny, t. j. zastanowimy się nad wielomianem jednorodnym stopnia 2-go z n zmiennymi.

67. Twierdzenie Euler'a o wielomianach jednorodnych stopnia 2-go. Oznaczywszy przez $x_1, x_2, \ldots x_n$ n liczb zmiennych, a przez $a_{ik} = a_{ki}$ spółczynniki stałe, t. j. niezależne od zmiennych x, można każdy wielomian $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jednorodny stopnia 2-go względem tych zmiennych przedstawić pod postacią

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k, \tag{1}$$

gdzie znaki $\sum\limits_i$ i $\sum\limits_k$ oznaczają sumowanie, piérwsze względem i, drugie względem k, składników $a_{ik} x_i x_k$, przyczym te sumowania należy rosciągnąć na wszystkie wartości 1, 2,..., n tak dla i, jak i dla k. Tak np. przy $n = 2$, mamy

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &\equiv \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k \equiv \sum_i (a_{i1} x_i x_1 + a_{i2} x_i x_2) \\ &\equiv (a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2) + (a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2) \\ &\equiv a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2, \end{aligned}$$

gdyż $a_{12} = a_{21}$. Podobnie dla $n = 3$ będzie

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &\equiv \sum_i (a_{i1} x_i x_1 + a_{i2} x_i x_2 + a_{i3} x_i x_3) \\ &\equiv (a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3) + (a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3) \\ &\quad + (a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3) \\ &\equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2, \end{aligned}$$

gdyż $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$. I t. d.

Ponieważ ogólnie

$$\sum_k a_{ik} x_i x_k = x_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n),$$

przeto, kładąc

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n, \tag{2}$$

możemy wzór (1) tak przedstawić

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i x_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ t. j.}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1 f_1(x_1 x_2, \ldots, x_n) + x_2 f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + x_n f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Wyrażenie $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, określone w zupełności tożsamością (2), jest połową pochodnéj cząstkowéj wielomianu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ względem zmiennéj x_i.

Wzór (3) wyraża właśnie twierdzenie Euler'a o wielomianach jednorodnych stopnia 2-go: *wielomian jednorodny stopnia 2-go jest równy sumie połów swych pochodnych cząstkowych względem każdéj zmiennéj, pomnożonych przez też zmienne.*

68. Przekształcenie linijowe i przekształcenie prostokątne. Jeżeli w jakiéjkolwiek funkcyi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zamiast tych zmiennych wprowadzamy nowe zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zapomocą związków stopnia 1-go

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2 + \ldots + l_{1n}X_n, \\ x_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2 + \ldots + l_{2n}X_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = l_{n1}X_1 + l_{n2}X_2 + \ldots + l_{nn}X_n, \end{array}\right.$$

wówczas mówimy, że uskuteczniamy przekształcenie stopnia 1-go, czyli przekształcenie linijowe téj funkcyi, albo téż jéj zmiennych. Spółczynniki l_{ik} w związkach (1), określających przekształcenie linijowe, są liczbami danymi, których wyznacznik

$$(3)\qquad L \equiv \begin{vmatrix} l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n} \\ l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2n} \\ l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nn} \end{vmatrix}$$

nazywa się zamiennikiem, albo modułem tego przekształcenia linijowego.

Przyjąwszy, że moduł L jest od 0 różny, można zapomocą równań (1) wyrazić, naodwrót, zmienne $X_1, \ldots, X_n$ przez zmienne $x_1, \ldots, x_n$. A mianowicie, jeżeli przez L_{ik} oznaczymy ilość dołączoną do elementu l_{ik} w wyznaczniku L, to, kładąc, dla skrócenia,

$$(3)\qquad L_{ik} = \lambda_{ik} L, \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, n),$$

otrzymamy równania

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \ldots + \lambda_{n1}x_n, \\ X_2 = \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{n2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = \lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \ldots + \lambda_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

jako rozwiązania równań (1) względem $X_1, \ldots, X_n$. Związki (5) wyrażają przekształcenie linijowe odwrotne przekształceniu linijowemu (1). Podług zaś twierdzenia znanego z teoryi wyznaczników, moduł Λ przekształcenia (5)

$$(6)\qquad \Lambda \equiv \begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{n1} \\ \lambda_{12}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{L^n} \begin{vmatrix} L_{11}, L_{21}, \ldots, L_{n1} \\ L_{12}, L_{22}, \ldots, L_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_{1n}, L_{2n}, \ldots, L_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{L},$$

t. j. *moduł przekształcenia odwrotnego* (5) *jest równy odwrotności modułu przekształcenia pierwotnego* (1).

Przekształcenie linijowe (1) nazwiemy prostokątnym, jeżeli wskutek niego suma kwadratów $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ przechodzi na sumę kwadratów $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, t. j. jeżeli ono czyni zadość tożsamości

$$(7) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \equiv X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2.$$

Kładąc tu zamiast zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ich wyrażenia (1), otrzymamy

$$\begin{aligned} &(\sum_i l_{i1}^2) X_1^2 + (\sum_i l_{i2}^2) X_2^2 + \ldots + (\sum_i l_{in}^2) X_n^2 \\ &+ 2(\sum_i l_{i1} l_{i2}) X_1 X_2 + 2(\sum_i l_{i1} l_{i3}) X_1 X_3 + \ldots + 2(\sum_i l_{in-1} l_{in}) X_{n-1} X_n \\ &\equiv X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2. \end{aligned}$$

Z téj zaś tożsamości, wskutek porównania z sobą spółczynników wyrazów podobnych, mamy

$$(8) \qquad \sum_i l_{ir}^2 = 1, \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(9) \qquad \sum_i l_{ir} l_{is} = 0, \; (r = 1, 2, \ldots, n; \; s \lesseqgtr r).$$

A zatym: *między spółczynnikami* l_{ik} *przekształcenia prostokątnego ma miejsce* $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ *związków kształtu* (8) *i* (9).

Pomnóżmy równania (1), wrazie gdy one przedstawiają przekształcenie prostokątne, odpowiednio przez $l_{1r}, l_{2r}, \ldots, l_{nr}$, a iloczyny dodajmy do siebie stronami odpowiednimi, uwzględniając związki (8) i (9); otrzymamy

$$(10) \qquad X_r = l_{1r} x_1 + l_{2r} x_2 + \ldots + l_{nr} x_n, \quad (r + 1, 2, \ldots n).$$

Wszystkie n związków (10) przedstawiają przekształcenie odwrotne przekształceniu prostokątnemu (1). Gdy zaś moduł przekształcenia (10) jest oczywiście taki sam, jak moduł przekształcenia (1), przeto, wskutek związku (6), $L^2 = 1$, t. j. *kwadrat modułu przekształcenia prostokątnego jest równy 1.* — Przekształcenie (10) jest także prostokątne; a zatym, analogicznie do związków (8) i (9), będzie téż

$$(11) \qquad \sum_i l_{ri}^2 = 1, \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(12) \qquad \sum_i l_{ri} l_{si} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n; \; s \lesseqgtr r).$$

W rozdziałach poprzedzających znajdują się przykłady przekształcenia linijowego zmiennych. Mianowicie: zmiana kierunku osi układu spółrzędnych Descartes'a lub Plücker'a [art. 11, (2) — (5); art. 12, (3), (4)], przejście od układu spółrzędnych trójkątnych do układu tylkoco wzmiankowanych spółrzędnych [art. 52, (1); art. 55, (10)], jakotéż przejście od jednego układu spółrzędnych trójkątnych do innego [art. 56, (15), (18)] uskuteczniają się właśnie zapomocą przekształcenia linijowego spółrzędnych. Wrazie zaś, gdy oba układy spółrzędnych są prostokątne, to przejście od jednego z nich do drugiego [art. 11, (4), (5)] odbywa się zapomocą przekształcenia prostokątnego, gdyż wtedy, jak to łatwo sprawdzić, mają miejsce powyższe związki tak (8) i (9), jak i (11) i (12).

A zatym, teoryja przekształcenia linijowego funkcyj zawiéra w sobie, jako przypadek szczególny, teoryją przekształcenia równań figur gieometrycznych zapomocą przejścia od jednych spółrzędnych do innych.

WYRAŻENIE WIELOMIANU JEDNORODNEGO STOPNIA 2-GO JAKO SUMY KWADRATÓW.

69. *Zapomocą przekształcenia linijowego można wielomian jednorodny stopnia 2-go wyrazić jako sumę kwadratów funkcyj jednorodnych stopnia 1-go.*

Jakoż, przekształcając linijowo wielomian jednorodny stopnia 2-go

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i\sum_k a_{ik}x_ix_k$$

według

$$(2) \qquad x_i = \sum_r l_{ir}X_r, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

otrzymamy

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i\sum_k a_{ik} \left(\sum_r l_{ir}X_r\right) \left(\sum_s l_{ks}X_s\right),$$

lub, z uwagi, że przy sumowaniu względem r i s wskaźniki i, k pozostają niezmienne,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i\sum_k\sum_r\sum_s a_{ik}l_{ir}l_{ks}X_rX_s,$$

albo, zmieniając, co tu możliwe, porządek sumowań,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_r\sum_s\sum_i\sum_k a_{ik}l_{ir}l_{ks}X_rX_s,$$

albo nareszcie,

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_r\sum_s A_{rs}X_rX_s,$$

jeżeli

$$(4) \qquad A_{rs} = \sum_i\sum_k a_{ik}l_{ir}l_{ks}.$$

Gdy teraz dla wyznaczenia n^2 spółczynników l_{ir} przekształcenia linijowego (1) przyrównamy do 0 spółczynniki A_{rs}, w których wskaźniki r, s są różnymi od siebie liczbami szeregu $1, 2, \ldots, n$, miéć będziemy tożsamość

$$(5) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A_{11}X_1^2 + A_{22}X_2^2 + \ldots + A_{nn}X_n^2,$$

t. j. wielomian pierwotny $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie wyrażony jako suma n kwadratów.

Według wzoru (4), widocznie $A_{rs} = A_{sr}$, liczba więc równań

$$(6) \qquad A_{rs} = 0, \quad \text{gdzie } r \lesseqgtr s,$$

jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$; że zaś $n^2 > \frac{n(n-1)}{2}$, zatym pośród n^2 spółczynników l_{ir} pozostaje $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ zupełnie dowolnych, skutkiem czego *możemy nieskończenie wielu sposobami wielomian jednorodny stopnia 2-go z n zmiennymi wyrazić jako sumę n kwadratów.*

Sylvester dowiódł twierdzenia następującego:

Jakimkolwiek sposobem wyrazimy wielomian jednorodny stopnia 2-go z n zmiennymi jako sumę n kwadratów, zawsze mieć będziemy tę samę liczbę kwadratów dodatnych, ujemnych i równych zeru.

Przypuśćmy, że to twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianu z n zmiennymi i starajmy się udowodnić je dla wielomianu z $n+1$ zmiennymi. Weźmy zatym pod uwagę dwa wyrażenia wielomianu f z $n+1$ zmiennymi $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$,

$$f \equiv \varepsilon_1 A_1 X_1^2 + \varepsilon_2 A_2 X_2^2 + \ldots + \varepsilon_n A_n X_n^2 + \varepsilon_{n+1} A_{n+1} X_{n+1}^2,$$
$$f \equiv \varepsilon'_1 A'_1 X'^2_1 + \varepsilon'_2 A'_2 X'^2_2 + \ldots + \varepsilon'_n A'_n X'^2_n + \varepsilon'_{n+1} A'_{n+1} X'^2_{n+1},$$

gdzie ε i ε' mogą mieć wartości $+1$, -1, lub 0, A i A$'$ są liczbami dodatnymi, zależnymi od spółczynników pierwotnych wielomianu f i od spółczynników przekształcenia, a X i X$'$ są wyrażeniami stopnia 1-go względem zmiennych pierwotnych $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. W tożsamości

$$(7)\quad \varepsilon_1 A_1 X_1^2 + \varepsilon_2 A_2 X_2^2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} A_{n+1} X_{n+1} \equiv \varepsilon'_1 A'_1 X'^2_1 + \varepsilon'_2 A'_2 X'^2_2 + \ldots + \varepsilon'_{n+1} A'_{n+1} X'^2_{n+1}$$

przynajmniéj jedna z liczb ε równa jest jednéj z liczb ε'. Gdyby bowiém wszystkie liczby ε były równe 0 lub -1, a wszystkie liczby ε' równe 0 lub $+1$, to równość tych dwu wyrażeń tego samego wielomianu, mogłaby mieć miejsce tylko wtedy, kiedyby ten wielomian był tożsamościowo równy 0. Przyjmijmy, że np. $\varepsilon = \varepsilon'_1$. Wtedy, kładąc $\sqrt{A_1} X_1 = \sqrt{A'_1} X'_1$, ustanawiamy związek między zmiennymi pierwotnymi $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, zapomocą którego można jednę z tych zmiennych wyrazić przez n pozostałych [przypadek, kiedy związek $\sqrt{A_1} X_1 = \sqrt{A'_1} X'_1$ jest tożsamością, należy wyłączyć spod uwagi, gdyż wówczas możnaby nie pisać piérwszych wyrazów w (7)]. Gdy więc, wyrazimy z tego związku x_{n+1}, przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i wyrażenie otrzymane podstawimy w (7), natenczas strony téj równości będą dwoma wyrażeniami tego samego wielomianu tylko z n zmiennymi $x_1, x_2 \ldots x_n$, a zatym, według przypuszczenia, będą zawiérały tę samę ilość kwadratów równych zeru, lub jednakowego znaku. Ponieważ zaś liczby ε i ε' są niezależne od zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, więc, jeszcze przed podstawieniem wyrażenia ostatniéj z tych zmiennych przez poprzednie, czyli, przed ustanowieniem powyższego związku między zmiennymi, po obu stronach równości (7) zachodziła taż sama ilość kwadratów jednakowego znaku, lub równych zeru. A zatym, jeżeli to twierdzenie jest prawdziwe dla n zmiennych, to jest ono prawdziwym i dla $n+1$ zmiennych. Gdy zaś ma ono oczywiście miejsce dla jednéj zmiennéj, więc utrzyma się także i dla 2, 3,..., wogóle, dla ilukolwiek zmiennych.

70. Na osobliwą uwagę zasługuje wyrażenie wielomianu jednorodnego stopnia 2-go jako sumy kwadratów zapomocą przekształcenia prostokątnego. Dla większéj jasności, weźmiemy pod uwagę wielomian z trzema tylko zmiennymi

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2;$$

wszakże postępowanie, jakiego użyjemy, daje się bez żadnéj zmiany zastosować do wielomianów z ilukolwiek zmiennymi. Wielomian (1), wskutek przekształcenia prostokątnego

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = l_1X_1 + l_2X_2 + l_3X_3, \\ x_2 = m_1X_1 + m_2X_3 + m_3X_3, \\ x_3 = n_1X_1 + n_2X_3 + n_3X_3, \end{cases}$$

którego zatym spółczynniki czynią zadość warunkom

$$(3)\quad \begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0, \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 = 0, \\ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0, \end{cases}$$

wrazie, gdy przyjmiemy

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11}l_2l_3 + a_{22}m_2m_3 + a_{33}n_2n_3 + a_{23}(m_2n_3 + m_3n_2) + a_{31}(n_2l_3 + n_3l_2) + a_{12}(l_2m_3 + l_3m_2) = 0, \\ a_{11}l_3l_1 + a_{22}m_3m_1 + a_{33}n_3n_1 + a_{23}(m_3n_1 + m_1n_3) + a_{31}(n_3l_1 + n_1l_3) + a_{12}(l_3m_1 + l_1m_3) = 0, \\ a_{11}l_1l_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{33}n_1n_2 + a_{23}(m_1n_2 + m_2n_1) + a_{31}(n_1l_2 + n_2l_1) + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) = 0 \end{cases}$$

i oznaczymy

$$(6)\quad \begin{cases} a_{11}l_1^2 + a_{22}m_1^2 + a_{33}n_1^2 + 2a_{23}m_1n_1 + 2a_{31}n_1l_1 + 2a_{12}l_1m_1 = A_1, \\ a_{11}l_2^2 + a_{22}m_2^2 + a_{33}n_2^2 + 2a_{23}m_2n_2 + 2a_{31}n_2l_2 + 2a_{12}l_2m_2 = A_2, \\ a_{11}l_3^2 + a_{22}m_3^2 + a_{33}n_3^2 + 2a_{23}m_3n_3 + 2a_{31}n_3l_3 + 2a_{12}l_3m_3 = A_3, \end{cases}$$

przechodzi na sumę kwadratów, a mianowicie:

$$(7)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv A_1X_1^2 + A_2X_2^2 + A_3X_3^2.$$

Dla wyznaczenia 9 spółczynników przekształcenia (2) i 3 spółczynników wyrażenia (7) mamy 12 równań (3)—(6). Aby wyznaczyć spółczynniki l, m, n, oznaczmy przez $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ i $f_3(x_1, x_2, x_3)$ połowy pochodnych cząstkowych wielomianu $f(x_1, x_2, x_3)$ względem odpowiednich zmiennych x_1, x_2 i x_3, a przez $f_1(l, m, n), \ldots$ to, co otrzymujemy wskutek podstawienia liczb l, m, n za liczby zmienne x_1, x_2, x_3 w tych wyrażeniach $f_1, \ldots$; wtedy równania (5) można tak pisać:

$$l_2 f_1(l_3, m_3, n_3) + m_2 f_2(l_3, m_3, n_3) + n_2 f_3(l_3, m_3, n_3) = 0,$$
$$l_3 f_1(l_1, m_1, n_1) + m_3 f_2(l_1, m_1, n_2) + n_3 f_3(l_1, m_1, n_1) = 0,$$
$$l_1 f_1(l_2, m_2, n_2) + m_1 f_2(l_2, m_2, n_2) + n_1 f_3(l_2, m_2, n_2) = 0.$$

Porównywając te równania z równaniami (4), otrzymamy, dla $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{f_1(l_i, m_i, n_i)}{l_i} = \frac{f_2(l_i, m_i, n_i)}{m_i} = \frac{f_3(l_i, m_i, n_i)}{n_i}.$$

Oznaczając zaś przez s_i wartość tych stosunków i wypisując wyrażenia, oznaczone przez f_1, f_2, f_3, mamy trzy równania:

$$(8) \qquad \begin{cases} (a_{11} - s_i) l_i + a_{12} m_i + a_{12} n_i = 0, \\ a_{21} l_i + (a_{22} - s_i) m_i + a_{23} n_i = 0, \\ a_{31} l_i + a_{32} m_i + (a_{33} - s_i) n_i = 0, \end{cases}$$

z których, po wyrugowaniu stosunków $l_i : m_i : n_i$, wypada

$$(9) \qquad \Delta(s_i) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - s_i, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - s_i, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - s_i \end{vmatrix}.$$

Wyznaczywszy z tego równania wartość na s_i, znajdziemy z dwu którychkolwiek równań (8) wartości stosunków $l_i : m_i : n_i$, a następnie zapomocą odpowiedniego z równań (3), t. j. zapomocą równania $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$, wartości spółczynników l_i, m_i, n_i. Tym sposobem, biorąc za s_i kolejno każdy z trzech pierwiastków s_1, s_2, s_3 równania (9), wyznaczymy wszystkie 9 spółczynników naszego przekształcenia (2). — Mnożąc nakoniec równania (8) odpowiednio przez l_i, m_i, n_i i dodając do siebie iloczyny, otrzymamy, uwzględniając oznaczenia (6),

$$(10) \qquad A_i = s_i,$$

t. j. spółczynniki wyrażenia (7) są pierwiastkami równania (9).

Pozostaje jeszcze okazać, że pierwiastki równania (9) są rzeczywiste. W tym celu załóżmy, że równanie $\Delta(s_i) = 0$ o spółczynnikach rzeczywistych posiada dwa pierwiastki zespolone sprzężone s_p i s_r. Ponieważ równania (8), służące do obliczenia spółczynników przekształcenia, są względem tych spółczynników stopnia 1-go, więc wartości tych spółczynników, odpowiadające pierwiastkom s_p i s_r, będą także zespolone i sprzężone, a mianowicie, jeżeli

$$l_p = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad m_p = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad n_p = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

to natenczas

$$l_r = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad m_r = \alpha' - \beta'\sqrt{-1}, \quad n_r = \alpha'' - \beta''\sqrt{-1}.$$

Atoli, według (4),

$$l_p l_r + m_p m_r + n_p n_r = 0;$$

powinnoby więc być

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+\alpha''^2+\beta''^2=0,$$

co niemożliwe, chyba wrazie, gdy wszystkie α i wszystkie β są równe 0. Wtedy jednak byłoby także $l_p^2+m_p^2+n_p^2=0$ i $l_r^2+m_r^2+n_r^2=0$, co się sprzeciwia równaniom (3).

71. Przekształcenie prostokątne, zamieniające wielómian jednorodny stopnia 2-go $f(x_1, x_2, x_3)$ na sumę trzech kwadratów $s_1X_1^2+s_2X_2^2+s_3X_3^2$, nie daje się dokładnie wyznaczyć, jeżeli pomiędzy pierwiastkami równania

$$\Delta(s)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12} & , a_{13} \\ a_{21} & , a_{22}-s, & a_{23} \\ a_{31} & , a_{32} & , a_{33}-s \end{vmatrix}=0$$

zachodzą pierwiastki równe.

Przypuśćmy, że dwa pierwiastki tego równania są sobie równe. Z teoryi równań algiebraicznych wiadomo, że pierwiastek podwójny równania $\Delta(s)=0$ przywodzi do zera także piérwszą pochodną wielomianu $\Delta(s)$. Oznaczmy pochodną tego wielomianu, który, rozwijając wyznacznik, możemy tak napisać:

$$\Delta(s)\equiv(a_{11}-s)(a_{22}-s)(a_{33}-s)-(a_{11}-s)a_{23}^2-(a_{22}-s)a_{31}^2-(a_{33}-s)a_{12}^2+$$
$$+2a_{23}a_{31}a_{12},$$

przez $\Delta'(s)$ a — ogólnie — przez Δ_{ik} ilość dołączoną do elementu i-ego wiérsza i k-éj kolumny wyznacznika symetrycznego (bo $a_{ik}=a_{ki}$) $\Delta(s)$. Łatwo spostrzeżemy, że

$$\Delta'(s)=-\Delta_{11}-\Delta_{22}-\Delta_{33}.$$

A zatym, jeżeli s jest pierwiastkiem podwójnym równania $\Delta(s)=0$, natenczas jednocześnie

$$(\alpha)\qquad \Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33}=0,$$

t. j. trzy główne wyznaczniki częściowe (symetryczne) stopniaa 2-go wyznacznika symetrycznego $\Delta(s)$ tworzą sumę równą 0. Atoli te trzy wyznaczniki częściowe mają znaki jednakowe. Jakoż, skoro $\Delta(s)=0$, przeto, podług twierdzenia znanego z teoryi wyznaczników,

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ii}, & \Delta_{ik} \\ \Delta_{ki}, & \Delta_{kk} \end{vmatrix}=0,$$

skąd, z powodu, iż $\Delta_{ik}=\Delta_{ki}$, wynika

$$(\beta)\qquad \Delta_{ii}\Delta_{kk}=\Delta_{ik}^2.$$

Ponieważ, według (α), suma tych wyznaczników częściowych jest równa 0, a, według (β) mają one znaki jednakie, więc każdy z nich jest równy 0, a nadto każdy z wyznaczników częściowych Δ_{ik} (t. j. także i przy i różnym od k) jest równy 0, jak wypada ze związku (β). — A zatym, pierwiastek podwójny równania $\Delta(s)=0$ przywodzi do zera wszystkie wyznaczniki częściowe stopnia drugiego wyznacznika $\Delta(s)$. (To twierdzenie może być odwrócone.) W tym więc przypadku z równań (8), gdy w nich za s_i podstawimy pierwiastek podwójny równania $\Delta(s)=0$, nie otrzymamy wartości oznaczonych na dwa stosunki $l_i:m_i:n_i$, lecz tylko jeden z nich wyrazimy przez drugi. Przekształcenie prostokątne nie będzie zatym dokładnie wyznaczone.

Jeżeli zaś równanie $\Delta(s)=0$ posiada wszystkie trzy pierwiastki sobie równe, wówczas ten pierwiastek przywodzi do zera także drugą pochodną $\Delta''(s)$ wielomianu $\Delta(s)$. A że widocznie

$$\Delta''(s)=2[(a_{11}-s)+(a_{22}-s)+(a_{33}-s)],$$

więc suma elementów głównych wyznacznika $\Delta(s)$ jest równa zeru. Atoli równania

$$(\gamma)\ \Delta_{11}\equiv\begin{vmatrix} a_{22}-s, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33}-s \end{vmatrix}=0,\ \Delta_{22}\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{13} \\ a_{31}, & a_{33}-s \end{vmatrix}=0,\ \Delta_{33}\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-s \end{vmatrix}=0,$$

które teraz również mają miejsce, wskazują, że te elementy są wszystkie jednakowego znaku. Te więc elementy, a także, wskutek (γ), i elementy pozostałe wyznacznika $\Delta(s)$, są równe 0. — W tym przypadku niéma co uskuteczniać przekształcenia, albowiém z powodu, że $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$, mamy bespośrednio

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2.$$

72. Przez rosciągnienie badań, przeprowadzonych w artykule poprzedzającym, na wielomiany jednorodne stopnia 2-go z n zmiennymi, łatwo dojść możemy do twierdzenia następującego: *Wielomian jednorodny stopnia 2-go*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv\sum_i\sum_k a_{ik}x_ix_k$$

można przywieść zapomocą przekształcenia prostokątnego do postaci

$$s_1X_1^2+s_2X_2^2+\ldots+s_nX_n^2,$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *oznaczają wielomiany jednorodne stopnia 1-go względem* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *a spółczynniki* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *są pierwiastkami równania*

$$\Delta(s)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix}=0.$$

Nadto przekształcenie prostokątne da się lubtéż nie da się dokładnie wyznaczyć, według tego, czy pierwiastki równania $\Delta(s)=0$ są wszystkie od siebie różne, czy téż między nimi są wielokrotne. W tym drugim przypadku, t. j. jeżeli równanie $\Delta(s)=0$ posiada pierwiastek m-krotny, przywiodą się do zera także wszystkie wyznaczniki częściowe stopnia $n-1$, $n-2, \ldots n-m+1$ wyznacznika $\Delta(s)$. I nawzajem, jeżeli te wyznaczniki częściowe są wszystkie równe 0, wówczas równania $\Delta(s)=0$ posiada m pierwiastków sobie równych.

Chcąc więc poznać, na ile kwadratów dodatnych i ujemnych daje się rozłożyć wielomian $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dość zbadać, ile w równaniu $\Delta(s)=0$, mającym pierwiastki tylko rzeczywiste, uporządkowanym podług potęg malejących niewiadoméj s, zachodzi przemian i następstw znaków. Podług znanego twierdzenia Descartes'a, liczba przemian znaków jest równa w tym razie liczbie pierwiastków dodatnych, a liczba następstw znaków jest równa liczbie pierwiastków ujemnych równania $\Delta(s)=0$.

Z twierdzenia powyższego można wyprowadzić także warunki konieczne i dostateczne, aby wielomian jednorodny stopnia 2-go z n zmiennymi był sumą m kwadratów, przy $m<n$. Wtedy bowiém równanie $\Delta(s)=0$ powinno miéć $n-m$ pierwiastków równych 0. Wyznacznik więc $\Delta(0)$, t. j.

$$\mathrm{A}\equiv\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i wszystkie stopni $n-1,\ n-2, \ldots, n-(n-m-1)=m+1$ jego wyznaczniki częściowe powinny się wtedy przywiéść do zera.

Wyznacznik A w Teoryi liczb zwykle nazywa się wyznacznikiem formy (wielomianu jednorodnego) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w innych zaś gałęziach badań matematycznych nazywamy go wyróżnikiem (dyskryminantem) wielomianu jednorodnego (albo: formy) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wyznacznik ten jest symetryczny, albowiém, z założenia, $a_{ik}=a_{ki}$.

NIEZMIENNIKI WIELOMIANU JEDNORODNEGO STOPNIA 2-GO.

73. Niech, wogólności, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, a_{ik}, \ldots)$ będzie wyrażeniem, zawiérającym zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, połączone pewnymi działaniami ze spółczynnikami stałymi $\ldots, a_{ik}, \ldots$ To wyrażenie, wskutek przekształcenia linijowego

$$(1)\qquad x_i = l_{i1}\mathrm{X}_1 + l_{i2}\mathrm{X}_2 + \ldots + l_{in}\mathrm{X}_n,\quad (i=1, 2, \ldots n),$$

o module L, przechodzi na inne

$$\Phi(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots, \mathrm{A}_{ik}, \ldots),$$

zawiérające nowe zmienne $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ i spółczynniki A_{ik}, zależące w pewien sposób od spółczynników a_{ik} i od spółczynników l_{ik}.

Oznaczmy przez $\mathrm{F}(a_{ik})$ pewne połączenie całkowite spółczynników a_{ik} wyrażenia φ, a przez $\mathrm{F}(\mathrm{A}_{ik})$ wyrażenie w takiż sam sposób utworzone z odpowiednich spółczynników A_{ik} wyrażenia Φ; natenczas, jeżeli między tymi dwoma wyrażeniami zachodzi związek

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}_{ik}) = \mathrm{L}^p\mathrm{F}(a_{ik}),$$

mówimy, że wyrażenie $\mathrm{F}(a_{ik})$ jest niezmiennikiem (inwaryjantem) wyrażenia φ ze względu na przekształcenie linijowe (1). Niezmiennik jest bezwzględnym, kiedy

$$F(A_{ik}) = F(a_{ik}).$$

Aby ocenić doniosłość pojęcia niezmiennika, zauważymy, że jakąkolwiek własność linii krzywéj równania $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ przedstawia się pospolicie przez jeden lub więcéj związków między spółczynnikami.

Przypuśćmy więc, że pewną własność przedstawia równanie

$$F(a_{ik}) = 0;$$

natenczas, jeżeli $F(a_{ik})$ jest niezmiennikiem funkcyi $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, ta własność utrzyma się także wtedy, gdy funkcyja $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ulegnie jakiemukolwiek przekształceniu linijowemu o module różnym od 0, albowiém równanie $F(A_{ik}) = 0$ wciąż będzie miało miejsce. Zatym: *niezmiennik, przyrównany do 0, przedstawia własność linii krzywéj, niezależną od układu spółrzędnych, do którego równanie jéj odnosimy.*

Można nadać niezmiennikowi inne jeszcze znaczenie. Dajmy, że równanie linii krzywéj $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ zapomocą zmiany spółrzędnych (a więc zapomocą przekształcenia linijowego) przeszło na równanie

$$\varphi(l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3,\ \ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3,\ \ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3) = 0;$$

jeżeli przyjmiemy to równanie nie za równanie téj saméj krzywéj, odniesione do nowego układu, lecz za równanie nowéj krzywéj, to niezmiennik $F(a_{ik})$, przyrównany do 0, wyraża własność krzywéj piérwszéj, którą także posiada krzywa druga, czyli własność spólną wszystkim krzywym, których równania są kształtu wypisanego, zwanym krzywymi jednokréślnymi.

74. Dowiedziemy następującego twierdzenia. *Spółczynniki równania $\Delta(s) = 0$, którego pierwiastki są spółczynnikami w wyrażeniu wielomianu $f(x_1, x_2 \ldots x_n) \equiv \sum_i\sum_k a_{ik}x_ix_k$ jako sumy n kwadratów, są niezmiennikami ze względu na każde przekształcenie prostokątne.*

Aby dowiéść tego twierdzenia, uważmy naprzód, że według tego, cośmy powiedzieli w przedostatnim ustępie artykułu 72, wielomian

$$\varphi \equiv \sum_i\sum_k a_{ik}x_ix_k - s(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \tag{2}$$

będzie sumą, conajwięcéj, $n-1$ kwadratów, jeżeli wyróżnik tego wielomianu będzie równy 0, t. j. jeżeli s będzie pierwiastkiem równania danego

$$\Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12} & ,\ldots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22}-s & ,\ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & , a_{n2} & ,\ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Uważmy teraz, że, wskutek przekształcenia linijowego (1), wielomian $\sum_i\sum_k a_{ik}x_ix_k$ przechodzi na $\sum_r\sum_s A_{rs}X_rX_s$ gdzie (art. 68)

(4) $$A_{rs} = \sum_i \sum_k a_{ik} l_{ir} l_{ks},$$

a wyrażenie $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ przechodzi podobnież na $\sum_r \sum_s \beta_{rs} X_r X_s$, gdzie

(5) $$\beta_{rs} = l_{1r} l_{1s} + l_{2r} l_{2s} + \ldots + l_{nr} l_{ns},$$

tak, iż wielomian φ przechodzi na wielomian

(6) $$\Phi \equiv \sum_r \sum_s A_{rs} X_r X_s - s \sum_r \sum_s \beta_{rs} X_r X_s.$$

A gdy, wskutek założenia, wielomian (2) jest sumą $n-1$ kwadratów, więc, według twierdzenia Sylvester'a (art. 69), wielomian (6) także jest sumą $n-1$ kwadratów. Wyróżnik przeto wielomianu (6) przywodzi się do 0 przy tych samych wartościach s, co wyróżnik wielomianu (2), innymi słowy: równanie

(7) $$\begin{vmatrix} A_{11} - s\beta_{11}, & A_{12} - s\beta_{12}, & \ldots, & A_{1n} - s\beta_{1n} \\ A_{21} - s\beta_{21}, & A_{22} - s\beta_{22}, & \ldots, & A_{2n} - s\beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} - s\beta_{n1}, & A_{n2} - s\beta_{n2}, & \ldots, & A_{nn} - s\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ma też same pierwiastki, co równanie (3).

Jeżeli przekształcenie (1) jest prostokątne, to, uwzględniając związki (5), mamy $\beta_{rs} = 0$, przy $r \lessgtr s$, i $\beta_{rr} = 1$ (art. 68), równanie więc (7) przywodzi się do równania

(8) $$\begin{vmatrix} A_{11} - s, & A_{12} & , \ldots, & A_{1n} \\ A_{21} & , A_{22} - s & , \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & , A_{n2} & , \ldots, & A_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

które jest takiego samego kształtu, jak równanie (3). Oba równania (3) i (8) mają nadto jednakie pierwiastki; spółczynniki więc przy tych samych potęgach s w obu równaniach są sobie równe. Spółczynniki zatym równania $\Delta(s) = 0$ są niezmiennikami ze względu na przekształcenie prostokątne, i wszczególności: niezmiennikami bezwzględnymi.

Jeżeli przekształcenie (1) nie jest prostokątne, to w równaniach (3) i (7) (mających, jak wiemy, pierwiastki jednakie) zrównajmy wyrazy niezależne od s. Wyraz niezależny od s w równaniu (3) jest wyróżnikiem A (art. 72) wielomianu $\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k$, wyraz zaś niezależny od s w równaniu (7) jest wyróżnikiem A' wielomianu $\sum_r \sum_s A_{rs} X_r X_s$, podzielonym przez wyróżnik B' wielomianu $\sum_r \sum_s \beta_{rs} X_r X_s$. Mamy zatym

$$A = \frac{A'}{B'}, \quad \text{skąd} \quad A' = B'.A.$$

Lecz, wskutek (5),

$$B' \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1n} \\ \beta_{21}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{n1}, \beta_{n2}, \ldots, \beta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n} \\ l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nn} \end{vmatrix}^2 = L^2$$

jest więc

$$(9) \qquad A' = L^2 A,$$

t. j. wyróżnik wielomianu $\sum\limits_i \sum\limits_k a_{ik} x_i x_k$ jest niezmiennikiem ze względu na każde przekształcenie linijowe.

WYRAŻENIE JEDNOCZESNE DWU WIELOMIANÓW JEDNORODNYCH STOPNIA 2-GO JAKO SUM KWADRATÓW.

75. Zapomocą przekształcenia linijowego można jednocześnie dwa wielomiany jednorodne stopnia 2-go wyrazić jako sumy kwadratów.

Weźmy pod uwagę dwa wielomiany, dla większéj jasności, z trzema tylko zmiennymi,

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k, \qquad (2) \qquad g(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum_i \sum_k b_{ik} x_i x_k.$$

Wskutek przekształcenia linijowego

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3, \\ x_2 = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3, \\ x_3 = n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3, \end{cases}$$

te wielomiany przechodzą odpowiednio na (art. 70)

$$(4) \qquad f \equiv \sum_r \sum_s A_{rs} X_r X_s, \qquad (5) \qquad g \equiv \sum_r \sum_s B_{rs} X_r X_s,$$

gdzie, przy $r = 1, 2, 3$ i $s = 1, 2, 3$,

$$(6) \qquad A_{rs} = l_r f_1(l_s, m_s, n_s) + m_r f_2(l_s, m_s, n_s) + n_r f_3(l_s, m_s, n_s),$$

$$(7) \qquad B_{rs} = l_r g_1(l_s, m_s, n_s) + m_r g_2(l_s, m_s, n_s) + n_r g_3(l_s, m_s, n_s).$$

f_1, f_2, f_3 są połowami pochodnych cząstkowych funkcyi f, a g_1, g_2, g_3, są połowami pochodnych cząstkowych funkcyi g, wziętych odpowiednio względem x_1, x_2, x_3. Aby dwa dane wielomiany stały się sumami kwadratów, dość położyć

$$(8) \qquad A_{rs} = 0 \quad \text{i} \quad B_{rs} = 0, \text{ przy } r \lessgtr s,$$

gdyż wtedy wyrażenia (4) i (5) przywodzą się do następujących:

$$(4') \quad f \equiv A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2, \qquad (5') \quad g \equiv B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + B_{33} X_3^2.$$

Skoro widocznie $A_{rs} = A_{sr}$ i $B_{rs} = B_{sr}$ (gdyż $a_{ik} = a_{ki}$ i $b_{ik} = b_{ki}$) przeto równań (8) jest $2.3 = 6$, gdy tymczasem spółczynników we wzorach (3) jest 9. Potrzeba zatym, dla dokładnego wyznaczenia tych 9 spółczynników, dowolnie ustanowić jeszcze trzy związki. Najprościéj postąpimy, gdy w wyrażeniu jednego z wielomianów damy kwadratom jakiekolwiek spółczynniki dowolne, gdy więc położymy np.

(9) $$B_{ss} = \varkappa_s, \text{ przy } s=1, 2, 3,$$

rozumiejąc już przez $\varkappa_s$ liczby dane.

Równości (8), wskutek (6) i (7), dają

$$\frac{f_1(l_s, m_s, n_s)}{g_1(l_s, m_s, n_s)} = \frac{f_2(l_s, m_s, n_s)}{g_2(l_s, m_s, n_s)} = \frac{f_3(l_s, m_s, n_s)}{g_3(l_s, m_s, n_s)}.$$

Oznaczmy przez λ_s wartość tych stosunków i zamiast $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ wypiszmy wyrażenia rozwinięte; wtedy mieć będziemy trzy równania:

(10) $$\left\{\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda_s b_{11})l_s + (a_{12}-\lambda_s b_{12})m_s + (a_{13}-\lambda_s b_{13})n_s = 0, \\ &(a_{21}-\lambda_s b_{21})l_s + (a_{22}-\lambda_s b_{22})m_s + (a_{23}-\lambda_s b_{23})n_s = 0, \\ &(a_{31}-\lambda_s b_{31})l_s + (a_{32}-\lambda_s b_{32})m_s + (a_{33}-\lambda_s b_{33})n_s = 0, \end{aligned}\right.$$

z których wypada

(11) $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_s b_{11}, & a_{12}-\lambda_s b_{12}, & a_{13}-\lambda_s b_{13} \\ a_{21}-\lambda_s b_{21}, & a_{22}-\lambda_s b_{22}, & a_{23}-\lambda_s b_{23} \\ a_{31}-\lambda_s b_{31}, & a_{32}-\lambda_s b_{32}, & a_{33}-\lambda_s b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

A zatym, jeżeli wyznaczymy pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ równania (11), to z równań (10) otrzymamy, odpowiednio każdemu z tych pierwiastków, wartości stosunków $l_1 : m_1 : n_1$, $l_2 : m_2 : n_2$ i $l_3 : m_3 : n_3$, a następnie zapomocą równań (9) znajdziemy wartości każdego z 9 spółczynników przekształcenia (3).

Aby nareszcie otrzymać wartości spółczynników A_{11}, A_{22}, A_{33}, dość pomnożyć równania (10) odpowiednio przez l_s, m_s, n_s i dodać do siebie iloczyny; uwzględniając związki (6), (7) i (9), otrzymamy wtedy

(12) $$A_{ss} = \lambda_s \varkappa_s, \text{ przy } s=1, 2, 3.$$

Wyrażenia dwu danych wielomianów będą więc

$$f \equiv \varkappa_1\lambda_1 X_1^2 + \varkappa_2\lambda_2 X_2^2 + \varkappa_3\lambda_3 X_3^2, \quad g \equiv \varkappa_1 X_1^2 + \varkappa_2 X_2^2 + \varkappa_3 X_3^2.$$

Równanie (11) posiada wszystkie pierwiastki rzeczywiste, jeżeli spółczynniki a_{ik}, b_{ik} są liczbami rzeczywistymi i jeżeli przynajmniéj jeden z dwu danych wielomianów f i g, np. g, jest stale (t. j. przy wszelkich wartościach rzeczywistych na x_1, x_2, x_3) dodatnym. Jakoż, równanie (11) wyraża warunek, pod jakim wielomian $f - \lambda_s g$ jest sumą conajwyżéj 2 kwadratów (art. 72). Wskutek przekształcenia linijowego, zapomocą którego wielomian stale dodatny g, przechodzi na sumę kwadratów $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, które wszystkie są dodatne, a wielomian f np. na $\varphi \equiv \sum\limits_r\sum\limits_s \alpha_{sr} X_r X_s$, wyrazimy wielomian $f - \lambda_s g$ jako $\varphi - \lambda_s(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$. Ten wielomian, przy téj saméj wartości λ_s, co i wielomian pierwotny $f - \lambda_s g$, jest sumą conajwięcéj 2 kwadratów. Pierwiastki równania (11) są zatym jednocześnie pierwiastkami równania

$$\Delta(\lambda_s) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda_s\,, & \alpha_{12} & , \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22}-\lambda_s & , \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & , \alpha_{32} & , \alpha_{33}-\lambda_s \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Pierwiastki zaś równania (13) są, jak wiemy (art. 70), wszystkie rzeczywiste. — Nadto, z twierdzenia art. 71, odnoszącego się do pierwiastków wielokrotnych równania (13), wynika analogiczna własność pierwiastków wielokrotnych równania (11). A zatym: pierwiastek dwukrotny równania (11) przywodzi do zera wszystkie wyznaczniki częściowe stopnia 2-go, a pierwiastek trzykrotny wszystkie elementy wyznacznika, stanowiącego stronę lewą tegoż równania.

ĆWICZENIA.

(53). Okazać, że wielomian $x^2+2y^2+z^2+2xy+4xz+6yz$ jest sumą trzech kwadratów, z których dwa są dodatne, a jeden ujemny.

(54). Jeżeli $f(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}x_ix_k$, a $F(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum\limits_i\sum\limits_k \alpha_{ik}x_ix_k$, gdzie $\alpha_{ik} = \frac{A_{ik}}{A}$, i A oznacza wyróżnik wielomianu f, zaś A_{ik} jest ilością dołączoną do elementu a_{ik} wyznacznika A, natenczas przekształcenie prostokątne, zamieniające f na sumę kwadratów $s_1X_1^2+s_2X_2^2+s_3X_3^2$, zamieni F na sumę kwadratów $\frac{X_1^2}{s_1}+\frac{X_2^2}{s_2}+\frac{X_3^2}{s_3}$.

(55). Wyznaczyć spółczynnik a_{12} tak, aby wielomian

$$x_1^2+x_2^2+6x_3^2-7x_2x_3-5x_3x_1+2a_{12}x_1x_2$$

był sumą dwu kwadratów.

(56). Okazać, że jeżeli x_1, x_2 x_3 są długościami trzech krawędzi równoległościanu, a λ_1, λ_2, λ_3 kątami między parami krawędzi x_2, x_3; x_3, x_1; x_1, x_2, to wielomian $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\cos\lambda_1+2x_3x_1\cos\lambda_2+2x_1x_2\cos\lambda_3$ jest sumą trzech kwadratów dodatnich.

ROZDZIAŁ VI.

RÓWNANIA STOPNIA 2-GO I WYŻSZYCH, PRZEDSTAWIAJĄCE ZBIÓR LINIJ PROSTYCH, LUB ZBIÓR PUNKTÓW.

76. Liniją, przedstawioną przez równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu, nazwaliśmy liniją rzędu 2-go, a liniją, przedstawioną przez równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych linii prostéj, nazwaliśmy liniją klasy 2-éj. Ponieważ iloczyn równań dwu linij prostych, jak również iloczyn równań dwu punktów, jest równaniem stopnia 2-go, więc nawzajem, równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu, lub względem spółrzędnych linii prostéj może niekiedy być iloczynem dwu równań stopnia 1-go i przedstawiać odpowiednio parę linij prostych, lub parę punktów. Przystępując zatym do rozbioru równania ogólnego stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu, jak również względem spółrzędnych linii prostéj, należy nam przedewszystkim zbadać, kiedy takie równanie przedstawia odpowiednio parę prostych, lub parę punktów. Zaczniemy od równania stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu.

PARA PROSTYCH.

77. Weźmy pod uwagę równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3 punktu,

$$(1)\ f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

którego spółczynniki a_{23}, a_{31}, a_{12} będziemy niekiedy, dla symetryi wzorów, pisali: a_{32}, a_{13}, a_{21}, gdyż, zgodnie z umową (art. 66), $a_{23}=a_{32}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{12}=a_{21}$.

W artykule 72 okazaliśmy, że wielomian $f(x_1, x_2, x_3)$ jest sumą dwu kwadratów dodatnych lub ujemnych, jeżeli jego wyróżnik, t. j. wyznacznik symetryczny

$$(2)\qquad A \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix},$$

jest równy 0, a z jego wyznaczników częściowych stopnia 2-go przynajmniéj jeden jest od 0 różny. Wtedy

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2,$$

gdzie s_1 i s_2 są dwiema liczbami stałymi i rzeczywistymi, a X_1, X_2 oznaczają funkcyje jednorodne stopnia 1-go względem x_1, x_2, x_3.—Ponieważ

$$s_1 X_2^2 + s_2 X_2^2 \equiv (\sqrt{s_1} X_1 - \sqrt{-s_2} X_2)(\sqrt{s_1} X_1 + \sqrt{-s_2} X_2)$$

więc w tym przypadku równanie (1) jest iloczynem dwu równań stopnia 1-go,

$$\sqrt{s_1} X_1 - \sqrt{-s_2} X_2 = 0, \quad \sqrt{s_1} X_1 + \sqrt{-s_2} X_2 = 0,$$

i przedstawia parę linij prostych. Zatym: *warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ przedstawiało parę prostych, jest równość 0 wyróżnika wielomianu $f(x_1, x_2, x_3)$.*

Gdy nietylko wyróżnik, ale także wszystkie jego wyznaczniki częściowe stopnia 2-go są równe 0, wówczas wielomian f jest dokładnym kwadratem,

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv s_1 X_1^2,$$

i równanie (1) przedstawia w tym przypadku jednę prostą $X_1 = 0$, albo raczéj —*prostą podwójną.*

78. Do tych samych wypadków można dojść także bespośrednio, nie opiérając się wcale na twierdzeniu art. 72. Jakoż, przypuśćmy, że wielomian $f(x_1, x_2, x_3)$ jest iloczynem dwu czynników stopnia 1-go. Przyjmując $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3$ za jeden czynnik, musimy drugiemu czynnikowi dać kształt $\frac{a_{11}x_1}{\varkappa_1} + \frac{a_{22}x_2}{\varkappa_2} + \frac{a_{33}x_3}{\varkappa_3}$, ażeby, po uskutecznieniu mnożenia, spółczynniki przy x_1^2, x_2^2, x_3^2 wypadły odpowiednio równe a_{11}, a_{22}, a_{33}. Niech więc będzie tożsamościowo

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, x_3) \equiv (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3)\left(\frac{a_{11}x_1}{\varkappa_1} + \frac{a_{22}x_2}{\varkappa_2} + \frac{a_{33}x_3}{\varkappa_3}\right).$$

Z téj tożsamości otrzymujemy, wskutek porównania spółczynników odpowiednich po obu stronach, trzy związki:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2a_{23} &= a_{22}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2} + a_{33}\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}, \\ 2a_{31} &= a_{33}\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} + a_{11}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}, \\ 2a_{12} &= a_{11}\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} + a_{22}\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}. \end{aligned} \right.$$

Z tych związków wyrugujemy dwa stosunki $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$. Pomnóżmy te równości stronami odpowiednimi; w iloczynie zaś

$$8a_{23}a_{31}a_{12} = 2a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}\left(a_{22}^2\frac{\varkappa_3^2}{\varkappa_2^2} + a_{33}^2\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_3^2}\right) +$$
$$+ a_{22}\left(a_{33}^2\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_3^2} + a_{11}^2\frac{\varkappa_3^2}{\varkappa_1^2}\right) + a_{33}\left(a_{11}^2\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} + a_{22}^2\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2}\right)$$

zastąpmy czynniki, ujęte w nawiasy, przez równe im, wskutek związków (4), wyrażenia

$$4a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33},\ 4a_{31}^2 - 2a_{33}a_{11},\ 4a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22}.$$

Otrzymamy

$$8a_{23}a_{31}a_{12} = 2a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}(4a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33}) + a_{22}(4a_{31}^2 - 2a_{33}a_{11}) + a_{33}(4a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22}),$$

czyli

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0,$$

t. j. $A = 0$. A zatym, jeżeli równanie (1) przedstawia parę prostych, to wyróżnik lewéj jego strony jest zerem. — Pozostaje okazać, że ten warunek jest także dostateczny. Przyjąwszy, że $A = 0$, możemy otrzymać wartości stosunków $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$ z dwu którychkolwiek równań (4). Tak np. dwa ostatnie z tych równań, napisane w postaci

$$a_{11}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) + a_{22} = 0,\quad a_{11}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right)^2 - 2a_{31}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right) + a_{33} = 0,$$

dają

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},\quad \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} = \frac{a_{31} \pm \sqrt{a_{31}^2 - a_{33}a_{11}}}{a_{11}}.$$

Kładąc zatym albo

$$(5)\quad \varkappa_1 = \lambda a_{11},\ \varkappa_2 = \lambda(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}),\ \varkappa_3 = \lambda(a_{31} + \sqrt{a_{31}^2 - a_{33}a_{11}}),$$

albo téż

$$(5')\quad \varkappa_1 = \lambda a_{11},\ \varkappa_2 = \lambda(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}),\ \varkappa_3 = \lambda(a_{31} - \sqrt{a_{31}^2 - a_{33}a_{11}})$$

(gdzie λ jest czynnikiem nieoznaczonym), w obu razach, po wstawieniu tych wartości na $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ w stronę drugą wzoru (3), otrzymujemy tożsamościowo

$$(6)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{a_{11}}[a_{11}x_1 + (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})x_2 + (a_{31} + \sqrt{a_{31}^2 - a_{33}a_{11}})x_3]$$
$$[a_{11}x_1 + (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})x_2 + (a_{31} - \sqrt{a_{31}^2 - a_{33}a_{11}})x_3].$$

A zatym, jeżeli wyróżnik lewéj strony równania (1) jest zerem, wówczas to równanie jest iloczynem dwu równań stopnia 1-go, t. j. przedstawia dwie proste.

Oznaczmy przez A_{11}, A_{22}, A_{33} wyznaczniki częściowe stopnia 2-go wyróżnika, odpowiadające jego elementom głównym a_{11}, a_{22}, a_{33}, lub, co tu wychodzi na jedno, ilości dołączone do tych elementów, t. j.

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2,\ A_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2,\ A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Według (6), dwie proste, które, wrazie $A = 0$, są przedstawione przez równanie (1): są obie rzeczywiste i od siebie różne, jeżeli $A_{22} < 0$ i $A_{33} < 0$; są obie urojone, jeżeli albo $A_{22} > 0$, albo $A_{33} > 0$, albo téż jednocześnie $A_{22} > 0$ i $A_{33} > 0$; obie są tą samą prostą, t. j. przedstawiają prostą podwójną, jeżeli $A_{22} = 0$ i $A_{33} = 0$.

W przypadku ostatnim, gdy $A=0$, $A_{22}=0$, $A_{33}=0$, mamy także, jak to łatwo sprawdzić, tak A_{11} jak i wszystkie inne wyznaczniki częściowe stopnia 2-go równe 0. A zatym, i ostatni ustęp artykułu 77 został w ten sposób sprawdzony.

79. Widzieliśmy w artykule poprzedzającym, że proste, które równanie (1) przedstawia wrazie $A=0$, mogą być urojonymi. Lubo takie proste nie istnieją gieometrycznie, to jednak nie możemy ich wykluczać przy badaniach analitycznych, jeżeli nie chcemy wyników naszych rostrząsań pozbawiać należytéj ogólności. W dziedzinie gieometryi ma się z nich tę samę korzyść, jaką Algiebra osiąga z wprowadzenia liczb zespolonych, t. j. liczb kształtu $a+b\sqrt{-1}$.

Odnosi się to osobliwie do takich dwu prostych urojonych, w których równaniach, jak np. w równaniach prostych urojonych w artykule poprzedzającym, spółczynniki odpowiednie są liczbami zespolonymi sprzężonymi. Proste takie, zwane prostymi urojonymi sprzężonymi, posiadają dwie następujące własności uwagi godne:

Dwie proste urojone sprzężone mają punkt spólny rzeczywisty, i

Dwusieczne kątów, zawartych między dwiema prostymi urojonymi sprzężonymi, są prostymi rzeczywistymi.

Jakoż, niech równania

$$(7)\qquad \begin{cases} (a+a'\sqrt{-1})x+(b+b'\sqrt{-1})y+(c+c'\sqrt{-1})=0, \\ (a-a'\sqrt{-1})x+(b-b'\sqrt{-1})y+(c-c'\sqrt{-1})=0 \end{cases}$$

przedstawiają dwie proste urojone sprzężone. Sam skład tych równań pokazuje, że te proste, lubo nie istnieją gieometrycznie, przecinają się w punkcie rzeczywistym, a mianowicie, przechodzą obie przez punkt przecięcia się dwu prostych rzeczywistych (art. 27), których równania są

$$ax+by+c=0 \quad \text{i} \quad a'x+b'y+c'=1.$$

Piérwsza własność jest więc dowiedziona. — Aby udowodnić drugą, przyjmijmy, że x i y są spółrzędnymi prostokątnymi punktu bieżącego i oznaczmy przez α i α' kąty (urojone), które proste (7) tworzą z kierunkiem dodatnym osi x-ów, a przez β kąt, który dwusieczna kąta między prostymi (7) czyni również z kierunkiem dodatnym osi x-ów. Wtedy

$$2\beta=\alpha+\alpha', \quad \text{skąd} \quad \operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha'}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}.$$

Lecz z równań (7) wypada

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a+a'\sqrt{-1}}{b+b'\sqrt{-1}}\equiv m+n\sqrt{-1}, \quad \operatorname{tg}\alpha'=-\frac{a-a'\sqrt{-1}}{b-b'\sqrt{-1}}\equiv m-n\sqrt{-1},$$

zatym

$$(8)\qquad m\operatorname{tg}^2\beta-(m^2+n^2-1)\operatorname{tg}\beta-m=0.$$

Pierwiastki równania (8) są oba rzeczywiste, a ich iloczyn jest równy — 1; a zatym jeden z nich odpowiada dwusiecznéj jednego, a drugi dwusiecznéj drugiego kąta, spełniającego poprzedni. Obie dwusieczne mają więc kierunki rzeczywiste. Jak zaś widzieliśmy, obie one przechodzą przez punkt także rzeczywisty (spólny dwu prostym danym). Obie więc istnieją gieometrycznie.

80. Wyznaczmy jeszcze punkt przecięcia się prostych, które, wrazie $A=0$, są przedstawione przez równanie (1).

W tym celu oznaczmy, jak poprzednio, przez $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ połowy pochodnych cząstkowych wielomianu $f(x_1, x_2, x_3)$ względem x_1, x_2, x_3,

$$f_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$f_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$f_3 \equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Gdy, według założenia, $A=0$, to istnieje układ wartości od 0 różnych x_1^0, x_2^0, x_3^0 na x_1, x_2, x_3, jednocześnie zadość czyniących równaniom $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$. Ponieważ zaś, według twierdzenia Euler'a (art. 67),

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + x_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + x_3 f_3(x_1, x_2, x_3),$$

więc

$$f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0,$$

t. j. spółrzędne punktu (x_1^0, x_2^0, x_3^0) czynią zadość równaniu (1), czyli: ten punkt jest punktem linii, przedstawionéj przez równanie (1). Atoli, wskutek naszego założenia, równanie (1) jest równaniem pary prostych. Zatym ten punkt jest punktem przecięcia się dwu prostych, przedstawionych przez równanie (1) wrazie $A=0$.

Oznaczmy przez x_0, y_0 spółrzędne Descartes'a tego punktu, t. j. $x_0 = \frac{x_1^0}{x_3^0}$, $y_0 = \frac{x_2^0}{x_3^0}$. Wówczas mamy

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} &= 0, \end{aligned} \right.$$

skąd wypada

$$a_{13} = -(a_{11}x_0 + a_{12}y_0), \quad a_{23} = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0),$$
$$a_{33} = -(a_{13}x_0 + a_{23}y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2.$$

Wprowadźmy także spółrzędne Descartes'a x, y do równania (1), kładąc w nim $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, i, prócz tego, podstawmy w tymże równaniu zamiast a_{13}, a_{23}, a_{33} powyższe ich wyrażenia. Po uskutecznieniu uproszczeń, otrzymamy równanie

$$(10) \qquad a_{11}(x-x_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + a_{22}(y-y_0)^2 = 0,$$

które, według poprzedzającego, przedstawia dwie proste, przecinające się w punkcie (x_0, y_0). Rzeczywiście, rozwiązując to równanie względem $y-y_0$, sprowadzamy je do dwu równań stopnia 1-go,

$$(10') \qquad y-y_0 = -\frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}(x-x_0),$$

z których każde przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt (x_0, y_0).— Widzimy z tego, że *jeżeli równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych Descartes'a punktu przedstawia parę prostych, to można je zastąpić przez równanie stopnia 2-go jednorodne względem różnic $x-x_0$, $y-y_0$, gdzie x_0, y_0 są spółrzędnymi punktu przecięcia się tych dwu prostych*, i, oczywiście, odwrotnie.

Jeżeli przez β oznaczymy kąt, który dwusieczna kąta zawartego między prostymi (10′) czyni z kierunkiem dodatnym osi x-ów układu spółrzędnych prostokątnych, to (art. 79)

$$(11) \qquad a_{12}\operatorname{tg}^2\beta + (a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}\beta - a_{12} = 0.$$

Stąd zaś wynika, iż równanie

$$(12) \qquad a_{12}(x-x_0)^2 - (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0) - a_{12}(y-y_0)^2 = 0$$

jest równaniem obu dwusiecznych.

Wartości x_0, y_0 otrzymamy z dwu którychkolwiek równań (9); np. z dwu piérwszych wypada

$$(13) \qquad x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}},$$

gdzie A_{31}, A_{32}, A_{33} są ilościami dołączonymi do elementów a_{31}, a_{32}, a_{33} wyróżnika wielomianu $f(x, y, 1)$.

Zważmy, że punkt (x_0, y_0) leży w nieskończoności, gdy $A_{33}=0$, jest zaś nieoznaczonym, gdy jednocześnie $A_{31}=0$ i $A_{32}=0$. W piérwszym razie dwie proste będą równoległe, a w drugim stanowią jednę prostą. Toż samo wynika bespośrednio z równań (6).

PARA PUNKTÓW.

81. Weźmy równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych jednorodnych u_1, u_2, u_3 linii prostéj,

$$(1)\ F(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 = 0,$$

którego spółczynniki A_{23}, A_{31}, A_{12} również będziemy niekiedy, dla symetryi wzorów, pisali odpowiednio: A_{32}, A_{13}, A_{21}. Załóżmy, że wyróżnik wielomianu $F(u_1, u_2, u_3)$

$$(2) \qquad \alpha \equiv \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{vmatrix}$$

jest równy 0. Wskutek tego założenia wielomian $F(u_1, u_2, u_3)$ jest sumą dwu kwadratów, lub kwadratem zupełnym funkcyi stopnia 1-go; a więc, *jeżeli wyróżnik wielomianu $F(u_1, u_2, u_3)$ jest zerem, to równanie $F(u_1, u_2, u_3)=0$ przedstawia parę punktów lub punkt podwójny*, według tego, czy wyznaczniki częściowe stopnia 1-go wyróżnika nie są, czytéż są wszystkie równe 0.

82. Do tego samego wypadku można dojść także bespośrednio. Postępując taksamo, jak w artykule 78, dowiedziemy, że równość zeru wyróżnika funkcyi $F(u_1, u_2, u_3)$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby ta funkcyja była iloczynem dwu czynników stopnia 1-go, i znajdziemy wtedy

$$(3)\qquad F(u_1, u_2, u_3) \equiv \frac{1}{A_{11}}[A_{11}u_1 + (A_{12} + \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}})u_2 + (A_{13} + \sqrt{A_{13}^2 - A_{11}A_{33}})u_3] \cdot [A_{11}u_1 + (A_{12} - \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}})u_2 + (A_{13} - \sqrt{A_{13}^2 - A_{11}A_{33}})u_3].$$

Dwa punkty, które równanie (1) w tym przypadku przedstawia, są więc: oba rzeczywiste i od siebie różne (oddzielne), jeżeli $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} > 0$ i $A_{13}^2 - A_{11}A_{33} > 0$; oba urojone, jeżeli albo $A_{11}^2 - A_{11}A_{22} < 0$, albo $A_{13}^2 - A_{11}A_{33} < 0$, albotéż jeżeli jednocześnie oba te wyrażenia są ujemne; oba są tym samym punktem, t. j. przedstawiają punkt podwójny, jeżeli $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = 0$, i $A_{13}^2 - A_{11}A_{33} = 0$. W ostatnim przypadku można taksamo, jak powyżéj, okazać, że wszystkie wyznaczniki częściowe stopnia 2-go wyróżnika są równe zeru.

83. Dwa punkty urojone, które równanie (1) może, jak widzieliśmy, przedstawiać, są p u n k t a m i u r o j o n y m i s p r z ę ż o n y m i, t. j. spółczynniki odpowiednie ich równań, mówiąc ogólnie, są liczbami zespolonymi sprzężonymi. Takie dwa punkty posiadają własności, odpowiadające własnościom linij urojonych sprzężonych (art. 79). A mianowicie:

Dwa punkty urojone sprzężone wyznaczają prostą rzeczywistą; i

Środek odległości dwu punktów urojonych sprzężonych jest punktem rzeczywistym.

Jakoż, niech równania, w najogólniejszéj wzięte postaci,

$$(4)\qquad \begin{cases} (a + a'\sqrt{-1})u + (b + b'\sqrt{-1})v + 1 = 0, \\ (a - a'\sqrt{-1})u + (b - b'\sqrt{-1})v + 1 = 0 \end{cases}$$

przedstawiają dwa punkty urojone sprzężone. Spółrzędne tych punktów są

$$(5)\qquad \begin{cases} x' = a + a'\sqrt{-1}, \quad y' = b + b'\sqrt{-1}; \\ x'' = a - a'\sqrt{-1}, \quad y'' = b - b'\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w równaniu prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty (x', y') i (x'', y''), t. j. w równaniu (art. 21)

$$\frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''},$$

otrzymamy

$$\frac{x-a-a'\sqrt{-1}}{2a'\sqrt{-1}}=\frac{y-b-b'\sqrt{-1}}{2b'\sqrt{-1}}$$

czyli

(6) $$\frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}.$$

Prosta więc, przechodząca przez dwa punkty urojone i sprzężone, jest rzeczywistą.—Spółrzędne środka odległości dwu punktów (x', y'), (x'', y'') są

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \quad y=\frac{y'+y''}{2},$$

a zatym, po podstawieniu wartości (5),

(7) $$x=a, \quad y=b,$$

t. j. środek odległości dwu punktów urojonych sprzężonych jest punktem rzeczywistym.

84. Postępując taksamo, jak w artykule 80, znajdziemy, że spółrzędne prostéj $(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)$, na któréj leżą dwa punkty równania (1) wrazie $\alpha=0$, są wyznaczone przez równania

(8) $$\begin{cases} F_1(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)\equiv A_{11}u_1{}^0+A_{12}u_2{}^0+A_{13}u_3{}^0=0, \\ F_2(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)\equiv A_{21}u_1{}^0+A_{22}u_2{}^0+A_{23}u_3{}^0=0, \\ F_3(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)\equiv A_{31}u_1{}^0+A_{32}u_2{}^0+A_{33}u_3{}^0=0. \end{cases}$$

Albowiém, stosując twierdzenie Euler'a, mamy także $F(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)=0$. Prosta więc $(u_1{}^0, u_2{}^0, u_3{}^0)$ jest styczną do linii $F=0$, a więc dotyka obu punktów, które równanie $F=0$ w tym przypadku przedstawia.

Jeżeli do równania (1) wprowadzimy spółrzędne Plücker'a, kładąc w tym równaniu $u_3=1$, $u_1=u$, $u_2=v$, i przez u_0, v_0 oznaczymy spółrzędne Plücker'a prostéj, przechodzącéj przez punkty przedstawione przez równanie (1), natenczas równanie tych punktów sprowadzimy (art. 80) do postaci

(9) $$A_{11}(u-u_0)^2+2A_{12}(u-u_0)(v-v_0)+A_{22}(v-v_0)^2=0,$$

t. j. *jeżeli równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych Plücker'a linii prostéj przedstawia parę punktów, to można je zastąpić przez równanie stopnia 2-go jednorodne względem różnic $u-u_0$, $v-v_0$, gdzie u_0 i v_0 są spółrzędnymi prostéj, łączącéj te dwa punkty,* i odwrotnie.

Spółrzędne u_0, v_0 mają wartości

(10) $$u_0=\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, \qquad v_0=\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}},$$

gdzie α_{31}, α_{32}, α_{33} oznaczają ilości dołączone do elementów A_{31}, A_{32}, A_{33} wyróżnika wielomianu $F(u, v, 1)$.

85. Ogólnie, *jeżeli równanie jakiegokolwiek stopnia, bądźto między spółrzędnymi punktu (x, y), bądźtéż między spółrzędnymi linii prostéj (u, v), daje się wyrazić jako iloczyn kilku równań stopni niższych, to ono wyraża połączenie miejsc* *gieometrycznych, przedstawionych przez czynniki.* Równanie np. stopnia n-go, dające się rozłożyć na n czynników stopnia 1-go, przedstawia odpowiednio n prostych, lub n punktów.

Wszczególności, *równanie stopnia n-go jednorodne względem dwu różnic* $x-x_0$, $y-y_0$, *lub* $u-u_0$, $v-v_0$, *przedstawia odpowiednio n prostych, przecinających się w punkcie* (x_0, y_0), *lub n punktów, leżących na prostéj* (u_0, v_0).

Jakoż, dzieląc równanie

$$(x-x_0)^n+p_1(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+p_2(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2+\ldots+p_n(y-y_0)^n=0$$

przez $(y-y_0)^n$, miéć będziemy równanie

$$\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^n+p_1\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^{n-2}+\ldots+p_n=0,$$

którego rozwiązanie daje n wartości na $\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)$. Oznaczywszy te wartości przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$, możemy ostatnie równanie napisać w postaci

$$\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}-a_1\right)\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}-a_2\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}-a_n\right)=0,$$

a pierwotne w postaci

$$[x-x_0-a_1(y-y_0)][x-x_0-a_2(y-y_0)]\ldots[x-x_0-a_n(y-y_0)]=0,$$

z któréj widać, iż ono przedstawia n prostych

$$x-x_0=a_1(y-y_0),\; x-x_0=a_2(y-y_0),\ldots,\; x-x_0=a_n(y-y_0).$$

Toż samo, gdybyśmy mieli podobne równanie między $u-u_0$ i $v-v_0$.

Można wynaléść liczbę warunków potrzebnych na to, aby równanie ogólne stopnia n-go przedstawiało n prostych lub n punktów. Dość w tym celu porównać równanie ogólne stopnia n-go, po sprowadzeniu w nim wyrazu niezależnego od zmiennych do jedności, z iloczynem n równań stopnia 1-go

$$(a_1x+b_1y+1)(a_2x+b_2y+1)\ldots(a_nx+b_ny+1)=0.$$

Jeżeli liczba wyrazów równania ogólnego stopnia n-go między x i y jest $=$N, to porównanie spółczynników wyrazów podobnych w tym równaniu i w rozwinięciu napisanego iloczynu da nam N-1 równań między spółczynnikami. $2n$ z tych równań posłuży nam do wyznaczenia $2n$ liczb niewiadomych $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, a podstawienie wartości tak otrzymanych w pozostałych równaniach doprowadzi nas do N$-1-2n$ warunków żądanych. Równanie ogólne stopnia n-go między x i y (i podobnie między u i v) można pisać pod postacią

$$\begin{aligned}&1\\&+(\beta_0x+\beta_1y)\\&+(\gamma_0x^2+\gamma_1xy+\gamma_2y^2)\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&+(\nu_0x^n+\nu_1x^{n-1}y+\ldots+\nu_ny^n)=0,\end{aligned}$$

liczba więc jego wyrazów jest równa sumie postępu różnicowego

$$N=1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2},$$

a liczba warunków koniecznych

$$N-1-2n=\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

ĆWICZENIA.

(57). Czy i jakie proste przedstawia równanie $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$?

(58). Czy i jakie proste przedstawia równanie $x^2-xy+y^2-x-y+1=0$?

(59). Jaki kąt czynią między sobą proste $x^2+xy-6y^2=0$, a jaki proste $x^2-2xy\sec\theta+y^2=0$?

(60). Znaléść równanie dwusiecznych kątów między dwiema prostymi $3x^2+3y^2+10xy-15x-21y+18=0$.

(61). Okazać, że równanie we spółrzędnych trójkątnych

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+2x_2x_3\cos(A_2-A_3)+2x_3x_1\cos(A_3-A_1)+2x_1x_2\cos(A_1-A_2)=0.$$

przedstawia dwie proste równoległe do prostéj $x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3=0$.

(62). Znaléść równanie prostéj rzeczywistéj, przechodzącéj przez punkt urojony $(x'_1+x''_1\sqrt{-1},\ x'_2+x''_2\sqrt{-1},\ x'_3+x''_3\sqrt{-1})$.

(63). Kiedy prosta, łącząca punkt urojony zadania (62) z punktem rzeczywistym (x_1''', x_2''', x'''_3), jest rzeczywistą?

(64). Okazać, że jeżeli czynnik λ się zmienia, to punkt urojony $x'_1+\lambda x''_1\sqrt{-1}$, $x'_2+\lambda x''_2\sqrt{-1}$, $x'_3+\lambda x''_3\sqrt{-1}$ opisuje prostą rzeczywistą.

ROZDZIAŁ VII.

O WŁASNOŚCIACH OGÓLNYCH LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO.

LINIJE KRZYWE RZĘDU 2-GO.

88. Tak linije, przedstawione przez równania stopnia 2-go we spółrzędnych punktu, jak i linije, przedstawione przez równania stopnia 2-go we spółrzędnych linii prostéj, są linijami krzywymi, wrazie, gdy wyróżniki tych wielomianów stopnia 2-go są od 0 różne. Piérwsze z tych linij nazywamy linijami krzywymi, albo, krócéj, krzywymi rzędu 2-go, a drugie krzywymi klasy 2-éj. Ponieważ, jak to niebawem się okaże, każda krzywa rzędu 2-go jest zarazem krzywą klasy 2-éj i, nawzajem, każda krzywa klasy 2-éj jest zarazem krzywą rzędu 2-go, więc będzie można jedne i drugie nazwać ogólnie krzywymi stopnia 2-go.

Wykrycie wszelkich krzywych stopnia 2-go jest przedmiotem tego i następującego rozdziału. Doprowadzi nas do tego wyprowadzenie niektórych własności tychże krzywych z ich równań najogólniejszych. Zajmiemy się naprzód krzywymi rzędu 2-go.

Równanie najogólniejsze linii krzywéj rzędu 2-go jest

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + a_{33}x_3{}^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

W tym równaniu zmienne x_1, x_2, x_3 są spółrzędnymi punktu jednorodnymi, od których można przejść do spółrzędnych Descartes'a, kładąc $x_1 = x$, $x_2 = y$ i $x_3 = 1$.

Wiadomo, że prosta przecina liniją rzędu 2-go w dwu punktach (art. 8). Weźmy więc pod uwagę prostą, która łączy dwa dowolnie wybrane punkty płaszczyzny, P_1 i P_2, i znajdźmy stosunek, w jakim każdy z punktów przecięcia się téj prostéj z liniją, przedstawioną przez równanie (1), dzieli odcinek P_1P_2. Jeżeli x'_1, x'_2, x'_3 i x''_1, x''_2, x''_3 są spółrzędnymi jednorodnymi punktów P_1 i P_2, a x_1, x_2, x_3 są takimiż spółrzędnymi punktu P na prostéj P_1P_2, dzielącéj odcinek P_1P_2 w stosunku danym $P_1P : PP_2 = \lambda : 1$, wówczas (art. 62) można wyrazić

(2) $$x_1 = x'_1 + \lambda x''_1, \quad x_2 = x'_2 + \lambda x''_2, \quad x_3 = x'_3 + \lambda x''_3.$$

Jeżeli punkt P jest jednocześnie punktem przecięcia się prostéj P_1P_2 z liniją, przedstawioną przez równanie (1), natenczas mamy

$$f(x'_1 + \lambda x''_1, \ x'_2 + \lambda x''_2, \ x'_3 + \lambda x''_3) = 0.$$

t. j. równaniu (1) staje się zadość, gdy w nim za x_1, x_2, x_3 podstawimy wartości (2). Równanie ostatnie, gdy wprowadzimy znane oznaczenia,

(3) $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{31}x_1 + a_{32}x^2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

przyjmie postać

(4) $$f(x'_1, x'_2, x'_3) + 2\lambda[x''_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3)] + \lambda^2 f(x''_1, x''_2, x''_3) = 0.$$

Równanie to jest stopnia 2-go względem λ. Da więc nam ono dwie wartości na tę liczbę: jednę odpowiadającą jednemu, a drugą odpowiadającą drugiemu z punktów P, w których prosta P_1P_2 przecina liniją, przedstawioną przez równanie (1). — Zajmiemy się rozbiorem równania (4).

89. Biegunowa i biegun. — Przypuśćmy, że spółrzędne punktów P_1 i P_2 czynią zadość równaniu

(5) $$x''_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

Wtedy równanie (4) sprowadzi się do równania

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) + \lambda^2 f(x''_1, x''_2, x''_3) = 0,$$

które daje dwie wartości na λ, różniące się tylko znakami. Oznaczywszy więc przez (x'''_1, x'''_2, x'''_3) i $(x^{IV}_1, x^{IV}_2, x^{IV}_3)$ spółrzędne dwu punktów P_3 i P_4, w których prosta P_1P_2 przecina liniją (1), mieć będziemy w tym przypadku

$$x'''_1 = x'_1 + \lambda x''_1, \quad x'''_2 = x'_2 + \lambda x''_2, \quad x'''_3 = x'_3 + \lambda x''_3,$$
$$x^{IV}_1 = x'_1 - \lambda x''_1, \quad x^{IV}_2 = x'_2 - \lambda x''_2, \quad x^{IV}_3 = x'_3 - \lambda x''_3,$$

skąd widzimy, że dwie pary punktów P_1, P_2 i P_3, P_4 są harmoniczne (art. 39).

Jeżeli przez punkt stały P_1 będziemy prowadzić coraz inną prostą (sieczną), przecinającą liniją (1) w dwu coraz innych punktach P_3 i P_4, to na każdéj z nich znajdzie się punkt P_2, który z punktem P_1 tworzy parę harmonicznie sprzężoną z parą punktów P_3 i P_4, leżących na téjże prostéj. Spółrzędne każdego z tych punktów P_2 uczynią zadość równaniu warunkowemu (5), t. j. te punkty P_2 leżą na linii, przedstawionéj przez równanie

(6) $$x_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0,$$

które jest stopnia 1-go względem x_1, x_2, x_3, spółrzędnych bieżących tych punktów P_2. Zatym: *miejsce gieometryczne punktu na prostéj, przechodzącéj przez punkt stały, tworzącego z nim parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ta prosta przecina liniją rzędu 2-go, jest linija prosta.* Tę prostą (6) nazywamy **biegunową** punktu danego $P_1(x'_1, x'_2, x'_3)$, a punkt dany **biegunem** téj prostéj **względem danéj linii rzędu 2-go.**

Z równania (6) widoczna, że biegunowa punktu (x'_1, x'_2, x'_3) jest nieoznaczona tylko wtedy, kiedy spółrzędne tego punktu jednocześnie przywodzą do zera wszystkie trzy wyrażenia: f_1, f_2, f_3. Ten przypadek, jak wiemy, ma miejsce wrazie, gdy równanie (1) przedstawia parę prostych. A zatym: *jeżeli równanie* (1) *nie przedstawia pary prostych, to biegunowa każdego punktu jest oznaczona; jeżeli równanie* (1) *przedstawia parę prostych, to biegunowa punktu przecięcia się tych prostych jest nieoznaczona; jeżeli nakoniec równanie* (1) *przedstawia prostą podwójną, to biegunowa każdego punktu téj prostéj jest nieoznaczona.* — W obu ostatnich przypadkach z tożsamości

$$x_1 f_1(x'_1, x'_2\ x'_3) + x_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3)$$
$$\equiv x'_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + x'_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + x'_3 f_3(x_1, x_2, x_3),$$

wypada, że równaniu biegunowéj jakiegokolwiek punktu (x_1, x_2, x_3) uczynią zadość spółrzędne (x'_1, x'_2, x'_3), dla których jest jednocześnie

$$f_1(x'_1, x'_2, x'_3) = 0, \quad f_2(x'_1, x'_2, x'_2) = 0 \text{ i } f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

A zatym: *jeżeli równanie* (1) *przedstawia parę prostych, to biegunowa każdego punktu przechodzi przez punkt przecięcia się tych prostych; a jeżeli równanie* (1) *przedstawia prostą podwójną, to biegunowa każdego punktu, leżącego zewnątrz téj prostéj, schodzi się razem z tąż prostą.*

Z własności harmonicznych czworoboku zupełnego (art. 40) wypada sposób kreślenia biegunowéj punktu danego względem danéj linii rzędu 2-go. Jakoż, wyprowadziwszy (fig. 25) z punktu danego P_1 dwie sieczne, z których piérwsza przecina liniją rzędu 2-go w punktach P_3 i P_5, a druga w punktach P_6 i P_7, i przedłużywszy proste P_3P_6, P_5P_7 aż do przecięcia się w P_8, mieć będziemy czworobok zupełny. Prosta, łącząca wiérzchołek P_8 z punktem P_9, w którym się przecinają dwie przekątne P_3P_7 i P_5P_6, przetnie piérwszą sieczną w punkcie P_2, a drugą w punkcie P_4. Punkt P_2

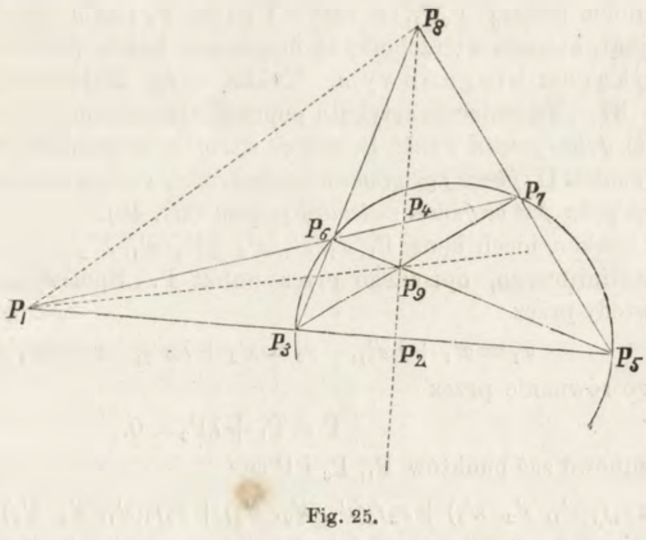


Fig. 25.

tworzy z P_1 parę punktów harmonicznie sprzężonych z parą punktów P_3 i P_4, i taksamo para punktów P_4 i P_1 jest harmonicznie sprzężona z parą punktów P_6 i P_7; przeto prosta P_8P_9 jest biegunową punktu danego P_1. Podobnie, prosta P_1P_9 jest biegunową punktu P_8.

90. Równanie warunkowe (5) wyraża, że punkt P_2 leży na biegunowéj punktu P_1. Ze względu na znaczenie wyrażeń f_1, f_2, f_3, można to równanie tak pisać:

$$x'_1 f_1(x''_1, x''_2, x''_3) + x'_2 f_2(x''_1, x''_2, x''_3) + x'_3 f_3(x''_1, x''_2, x''_3) + 0.$$

Stąd czytamy, że nawzajem punkt P_1 leży na biegunowéj punktu P_2. A zatym: *jeżeli z dwu punktów* P_1 *i* P_2 *jeden leży na biegunowéj punktu drugiego, to drugi leży na biegunowéj punktu piérwszego,* albo ogólniéj: *jeżeli punkt przebiega liniją prostą, to jego biegunowa obraca się około bieguna téj prostéj.*

Wyprowadzamy stąd wniosek: *biegunowa punktu przecięcia się dwu prostych przechodzi przez bieguny tych prostych.*

Dwa punkty, z których każdy leży na biegunowéj punktu pozostałego, nazywamy punktami sprzężonymi względem danéj linii rzędu 2-go. One, oczywiście, tworzą parę punktów harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których prosta, je łącząca, przecina daną liniją rzędu 2-go. — O trzech zaś punktach, z których każde dwa są z sobą sprzężone względem danéj linii rzędu 2-go, innymi słowy: o trzech punktach takich, iż biegunowa każdego z nich względem danéj linii rzędu 2-go przechodzi przez dwa punkty pozostałe (czyli, na mocy powyższego wniosku: każdy jest biegunem prostéj, łączącéj dwa punkty pozostałe), mówimy, że one tworzą trójkę punktów sprzężonych. Na fig. 25 punkty P_1, P_8, P_9 tworzą trójkę punktów sprzężonych, albowiém punkt P_1 jest biegunem prostéj P_8P_9, punkt P_8 jest biegunem prostéj P_9P_1, a zatym i punkt P_9 jest biegunem prostéj P_1P_8. — Trójkąt, którego wiérzchołki są biegunami boków przeciwległych, zowie się trójkątem biegunowym. Takim na fig. 25 jest trójkąt $P_1P_8P_9$.

91. Twierdzenie artykułu poprzedzającego można jeszcze tak wypowiedzieć: *Jeżeli pewien punkt* P *opisuje szereg prostolinijowy punktów, to biegunowa tego punktu* D *opisuje pęk promieni, jednokréślny z owym szeregiem punktów, a wiérzchołek pęku jest biegunem podstawy szeregu* (art. 48).

Jakoż, niech będą $P_1(x'_1, x'_2, x'_3)$ i $P_2(x''_1, x''_2, x''_3)$ dwa punkty szeregu prostolinijowego, opisanego przez punkt P. Spółrzędne punktu P wyrażą się wtedy przez

$$x_1 = x'_1 + \lambda x''_1, \quad x_2 = x'_2 + \lambda x''_2, \quad x_3 = x'_3 + \lambda x''_3$$

a jego równanie przez

$$P \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0.$$

Biegunowe zaś punktów P_1, P_2 i P są

$$D_1 \equiv x_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0,$$

$$D_2 \equiv x_1 f_1(x''_1, x''_2, x''_3) + x_2 f_2(x''_1, x''_2, x''_3) + x_3 f_3(x''_1, x''_2, x''_3) = 0,$$

$$D \equiv x_1 f_1(x'_1 + \lambda x''_1, x'_2 + \lambda x''_2, x'_3 + \lambda x''_3) + x_2 f_2(x'_1 + \lambda x''_1, x'_2 + \lambda x''_2, x'_3 + \lambda x''_3)$$
$$+ x_3 f_3(x'_1 + \lambda x''_1, x'_2 + \lambda x''_2, x'_3 + \lambda x''_3) = 0,$$

czyli

$$D \equiv D_1 + \lambda D_2 = 0.$$

Stąd wypada, że biegunowa D punktu P przechodzi przez przecięcie się biegunowych D_1 i D_2 punktów P_1 i P_2, czyli przez biegun prostéj P_1P_2, tudzież, że pęk promieni, opisany przez D, jest jednokréślny z szeregiem punktów opisanym przez P.

Oznaczmy jeszcze przez Q punkt na prostéj P_1P_2, który z punktem P tworzy parę punktów sprzężonych. Posuwaniu się punktu P na prostéj P_1P_2 odpowiada posuwanie się punktu Q na téjże saméj prostéj. Pary punktów, odpowiadające jednoczesnym położeniom punktów P i Q, są wszystkie harmonicznie sprzężone z parą punktów, w których prosta P_1P_2 przecina daną liniją rzędu 2-go. Mamy zatym twierdzenie: *Pary punktów sprzężonych, względem danéj linii rzędu 2-go, leżące na jednéj prostéj, tworzą inwolucyją; punktami asymptotycznymi téj inwolucyi są punkty przecięcia się téj prostéj z daną liniją rzędu 2-go.*

92. Linije styczne. — Wracając do równania (4), przypuśćmy, że, oprócz związku (5), ma jeszcze miejsce równanie $f(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$, czyli

$$(7) \qquad x'_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x'_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x'_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

W tym przypadku równanie (4) sprowadza się do następującego,

$$\lambda^2 f(x''_1, x''_2, x''_3) = 0,$$

które daje obie wartości na λ równe 0, a przeto oba punkty P_3 i P_4, w których prosta P_1P_2 przecina liniją rzędu 2-go (1), schodzą się razem w punkcie P_1.

Równanie warunkowe (7) wyraża, że punkt P_1 leży na linii rzędu 2-go (1) i zarazem na swojéj biegunowéj. A zatym: *jeżeli punkt leży na linii rzędu 2-go, to jego biegunowa przechodzi przezeń i przecina tę liniją w dwu punktach, schodzących się razem z biegunem.* Prostą, która liniją rzędu 2-go przecina w dwu punktach schodzących się razem (t. j. w dwu punktach nieskończenie siebie bliskich), nazywamy s t y c z n ą linii rzędu 2-go, a punkt, w którym styczna ma z liniją rzędu 2-go dwa punkty spólne, nazywamy p u n k t e m s t y c z n o ś c i. A zatym: *biegunowa punktu, leżącego na linii rzędu 2-go, jest styczną do téj linii w tymże punkcie.*

Równanie zatym (6) przedstawia także styczną do linii rzędu 2-go (1) w punkcie, którego spółrzędne są x'_1, x'_2, x'_3, jeżeli te spółrzędne jednocześnie czynią zadość równaniu warunkowemu (7), t. j. jeżeli ten punkt leży na linii (1).

93. Jeżeli przypuścimy, iż

$$(8) \quad f(x''_1, x''_2, x''_3) f(x'_1, x'_2, x'_3) - [x''_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3)]^2 = 0,$$

wówczas piérwsza strona równania (4) jest kwadratem zupełnym, a przeto jego pierwiastki, t. j. obie wartości na λ, są sobie równe. W tym przypadku prosta P_1P_2 przetnie liniją rzędu 2-go (1) w dwu punktach, schodzących się razem, czyli — będzie styczną do linii równania (1).

Jeżeli przyjmiemy punkt P_1 jako stały, a punkt P_2 jako punkt bieżący na stycznéj, wyprowadzonéj z punktu P_1 do linii (1), natenczas spółrzędne tego punktu bieżącego, wskutek (8), czynią zadość równaniu

$$(9)\quad f(x_1, x_2, x_3) f(x'_1, x'_2, x'_3) - [x_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3)]^2 = 0.$$

Temu równaniu uczynią zadość także spółrzędne punktu styczności téjże stycznéj. Atoli dla punktu styczności jest $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Wskutek tego, dla punktu styczności równanie (9) sprowadza się do równania

$$x_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x_2 f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0,$$

z którego czytamy, że punkt styczności stycznéj, wyprowadzonéj z punktu P_1 do linii (1), leży na biegunowéj punktu P_1.

Biegunowa punktu P_1, jako linija prosta, przecina liniją rzędu 2-go w dwu punktach; a więc z punktu P_1 można wyprowadzić dwie styczne do linii rzędu 2-go, których punkty styczności leżą na przecięciu się jéj z biegunową punktu P_1. Gdy zaś punkt P_1 jest zupełnie dowolnym, przeto: *z każdego punktu na płaszczyźnie linii rzędu 2-go można wyprowadzić dwie, lecz tylko dwie, styczne do téj linii.* Biegunowa tego punktu jest prostą, przechodzącą przez oba punkty styczności, a więc zawiéra w sobie cięciwę styczności. — Na zasadzie tego twierdzenia, kréślenie stycznych do linii rzędu 2-go z jakiegokolwiek punktu sprowadza się do kréślenia biegunowéj tego punktu, co, jak wiemy, daje się uskutecznić zapomocą poprowadzenia kilku linij prostych (art. 89).

94. Nie trudno okazać, że równanie (9) przedstawia dwie linije proste, t. j. dwie styczne, dające się wyprowadzić z punktu P_1 do linii (1). Dość w tym celu okazać, że wyróżnik piérwszéj strony równania (9) jest równy 0. Połóżmy, dla skrócenia,

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = f', \; f_1(x'_1, x'_2, x'_3) = f'_1, \; f_2(x'_1, x'_2, x'_3) = f'_2, \; f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = f'_3;$$

wtedy równanie (9) możemy tak przedstawić

$$(f'a_{11} - f'^2_1) x_1^2 + (f'a_{22} - f'^2_2) x_2^2 + (f'a_{33} - f'^2_3) x_3^2 + 2(f'a_{12} - f'_1 f'_2) x_1 x_2$$
$$+ 2(f'a_{13} - f_1 f'_3) x_1 x_3 + 2(f'a_{23} - f'_2 f'_3) x_2 x_3 = 0.$$

Wyróżnik piérwszéj jego strony,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} f'a_{12} - f'^2_1 & , f'a_{12} - f'_1 f'_2 & , f'a_{13} - f'_1 f'_2 \\ f'a_{21} - f'_2 f'_1 & , f'a_{22} - f'_2 & , f'a_{23} - f'_2 f'_3 \\ f'a_{31} - f'_3 f'_1 & , f'a_{32} - f'_3 f'_2 & , f'a_{33} - f'^2_3 \end{vmatrix}$$

daje się rozłożyć na sumę ośmiu wyznaczników, których elementami są piérwsze lub drugie wyrazy dwumianów, tworzących elementy wyznacznika Δ. Z tych ośmiu wyznaczników cztéry są tożsamościowo równe 0, t. j. te, które mają po dwie lub trzy kolumny, utworzone z drugich wyrazów tych dwumianów. Pozostaną zatym tylko cztéry wyznaczniki następujące

$$\begin{vmatrix} f'a_{11}, & f'a_{12}, & f'a_{13} \\ f'a_{21}, & f'a_{22}, & f'a_{23} \\ f'a_{31}, & f'a_{32}, & f'a_{33} \end{vmatrix} \equiv f'^3 . \mathrm{A},$$

$$\begin{vmatrix} -f'^2_1, & f'a_{12}, & f'a_{13} \\ -f'_1 f'_2, & f'a_{22}, & f'a_{23} \\ -f'_1 f'_3, & f'a_{32}, & f'a_{33} \end{vmatrix} = -f'_1 f'^2 . \begin{vmatrix} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = -f'^2 f'_1 x' \mathrm{A},$$

$$\begin{vmatrix} f'a_{11}, & -f'_1 f'_2, & f'a_{13} \\ f'a_{21}, & -f'^2_2, & f'a_{23} \\ f'a_{31}, & -f'_2 f'_3, & f'a_{33} \end{vmatrix} = -f'^2 f'_2 x'_2 \mathrm{A} \text{ i } \begin{vmatrix} f'a_{11}, & f'a_{12}, & -f'_1 f'_3 \\ f'a_{21}, & f'a_{22}, & -f'_2 f'^2_3 \\ f'a_{31}, & f'a_{32}, & -f'^2_3 \end{vmatrix} = -f'^2 f'_3 x_3 \mathrm{A}.$$

Mamy więc

$$\Delta = f'^2 \mathrm{A}(f' - x'_1 f'_1 - x'_2 f_2 - x'_3 f'_3) \equiv 0,$$

gdyż

$$f' = x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + x'_3 f'_3.$$

Stąd wypada, że równanie (9) przedstawia istotnie parę prostych (rzeczywistych i różnych, rzeczywistych i schodzących się razem, lub urojonych). Że zaś te proste przechodzą przez punkt P_1 i przez punkty styczności stycznych, wyprowadzonych z punktu P_1, przeto tymi prostymi są właśnie styczne z punktu P_1.

95. Klasa linij krzywych rzędu 2-go. Ponieważ z każdego punktu, dowolnie obranego na płaszczyźnie, można wyprowadzić dwie, ale tylko dwie, styczne do krzywéj rzędu 2-go, więc krzywa rzędu 2-go jest zarazem krzywą klasy 2-éj. Stąd zaś wypada, że jéj równanie we spółrzędnych linii prostéj powinno być także równaniem stopnia 2-go.

Aby otrzymać to równanie, oznaczmy przez u_1, u_2, u_3 spółrzędne jednorodne (szczególne) stycznéj do krzywéj (1) w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3). Z równania (6) stycznéj, wypadają związki

$$(10) \qquad \begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = u_1, \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = u_2, \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = u_3, \end{cases}$$

które rozwiązując względem x'_1, x'_2, x'_3, otrzymujemy

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}x'_1 = \mathrm{A}_{11}u_1 + \mathrm{A}_{21}u_2 + \mathrm{A}_{31}u_3, \\ \mathrm{A}x'_2 = \mathrm{A}_{12}u_1 + \mathrm{A}_{22}u_2 + \mathrm{A}_{32}u_3, \\ \mathrm{A}x'_3 = \mathrm{A}_{13}u_1 + \mathrm{A}_{23}u_2 + \mathrm{A}_{33}u_3, \end{cases}$$

gdzie A jest wyróżnikiem strony lewéj równania (1), a A_{ik} jest ilością dołączoną do elementu a_{ik} tego wyznacznika A, przyczym jest także $\mathrm{A}_{ik} = \mathrm{A}_{ki}$. Punkt (x'_1, x'_2, x'_3), jako punkt styczności, leży na stycznéj (u_1, u_2, u_3); mamy więc

$$(12) \qquad u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 = 0.$$

Podstawienie zaś wartości na x'_1, x'_2, x'_3, wynikających z równań (11), w równaniu (12) daje związek między spółrzędnymi stycznéj do krzywéj (1),

$$(13) \qquad F(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 = 0,$$

czyli równanie téj krzywéj we spółrzędnych linii prostéj. To równanie, jako wypadek rugowania liczb x'_1, x'_2, x'_3 i 1 z czterech równań (10) i (12), można przedstawić także pod postacią wyznacznikową,

$$(14) \qquad F(u_1, u_2, u_3) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie (13) jest stopnia 2-go względem spółrzędnych u_1, u_2, u_3; a zatym:

Krzywa rzędu 2-go jest zarazem krzywą klasy 2-éj.

Tym twierdzeniem nie jest wszakże objęty przypadek, kiedy linija, przedstawiona przez równanie (1), sprowadza się do pary prostych; albowiém wówczas $A = 0$, a przeto strony lewe równań (11) są $= 0$.

LINIJE KRZYWE KLASY 2-ÉJ.

96. Weźmy teraz pod uwagę równanie najogólniejsze krzywéj klasy 2-éj

$$(1') \quad F(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 = 0,$$

przyjmując nadal, jak poprzednio (art. 66), $A_{32} = A_{23}$, $A_{13} = A_{31}$, $A_{21} = A_{12}$.

Wiadomo, że z każdego punktu można wyprowadzić dwie styczne do krzywéj klasy 2-éj. Wyprowadźmy zatym z punktu spotkania się dwu dowolnie obranych promieni D_1 i D_2 dwie styczne, i wynajdźmy stosunek między wstawami dwu kątów, na które każda z tych stycznych dzieli kąt między promieniami D_1 i D_2. Jeżeli oznaczymy przez u'_1, u'_2, u'_3 i u''_1, u''_2, u''_3 spółrzędne jednorodne promieni D_1 i D_2, to spółrzędne jednorodne promienia D, wychodzącego z punktu przecięcia się promieni D_1 i D_2 i dzielącego kąt D_1D_2 tak, że $\sin D_1D : \sin DD_2 = \lambda : 1$, można wyrazić przez

$$(2') \qquad u_1 = u'_1 + \lambda u''_1, \quad u_2 = u'_2 + \lambda u''_2, \quad u_3 = u'_3 + \lambda u''_3.$$

Jeżeli promień D jednocześnie dotyka linii, przedstawionéj przez równanie (1'), natenczas równaniu temu stanie się zadość, gdy w nim za u_1, u_2, u_3 podstawimy wartości (2'). Wykonawszy to podstawienie i kładąc, dla skrócenia,

$$(3') \qquad \begin{cases} F_1(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3, \\ F_2(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3, \\ F_3(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_2, \end{cases}$$

mamy

$$(4') \quad F(u'_1, u'_2, u'_3) + 2\lambda[u''_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3) + u''_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3) + u''_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)] + \lambda^2F(u''_1, u''_2, u''_3) = 0,$$

równanie stopnia 2-go względem λ. Da więc nam ono dwie wartości na tę liczbę: jednę odpowiadającą jednéj, a drugą odpowiadającą drugiéj ze stycznych, które można wyprowadzić z punktu D_1D_2 do linii, przedstawionéj przez równanie (1'). — Zajmiemy się rozbiorem równania (4').

97. Biegun i biegunowa. — Przypuśćmy, że spółrzędne promieni D_1 i D_2 czynią zadość równaniu

$$u''_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3)+u''_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3)+u''_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)=0. \tag{5'}$$

Wtedy równanie (4') sprowadza się do równania

$$F(u'_1, u'_2, u'_3)+\lambda^2F(u''_1, u''_2, u''_3)=0,$$

które daje dwie wartości na λ, różniące się tylko znakami. Oznaczywszy więc przez u'''_1, u'''_2, u'''_3 i $u^{IV}_1, u^{IV}_2, u^{IV}_3$ spółrzędne dwu stycznych D_3 i D_4, które można wyprowadzić z punktu D_1D_2 do linii (1'), mieć będziemy w przypadku uważanym

$$u'''_1=u'_1+\lambda u''_1,\quad u'''_2=u'_2+\lambda u''_2,\quad u'''_3=u'_3+\lambda u''_3,$$
$$u^{IV}_1=u'_1-\lambda u''_1,\quad u^{IV}_2=u'_2-\lambda u''_2,\quad u^{IV}_3=u'_3-\lambda u''_3,$$

skąd widzimy, że dwie pary promieni D_1, D_2 i D_3, D_4 są harmoniczne.

Jeżeli promień D_1 ma położenie niezmienne, a z coraz innego punktu na tym promieniu wyprowadzać będziemy po dwie styczne D_3 i D_4 do linii (1'), to z każdego z tych punktów można wyprowadzić promień D_2, który z promieniem D_1 tworzy parę harmonicznie sprzężoną z parą stycznych D_3 i D_4. Spółrzędne każdego z tych promieni D_2 uczynią zadość równaniu warunkowemu (5'), t. j. te promienie D_2 przechodzą przez punkt, przedstawiony przez równanie

$$u_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3)+u_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3)+u_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)=0 \tag{6'}$$

(stopnia piérwszego względem u_1, u_2, u_3, spółrzędnych bieżących promienia D_2). Zatym: *Promienie, tworzące z promieniem o położeniu niezmiennym pary promieni, harmonicznie sprzężone z odpowiednimi parami stycznych, które z różnych punktów na promieniu niezmiennym można wyprowadzić do linii klasy 2-éj, przechodzą przez tenże sam punkt.* Ten punkt (6') nazywamy b i e g u n e m promienia danego D_1 (u'_1, u'_2, u'_3), a promień dany b i e g u n o w ą tego punktu w z g l ę d e m d a n é j l i n i i k l a s y 2-é j.

Z równania (6') czytamy, że biegun promienia (u'_1, u'_2, u'_3) jest nieoznaczony tylko wtedy, kiedy równanie (1') przedstawia parę punktów, albowiém wtedy wszystkie trzy wyrażenia F_1, F_2, F_3 przywodzą się jednocześnie do zera. W tym przypadku szczególnym, z tożsamości

$$u_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3)+u_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3)+u_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)$$
$$\equiv u'_1F_1(u_1, u_1, u_3)+u'_2F_2(u_1, u_2, u_3)+u'_3F_3(u_1, u_2, u_3),$$

wynika, że: *jeżeli równanie* (1') *przedstawia dwa punkty oddzielne, to biegun każdéj prostéj leżéć będzie na prostéj, łączącéj te dwa punkty, a jeżeli równanie* (1') *przedstawia punkt podwójny, to biegun każdéj prostéj zejdzie się razem z tym punktem.* Albowiém, wartości u'_1, u'_2, u'_3, dla których jednocześnie $F_1=0$, $F_2=0$ i $F_3=0$, uczynią zadość, wskutek powyższéj tożsamości, równaniu

$$u'_1 F_1(u_1, u_2, u_3) + u'_2 F_2(u_1, u_2, u_3) + u'_3 F_3(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

które przedstawia biegun prostéj dowolnéj (u_1, u_2, u_3).

98. Równanie warunkowe (5') można także tak pisać:

$$u'_1 F_1(u''_1, u''_2, u''_3) + u'_2 F_2(u''_1, u''_2, u''_3) + u'_3 F_3(u''_1, u''_2, u''_3) = 0.$$

A zatym: *jeżeli z dwu prostych* D_1 *i* D_2 *jedna przechodzi przez biegun drugiéj, to druga przejdzie przez biegun piérwszéj*, albo: *jeżeli prosta obraca się około stałego punktu, to biegun téj prostéj przebiega prostą stałą, biegunową tego punktu.*

Stąd zaś mamy jako wniosek: *Jeżeli prosta przechodzi przez dwa punkty, to biegun téj prostéj jest punktem przecięcia się biegunowych tych dwu punktów.*

Dwie proste, z których każda przechodzi przez biegun prostéj pozostałéj, zowią się promieniami sprzężonymi względem danéj linii klasy 2-éj. O trzech zaś prostych, z których każda jest względem danéj linii klasy 2-éj biegunową punktu przecięcia się dwu pozostałych, powiadamy, że one tworzą trójkę promieni sprzężonych. — W trójkącie biegunowym (art. 90) nie tylko wiérzchołki tworzą trójkę punktów sprzężonych, ale i boki jego przedstawiają trójkę promieni sprzężonych.

99. *Jeżeli promień* D, *obracając się około wiérzchołka* S, *opisuje pęk promieni, to biegun tego promienia, przebiegając biegunową wiérzchołka* S, *opisuje szereg punktów, z owym pękiem jednokréślny.*

Albowiém, jeżeli (u'_1, u'_2, u'_3) i (u''_1, u''_2, u''_2) są spółrzędnymi dwu promieni D_1 i D_2, to spółrzędne każdego innego promienia są

$$u_1 = u'_1 + \lambda u''_1,\quad u_2 = u'_2 + \lambda u''_2,\quad u_3 = u'_3 + \lambda u''_3,$$

a

$$D \equiv D_1 + \lambda D_2 = 0$$

jest równaniem tego promienia. Bieguny zaś P_1, P_2 i P promieni D_1 i D_2 i D są

$$P_1 \equiv u_1 F_1(u'_1, u'_2, u'_3) + u_2 F_2(u'_1, u'_2, u'_3) + u_3 F_3(u'_1, u'_2, u'_3) = 0,$$
$$P_2 \equiv u_1 F_1(u''_1, u''_2, u''_3) + u_2 F_2(u''_1, u''_2, u''_3) + u_3 F_3(u''_1, u''_2, u''_3) = 0 \text{ i}$$
$$P \equiv u_1 F_1(u'_1 + \lambda u''_1,\ u'_2 + \lambda u''_2,\ u'_3 + \lambda u''_3) + \text{i t. d.} = 0,$$

czyli

$$P \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0.$$

Stąd wypada, że punkt P leży na prostéj P_1P_2 i że szereg punktów, utworzony na P_1P_2 przez biegun P promienia D, opisującego pęk, jest jednokréślny z tym pękiem.

Oznaczmy przez E promień pęku, który z promieniem D tworzy parę promieni sprzężonych. Do każdego innego promienia D należy inny, ściśle wyznaczony, promień E. Pary promieni D i E są wszystkie harmonicznie sprzężone z parą stycznych, dających się wyprowadzić z wiérzchołka pęku do linii klasy 2-éj. Mamy zatym twierdzenie: *pary promieni sprzężonych względem danéj linii klasy 2-éj, wychodzące z jednego punktu, tworzą inwolucyją; promieniami asymptotycznymi téj inwolucyi są styczne, wyprowadzone z tego punktu do danéj linii klasy 2-éj.*

100. Punkty styczności. — Wracając do równania (4'), przypuśćmy, że, oprócz związku (5'), zachodzi jeszcze równanie $F(u'_1, u'_2\, u'_3)=0$, czyli

$$(7')\qquad u'_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3)+u'_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3)+u'_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)=0.$$

W tym przypadku równanie (4') daje obie wartości na λ równe 0, a przeto obie styczne D_3 i D_4, wyprowadzone z punktu D_1D_2 do linii klasy 2-éj (1'), schodzą się razem na prostéj D_1, która wskutek (7'), jest także styczną do téj linii. Równanie (6) jest także równaniem punktu styczności. A zatym, *biegun linii, stycznéj do linii klasy 2-éj, jest punktem styczności téjże stycznéj.*

101. Jeżeli przypuścimy, iż

$$(8')\ F(u''_1, u''_2, u''_3)F(u'_1, u'_2, u'_3)-[u''_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3)+u''_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3)+$$
$$+u''_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3]^2=0,$$

wówczas strona lewa równania (4') jest kwadratem zupełnym, a przeto jego pierwiastki, t. j. obie wartości na λ, są sobie równe. W tym przypadku obie styczne, dające się wyprowadzić z punktu D_1D_2 do linii klasy 2-éj (1'), razem się schodzą, czyli — punkt D_1D_2 leży na linii (1').

Jeżeli przyjmiemy prostą D_1 jako stałą, a D_2 jako prostą bieżącą, obracającą się około punktu, w którym prosta D_1 przecina liniją (1'), natenczas spółrzędne téj prostéj bieżącéj, wskutek (8), uczynią zadość równaniu:

$$(9')\quad F(u_1, u_2, u_3)F(u'_1, u'_2, u'_3) - [u_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3) + u_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3) +$$
$$+ u_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)]^2=0.$$

Temu równaniu uczynią zadość także spółrzędne stycznych w punktach przecięcia się prostéj D_1 z liniją (1'). Atoli dla tych stycznych jest $F(u_1, u_2, u_3)=0$. Wskutek tego, dla prostéj D_2, jako stycznéj, równanie (9') sprowadza się do równania,

$$u_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3) + u_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3) + u_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3)=0,$$

z którego czytamy, że styczna do linii (1') w punkcie, w którym tę liniją przecina prosta D_1, przechodzi przez biegun téj prostéj.

Z bieguna prostéj D_1 wychodzą dwie styczne do linii klasy 2-éj; a więc prosta D_1 przecina liniją klasy 2-éj w dwu punktach. Gdy zaś prosta D_1 jest zupełnie dowolną, zatym: *każda prosta przecina liniją klasy 2-éj w dwu punktach.* Styczne w tych dwu punktach przechodzą przez biegun téj prostéj.

Podobnie, jak to uczyniliśmy w art. 94, można okazać, że równanie (9') przedstawia parę punktów, w których liniją klasy 2-éj (1') przecina prosta D_1 o spółrzędnych u'_1, u'_2, u'_3.

102. Rzęd linij krzywych klasy 2-éj. Już stąd, że każda prosta przecina krzywą klasy 2-éj w dwu punktach, wnosimy, że krzywa klasy 2-éj, jest zarazem krzywą rzędu 2-go, a przeto, że równanie krzywéj klasy 2-éj, gdy je wyrazimy we spółrzędnych punktu, będzie także równaniem stopnia 2-go.

Aby otrzymać to równanie, oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 spółrzędne punktu, w którym prosta (u'_1, u'_2, u'_3) dotyka krzywéj (1). Z równania (6') punktu styczności wypadają związki

$$(10')\qquad \begin{cases} A_{11}u'_1 + A_{12}u'_2 + A_{13}u'_3 = x_1, \\ A_{21}u'_1 + A_{22}u'_2 + A_{23}u'_3 = x_2, \\ A_{31}u'_1 + A_{32}u'_2 + A_{33}u'_3 = x_3, \end{cases}$$

które rozwiązując względem u_1, u_2, u_3, otrzymujemy

$$(11')\qquad \begin{cases} \alpha u'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ \alpha u'_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ \alpha u'_3 = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3, \end{cases}$$

gdzie α jest wyróżnikiem strony lewéj równania (1'), a α_{ik} ilością dołączoną do elementu A_{ik} tego wyznacznika α, przyczym, skoro $A_{ik} = A_{ki}$, jest także $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. — Prosta (u'_1, u'_2, u'_3), jako styczna, przechodzi przez punkt (x_1, x_2, x_3); mamy więc

$$(12')\qquad x_1u'_1 + x_2u'_2 + x_3u'_3 = 0.$$

Podstawienie zaś wartości na u'_1, u'_2, u'_3, wynikających z równań (11'), w równaniu (12') daje związek między spółrzędnymi (x_1, x_2, x_3) punktu styczności,

$$(13')\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + 2\alpha_{31}x_3x_1 + 2\alpha_{12}x_1x_2 = 0,$$

czyli równanie we spółrzędnych punktu krzywéj, przedstawionéj przez równanie (1'). To równanie, jako wypadek rugowania liczb u'_1, u'_2, u_3' i 1 z czterech równań (11') i (12'), można przedstawić pod postacią wyznacznikową,

$$(14')\qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & x_1 \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & x_2 \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie (13) jest stopnia 2-go względem spółrzędnych x_1, x_2, x_3; a zatym:

Krzywa klasy 2-éj jest zarazem krzywą rzędu 2-go.

Tym twierdzeniem nie jest objęty przypadek, kiedy linija, przedstawiona przez równanie (1), sprowadza się do pary punktów; albowiém wówczas jest $\alpha = 0$, a przeto strony lewe równań (11') są $= 0$.

Należy tu jeszcze zauważyć, że wrazie, gdy spółczynniki w równaniu (1') w art. 96 są ilościami dołączonymi do elementów wyznacznika A, przedstawiającego wyróżnik strony lewéj równania (1) w art. 88, to, podług twierdzenia znanego z teoryi wyznaczników, mamy

$$\alpha_{ik} = Aa_{ik},$$

a wtedy równanie (13') będzie tymże samym równaniem (1) w art. 88.

ZASADA DWOISTOŚCI.

103. Zupełna analogija między spółrzędnymi punktu i spółrzędnymi linii prostéj, osobliwie gdy te spółrzędne są jednorodne, prowadzi do zasady dwoistości, podług któréj z wypadku tego samego rachunku, uskutecznionego na tychże samych równaniach, można otrzymać jednocześnie dwa rozmaite twierdzenia gieometryczne, zależnie od tego, czy te wypadki będziemy stosowali do układu spółrzędnych punktu, czytéż do układu spółrzędnych linii prostéj. Dwa te twierdzenia odpowiadają sobie w ten sposób, że tam, gdzie w wysłowieniu jednego występuje: punkt, linija prosta, pęk promieni, szereg punktów, krzywa algiebraiczna rzędu n-go, lub krzywa algiebraiczna klasy n-éj, to natomiast, w wysłowieniu drugiego, występuje odpowiednio: linija prosta, punkt, szereg punktów, pęk promieni, krzywa algiebraiczna klasy n-éj, lub krzywa algiebraiczna rzędu n-go. Dotychczasowe rozwinięcia zawiérają liczne już przykłady tego dwoistego charakteru twierdzeń i zagadnień gieometrycznych, a w ciągu dalszym spotkamy się również z wielu innymi.

Teoryja biegunów i biegunowych, którą wyłożyliśmy w tym rozdziale, dozwala nam uzasadnić w sposób ścisły metodę takiego podwajania twierdzeń i zagadnień gieometrycznych, t. z. metodę biegunowych wzajemnych.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek krzywą algiebraiczną S i krzywą rzędu 2-go K, którą nazwiemy kierownicą. Jeżeli punkt bieżący opisuje krzywą S, to natenczas biegunowa tego punktu względem kierownicy K obwodzi inną krzywą Σ, taką, że każdemu punktowi na krzywéj S odpowiada pewna styczna do krzywéj Σ. Ale i nawzajem, każdéj stycznéj do krzywéj S odpowiada pewien punkt na krzywéj Σ. Jakoż, jeżeli P i P$'$ są dwa punkty na krzywéj S, to biegunowe D i D$'$ tych punktów względem kierownicy K, są stycznymi do krzywéj Σ, a punkt DD$'$ przecięcia się tych dwu stycznych do Σ jest biegunem cięciwy PP$'$ krzywéj S. Dajmy, że punkt P$'$ coraz bliżéj przystępuje do punktu P, natenczas i styczna D$'$ będzie się coraz więcéj zbliżała do położenia stycznéj D, a więc i punkt DD$'$ przecięcia się tych dwu stycznych będzie coraz bliżéj przystępował do punktu styczności Q prostéj D do krzywéj Σ. W granicy zatym, kiedy punkt P$'$ zejdzie się razem z punktem P, czyli, kiedy cięciwa P$'$P stanie się styczną do krzywéj S w punkcie P, styczna D$'$ znajdzie się wtedy na stycznéj D, czyli punkt D$'$D przecięcia się tych dwu stycznych zejdzie się razem z punktem styczności Q prostéj D do krzywéj Σ. Ale punkt D$'$D wciąż jest biegunem cięciwy P$'$P, więc i punkt Q na Σ pozostanie biegunem stycznéj w punkcie P do S. A zatym: *każdéj stycznéj do krzywéj* S *odpowiada na krzywéj* Σ *biegun téj stycznéj względem kierownicy* K. — Krzywe S i Σ, które w ten sposób sobie odpowiadają, że punktowi na jednéj z nich odpowiada styczna do drugiéj, i nawzajem, nazywają się krzywymi biegunowo wzajemnymi.

Łatwo okazać, *że rzęd jednéj z dwu krzywych biegunowo wzajemnych jest klasą drugéj.* Jakoż, przyjmijmy, że krzywa S jest rzędu n-go, a więc, że prosta D przecina tę krzywą w n punktach P_1, $P_2, \ldots, P_n$. Każdemu z tych punktów odpowiada pewna styczna do krzywéj Σ, jako jego biegunowa względem kierownicy K. Niech D_1, $D_2, \ldots, D_n$ będą tymi stycznymi. Ponieważ bieguny P_1, $P_2, \ldots, P_n$ prostych D_1, $D_2, \ldots, D_n$ leżą na jednéj prostéj D, więc te styczne przechodzą przez jeden punkt P, biegun prostéj D. A zatym, z jednego punktu P można wyprowadzić n stycznych do krzywéj Σ. Biorąc zaś jako D coraz inną prostą, miéć będziemy także coraz inny punkt P. Z każdego więc punktu można wyprowadzić n stycznych do krzywéj Σ, co okazuje, że krzywa Σ jest krzywą klasy n-éj. — W szczególnym przypadku, kiedy krzywa S jest rzędu 2-go, to krzywa Σ, jako krzywa klasy 2-éj, będzie zarazem krzywą rzędu 2-go.

Z podania powyższego wypada bespośrednio, że z twierdzeń, odnoszących się do krzywéj rzędu 2-go, a wyprowadzonych z równania téj krzywéj, danego we spółrzędnych punktu, można, bez dalszego rachunku, otrzymać twierdzenia analogiczne, odnoszące się do krzywéj klasy 2-éj, stosując tylko zasadę dwoistości, powyżéj wyłuszczoną. Gdy zaś krzywe rzędu 2-go są zarazem krzywymi klasy 2-éj, i nawzajem, to tym sposobem można podwoić — mówiąc wogólności — każde twierdzenie odnoszące się do krzywéj stopnia 2-go. Stąd téż, w dalszym ciągu, nie będziemy badali własności krzywych stopnia 2-go osobno przez rozbiór ich równań we spółrzędnych punktu, a osobno przez rozbiór ich równań we spółrzędnych linii prostéj, ale ograniczymy się rozważaniem jedynie piérwszych.

ĆWICZENIA.

(65). Znaléść równanie krzywéj rzędu 2-go, która na osiach układu spółrzędnych równoległych odmierza odcinki a, a' i b, b'.

(66). Jeżeli cztéry punkty krzywéj rzędu 2-go są dane, to biegunowa punktu stałego względem każdéj takiéj krzywéj przechodzi przez punkt stały.

(67). Znaléść spółrzędne bieguna prostéj $x - 3y + 1 = 0$ względem krzywéj $x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 1 = 0$.

(68). Znaléść równanie pary stycznych do krzywéj poprzedzającéj z punktu (1, 1).

(69). Znaléść równanie krzywéj, biegunowo wzajemnéj z krzywą

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

względem kierownicy $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(70). Krzywa rzędu 2-go dotyka ramion kąta danego ω, a jakakolwiek do niéj styczna tworzy z tymi ramionami trójkąt: znaléść miejsca gieometryczne *a)* punktu, w którym przecinają się proste łączące wiérzchołki ze środkami boków przeciwległych tego trójkąta, *b)* punktu przecięcia się trzech wysokości tego trójkąta i *c)* środka koła, opisanego na tym trójkącie.

ROZDZIAŁ VIII.

O WŁASNOŚCIACH OGÓLNYCH LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO

(DOKOŃCZENIE).

ŚRODEK, ASYMPTOTY I ŚREDNICE.

104. Środek. Rozwiniemy szczegółowiéj teoryją biegunów i biegunowych i wyprowadzimy z niéj nowy szereg własności ogólnych linij krzywych stopnia 2-go. Dojdziemy tą drogą do wykrycia rozmaitych rodzajów tychże linij, jak również do uproszczenia ich równań. Ponieważ własności, o których mówić będziemy, są przeważnie metrycznymi, więc najdogodniéj będzie (art. 65) użyć spółrzędnych punktu Descartes'a.

Niech więc

(1) $$f(x_1 y_1 1) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

będzie równaniem ogólnym stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu (x, y) i załóżmy, że wyróżnik

(2) $$\mathrm{A} \equiv \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$$

wielomianu tego równania nie jest $=0$, a przeto, że równanie (1) przedstawia istotnie liniją krzywą stopnia 2-go, a nie parę prostych.

Kładąc, dla skrócenia,

(3) $$\begin{cases} f_1(x_1 y_1 1) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ f_2(x_1 y_1 1) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \\ f_3(x_1 y_1 1) \equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{cases}$$

i oznaczając przez (x_0, y_0) spółrzędne jakiegokolwiek punktu P_0, mieć będziemy (art. 89)

(4) $$xf_1(x_0, y_0, 1) + yf_2(x_0, y_0, 1) + f_3(x_0, y_0, 1) = 0,$$

jako równanie biegunowéj punktu P_0 względem krzywéj (1).

Przyjmijmy, że biegunowa punktu P_0 jest prostą w nieskończoności. Wtedy punkt P_0 jest środkiem każdéj cięciwy krzywéj (1), przechodzącéj przez ten punkt. Punkt bowiém, w którym jakakolwiek cięciwa, przechodząca przez punkt P_0, przecina biegunową tego punktu P_0, t. j. prostą w nieskończoności, tworzy z punktem P_0 parę punktów harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których cięciwa przecina krzywą (1); punkt więc P_0 jest środkiem téj cięciwy (art. 38).

Punkt, który dzieli na równe części każdą cięciwę krzywéj stopnia 2-go, przezeń przechodzącą, nazywamy **środkiem** téj krzywéj. A zatym: *biegun prostéj w nieskończoności względem krzywéj stopnia 2-go jest środkiem téj krzywéj.*

Aby otrzymać spółrzędne środka, przypuśćmy, że jest nim punkt P_0. Ponieważ wtedy równanie (4) przedstawia prostą w nieskończoności, a więc spółrzędne Plücker'a téj prostéj są równe 0, zatym mamy

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1(x_0, y_0, 1) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ f_2(x_0, y_0, 1) \equiv a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Te dwa równania, stopnia 1-go względem niewiadomych x_0, y_0, dają na nie jeden tylko układ wartości. Mianowicie, jeżeli przez A_{31}, A_{32}, A_{33} oznaczymy ilości dołączone odpowiednio do elementów a_{31}, a_{32}, a_{33} wyznacznika (2), to z równań (5) otrzymamy wartości na spółrzędne środka

$$(6)\qquad x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}}.$$

Wartości te są oznaczone i skończone, jeżeli $A_{33} \gtrless 0$, a nieskończone, jeżeli $A_{33} = 0$, a $A_{31} \gtrless 0$ i $A_{32} \gtrless 0$. Nakoniec, jeżeli jednocześnie $A_{33} = 0$, $A_{31} = 0$ i $A_{32} = 0$, wówczas spółrzędne środka są nieoznaczone. Przypadek ostatni nie może miéć miejsca wtedy, kiedy równanie (1) przedstawia istotnie krzywą, a nie parę prostych, bo wrazie $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$, mamy także $A = 0$, co się sprzeciwia założeniu. Mamy więc twierdzenie:

Krzywe stopnia 2-go posiadają jeden środek, który albo leży w odległości skończonéj, albotéż znajduje się w nieskończoności.

Na téj zasadzie dzielimy krzywe stopnia 2-go na: **krzywe ze środkiem** (t. j. ze środkiem w odległości skończonéj) i **krzywe bez środka** (t. j. ze środkiem w nieskończoności).

105. Asymptoty. Okazaliśmy w rozdziale poprzedzającym, że z każdego punktu można wyprowadzić dwie styczne do krzywéj stopnia 2-go, oraz, że prosta, łącząca oba punkty styczności, czyli **cięciwa styczności**, leży na biegunowéj tego punktu. Ponieważ biegunowa środka krzywéj stopnia 2-go jest prostą w nieskończoności, więc dwie styczne, które można wyprowadzić do téj krzywéj z jéj środka, dotykają jéj w punktach nieskończenie odległych. Prostą, która dotyka krzywéj w punkcie nieskończenie odległym, nazywamy **asymptotą** téj krzywéj. A zatym, *dwie styczne do krzywéj stopnia 2-go, wyprowadzone z jéj środka, są asymptotami téj krzywéj.*

Podstawmy w równaniu pary stycznych (art. 93) $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x'_3 = 1$, $x'_1 = x_0$, $x'_2 = y_0$; wtedy miéć będziemy równanie

$$f(x_0, y_0, 1) f(x_1, y_1, 1) - [x f_1(x_0, y_0, 1) + y f_2(x_0, y_0, 1) + f_3(x_0, y_0, 1)]^2 = 0,$$

jako równanie asymptot krzywéj (1). — To równanie daje się uprościć. Jakoż, podług wzorów (5), mamy $f_1(x_0, y_0, 1) = 0$, $f_2(x_0, y_0, 1) = 0$, a nadto

$$f(x_0, y_0, 1) \equiv x_0 f_1(x_0, y_0, 1) + y_0 f_2(x_0, y_0, 1) + f_3(x_0, y_0, 1) = f_3(x_0, y_0, 1).$$

Wskutek tego, równanie ostatnie sprowadza się do następującego:

$$f(x, y, 1) - f_3(x_0, y_0, 1) = 0,$$

czyli do równania

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}(2x - x_0) + a_{23}(2y - y_0) = 0.$$

Podstawiwszy zaś w nie, na mocy równań (5),

$$a_{13} = -(a_{11}x_0 + a_{12}y_0), \quad a_{23} = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0),$$

otrzymamy ostatecznie równanie

(7) $$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0,$$

jednorodne i stopnia 2-go względem różnic $x - x_0$, $y - y_0$, przedstawiające istotnie parę prostych, przecinających się w punkcie (x_0, y_0). Te dwie proste (7) są urojonymi, jeżeli $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, rzeczywistymi i o kierunkach różnych, jeżeli $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, stanowią jednę prostą podwójną, jeżeli $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. — W ostatnim przypadku schodzą się one razem z prostą w nieskończoności. Jakoż, gdy równanie (7) pomnożymy przez a_{11} i, z powodu, że w tym przypadku $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, za $a_{11}a_{22}$ podstawimy a_{12}^2, będziemy mieli

$$a_{11}^2(x - x_0)^2 + 2a_{12}a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{12}^2(y - y_0)^2 \equiv [a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0)]^2 = 0.$$

W tym więc przypadku równanie (7) przedstawia jednę prostą

$$a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) = 0,$$

któréj spółrzędne

$$u = \frac{-a_{11}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0}, \quad v = \frac{-a_{12}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0}$$

są $= 0$, albowiém $x_0 = y_0 = \infty$. Ta prosta jest zatym nieskończenie odległą. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Krzywe stopnia 2-go są trzech rodzajów: krzywe, mające dwie asymptoty urojone; krzywe, mające dwie asymptoty rzeczywiste i o różnych kierunkach, i krzywe, mające jedyną asymptotę — prostą rzeczywistą w nieskończoności.

Każdą krzywą piérwszego rodzaju nazywamy e l i p s ą, drugiego h i p e r b o l ą, a trzeciego p a r a b o l ą (znaczenie tych nazw będzie wyjaśnione w rozdziale następującym). Czy krzywa, przedstawiona przez równanie (1), jest elipsą, czy hiperbolą, czytéż parabolą — to zależy, jak widzieliśmy, tylko od spółczynników a_{11}, a_{12}, a_{22} wyrazów stopnia 2-go wielomianu strony lewéj równania (1), a mianowicie od wyrażenia $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, które jest wyróżnikiem wielomianu stopnia 2-go

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Jest więc krzywa (1) elipsą, hiperbolą, lub parabolą, według tego, czy ten wyróżnik jest dodatny, ujemny, lub równy 0.

Ponieważ wyróżnik jest niezmiennikiem ze względu na wszelkie przekształcenie linijowe, więc widocznie równanie (1) nie przestanie przedstawiać krzywéj tego samego rodzaju, w jakikolwiek sposób zmienilibyśmy kierunki osi układu spółrzędnych (art. 68). Że zaś przeniesienie początku spółrzędnych do innego punktu, jak to łatwo sprawdzić, także nie zmienia spółczynników a_{11}, a_{12}, a_{22}, więc równanie (1), odniesione do jakiegokolwiek układu spółrzędnych Descartes'a, przedstawia zawsze ten sam rodzaj krzywéj stopnia 2-go. Z tego powodu w dalszym ciągu wykładu możemy, dla uproszczenia, przyjąć, że układ spółrzędnych jest prostokątny.

106. Średnice. Podobnie, jak biegun prostéj w nieskończoności jest środkiem krzywéj stopnia 2-go, tak nawzajem, biegunowa punktu, znajdującego się w nieskończoności, względem krzywéj stopnia 2-go przechodzi przez środek téj krzywéj. Biegunową punktu, znajdującego się w nieskończoności w pewnym kierunku (t. j. w kierunku pewnéj prostéj), nazywamy średnicą sprzężoną z tym kierunkiem. Ponieważ proste równoległe do siebie można uważać, jako przecinające się w tym samym punkcie w nieskończoności, więc z własności harmonicznych bieguna i biegunowéj wypada, że *średnica sprzężona z pewnym kierunkiem jest miejscem gieometrycznym środków cięciw krzywéj, mających ów kierunek.*

Niech P_0P_1 będzie jakimkolwiek kierunkiem danym, wychodzącym ze środka P_0 krzywéj stopnia 2-go, a P_2 niech będzie punktem w nieskończoności na biegunowéj P_0P_2 punktu P_1, leżącego w nieskończoności w kierunku P_0P_1. Punkt P_2 na P_0P_2 można uważać jako punkt przecięcia się prostéj P_0P_2 z prostą w nieskończoności, z czego wypada, że punkt P_2 jest biegunem prostéj P_0P_1, która przechodzi tak przez biegun P_1 prostéj P_0P_2, jak i przez biegun P_0 prostéj w nieskończoności. Podobnie więc, jak prosta P_0P_2 jest średnicą sprzężoną z kierunkiem P_0P_1, prosta P_0P_1 jest średnicą sprzężoną z kierunkiem P_0P_2. — Dwie proste, przechodzące przez środek krzywéj stopnia 2-go, z których jedna jest średnicą sprzężoną z kierunkiem drugiéj, nazywamy parą średnic sprzężonych. Dwie więc proste P_0P_1 i P_0P_2 są parą średnic sprzężonych.

Dwie średnice sprzężone P_0P_1 i P_0P_2 z prostą P_1P_2 w nieskończoności tworzą trójkąt, w którym każdy wiérzchołek jest biegunem boku przeciwległego, i nawzajem, każdy bok jest biegunową wiérzchołka przeciwległego, a te dwie średnice sprzężone są dwiema prostymi sprzężonymi względem danéj krzywéj stopnia 2-go (art. 98). Gdy zaś te dwie proste sprzężone, wychodzące z jednego punktu, tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą stycznych, które z tegoż punktu możemy wyprowadzić do danéj krzywéj stopnia 2-go (art. 99), więc, zważywszy jeszcze, że te styczne, jako wyprowadzone ze środka krzywéj danéj, są jéj asymptotami, możemy wypowiedzieć twierdzenie: *pary średnic sprzężonych krzywéj stopnia 2-go tworzą inwolucyją, któréj promieniami asymptotycznymi są asymptoty téj krzywéj.*

Wiadomo, że jeżeli punkt porusza się po prostéj danéj, to biegunowa tego punktu obraca się około stałego punktu, bieguna téj prostéj. Stosując to twierdzenie do biegunowéj punktu, poruszającego się po średnicy, mamy twierdzenie następujące: *biegunowe punktów, leżących na średnicy, są równoległe do średnicy, z tamtą sprzężonéj.* — Stąd wniosek: *styczna do krzywéj stopnia 2-go jest równoległa do średnicy sprzężonéj ze średnicą, przechodzącą przez punkt styczności.*

WŁASNOŚCI ŚREDNIC SPRZĘŻONYCH.

107. Aby otrzymać równanie średnicy sprzężonéj z pewnym kierunkiem danym, załóżmy, że układ spółrzędnych jest prostokątny i że w tym układzie równanie

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \tag{8}$$

przedstawia ten kierunek, z którym żądana średnica krzywéj (1) ma być sprzężona. Równanie biegunowéj punktu (x', y') względem krzywéj (1) jest

$$xf_1(x'_1, y'_1, 1) + yf_2(x'_1, y'_1, 1) + f_3(x'_1, y'_1, 1) = 0,$$

czyli

$$x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + y(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}) + (a_{31}x' + a_{32}y' + 1) = 0.$$

Przyjmijmy, że punkt (x', y') znajduje się na prostéj (8) i w tymże kierunku oddala się do nieskończoności. Wtedy x' i y' rosną do nieskończoności, ale tak, że stosunek $\frac{y'}{x'}$ pozostaje niezmiennie równym $\operatorname{tg}\alpha$. Podzielmy zatym równanie ostatnie przez x', podstawmy w nim $\operatorname{tg}\alpha$ za $\frac{y'}{x'}$ i $x' = \infty$; otrzymamy w ten sposób, jako równanie żądanéj średnicy,

$$x(a_{11} + a_{12}\operatorname{tg}\alpha) + y(a_{21} + a_{22}\operatorname{tg}\alpha) + (a_{31} + a_{32}\operatorname{tg}\alpha) = 0, \tag{9}$$

lub

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\operatorname{tg}\alpha = 0. \tag{9'}$$

Z postaci (9') czytamy, że średnica przechodzi istotnie przez środek linii krzywéj, t. j. przez punkt przecięcia się dwu prostych (art. 104)

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1y_1 1) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ f_2(x_1y_1 1) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Z tegoż równania (9') zarazem wypada, że równania (10) przedstawiają: piérwsze — średnicę sprzężoną z kierunkiem osi x-ów, a drugie — średnicę sprzężoną z kierunkiem osi y-ów. Równanie bowiém (9') przechodzi na piérwsze, lub na drugie z równań (10), gdy w nim przyjmiemy $\alpha = 0$, lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

W paraboli wszystkie średnice są do siebie równoległe, albowiém środek paraboli leży w nieskończoności. To samo wynika z równania (9). Jakoż, równanie (1') przedstawia parabolę, gdy $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$, skąd

$a_{12}=\sqrt{a_{11}a_{22}}$. Wstawiwszy tę wartość za a_{12} w równanie (9), otrzymamy

$$x(a_{11}+\sqrt{a_{11}a_{22}}\operatorname{tg}\alpha)+y(\sqrt{a_{11}a_{22}}+a_{22}\operatorname{tg}\alpha)+(a_{31}+a_{32}\operatorname{tg}\alpha)=0,$$

czyli
$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\frac{a_{31}+a_{32}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a_{11}}+\sqrt{a_{22}}\operatorname{tg}\alpha}=0,$$

skąd widoczna, że wszystkie średnice paraboli mają kierunek prostéj

(11)
$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y=0.$$

108. Oznaczmy przez β kąt, który średnica (9), sprzężona z kierunkiem (8), czyni z kierunkiem dodatnym osi x-ów układu prostokątnego. Mamy wtedy

(12)
$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\alpha}{a_{21}+a_{22}\operatorname{tg}\alpha},$$

czyli

(12′)
$$a_{11}+a_{12}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+a_{22}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0.$$

Rówanie (12) lub (12′) wyraża związek między kierunkami średnic sprzężonych. Oznaczywszy jeszcze przez ω kąt między parą średnic sprzężonych o kierunkach α i β, otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

lub, wstawiwszy za $\operatorname{tg}\beta$ wartość (12),

(13)
$$\operatorname{tg}\omega=-\frac{a_{11}+2a_{12}\operatorname{tg}\alpha+a_{22}\operatorname{tg}^2\alpha}{a_{12}(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+(a_{22}-a_{11})\operatorname{tg}\alpha}.$$

Z tego wzoru wypada, że: średnice sprzężone razem się ze sobą schodzą, gdy

(14)
$$a_{11}+2a_{12}\operatorname{tg}\alpha+a_{22}\operatorname{tg}^2\alpha=0;$$

średnice sprzężone są do siebie prostopadłe, gdy

(15)
$$\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha-1=0.$$

Równanie warunkowe (14) określa kierunki asymptot, a zatym *każdą z asymptot linii krzywéj rzędu 2-go należy uważać, jako parę średnic sprzężonych.* Jest to bespośrednim następstwem tego, że asymptoty są promieniami asymptotycznymi inwolucyi par średnic sprzężonych.

Równanie zaś (15) określa kierunki dwusiecznych kątów między asymptotami (art. 80). A zatym: *dwusieczne kątów między asymptotami tworzą jedyną parę średnic sprzężonych, do siebie prostopadłych.* Te dwie średnice sprzężone, do siebie prostopadłe, nazywają się średnicami głównymi, albo osiami, albotéż osiami głównymi linij krzywych stopnia 2-go.

Kierunki osi tak w elipsie, jak i w hiperboli są rzeczywiste, albowiém dwusieczne kątów między dwiema prostymi są rzeczywiste, niezależnie od tego, czy te proste są rzeczywiste, czytéż urojone sprzężone (art. 79).

Parabola ma tylko jednę oś, t. j. średnicę prostopadłą do kierunku z nią sprzężonego.

109. Jeżeli założymy, że $a_{11} = a_{22}$ i $a_{12} = 0$, to pierwiastki równania (15) będą nieoznaczone. W tym przypadku istnieje nieskończenie wiele par średnic sprzężonych do siebie prostopadłych, czyli każde dwie średnice, do siebie prostopadłe, są średnicami głównymi, czyli osiami. Krzywa, którą równanie przy tym założeniu przedstawia, jest szczególnym przypadkiem elipsy, gdyż $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Można łatwo okazać, że ta krzywa jest kołem. Dzieląc bowiém równanie (1) przez $a_{11} = a_{22}$ i uwzględniając, że $a_{12} = 0$, mamy

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0, \tag{16}$$

czyli

$$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}a_{11}}{a_{11}^2}. \tag{16'}$$

Lewa strona wyraża kwadrat odległości punktu bieżącego (x, y) od punktu, którego spółrzędne są $-\frac{a_{13}}{a_{11}}$ i $-\frac{a_{23}}{a_{11}}$, a strona prawa ma wartość stałą. Równanie (16′) przedstawia zatym miejsce gieometryczne punktu, którego odległość od punktu $\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)$ jest stałą, a więc koło, którego środek jest w tym właśnie punkcie, a promień $= \frac{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}}$. — W tym przypadku równanie asymptot (7) sprowadza się do rówania

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$

czyli $(x - x_0) + (y - y_0)\sqrt{-1} = 0$ i $(x - x_0) - (y - y_0)\sqrt{-1} = 0$.

Do tych równań nie wchodzą spółczynniki równania koła, zatym: *asymptoty wszelkich kół są do siebie równoległe*, czyli: *wszelkie koła przechodzą przez te same dwa punkty urojone sprzężone w nieskończoności.* Te dwa punkty nazywamy punktami kołowymi urojonymi.

Jeżeli zaś założymy, że $a_{11} = -a_{22}$, to kierunki asymptot, określone równaniem (14), będą do siebie prostopadłe i zawsze rzeczywiste. Krzywa, którą równanie (1) przy tym założeniu przedstawia, jest szczególnym przypadkiem hiperboli, albowiém jest tu $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Tę szczególną hiperbolę nazywamy hiperbolą równoboczną. — *Asymptoty hiperboli równobocznéj są do siebie prostopadłe.*

UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO ZE ŚRODKIEM.

110. Skorzystamy z powższych własności linij krzywych stopnia 2-go, aby równania tych krzywych sprowadzić do postaci najprostszéj. Weźmy naprzód pod uwagę linije krzywe ze środkiem.

Równanie ogólne

(1) $$f(x, y, 1) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

przedstawia liniją krzywą stopnia 2-go ze środkiem, jeżeli wyróżnik $A \equiv \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$ i jego wyznacznik częściowy $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ są od 0 różne. Przypuśćmy, że układ spółrzędnych jest prostokątny. Spółrzędne x_0 i y_0 środka téj linii krzywéj czynią zadość równaniom

(2) $$\begin{cases} f_1(x_0, y_0, 1) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ f_2(x_0, y_0, 1) \equiv a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

które dają

(3) $$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}},$$

gdzie $A_{31} \equiv a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, $A_{32} \equiv a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$ są wyznacznikami częściowymi wyróżnika A, odpowiadającymi jego elementom a_{31} i a_{32}. Jeżeli przyjmiemy środek jako początek nowych spółrzędnych x' i y', t. j. jeżeli wyrazimy

(4) $$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

wówczas równanie (1), wskutek związków (2), przyjmie postać prostszą

(5) $$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + f(x_0, y_0, 1) = 0,$$

gdzie spółczynniki a_{11}, a_{12} i a_{22} są te same, co w równaniu (1). — Gdy zaś

$$f(x_0, y_0, 1) \equiv x_0 f_1(x_0, y_0, 1) + y_0 f_2(x_0, y_0, 1) + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33},$$

zatym, wskutek (2) i (3), mamy

$$f(x_0, y_0, 1) \equiv \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} = \frac{A}{A_{33}},$$

co wstawiając w równanie (5), otrzymujemy

(6) $$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

111. Linija krzywa stopnia 2-go ze środkiem posiada nieskończenie wiele par średnic sprzężonych, a jednéj z tych par średnice są do siebie prostopadłe. Te osobliwe średnice sprzężone nazwaliśmy jéj średnicami, lub osiami głównymi. Gdy zaś każda z dwu średnic sprzężonych dzieli na części równe cięciwy równoległe do drugiéj z nich, przeto, jeżeli jakąkolwiek parę średnic sprzężonych weźmiemy za osi spółrzędnych, równanie linii krzywéj sprowadzi się do postaci, zawiérającéj tylko kwadraty obu spółrzędnych. Najprościéj postąpimy, gdy za nowe osi spółrzędnych weźmiemy osi główne.

Aby równanie (6) odnieść do osi głównych, należy je przekształcić prostokątnie (art. 11 i 68), kładąc

(7) $$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$$

gdzie α oznacza kąt między pierwotną osią x-ów a tą osią główną krzywéj (1), którą obiéramy za nową oś x-ów. Ten kąt α jest określony równaniem (15) w artykule 108, które można także tak pisać:

(8) $$a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

lub $$2a_{12}\cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha = 0,$$

skąd

(9) $$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Równanie więc (6), wskutek przekształcenia (7) i uwzględnienia związku (8), przechodzi na równanie (piszemy x, y zamiast X, Y)

(10) $$s_1 x^2 + s_2 y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

gdzie

(11) $$\begin{cases} s_1 = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ s_2 = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \end{cases}$$

a to równanie (10) jest równaniem żądanym krzywéj (1), odniesionym do osi głównych.

Ze związków (11) czytamy, że s_1 i s_2 posiadają wartości rzeczywiste, i otrzymujemy z nich

(12) $$s_1 + s_2 = a_{11} + a_{22},$$

tudzież

(13) $$s_1 s_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 \equiv A_{33},$$

tak, iż s_1 i s_2 są pierwiastkami równania (porówn. art. 70)

(14) $$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0,$$

i mają znaki jednakie, lub różne, według tego, czy $A_{33} > 0$, czytéż $A_{33} < 0$.

Równanie (1) w przypadku, kiedy $A_{33} > 0$, przedstawia elipsę, a w przypadku, kiedy $A_{33} < 0$, hiperbolę. A zatym i równanie (10) przedstawia elipsę lub hiperbolę, według tego, czy spółczynniki s_1 i s_2 mają znaki jednakie, czytéż różne.

Przyjmijmy, że spółczynnik s_1 jest dodatny. Jeżeli także $s_2 > 0$, a więc $A_{33} > 0$, to, kładąc w równaniu (10)

(15) $$\pm\frac{s_1 A_{33}}{A} = \frac{1}{a^2}, \qquad \pm\frac{s_2 A_{33}}{A} = \frac{1}{b^2},$$

gdzie znaki wyższe odnoszą się do przypadku, kiedy $A > 0$, a niższe do przypadku, kiedy $A < 0$, sprowadzimy je odpowiednio do postaci

(16) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0;$$

jeżeli zaś $s_2 < 0$, a więc $A_{33} < 0$, to, kładąc w równaniu (10)

$$\mp \frac{s_1 A_{33}}{A} = \frac{1}{a^2}, \quad \pm \frac{s_2 A_{33}}{A} = \frac{1}{b^2}, \tag{17}$$

gdzie również znaki wyższe odnoszą się do przypadku, kiedy $A > 0$, a niższe do przypadku, kiedy $A < 0$, sprowadzimy odpowiednio do postaci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \mp 1 = 0. \tag{18}$$

W tych równaniach (16) i (18) liczby a i b, wskutek (15) i (17), posiadają wartości rzeczywiste. Równania (16) przedstawiają elipsę, a równania (18) przedstawiają hiperbolę. Kształtem tych linij krzywych zajmiemy się w rozdziale następującym.

112. Celem uproszczenia równania (6), przyjęliśmy osi główne krzywéj, przez to równanie przedstawionéj, za nowe osi spółrzędnych. Atoli do tych samych kształtów (16) i (18) doszlibyśmy także, przyjmując za osi spółrzędnych jakiekolwiek inne średnice sprzężone. Tylko wtedy układ spółrzędnych nie byłby prostokątnym, a liczby a i b miałyby inne wartości. Atoli odniesienie równania (6), czyto do osi głównych, czytéż do jakiéjkolwiek pary średnic sprzężonych, uskutecznia się zawsze zapomocą przekształcenia linijowego, które wielomian jednorodny stopnia 2-go $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2$ zamienia na sumę dwu kwadratów. Nadto, według artykułu 68, spółczynniki tych kwadratów są zawsze albo tego samego znaku, albotéż znaków różnych, niezależnie od tego, jakie mianowicie przekształcenie linijowe uskutecznione zostało. Widocznie więc w równaniu elipsy, odniesionym do jakichkolwiek średnic sprzężonych, spółczynniki przy x^2 i y^2 mają znaki jednakowe, a w takimże równaniu hiperboli spółczynniki te mają znaki różne.

Wiedząc to, można znaléść spółczynniki przy x^2 i y^2 w równaniach elipsy i hiperboli, odniesionych do układu jakichkolwiek dwu średnic sprzężonych, sposobem następującym. — Oznaczmy przez α i β kąty, które te dwie średnice sprzężone tworzą z tą osią główną, która w równaniach (16) i (18) jest osią x-ów, oznaczmy $\beta - \alpha = \omega$ i średnicę o kierunku α przyjmijmy za nową oś x-ów, a średnicę o kierunku β za nową oś y-ów. Aby przejść od osi głównych do téj pary średnic sprzężonych, potrzeba równania (16) i (18) przekształcić linijowo, kładąc

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Wskutek tego, wyrażenie jednorodne stopnia 2-go

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2}$$

zamieni się na wyrażenie jednorodne stopnia 2-go

$$\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2}$$

i jednocześnie wyrażenie

$$x^2 + y^2$$

przejdzie na wyrażenie

$$x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega,$$

gdzie $\omega = \beta - \alpha$; albowiém dwa ostatnie wyrażenia przedstawiają kwadraty odległości tego samego punktu od początku spólnego obu układów spółrzędnych. Stąd wypada, że przekształcenie (19) zamienia wyrażenie

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} + s(x^2 + y^2), \tag{20}$$

gdzie s jest jakąkolwiek liczbą stałą, na

$$\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} + s(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega). \tag{21}$$

Jeżeli piérwsze z tych wyrażeń przy pewnéj wartości na s jest kwadratem zupełnym, to wyrażenie drugie przy téj saméj wartości na s jest także kwadratem zupełnym (art. 69). Atoli, te wyrażenia, według art. 72, są kwadratami zupełnymi, gdy ich wyróżniki są równe 0. Przyrównywając te wyróżniki do zera, mamy dwa równania,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - s, & 0 \\ 0, & \pm\frac{1}{b^2} - s \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli } s^2 - s\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}\right) \pm \frac{1}{a^2b^2} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a'^2} - s, & s\cos\omega \\ s\cos\omega, & \pm\frac{1}{b^2} - s \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli } s^2 - \frac{s}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{a'^2} \pm \frac{1}{b'^2}\right) \pm \frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\omega} = 0,$$

których pierwiastki są sobie równe. Mamy zatym

$$\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a'^2} \pm \frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\omega} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\omega}.$$

Stąd zaś wynika, iż

$$ab = a'b'\sin\omega, \quad a^2 \pm b^2 = a'^2 \pm b'^2. \tag{22}$$

Z równań więc (22) możemy obliczyć spółczynniki a', b' w równaniach elipsy, lub hiperboli, odniesionych do średnic sprzężonych, tworzących z sobą kąt dany ω, jeżeli spółczynniki a i b w równaniach tych krzywych, odniesionych do osi głównych, są dane. — Równania (22) wyrażają pewne twierdzenia gieometryczne, o których będzie mowa w rozdziale następującym.

UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO BEZ ŚRODKA.

113. Równanie ogólne

$$(1)\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

przedstawia liniją krzywą stopnia 2-go bez środka, jeżeli wyróżnik strony lewéj $A\equiv\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_{33}$ jest od zera różny, a jego wyznacznik częściowy $A_{33}\equiv a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ jest równy 0. Tę krzywą nazwaliśmy parabolą.

Z równania warunkowego $A_{33}=0$ wypada $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$. Przyjmijmy, że spółczynnik a_{22}, a przeto i a_{12} jest od 0 różny i pomnóżmy równanie (1) przez a_{22}. Otrzymamy wtedy, uwzględniając, że $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$,

$$(2)\qquad (a_{12}x+a_{22}y)^2+2a_{22}(a_{13}x+a_{23}y)+a_{22}a_{33}=0,$$

skąd czytamy, że w równaniu (1), gdy ono przedstawia parabolę, trzy jego piérwsze wyrazy przedstawiają kwadrat zupełny dwumianu.

Wiadomo, że w paraboli wszystkie średnice są równoległe do siebie i mają kierunek (art. 107) $x\sqrt{a_{11}}+y\sqrt{a_{22}}=0$, lub, co wychodzi na jedno, kierunek $x\sqrt{a_{11}a_{22}}+y\sqrt{a_{22}^2}=0$, czyli, jak w tym przypadku,

$$(3)\qquad a_{12}x+a_{22}y=0.$$

Przyjmijmy tę prostą za oś x-ów nowego układu spółrzędnych i przypuśćmy, że tak nowy układ spółrzędnych, jak i pierwotny są prostokątne.

Aby równanie paraboli odniéść do tego nowego układu spółrzędnych, należy je przekształcić prostokątnie, kładąc

$$(4)\qquad \begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{cases}$$

gdzie, wskutek (3), kąt α jest określony równaniem

$$a_{12}+a_{22}\operatorname{tg}\alpha=0,$$

z którego wynika

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{a_{12}}{a_{22}},\quad \cos\alpha=\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}},\quad \sin\alpha=\frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}.$$

Wskutek zaś (4) i (5), mamy

$$\begin{aligned} a_{12}x+a_{22}y&=(a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)x'+(-a_{12}\sin\alpha+a_{22}\cos\alpha)y'\\ &=\frac{a_{12}^2+a_{22}^2}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}y'=\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}\,y',\end{aligned}$$

tudzież

$$\begin{aligned} a_{13}x+a_{23}y&=(a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha)x'+(-a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha)y'\\ &=\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}x'+\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}y';\end{aligned}$$

równanie więc (2) sprowadzi się do postaci

$$(a_{12}^2+a_{22}^2)y'^2+2a_{22}\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}x'+2a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}y'+a_{22}a_{33}=0,$$

lub, dzieląc przez $a_{12}^2+a_{22}^2$ i zamiast $a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}$ pisząc $-A_{31}$,

$$y'^2-\frac{2a_{22}A_{31}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}x'+2a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}y'+\frac{a_{22}a_{33}}{a_{12}^2+a_{22}^2}=0. \tag{6}$$

114. Wiadomo (art. 108), że między średnicami paraboli znajduje się jedna, o kierunku prostopadłym do cięciw z nią sprzężonych; tę średnicę nazwaliśmy średnicą główną, albo osią główną paraboli. Jeżeli przeniesiemy początek spółrzędnych, do którego równanie (6) jest odniesione, do punktu na paraboli, przedstawionéj przez to równanie, przez który przechodzi jéj średnica główna, natenczas oś x-ów zejdzie się razem z osią główną, a oś y-ów będzie styczną do paraboli w tym nowym początku (art. 106).

Aby równanie (6) odnieść do tego nowego układu spółrzędnych, należy w nim podstawić

$$x'=x'_0+x,\quad y'=y'_0+y \tag{7}$$

i spółrzędne x'_0, y'_0 nowego początku tak wyznaczyć, aby równanie przekształcone nie zawiérało ani wyrazu stopnia 1-go względem y, anitéż wyrazu niezależnego od x i y (art. 108). Wówczas otrzymamy

$$y^2-2\frac{a_{22}A_{31}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}x+2\left[y'_0+a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}\right]y$$
$$+\left[y_0'^2-\frac{2a_{22}A_{31}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}x'_0+2a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}y'_0+\frac{a_{22}a_{33}}{a_{12}^2+a_{22}^2}\right]=0.$$

Kładąc następnie

$$\left\{\begin{aligned}&y'_0+a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}=0,\\&y_0'^2-\frac{2a_{22}A_{31}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}x'_0+2a_{22}\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}y'_0+\frac{a_{22}a_{33}}{a_{12}^2+a_{22}^2}=0,\end{aligned}\right. \tag{8}$$

tudzież

$$\frac{a_{22}A_{31}}{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{3}{2}}}=p, \tag{9}$$

mieć będziemy

$$y^2=2px, \tag{10}$$

równanie paraboli, odniesione do osi głównéj, jako osi x-ów, i do stycznéj w punkcie, w którym oś główna przecina krzywą, jako osi y-ów. Z wzorów (8) otrzymamy wartości na x'_0 i y'_0 zupełnie oznaczone. A gdy wstawimy je za x' i y' w wyrażenia (4), to mieć będziemy spółrzędne punktu, w którym oś główna przecina parabolę, odniesionego do układu pierwotnego spółrzędnych.

115. Przyjęliśmy w artykule 113, że spółczynnik a_{22}, a więc i a_{12}, nie jest równy 0. Przypuśćmy teraz, że $a_{22} = a_{12} = 0$. W tym przypadku równanie (1) przywodzi się do równania

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{11}$$

jednocześnie zaś równanie $x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} = 0$, przedstawiające kierunek średnic, sprowadza się do $x = 0$, tak, iż oś y-ów układu, do którego równanie (11) jest odniesione, jest równoległa do średnic téj paraboli.

Aby równanie (11) uprościć, przeniesiemy początek układu do punktu na paraboli, przez który przechodzi średnica główna téj krzywéj. Podstawiając w tym celu w (11) $x_0 + x$ i $y_0 + y$ za x i y i kładąc

$$a_{11}x_0 + a_{13} = 0, \quad a_{11}x_0{}^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0, \tag{12}$$

otrzymujemy równanie

$$a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0,$$

lub, oznaczając jeszcze

$$-\frac{a_{23}}{a_{11}} = q, \tag{13}$$

$$x^2 = 2qy. \tag{14}$$

Równanie (14) różni się od równania (10) tylko tym, że w równaniu (14) oś y-ów jest osią paraboli, a oś x-ów styczną do niéj, gdy w równaniu (10) rzecz się ma przeciwnie.

116. Jeżelibyśmy wzięli za oś x-ów jakąkolwiek inną średnicę, a za oś y-ów styczną w punkcie, w którym ta średnica przecina parabolę, to równanie krzywéj byłoby zawsze kształtu (10), tylko spółczynnik p miałby inną wartość. Tę wartość znajdziemy, gdy odpowiednio przekształcimy równanie (10). Weźmy zatym pod uwagę średnicę, która przecina parabolę (10) w punkcie (x_0, y_0) i z kierunkiem cięciw z nią sprzężonych tworzy kąt ω.

Przenieśmy naprzód początek spółrzędnych do punktu (x_0, y_0). Wstawiając w tym celu w równanie (10) $x_0 + x$, $y_0 + y$ za x, y i uwzględniając, że $y_0{}^2 = 2px_0$, otrzymujemy

$$y^2 + 2y_0y = 2px. \tag{15}$$

Zmieńmy teraz kierunek osi y tak, aby nowa oś y-ów była równoległą do cięciw sprzężonych ze średnicą, a przeto była styczną do paraboli i z osią x-ów czyniła kąt ω. Podstawiając w tym celu w równanie (15) $x + y\cos\omega$ i $y\sin\omega$ (art. 11) za x i y i kładąc

$$y_0\sin\omega = p\cos\omega, \tag{16}$$

otrzymamy równanie paraboli

(17) $$y^2 = \frac{2p}{\sin^2\omega} x,$$

odniesione do tego nowego układu spółrzędnych. Ażeby więc od równania paraboli (10), odniesionego do osi głównéj, przejść do równania (17) téjże paraboli, odniesionego do średnicy, która z kierunkiem cięciw sprzężonych tworzy kąt ω, dość spółczynnik p w równaniu (10) podzielić przez $\sin^2\omega$. Spółrzędne początku nowego układu otrzymamy z równania (16) i równania $y_0{}^2 = 2px_0$, a mianowicie:

(18) $$y_0 = p \operatorname{ctg}\omega, \quad x_0 = \frac{p}{2} \operatorname{ctg}^2\omega.$$

WŁASNOŚCI CIĘCIW.

117. Niech

(1) $$f(x, y, 1) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

będzie danym równaniem ogólnym krzywéj stopnia 2-go. Poprowadźmy przez punkt P_0, którego spółrzędne prostokątne są (x_0, y_0), cięciwę P_0P, czyniącą kąt α z kierunkiem dodatnym osi x-ów. Oznaczając przez $(x\ , y)$ spółrzędne punktu bieżącego P téj cięciwy, a przez r odległość zmienną P_0P punktu P od P_0, mamy (art. 18)

(2) $$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\sin\alpha.$$

Podstawienie wartości (2) na x i y w równaniu (1), zamienia je na równanie stopnia 2-go względem r,

(3) $$(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha)r^2 + 2[f(x_0, y_0, 1)\cos\alpha + f_2(x_0, y_0, 1)\sin\alpha]r \\ + f(x_0, y_0, 1) = 0,$$

którego pierwiastki r_1, r_2 oznaczają odległości od punktu P_0 dwu punktów P_1 i P_2, w których uważana cięciwa przecina krzywą (1), czyli długości odcinków P_0P_1 i P_0P_2 téj cięciwy.

Rozbiór równania (3) przy rozmaitych założeniach, odnoszących się tak do położenia punktu (x_0, y_0), jako téż do kierunku (α) cięciwy, przez ten punkt poprowadzonéj, może nas doprowadzić do wszystkich własności krzywych stopnia 2-go, które znaleźliśmy w rozdziale niniejszym i poprzedzającym. Nie chcąc się powtarzać, pozostawiamy ten rozbiór czytelnikowi, a wyprowadzimy tylko pewne własności cięciw linij krzywych stopnia 2-go.

Z teoryi równań algiebraicznych wiadomo, że, gdy r_1 i r_2 są pierwiastkami równania (3), wówczas

(4) $$r_1 r_2 = \frac{f(x_0, y_0, 1)}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}.$$

Wiedząc to, łatwo udowodnić twierdzenie następujące:

Jeżeli przez punkt P_0 *poprowadzimy dwie cięciwy* P_0P *i* P_0P', *które krzywą stopnia 2-go przecinają odpowiednio w punktach* P_1, P_2 *i* P'_1, P'_2, *to natenczas sto-*

sunek $P_0P_1 . P_0P_2 : P_0P'_1 . P_0P'_2$, *pól prostokątów, wystawionych na odcinkach tych cięciw, będzie niezależny od położenia punktu* P_0 *i dla różnych jego położeń będzie stały, jeżeli kierunki tych cięciw pozostały niezmienione.*

Jakoż, jeżeli kierunki tych cięciw czynią z kierunkiem dodatnym osi x-ów kąty α i α', mamy, wskutek wzoru (4),

$$(5)\qquad \frac{P_0P_1 . P_0P_2}{P_0P'_1 . P_0P'_2} = \frac{a_{11}\cos^2\alpha' + 2a_{12}\cos\alpha' \sin\alpha' + a_{22}\sin^2\alpha'}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha \sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha},$$

a ten stosunek zależy jedynie od kątów α i α'.

To twierdzenie nie ma miejsca, jeżeli prosta P_0P' jest równoległą do jednéj z asymptot krzywéj; albowiém wówczas mamy (art. 105)

$$a_{11}\cos^2\alpha' + 2a_{12}\cos\alpha' \sin\alpha' + a_{22}\sin^2\alpha' = 0,$$

co dowodzi, że jeden z odcinków $P_0P'_1$, $P_0P'_2$ jest nieskończenie wielki (oba odcinki będą nieskończenie wielkie, jeżeli P_0 jest zarazem środkiem krzywéj). Przypuśćmy, że odcinek $P_0P'_2$ jest nieskończenie wielki a $P_0P'_1$ długości skończonéj i zbadajmy, jaką jest teraz wartość stosunku $P_0P_1 . P_0P_2 : P_0P'_1$. Weźmy w tym celu, dla uproszczenia, punkt P_0 za początek spółrzędnych, P_0P' za oś x-ów, a P_0P za oś y-ów. Ponieważ dla $y=0$, równanie krzywéj dać powinno na x dwie wartości, z których jedna jest $P_0P'_1$, a druga nieskończenie wielka, więc w jéj równaniu spółczynnik a_{11} przy x^2 jest równy 0. Zatym równanie krzywéj, odniesione do tych osi spółrzędnych, jest kształtu

$$2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

i przedstawia hiperbolę, lub parabolę, według tego, czy $a_{12} \lesseqgtr 0$, czytéż $a_{12} = 0$.

Podstawiwszy w tym równaniu $y=0$, otrzymamy $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$, a zatym $P_0P'_1 = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. Podstawiwszy zaś $x=0$, znajdziemy $a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, skąd znowu wypada $P_0P_1 . P_0P_2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$. Mamy zatym

$$\frac{P_0P_1 . P_0P_2}{P_0P'_1} = -\frac{2a_{13}}{a_{22}}.$$

Przenieśmy teraz początek spółrzędnych, niezmieniając kierunku osi, do punktu (x', y'). Wskutek téj zmiany układu spółrzędnych spółczynnik a_{22} w równaniu krzywéj nie zmieni się, gdy tymczasem spółczynnik a_{13} przejdzie (art. 110) na $f_1(x', y', 1) \equiv a_{12}y' + a_{13}$. Zatym nasz stosunek będzie teraz $= -\frac{2(a_{12}y' + a_{13})}{a_{22}}$ i będzie stałym, gdy krzywa jest parabolą ($a_{12} = 0$), a zależnym tylko od y', gdy krzywa jest hiperbolą ($a_{12} \lesseqgtr 0$). Możemy więc wypowiedzieć twierdzenia dodatkowe:

Średnica paroboli dzieli jéj cięciwy do siebie równoległe na odcinki tak, iż pola prostokątów, wystawionych na odcinkach tych cięciw, są proporcyjonalne do odcinków owéj średnicy, odciętych przez te cięciwy.

Prosta $(y=y')$, *równoległa do jednéj z asymptot hiperboli, dzieli jéj cięciwy do siebie równoległe na odcinki tak, iż pola prostokątów, wystawionych na odcinkach tych cięciw są proporcyjonalne do odcinków owéj prostéj, odciętych przez te cięciwy.*

W przypadku nakoniec, kiedy krzywa (1) jest kołem, mamy (art. 109) $a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$, a wzór (5) zamienia się na

$$P_0P_1 . P_0P_2 = P_0P'_1 . P_0P'_2,$$

t. j. *pole prostokąta wystawionego na odcinkach cięciwy koła, przechodzącéj przez punkt stały, jest stałe.*

118. Twierdzenie ogólne artykułu poprzedzającego, można jeszcze tak wysłowić:

Jeżeli przez dwa punkty dane, P_0 *i* P'_0, *poprowadzimy dwie cięciwy równoległe,* P_0P *i* P'_0P', *które krzywą stopnia 2-go przecinają odpowiednio w punktach* P_1, P_2 *i* P'_1, P'_2, *to natenczas stosunek* $P_0P_1 . P_0P_2 : P'_0P'_1 . P'_0P'_2$, *pól prostokątów, wystawionych na odcinkach tych dwu cięciw, będzie niezależny od kierunku cięciw i będzie stały, jeżeli położenie punktów* P_0 *i* P'_0 *pozostało niezmienione.*

Jakoż, jeżeli przez (x'_0, y'_0) oznaczymy spółrzędne nowego punktu P'_0, to, wskutek (4),

$$\frac{P_0P_1 \; . \; P_0P_2}{P'_0P'_1 . P'_0P'_2} = \frac{f(x_0, y_0, 1)}{f(x'_0, y'_0, 1)}, \tag{6}$$

a stosunek ten nie zależy od kierunku (α) cięciw równoległych P_0P i P'_0P'.

Tak wypowiedziane twierdzenie zawiéra w sobie kilka przypadków szczególnych, a uwagi godnych:

a. Jeżeli punkt P'_0 jest środkiem krzywéj, wówczas $P'_0P'_1=P'_0P'_2$, a przeto prostokąt $P'_0P'_1 . P'_0P'_2$ jest równoważny z kwadratem, wystawionym na długości połowy średnicy, równoległéj do cięciwy P_0P. A zatym: *pola prostokątów, wystawionych na odcinkach przecinających się cięciw krzywéj stopnia 2-go, są proporcyjonalne do kwadratów długości średnic krzywéj, równoległych do tych cięciw.*

b. Jeżeli prosta P_0P jest styczną do krzywéj, wówczas $P_0P_1=P_0P_2$. Twierdzenie szczególne, dopiéroco wypowiedziane, przechodzi teraz na następujące: *Długości dwu stycznych, wyprowadzonych z jednego punktu do krzywéj stopnia 2-go, są proporcyjonalne do długości średnic, równoległych do tych stycznych.*

c. Jeżeli nareszcie prosta $P_0P'_0$ jest średnicą krzywéj stopnia 2-go, przecinającą tę krzywą w punktach Q i Q', a cięciwy P_0P i P_0P' są równoległe do średnicy z tamtą sprzężonéj, wtedy

$$P_0P_1 = P_0P_2 = P_0P, \quad P_0'P'_1 = P'_0P'_2 = P_0P',$$

a przeto, wskutek twierdzenia (6),

$$P_0P^2 : P'_0P'^2 = QP_0 . P_0Q' : QP'_0 . P'_0Q',$$

t. j. *kwadraty długości cięciw równoległych są proporcyjonalne do pól prostokątów wystawionych na odcinkach, na które te cięciwy dzielą średnicę, sprzężoną z ich kierunkiem.*

119. Zapomocą wzoru (6) można jeszcze udowodnić następujące twierdzenia Carnot'a:

Jeżeli przez P'_{ik}, P''_{ik} *oznaczymy punkty, w których bok* P_iP_k *wieloboku* $P_1P_2\ldots P_hP_iP_k\ldots P_n$ *przecina krzywą stopnia 2-go, to wówczas*

$$(7)\qquad \frac{(P_1P'_{12}\,.\,P_1P''_{12})\,.\,(P_2P'_{23}\,.\,P_1P''_{23})\ \ldots(P_nP'_{n1}\,.\,P_nP''_{n1})}{(P_1P'_{n1}\,.\,P_1P''_{n1})\,.\,(P_nP'_{n-1\,n}\,.\,P_nP''_{n-1\,n})\ldots(P_2P'_{12}\,.\,P_2P''_{12})}=1.$$

Albowiém, oznaczywszy przez x_i, y_i spółrzędne wiérzchołka P_i, mięć będziemy, wskutek (6),

$$\frac{P_1P'_{12}\,.\,P_1P''_{12}}{P_2P'_{12}\,.\,P_2P''_{12}}=\frac{f(x_1,y_1,1)}{f(x_2,y_2,1)},$$
$$\frac{P_2P'_{23}\,.\,P_2P''_{23}}{P_3P'_{23}\,.\,P_3P''_{23}}=\frac{f(x_2,y_2,1)}{f(x_3,y_3,1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{P_nP'_{n1}\,.\,P_nP''_{n1}}{P_1P'_{n1}\,.\,P_1P''_{n1}}=\frac{f(x_n,y_n,1)}{f(x_1,y_1,1)}.$$

Pomnożywszy zaś te równania stronami odpowiednimi, otrzymamy wzór (7).

W przypadkach szczególnych wzór (7) ulegnie pewnym zmianom. I tak:

a. Jeżeli bok P_iP_k dotyka krzywéj w punkcie P_{ik}, wówczas należy podstawić $P_iP'_{ik}.P_iP''_{ik}=P_iP_{ik}^2$ i $P_kP'_{ik}.P_kP''_{ik}=P_kP_{ik}^2$.

b. Jeżeli jeden z wiérzchołków, np. P_i, znajduje się w nieskończoności, a zatym, jeżeli dwa boki sąsiednie, P_hP_i i P_iP_k, są do siebie równoległe, natenczas, z uwagi, iż $P_iP'_{hi}.P_iP''_{hi}=P_iP'_{ik}.P_iP''_{ik}$, należy w liczniku i mianowniku strony piérwszéj wzoru (7) opuścić odpowiednio $P_iP'_{ik}.P_iP''_{ik}$ i $P_iP'_{hi}.P_iP''_{hi}$.

c. Jeżeli jeden z wiérzchołków, np. P_i, leży na krzywéj, natenczas mamy $P_iP''_{hi}=P_iP'_{ik}=0$ i cięciwa $P''_{hi}P'_{ik}$ razem się schodzi ze styczną do krzywéj w P_i. Przypuśćmy naprzód, że P_i nie leży na krzywéj, to z trójkąta $P''_{hi}P_iP'_{ik}$ mamy $\dfrac{P_iP'_{ik}}{P_iP''_{hi}}=\dfrac{\sin P_iP''_{hi}P'_{ik}}{\sin P_iP'_{ik}P''_{hi}}$; w granicy zatym, kiedy P_i padnie na krzywą, będzie ten stosunek $=\dfrac{\sin\tau_{hi}}{\sin\tau_{ik}}$, gdzie τ_{hi}, τ_{ik} są kąty, które ze styczną do krzywéj w P_i czynią odpowiednio boki P_hP_i, P_iP_k. Zamiast więc stosunku odcinków nieskończenie malejących potrzeba do wzoru (7) wprowadzić stosunek wstaw kątów, które czynią odpowiednie boki ze styczną w ich spólnym wiérzchołku. Tym sposobem z twierdzenia Carnot'a wypływa następujące podanie:

Jeżeli wielobok jest wpisany w krzywą stopnia 2-go, to natenczas iloczyn z wstaw kątów, które czyni każdy bok tego wieloboku ze styczną do krzywéj w swym *punkcie początkowym, jest równy iloczynowi z wstaw kątów, które czyni każdy bok ze styczną do krzywéj w swym punkcie końcowym.*

Dając na n wartości 3, 4, 5,..., otrzymamy z twierdzenia Carnot'a cały szereg twierdzeń szczególnych, których wyprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi.

ĆWICZENIA.

---

(71). Wyznaczyć rodzaj krzywych, danych przez równania:

a. $5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0$,

b. $3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0$,

c. $4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0$.

(72). Jaką krzywą przedstawia równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

(73). Odniéść równania a. i b. zadania (71) do środka.

(74). Odniéść równania a. i b. zadania (71) do osi głównych.

(75). Równanie krzywéj $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = d$ jest odniesione do osi spółrzędnych, tworzących kąt ω: odniéść równanie téj krzywéj do osi głównych.

(76). Odniéść równanie $10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10$ do osi głównych, przyjmując $\cos\omega = \frac{3}{5}$.

(77). Odniéść równanie $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ do osi głównych, przy $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(78). Odniéść równanie c. zadania (71) do osi głównéj.

(79). Odniéść równanie zadania (72) do osi głównéj.

(80). Jeżeli a i b są długościami dwu stycznych paraboli do siebie prostopadłych, a $m = \frac{p}{4}$, to $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$.

(81). Punkt porusza się tak, iż suma kwadratów jego odległości od n punktów danych, pomnożonych przez ilości stałe, jest stałą: znaléść miejsce tego punktu.

(82). Znaléść miejsce środków kół, widzianych z dwu danych punktów pod kątami danymi.

(83). Znaléść miejsce środków kół, które na ramionach danego kąta ω odcinają dane długości a i b.

(84). Na boku AB trójkąta ABC weźmy punkt P i poprowadźmy PQ prostopadle do CA: znaléść miejsce punktu przecięcia się prostych BQ i CP.

(85). Szereg kół przechodzi przez punkt dany O; te koła mają swe środki na prostéj danéj OA i przecinają inną prostą daną BC. Niech M będzie drugim punktem, w którym jedno z tych kół przecina OA, a N jednym z punktów, w których to samo koło przecina BC. Z M i N poprowadźmy równoległe odpowiednio do BC i OA, przecinające się w P. Okazać, że miejscem punktu P jest hiperbola, która się zamienia na parabolę, jeżeli dwie dane proste są do siebie prostopadłe.

(86). Z punktu P na krzywéj stopnia 2-go wyprowadzamy dwie cięciwy PQ i PR, czyniące kąty równe z cięciwą PK, i łączymy Q z R: okazać, że, przy wszelkich położeniach cięciw PQ i PR, prosta QR przechodzi przez punkt stały.

ROZDZIAŁ IX.

O WŁASNOŚCIACH SZCZEGÓLNYCH LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO.

KSZTAŁT ELIPSY.

120. Z równań linij krzywych stopnia 2-go, odniesionych do osi głównych, wyprowadzimy własności szczególne tych krzywych. Naprzód zbadamy kształt tych linij.

Równanie elipsy, odniesione do osi głównych, jest

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0 \quad \text{i} \quad (2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Piérwszemu z tych równań nie czynią zadość wartości rzeczywiste na x i y; przedstawia ono zatym elipsę urojoną. Inaczéj z równaniem drugim — ono przedstawia elipsę rzeczywistą.

Rozwiązując równanie (2) względem y lub względem x, otrzymamy

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad \text{lub} \quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Z tych zaś równań łatwo wnieść możemy, że część elipsy ponad osią x-ów jest przystająca do części elipsy pod osią x-ów, a część jéj ze strony prawéj osi y-ów jest przystająca do części elipsy ze strony lewéj téj osi. Na każdą bowiém wartość x lub y równanie (2) daje dwie wartości odpowiednio na y lub na x, które są liczebnie równe, a różnią się tylko znakiem. Dla tego mówimy, że osi główne elipsy są jéj osiami symetryi. Nadto z tychże równań wypada bespośrednio, że spółrzędna x może otrzymywać tylko wartości z obszaru od $-a$ do $+a$, a spółrzędna y wartości od $-b$ do $+b$, gdyż dla $x^2>a^2$, spółrzędna y, a dla $y^2>b^2$ spółrzędna x stają się urojonymi. Jeżeli więc na osi X'X (fig. 26), począwszy od początku O, odetniemy długości $\mathrm{A'O}=\mathrm{OA}=a$, a na osi Y'Y długości $\mathrm{B'O}=\mathrm{OB}=b$, a następnie przez punkty A, A' poprowadzimy proste LM, NP, prostopadłe do X'X, a przez

B, B' proste MN, PL, prostopadłe do Y'Y, to otrzymamy prostokąt LMNP, wewnątrz którego cała elipsa (2) jest zawarta. Boki tego prostokąta są zarazem stycznymi do elipsy odpowiednio w punktach A, A', B, B'.

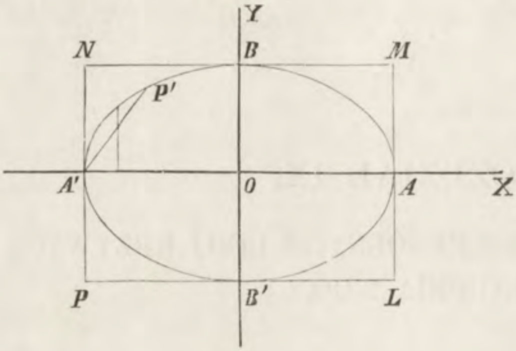


Fig. 26.

Odcinki $A'A = 2a$ i $B'B = 2b$ nazywają się długościami osi głównych, a punkty końcowe A, A', B, B' wiérzchołkami głównymi elipsy. Jeżeli $a > b$, wtedy oś A'A zowie się osią wielką, a oś B'B osią małą elipsy. Zawsze będziemy przyjmowali, że $a > b$.

121. Aby lepiéj poznać kształt elipsy, przenieśmy początek spółrzędnych do wiérzchołka A', t. j. do punktu, którego spółrzędne są $(-a, 0)$. Podstawiwszy więc w równaniu (2) $x - a$ za x, otrzymamy

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \tag{3}$$

jako równanie elipsy, odniesione do tego nowego układu. Obierzmy na ćwiartce A'B (fig. 26) elipsy punkt P' o spółrzędnych (x', y'), i połączmy punkty A' i P' liniją prostą. Równanie téj prostéj jest

$$y = \frac{y'}{x'}x,$$

lub, z uwagi, że, według (3), $y' = \frac{b}{a}\sqrt{2ax' - x'^2}$,

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{\frac{2a}{x'} - 1}. \tag{4}$$

Oznaczmy nadto przez y_1 i y_2 rzędne punktu na łuku A'P' elipsy i punktu na cięciwie A'P', odpowiadające pewnéj téj saméj wartości na odciętą x, mniejszéj od x'. Te rzędne, według (3) i (4), są

$$y_1 = \frac{b}{a}x\sqrt{\frac{2a}{x} - 1},$$

$$y_2 = \frac{b}{a}x\sqrt{\frac{2a}{x'} - 1}.$$

Gdy zaś dla $x < x'$ jest $\sqrt{\frac{2a}{x} - 1} > \sqrt{\frac{2a}{x'} - 1}$, więc $y_1 > y_2$, t. j. łuk

A'P' elipsy leży ponad cięciwą A'P', czyli elipsa od A' do P' zwraca swą stronę wklęsłą ku osi x-ów. Ponieważ punkt P' był punktem dowolnie wziętym na ćwiartce A'B, więc możemy powiedzieć, że ćwiartka elipsy A'B w każdym punkcie zwraca swą stronę wklęsłą ku osi x-ów. A że ćwiartki A'B i AB, oraz A'B i A'B' są odpowiednio symetryczne względem osi y-ów lub osi x-ów, więc: *elipsa w każdym punkcie zwraca swą stronę wklęsłą ku środkowi.*

122. Wróćmy do równania (2), i wprowadźmy do niego spółrzędne biegunowe, t. j. połóżmy

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{5}$$

Wówczas mieć będziemy

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin^2\theta = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\theta, \tag{6}$$

skąd czytamy, że promień wodzący r, wmiarę, jak θ rośnie od 0 do 2π, zmienia się w sposób ciągły i tak, że pozostaje wciąż skończonym i wciąż zawartym między b i a, albowiém, w założeniu, że $a > b$, mamy

$$\frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{r^2} \leqslant \frac{1}{b^2}, \text{ t. j. } a \geqslant r \geqslant b.$$

Elipsa jest więc krzywą nieprzerwaną i zamkniętą. Fig. 26 wskazuje jéj kształt.

Wszczególności, jeżeli $a = b$, równanie elipsy (2) zamienia się na

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{7}$$

i przedstawia koło (art. 109), albowiém to równanie wyraża, iż odległość punktu bieżącego od początku spółrzędnych jest stałą i równą a.

123. Zapomocą dwu kół spółśrodkowych o promieniach a i b można wykréślić elipsę, mającą średnice tych kół, $2a$ i $2b$, za osi główne.

Poprowadźmy w tym celu dwie średnice do siebie prostopadłe, A'A i B'B (fig. 27), i ze środka spólnego wyprowadźmy promień dowolny, który koło o promieniu b przecina w R, a koło o promieniu a w S. Spuśćmy następnie proste SM, prostopadłą do A'A, i RN, prostopadłą do B'B. Te dwie prostopadłe przetną się w punkcie P, leżącym na elipsie, któréj osiami głównymi są A'A $= 2a$ i B'B $= 2b$. Jakoż, połóżmy OM $= x$, ON $=$ MP $= y$, $\angle$ AOS $= \varphi$. Z trójkątów OMS i ONR wypada,

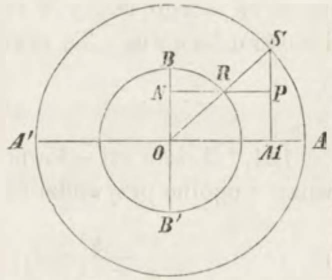


Fig. 27.

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \tag{8}$$

czyli $$\frac{x}{a}=\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\sin\varphi.$$

Dodawszy kwadraty tych równań do siebie, otrzymamy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

równanie elipsy, mającéj średnice AA′ i B′B za osi główne. Punkt P jest więc punktem elipsy.

[Ponieważ $MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, a $MS=\sqrt{a^2-x^2}$, zatym mamy $MP=\frac{b}{a}MS$. Stąd wnosimy, że jeżeli płaszczyznę koła, nakréślonego na osi wielkiéj A′A elipsy, jako na średnicy, obrócimy około téj średnicy o kąt, którego dostawa jest $=\frac{b}{a}$, to każdy punkt P elipsy będzie rzutem prostokątnym na jéj płaszczyznę odpowiedniego punktu S koła. Ta uwaga dozwala z wielu własności koła wyprowadzić własności analogiczne elipsy. Wszczególności zaś, można tym sposobem dojść do wyrażenia na pole elipsy. Jakoż, jeżeli długość każdéj cięciwy elipsy, prostopadłéj do A′A, jest równa długości odpowiedniéj cięciwy koła, pomnożonej przez $\frac{b}{a}$, to pole paska elipsy zawartego między dwiema jéj cięciwami nieskończenie siebie bliskimi, a do osi A′A prostopadłymi, jest równe polu odpowiedniego paska koła, pomnożonemu przez $\frac{b}{a}$, gdyż taki pasek można uważać za prostokąt. Stąd zaś wynika, że także suma pól takich pasków, na które można rozłożyć elipsę zapomocą szeregu cięciw nieskończenie siebie bliskich, a do osi A′A prostopadłych, czyli pole elipsy jest równe polu koła, pomnożonemu przez $\frac{b}{a}$, t. j. pole elipsy $=\pi a^2.\frac{b}{a}=\pi ab$.]

Zwracamy tu jeszcze uwagę na równania (8), które wyrażają spółrzędne punktu bieżącego elipsy w zależności od kąta φ, który nazywa się *kątem mimośrodowym*. Te równania są nader użyteczne.

KSZTAŁT HIPERBOLI.

124. Jeżeli osi główne hiperboli są wzięte za osi spółrzędnych, to jéj równanie ogólne przywodzi się do jednéj z dwu postaci:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad\qquad (2)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Weźmy pod uwagę naprzód równanie (1). Z tego równania widzimy, że osi główne hiperboli są osiami symetryi, że spółrzędna x może otrzymywać tylko wartości z obszaru od $-\infty$ do $-a$ i od $+a$ do $+\infty$, gdyż dla $x^2<a^2$,

wartości na y stają się urojonymi. Jeżeli więc na osi X′X (fig. 28) odetniemy $A'O = OA = a$, a przez punkty A i A′ poprowadzimy proste LM i NP, prostopadłe do osi X′X, to w części płaszczyzny między prostymi LM i NP, w któréj znajduje się środek O, niéma żadnego punktu hiperboli (1). Ta hiperbola więc składa się z dwu od siebie oddzielonych gałęzi, z których jedna rosciąga się po prawéj stronie prostéj LM, a druga po lewéj prostéj NP — obie do nieskończoności (gdy bowiém x^2 rośnie od a^2 do ∞, to bezwzględna wartość na y także wzrasta od 0 do ∞). Odcinek $A'A = 2a$ nazywa się długością osi poprzecznéj albo rzeczywistéj hiperboli (1), a punkty A, A′ zowią się jéj wiérzchołkami głównymi (rzeczywistymi).

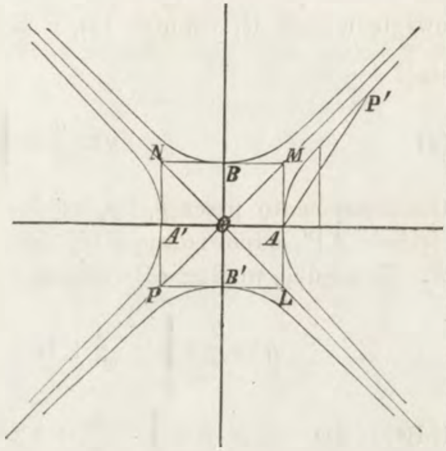


Fig. 28.

Równanie (2) otrzymać widocznie możemy z równania (1), gdy spółrzędne x i y zamienimy jednę na drugą. A zatym, jeżeli na osi Y′Y odetniemy $B'O = OB = b$ i przez punkty B, B′ poprowadzimy proste MN i PL, prostopadłe do Y′Y, to w części płaszczyzny między tymi prostymi niéma żadnego punktu hiperboli (2). Ta hiperbola więc składa się z dwu gałęzi od siebie oddzielonych, z których jedna rosciąga się nad prostą MN, a druga pod prostą PL — obie do nieskończoności. Odcinek $B'B = 2b$ jest długością osi poprzecznéj albo rzeczywistéj hiperboli (2), a punkty B i B′ są jéj wiérzchołkami głównymi (rzeczywistymi).

Dwie hiperbole (1) i (2) nazywamy także hiperbolami ze sobą sprzężonymi, wskutek czego oś rzeczywista $B'B = 2b$ hiperboli (2) zowie się téż osią sprzężoną (urojoną) hiperboli (1); oczywiście, że oś rzeczywista $AA' = 2a$ hiperboli (1) jest osią sprzężoną (urojoną) hiperboli (2). Boki LM i NP prostokąta LMNP są stycznymi do hiperboli (1) w A i A′, a boki MN i PL stycznymi do hiperboli (2) w B i B′.

125. Aby bliżéj poznać kształt hiperboli (1), przenieśmy początek spółrzędnych do wiérzchołka A, t. j. do punktu o spółrzędnych $(+a, 0)$. Otrzymamy wtedy, jako równanie hiperboli,

$$(3) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Obierzmy na łuku hiperboli, zaczynającym się w punkcie A i rosciągającym się ponad osią x-ów, punkt dowolny P′ (fig. 28), o spółrzędnych (x', y'), i poprowadźmy prostą AP′. Równanie téj prostéj

$$y = \frac{y'}{x'} x,$$

uwzględniając, iż, wskutek (3), $y' = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2a}{x'} + 1}$, możemy przedstawić w postaci

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{\frac{2a}{x'} + 1}. \tag{4}$$

Oznaczmy nadto przez y_1 i y_2 rzędne punktu na hiperboli AP′ i punktu na cięciwie AP′, odpowiadające téj saméj wartości na odciętą x, mniejszéj od x'. Te rzędne, według (3) i (4), są

$$y_1 = \frac{b}{a} x \sqrt{\frac{2a}{x} + 1}, \qquad y_2 = \frac{b}{a} x \sqrt{\frac{2a}{x'} + 1}.$$

Gdy zaś dla $x < x'$ jest $\sqrt{\frac{2a}{x} + 1} > \sqrt{\frac{2a}{x'} + 1}$, więc $y_1 > y_2$, t. j. łuk AP′ hiperboli w każdym punkcie zwraca swą stronę wklęsłą ku osi x-ów. Powtarzając te same rozumowania, co w art. 121, znajdziemy, że *hiperbola* (1) *w każdym punkcie zwraca swą stronę wypukłą ku środkowi.* Taksamo rzecz się ma z hiperbolą (2).

126. Wróćmy do równań (1) i (2) i wprowadźmy spółrzędne biegunowe do równania (1), t. j. połóżmy

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{5}$$

Wtedy otrzymamy

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta, \tag{6}$$

skąd czytamy, że r rośnie od a do ∞, gdy θ rośnie od 0 do wartości θ_1, dla któréj $\frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta_1 = 0$, t. j. $\sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, a więc

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{b}{a}, \tag{7}$$

oraz, że r posiada wartość urojoną od $\theta = \theta_1$ do $\theta = \pi - \theta_1$, poczym maleje od ∞ do a, gdy θ rośnie od $\theta = \pi - \theta_1$ do $\theta = \pi + \theta_1$. Dla θ od $\theta = \pi + \theta_1$ do $\theta = 2\pi - \theta_1$, r jest znowu urojone. A gdy nakoniec θ rośnie od $\theta = 2\pi - \theta_1$ do $\theta = 2\pi$, to jednocześnie r maleje od ∞ do a. — Jeżeli więc poprowadzimy przekątne PM i NL prostokąta LMNP (fig. 28) i przedłużymy je w obu kierunkach do nieskończoności, to one przetną hiperbolę (1) w punktach nieskończenie odległych, tak, iż jedna gałąź téj hiperboli jest cała zawarta w otworze kąta LOM, a druga w otworze kąta NOP. Przekątne PM i NL są asymptotami téj hiperboli. Istotnie, według art. 105, jest

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{8}$$

równaniem pary asymptot hiperboli (1), t. j. równanie

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

przedstawia jednę asymptotę, którą tu jest prosta PM, a równanie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

przedstawia drugą asymptotę, prostą NL. Taksamo można okazać, że proste PM i NL są zarazem asymptotami hiperboli (2), której jedna gałąź leży w otworze kąta MON, a druga w otworze kąta POL. Fig. 28 pokazuje, jaki jest kształt obu hiperból (1) i (2).

127. Przedłużmy cięciwę PP′ hiperboli (fig. 29) do przecięcia się z asymptotami w punktach Q i Q′ i oznaczmy przez S środek téj cięciwy. Średnica OS i średnica OT, równoległa do cięciwy PP′, są dwiema średnicami sprzężonymi hiperboli. W art. 106 okazaliśmy, że para średnic OS i OT jest harmonicznie sprzężona z parą asymptot OQ′ i OQ. Gdy zaś, jak wiemy, poprzeczna przecina pęk dwu par promieni harmonicznych w dwu parach punktów harmonicznych, zatym punkt S z punktem w nieskończoności na prostéj Q′Q tworzy parę harmonicznie sprzężoną z parą punktów Q i Q′, skąd wynika (art. 38), iż SQ = Q′S. A że, z założenia SP = P′S, więc SQ — SP = Q′S — P′S, czyli PQ = Q′P′, t. j. *odcinki poprzecznéj, zawarte między hiperbolą i asymptotami, są sobie równe.* To twierdzenie odnosi się oczywiście i do przypadku, kiedy poprzeczna (np. PP'_1) przecina obie gałęzie hiperboli.

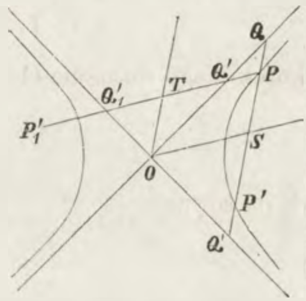


Fig. 29.

Na tym twierdzeniu polega sposób wykréślenia hiperboli, gdy dane są asymptoty i dany jest jeden punkt hiperboli; stosując je bowiém, można znaléść jakąkolwiek liczbę innych punktów téj krzywéj. Jeżeli zaś dane są osi główne hiperboli, to łatwo wtedy wykréślić asymptoty (art. 126), a gdy nadto mamy wtedy dane dwa punkty (t. j. wiérzchołki hiperboli), więc i w tym przypadku powyższe twierdzenie dozwoli nam wyznaczyć jakąkolwiek liczbę punktów hiperboli.

128. Wynajdziemy jeszcze równanie hiperboli, odniesione do asymptot, jako osi spółrzędnych.

Weźmy kierunek OL asymptoty NL (fig. 28) za kierunek dodatny osi x-ów, a kierunek OM asymptoty PM za kierunek dodatny osi y-ów, i oznaczmy $\angle XOL = \alpha$, $\angle XOM = \beta$. Aby przejść do tych nowych osi, potrzeba równanie (1) przekształcić linijowo, kładąc

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\beta,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\sin\beta.$$

Atoli (art. 126)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b}{a},\quad \sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Wstawiając te wartości, otrzymujemy

$$\frac{x}{a} = \frac{X+Y}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{y}{b} = -\frac{X-Y}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

wskutek czego równanie (1) przejdzie na

$$\frac{(X+Y)^2+(X-Y)^2}{a^2+b^2} = 0,$$

czyli na równanie

$$XY = \frac{a^2+b^2}{4}, \tag{9}$$

które jest właśnie równaniem żądanym.

Jeżeli $b = a$, t. j. jeżeli hiperbola jest równoboczną (art. 109), wówczas asymptoty są do siebie prostopadłe (art. 109), a więc i układ spółrzędnych, do których jest odniesione równanie (9), jest prostokątny.

KSZTAŁT PARABOLI.

129. Jeżeli oś główna paraboli jest wzięta za oś x-ów, a styczna w punkcie, w którym ta oś główna przecina parabolę, za oś y-ów, to równanie ogólne téj krzywéj sprowadzi się do postaci

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

gdzie p jest liczbą stałą dodatną, lub ujemną.

Przyjmijmy naprzód, że $p > 0$. Z równania (1) widzimy, że część nad osią główną jest przystająca do części pod nią, a więc oś główna jest osią symetryi; oraz, że parabola rosciąga się od punktu A, swego wiérzchołka głównego, tylko w stronę dodatnych x-ów (gdyż, przy $p > 0$, dla $x < 0$ y jest urojone) — do nieskończoności.

Jeżeli $p < 0$, wtedy miéć będziemy parabolę, rosciągającą się w kierunku odjemnych x-ów.

Parabola zwraca swą stronę wklęsłą ku osi x-ów, albowiém, jeżeli na jéj łuku ponad osią główną weźmiemy punkt dowolny P' (fig. 30), o spółrzędnych (x', y'), to równanie cięciwy AP',

$$y=\frac{y'}{x'}x,$$

z uwagi, iż, według (1), $y'=\sqrt{2px'}$, przedstawić można w postaci

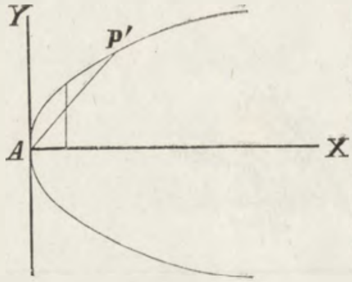


Fig 30.

$$y=x\sqrt{\frac{2p}{x'}}. \tag{2}$$

Jeżeli więc oznaczymy przez y_1 i y_2 rzędne punktu na łuku AP' i na cięciwie AP', odpowiadające téj saméj wartości na odciętą x, mniejszéj od x', to także $\sqrt{\frac{2p}{x}}>\sqrt{\frac{2p}{x'}}$, a przeto $y_1>y_2$, co okazuje, że łuk AP' zwraca swą stronę wklęsłą ku osi x-ów. Kształt paraboli (1), gdy $p>0$, jest więc takim, jak go przedstawia fig. 30.

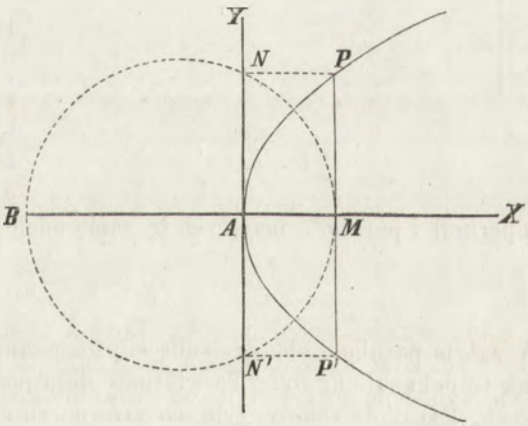


Fig. 31.

130. Z równania (1) wypada, że rzędna y punktu bieżącego na paraboli (1) jest średnią gieometryczną między odciętą x i stałą długością $2p$. Na téj własności opiéra się sposób kréślenia paraboli. Jakoż, jeżeli na przedłużeniu osi głównéj weźmiemy (fig. 31) $BA=2p$, to, aby znaléść punkt téj paraboli, którego odcięta jest $x=AM$, na średnicy BM nakréślimy koło; to koło przetnie oś y-ów w punktach N i N' takich, że proste NP i N'P', równoległe do osi x-ów, przetną prostopadłą do téj osi, przechodzącą przez punkt M, w dwu punktach P i P' paraboli (1). Albowiém $AN^2=AN'^2=BA.AM=2px$.

131. Weźmy pod uwagę elipsę, hiperbolę i parabolę o spólnym wiérzchołku głównym A, i załóżmy, że oś wielka elipsy i oś rzeczywista hiperboli razem się schodzą z osią główną paraboli. Wziąwszy punkt A (fig. 32) za początek, a oś spólną za oś x-ów, przedstawimy te trzy linije krzywe odpowiednio równaniami (art. 121, 125, 129)

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

$$y^2 = 2px.$$

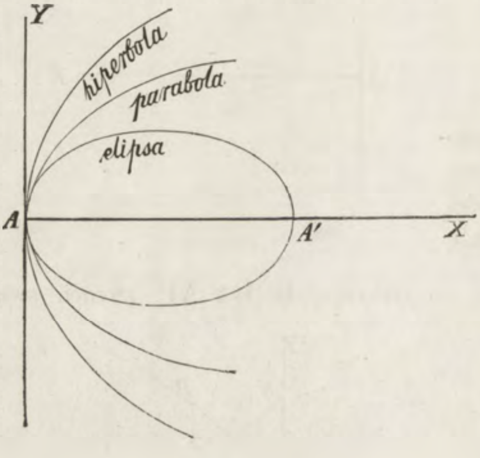


Fig. 32.

Kładąc

(3) $\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} = q^2,$

przywiedziemy równania powyższe do postaci

(4) $y^2 = 2px - q^2x^2,$

(5) $y^2 = 2px + q^2x^2,$

(6) $y^2 = 2px.$

Przyjmijmy, że we wszystkich trzech równaniach ilość p, którą zwiemy parametrem, posiada tę samę wartość (dodatną). Jeżeli wtedy oznaczymy przez y_e, y_h, y_p rzędne punktów na elipsie, hiperboli i paraboli, mających tę samę odciętą, to

$$y_e < y_p < y_h.$$

A zatym parabola obejmie sobą elipsę, a sama jest objęta przez hiperbolę, jak to pokazuje fig 32. Ta własność dała początek nazwie tych trzech krzywych. Parabola znaczy tyle co »równorzutnia«, elipsa jest »niedorzutnią«, a hiperbola jest »przerzutnią«. Doniosłość rzutu punktu po hiperboli jest największą; mniejszą, gdy się punkt porusza po paraboli; najmniejszą, gdy drogą punktu jest elipsa.

Przypuśćmy, że osi $2a$ i $2b$ coraz więcéj się powiększają, ale tak, że parametr $p = \frac{b^2}{a}$ ma wciąż tęż samę wartość skończoną, gdy tymczasem $q^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$ dąży do granicy 0. Przy tym przypuszczeniu, równania (4) i (5) w granicy, t. j. dla $a = \infty$, przejdą na równanie (6). A zatym: *parabola jest granicą elipsy lub hiperboli, gdy ich osi główne rosną do nieskończoności, a parametr pozostaje niezmiennym.* Zapomocą tego twierdzenia, można bardzo wiele własności elipsy lub hiperboli przenieść na parabolę, nie potrzebując dowodzić ich oddzielnie.

ŚREDNICE SPRZĘŻONE ELIPSY I HIPERBOLI.

132. Weźmy pod uwagę równania osiowe elipsy i hiperboli

(1) $$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

W tym równaniu znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli. Oznaczmy przez α i β kąty dodatne między dodatnym kierunkiem osi x-ów, a kierunkami dwu średnic sprzężonych. Podług art. 108 (wzór 12) między tymi kątami ma miejsce związek następujący

(2) $$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = \mp \frac{b^2}{a^2},$$

a nadto, jeżeli $\omega = \beta - \alpha$, to (art. 108, wzór 13)

(3) $$\operatorname{tg}\omega = \mp \frac{b^2 \pm a^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{(a^2 \mp b^2)\operatorname{tg}\alpha},$$

gdyż w tym przypadku $a_{12} = 0$, $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \pm \frac{1}{b^2}$. W tych wzorach znaki wyższe odnoszą się do elipsy, a niższe do hiperboli.

Według wzoru (2) iloczyn $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta$ jest dla elipsy ujemnym, a dla hiperboli dodatnym. A zatym w elipsie jeden z kątów α i β jest ostry, a drugi rozwarty, gdy tymczasem w hiperboli oba te kąty są jednocześnie albo ostre, albo rozwarte. Ten wypadek można tak wypowiedzieć: *połowy dwu średnic sprzężonych elipsy, leżące ponad osią wielką, tworzą z nią kąty, z których jeden jest ostry, a drugi rozwarty; połowy zaś dwu średnic sprzężonych hiperboli, leżące ponad osią rzeczywistą, tworzą z nią kąty, które są oba ostre, lub oba rozwarte.* — Nadal przez α rozumiéć będziemy kąt ostry.

W hiperboli, jeżeli jest $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$, to $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$. A zatym: *z dwu średnic sprzężonych hiperboli jedna przecina tę krzywą, a druga jéj nie przecina.* Piérwszą z tych średnic nazwiemy średnicą rzeczywistą. Kierunek średnicy rzeczywistéj czyni z osią rzeczywistą kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$.

Jeżeli przez α rozumiemy kąt ostry, a nadto w hiperboli taki, że $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$, to z wzoru (3) wypada, że kąt ω jest rozwarty w elipsie, a ostry w hiperboli. A zatym: *kąt między połowami średnic sprzężonych, leżącymi ponad osią wielką elipsy, lub ponad osią rzeczywistą hiperboli, jest rozwarty w elipsie, a ostry w hiperboli.*

Dla $\operatorname{tg}\alpha = 0$ jest $\operatorname{tg}\omega = \infty$, a przeto $\omega = \frac{\pi}{2}$, jak być powinno, bo wtedy średnice sprzężone stają się osiami głównymi.

W hiperboli jest $\operatorname{tg}\omega = 0$, a przeto $\omega = 0$, gdy $\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{b}{a}$. A zatym: *każda z asymptot hiperboli jest średnicą z sobą samą sprzężoną.* Ta własność asymptot jest wynikiem tego, że asymptoty są promieniami asymptotycznymi inwolucyi pęku par średnic sprzężonych (art. 106).

W elipsie zaś, gdy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, to

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \tag{4}$$

Kąt, tym wzorem określony, jest największy z kątów między dwiema średnicami sprzężonymi. Jakoż, jeżeli we wzorze (3), uwzględniając znaki wyższe, podstawimy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \pm \varepsilon$, gdzie ε jest liczbą dodatną i zupełnie dowolną, lecz mniejszą od $\frac{b}{a}$ wrazie, gdy się ją bierze ze znakiem —, a wartość na ω, odpowiadającą temu podstawieniu, oznaczymy przez ω', to znajdziemy

$$\operatorname{tg}\omega' = -\frac{a^2b^2 + a^2(b \pm a\varepsilon)^2}{(a^2 - b^2)(ab \pm a^2\varepsilon)}.$$

Jest zatym

$$\operatorname{tg}\omega' - \operatorname{tg}\omega = -\frac{a^4\varepsilon^2}{(a^2 - b^2)(ab \pm a^2\varepsilon)} < 0,$$

skąd czytamy, że $\omega' < \omega$.

133. Wziąwszy dwie średnice sprzężone elipsy i hiperboli, przedstawionych przez równania (1), za osi spółrzędnych, przywiedziemy równania tych krzywych do postaci (art. 112)

$$\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1, \tag{5}$$

gdzie również znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli. Podobnie, jak w równaniach (1) $2a$ i $2b$ są długościami osi głównych, tak w równaniach (5) $2a'$ i $2b'$ oznaczają długości średnic sprzężonych, wziętych za osi spółrzędnych. Między długościami a, b, a', b' i kątem ω, zawartym między średnicami sprzężonymi, zachodzą dwa związki następujące (art. 112):

(6) $\quad a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2, \qquad$ (7) $\quad a'b' \sin\omega = ab.$

Z wzoru (6) czytamy: *w elipsie suma, a w hiperboli różnica kwadratów długości dwu średnic sprzężonych jest ilością stałą.* Wzór zaś (7) wyraża: *pole równoległoboku, którego boki są równe i równoległe do dwu średnic sprzężonych, jest stałe.*

Podstawiwszy w (7) za $\sin\omega$ wartość, wynikającą ze wzoru (4), t. j.

$$\sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

otrzymamy $\qquad 2a'b' = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$

czyli $\quad (a' - b')^2 = 0, \quad$ skąd wypada $\quad a' = b' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$

A zatym: *średnice sprzężone elipsy, tworzące kąt największy, są sobie równe.* Równanie elipsy, odniesione do tych dwu średnic, jest

(8) $$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

t. j. takiéj saméj postaci, jak równanie koła, odniesione do dwu średnic do siebie prostopadłych.

Ze wzoru (6) widzimy jeszcze, że w hiperboli równobocznéj średnice każdéj pary są sobie równe, albowiém równość $a=b$ pociąga za sobą równość $a'=b'$. Równanie takiéj hiperboli, odniesione czyto do osi głównych, czyteż do jakiéjkolwiek pary średnic sprzężonych, jest zawsze kształtu

(9) $$x^2-y^2=a^2.$$

134. Równanie średnicy elipsy i hiperboli (1), sprzężonéj z kierunkiem

$$y=x\operatorname{tg}\alpha,$$

jest $$y=\mp\frac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\alpha}x.$$

Jeżeli piérwsza z tych średnic przechodzi przez punkt, którego spółrzędne są x', y', wtedy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'}{x'}$, a równania dwu średnic sprzężonych są

(10) $$y=\frac{y'}{x'}x,\qquad \frac{xx'}{a^2}\pm\frac{yy'}{b^2}=0.$$

Nakoniec, dwie cięciwy elipsy lub hiperboli, łączące którykolwiek punkt tych krzywych z końcami jakiéjkolwiek średnicy, są równoległe do dwu średnic sprzężonych. Albowiém średnica, sprzężona z kierunkiem jednéj cięciwy, jest równoległa do drugiéj; takie dwie cięciwy nazywamy **cięciwami dopełniającymi się**.

BIEGUNOWA, STYCZNA I NORMALNA.

135. Biegunowa punktu (x', y') względem elipsy i hiperboli

(1) $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

jest podług art. 89 prostą, któréj równaniem jest

(2) $$\frac{xx'}{a^2}\pm\frac{yy'}{b^2}=1.$$

Albowiém, jeżeli w równaniu (6) art. 89 podstawimy $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\pm\frac{1}{b^2}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, $a_{33}=-1$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=1$, $x'_1=x'$, $x'_2=y'$, $x'_3=1$, to wypadnie nam równanie (2). Z porównania tego równania z drugim równaniem (10) artykułu poprzedzającego wynika: *biegunowa względem elipsy lub hiperboli, ma kierunek sprzężony z kierunkiem prostéj, łączącéj środek krzywéj z biegunem.*

Przyjmijmy, że elipsa i hiperbola (1) są odniesione do dwu średnic sprzężonych, i na średnicy, która jest osią x-ów, obierzmy punkt P′, o spółrzędnych $(x', 0)$. Biegunowa tego punktu,

$$x = \frac{a^2}{x'}, \tag{3}$$

jest równoległą do osi y-ów. Uważmy, że punkt P, w którym ta biegunowa przecina oś x-ów, tworzy z punktem P′ parę harmonicznie sprzężoną z parą punktów końcowych średnicy, przyjętéj za oś x-ów.

Jeżeli z punktem P′ połączymy oba punkty, w których biegunowa tego punktu przecina elipsę, lub hiperbolę, to mieć będziemy parę stycznych do tych krzywych, wychodzących z punktu P′, których równanie, według art. 93, jest następujące:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0. \tag{4}$$

W przypadku szczególnym, kiedy punkt P′ leży na krzywéj, mamy

$$\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a więc równanie (4) sprowadza się wtedy do

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0 \tag{5}$$

i przedstawia jednę styczną w punkcie P′. To równanie jest zupełnie takiego samego kształtu, jak równanie biegunowéj; a zatym *styczna ma kierunek sprzężony z kierunkiem prostéj, łączącéj punkt styczności ze środkiem.*

136. Jeżeli prosta

$$y = mx + \beta,$$

gdzie m oznacza spółczynnik kierunkowy dany, ma być styczną do krzywéj (1), to oba punkty, w których ta prosta przecina krzywą (1), powinny razem się schodzić z punktem styczności. Wstawmy w równanie (1) $mx + \beta$ za y; otrzymamy

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2}\right) \pm 2\,\frac{m\beta}{b^2}\,x \pm \left(\frac{\beta^2}{b^2} \mp 1\right) = 0.$$

To równanie powinno mieć oba pierwiastki równe, przeto wyróżnik jego strony lewéj powinien być równy 0, t. j.

$$\pm\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{b^2} \mp 1\right) - \frac{m^2\beta^2}{b^4} = 0.$$

Z tego równania wypada wartość na β,

$$\beta = \pm\sqrt{m^2a^2 \pm b^2}.$$

Pod znakiem pierwiastka znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli. Równanie stycznéj do elipsy lub hiperboli (1), mającéj dany spółczynnik kierunkowy m, jest więc

(6) $$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 \pm b^2}.$$

Równanie (6) przedstawia dwie proste; a zatym: *do elipsy i hiperboli można poprowadzić dwie styczne o danym kierunku.*

137. Przyjmijmy, że elipsa i hiperbola (1) są odniesione do dwu średnic sprzężonych OD i OE, jako odpowiednio do osi x-ów i osi y-ów, i weźmy pod uwagę dwie inne średnice sprzężone OD′ i OE′. Równania tych dwu ostatnich średnic są odpowiednio

(7) $$y = \frac{y'}{x'}x \text{ i } y = \mp\frac{b^2x'}{a^2y'}x.$$

Nakréślmy następnie styczną do krzywéj (1) w punkcie końcowym D części średnicy OD, wziętéj za kierunek dodatny osi x-ów; ta styczna jest równoległa do średnicy OE, wziętéj za oś y-ów. A jeżeli przez P i Q oznaczymy punkty, w których ta styczna przecina średnice sprzężone OD′ i OE′, to, aby znaléść wartości odcinków DP i DQ, wstawimy za x w równaniach (7) $OD = a$, a za y w równaniu piérwszym (7) DP, a w równaniu drugim (7) DQ. Otrzymamy w ten sposób

$$DP = a\frac{y'}{x'}, \quad DQ = \mp\frac{b^2x'}{a^2y'},$$

skąd wynika

(8) $$DP \,.\, DQ = \mp b^2,$$

t. j. *prostokąt, wystawiony na odcinkach stycznéj do elipsy, lub hiperboli, zawartych między punktem styczności* (D) *i punktami* (P, Q) *przecięcia się jéj z dwiema średnicami sprzężonymi* (OD′, OE′), *jest stale równoważny kwadratowi połowy średnicy* (OE), *sprzężonéj ze średnicą* (OD), *przechodzącą przez punkt styczności.*

Na tym twierdzeniu polega wyznaczenie położenia i długości osi głównych elipsy lub hiperboli, jeżeli jest dane położenie i długość dwu średnic sprzężonych tych krzywych. — Jakoż, niech OD i OE (fig. 33) będą, co do położenia i co do długości, połowami dwu średnic sprzężonych. Przez koniec D jednéj z tych średnic poprowadźmy prostą AB równolegle do drugiéj z nich: prosta AB będzie styczną do krzywéj w punkcie D. Na OD wyznaczmy punkt P tak, aby $DO \,.\, DP = \mp OE^2$ [jeżeli krzywa jest elipsą, to punkty O i P leżą po stronach

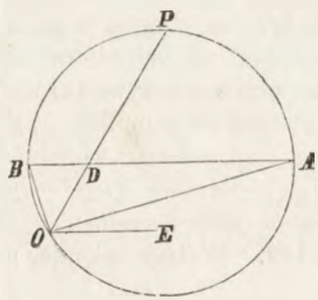


Fig. 33.

przeciwnych punktu D, a jeżeli krzywa jest hiperbolą, to punkty O i P leżą z téj saméj strony punktu D, co wynika z tego, że w równaniu (8) znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli], a przez punkty O i P poprowadźmy koło, którego środek znajdowałby się na prostéj AB. To koło przetnie AB w punktach A i B. Ponieważ DA.DB=DO.DP, zatym i

$$DA.DB = \mp OE^2,$$

skąd wypada, że proste OA i OB są połowami dwu średnic sprzężonych. Ponieważ nadto kąt AOB jest prostym, więc proste OA i OB są połowami osi głównych.

138. Prostą, przechodzącą przez punkt styczności i prostopadłą do stycznéj, nazywamy n o r m a l n ą. Jeżeli prosta, przechodząca przez punkt x', y', t. j. prosta, przedstawiona przez równanie

$$y - y' = m(x - x'),$$

ma być prostopadłą do stycznéj do elipsy, lub do hiperboli (1) w punkcie x', y', t. j. do prostéj (5), to iloczyn jéj spółczynnika kierunkowego m i spółczynnika kierunkowego stycznéj, przy założeniu, że układ osi jest prostokątny, jest równy -1 (art. 23). Mamy zatym

$$\mp m \frac{b^2x'}{a^2y'} = -1, \quad \text{skąd} \quad m = \pm \frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

Równanie więc normalnéj do elipsy i do hiperboli (1) w punkcie (x', y'), odniesione do osi głównych, jest

$$y - y' = \pm \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'),$$

lub

$$a^2y'x \mp b^2x'y = (a^2 \mp b^2)\, x'y', \tag{9}$$

gdzie znaki wyższe odnoszą się do elipsy, a niższe do hiperboli.

Jeżeli w tym równaniu będziemy uważali spółrzędne x i y jako dane, a spółrzędne x' i y' jako liczby zmienne, natenczas ono będzie przedstawiało liniją krzywą stopnia 2-go, a mianowicie hiperbolę równoboczną, któréj asymptotami są osi główne elipsy, lub hiperboli (1). Ta hiperbola równoboczna przetnie krzywą (1) w 4 punktach — spodkach normalnych, dających się wyprowadzić z punktu (x, y). (Okażemy bowiém daléj, że dwie krzywe stopnia 2-go, mówiąc wogólności, przecinają się w 4 punktach). A zatym, mówiąc wogólności, *z każdego punktu (x, y) można do elipsy, lub do hiperboli wyprowadzić cztéry normalne.*

139. Weźmy nakoniec pod uwagę równanie paraboli

$$y^2 = 2px, \tag{10}$$

odniesione do jakiéjkolwiek średnicy i do stycznéj w punkcie A', przecięcia się średnicy z krzywą.

Otrzymamy równanie biegunowéj punktu (x', y') względem paraboli (10), gdy w równaniu ogólnym (6) art. 89 podstawimy $a_{11}=a_{12}=a_{23}=a_{33}=0$, $a_{22}=1$, $a_{13}=-p$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=1$, $x'_1=x'$, $x'_2=y'$, $x'_3=1$. Równanie więc biegunowéj jest

$$(11) \qquad yy'=p(x+x').$$

Przyjmijmy, że biegun P', t. j. punkt (x', y'), leży na średnicy, czyli na osi x-ów. W tym przypadku $y'=0$, a przeto równanie (11) sprowadza się do

$$x+x'=0, \quad \text{czyli} \quad x=-x',$$

z którego widzimy, że biegunowa punktu P', leżącego na średnicy paraboli, wychodzącéj z punktu A' téj krzywéj, ma kierunek sprzężony z kierunkiem téj średnicy i że ta biegunowa przecina owę średnicę w punkcie P takim, że A'P = — A'P'.

Jeżeli z biegunem P' połączymy punkty, w których biegunowa przecina parabolę, to miéć będziemy parę stycznych do téj krzywéj, wychodzących z punktu P'. Otrzymamy równanie téj pary stycznych ze wzoru (9) art. 93, wykonawszy w nim powyżéj wskazane podstawienia, a mianowicie

$$(12) \qquad (y^2-2px)(y'^2-2px')-[yy'-p(x+x')]^2=0.$$

Jeżeli punkt (x', y') leży na paraboli (10), wtedy $y'^2-2px'=0$, a równanie (12) zamienia się na

$$(13) \qquad yy'=p(x+x')$$

i przedstawia styczną do paraboli (10) w punkcie (x', y').

Aby otrzymać równanie stycznéj o kierunku danym

$$y=mx+\beta,$$

należy w równaniu (10) za y podstawić $mx+\beta$ i wyznaczyć β z warunku, aby oba pierwiastki tego nowego równania, t. j. równania

$$m^2x^2+2(m\beta-p)x+\beta^2=0$$

były sobie równe, czyli, aby $m^2\beta^2-(m\beta-p)^2=0$, skąd wypada $\beta=\frac{p}{2m}$. Równanie więc stycznéj żądanéj jest

$$(15) \qquad y=mx+\frac{p}{2m},$$

a zatym: *do paraboli, można poprowadzić tylko jednę styczną o danym kierunku.*

Nakoniec, ponieważ, według (13), $\frac{y'}{p}$ jest spółczynnikiem kierunkowym stycznéj do paraboli (10) w punkcie (x', y'), więc, wrazie układu prostokątnego, t. j. gdy równanie (10) jest odniesione do osi głównéj paraboli i do stycznéj w jéj wiérzchołku głównym, równanie normalnéj do paraboli (10) w punkcie (x', y') jest

$$y - y' = -\frac{p}{y'}(x - x'), \quad \text{czyli}$$

(15) $$px + y'y = y'^2 + px'.$$

Jeżeli w równaniu (15) będziemy uważali spółrzędne x i y jako dane, a spółrzędne x', y' jako liczby zmienne, to ono przedstawia pewną parabolę, mającą oś główną równoległą do osi głównéj paraboli (10). Te dwie parabole przetną się w punktach, będących spodkami normalnych, które można z punktu (x, y) wyprowadzić do paraboli (10).

ĆWICZENIA.

(87). Z punktu P na elipsie poprowadźmy proste PA i PA' do końców A i A' osi wielkiéj, a w punktach A i A' wystawmy prostopadłe do PA i PA': okazać, że miejscem punktu przecięcia się tych prostopadłych jest inna elipsa i znaléść osi téj elipsy.

(88). Linija prosta o długości $a + b$ porusza się tak, że jéj końce leżą zawsze na osiach spółrzędnych: okazać, że punkt téj prostéj, oddalony od jéj końców odpowiednio na a i b, opisuje elipsę.

(89). OD i OE są połowami dwu średnic sprzężonych elipsy i dane są spółrzędne punktu D (x', y'): znaléść rówanie prostéj DE.

(90). Proste, wyprowadzone z punktu na elipsie do końców jakiejkolwiek średnicy, przecinają średnicę sprzężoną OE w punktach M i N: okazać, że $OM \cdot ON = OE^2$.

(91). OD i OE są połowami dwu średnic sprzężonych elipsy ADBEA'; poprowadźmy cięciwy BD i BE, tudzież cięciwy AE i A'D przecinające się w G: okazać, że czworobok BEGD jest równoległobokiem.

(92). Znaléść miejsce wiérzchołków równoległoboku, zbudowanego na średnicach sprzężonych elipsy.

(93). Znaléść miejsce spodka prostopadłéj, spuszczonéj ze środka elipsy na proste do niéj styczne.

(94). Wyznaczyć kąt φ między dwiema stycznymi do elipsy, które można wyprowadzić z punktu (x', y').

(95). Znaléść miejsce punktu, z którego wyprowadzone dwie styczne do elipsy są do siebie prostopadłe.

(96). TP i TQ są dwiema stycznymi do elipsy w punktach P i Q, a OP' i OQ' dwoma promieniami wyprowadzonymi ze środka równolegle do tych stycznych: okazać, że prosta P'Q' jest równoległą do prostéj PQ.

(97). Na stycznych do elipsy odcinamy odcinki równe n razy wziętéj połowie średnicy sprzężonéj ze średnicą, przechodzącą przez punkt styczności: okazać, że miejscem punktu końcowego tego odcinka jest elipsa spółśrodkowa, któréj połowami osi są $a\sqrt{n^2+1}$ i $b\sqrt{n^2+1}$.

(98). PQ jest jedną z szeregu cięciw, czyniących kąt stały ze średnicą AB koła: znaléść miejsce punktu przecięcia się prostych AP i BQ.

(99). Podstawa trójkąta jest równa $2a$, różnica zaś między kątami przyległymi podstawie jest równą $\frac{\pi}{2}$: znaléść miejsce wiérzchołka tego trójkąta.

(100). Okazać, że każda hiperbola równoboczna, opisana na trójkącie danym, przechodzi przez punkt przecięcia się trzech wysokości tego trójkąta.

(101). Do hiperboli wyprowadzamy dwie styczne z punktu, leżącego na jednéj z gałęzi hiperboli sprzężonéj: okazać, że cięciwa styczności jest styczną do drugiéj gałęzi hiperboli sprzężonéj.

(102). Okazać, że stosunek wstaw kątów, które średnica hiperboli czyni z asymptotami, jest równy stosunkowi wstaw kątów, które z tymiż asymptotami czyni średnica, z tamtą sprzężona.

(103). Weźmy pod uwagę dwie hiperbole sprzężone, których asymptotami jest para średnic sprzężonych elipsy: okazać, że jeżeli jedna hiperbola dotyka elipsy, to i druga jéj dotyka, tudzież, że średnice, przechodzące przez punkty styczności, są średnicami sprzężonymi.

(104). Podzielić dany łuk kołowy AB na trzy części równe.

(105). Znaléść miejsce punktu, z którego można wyprowadzić do paraboli $y^2 = 2px$ dwie normalne do siebie prostopadłe.

(106). Cięciwa obraca się około punktu $(\alpha, 0)$, danego na osi paraboli $y^2 = 2px$: znaléść miejsce punktu przecięcia się normalnych do paraboli w punktach końcowych téj cięciwy.

(107). W paraboli jest poprowadzony szereg cięciw równoległych: znaléść miejsce punktu, dzielącego każdą cięciwę na odcinki, których iloczyn jest stały.

(108). Z punktu (α, β) są wyprowadzone dwie styczne do paraboli $y^2 = 4mx$: okazać, że długość cięciwy styczności jest $= \frac{(\beta^2 + 4m^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2 - 4m\alpha)^{\frac{1}{2}}}{m}$, a pole trójkąta utworzonego przez te styczne i cięciwę styczności $= \frac{(\beta^2 - 4m\alpha)^{\frac{3}{2}}}{2m}$.

(109). Okazać, że trójkąt, którego wiérzchołki są punktami styczności trzech stycznych do paraboli, jest równoważny trójkątowi, utworzonemu przez te trzy styczne.

(110). Znaléść miejsce punktu z warunku, aby suma kwadratów trzech normalnych, które można z tego punktu wyprowadzić do paraboli, była stałą.

(111). Okazać, że punkt przecięcia się hiperboli z prostą, wyprowadzoną z jednego jéj wiérzchołka i ograniczoną przez dwie proste, wyprowadzone z drugiego wiérzchołka, równoległe do asymptot, dzieli tę prostą na równe części.

(112). Znaléść kąt między asymptotami hiperboli $xy = bx^2 + c$.

ROZDZIAŁ X.

O OGNISKACH I KIEROWNICACH LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO.

OGNISKA ELIPSY I HIPERBOLI.

140. Weźmy pod uwagę elipsę i hiperbolę odniesioną do osi głównych. Równania tych krzywych są

(1) $$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie, jak zawsze, znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli. Poprowadźmy przez punkt P o spółrzędnych x' i y', wzięty dowolnie na tych krzywych (fig. 34 i 35), styczną PT i normalną PN i oznaczmy przez T i N punkty, w których te dwie proste przecinają oś wielką AA′ elipsy, a oś rzeczywistą AA′ hiperboli. Czyniąc tożsamo dla każdego punktu elipsy i hiperboli, otrzymamy na osi AA′ szereg par punktów T, N. Mówimy, że te pary punktów tworzą inwolucyją hiperboliczną, t. j. taką inwolucyją, której punkty asymptotyczne są rzeczywiste.

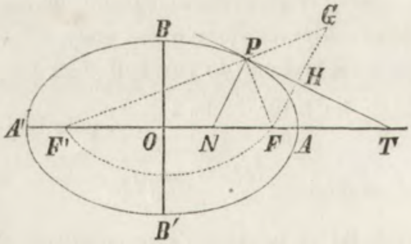


Fig. 34.

Aby tego dowieść, wyznaczmy odcięte x_t i x_n punktów T i N, w których styczna PT i normalna PN do krzywéj (1) w punkcie P przecina oś x-ów. Kładąc w tym celu w równaniu stycznéj,

(2) $$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

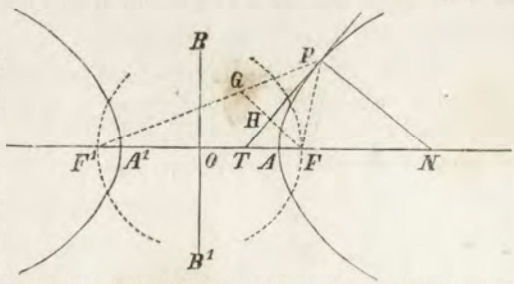


Fig. 35.

i w równaniu normalnéj,

(3) $$a^2y'x \mp b^2x'y = (a^2 \mp b^2)\,x'y',$$

$y=0$ i odpowiednio x_t lub x_n za x, otrzymamy

$$x_t = \frac{a^2}{x'},\quad x_n = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}\,x'.$$

Te dwa równania dają $x_t,\ x_n = a^2 \mp b^2$, t. j.

(4) $$\mathrm{OT}\,.\,\mathrm{ON} = a^2 \mp b^2,$$

skąd widzimy, że istotnie pary punktów T, N tworzą inwolucyją i że środek O jest środkiem téj inwolucyi. A gdy nadto $a^2 \mp b^2$ jest liczbą dodatną (bo w elipsie przyjmujemy $a > b$), więc ta inwolucyja jest hiperboliczną (art. **44**).

Punkty asymptotyczne inwolucyi par punktów T i N nazywamy o g n i s k a m i.

Odetnijmy na osi AA', wielkiéj w elipsie, a rzeczywistéj w hiperboli,

(5) $$\mathrm{F'O} = \mathrm{OF} = \sqrt{a^2 \mp b^2};$$

natenczas punkty F i F' będą ogniskami. Odległość ognisk od środka oznacza się pospolicie literą c; mamy więc

(6) $$c = \sqrt{a^2 \mp b^2}.$$

Stosunek zaś odległości ogniskowéj do połowy osi wielkiéj w elipsie a rzeczywistéj w hiperboli oznacza się zwykle literą e i nazywa się m i m o ś r o d e m. Jest więc

(7) $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}.$$

W elipsie mimośród jest mniejszy, a w hiperboli większy od jedności. Ogniska obu krzywych leżą więc po ich stronie wklęsłéj.

141. Połączymy punkt P z ogniskami F i F' i połóżmy $\mathrm{FP} = r$, $\mathrm{F'P'} = r'$. Wtedy mamy

$$r^2 = (x' - ae) + y'^2,\quad r'^2 = (x' + ae)^2 + y'^2,$$

gdyż spółrzędne ognisk F i F' są odpowiednio $(ae, 0)$ i $(-ae, 0)$. Atoli, gdy punkt P leży na krzywéj (1), a więc

$$y'^2 = \mp \frac{b^2}{a^2}x'^2 \pm b^2,$$

to, wstawiwszy tę wartość, otrzymamy

$$r^2 = (x' - ae)^2 \mp \frac{b^2}{a^2}x'^2 \pm b^2,\quad r'^2 = (x' + ae) \mp \frac{b^2}{a^2}x'^2 \pm b^2,$$

lub, uwzględniając, że $a^2e^2 \equiv a^2 \mp b^2$,

$$r^2 = a^2 - 2aex' + e^2x'^2,\quad r'^2 = a^2 + 2aex' + e^2x'^2.$$

Stąd wypada, dla $x' > 0$

(8) $$r = \pm (a - ex'), \quad r' = a + ex',$$

a dla $x' < 0$

(9) $$r = a - ex', \quad r' = \pm (a + ex'),$$

gdzie znaki wyższe odnoszą się do elipsy, a niższe do hiperboli. Tak wyrażone promienie wodzące r i r' są dodatne, albowiém w elipsie jest $e < 1$, a w hiperboli $e > 1$, i nadto wartość bezwzględna x' jest w elipsie mniejszą od a, a w hiperboli większą od a.

Ze wzorów (8) i (9) widzimy jeszcze, że odległości punktu bieżącego na elipsie lub hiperboli od ognisk tych krzywych są funkcyjami wymiernymi spółrzędnych tego punktu. Tę własność przyjmują niekiedy za określenie ognisk.

Ze wzorów (8), jak również ze wzorów (9), wypada dla elipsy $r + r' = 2a$, a dla hiperboli $\pm (r' - r) = 2a$. A zatym:

W elipsie suma, a w hiperboli różnica odległości punktu bieżącego na tych krzywych od ich ognisk jest stałą i równą osi wielkiéj w elipsie, a osi rzeczywistéj w hiperboli. Tę własność przyjmuje się niekiedy za określenie elipsy i hiperboli.

142. Z figur 34 i 35 widoczna, że

$$\mathrm{F'N} = \mathrm{F'O} + \mathrm{ON}, \quad \mathrm{FN} = \pm (\mathrm{OF} - \mathrm{ON}),$$

gdzie znowu znak wyższy odnosi się do elipsy, a niższy do hiperboli. Wstawiając w te równania wartości za F'O, OF, ON i uwzględniając związki (8) i (9), otrzymujemy

$$\mathrm{F'N} = ae + e^2x' = e(a + ex') = e\mathrm{F'P},$$
$$\mathrm{FN} = \pm (ae - e^2x') = \pm e(a - ex') = e\mathrm{FP},$$

skąd wypada

$$\frac{\mathrm{F'N}}{\mathrm{FN}} = \frac{\mathrm{F'P}}{\mathrm{FP'}},$$

t. j. że *w elipsie i hiperboli normalna i styczna są dwusiecznymi dwu kątów spełniających się, utworzonych przez promienie wodzące, wyprowadzone z obu ognisk do punktu styczności.*

Spuśćmy jeszcze z ognisk F i F' prostopadłe FH i F'H' na styczną PT i przedłużmy te prostopadłe aż do przecięcia się z promieniami wodzącymi F'P i FP w punktach G i G'. Z wyrażenia na odległość prostopadłą punktu od prostéj wypada

$$\mathrm{FH} = \pm b\sqrt{\pm\frac{a - ex'}{a + ex'}}, \quad \mathrm{F'H'} = b\sqrt{\pm\frac{a + ex'}{a - ex'}},$$

a zatym

$$\mathrm{FH} \,.\, \mathrm{F'H'} = \pm b^2,$$

t. j. *w elipsie i hiperboli prostokąt, wystawiony na odległościach prostopadłych ognisk od stycznéj, jest stale równoważny kwadratowi połowy osi małéj w elipsie, a połowie osi urojonéj w hiperboli.*

Nadto, ponieważ $F'G = FG' = 2a$, gdyż $PG = PF$, a $PG' = PF'$, więc $OH = \frac{1}{2} F'G = a$ i $OH' = \frac{1}{2} FG' = a$, t. j. *spodek prostopadłéj z któregokolwiek ogniska na styczną do elipsy lub do hiperboli leży na okręgu koła spółśrodkowego o promieniu a.*

143. Na powyższych własnościach elipsy i hiperboli opiérają się sposoby kreślenia stycznych do tych krzywych, gdy ich ogniska są dane.

Jeżeli punkt styczności P jest dany, wtedy dwusieczna kąta $F'PF$ jest normalną w elipsie, a styczną w hiperboli.

Jeżeli jest dany kierunek stycznéj, natenczas z ogniska F wyprowadzamy prostą, prostopadłą do tego kierunku, a z ogniska F' kreślimy koło promieniem $2a$, które tę prostą przecina w punktach G_1 i G_2. W środkach H_1 i H_2 odcinków FG_1 i FG_2 wystawiamy prostopadłe do G_1G_2; te dwie prostopadłe są stycznymi o kierunku danym.

Jeżeli nakoniec mamy wyprowadzić styczne z punktu P, leżącego zewnątrz, t. j. po stronie wypukłéj linii krzywéj, wówczas kreślimy dwa koła: jedno z punktu P promieniem PF, a drugie z ogniska F' promieniem $2a$. Te dwa koła przecinają się w punktach G_1 i G_2. Proste PH_1 i PH_2, łączące punkt P ze środkiem H_1 i H_2 odcinków FG_1 i FG_2, są żądanymi dwiema stycznymi.

OGNISKO PARABOLI.

144. Parabolę, przedstawioną przez równanie

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

można uważać za granicę, do któréj dąży hiperbola (2) gdy jéj osi rosną do nieskończoności w ten sposób, że parametr $p = \frac{b^2}{a}$ pozostaje niezmiennym (art. 131). Stąd wprost wypada, że parabola posiada tylko jedno ognisko F, leżące na osi w odległości skończonéj od wiérzchołka A. W hiperboli jest

$$AF = OF - OA = ae - a = \sqrt{a^2 + b^2} - a = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} = \frac{p}{\sqrt{1 + \frac{p}{a}} + 1}.$$

Ta wartość, dla $a = \infty$, zamienia się na

$$AF = \frac{p}{2}. \tag{2}$$

A zatym: *odległość ogniska paraboli od wiérzchołka jest równa połowie parametru p.*

Połączmy punkt P (x', y') na paraboli (fig. 36) z ogniskiem F i oznaczmy $FP = r$. Mamy

$$r^2 = \left(x' - \frac{p}{2}\right)^2 + y'^2,$$

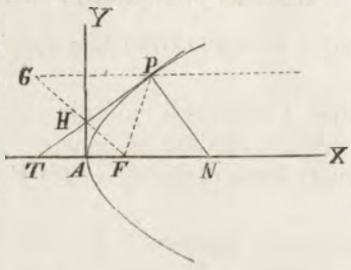


Fig. 36.

lub, gdy $y'^2 = 2px'$,

$$r^2 = \left(\frac{p}{2} + x'\right)^2.$$

Stąd wypada

$$(3) \qquad r = \frac{p}{2} + x'.$$

A zatym i w paraboli odległość punktu bieżącego na krzywéj od ogniska jest funkcyją wymierną spółrzędnych tego punktu.

Ponieważ drugie ognisko paraboli leży na osi w odległości nieskończenie wielkiéj od wiérzchołka, więc na mocy własności hiperboli powyżéj dowiedzionéj, *styczna* PT *i normalna* PN *do paraboli są dwusiecznymi kątów, które promień wodzący* FP, *wyprowadzony z ogniska* F *do punktu styczności* P, *czyni z prostą równoległą do osi, przechodzącą przez punkt* P. Jeżeli więc z punktu F spuścimy prostopadłą FH na styczną i tę prostopadłą przedłużymy aż do przecięcia się w punkcie G z prostą do osi równoległą, a przez P przechodzącą, to $FP = GP$.

Podstawmy w równaniu stycznéj do paraboli (1),

$$yy' = p(x + x'),$$

$y = 0$; otrzymamy $x = AT = -x'$. Jest zatym

$$TF = TA + AF = x' + \frac{p}{2},$$

co porównywając ze wzorem (3), mamy $TF = FP$, t. j. trójkąt TFP jest równoramienny. Gdy nadto prosta FH jest prostopadłą do PT, do $TH = HG$ t. j. punkt H leży na osi y-ów. A zatym: *spodek prostopadłéj, spuszczonéj z ogniska na styczną do paraboli, leży na stycznéj w wiérzchołku téjże krzywéj.*

Na tych własnościach opiéra się kréślenie stycznych do paraboli, gdy ognisko jest dane, które łatwo wywiéść można z tego, cośmy mówili o kréśleniu stycznych do elipsy i hiperboli.

LINIJE KRZYWE STOPNIA 2-GO SPÓŁOGNISKOWE.

145. Równanie

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

w którym λ jest liczbą dodatną nieoznaczoną, przedstawia szereg linij krzywych stopnia 2-go spółśrodkowych i spółogniskowych. Każdéj z wartości na

λ odpowiada inna krzywa. Równanie (1) dla $\lambda^2 > c^2$ przedstawia elipsę, a dla $\lambda^2 < c^2$ hiperbolę; c jest odległością ognisk spólnych od środka. Jeżeli w piérwszym przypadku λ^2 wciąż maleje, dążąc do granicy c^2, to elipsa (1) coraz się więcéj spłaszcza, a w granicy, kiedy $\lambda^2 = c^2$, zamienia się na prostą, łączącą oba punkty ogniskowe. Jeżeli zaś w przypadku drugim λ^2 wciąż rośnie, dążąc do granicy c^2, to hiperbola (1) coraz się więcéj spłaszcza, a w granicy, kiedy $\lambda^2 = c^2$, zamienia się na dwie proste, które, wychodząc z punktów ogniskowych, rosciągają się w dwu kierunkach przeciwnych na osi x-ów do nieskończoności.

Łatwo możemy dowiéść dwu następujących twierdzeń:

Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzą dwie krzywe spółśrodkowe i spółogniskowe, z których jedna jest elipsą, a druga hiperbolą. Jakoż, uważając w równaniu (1) x' i y' jako spółrzędne punktu danego i znosząc w nim mianowniki, mamy na wyznaczenie λ równanie kwadratowe względem λ^2,

$$\lambda^2(\lambda^2 - c^2) - (\lambda^2 - c^2)\,x'^2 - \lambda^2 y'^2 = 0.$$

Strona lewa tego równania dla $\lambda^2 = \infty$ jest dodatną, dla $\lambda^2 = c^2$ ujemną, a dla $\lambda^2 = 0$ znowu dodatną. Jeden więc pierwiastek tego równania leży między ∞ i c^2, a drugi między c^2 i 0. Oznaczmy piérwszy przez λ_1^2, a drugi przez λ_2^2. Natenczas równania

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda_1^2} + \dfrac{y^2}{\lambda_1^2 - c^2} = 1, \\[2mm] \dfrac{x^2}{\lambda_2^2} + \dfrac{y^2}{\lambda_2^2 - c^2} = 1 \end{cases}$$

przedstawiają dwie linije spółśrodkowe i spółogniskowe, przechodzące przez ten sam punkt (x', y') płaszczyzny. Tu, jak widzieliśmy, $\lambda_1^2 > c^2$, a $\lambda_2^2 < c^2$; piérwsze więc równanie przedstawia elipsę, a drugie hiperbolę:

Dwie linije spółśrodkowe i spółogniskowe, przechodzące przez ten sam punkt, przecinają się w tym punkcie pod kątem prostym. Albowiém w tym punkcie normalna do jednéj z tych krzywych jest styczną do drugiéj (art. 142).

Ilości λ_1, λ_2 zowią się s p ó ł r z ę d n y m i e l i p t y c z n y m i punktu przecięcia się linij (2). Okażemy następnie, że te linije przecinają się w czterech punktach, leżących symetrycznie względem osi x-ów i y-ów. Ograniczając się teraz do punktu zawartego między dodatnymi kierunkami osi, znajdziemy, rozwiązując równania (2) względem x i y,

$$(3)\qquad x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}{c}.$$

Zapomocą wzorów (3) można przejść od spółrzędnych prostokątnych do spółrzędnych eliptycznych. Użycie spółrzędnych eliptycznych prowadzi niekiedy do znacznych uproszczeń w rachunku.

RÓWNANIA LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO WE SPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH.

146. Aby otrzymać równania linij krzywych stopnia 2-go we spółrzędnych biegunowych (równania wielkiéj użyteczności w różnych badaniach), przyjmiemy ognisko za biegun, a kierunek osi, zwrócony ku bliższemu wiérzchołkowi, za oś biegunową. Weźmy pod uwagę naprzód parabolę. Kładąc (fig. 37) $AM = x$, $MP = y$, $FP = r$, $\angle AFP = \theta$, mamy

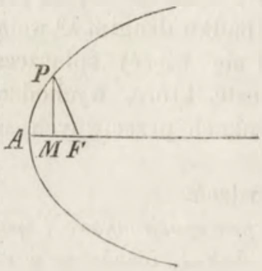


Fig. 37.

$$r = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} + AF - MF = p - r\cos\theta,$$

skąd wypada równanie

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta},$$

będące właśnie żądanym równaniem biegunowym paraboli. — Dla $\theta = \frac{\pi}{2}$, wypada $r = p$; a zatym parametr p paraboli jest połową cięciwy, przechodzącéj przez ognisko i prostopadłéj do osi. Cała cięciwa $2p$ zowie się **b o k i e m p r o s t y m** (latus rectum) paraboli.

W elipsie, biorąc (fig. 38) ognisko F′ za biegun, a kierunek FA′ za oś biegunową, i kładąc $OM = x$, $MP = y$, $F'P = r$, $\angle A'F'P = \theta$, miéć będziemy

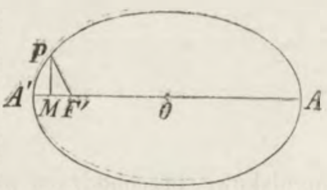


Fig. 38.

$$r = a - ex' = a - e(OF' + F'M) = a - ae^2 - er\cos\theta,$$

skąd wypada

$$r = \frac{a - ae^2}{1 + e\cos\theta},$$

lub, z uwagi, że $a - ae^2 = \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a} = p$,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Parametr p elipsy ma takież samo znaczenie, jak parametr paraboli.

Nakoniec, w hiperboli, biorąc (fig. 39) ognisko F za biegun, a kierunek FA za oś biegunową, i kładąc dla punktu P na gałęzi, do któréj należy wiérzchołek A, $OM = x$, $MP = y$, $FP = r$, $\angle AFP = \theta$, miéć będziemy

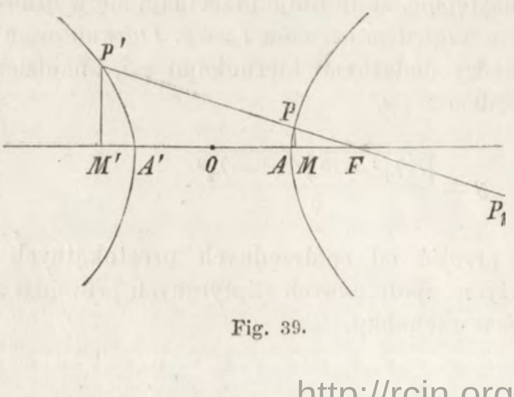


Fig. 39.

$$r = ex - a - e(\mathrm{OF} - \mathrm{MF}) - a = ae^2 - a - er\cos\theta,$$

skąd wypada

$$r = \frac{ae^2 - a}{1 + e\cos\theta},$$

lub, z uwagi, że $ae^2 - a = \dfrac{a^2 + b^2 - a^2}{a} = \dfrac{b^2}{a} = p$,

$$(1) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

I tutaj parametr p ma tož samo znaczenie, co w paraboli. — Dla punktu P' leżącego na drugiéj gałęzi hiperboli, do któréj należy wiérzchołek A', mamy $x' = \mathrm{OM}' < 0$, skutkiem czego

$$r' = a - ex' = a + e(\mathrm{FM}' - \mathrm{FO}) = a - ae^2 + er'\cos\theta,$$

skąd wypada

$$r' = \frac{p}{e\cos\theta - 1}.$$

Zauważymy tu jednak, że jeżeli w (1) za θ podstawimy $\pi + \theta$, to w przypadku, gdy przedłużenie promienia wodzącego o kierunku θ przecina tę drugą gałąź hiperboli, otrzymamy

$$r_{\theta+\pi} = \frac{p}{1 + e\cos(\pi + \theta)} = -\frac{p}{e\cos\theta - 1} = -r'_{\theta},$$

albo

$$r_{\theta+\pi} . \cos\pi = r'_{\theta},$$

a więc, jeżeli we wzorze (1) nadajemy na θ wartości, nie odpowiadające punktom gałęzi hiperboli, do któréj należy wiérzchołek A (t. j. wyznaczające punkty, leżące wewnątrz kąta, utworzonego w biegunie przez równoległe do asymptot), to wtedy punkty P', leżące na wstecznym przedłużeniu promieni FP_1 tak, iż $\mathrm{FP}' = \mathrm{FP}_1$, są punktami drugiéj gałęzi hiperboli, t. j. gałęzi, do któréj należy wiérchołek A'. Jeżeli więc umówimy się, ażeby we wzorze (1), wrazie, gdy wartość na r, odpowiadająca pewnéj wartości θ, wyznacza punkt zawarty wewnątrz kąta utworzonego w biegunie przez równoległe do asymptot, brać zamiast niego punkt, leżący na wstecznym przedłużeniu promienia wodzącego w takiéj saméj od ogniska odległości, to obie gałęzi hiperboli możemy przedstawić zapomocą jednego równania (1).

Widzimy więc, że wogóle: *jeżeli przyjmiemy ognisko krzywéj stopnia 2-go za biegun, a kierunek osi ku wiérzchołkowi bliższemu za oś biegunową, to te krzywe przedstawia równanie*

$$(2) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

a mianowicie: elipsę, parabolę, lub hiperbolę, według tego, czy mimośród e jest mniejszy, równy, lub większy od jedności.

KIEROWNICE LINIJ KRZYWYCH RZĘDU 2-GO.

147. Biegunową ogniska nazywamy kierownicą.

Elipsa i hiperbola posiadają po dwie kierownice, z których jedna należy do jednego, a druga do drugiego ogniska, parabola zaś posiada tylko jednę kierownicę. Podstawmy w równaniach biegunowéj punktu (x', y') względem elipsy i hiperboli (1) art. 140, tudzież względem paraboli (1) art. 144, $y'=0$, a za x' odciętą ognisk: odpowiednio $\pm c$ lub $\frac{p}{2}$. Otrzymamy dla elipsy i hiperboli

(1) $$x = \pm \frac{a^2}{c},$$

a dla paraboli

(2) $$x = -\frac{p}{2}.$$

A więc wogóle: *kierownice są prostopadłe do osi, przechodzącéj przez ogniska, a krzywa jest względem nich wypukła.* Piérwsza część tego twierdzenia jest przypadkiem szczególnym własności biegunowéj, według któréj kierunek biegunowéj jest sprzężony z kierunkiem średnicy, przechodzącą przez biegun.

148. Niech DE będzie kierownicą należącą do ogniska F (fig. 40). Połączmy punkt P (x', y') na krzywéj z ogniskiem F i spuśćmy z z tego punktu prostopadłą PE na kierownicę. Dla elipsy i hiperboli mamy (art. 141) $FP = \pm(a - ex')$, a że

$$PE = \pm\left(\frac{a}{e} - x'\right) = \pm\frac{a - ex'}{e},$$

przeto $\frac{FP}{PE} = e.$

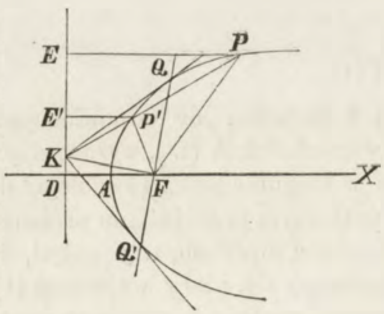


Fig. 40.

Dla paraboli $(e=1)$ zaś jest (art. 144) $FP = \frac{p}{2} + x'$ i $PE = \frac{p}{2} + x'$, skąd wypada $\frac{FP}{PE} = 1.$ Stąd więc wynika, iż ogólnie

$$\frac{FP}{PE} = e.$$

Zatym: *linija krzywa stopnia 2-go jest miejscem gieometrycznym punktu, poruszającego się na płaszczyźnie tak, iż stosunek jego odległości od punktu stałego do odległości od prostéj stałéj pozostaje niezmiennym, i jest elipsą, parabolą, lub hiperbolą, według tego, czy ten stosunek jest mniejszy, równy, lub większy od jedności.*

Jeżeli α i β są spółrzędnymi punktu stałego (ogniska), a $lx + my + h$ jest równaniem prostéj stałéj (kierownicy), to równanie

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (lx + my + h)^2 \tag{3}$$

wyraża tę własność linij krzywych stopnia 2-go.

Przy poszukiwaniu ognisk i kierownic linij krzywych stopnia 2-go zwykle punktem wyjścia jest równanie (3).

149. Ponieważ kierownica DE jest biegunową ogniska F, więc nawzajem, biegunowa QQ′ punktu K na kierownicy DE przechodzi przez ognisko F. Ta biegunowa jest prostopadłą do prostéj FK. Jakoż, spółczynnik kierunkowy biegunowéj punktu K, leżącego na kierownicy, jest w elipsie i hiperboli $\frac{b^2}{aey'}$, a paraboli $\frac{p}{y'}$, gdyż spółrzędne punktu K, wskutek (1) i (2), są $\left(-\frac{a}{e}, y'\right)$ dla elipsy i hiperboli, a $\left(-\frac{p}{2}, y'\right)$ dla paraboli. Spółczynnik zaś kierunkowy prostéj FK jest $-\frac{aey'}{b^2}$ dla elipsy i hiperboli, a $-\frac{y'}{p}$ dla paraboli. Iloczyny tych spółczynników kierunkowych są równe -1, a więc proste QQ′ i FK są do siebie prostopadłe. A zatym: *biegunowa punktu na kierownicy przechodzi przez ognisko, należące do téj kierownicy, i jest prostopadła do prostéj, łączącéj ten punkt z ogniskiem.*

Wyprowadźmy z punktu K sieczną, która przecina krzywą w punktach P i P′; połączmy te punkty z ogniskiem F i spuśćmy z nich prostopadłe PE i P′E′ na kierownicę DE. Mamy wtedy

$$\frac{PE}{P'E'} = \frac{PK}{P'K} \quad \text{i} \quad \frac{PE}{P'E'} = \frac{FP}{FP'}$$

skąd wypada

$$\frac{PK}{P'K} = \frac{FP}{FP'},$$

t. j. FK jest dwusieczną jednego z dwu kątów spełniających się, zawartych między promieniami wodzącymi FP i FP′. Dwusieczną drugiego z tych kątów jest biegunowa QQ′ punktu K. Promienie FP i FP′ są więc parą promieni harmonicznie sprzężoną z parą promieni FK i FQ. A zatym: *jeżeli pary punktów* P *i* P′, *w których sieczne, wyprowadzone z punktu* K *na kierownicy, przecinają krzywą stopnia 2-go, połączymy prostymi z ogniskiem* F, *do téj kierownicy należącym, to otrzymamy pęk par promieni* FP, FP′, *tworzących inwolucyją; promieniami asymptotycznymi téj inwolucyi są prosta* FK *i biegunowa* FQ *punktu* K.

150. Styczne do linii krzywéj w punktach P i P′ (fig. 40) przecinają się w punkcie T na biegunowéj QQ′ punktu K. Połączmy punkty T, P i P′ i z drugim ogniskiem linii krzywéj (w paraboli zastąpmy te proste równoległymi do osi) i na F′P i FP′ odłóżmy PG = FP i P′G′ = F′P′ (w elipsie na przedłużeniach, a w hiperboli i paraboli w kierunku przeciwnym); wtedy F′G = FG′ = $2a$, TG = TF, TG′ = TF′, a przeto $\angle$ GTF′ = $\angle$ FTG′. Gdy zaś

$\angle FTF' = \angle FTF'$, więc także $\angle GTF' - \angle FTF' = \angle FTG' - \angle FTF'$, czyli $\angle GTF = \angle F'TG'$, a przeto i połowy tych kątów są sobie równe, t. j. $\angle PTF = \angle F'TP'$. A zatym: *w elipsie i hiperboli styczne, wychodzące z jednego punktu, tworzą z promieniami wodzącymi, wyprowadzonymi z ognisk do tego punktu, kąty równe.* W paraboli należy jeden z tych promieni wodzących zastąpić prostą, równoległą do osi.

INNE OKRÉŚLENIE OGNISK.

151. Podamy określenie ogólniejsze ognisk linij krzywych stopnia 2-go, dające się rosciągnąć na krzywe algiebraiczne jakiegokolwiek rzędu i klasy. Za punkt wyjścia posłuży nam równanie (3) art. 148, t. j.

$$(1) \qquad [x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1}][x-\alpha-(y-\beta)\sqrt{-1}] = (lx+my+h)^2.$$

Ażeby przedstawić znaczenie tego równania, weźmy pod uwagę cztéry proste (fig. 41), tworzące czworobok, których równania niech będą

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 0, \quad D_4 = 0.$$

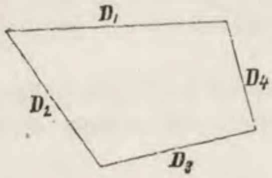


Fig. 41.

Równanie

$$(2) \qquad D_1 D_3 = D_2 D_4,$$

stopnia 2-go względem spółrzędnych x i y, przedstawia pewną krzywą stopnia 2-go, która widocznie przechodzi przez cztéry wierzchołki D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 i D_4D_1 czworoboku, albowiém wartości na x i y, które jednocześnie czynią zadość dwu równaniom $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$, lub $D_2 = 0$ i $D_3 = 0$, lubtéż $D_3 = 0$ i $D_4 = 0$, lub nakoniec $D_4 = 0$ i $D_1 = 0$, uczynią także zadość równaniu (2). Przypuśćmy, że proste D_2 i D_4 wciąż się do siebie zbliżają. Wtedy również wiérzchołki D_1D_2 i D_1D_4 i wiérzchołki D_3D_2 i D_3D_4 coraz się więcéj do siebie zbliżają. W granicy zatym, kiedy proste D_2 i D_4 razem się ze sobą zejdą, również się razem ze sobą zejdą tak wiérzchołki D_1D_2 i D_1D_4, jak i wiérzchołki D_3D_2 i D_3D_4. Stąd wypada, że równanie kształtu

$$(3) \qquad D_1 D_3 = D^2,$$

na które wtedy przechodzi równanie (14), przedstawia krzywą stopnia 2-go, mającą proste D_1 i D_3 za styczne, a prostą D (w któréj razem się ze sobą zeszły proste D_2, D_4) za odpowiednią cięciwę styczności. — Porównywając więc równanie (3) z równaniem (1), widzimy, że proste

$$(4) \qquad x-\alpha+(y-\beta)\sqrt{-1} = 0 \quad \text{i} \quad x-\alpha-(y-\beta)\sqrt{-1} = 0$$

są stycznymi do linii krzywéj stopnia 2-go, a prosta

$$(5) \qquad lx+my+h = 0$$

jest odpowiednią cięciwą styczności.

Proste urojone (4) przechodzą obie przez ognisko (α, β) linii krzywéj stopnia 2-go i są równoległe do asymptot kół (art. 109), czyli przechodzą: jedna przez jeden, a druga przez drugi z dwu punktów kołowych urojonych (w nieskończoności). Na podstawie tego możemy ognisko tak określić: *ogniskiem linii krzywéj nazywamy punkt* F, *w którym przecinają się dwie styczne do téj krzywéj, wyprowadzone z punktów kołowych urojonych* K_1, K_2.

Do linii krzywéj stopnia 2-go można z każdego punktu, a więc i z punktów K_1 i K_2, wyprowadzić dwie styczne. Dwie styczne z K_1 przecinają się z dwiema stycznymi z K_2 w cztérech punktach; a zatym linije krzywe stopnia 2-go posiadają cztéry ogniska. Z tych ognisk dwa są zawsze rzeczywiste, a dwa urojone. Albowiém kierunki, w których leżą punkty K_1 i K_2, są urojone i sprzężone, więc i styczne z K_1 będą sprzężone ze stycznymi z K_2. A mianowicie, jeżeli $D_1 + D_2\sqrt{-1} = 0$ i $D_3 + D_4\sqrt{-1} = 0$ są równaniami stycznych z K_1, to równania stycznych z K_2 będą kształtu $D_1 - D_2\sqrt{-1} = 0$ i $D_3 - D_4\sqrt{-1} = 0$. A zatym tylko przecięcia się dwu par stycznych

$$D_1 + D_2\sqrt{-1} = 0,\ D_1 - D_2\sqrt{-1} = 0 \text{ i } D_3 + D_4\sqrt{-1},\ D_3 - D_4\sqrt{-1} = 0$$

dadzą ogniska rzeczywiste, gdy tymczasem przecięcia się pozostałych dwu par

$$D_1 + D_2\sqrt{-1},\ D_3 - D_4\sqrt{-1} = 0 \quad \text{i} \quad D_3 + D_4\sqrt{-1},\ D_1 - D_2\sqrt{-1} = 0$$

dadzą ogniska urojone ze sobą sprzężone.

Wiadomo, że parabola ma asymptotę w nieskończoności, czyli jest styczną do prostéj w nieskończoności, a więc, z uwagi, że proste w nieskończoności można uważać jako razem się z sobą schodzące, jest styczną do prostéj K_1K_2. Dlategotéż punkt styczności w nieskończoności jest jednym z ognisk rzeczywistych paraboli (jako przecięcie się jednéj stycznéj z K_1 z jedną styczną sprzężoną z K_2). Co się zaś tyczy dwu ognisk urojonych paraboli, to są nimi same punkty K_1 i K_2. Parabola posiada zatym w odległości skończonéj jedno tylko ognisko rzeczywiste.

152. Wychodząc z tego określenia, wynajdziemy spółrzędne ognisk dla trzech krzywych stopnia 2-go, danych przez równania

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{i} \quad y^2 = 2px.$$

W tym celu przekształcimy naprzód te równania przez wprowadzenie spółrzędnych linii prostéj na miejsce spółrzędnych punktu. Z równania stycznéj w punkcie (x', y') wypadają na spółrzędne stycznéj do elipsy i hiperboli wartości:

$$u = -\frac{x'}{a^2}, \quad v = \mp\frac{y'}{b^2} \text{ skąd } \frac{x'}{a} = -au, \quad \frac{y'}{b} = \mp bv,$$

a na spółrzędne stycznéj do paraboli wartości:

$$u = \frac{1}{x'}, \quad v = -\frac{y'}{px'}, \text{ skąd } x' = \frac{1}{u}, \quad y' = -\frac{pv}{u}.$$

Wstawiając te wartości za x' i y' odpowiednio w równania $\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = 1$ i $y'^2 = 2px'$, otrzymujemy

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1 \quad \text{i} \quad pv^2 = 2u \tag{6}$$

jako równania elipsy, hiperboli i paraboli we spółrzędnych linii prostéj. Według określenia ognisk, danego w artykule poprzedzającym, prosta

$$x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1} = 0$$

jest styczną do krzywéj stopnia 2-go, jeżeli α i β są spółrzędnymi ogniska téj krzywéj. Spółrzędne téj stycznéj są

$$u = -\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}, \qquad v = -\frac{\sqrt{-1}}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}. \tag{7}$$

Wskutek podstawienia tych wartości w równania elipsy i hiperboli (6), otrzymujemy

$$a^2 \mp b^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{-1},$$

równanie, które się roskłada na dwa następujące:

$$\alpha\beta = 0 \quad \text{i} \quad \alpha^2 - \beta^2 = a^2 \mp b^2.$$

Piérwszemu uczynimy zadość, kładąc albo $\alpha = 0$, albo $\beta = 0$. Z równania drugiego, dla $\beta = 0$, wypada $\alpha = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2}$, a dla $\alpha = 0$, $\beta = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2}\sqrt{-1}$. Widzimy więc, że elipsa i hiperbola posiadają dwa ogniska rzeczywiste i dwa ogniska urojone, i że piérwsze leżą na osi wielkiéj w elipsie, a rzeczywistéj w hiperboli. Znaleźliśmy zarazem na odległość ogniskową, tę samę wartość, co w art. 140.

Podstawmy taksamo wartości (7) za u i v w równanie (6) paraboli; otrzymamy wtedy na wyznaczenie α i β równanie

$$p = 2(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

skąd wypada

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{p}{2}.$$

Ognisko więc rzeczywiste paraboli leży na osi głównéj, w odległości $\frac{p}{2}$ od wiérzchołka, jak to znaleźliśmy w art. 144.

ZASTOSOWANIA METODY BIEGUNOWYCH WZAJEMNYCH.

153. Znajomość ognisk i kierownic linij krzywych stopnia 2-go dozwala nam rozwinąć szczegółowiéj metodę biegunowych wzajemnych, któréj zarys podaliśmy w artykule 103.

Dwie krzywe S i Σ nazwaliśmy krzywymi biegunowo wzajemnymi względem kierownicy stopnia 2-go K, jeżeli każdéj stycznéj PT do S odpowiada pewien punkt p na krzywéj Σ, który jest biegunem téj stycznéj względem K, i jeżeli, nawzajem, punktowi styczności P stycznéj PT do S odpowiada, jako jego biegunowa względem K, styczna pt do Σ w punkcie p. Za kierownicę K można wziąć jakąkolwiek krzywą stopnia 2-go; wszakże najprościéj użyć w tym celu koła.

Weźmy więc za kierownicę koło o promieniu k, mające środek w początku spółrzędnych prostokątnych,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = k^2.$$

Równanie biegunowéj jakiegokolwiek punktu $P'(x', y')$ względem tego koła,

$$(2) \qquad xx' + yy' = k^2,$$

pokazuje, że ta biegunowa jest prostopadłą do prostéj $y = \frac{y'}{x'}x$, t. j. do prostéj, łączącéj punkt P′ ze środkiem. Nadto z własności harmonicznych bieguna i biegunowéj wypada, że iloczyn odległości punktu i jego biegunowéj od środka koła jest równy kwadratowi jego promienia (art. 42).

Wiedząc to, można związek między dwiema krzywymi biegunowo wzajemnymi tak wysłowić: *jeżeli z punktu danego* O (fig. 42) *spuścimy prostopadłą* OT *na styczną* TP *do krzywéj* S *w punkcie* P *i przedłużymy tę prostopadłą do takiego punktu* p, *aby iloczyn* OT . Op *był równy liczbie stałéj* (k^2), *to jako miejsce gieometryczne punktu* p *otrzymujemy krzywą* Σ, *biegunowo wzajemną z krzywą* S *względem koła (o promieniu* k*), mającego środek w punkcie* O.

Tak określając krzywą biegunowo wzajemną, możemy opuszczać wzgląd na koło-kierownicę, a mówić, przez skrócenie, o krzywych biegunowo wzajemnych względem początku O. Według tego określenia, każdemu punktowi na jednéj z dwu krzywych biegunowo wzajemnych S i Σ odpowiada pewna ściśle wyznaczona styczna do drugiéj z tych krzywych, i, wogólności, każdemu punktowi, zajmującemu względem jednéj z tych krzywych położenie w pewien sposób określone, odpowiada ściśle wyznaczona prosta, zajmująca względem drugiéj krzywéj położenie w odpowiedni sposób określone. Wszczególności zaś:

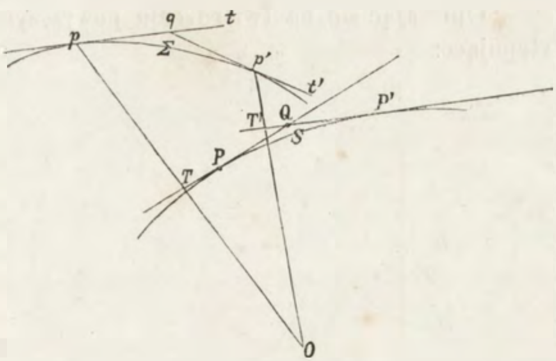


Fig. 42.

a. Kąt między dwiema prostymi TQ i T'Q (zajmującymi względem krzywéj S położenie w pewien sposób określone, np. między stycznymi do S w P i P'), jest równy kątowi między prostymi Op i Op', wyprowadzonymi z początku O do biegunów tamtych dwu prostych (punktów odpowiednich na krzywéj Σ), p i p'; albowiém prosta Op jest prostopadła do TQ, a Op' do T'Q.

b. Odległość punktu P (mającego położenie określone względem krzywéj S, np. punktu na S) od początku O jest równa odwrotności odległości początku O od biegunowéj pt tego punktu (stycznéj do Σ w p), pomnożonéj przez liczbę stałą, wyznaczającą związek między S i Σ (t. j. przez kwadrat promienia koła-kierownicy).

154. *Jeżeli z dwu punktów* P' *i* P'' *spuścimy prostopadłe* P'Q' *i* P''Q'' *odpowiednio na biegunowe punktów* P'' *i* P' *względem koła-kierownicy* (1) *to* $\frac{OP'}{P'Q'}=\frac{OP''}{P''Q''}$. — Aby tego dowieść, oznaczmy przez (x', y') i $(x''$ i $y'')$ spółrzędne punktów P' i P'' i zauważmy, że ponieważ równania biegunowych tych punktów są

$$xx'+yy'-k^2=0 \text{ i } xx''+yy''-k^2=0, \text{ zatym}$$

$$P'Q'=\frac{x'x''+y'y''-k^2}{\sqrt{x''^2+y''^2}} \text{ i } P''O''=\frac{x''x'+y''y'-k^2}{\sqrt{x'^2+y'^2}};$$

a gdy nadto

$$\sqrt{x''^2+y''^2}=OP'' \text{ i } \sqrt{x'^2+y'^2}=OP, \text{ więc}$$

$$OP''.P'Q'=OP'.P''Q''=x'x''+y'y''-k^2, \text{ skąd}$$

$$\frac{OP'}{P'Q'}=\frac{OP''}{P''Q''}.$$

Opiérając się na twierdzeniu powyższym, łatwo można udowodnić następujące:

Biegunowo wzajemna koła (względem początku O) *jest krzywą stopnia 2-go, mającą ognisko w początku, a biegunową środka koła za kierownicę, odpowiednią temu ognisku. Ta krzywa jest elipsą, parabolą, lub hiperbolą, według tego, czy początek leży wewnątrz koła, czy na obwodzie koła, czytéż zewnątrz koła.*

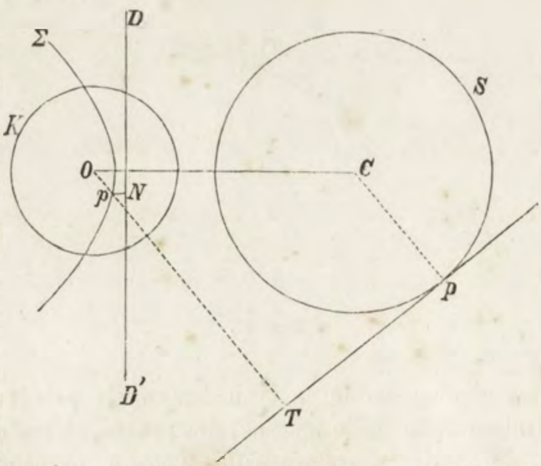


Fig. 43.

Jakoż, niech (fig. 43) DD' będzie biegunową środka C koła S względem początku O, a p biegunem stycznéj PT do koła S w punkcie P. Stosując twierdzenie pomocnicze, dopiéroco dowiedzione, do pary punktów p i C i do ich biegunowych PT i DD′, mamy $\frac{Op}{pN}=\frac{OC}{CP}$. Gdy zaś OC i CP oznaczają długości stałe, zatym widoczna, że stosunek $\frac{Op}{pN}$ między odległościami punktu p, leżącego na biegunowo wzajemnéj Σ z kołem S, od początku O i od prostéj DD′ jest stały. Ta biegunowo wzajemna jest więc krzywą stopnia 2-go, mającą początek O za ognisko, a biegunową DD′ środka C koła S za odpowiednią kierownicę. Ponieważ nadto ten stosunek jest mniejszy, równy, lub większy od 1, według tego, czy $OC < CP$, czy $OC = CP$, czytéż $OC > CP$, przeto biegunowo wzajemna Σ jest elipsą, parabolą, lub hiperbolą, według tego, czy początek O leży wewnątrz koła S, czy na obwodzie tego koła, czytéż zewnątrz niego.

Tożsamo wynika z rozbioru równania biegunowo wzajemnéj Σ z kołem S, któreto równanie otrzymać możemy w następujący sposób. Niech OC będzie osią x-ów układu prostokątnego spółrzędnych; kładąc $OC = \alpha$, $CP = r$, mieć będziemy

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$

jako równanie koła S, jako zaś równanie stycznéj PT do tego koła w punkcie P o spółrzędnych (x', y'),

$$(x'-\alpha)x + y'y = \alpha(x'-\alpha) + r^2. \tag{4}$$

Oznaczmy przez (ξ, η) spółrzędne punktu p, bieguna stycznéj PT. Równanie biegunowéj tego punktu względem początku O, t. j. względem koła (1),

$$\xi x + \eta y = k^2$$

i równanie (4) powinny przedstawiać tę samę prostą. Mamy zatym

$$x' - \alpha = \lambda\xi, \quad y' = \lambda\eta, \quad \alpha(x'-\alpha) + r^2 = \lambda k^2.$$

Z tych równań i równania $(x'-\alpha)^2 + y'^2 = r^2$ rugując x', y' i λ, otrzymujemy $r^2(\xi^2 + y)^2 = (\alpha\xi - k^2)^2$, czyli równanie

$$(\alpha^2 - r^2)\xi^2 - r^2\eta^2 - 2k^2\alpha\xi + k^4 = 0, \tag{5}$$

które jest równaniem biegunowo wzajemnéj Σ z kołem S. Ta krzywa jest oczywiście elipsą dla $\alpha^2 < r^2$, parabolą dla $\alpha^2 = r^2$, a hiperbolą dla $\alpha^2 > r^2$. Punkt O jest widocznie ogniskiem, a prosta $\alpha\xi - k^2 = 0$, t. j. biegunowa środka C koła S, kierownicą téj krzywéj.

155. Zapomocą twierdzenia poprzedzającego można z twierdzeń, odnoszących się do koła, wyprowadzić twierdzenia, odnoszące się do innych krzywych stopnia 2-go, odpowiadające tamtym na mocy zasady dwoistości. Zastosujemy ten sposób do przekształcenia kilku twierdzeń odnoszących się do koła, wyrażających związki metryczne między kątami i odcinkami, przyczym będziemy korzystali z dwu podań końcowych art. 153.

a. »Dwie styczne koła tworzą kąty równe z cięciwą styczności«. Temu twierdzeniu, znanemu z gieometryi elementarnéj i dającemu się łatwo udowodnić analitycznie, odpowié następujące:

Prosta, wyprowadzona z ogniska krzywéj stopnia 2-go do punktu przecięcia się dwu stycznych do téj krzywéj, jest dwusieczną kąta, utworzonego przez promienie wodzące, wyprowadzone z ogniska do obu punktów styczności. Albowiém, kąt między styczną (fig. 42) TQ i cięciwą styczności PP′ jest równy kątowi między prostymi Op i Oq, wyprowadzonymi z początku O do biegunów p i q prostych TQ i PP′. Równość $\angle QPP' = \angle QP'P$ prowadzi zatym do równości $\angle pOq = \angle qOp'$.

b. »Prosta, łącząca jakikolwiek punkt ze środkiem koła, jest prostopadłą do biegunowéj tego punktu«. Odpowié temu twierdzenie:

Prosta, łącząca ognisko z punktem przecięcia się jakiéjkolwiek siecznéj z odpowiednią kierownicą, jest prostopadła do prostéj, łączącéj ognisko z biegunem téj siecznéj. — Jeżeli sieczna jest styczną do krzywéj, wtedy *biegunowa punktu na kierownicy jest prostopadła do prostéj, łączącéj ten punkt z odpowiednim ogniskiem* (udowodniliśmy to bespośredno w art. 149).

c. »Prosta, łącząca jakikolwiek punkt ze środkiem koła, jest dwusieczną kąta zawartego między stycznymi do koła, wyprowadzonymi z tego punktu«. Jako twierdzenie odpowiadające, mamy:

Prosta, łącząca ognisko z punktem przecięcia się siecznéj z kierownicą, jest dwusieczną kąta między promieniami wodzącymi, wyprowadzonymi z ogniska do obu punktów, w których ta sieczna przecina krzywą.

d. »Prosta, łącząca punkty końcowe dwu cięciw koła do siebie prostopadłych, wyprowadzonych z jednego punktu na kole, przechodzi przez środek koła.« Ponieważ biegunowo wzajemna koła względem punktu, z którego wychodzą cięciwy, jako punktu leżącego na kole, jest parabolą, więc wypowiedzianemu twierdzeniu odpowié:

Miejscem gieometrycznym punktu przecięcia się stycznych do paraboli, do siebie prostopadłych, jest kierownica.

e. »Miejscem gieometrycznym wiérzchołka trójkąta, którego podstawa i kąt przy wiérzchołku są dane, jest koło, przechodzące przez punkty końcowe podstawy«.

Jeżeli są dane kierunki dwu boków trójkąta i wielkości kąta, mającego wiérzchołek w punkcie stałym, a ramiona skierowane ku punktom końcowym podstawy trójkąta, to obwiednia podstawy jest krzywą stopnia 2-go, do któréj stycznymi są obie te boki trójkąta, a któréj ogniskiem jest ów punkt stały.

f. »Suma albo różnica (zależnie od tego, czy początek leży wewnątrz, czyteż zewnątrz koła) prostopadłych, spuszczonych z początku na parę stycznych do koła, równoległych do siebie, jest stałą i równą średnicy koła«. Ponieważ dwu stycznym do koła S (fig. 43), równoległym do siebie, odpowiadają, jako bieguny, dwa punkty na prostéj przechodzącéj przez początek O, t. j. przez ognisko biegunowo wzajemnéj Σ, zatym:

W elipsie suma, a w hiperboli różnica odwrotności odcinków cięciwy, przechodzącéj przez ognisko, jest stała.

g. »Pole prostokąta, wystawionego na odcinkach każdej cięciwy koła, przechodzącéj przez ten sam punkt (np. przez początek) jest stałe«.

Pole prostokąta, wystawionego na prostopadłych, spuszczonych z ogniska krzywéj stopnia 2-go na dwie styczne równoległe, jest stałe.

I t. d.

ĆWICZENIA.

(113). P jest punktem na elipsie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, y rzędną tego punktu: okazać, że $\operatorname{tg} APA' = -\frac{2b^2}{a e^2 y}$.

(114). Jeżeli wyprowadzimy jakiekolwiek dwie proste równoległe, jedną z ogniska F, a drugą z końca A osi wielkiéj elipsy, i oznaczymy przez P i Q punkty, w których te proste przecinają oś małą, wówczas koło, mające środek w P i promień równy QA, albo jest stycznym do elipsy, albo leży zewnątrz elipsy.

(115). Dowiéść, że dwie elipsy, mające mimośrody równe, a osi wielkie równoległe, mogą miéć tylko dwa spólne punkty; oraz okazać, że jeżeli trzy takie elipsy przecinają się po dwie w punktach P i P', Q i Q', R i R', to trzy proste PP', QQ', RR' przechodzą przez jeden punkt.

(116). Znaléść miejsce środka koła wpisanego w trójkąt, utworzony przez oś wielką elipsy i promienie wodzące FP, F'P, wyprowadzone z obu ognisk do punktu bieżącego na elipsie.

(117). Kwadrat, wystawiony na połowie średnicy elipsy lub hiperboli jest równoważny z prostokątem, wystawionym na promieniach wodzących, wyprowadzonych z obu ognisk do punktu końcowego średnicy, z tamtą sprzężonéj.

(118). Odległość punktu na hiperboli równobocznéj od środka jest średnią gieometryczną odległości tegoż punktu od obu ognisk.

(119). Jeżeli T jest punktem przecięcia się dwu stycznych w P i P' do paraboli, a F jéj ogniskiem, to okazać, że $\frac{TP^2}{FP}=\frac{TP'^2}{FP'}$.

(120). Okazać, że prostopadła spuszczona z ogniska krzywéj stopnia 2-go na jakąkolwiek cięciwę, średnica z tą cięciwą sprzężona, i kierownica do tego ogniska należąca, przecinają się w jednym punkcie.

(121). Wiérzchołek kąta danego obraca się około ogniska krzywéj stopnia 2-go; w punktach przecięcia się ramion kąta z krzywą kréślimy styczne do krzywéj: znaléść miejsce przecięcia się tych stycznych.

(122). Styczną do elipsy w punkcie P przedłużamy aż do przecięcia się w punktach Q i Q' ze stycznymi w wiérzchołkach A i A': znaléść miejsce punktu przecięcia się R promieni F'Q i FQ', tudzież punktu przecięcia się S promieni FQ i F'Q', i okazać, że trzy punkty P, R, S leżą na jednéj prostéj.

(123). Z punktu P(α, β) spuszczamy prostopadłą na biegunową tego punktu względem elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; ta prostopadła przecina oś małą w punkcie D, a biegunowa przecina tę oś w punkcie E: okazać, że koło opisane na DE, jako na średnicy, przechodzi przez ogniska elipsy.

(123). Jeden wiérzchołek równoległoboku opisanego na elipsie przebiega jednę kierownicę: okazać, że wiérzchołek przeciwległy przebiega wtedy drugą kierownicę, a dwa pozostałe wiérzchołki jednocześnie opisują koło, nakréślone na osi wielkiéj, jako na średnicy.

(125). P jest punktem na hiperboli, P_1 punktem na hiperboli sprzężonéj i takim, że OP i OP_1 są połowami średnic sprzężonych, a F i F_1 są ogniskami wewnętrznymi gałęzi odpowiednich hiperból, na których te punkty leżą: okazać, że różnica długości FP i F_1P_1 jest równa różnicy długości AO i BO.

(126). Dwie styczne do paraboli $y^2=2px$ tworzą kąt α: okazać, że miejscem ich punktu przecięcia jest hiperbola, mająca to samo ognisko i tę samę kierownicę.

(127). Dwie parabole mają spólne ognisko i spólną oś, a styczna do jednéj przecina styczną do drugiéj pod kątem prostym: znaléść miejsce punktu przecięcia się tych stycznych.

(128). Miejscem bieguna prostéj stałéj względem szeregu krzywych stopnia 2-go spółogniskowych jest prosta, do prostéj stałéj prostopadła. Jeżeli dana prosta dotyka jednéj z tych krzywych, to miejscem jéj bieguna jest normalna do téj krzywéj. Na mocy tego okazać, że styczne do krzywéj stopnia 2-go w punktach przecięcia się téjże krzywéj ze styczną do krzywéj spółogniskowéj, przecinają się na normalnéj do téj ostatniéj krzywéj.

(129). Równanie biegunowe cięciwy, łączącéj punkty krzywéj $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$, odpowiadające wartościom $\theta=\alpha+\beta$ i $\theta=\alpha-\beta$, jest $\frac{p}{r}=e\cos\theta+\sec\beta\cos(\theta-\alpha)$.

(130). Równanie biegunowe stycznéj do krzywéj $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ w punkcie, odpowiadającym wartości $\theta=\alpha$, jest $\frac{p}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$.

(131). Róża wiatrów o n promieniach obraca się około swego środka, umieszczonego w ognisku elipsy: okazać, że suma odwrotności n promieni, rachowanych od ogniska aż do ich przecięcia się z elipsą jest stałą.

(132). Na osi wielkiéj elipsy, jako na średnicy, kréślimy koło; rzędna punktu P na elipsie spotyka okrąg w punkcie Q: okazać, że oznaczając $\angle AFP=\theta$, $\angle AFQ=u$, $FP=r$, mamy $r=a(1-e\cos u)$, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}$.

ROZDZIAŁ XI.

RÓWNANIA LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO WE SPÓŁRZĘDNYCH TRÓJKĄTNYCH.

RÓWNANIE OGÓLNE.

156. Weźmy pod uwagę równanie ogólne stopnia 2-go we spółrzędnych trójkątnych (prostopadłych) punktu

(1) $f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$

gdzie $a_{ik} = a_{ki}$. Ponieważ stopień równania (1) nie zmieni się, jeżeli od spółrzędnych trójkątnych przejdziemy do spółrzędnych Descartes'a, więc równanie (1) przedstawia albo parę prostych, albotéż jednę z linij krzywych, któreśmy nazwali linijami krzywymi stopnia 2-go.

Oznaczmy przez A wyróżnik wielomianu $f(x_1, x_2, x_3)$, t. j.

$$A = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}. \tag{2}$$

Jeżeli $A = 0$, wówczas równanie (1) daje się rozłożyć na iloczyn dwu równań stopnia 1-go (art. 77) i przedstawia wtedy dwie proste, których równania są

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{a_{11}}{\varkappa_1} x_1 + \frac{a_{22}}{\varkappa_2} x_2 + \frac{a_{33}}{\varkappa_3} x_3 = 0, \tag{3}$$

gdzie (art. 78)

$$\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2} a_{22} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} a_{33} = 2a_{23}, \quad \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} a_{33} + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} a_{11} = 2a_{31}, \quad \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} a_{11} + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} a_{22} = 2a_{12}. \tag{4}$$

Zaznaczmy, że te dwie proste będą do siebie prostopadłe wrazie, jeżeli (art. 63)

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2} a_{22} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} a_{33}\right)\cos A_1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} a_{33} + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} a_{11}\right)\cos A_2 - \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} a_{11} + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} a_{22}\right)\cos A_3 = 0,$$

lub, wskutek (4),

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos A_1 - 2a_{31}\cos A_2 - 2a_{12}\cos A_3 = 0. \tag{5}$$

Jeżeli zaś $A \gtrless 0$, to równanie (1) przedstawia elipsę, hiperbolę lub parabolę. Aby te trzy przypadki od siebie odróżnić, dość przypomnieć, że elipsa posiada dwie asymptoty urojone, hiperbola dwie asymptoty rzeczywiste, a parabola jednę asymptotę, którą jest prosta rzeczywista w nieskończoności, czyli, że prosta w nieskończoności (cięciwa styczności obu asymptot) przecina elipsę i hiperbolę: piérwszą w dwu punktach urojonych, a drugą w dwu punktach rzeczywistych, a jest styczną do paraboli. Równanie zaś prostéj w nieskończoności jest (art. 61)

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 0, \tag{6}$$

gdzie h_1, h_2, h_3 oznaczają trzy wysokości trójkąta odniesienia, odpowiadające wiérzchołkom A_1, A_2, A_3.

Rugując x_3 z równań (1) i (6), otrzymujemy

$$\left(\frac{a_{11}}{h_3^2}+\frac{a_{33}}{h_1^2}-2\frac{a_{31}}{h_3h_1}\right)x_1^2+2\left(\frac{a_{12}}{h_3^2}+\frac{a_{33}}{h_1h_2}-\frac{a_{31}}{h_2h_3}-\frac{a_{23}}{h_3h_1}\right)x_1x_2+\left(\frac{a_{22}}{h_3^2}+\frac{a_{33}}{h_2^2}-2\frac{a_{23}}{h_2h_3}\right)x_2^2=0.$$

Pierwiastki tego równania z niewiadomą $\frac{x_1}{x_2}$ są zespolone, rzeczywiste różne lub równe, stosownie do tego, czy wyróżnik jego strony lewéj

$$\left(\frac{a_{11}}{h_3^2}+\frac{a_{23}}{h_1^2}-2\frac{a_{31}}{h_3h_1}\right)\left(\frac{a_{22}}{h_3^2}+\frac{a_{33}}{h_2^2}-2\frac{a_{23}}{h_2h_3}\right)-\left(\frac{a_{12}}{h_3^2}+\frac{a_{33}}{h_1h_2}-\frac{a_{31}}{h_2h_3}-\frac{a_{23}}{h_3h_1}\right)^2$$

jest dodatny, ujemny, lub równy 0. Wykonawszy działania wskazane i, dla skrócenia, oznaczywszy przez A_{ik} ilość dołączoną do elementu a_{ik} wyznacznika A, znajdziemy, że ten wyróżnik jest równy

$$\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{A_{11}}{h_1^2}+\frac{A_{22}}{h_2^2}+\frac{A_{33}}{h_3^2}+2\frac{A_{23}}{h_2h_3}+2\frac{A_{31}}{h_3h_1}+2\frac{A_{12}}{h_1h_2}\right)=-\frac{\Delta}{h_3^2},$$

gdzie

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \frac{1}{h_1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \frac{1}{h_2} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \frac{1}{h_3} \\ \frac{1}{h_1}, & \frac{1}{h_2}, & \frac{1}{h_3}, & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

A zatym: *równanie* (1) *przedstawia elipsę, hiperbolę, lub parabolę zależnie od tego, czy wyrażenie* (7) Δ *jest ujemne, dodatne, lub równe 0.*

157. Oznaczając przez $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ i $f_3(x_1, x_2, x_3)$ połowy pochodnych cząstkowych funkcyi $f(x_1, x_2, x_3)$ względem x_1, x_2 i x_3, znajdziemy taksamo, jak w art. 89,

$$x_1f_1(x'_1, x'_2, x'_3)+x_2f_2(x'_1, x'_2, x'_3)+x_3f_3(x'_1, x'_2, x'_3)=0 \tag{8}$$

jako równanie biegunowéj punktu (x'_1, x'_2, x'_3) względem krzywéj (1). Stąd czytamy, iż równania

$$(9)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

przedstawiają odpowiednio biegunowe wiérzchołków A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia, t. j. punktów, dla których odpowiednio $x'_2 = x'_3 = 0$, $x'_3 = x'_1 = 0$, lub $x'_1 = x'_2 = 0$.

Dwa trójkąty zowiemy **biegunowo wzajemnymi** lub **ze sobą sprzężonymi**, jeżeli wiérzchołki jednego z nich są biegunami boków drugiego. Według tego określenia, trójkąt odniesienia $A_1A_3A_3$ i trójkąt $B_1B_2B_3$, którego boki B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 są przedstawione przez równania (9), tworzą parę trójkątów ze sobą sprzężonych.

Łatwo spotrzéc, że te dwa trójkąty są spółosiowe, a więc i spółbiegunowe (art. 31). Jakoż, dla punktów C_1, C_2, C_3, w których się przecinają pary boków odpowiednich tych dwu trójkątów A_2A_3 i B_2B_3, A_3A_1 i B_3B_1 i A_1A_2 i B_1B_2, mamy odpowiednio

$$\frac{x_1}{0} = \frac{x_2}{a_{31}} = \frac{x_3}{-a_{12}}, \qquad \frac{x_1}{-a_{23}} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{a_{12}}, \qquad \frac{x_1}{a_{23}} = \frac{x_2}{-a_{31}} = \frac{x_3}{0}.$$

Te trzy zatym punkty leżą na jednéj prostéj, albowiém widocznie

$$\begin{vmatrix} 0\ , & a_{31}\ , & -a_{12} \\ -a_{23}\ , & 0\ , & a_{12} \\ a_{23}\ , & -a_{31}\ , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Widzimy więc, że: *dwa trójkąty ze sobą sprzężone względem krzywéj stopnia 2-go, są spółosiowymi, a więc i spółbiegunowymi.*

Równanie (8) przedstawia zarazem styczną do krzywéj (1) w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3), jeżeli $f(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$.

Oznaczmy przez (u_1, u_2, u_3) spółrzędne trójkątne (prostopadłe) linii stycznéj (8); wtedy

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = \varkappa\frac{u_1}{h_1},$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = \varkappa\frac{u_2}{h_2},$$

$$a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = \varkappa\frac{u_3}{h_3};$$

nadto mamy

$$\frac{u_1x'_1}{h_1} + \frac{u_2x'_2}{h_2} + \frac{u_3x'_3}{h_3} = 0.$$

Rugowanie spółrzędnych punktu styczności (x'_1, x'_2, x'_3) i czynnika $\varkappa$ z tych cztérech równań daje

$$(10)\qquad F(u_1, u_2, u_3) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dfrac{u_1}{h_1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dfrac{u_2}{h_2} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dfrac{u_3}{h_3} \\ \dfrac{u_1}{h_1}, & \dfrac{u_2}{h_2}, & \dfrac{u_3}{h_3}, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

lub, rozwinąwszy wyznacznik,

$$(10')\quad A_{11}\frac{u_1^2}{h_1^2} + A_{22}\frac{u_2^2}{h_2^2} + A_{33}\frac{u_3^2}{h_3^2} + 2A_{23}\frac{u_2u_3}{h_2h_3} + 2A_{31}\frac{u_3u_1}{h_3h_1} + 2A_{12}\frac{u_1u_2}{h_1h_2} = 0.$$

Jest to równanie linii krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych trójkątnych (prostopadłych) linii prostéj.

158. Taksamo, jak w artykule 93, znajdziemy następnie

$$(11)\, f(x'_1, x'_2, x'_3) f(x_1, x_2, x_3) - [x_1 f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x_2 f_2(x'_1 x'_2, x'_3) + x_3 f_3(x'_1, x'_2 x'_3)]^2 = 0$$

jako równanie pary stycznych do krzywéj (1), wyprowadzonych z punktu (x'_1, x'_2, x'_3). Wszczególności zaś równania par stycznych, wyprowadzonych z punktów $x'_2 = x'_3 = 0$, $x'_3 = x'_1 = 0$, $x'_1 = x'_2 = 0$, t. j. z wiérzchołków A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia, są odpowiednio

$$A_{33}x_2^2 + A_{22}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3 = 0,$$
$$A_{11}x_3^2 + A_{33}x_1^2 - 2A_{31}x_3x_1 = 0,$$
$$A_{22}x_1^2 + A_{11}x_2^2 - 2A_{12}x_1x_2 = 0.$$

Jeżeli $x_2 - \lambda_1 x_3 = 0$, $x_2 - \lambda'_1 x_3 = 0$; $x_3 - \lambda_2 x_1 = 0$, $x_3 - \lambda'_2 x_1 = 0$; $x_1 - \lambda_3 x_2 = 0$, $x_1 - \lambda'_3 x_2 = 0$ są równaniami stycznych tych par, to natenczas widocznie

$$\lambda_1\lambda'_1 = \frac{A_{22}}{A_{33}},\quad \lambda_2\lambda'_2 = \frac{A_{33}}{A_{11}},\quad \lambda_3\lambda'_3 = \frac{A_{11}}{A_{22}},$$

skąd wynika

$$\lambda_1\lambda'_1\lambda_2\lambda'_2\lambda_3\lambda'_3 = 1.$$

To równanie wyraża uwagi godną własność sześcioboku opisanego na krzywéj stopnia 2-go. A mianowicie, jeżeli A_1, B_3, A_2, B_1, A_3, B_2 są w tym porządku po sobie następującymi wiérzchołkami sześcioboku opisanego na krzywéj stopnia 2-go (A_1, A_2, A_3 są wiérzchołkami trójkąta odniesienia, a B_3, B_1, B_2 punktami przecięcia się stycznych A_1B_3, A_2B_3; A_2B_1, A_3B_1; A_3B_2, A_1B_2, wychodzących odpowiednio z A_1, A_2; A_2, A_3; A_3, A_1), to, wskutek znaczenia czynników λ (art. 27), równanie powyższe wyraża związek następujący:

$$(12)\quad \frac{\sin B_2A_1A_3 \,.\, \sin B_3A_1A_3 \,.\, \sin B_3A_2A_1 \,.\, \sin B_1A_2A_1 \,.\, \sin B_1A_3A_2 \,.\, \sin B_2A_3A_2}{\sin B_2A_1A_2 \,.\, \sin B_3A_1A_2 \,.\, \sin B_3A_2A_3 \,.\, \sin B_1A_2A_3 \,.\, \sin B_1A_3A_1 \,.\, \sin B_2A_3A_1} = 1.$$

Jeżeli podobnie wyprowadzimy takie wzory dla spółrzędnych u, zamiast x, to otrzymamy twierdzenie Carnot'a (art. 119); a mianowicie: jeżeli boki trójkąta A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 przecinają krzywą stopnia 2-go w punktach B_1, B'_1; B_2, B'_2; B_3, B'_3, wówczas

$$\frac{A_2B_1 . A_2B'_1 . A_3B_2 . A_3B'_2 . A_1B_3 . A_1B'_3}{A_3B_1 . A_3B'_1 . A_1B_2 . A_1B'_2 . A_2B_3 . A_2B'_3} = 1. \tag{12'}$$

159. Biegun prostéj w nieskończoności nazwaliśmy środkiem krzywéj stopnia 2-go. Oznaczmy spółrzędne środka przez (x_1^0, x_2^0, x_3^0) i porównajmy równanie biegunowéj tego punktu z równaniem (6) prostéj w nieskończoności; otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 &= \frac{\varkappa}{h_1}, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 &= \frac{\varkappa}{h_2}, \\ a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 &= \frac{\varkappa}{h_3}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Rozwiązawszy te równania względem x_1^0, x_2^0, x_3^0 i uwzględniwszy następnie związek $\frac{x_1^0}{h_1} + \frac{x_2^0}{h_2} + \frac{x_3^0}{h_3} = 1$, mieć będziemy

$$\frac{x_1^0}{\begin{vmatrix} a_{12}, a_{13}, \frac{1}{h_1} \\ a_{22}, a_{23}, \frac{1}{h_2} \\ a_{32}, a_{33}, \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}} = \frac{-x_2^0}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{13}, \frac{1}{h_1} \\ a_{21}, a_{23}, \frac{1}{h_2} \\ a_{31}, a_{33}, \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}} = \frac{x_3^0}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \frac{1}{h_1} \\ a_{21}, a_{22}, \frac{1}{h_2} \\ a_{31}, a_{32}, \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}} = \frac{\varkappa}{A} = \frac{1}{-\Delta}, \tag{14}$$

gdzie A i Δ mają znaczenie,określone wzorami (2) i (7). Stąd czytamy, że środek paraboli leży w odległości nieskończonéj; albowiém wtedy $\Delta = 0$ (art. 156).

Podstawmy wartości (14) za x_1^0, x_2^0, x_3^0 w równaniu pary stycznych, wychodzących z punktu (x_1^0, x_2^0, x_3^0); otrzymamy wówczas równanie pary asymptot. Ponieważ, wskutek (13) i (14),

$$f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \equiv x_1^0 f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_2^0 f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_3^0 f_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) =$$
$$= \varkappa\left(\frac{x_1^0}{h_1} + \frac{x_2^0}{h_2} + \frac{x_3^0}{h_3}\right) = \varkappa = -\frac{A}{\Delta},$$
$$x_1 f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_2 f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_3 f_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) =$$
$$= \varkappa\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3}\right) = -\frac{A}{\Delta}\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3}\right),$$

więc równanie asymptot krzywéj (1) jest następujące:

$$f(x_1, x_2, x_3) + \frac{A}{\Delta}\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3}\right)^2 = 0. \tag{15}$$

Asymptoty są do siebie prostopadłe, jeżeli (art. 156)

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{23}\cos A_1-2a_{31}\cos A_2-2a_{12}\cos A_3+\frac{A}{\Delta}\left[\frac{1}{h_1},\frac{1}{h_2},\frac{1}{h_3}\right]^2=0,$$

gdzie (art. 60)

$$\left[\frac{1}{h_1},\frac{1}{h_2},\frac{1}{h_3}\right]^2\equiv\frac{1}{h_1{}^2}+\frac{1}{h_2{}^2}+\frac{1}{h_3{}^2}-\frac{2\cos A_1}{h_2h_3}-\frac{2\cos A_2}{h_3h_1}-\frac{2\cos A_3}{h_1h_2}.$$

Atoli wyrażenie $\left[\frac{1}{h_1},\frac{1}{h_2},\frac{1}{h_3}\right]$ jest równe 0. Jakoż, oznaczywszy przez s_1, s_2, s_3 długości boków A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta odniesienia, mamy

$$s_1{}^2=s_2{}^2+s_3{}^2-2s_2s_3\cos A_1,\quad s_2{}^2=s_3{}^2+s_1{}^2-2s_3s_1\cos A_2,$$
$$s_3{}^2=s_1{}^2+s_2{}^2-2s_1s_2\cos A_3,$$

lub, uwzględniwszy, że $s_1h_1=s_2h_2=s_3h_3$,

$$\frac{1}{h_1{}^2}=\frac{1}{h_2{}^2}+\frac{1}{h_3{}^2}-\frac{2\cos A_1}{h_2h_3},\ \frac{1}{h_2{}^2}=\frac{1}{h_3{}^2}+\frac{1}{h_1{}^2}-\frac{2\cos A_2}{h_3h_1},\ \frac{1}{h_3{}^2}=\frac{1}{h_1{}^2}+\frac{1}{h_2{}^2}-\frac{2\cos A_3}{h_1h_2},$$

z dodania zaś tych trzech równań wypada $\left[\frac{1}{h_1},\frac{1}{h_2},\frac{1}{h_3}\right]^2=0$. Asymptoty zatym krzywéj (1) są do siebie prostopadłe, jeżeli

$$(16)\qquad a_{11}+a_{12}+a_{33}-2a_{23}\cos A_1-2a_{31}\cos A_2-2a_{12}\cos A_3=0.$$

To równanie więc, łącznie z nierównością $\Delta>0$ (art. 156), wyraża warunek, pod jakim równanie (1) przedstawia hiperbolę równoboczną.

160. Pozostaje jeszcze znaléść warunki, pod jakimi równanie (1) przedstawia koło. W tym celu oznaczmy (fig. 44) przez β_1, γ_1; γ_2, α_2; α_3, β_3 punkty, w których boki A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta odniesienia przecinają tę krzywą. Jeżeli krzywa jest kołem, wówczas mamy (art. 117)

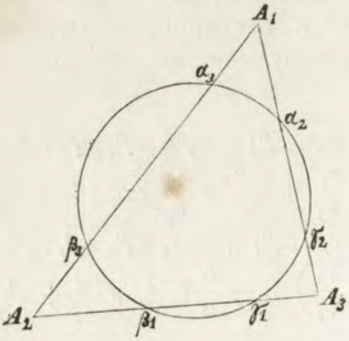


Fig. 44.

$$(17)\qquad\begin{cases}A_1\gamma_2\,.\,A_1\alpha_2=A_1\alpha_3\,.\,A_1\beta_3,\\ A_2\alpha_3\,.\,A_2\beta_3=A_2\beta_1\,.\,A_2\gamma_1,\\ A_3\beta_1\,.\,A_3\gamma_1=A_3\gamma_2\,.\,A_3\alpha_2.\end{cases}$$

Oznaczmy jeszcze przez p_2, r_2 odległości punktów α_2 i γ_2 od boku A_1A_2, a przez p_3, q_3 odległości punktów α_3, β_3 od boku A_3A_1 i pomnóżmy piérwszą z równości (17) przez $\sin^2 A_1$; wypadnie nam

$$p_2r_2=p_3q_3.$$

Podstawmy nadto $x_2=0$ w równaniu (1) i w równaniu $\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}=1$, a z równań tak otrzymanych wyrugujmy x_1. Otrzymamy wtedy równanie

$$\left(\frac{a_{11}}{h_3{}^2}+\frac{a_{33}}{h_1{}^2}-\frac{2a_{31}}{h_3h_1}\right)x_3{}^2+2\left(\frac{a_{31}}{h_1}-\frac{a_{11}}{h_3}\right)x_3+a_{11}=0,$$

którego pierwiastkami są p_2 i r_2; mamy zatym

$$p_2r_2=a_{11}:\left(\frac{a_{11}}{h_3{}^2}+\frac{a_{33}}{h_1{}^2}-\frac{2a_{31}}{h_3h_1}\right).$$

Taksamo znajdziemy

$$p_3q_3=a_{11}:\left(\frac{a_{11}}{h_2{}^2}+\frac{a_{22}}{h_1{}^2}-\frac{2a_{12}}{h_1h_2}\right).$$

Gdy zaś $p_2r_2=p_3p_3$, więc

$$\frac{a_{33}}{h_1{}^2}+\frac{a_{11}}{h_3{}^2}-\frac{2a_{31}}{h_3h_1}=\frac{a_{11}}{h_2{}^2}+\frac{a_{22}}{h_1{}^2}-\frac{2a_{12}}{h_1h_2}.$$

Postępując podobnie z dwiema pozostałymi równościami (17), znajdziemy

$$\frac{a_{22}}{h_3{}^2}+\frac{a_{33}}{h_2{}^2}-\frac{2a_{23}}{h_2h_3}=\frac{a_{33}}{h_1{}^2}+\frac{a_{11}}{h_3{}^2}-\frac{2a_{31}}{h_3h_1}=\frac{a_{11}}{h_2{}^2}+\frac{a_{22}}{h_1{}^2}-\frac{2a_{12}}{h_1h_2}. \tag{18}$$

Te warunki są nietylko konieczne, ale i wystarczające; albowiém jest ich dwa i oba są od siebie różne.

Równania warunkowe (18) można widocznie także tak pisać:

$$a_{22}s_3{}^2+a_{33}s_2{}^2-2a_{23}s_2s_3=a_{33}s_1{}^2+a_{11}s_3{}^2-2a_{31}s_3s_1=a_{11}s_2{}^2+a_{22}s_1{}^2-2a_{12}s_1s_2, \tag{18'}$$

albo

$$\begin{aligned} a_{22}\sin^2A_3+a_{33}\sin^2A_2-2a_{23}\sin A_2\sin A_3 \\ =a_{33}\sin^2A_1+a_{11}\sin^2A_3-2a_{31}\sin A_3\sin A_1 \\ =a_{11}\sin^2A_2+a_{22}\sin^2A_1-2a_{12}\sin A_1\sin A_2. \end{aligned} \tag{18''}$$

Podstawiając w równaniu (1) za a_{31} i a_{12} wartości, wynikające z równań warunkowych (18'), otrzymamy równanie koła w postaci

$$\begin{aligned}(2a_{23}s_2s_3-a_{33}s_2{}^2-a_{22}s_3{}^2)(s_1x_2x_3+s_2x_3x_1+s_3x_1x_2) \\ +(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)(a_{11}s_2s_3x_1+a_{22}s_3s_1x_2+a_{33}s_1s_2x_3)=0,\end{aligned}$$

lub

$$s_1x_2x_3+s_2x_3x_1+s_3x_1x_2+\frac{(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)(a_{11}s_2s_3x_1+a_{22}s_3s_1x_2+a_{33}s_1s_2s_3)}{2a_{23}s_2s_3-a_{33}s_2{}^2-a_{22}s_3{}^2}=0. \tag{19}$$

Weźmy pod uwagę jeszcze drugie koło,

$$s_1x_2x_3+s_2x_3x_1+s_3x_1x_2+\frac{(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)(b_{11}s_2s_3x_1+b_{22}s_3s_1x_2+b_{33}s_1s_2x_3)}{2b_{23}s_2s_3-b_{33}s_2{}^2-b_{22}s_3{}^2}=0 \tag{20}$$

i odejmijmy od siebie te dwa równania; otrzymamy

$$(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)\left(\frac{a_{11}s_2s_3x_1+a_{22}s_3s_1x_2+a_{33}s_1s_2x_3}{2a_{23}s_2s_3-a_{22}s_3^2-a_{33}s_2^2}-\frac{b_{11}s_2s_3x_1+b_{22}s_3s_1x_2+b_{33}s_1s_2x_3}{2b_{23}s_2s_3-b_{22}s_3^2-b_{33}s_2^2}\right)=0$$

t. j. równanie dwu prostych:

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0,$$

$$(21)\qquad \frac{a_{11}s_2s_3x_1+a_{22}s_3s_1x_2+a_{33}s_1s_2x_3}{2a_{23}s_2s_3-a_{22}s_3^2-a_{33}s_2^2}=\frac{b_{11}s_2s_3x_1+b_{22}s_3s_1x_2+b_{33}s_1s_2x_3}{2b_{23}s_2s_3-b_{22}s_2s_3^2-b_{33}s_2^2},$$

które przechodzą przez pary punktów, w których te dwa koła (19) i (20) się przecinają. Piérwsza z tych prostych jest prostą w nieskończoności (art. 61), przechodzącą przez dwa punkty kołowe urojone, a druga jest cięciwą spólną obu kół.

Wprowadźmy w równanie (21) wstawy kątów A_1, A_2, A_3 zamiast boków s_1, s_2, s_3; wtedy to równanie cięciwy spólnéj obu kół przywiedzie się do postaci

$$(22)\qquad \frac{a_{11}\sin A_2\sin A_3\,.\,x_1+a_{22}\sin A_3\sin A_1\,.\,x_2+a_{33}\sin A_1\sin A_2\,.\,x_3}{2a_{23}\sin A_2\sin A_3-a_{22}\sin^2A_3-a_{33}\sin^2A_2}$$
$$=\frac{b_{11}\sin A_2\sin A_3\,.\,x_1+b_{33}\sin A_3\sin A_1\,.\,x_2+b_{33}\sin A_1\sin A_2\,.\,x_3}{2b_{23}\sin A_2\sin A_3-b_{22}\sin^2A_3-b_{33}\sin^2A_2}.$$

RÓWNANIE KRZYWÉJ STOPNIA 2-GO, OPISANÉJ NA TRÓJKĄCIE.

161. Jeżeli krzywa

$$(1)\ f(x_1, x_2, x_3)\equiv a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

przechodzi przez wiérzchołki A_1, A_2, A_3 trójkąta odniesienia, t. j. przez punkty, których spółrzędne są $(h_1, 0, 0)$, $(0, h_2, 0)$ i $(0, 0, h_3)$, to natenczas jest

$$a_{11}h_1^2=0,\ a_{22}h_2^2=0,\ a_{33}h_3^2=0,\ \text{czyli}\ a_{11}=a_{22}=a_{33}=0;$$

a zatym

$$(2)\qquad a_1x_2x_3+a_2x_3x_1+a_3x_1x_2=0,\ \text{lub}\ \frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}=0$$

jest równaniem krzywéj stopnia 2-go, opisanéj na trójkącie, przyjętym za trójkąt odniesienia.

Równanie (2) można tak pisać:

$$(a_2x_3+a_3x_2)x_1+a_1x_2x_3=0;$$

ta krzywa zatym przechodzi (art. 145) także przez punkty, w których prosta $a_2x_3+a_3x=0$ przecina bok $x_2=0$ i $x_3=0$; a że ta prosta przecina te boki w punkcie A_1, więc równanie

$$a_2x_3+a_3x_2=0,\quad \text{czyli}\quad \frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=0$$

przedstawia styczną do krzywéj (2) w wiérzchołku A_1. Taksamo równania

$\frac{x_3}{a_3}+\frac{x_1}{a_1}=0$ i $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}=0$ przedstawiają styczne do krzywéj w punktach A_2 i A_3.

Te trzy styczne w wiérzchołkach trójkąta odniesienia przecinają się z bokami przeciwległymi tegoż trójkąta w trzech punktach, leżących na prostéj

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=0;$$

a zatym *trójkąt odniesienia i trójkąt, utworzony przez styczne w wiérzchołkach trójkąta odniesienia, są spółosiowymi, a więc i spółbiegunowymi.* To twierdzenie jest przypadkiem szczególnym twierdzenia art. 157.

162. Niech (x'_1, x'_2, x'_3), (x''_1, x''_2, x''_3), (x'''_1, x'''_2, x'''_3) będą spółrzędnymi trzech punktów danych B_1, B_2, B_3; te punkty razem z trzema punktami A_1, A_2, A_3 (wiérzchołkami trójkąta odniesienia) leżą na téj saméj krzywéj stopnia 2-go, jeżeli

$$\frac{a_1}{x'_1}+\frac{a_2}{x'_2}+\frac{a_3}{x'_3}=0,\quad \frac{a_1}{x''_1}+\frac{a_2}{x''_2}+\frac{a_3}{x''_3}=0 \quad\text{i}\quad \frac{a_1}{x'''_1}+\frac{a_2}{x'''_2}+\frac{a_3}{x'''_3}=0,$$

skąd wynika

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x'_1}, & \frac{1}{x'_2}, & \frac{1}{x'_3} \\ \frac{1}{x''_1}, & \frac{1}{x''_2}, & \frac{1}{x''_3} \\ \frac{1}{x'''_1}, & \frac{1}{x'''_2}, & \frac{1}{x'''_3} \end{vmatrix}=0.$$

To równanie warunkowe można łatwo przywiéść do postaci:

$$\begin{vmatrix} x''_1x'''_1, & x''_2x'''_3, & x''_1x'''_3 \\ x'''_2x'_1, & x'''_2x'_2, & x'''_3x'_2 \\ x'_1x''_3, & x'_3x''_2, & x'_3x''_3 \end{vmatrix}=0.$$

Na mocy tego można dowiéść twierdzenia, znanego pod nazwą twierdzenia Pascal'a: *w sześcioboku wpisanym w krzywą stopnia 2-go trzy pary boków przeciwległych przecinają się w trzech punktach, leżących na jednéj prostéj.* — Jakoż, niech $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ będzie danym sześciobokiem, wpisanym w krzywą stopnia 2-go. Obrawszy trójkąt $A_1A_2A_3$ za trójkąt odniesienia i oznaczywszy przez (x'_1, x'_2, x'_3), (x''_1, x''_2, x''_3), (x'''_1, x'''_2, x'''_3) spółrzędne wiérzchołków B_1, B_2, B_3, mamy

$\frac{x_2}{x'''_2}=\frac{x_3}{x'''_3}$ i $\frac{x_1}{x'_1}=\frac{x_2}{x'_2}$ jako równania boków A_1B_3 i B_1A_3,

$\frac{x_3}{x'_3}=\frac{x_1}{x'_1}$ i $\frac{x_2}{x''_2}=\frac{x_3}{x''_3}$ „ „ „ A_2B_1 i B_2A_1,

$\frac{x_1}{x''_1}=\frac{x_2}{x''_2}$ i $\frac{x_3}{x'''_3}=\frac{x_1}{x'''_1}$ „ „ „ A_3B_2 i B_3A_2.

Dla punktów zatym przecięcia się tych trzech par boków przeciwległych mamy odpowiednio:

$$\frac{x_1}{x'''_2 x'_1} = \frac{x_2}{x'''_2 x'_2} = \frac{x_3}{x'''_3 x'_2},$$

$$\frac{x_1}{x'_1 x''_3} = \frac{x_2}{x'_3 x''_2} = \frac{x_3}{x'_3 x''_3},$$

$$\frac{x_1}{x''_1 x'''_1} = \frac{x_2}{x''_2 x'''_3} = \frac{x_3}{x''_1 x'''_3}.$$

Te trzy punkty leżą na jednéj prostéj, pod warunkiem, aby

$$\begin{vmatrix} x'''_2 x'_1, & x'''_2 x'_2, & x'''_3 x'_2 \\ x'_1 x''_3, & x'_3 x''_2, & x'_3 x''_3 \\ x''_1 x'''_1, & x''_2 x'''_3, & x''_1 x'''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ten zaś warunek jest dopełniony, albowiém punkty B_1, B_2, B_3 razem z punktami A_1, A_2, A_3 leżą na téj saméj krzywéj stopnia 2-go.

163. Równanie krzywéj stopnia 2-go, opisanéj na trójkącie odniesienia, we spółrzędnych linii prostéj, jest (art. 157)

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0, & a_3, & a_2, & \frac{u_1}{h_1} \\ a_3, & 0, & a_1, & \frac{u_2}{h_2} \\ a_2, & a_1, & 0, & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1}, & \frac{u_2}{h_2}, & \frac{u_3}{h_3}, & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{czyli}$$

$$(3')\qquad a_1^2\frac{u_1^2}{h_1^2} + a_2^2\frac{u_2^2}{h_2^2} + a_3^2\frac{u_3^2}{h_3^2} - a_2 a_3\frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} - a_3 a_1\frac{u_3 u_1}{h_3 h_1} - a_1 a_2\frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} = 0.$$

Ostatnie równanie można jeszcze tak pisać:

$$(3'')\qquad \left(\frac{a_1 u_1}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a_2 u_2}{h_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a_3 u_3}{h_3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Krzywa (2) jest więc parabolą, jeżeli (art. 156)

$$(4)\qquad \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a_2}{h_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a_3}{h_3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

a elipsą, lub hiperbolą wrazie, jeżeli lewa strona wzoru (4) jest odpowiednio dodatną, lub ujemną.

164. Krzywa (2) jest zaś kołem, jeżeli (art. 160)

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{a_3}{\sin A_3},$$

a zatym równanie

$$(5) \qquad x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 = 0$$

przedstawia koło, opisane na trójkącie $A_1A_2A_3$. — Łatwo spostrzéc, że także równanie

$$(6) \quad x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 + (x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)(\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3) = 0$$

przedstawia koło; warunki bowiem (18″) w art. 160 są oba dopełnione.

Na mocy tego można udowodnić, że *koło, przechodzące przez środki trzech boków trójkąta, przechodzi zarazem przez spodki trzech jego wysokości.*

Znajdźmy naprzód równanie koła, które przechodzi przez środki B_1, B_2, B_3 boków A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta odniesienia. W punkcie B_1 mamy $x_1 = 0$, $x_2 : x_3 = \sin A_3 : \sin A_2$. Wstawiając te wartości w równanie koła (6), otrzymamy: $\sin A_1 + 2(\varkappa_2 \sin A_3 + \varkappa_3 \sin A_2) = 0$, lub z uwagi, że $\sin A_1 = \sin(A_2 + A_3) = \sin A_2 \cos A_3 + \cos A_2 \sin A_3$,

$$\sin A_3(2\varkappa_2 + \cos A_2) + \sin A_2(2\varkappa_3 + \cos A_3) = 0.$$

Taksamo wyrażając, że koło (6) przechodzi przez B_2 i B_3, znajdziemy

$$\sin A_1(2\varkappa_3 + \cos A_3) + \sin A_3(2\varkappa_1 + \cos A_1) = 0,$$
$$\sin A_2(2\varkappa_1 + \cos A_1) + \sin A_1(2\varkappa_2 + \cos A_2) = 0.$$

Stąd wynika

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{2}\cos A_1, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{2}\cos A_2, \quad \varkappa_3 = -\frac{1}{2}\cos A_3.$$

A zatym

$$(7) \quad x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 - \frac{1}{2}(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$. (x_1 \cos A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) = 0$$

jest równaniem koła, przechodzącego przez środki boków B_1, B_2, B_3.

Toż równanie (7) przedstawia także koło, które przechodzi przez spodki C_1, C_2, C_3 prostopadłych z A_1, A_2, A_3 na boki przeciwległe A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Jakoż, w punkcie C_1 mamy $x_1 = 0$ i $x_2 : x_3 = \cos A_3 : \cos A_2$. Wstawiając te wartości w równanie (6), otrzymamy

$$\cos A_3(2\varkappa_2 + \cos A_2) + \cos A_2(2\varkappa_3 + \cos A_3) = 0,$$

i taksamo, biorąc pod uwagę punkty C_2 i C_3, znajdziemy

$$\cos A_1(2\varkappa_3 + \cos A_3) + \cos A_3(2\varkappa_1 + \cos A_1) = 0,$$
$$\cos A_2(2\varkappa_1 + \cos A_1) + \cos A_1(2\varkappa_2 + \cos A_2) = 0.$$

Stąd wynika znowu $\varkappa_1 = -\frac{1}{2}\cos A_1$, $\varkappa_2 = -\frac{1}{2}\cos A_2$, $\varkappa_3 = -\frac{1}{2}\cos A_3$. Podstawiając te wartości w równanie (6), otrzymujemy równanie (7).

Okażemy teraz, że *koło, przechodzące przez środki* B_1, B_2, B_3 *trzech boków* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *trójkąta, a więc i przez spodki* C_1, C_2, C_3 *prostopadłych na te boki z wiérzchołków* A_1, A_2, A_3, *przechodzi zarazem przez środki* D_1, D_2, D_3 *trzech* *prostych* OA_1, OA_2, OA_3, *które łączą punkt przecięcia się tych prostopadłych z wiérzchołkami trójkąta.*

Jakoż, koło (7), przechodząc przez spodki C_1, C_2, C_3 prostopadłych, spuszczonych w trójkącie OA_2A_3 z wiérzchołków O, A_2, A_3 na przeciwległe boki A_2A_3, A_3O, OA_2, przechodzi także przez środki B_1, D_3, D_2 tych boków. Biorąc taksamo pod uwagę trójkąty OA_3A_1 i OA_1A_2, znajdziemy, że koło (7), przechodzące przez C_1, C_2, C_3, przechodzi także odpowiednio przez B_2, D_1, D_3 i przez B_3, D_2, D_1. Koło (7) przechodzi zatym przez 9 punktów: B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 i D_1, D_2, D_3 i dlatego nazywa się kołem dziewięciu punktów.

RÓWNANIE KRZYWÉJ STOPNIA 2-GO, WPISANÉJ W TRÓJKĄT.

165. Krzywa stopnia 2-go, dana przez równanie

(1) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0,$$

wtedy dotyka boku A_2A_3 trójkąta odniesienia, jeżeli to równanie dla $x_1 = 0$ daje dwie wartości równe na $x_2 : x_3$, a zatym, jeżeli trójmian

$$a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3$$

jest kwadratem zupełnym, t. j. jeżeli $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$. Podobnie znajdziemy, że do krzywéj (1) boki A_3A_1 i A_1A_2, są styczne, jeżeli odpowiednio $a_{31}^2 = a_{33}a_{11}$ i $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. — Stąd wypada, że równanie krzywéj stopnia 2-go wpisanéj w trójkąt odniesienia, winno mieć wogóle kształt:

(2) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \pm 2\sqrt{a_{22}a_{33}}\,x_2x_3 \pm \sqrt{a_{33}a_{11}}\,x_3x_1 \pm \sqrt{a_{11}a_{22}}\,x_1x_2 = 0.$$

Jeżeli w równaniu (2) wszystkie pierwiastki przyjmiemy jako dodatne, lub jeden jako dodatny, a dwa pozostałe jako ujemne, to natenczas równanie (2) przedstawiać będzie prostą podwójną, albowiém sprowadzi się odpowiednio do:

$$(x_1\sqrt{a_{11}} + x_2\sqrt{a_{22}} + x_3\sqrt{a_{33}})^2 = 0, \quad (x_1\sqrt{a_{11}} + x_2\sqrt{a_{22}} - x_3\sqrt{a_{33}})^2 = 0,$$
$$(x_1\sqrt{a_{11}} - x_2\sqrt{a_{22}} + x_3\sqrt{a_{33}})^2 = 0, \quad (-x_1\sqrt{a_{11}} + x_2\sqrt{a_{22}} + x_3\sqrt{a_{33}})^2 = 0.$$

Jeżeli więc równanie (2) ma przedstawiać krzywą stopnia 2-go, to, kładąc $a_{11} = a_1^2$, $a_{22} = a_2^2$, $a_{33} = a_3^2$, miéć je będziemy w jednéj z cztérech postaci:

(3) $$\begin{cases} a_1^2x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0, \\ a_1^2x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 + 2a_3a_1x_3x_1 + 2a_1a_2x_1x_2 = 0, \\ a_1^2x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 + 2a_1a_2x_1x_2 = 0, \\ a_1^2x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_2a_3x_2x_3 + 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

które możemy przedstawić inaczéj, pisząc

(3′) $$\begin{cases} (a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ (-a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ (a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (-a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ (a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (-a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

Każde z tych równań przedstawia krzywą stopnia 2-go, wpisaną w trójkąt odniesienia. Przy założeniu $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, piérwsze z równań (3) lub (3′) przedstawia krzywą wpisaną wewnętrznie, albowiém tylko wtedy $a_1x_1 > 0$, $a_2x_2 > 0$, $a_3x_3 > 0$, gdy tymczasem trzy równania pozostałe przedstawiają jednocześnie krzywe stopnia 2-go wpisane zewnętrznie i odpowiednio przeciwległe wiérzchołkom A_1, A_2 i A_3 trójkąta odniesienia. — Zauważmy jeszcze, że ostatnie trzy równania (3) lub (3′) powstają z równania piérwszego przez zmianę znaku odpowiedniego ze spółczynników a_1, a_2 i a_3.

Równania (3) wyrażają uwagi godną własność trójkąta opisanego na krzywéj stopnia 2-go. Jakoż, pisząc piérwsze z równań (3) w postaci

$$(a_2x_2 - a_3x_3)^2 + a_1x_1(a_1x_1 - 2a_2x_2 - 2a_3x_3) = 0,$$

widzimy (art. 145), że proste

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_1x_1 - 2a_2x_2 - 2a_3x_3 = 0$$

są stycznymi do krzywéj, a prosta

$$a_2x_2 - a_3x_3 = 0$$

jest odpowiednią cięciwą styczności. Ta zaś prosta, jak to widać z jéj równania, przechodzi zarazem przez wiérzchołek A_1, a przeto, łączy wiérzchołek A_1 z punktem styczności B_1 boku przeciwległego A_2A_3. Taksamo znajdziemy, że równania

$$a_3x_3 - a_1x_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_1x_1 - a_2x_2 = 0$$

przedstawiają proste, łączące odpowiednio wiérzchołki A_2 i A_3 z punktami styczności B_2 i B_3 boków przeciwległych A_3A_1 i A_1A_2. Ponieważ suma równań tych trzech prostych A_1B_1, A_2B_2 i A_3B_3 jest tożsamościowo równa 0, przeto te trzy proste przecinają się w jednym punkcie. A zatym:

Proste, łączące wiérzchołki trójkąta, opisanego na krzywéj stopnia 2-go, z punktami styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.

Oznaczywszy przez C_1, C_2, C_3 punkty, w których proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 przecinają krzywą stopnia 2-go, inne, niż punkty B_1, B_2, B_3; wtedy równania stycznych do krzywéj w punktach C_1, C_2, C_3 są odpowiednio:

$$a_1x_1 - 2a_2x_2 - 2a_3x_3 = 0,\quad a_2x_2 - 2a_3x_3 - 2a_1x_1 = 0,\quad a_3x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = 0.$$

Te styczne przecinają się z odpowiednimi bokami przeciwległymi

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x = 0$$

w trzech punktach, leżących na jednéj prostéj

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

albowiém

$$\begin{aligned} 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) &\equiv 3a_1x_1 - (a_1x_1 - 2a_2x_2 - 2a_3x_3) \\ &\equiv 3a_2x_2 - (a_2x_2 - 2a_3x_3 - 2a_1x_1) \\ &\equiv 3a_3x_3 - (a_3x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2). \end{aligned}$$

166. Równanie krzywéj stopnia 2-go, wpisanéj w trójkąt odniesienia, we spółrzędnych linii prostéj jest

$$
(4)\qquad \begin{vmatrix} a_1^2, & -a_1a_2, & -a_1a_3, & \frac{u_1}{h_1} \\ -a_2a_1, & a_2^2, & -a_2a_3, & \frac{u_2}{h_2} \\ -a_3a_1, & -a_3a_2, & a_3^2, & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1}, & \frac{u_2}{h_2}, & \frac{u_3}{h_3}, & 0 \end{vmatrix} = 0;
$$

rozwinąwszy wyznacznik i uprościwszy, otrzymamy

$$
(4')\qquad \frac{a_1u_2u_3}{h_2h_3} + \frac{a_1u_3u_1}{h_3h_1} + \frac{a_3u_1u_2}{h_1h_2} = 0, \text{ albo}
$$

$$
(4'')\qquad \frac{a_1h_1}{u_1} + \frac{a_2h_2}{u_2} + \frac{a_3h_3}{u_3} = 0.
$$

Wychodząc zaś z równania ostatniego, znajdziemy taksamo, jak w art. 162,

$$
\begin{vmatrix} \frac{1}{u'_1}, & \frac{1}{u'_2}, & \frac{1}{u'_3} \\ \frac{1}{u''_1}, & \frac{1}{u''_2}, & \frac{1}{u''_3} \\ \frac{1}{u'''_1}, & \frac{1}{u'''_2}, & \frac{1}{u'''_3} \end{vmatrix} = 0,
$$

jako warunek, pod którym trzy proste (u'_1, u'_2, u'_3), (u''_1, u''_2, u''_3), (u'''_1, u'''_2, u'''_3) razem z bokami trójkąta odniesienia są stycznymi do krzywéj stopnia 2-go. Następnie taksamo, jak poprzednio, dowiéść możemy następującego twierdzenia:

Trzy proste, łączące trzy pary wiérzchołków przeciwległych sześcioboku opisanego na krzywéj stopnia 2-go, przecinają się w jednym punkcie.

To twierdzenie, podane przez Brianchon'a, daje się wyprowadzić metodą wzajemnych biegunowych z twierdzenia Pascal'a (art. 162). Jakoż, krzywéj stopnia 2-go S odpowiada, jako biegunowo wzajemna, krzywa także stopnia 2-go Σ. Punktom A_1, B_3, A_2, B_1, A_3, B_2 na krzywéj S odpowiadają styczne α_1, β_3, α_2, β_1, α_3, β_2 do krzywéj Σ, a cięciwom A_1B_3, B_3A_1, A_2B_1, B_1A_3, A_3B_2, B_2A_1, czyli bokom sześcioboku wpisanego w S, odpowiadają punkty $(\alpha_1\beta_3)$, $(\beta_3\alpha_2)$, $(\alpha_2\beta_1)$, $(\beta_1\alpha_3)$, $(\alpha_3\beta_2)$, $(\beta_2\alpha_1)$, czyli wiérzchołki sześcioboku opisanego na krzywéj Σ. Punktom przecięcia się par boków przeciwległych A_1B_3, A_3B_1; A_2B_1, A_1B_2; A_3B_2, A_2B_3 odpowiadają, jako biegunowe, proste łączące pary wiérzchołków przeciwległych $(\alpha_1\beta_3)$, $(\alpha_3\beta_1)$; $(\alpha_2\beta_1)$, $\alpha_1\beta_2)$; $(\alpha_3\beta_2)$, $(\alpha_2\beta_3)$. Ponieważ poprzedzające trzy punkty leżą na jednéj prostéj, przeto ostatnie trzy proste przecinają się w jednym punkcie, biegunie tamtéj prostéj. Twierdzenie Brianchon'a jest więc i w ten sposób dowiedzione.

Z wzoru (4'') czytamy jeszcze, że prosta

(5) $$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0$$

jest styczną do krzywéj, wpisanéj w trójkąt odniesienia, jeżeli

(6) $$\frac{a_1}{\varkappa_1} + \frac{a_2}{\varkappa_2} + \frac{a_3}{\varkappa_3} = 0.$$

167. Krzywa, przedstawiona przez równanie

(7) $$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2a_2 a_3 x_2 x_3 - a_3 a_1 x_3 x_1 - 2a_1 a_2 x_1 x_2 = 0,$$

jest kołem, jeżeli (art. 160)

$$a_2^2 s_3^2 + a_3^2 s_2^2 + 2a_2 a_3 s_2 s_3 = a_3^2 s_1^2 + a_1^2 s_3^2 + 2a_3 a_1 s_3 s_1 = a_1^2 s_2^2 + a_2^2 s_1^2 + 2a_1 a_2 s_1 s_2,$$

a przeto

(8) $$a_2 s_3 + a_3 s_2 = \pm (a_3 s_1 + a_1 s_3) = \pm (a_1 s_2 + a_2 s_1),$$

lub $a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2 = \pm (a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_3) = \pm (a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1)$.

Cztéry równania warunkowe (8) odpowiadają cztérém kołom, a mianowicie kołu wpisanemu wewnętrznie i trzem kołom wpisanym zewnętrznie. Biorąc znaki wyższe, mamy

$$a_1 s_3 - a_2 s_3 + a_3(s_1 - s_2) = 0,$$
$$a_1 s_2 + a_2(s_1 - s_3) - a_3 s_2 = 0,$$

skąd wynika

$$\begin{aligned} a_1 : a_2\, a_3 &= s_1(s_2 + s_3 - s_1) : s_2(s_3 + s_1 - s_2) : s_3(s_1 + s_2 - s_3) \\ &= \frac{(s_1+s_2+s_3)(s_2+s_3-s_1)}{s_2 s_3} : \frac{(s_1+s_2+s_3)(s_3+s_1-s_2)}{s_3 s_1} : \frac{(s_1+s_2+s_3)(s_1+s_2-s_3)}{s_1 s_2} \\ &= \cos^2\frac{A_1}{2} : \cos^2\frac{A_2}{2} : \cos^2\frac{A_3}{2}. \end{aligned}$$

A zatym

(9) $$x_1^2 \cos^4\frac{A_1}{2} + x_2^2 \cos^4\frac{A_2}{2} + x_3^2 \cos^4\frac{A_3}{2} - 2x_2 x_3 \cos^2\frac{A_2}{3} \cos^2\frac{A_3}{2} - \\ - 2x_3 x_1 \cos^2\frac{A_3}{2} \cos^2\frac{A_1}{2} - 2x_1 x_2 \cos^2\frac{A_1}{2} \cos^2\frac{A_2}{2} = 0,$$

albo

(9') $$\cos\frac{A_1}{2}\sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2}\sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2}\sqrt{x_3} = 0$$

jest równaniem koła, wpisanego wewnętrznie w trójkąt odniesienia. Trzy pozostałe równania warunkowe (8) dadzą odpowiednio

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\frac{A_1}{2}\sqrt{-x_1} + \sin\frac{A_1}{2}\sqrt{x_2} + \sin\frac{A_2}{2}\sqrt{x_3} = 0,\\ &\sin\frac{A_1}{2}\sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2}\sqrt{-x_2} + \sin\frac{A_3}{2}\sqrt{x_3} = 0,\\ &\sin\frac{A_1}{2}\sqrt{x_1} + \sin\frac{A_2}{2}\sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2}\sqrt{-x_3} = 0,\end{aligned}\right.$$

jako równania kół, wpisanych zewnętrznie w trójkąt odniesienia.

168. Możemy teraz dowiéść, że *koło dziewięciu punktów* (art. 164) *jest styczne do każdego z cztérech kół wpisanych w trójkąt.* W tym celu dość okazać, że spólna cięciwa koła dziewięciu punktów i któregokolwiek z cztérech kół, wpisanych w trójkąt, jest styczną do obu kół.

Weźmy pod uwagę np. koło, wpisane wewnętrznie w trójkąt (9), i koło dziewięciu punktów, którego równanie można przywiéść do postaci

$$x_1^2\sin A_1\cos A_1 + x_2^2\sin A_2\cos A_2 + x_3^2\sin A_3\cos A_3 - x_2x_3\sin A_1 - x_3x_1\sin A_2 - x_1x_2\sin A_2 = 0.$$

Podług wzoru (22) w art. 160 równanie cięciwy spólnéj tych dwu kół jest

$$\frac{\sin A_1\sin A_2\sin A_3\,(x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3)}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3 + \sin A_2\cos A_2\sin^2 A_3 + \sin A_3\cos A_3\sin^2 A_2}$$
$$= \frac{x_1\cos^4\frac{A_1}{2}\sin A_2\sin A_3 + x_2\cos^4\frac{A_2}{2}\sin A_3\sin A_1 + x_3\cos^4\frac{A_3}{2}\sin A_1\sin A_2}{2\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^2\frac{A_3}{2}\sin A_2\sin A_3 + \cos^4\frac{A_2}{2}\sin^2 A_3 + \cos^4\frac{A_3}{2}\sin^2 A_2},$$

albo, z uwagi, że

$$\begin{aligned}&\sin A_1\sin A_2\sin A_3 + \sin A_2\cos A_2\sin^2 A_3 + \sin A_3\cos A_3\sin^2 A_2\\ &\quad = \sin A_1\sin A_2\sin A_3 + \sin A_2\sin A_3(\sin A_2\cos A_3 + \cos A_2\sin A_3)\\ &\quad = \sin A_1\sin A_2\sin A_3 + \sin A_2\sin A_3\sin(A_2 + A_3) = 2\sin A_1\sin A_2\sin A_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^2\frac{A_3}{2}\sin A_2\sin A_3 + \cos^4\frac{A_2}{2}\sin^2 + \cos^4\frac{A_3}{2}\sin^2 A_2\\ &\qquad = 4\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^2\frac{A_3}{2}\sin^2\frac{A_2 + A_3}{2} = 4\cos^2\frac{A_1}{2}\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^2\frac{A_3}{2},\end{aligned}$$

$$x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3 = \frac{\sin A_1\sin A_2\sin A_3\left(\dfrac{x_1\cos^4\frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + \dfrac{x_2\operatorname{cso}^4\frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + \dfrac{x_3\cos^4\frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right)}{2\cos^2\frac{A_1}{2}\cos^2\frac{A_2}{2}\cos^2\frac{A_3}{2}},$$

albo nakoniec

$$(x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3)\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}\cos\frac{A_3}{2}$$
$$= 4\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2}\left(\frac{x_1\cos^4\frac{A_1}{2}}{\sin A_1} + \frac{x_2\cos^4\frac{A_2}{2}}{\sin A_2} + \frac{x_3\cos^4\frac{A_3}{2}}{\sin A_3}\right).$$

Można uprościć to równanie. Wyraźmy wstawy i dostawy połów kątów A_1, A_2, A_3 i całych kątów przez długości boków s_1, s_2, s_3. Kładąc jednocześnie $s_1+s_2+s_3=2s$, mieć będziemy, po uskutecznieniu łatwych uproszczeń, naprzód

$$(x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3)\frac{s^2}{4\Delta}=\frac{x_1\cos^4\frac{A_1}{2}}{\sin A_1}+\frac{x_2\cos^4\frac{A_2}{2}}{\sin A_2}+\frac{x_3\cos^4\frac{A_3}{2}}{\sin A_3},$$

gdzie $\Delta=\sqrt{s(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$; następnie

$$x_1\left[\cos A_1-\frac{2(s-s_1)^2}{s_2s_3}\right]+x_2\left[\cos A_2-\frac{2(s-s_2)^2}{s_3s_1}\right]+x_3\left[\cos A_3-\frac{2(s-s_3)^2}{s_1s_2}\right]=0$$

i nakoniec

$$\frac{x_1(s_3-s_1)(s_1-s_2)}{s_2s_3}+\frac{x_2(s_1-s_2)(s_2-s_3)}{s_3s_1}+\frac{x_3(s_2-s_3)(s_3-s_1)}{s_1s_2}=0, \text{ lub}$$

$$\frac{s_1x_1}{s_2-s_3}+\frac{s_2x_2}{s_3-s_1}+\frac{s_3x_3}{s_1-s_2}=0,$$

które jeszcze można przywieść do postaci

$$(11)\qquad \frac{x_1\cos\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{1}{2}(A_2-A_3)}+\frac{x_2\cos\frac{A_2}{2}}{\sin\frac{1}{2}(A_3-A_1)}+\frac{x_3\cos\frac{A_3}{2}}{\sin\frac{1}{2}(A_1-A_2)}=0.$$

Łatwo okazać, że prosta (11) jest styczną do koła, wpisanego wewnętrznie w trójkąt odniesienia, t. j. do koła (11). Jakoż, warunek styczności prostéj (11) do koła (9) sprowadza się, podług wzoru (6), do

$$\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}(A_2-A_3)+\cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}(A_3-A_1)+\cos\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}(A_1-A_2)=0,$$

czyli do

$$\sin\frac{1}{2}(A_2+A_3)\sin\frac{1}{2}(A_2-A_3)+\sin\frac{1}{2}(A_3+A_1)\sin\frac{1}{2}(A_3-A_1)+$$
$$+\sin\frac{1}{2}(A_1+A_2)\sin\frac{1}{2}(A_1-A_2)=0,$$

a ten warunek jest dopełniony, na mocy znanéj z trygonometryi własności trójkąta.

Taksamo można okazać, że spólna cięciwa koła dziewięciu punktów i któregokolwiek z trzech kół, wpisanych zewnętrznie w trójkąt, jest spólną styczną tych kół, a tym samym uzupełnić dowód twierdzenia, powyżéj wypowiedzianego.

Tego twierdzenia dowiódł piérwszy Feuerbach.

RÓWNANIE KRZYWÉJ STOPNIA 2-GO, ODNIESIONE DO TRÓJKĄTA Z SOBĄ SAMYM SPRZĘŻONEGO.

169. Zapomocą przekształcenia linijowego, czyli przez odniesienie do innego trójkąta, można równanie ogólne

$$(1) \qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

sprowadzić do postaci

$$(2) \qquad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$$

nieskończenie wielu sposobami, albowiém wzory, służące do zamiany spółrzędnych trójkątnych na inne trójkątne, zawiérają 9 spółczynników, które poddajemy tylko 3 warunkom, mianowicie, żeby trzy spółczynniki a_{23}, a_{31} i a_{12} w równaniu przekształconym były równe zeru.

Nadając równaniu (2) jednę z trzech postaci

$$(x_2\sqrt{a_2} + x_3\sqrt{-a_3})(x_2\sqrt{a_2} - x_3\sqrt{-a_3}) + a_1x_1^2 = 0,$$
$$(x_3\sqrt{a_3} + x_1\sqrt{-a_1})(x_3\sqrt{a_3} - x_1\sqrt{-a_1}) + a_2x_2^2 = 0,$$
$$(x_1\sqrt{a_1} + x_2\sqrt{-a_2})(x_1\sqrt{a_1} - x_2\sqrt{-a_2}) + a_3x_3^2 = 0,$$

widzimy, że boki trójkąta odniesienia są cięciwami styczności odpowiednich par stycznych do krzywéj, wyprowadzonych z wiérzchołków, tym bokom przeciwległych, czyli, że każdy bok trójkąta odniesienia jest biegunową wiérzchołka przeciwległego. Trójkąt, w którym każdy bok jest biegunową wiérzchołka przeciwległego, t. j. trójkąt biegunowy (art. 90, 98), nazywamy (art. 157) trójkątem z sobą samym sprzężonym. A zatym *trójkąt, do którego równanie* (2) *jest odniesione, jest trójkątem z sobą samym sprzężonym.*

Krzywa (2) jest elipsą, hiperbolą, lub parabolą, według tego, czy wyrażenie (art. 156)

$$a_1a_2a_3\left(\frac{1}{a_1h_1^2} + \frac{1}{a_2h_2^2} + \frac{1}{a_3h_3^2}\right)$$

jest dodatne, ujemne, lub równe 0. Wrazie, gdy jeden lub dwa ze spółczynników a_1, a_2, a_3 są równe 0, równanie (2) przedstawia oczywiście albo dwie proste, albo jednę prostą podwójną. Jeżeli więc równanie (2) ma przedstawiać krzywą stopnia 2-go, to żaden z tych spółczynników nie może być 0. Stąd wynika, że równanie (2) przedstawia parabolę, jeżeli

$$(3) \qquad \frac{1}{a_1h_1^2} + \frac{1}{a_2h_2^2} + \frac{1}{a_3h_3^2} = 0, \quad \text{albo} \quad \frac{s_1^2}{a_1} + \frac{s_2^2}{a_2} + \frac{s_3^2}{a_3} = 0.$$

W przypadku, kiedy wyrażenie $\frac{1}{a_1h_1^2} + \frac{1}{a_2h_2^2} + \frac{1}{a_3h_3^2}$ jest od 0 różne, można przyjąć, że jest ono $=1$; albowiém, jeżeliby posiadało wartość od 1 różną, to, pomnożywszy równanie (2) przez liczbę odpowiednią, możemy otrzymać nowe równanie, z którego spółczynników zbudowane wyrażenie tegoż kształtu byłoby równe 1. W przypuszczeniu, że

(4) $$\frac{1}{a_1h_1^2}+\frac{1}{a_2h_2^2}+\frac{1}{a_3h_3^2}=1$$

(jeżeli nie $=0$), równanie (2) przedstawiać będzie elipsę, jeżeli dwa ze spółczynników a_1, a_2, a_3 są ujemne, a jeden jest dodatny, hiperbolę zaś, gdy jeden z tych spółczynników jest ujemny, a dwa są dodatne.

170. Kładąc $a_1=\frac{1}{\alpha_1^2}$, $a_2=-\frac{1}{\alpha_2^2}$, $a_3=-\frac{1}{\alpha_3^2}$, gdzie α_1, α_2, α_3 oznaczają liczby rzeczywiste, wrazie, gdy

(5) $$\frac{\alpha_1^2}{h_1^2}-\frac{\alpha_2^2}{h_2^2}-\frac{\alpha_3^2}{h_3^2}=1,$$

otrzymujemy

(6) $$f(x_1, x_2, x_3)\equiv\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}-\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=0,$$

jako równanie elipsy, odniesione do trójkąta z sobą samym sprzężonego.

Podstawmy w funkcyi $f(x_1, x_2, x_3)$ za x_1, x_2, x_3 spółrzędne wiérzchołków A_1, A_2, A_3; wskutek tego

$$\text{dla } A_1: f(h_1, 0, 0)=\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}>0,$$
$$\text{dla } A_2: f(0, h_2, 0)=-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2}<0,$$
$$\text{dla } A_3: f(0, 0, h_3)=-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}<0.$$

Ponieważ funkcyja f, jako całkowita, jest funkcyją ciągłą, przeto ta funkcyja, zmieniając swój znak tak przy przejściu od A_1 do A_2, jak i od A_1 do A_3, staje się raz równą 0. To dowodzi, że każdy z dwu boków A_1A_2 i A_1A_3 przecina elipsę (6) w jednym punkcie. W każdym punkcie boku A_2A_3 jest $x_1=0$, a zatym funkcyja f ma wartości $-\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}<0$ w każdym punkcie na A_2A_3; to dowodzi, że bok A_2A_3 nie przecina krzywéj.

Każda krzywa $f=0$ roskłada płaszczyznę na oddzielne (skończone, lub nieskończenie wielkie) pola. Skoro z każdego punktu jednego pola można przejść do innego punktu tego samego pola po linii nieprzerwanéj, nie przekraczając przytym krzywéj, przeto dla wszystkich punktów jednego pola funkcyja f posiada ten sam znak. A zatym o dwu punktach, dla których funkcyja f posiada znaki jednakowe, można powiedziéć, że oba leżą *z téj saméj strony krzywéj* $f=0$.

Według tego określenia, wiérzchołki A_2 i A_3 leżą z téj saméj strony, a wiérzchołek A_1 leży po stronie przeciwnéj elipsy (6). Spółrzędne środka elipsy (6) są

$$x_1^0=\frac{\alpha_1^2}{h_1},\ x_2^0=-\frac{\alpha_2^2}{h_2},\ x_3^0=-\frac{\alpha_3^2}{h_3};$$

ten punkt leży zatym w kącie wiérzchołkiem przeciwległym z kątem A_1 i z téj saméj strony elipsy, co A_1, albowiém, wskutek (5), mamy

$$f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{\alpha_1^2}{h_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{h_2^2} - \frac{\alpha_3^2}{h_3^2} = 1 > 0.$$

Jeżeli środek elipsy zbliża się do wiérzchołka A_1, to bok A_2A_3, jako biegunowa punktu A_1, oddala się do nieskończoności i spółrzędna x_1 staje się dla każdego punktu elipsy nieskończenie wielką. Jeżeli więc równaniu elipsy (6) mają czynić zadość wartości skończone na x_2 i x_3, to α_1 razem z x_1 wzrasta do nieskończoności, ale tak, że stosunek $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}$ dąży do granicy skończonéj γ^2. Gdy więc środek elipsy razem się zejdzie z wiérzchołkiém A_1, to równanie (6) zamieni się na

$$\frac{x_2^2}{\alpha_2^2\gamma^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2\gamma^2} = 1. \tag{7}$$

Weźmy jeszcze A_1A_2 za oś x-ów, a A_1A_3 za oś y-ów i oznaczmy przez x, y spółrzędne punktu elipsy względem tych osi; ponieważ widocznie

$$x_2 = x\sin A_1, \quad x_3 = y\sin A_1,$$

przeto związek (7), po podstawieniu tych wartości, przechodzi na

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{\alpha_2^2\gamma^2}{\sin^2 A_1}, \quad b^2 = \frac{\alpha_3^2\gamma^2}{\sin^2 A_1}. \tag{8}$$

Równanie (8) przedstawia elipsę, któréj dwie średnice sprzężone są wzięte za osi spółrzędnych. Jest to oczywiste; albowiém, gdy jeden z wiérzchołków trójkąta odniesienia, A_1, razem się zeszedł ze środkiem elipsy, to dwa jego boki A_1A_2 i A_1A_3 stały się dwiema średnicami sprzężonymi (art. 106).

Dajmy następnie, że $a_1 = -\frac{1}{\alpha_1^2}$, $a_2 = \frac{1}{\alpha_2^2}$, $a_3 = \frac{1}{\alpha_3^2}$, tudzież $-\frac{\alpha_1^2}{h_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{h_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{h_3^2} = 1$, gdzie α_1, α_2, α_3 oznaczają liczby rzeczywiste. Równanie

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv -\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \tag{9}$$

będzie wtedy przedstawiało hiperbolę, odniesioną do trójkąta z sobą samym sprzężonego.

Postępując taksamo, jak piérwéj, znajdziemy, że boki A_1A_2 i A_1A_3 przecinają krzywą (9), a bok A_2A_3 téj krzywéj nie przecina, tudzież, że środek hiperboli i wiérzchołki A_2, A_3 leżą w jednym i tym samym polu, gdy tymczasem wiérzchołek A_1 leży w polu, od tamtego różnym.

Jeżeli środek zejdzie się z jednym z wiérzchołków, z którymi wogóle, nie przekraczając krzywéj, zejść się może, t. j. z A_2 lub z A_3, np. z A_2, to bok A_3A_1 oddali się do nieskończoności i spółrzędna x_2 stanie się nieskończoną. Jeżeli więc, pomimo tego, równaniu (9) mają czynić zadość wartości skończone na x_3 i x_1, to także α_2 stać się winno nieskończonym, ale tak, aby stosunek $\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}$ był równy liczbie skończonéj γ^2. Dwa pozostałe boki A_2A_1 i A_2A_3 będą wtedy dwiema średnicami sprzężonymi, a równanie hiperboli przywiedzie się do

$$(10) \qquad \frac{x_1^2}{\alpha_1^2\gamma^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2\gamma^2} = 1.$$

Biorąc nakoniec A_2A_1 za oś x-ów, a A_2A_3 za oś y-ów, i bacząc na to, że $x_1 = x\sin A_1$, $x_3 = y\sin A_1$, otrzymamy

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{przy} \quad a^2 = \frac{\alpha_1^2\gamma^2}{\sin^2 A_1}, \quad b^2 = \frac{\alpha_3^2\gamma^2}{\sin^2 A_1},$$

jako równanie hiperboli, odniesione do pary średnic sprzężonych, jako osi spółrzędnych.

171. Weźmy pod uwagę jeszcze wszczególności równanie

$$(12) \qquad x_2^2 + x_3^2 = e^2 x_1^2;$$

nadto załóżmy, że boki A_1A_2 i A_1A_3 trójkąta odniesienia są do siebie prostopadłe. Aby równanie ogólne (1) przywiéść do postaci (12) zapomocą przekształcenia linijowego, potrzeba 9 spółczynników przekształcenia poddać 4 warunkom, mianowicie, ażeby nowe spółczynniki a_{23}, a_{31}, a_{12} były 0, a a_{22} równe a_{33}. Prostopadłość zaś boków A_1A_2 i A_1A_3 daje jeszcze 5-ty związek między spółczynnikami przekształcenia. Sprowadzenie więc równania ogólnego (1) do postaci (12) jest zawsze możebne i to nieskończenie wielu sposobami.

Ponieważ $x_2^2 + x_3^2$ jest kwadratem odległości punktu na krzywéj od wierzchołka A_1, a x_1^2 kwadratem odległości tego punktu od boku A_2A_3, więc równanie (12) wyraża znaną własność ogniska A_1 i kierownicy A_2A_3 krzywéj stopnia 2-go.

Krzywa (12) jest elipsą, hiperbolą, lub parabolą, według tego, czy wyrażenie (art. 169)

$$\frac{1}{e^2h_1^2} - \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}\right)$$

jest dodatne, ujemne, lub $=0$.

Ponieważ, z powodu prostopadłości boków A_1A_2 i A_1A_3, $h_2^2 = s_3^2$, $h_3^2 = s_2^2$ i ponieważ $s_2^2 + s_3^2 = s_1^2$, przeto krzywa (12) będzie elipsą, hiperbolą, lub parabolą, według tego, czy wyrażenie

$$\frac{1}{e^2} - \frac{h_1^2 s_1^2}{s_2^2 s_3^2} \equiv \frac{1}{e^2} - 1, \quad \text{gdyż} \quad h_1 s_1 = s_2 s_3,$$

jest dodatne, ujemne, lub 0, a więc według tego,

$$\text{czy} \quad e < 1, \quad \text{czy} \quad e > 1, \quad \text{czytéż} \quad e = 1.$$

Tego samego dowiedliśmy w rozdziale X. Skoro z założenia prosta A_1A_3 jest prostopadłą do A_1A_2, a A_2 jest biegunem prostéj A_1A_3, zaś A_3 jest biegunem prostéj A_1A_2, zatym mamy twierdzenie: *biegunowa* (A_1A_2 *lub* A_1A_3) *punktu* (A_3 *lub* A_2) *na kierownicy* (A_2A_3) *jest prostopadłą do prostéj* (A_1A_3 *lub* A_1A_2), *która ten punkt łączy z ogniskiem* (A_1). To twierdzenie udowodniliśmy także w rozdziale poprzedzającym.

172. Krzywa (12) będzie kołem, jeżeli (art. 160)

$$a_2s_3^2 + a_3s_2^2 = a_3s_1^2 + a_1s_3^2 = a_1s_2^2 + a_2s_1^2,$$

czyli
$$a_1s_3^2 - a_2s_3^2 + a_3(s_1^2 - s_2^2) = 0,$$
$$a_1s_2^2 + a_2(s_1^2 - s_3^2) - a_3s_2^2 = 0.$$

Te dwa równania dają:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 : a_3 &= s_1^2(s_2^2 + s_3^2 - s_1^2) : s_2^2(s_3^2 + s_1^2 - s_2^2) : s_3^2(s_1^2 + s_2^2 - s_3^2) \\ &= 2s_1\frac{s_2^2 + s_3^2 - s_1^2}{2s_2s_3} : 2s_2\frac{s_3^2 + s_1^2 - s_2^2}{2s_3s_1} : 2s_3\frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2s_1s_2} \\ &= 2\sin A_1\cos A_1 : 2\sin A_2\cos A_2 : 2\sin A_3\cos A_3 \\ &= \sin 2A_1 : \sin 2A_2 : \sin 2A_3. \end{aligned}$$

A zatym

$$(13) \qquad x_1^2\sin 2A_1 + x_2^2\sin 2A_2 + x_3^2\sin 2A_3 = 0$$

jest równaniem koła, odniesionym do trójkąta z sobą samym sprzężonego.

173. Na zakończenie tego rozdziału okażemy, że *płaszczyzna przecina stożek według linii krzywéj stopnia 2-go.*

Jakoż, weźmy pod uwagę stożek prosty; niech O będzie jego środkiem, a OA_1 (fig. 45) jego osią. Poprowadźmy przez O dwie proste OA_2 i OA_3 prostopadłe do siebie i do prostéj OA_1, i oznaczmy przez θ_1, θ_2, θ_3 kąty, które z prostopadłą do płaszczyzny $A_1A_2A_3$ czynią proste OA_1, OA_2, OA_3. Mamy okazać, że płaszczyzna $A_1A_2A_3$ przecina stożek według krzywéj stopnia 2-go. Niech P będzie punktem krzywéj przecięcia. Spuśćmy z P prostopadłe PP_1, PP_2, PP_3 na płaszczyzny A_2OA_3, A_3OA_1, A_1OA_2 i prostopadłe PQ_1, PQ_2, PQ_3 na boki A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trójkąta $A_1A_2A_3$; oznaczmy nadto

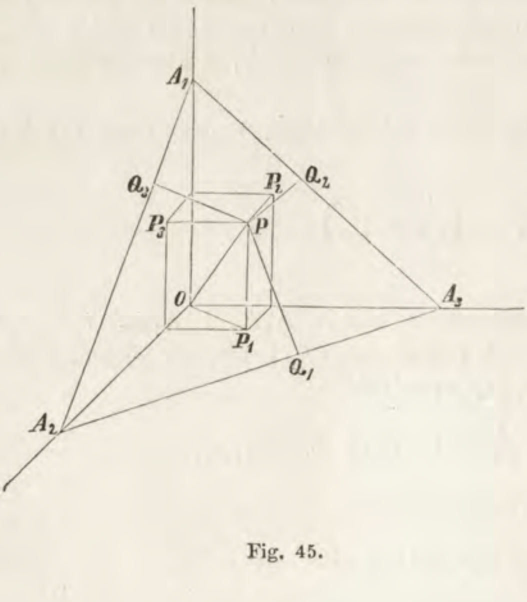


Fig. 45.

$PQ_1 = x_1, PQ_2 = x_2, PQ_3 = x_3,$

wskutek czego:

$$PP_1 = x_1 \sin\theta_1,\ \ PP_2 = x_2 \sin\theta_2,\ \ PP_3 = x_3 \sin\theta_3.$$

Jeżeli $\omega = \angle A_1OP$, to

$$OP_1 = PP_1 \operatorname{tg}\omega;$$

a że

$$OP_1^2 = PP_2^2 + PP_3^2,$$

jest zatym

$$PP_2^2 + PP_3^2 - PP_1^2 \operatorname{tg}^2\omega = 0.$$

Podstawiając w tym równaniu powyższe wartości za PP_1, PP_2, PP_3, otrzymamy

$$x_2^2 \sin^2\theta_2 + x_3^2 \sin^2\theta_3 - x_1^2 \sin^2\theta_1 \operatorname{tg}^2\omega = 0.$$

A zatym krzywa, według której płaszczyzna $A_1A_2A_3$ przecina stożek, jest krzywą stopnia 2-go. Z tego powodu krzywe stopnia 2-go zowią się pospolicie przecięciami stożkowymi.

ĆWICZENIA.

(133). Znaléść spółrzędne środka krzywéj, danéj przez równanie $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$.

(134). Znaléść spółrzędne środka krzywéj, danéj przez równanie $(a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$.

(135). Sprowadzić równanie stycznéj do krzywéj, danéj przez równanie $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$, w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3) — do postaci

$$\left(\frac{a_1x_1}{x'^2_1} + \frac{a_2x_2}{x'^2_2} + \frac{a_3x_3}{x'^2_3}\right) = 0.$$

(136). Znaléść równanie stycznéj do krzywéj $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$, równoległéj do boku A_2A_3 trójkąta odniesienia, i równanie cięciwy styczności.

(137). Znaléść równania normalnych do krzywéj $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$ w wierzchołkach trójkąta odniesienia i okazać, że te normalne przecinają się w jednym punkcie, jeżeli $\frac{a_1}{s_1}(a_2^2 - a_3^2) + \frac{a_2}{s_2}(a_3^2 - a_1^2) + \frac{a_3}{s_3}(a_1^2 - a_2^2) = 0$.

(138). Jeżeli R oznacza promień koła opisanego na trójkącie odniesienia, a ρ promień koła, względem którego trójkąt odniesienia jest z sobą samym sprzężony, okazać, że $\rho^2 + 4R^2 \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 = 0$.

(139). Dowiéść, że miejsce środka krzywéj wpisanéj w trójkąt i przechodzącéj przez punkt dany, jest krzywą stopnia 2-go. Jakie powinno być położenie danego punktu względem trójkąta, aby miejsce środka było kołem, jak również, aby to miejsce było hiperbolą równoboczną.

(140). Jeżeli trójkąt jest z sobą samym sprzężony względem szeregu krzywych stopnia 2-go, przechodzących przez punkt stały, to ich środki leżą na krzywéj, opisanéj na tym trójkącie. Wyznaczyć położenie punktu stałego tak, aby miejsce było kołem.

(141). Punkt porusza się po stałéj prostéj; znaléść miejsce przecięcia się jego biegunowych względem dwu danych krzywych stopnia 2-go.

(142). Znaléść równanie pary stycznych do krzywéj stopnia 2-go w punktach, w których tę krzywą przecina bok $x_1 = 0$ trójkąta odniesienia.

(143). Znaléść równanie krzywéj stopnia 2-go, do któréj każda z pięciu prostych $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0$ i $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ jest styczną.

(144). Znaléść równanie krzywéj stopnia 2-go, wpisanéj w trójkąt tak, że środki jego boków są punktami styczności.

(145). Okazać, że prosta $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ jest styczną spólną do trzech krzywych $x_1^2 = 4x_2x_3$, $x_2^2 = 4x_3x_1$, $x_3^2 = 4x_1x_2$.

(146). Przez punkt dany (x'_1, x'_2, x'_3) prowadzimy trzy krzywe stopnia 2-go tak, aby do każdéj z nich dwa odpowiednie boki trójkąta odniesienia były stycznymi w punktach przecięcia się z pozostałym jego bokiem: okazać, że styczna do któréjkolwiek z tych trzech krzywych w punkcie danym tworzy pęk harmoniczny z prostymi, które go łączą z wiérzchołkami trójkąta.

(147). Jeżeli $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ są trzema przekątnymi czworoboku zupełnego i jeżeli te przekątne przecinają się po dwie w punktach a_1, a_2, a_3, to trójkąt $a_1a_2a_3$ jest z sobą samym sprzężony względem trzech krzywych stopnia 2-go, przechodzących odpowiednio przez 4 punkty A_2, A'_2, A_3, A'_3; A_3, A'_3, A_1, A'_1; A_1, A'_1, A_2, A'_2.

(148). Znaléść średnicę krzywéj $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$ sprzężoną z kierunkiem, który z kierunkami A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 boków trójkąta odniesienia czyni kąty γ_1, γ_2, γ_3, dla których $\sin\gamma_1 = \lambda_1$, $\sin\gamma_2 = \lambda_2$, $\sin\gamma_3 = \lambda_3$.

(149). Znaléść równanie stycznych do krzywéj $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$, których cięciwą styczności jest prosta $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 = 0$.

ROZDZIAŁ XII.

O UKŁADACH LINIJ KRZYWYCH STOPNIA 2-GO.

PĘK I SZEREG LINIJ STOPNIA 2-GO.

173. Równanie ogólne linii krzywéj stopnia 2-go, czyto we spółrzędnych punktu (Descartes'a, lub trójkątnych), czytéż we spółrzędnych linii prostéj (Plücker'a, lub trójkątnych) zawiéra w sobie sześć wyrazów, a więc i sześć spółczynników. Położenie i rodzaj téj linii zależy jedynie od wartości pięciu stosunków między tymi spółczynnikami; albowiém jéj równanie nie zmieni się, gdy wszystkie spółczynniki zmienimy w tym samym stosunku, a więc gdy wszystkie wyrazy przez jeden spółczynnik podzielimy. Stąd wypada, że *zawsze istnieje jedyna krzywa stopnia 2-go, przechodząca przez pięć punktów danych, albo styczna do pięciu prostych danych.*

Jakoż, wyrażając, że krzywa

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

przechodzi przez każdy z pięciu punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), mamy pięć równań warunkowych:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5 + 2a_{23}y_5 + a_{33} = 0, \end{aligned}$$

które dają — mówiąc wogólności — jeden tylko układ wartości na stosunki $a_{11} : a_{12} : a_{22} : a_{13} : a_{23} : a_{33}$. Podstawiając te wartości w równanie (1) otrzymamy

$$\begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2, & x_1y_1, & y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2, & x_5y_5, & y_5^2, & x_5, & y_5, & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

jako równanie linii krzywéj stopnia 2-go, przechodzącéj przez pięć punktów danych. Ponieważ prosta przecina liniją krzywą stopnia 2-go tylko w dwu punktach, przeto równanie (2) nie przedstawia krzywéj właściwéj, jeżeli z pięciu danych punktów więcéj niż dwa leżą na jednéj prostéj. Tak np., jeżeliby trzy leżały na jednéj prostéj, to ta prosta razem z prostą, przechodzącą przez dwa pozostałe punkty, tworzyłaby jedyną liniją stopnia 2-go, przez pięć tych punktów przeprowadzić się dającą. Taksamo można dowiéść, że istnieje tylko jedna krzywa stopnia 2-go, styczna do pięciu danych prostych. Atoli, jeżeli ta krzywa ma być krzywą właściwą, to przez jeden punkt nie może przechodzić więcéj niż dwie z tych prostych; albowiém z jednego punktu można do krzywéj stopnia 2-go wyprowadzić tylko dwie styczne. Jeżeliby więc np. trzy proste przecinały się w jednym punkcie, to ten punkt wraz z punktem przecięcia się dwu pozostałych prostych tworzyłby parę punktów, jako jedyną liniją klasy 2-éj, styczną do pięciu danych prostych.

174. *Dwie krzywe stopnia 2-go przecinają się — mówiąc wogólności — w cztérech punktach.* Albowiém równania tych dwu krzywych, uważając w nich spółrzędne bieżące x i y jako niewiadome, posiadają cztéry spólne rozwiązania. — Taksamo *dwie krzywe stopnia 2-go posiadają — mówiąc wogólności — cztéry styczne spólne.* — Stąd wynika, że *istnieje nieskończenie wiele krzywych stopnia 2-go, przechodzących przez cztéry punkty, spólne dwu danym krzywym stopnia 2-go, jak również nieskończenie wiele krzywych stopnia 2-go, do których są stycznymi cztéry proste, styczne spólne do dwu danych krzywych stopnia 2-go.*

Niech

(3) $$f=0 \quad \text{i} \quad g=0$$

będą równaniami dwu danych krzywych stopnia 2-go we spółrzędnych punktu, lub we spółrzędnych linii prostéj, i oznaczmy przez λ liczbę stałą lecz nieoznaczoną; równanie

(4) $$f+\lambda g=0$$

przedstawia wtedy jakąkolwiek krzywą stopnia 2-go, która przechodzi przez punkty spólne dwu danym krzywym (lub do któréj odpowiednio są stycznymi styczne spólne do tychże dwu krzywych). Jakoż, równaniu (4) czynią zadość wszystkie cztéry układy wartości na spółrzędne, które jednocześnie czynią zadość obu równaniom (3); a zatym krzywa (4) przechodzi przez punkty spólne krzywym (3) [do krzywéj (4) są stycznymi styczne spólne do krzywych (3)]. Na λ zaś można odnaléść zawsze taką wartość, przy któréj równanie (4) przedstawiałoby krzywą, przechodzącą przez dowolny piąty punkt, na krzywych (3) nie leżący [styczną do jakiéjkolwiek piątéj prostéj, nie stycznéj do obu krzywych (3)]. Albowiém, jeżeli oznaczymy przez f' i g' wartości funkcyj f i g, po podstawieniu w nich za spółrzędne bieżące spółrzędnych punktu piątego (lub piątéj prostéj), miéć będziemy

$$f'+\lambda g'=0, \quad \text{skąd} \quad \lambda=-\frac{f'}{g'}.$$

A zatym równanie (4) z liczbą nieoznaczoną λ przedstawia jakąkolwiek krzywą stopnia 2-go, przechodzącą przez cztéry punkty spólne dwu danym krzywym (3) (lub odpowiednio styczną do cztérech stycznych spólnych do tychże krzywych).

Zbiór linij krzywych stopnia 2-go, które przechodzą przez cztéry punkty spólne dwu danym krzywym stopnia 2-go, nazwiemy pękiem linij krzywych stopnia 2-go, a te cztéry punkty wiérzchołkami pęku. Zbiór zaś linij krzywych stopnia 2-go, stycznych do cztérech stycznych spólnych do dwu danych krzywych stopnia 2-go, nazwiemy szeregiem linij krzywych stopnia 2-go, a te cztéry styczne podstawami szeregu. Według tego określenia, równanie (4) z liczbą nieoznaczoną λ przedstawiać będzie wszelkie krzywe jednego pęku lub jednego szeregu, według tego, czy to równanie jest wyrażone we spółrzędnych punktu, czyteż we spółrzędnych linii prostéj.

175. *W jednym pęku stopnia 2-go znajdują się — mówiąc wogólności — trzy pary prostych.*

Jakoż, niech będzie

$$f \equiv \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = 0, \quad g \equiv \sum_i \sum_k b_{ik} x_i x_k = 0; \tag{5}$$

równanie

$$f + \lambda g \equiv \sum_i \sum_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_i x_k = 0 \tag{6}$$

przedstawia parę prostych, jeżeli wyróżnik wielomianu $f + \lambda g$ jest równy 0, t. j. jeżeli liczba λ jest pierwiastkiem równania stopnia 3-go

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11}, & a_{12} + \lambda b_{12}, & a_{13} + \lambda b_{13} \\ a_{21} + \lambda b_{21}, & a_{22} + \lambda b_{22}, & a_{23} + \lambda b_{23} \\ a_{31} + \lambda b_{31}, & a_{32} + \lambda b_{32}, & a_{33} + \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Równanie (7) posiada trzy pierwiastki; istnieją przeto trzy pary prostych w pęku stopnia 2-go.

Trzy punkty przecięcia się prostych każdéj z tych trzech par są po dwa sprzężone względem każdéj krzywéj pęku, a więc te trzy punkty są wiérzchołkami trójkąta z sobą samym sprzężonego względem każdéj krzywéj pęku.

Jakoż, oznaczając przez λ' i λ'' dwa różne od siebie pierwiastki równania (7), a przez (x'_1, x'_2, x'_3) i (x''_1, x''_2, x''_3) spółrzędne punktów, w których się przecinają pary prostych, odpowiadające tym dwu pierwiastkom, i rozumiejąc przez f_1, f_2, f_3 i g_1, g_2, g_3 połowy pochodnych cząstkowych funkcyj f i g względem x_1, x_2, x_3, a przez $f'_1, f''_1, \ldots, g'_1, g''_1$, wartości tych pochodnych, odpowiadające wartościom $x_1 = x'_1, \ldots, x_1 = x''_1, \ldots$, mieć będziemy (art. 80)

$$f'_1 + \lambda' g'_1 = 0, \quad f'_2 + \lambda' g'_2 = 0, \quad f'_3 + \lambda' g'_3 = 0,$$
$$f''_1 + \lambda'' g''_1 = 0, \quad f''_2 + \lambda'' g''_2 = 0, \quad f''_3 + \lambda'' g''_3 = 0.$$

Pomnóżmy trzy piérwsze równania odpowiednio przez x''_1, x''_2, x''_3 i dodajmy do siebie iloczyny; otrzymamy

$$x''_1 f'_1 + x''_2 f'_2 + x''_3 f'_3 + \lambda'(x''_1 g'_1 + x''_2 g'_2 + x''_3 g'_3) = 0,$$

lub

$$x'_1f''_1+x'_2f''_2+x'_3f''_3+\lambda'(x'_1g''_1+x'_2g''_2+x'_3g''_3)=0.$$

Taksamo trzy ostatnie równania, gdy je pomnożymy odpowiednio przez x'_1, x'_2, x'_3 i iloczyny do siebie dodamy, dadzą

$$x'_1f''_1+x'_2f''_2+x'_3f''_3+\lambda''(x'_1g''_1+x'_2g''_2+x'_3g''_3)=0.$$

Odejmując zaś od siebie te dwa równania, otrzymujemy

$$(\lambda'-\lambda'')(x'_1g''_1+x'_2g''_2+x'_3g''_3)=0,$$

czyli

$$x'_1g''_1+x'_2g''_2+x'_3g''_3=0,$$

gdyż, z założenia, $\lambda'-\lambda''$ jest różne od 0; jest więc także

$$x'_1f''_1+x'_2f''_2+x'_3f''_3=0.$$

A zatym, mamy także, przy wszelkiéj wartości na λ,

$$x'_1f''_1+x'_2f''_2+x'_3f''_3+\lambda(x'_1g''_1+x'_2g''_2+x'_3g''_3)=0, \quad \text{czyli}$$
$$x'_1(f''_1+\lambda g''_1)+x'_2(f''_2+\lambda g''_2)+x'_3(f''_3+\lambda g''_3)=0,$$

co dowodzi, że dwa punkty (x'_1, x'_2, x'_3) i (x''_1, x''_2, x''_3) są punktami sprzężonymi względem każdéj linii pęku (6). Trzy więc punkty, w których się przecinają trzy pary prostych, należące do tego pęku, są wiérzchołkami trójkąta z sobą samym sprzężonego względem każdéj linii pęku.

Wynika to także bespośrednio z własności harmonicznych czworoboku zupełnego. Jakoż, oznaczmy przez P_3, P_5, P_7, P_6 (fig. 25 w art. 89) cztéry wiérzchołki pęku (6), przedłużmy w czworoboku $P_3P_5P_7P_6$ pary boków przeciwległych P_3P_5, P_6P_7 i P_3P_6, P_5P_7 aż do przecięcia się tychże odpowiednio w punktach P_1 i P_8 i poprowadźmy przekątne P_3P_7, P_5P_6, które się przecinają w punkcie P_9: punkty P_1, P_8, P_9 są wiérzchołkami trójkąta z sobą samym sprzężonego względem każdéj linii stopnia 2-go, przechodzącéj przez cztéry punkty P_3, P_5, P_7, P_6, a więc względem każdéj linii stopnia 2-go jednego pęku, mającego te cztéry punkty za wiérzchołki. Do tego pęku należą także trzy pary prostych: P_3P_5, P_6P_7; P_3P_6, P_5P_7; P_3P_7, P_5P_6, przecinające się odpowiednio w P_1, P_8, P_9.

Stosując te wypadki do układu spółrzędnych linii prostéj, otrzymamy twierdzenie następujące: *w każdym szeregu linij stopnia 2-go znajdują się trzy pary punktów; proste, łączące punkty każdéj z tych trzech par, są bokami trójkąta z sobą samym sprzężonego względem każdéj linii szeregu.*

176. Oznaczmy przez A i B wyróżniki wielomianów f i g, t. j.

(8) $$A\equiv\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_{33}, \quad B\equiv\Sigma\pm b_{11}b_{22}b_{33},$$

oraz

(9) $$\begin{cases} \Theta\equiv\Sigma\pm b_{11}a_{22}a_{33}+\Sigma\pm a_{11}b_{22}a_{33}+\Sigma\pm a_{11}a_{22}b_{33}, \\ \Theta'\equiv\Sigma\pm a_{11}b_{22}b_{33}+\Sigma\pm b_{11}a_{22}b_{33}+\Sigma\pm b_{11}b_{22}a_{33}; \end{cases}$$

natenczas równanie (7) przywiedzie się do

$$(10) \qquad \Delta(\lambda) \equiv A + \Theta\lambda + \Theta'\lambda^2 + B\lambda^3 = 0.$$

Spółczynniki tego równania są niezmiennikami względem wszelkiego przekształcenia linijowego. Co do spółczynników A i B, jest to widoczna (art. 74). Ażeby okazać, że także spółczynniki Θ i Θ' są niezmiennikami, uważmy, że równanie (10) wyznacza te wartości na λ, przy których równanie $f + \lambda g = 0$ przedstawia dwie proste. Jeżeli więc wielomiany f i g wskutek przekształcenia linijowego o module L przejdą odpowiednio na F i G, to wówczas równanie $f + \lambda g = 0$ przejdzie na $F + \lambda G = 0$, a to ostatnie równanie będzie przedstawiało dwie proste przy tychże samych wartościach na λ. Stąd wynika, że równanie stopnia 3-go, powstałe z przyrównania do zera wyróżnika wielomianu $F + \lambda G$, powinno posiadać też same pierwiastki, co równanie (10). A zatym, jeżeli

$$A_1 + \Theta_1\lambda + \Theta'_1\lambda^2 + B_1\lambda^3 = 0$$

jest tym równaniem, to

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{\Theta'_1}{\Theta'} = \frac{B_1}{B}.$$

A że (art. 74) $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = L^2$, przeto także $\Theta_1 = L^2\Theta$ i $\Theta'_1 = L^2\Theta'$. Spółczynniki Θ i Θ' są więc niezmiennikami. Te niezmienniki nazywamy niezmiennikami spólnymi wielomianów f i g, albo téż **niezmiennikami pęku** $f + \lambda g = 0$.

Znaczenie gieometryczne niezmienników Θ i Θ' wynika z następujących uwag.

Odnieśmy równanie krzywéj $f = 0$ do jakiegokolwiek trójkąta z sobą samym sprzężonego względem téj krzywéj, wtedy

$$f \equiv a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0,$$

wskutek czego, według piérwszego wzoru (9),

$$\Theta = a_2a_3b_{11} + a_3a_1b_{22} + a_1a_2b_{33}.$$

A zatym $\Theta = 0$, jeżeli $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$, t. j. jeżeli równanie krzywéj $g = 0$ ma postać:

$$g \equiv b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_2 = 0,$$

a więc, jeżeli krzywa $g = 0$ jest opisana na tym trójkącie odniesienia. A zatym: *niezmiennik Θ ma wartość 0, jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem krzywéj $f = 0$ jest wpisany w krzywą $g = 0$.* Taksamo można dowiéść, że *niezmiennik Θ' ma wartość 0, jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem krzywéj $g = 0$ jest wpisany w krzywą $f = 0$.*

Przyjmijmy trójkąt z sobą samym sprzężony względem $g = 0$ jako trójkąt odniesienia; wtedy

$$g \equiv b_1 x_1{}^2 + b_2 x_2{}^2 + b_3 x_3{}^2 = 0,$$

a przeto

$$\Theta = A_{11} b_1 + A_{22} b_2 + A_{33} b_3,$$

gdzie A_{11}, A_{22}, A_{33} oznaczają ilości dołączone do elementów a_{11}, a_{22}, a_{33} wyznacznika, przedstawiającego wyróżnik A. Stąd czytamy, że będzie też $\Theta = 0$, jeżeli $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$, a więc (art. 166) jeżeli krzywa $f = 0$ jest wpisana w trójkąt odniesienia. A zatym: *niezmiennik Θ jest równy 0, jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem krzywéj $g = 0$ jest opisany na krzywéj $f = 0$,* i taksamo: *niezmiennik Θ' jest równy 0, jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem krzywéj $f = 0$ jest opisany na krzywéj $g = 0$.*

177. W artykule 174 okazaliśmy, że dwie linije stopnia 2-go przecinają się w cztérech punktach. Rozbiór równania (10) pokaże, kiedy te punkty przecięcia są rzeczywiste, a kiedy urojone.

Uważmy naprzód, że pierwiastki równania (10) są wszystkie trzy rzeczywiste, lubtéż dwa zespolone, według tego, czy wyrażenie

$$\Theta^2 \Theta'^2 + 18AB\Theta\Theta' - 27A^2B^2 - 4A\Theta'^3 - 4B\Theta^3 \tag{11}$$

jest ujemne, czytéż dodatne. W piérwszym przypadku wszystkie trzy wiérzchołki trójkąta z sobą samym sprzężonego względem obu krzywych $f = 0$ i $g = 0$ są punktami rzeczywistymi, a więc i sam trójkąt jest rzeczywisty; w drugim zaś przypadku tylko jeden wiérzchołek tego trójkąta jest rzeczywisty, a dwa pozostałe są punktami urojonymi sprzężonymi, a więc ten trójkąt posiada tylko jeden wiérzchołek i jeden bok (przeciwległy temu wiérzchołkowi, art. 83) rzeczywisty.

a. Przypuśćmy naprzód, że ma miejsce przypadek piérwszy. Biorąc trójkąt z sobą samym sprzężony względem obu krzywych $f = 0$ i $g = 0$, w tym przypadku rzeczywisty, za trójkąt odniesienia, miéć będziemy równania tych krzywych w postaciach:

$$f \equiv a_1 x_1{}^2 + a_2 x_2{}^2 + a_3 x_3{}^2 = 0 \quad \text{i} \quad g \equiv b_1 x_1{}^2 + b_2 x_2{}^2 + b_3 x_3{}^2 = 0,$$

a zatym równanie (10) sprowadzi się do

$$(a_1 + \lambda b_1)(a_2 + \lambda b_2)(a_3 + \lambda b_3) = 0.$$

Ponieważ pierwiastki tego równania są

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \qquad \lambda_2 = -\frac{a_2}{b_2}, \qquad \lambda_3 = -\frac{a_3}{b_3},$$

więc równania trzech par prostych należących do pęku $f + \lambda g = 0$, czyli przechodzących przez cztéry punkty przecięcia się krzywych $f = 0$ i $g = 0$, będą:

$$b_1 f - a_1 g = 0, \quad b_2 f - a_2 g = 0, \quad b_3 f - a_3 g = 0, \quad \text{czyli}$$

$$(b_1 a_2 - a_1 b_2) x_2{}^2 - (b_3 a_1 - a_3 b_1) x_3{}^2 = 0,$$
$$(b_2 a_3 - a_2 b_3) x_3{}^2 - (b_1 a_2 - a_1 b_2) x_1{}^2 = 0,$$
$$(b_3 a_1 - a_3 b_1) x_1{}^2 - (b_2 a_3 - a_2 b_3) x_2{}^2 = 0.$$

Jeżeli wszystkie trzy wyznaczniki

$$b_2a_3 - a_2b_3,\quad b_3a_1 - a_3b_1,\quad b_1a_2 - a_1b_2$$

są dodatne lub ujemne, to wówczas wszystkie trzy pary prostych, należące do pęku $f+\lambda g=0$, są rzeczywiste, a więc i punkty, w których proste jednéj pary przecinają proste którejkolwiek z dwu pozostałych par, czyli cztéry punkty przecięcia się krzywych $f=0$ i $g=0$, są również rzeczywiste. — Jeżeli zaś dwa z tych wyznaczników są dodatne lub ujemne, a trzeci jest odpowiednio ujemny lub dodatny, to tylko proste jednéj pary są rzeczywiste, gdy tymczasem każda z dwu pozostałych par jest złożona z prostych urojonych z sobą sprzężonych. Ponieważ proste dwu ostatnich par przecinają się w cztérech punktach urojonych, więc w tym przypadku dwie krzywe $f=0$ i $g=0$ przecinają się w cztérech punktach urojonych i po dwa sprzężonych, albowiém przez te punkty przecięcia przechodzi jedna para prostych rzeczywistych.

b. Weźmy teraz pod uwagę drugi przypadek, t. j. kiedy trójkąt z sobą samym sprzężony względem obu krzywych $f=0$ i $g=0$ posiada tylko jeden wiérzchołek i jeden bok (przeciwległy temu wiérzchołkowi) rzeczywisty. Dwie pary prostych, które odpowiadają dwu pierwiastkom równania (10) zespolonym sprzężonym, są urojone i takie, że proste jednéj pary są sprzężone z prostymi drugiéj pary. A więc, jeżeli

$$D_1 + D_2\sqrt{-1} = 0 \quad \text{i} \quad D' + D''\sqrt{-1} = 0$$

są równaniami prostych jednéj z tych dwu par, to

$$D_1 - D_2\sqrt{-1} = 0 \quad \text{i} \quad D' - D''\sqrt{-1} = 0$$

są równaniami prostych drugiéj pary. Ponieważ proste urojone sprzężone przecinają się w punktach rzeczywistych, więc w tym przypadku z cztérech punktów, w których się przecinają proste tych dwu par, a więc i krzywe $f=0$ i $g=0$, dwa są rzeczywiste a dwa urojone sprzężone. (Trzecia para prostych jest widocznie rzeczywistą.)

Wypadek tych badań można tak streścić:

Dwie krzywe stopnia 2-go przecinają się w cztérech punktach. Jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem obu krzywych jest rzeczywisty, to te punkty są albo wszystkie rzeczywiste, albo wszystkie urojone i po dwa sprzężone. Jeżeli zaś tylko jeden wiérzchołek i jeden bok tego trójkąta są rzeczywiste, to dwa punkty przecięcia się krzywych są rzeczywiste, a inne dwa urojone sprzężone.

Stosując poprzedzające wypadki do układu spółrzędnych linii prostéj, mamy twierdzenie analogiczne:

Dwie krzywe stopnia 2-go posiadają cztéry styczne spólne. Jeżeli trójkąt z sobą samym sprzężony względem obu krzywych jest rzeczywisty, to te styczne są albo wszystkie rzeczywiste, albo wszystkie urojone i po dwie sprzężone. Jeżeli zaś w tym trójkącie tylko jeden bok i jeden wiérzchołek (przeciwległy temu bokowi) są rzeczywiste, to dwie styczne są rzeczywiste, a inne dwie są urojone sprzężone.

Jeżeli wyrażenie (11) jest $=0$, to dwa pierwiastki równania (10) są sobie równe, a zatym z trzech par prostych pęku $f+\lambda g=0$ dwie zejdą się razem. To dowodzi, że dwie krzywe $f=0$ i $g=0$ są w tym przypadku do siebie styczne w jednym punkcie. Jeżeli P jest tym punktem styczności, a P′ i P″ są dwoma pozostałymi punktami przecięcia się krzywych $f=0$ i $g=0$ (rzeczywistymi, lub urojonymi sprzężonymi), to spólna styczna w P i prosta P′P″ tworzą jednę parę, a proste P′P i P″P drugą parę. Ta druga para jest parą podwójnych prostych.

178. *Biegunowa jakiegokolwiek punktu* P (x_1, x_2, x_3) *względem każdéj linii stopnia 2-go jednego pęku* $f+\lambda g=0$ *przechodzi przez punkt stały* p. Albowiém przy nieoznaczonéj wartości liczby λ, równanie

$$X_1(f_1+\lambda g_1)+X_2(f_2+\lambda g_2)+X_3(f_3+\lambda g_3)=0$$

przedstawia prostą, przechodzącą przez punkt, w którym się przecinają dwie proste

$$X_1 f_1+X_2 f_2+X_3 f_3=0 \quad \text{i} \quad X_1 g_1+X_2 g_2+X_3 g_3=0,$$

t. j. biegunowe punktu P względem krzywéj $f=0$ i $g=0$. Stąd wynika zarazem, że *punkty* P *i* p *są punktami sprzężonymi względem każdéj linii pęku* $f+\lambda g=0$, *a więc, że, nawzajem, biegunowe punktu* p *przechodzą przez punkt* P.

Podług zasady dwoistości, twierdzeniu temu odpowiada następujące: *bieguny prostéj* D *względem wszystkich linij stopnia 2-go jednego szeregu, leżą na prostéj stałéj* d. *Proste* D *i* d *są prostymi sprzężonymi względem każdéj linii szeregu, a więc i bieguny prostéj* d *leżą na prostéj* D.

Prosta, łącząca punkty P i p, przecina wszelkie krzywe pęku w parach punktów harmonicznie sprzężonych z parami punktów P i p. Podobnie, pary stycznych, wyprowadzone z punktu przecięcia się prostych D i d do wszystkich krzywych szeregu, są harmonicznie sprzężone względem pary prostych D i d. A zatym: *każda prosta przecina krzywe pęku w parach punktów, tworzących inwolucyją.* Odpowiednio: *pary stycznych, wyprowadzone z każdego punktu do krzywych szeregu, tworzą inwolucyją.*

Z równania biegunowych punktu P względem krzywych pęku wypada twierdzenie: *pęki promieni z* $p_1, p_2, p_3, \ldots$, *utworzone przez biegunowe punktów* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *względem krzywych pęku krzywych stopnia 2-go, są pękami jednokréślnymi, a w tych pękach promieniami odpowiednimi sobie są biegunowe punktów* $P_1, P_2, P_3, \ldots$, *wzięte względem téj saméj krzywéj pęku.* Odpowiednio: *szeregi punktów na* $d_1, d_2, d_3, \ldots$, *utworzone przez bieguny prostych* $D_1, D_2, D_3, \ldots$ *względem wszystkich krzywych szeregu krzywych stopnia 2-go, są szeregami jednokréślnymi, a w tych szeregach punktami odpowiednimi są bieguny prostych* $D_1, D_2, D_3, \ldots$, *wzięte względem téj saméj krzywéj szeregu.*

Wiemy, że biegunem prostéj D względem krzywéj pęku jest punkt przecięcia się biegunowych dwu którychkolwiek punktów P_1 i P_2 téj prostéj względem téj krzywéj, t. j. punkt przecięcia się odpowiednich promieni dwu pęków jednokréślnych, wychodzących z punktów p_1 i p_2, sprzężonych z punktami P_1 i P_2 względem téj krzywéj. Nadto (art. 51) promienie odpowiednie dwu pęków jednokréślnych przecinają się na jednéj krzywéj stopnia 2-go, która przechodzi jednocześnie przez wiérzchołki tych pęków. Mamy zatym twierdzenie: *bieguny prostéj dowolnéj* D *względem wszelkich krzywych pęku leżą na jednéj krzywéj stopnia 2-go, która zarazem jest miejscem punktów, sprzężonych z punktami prostéj* D *względem wszelkich krzywych tegoż pęku.* Odpowiednio: *biegunowe punktu dowolnego* P *względem wszelkich krzywych szeregu obwodzą jednę liniją krzywą stopnia 2-go, która jest zarazem obwiednią wszystkich prostych, sprzężonych z prostymi, wychodzącymi z* P *względem wszelkich krzywych tegoż szeregu.*

Punktowi przecięcia się prostéj D z bokiem A_kA_l trójkąta biegunowego (z sobą samym sprzężonego), spólnego krzywym jednego pęku, jest odpowiedni wiérzchołek przeciwległy A_i. Stąd: *linija stopnia 2-go, na któréj leżą bieguny prostéj* D *względem krzywych jednego pęku i zarazem punkty sprzężone z punktami téj prostéj, jest opisana na trójkącie biegunowym pęku.* Odpowiednio: *linija krzywa stopnia 2-go, którą obwodzą biegunowe punktu względem krzywych jednego szeregu i zarazem proste, sprzężone z prostymi, wychodzącymi z* P, *jest wpisana w trójkąt biegunowy szeregu.*

Jeżeli prosta D przechodzi przez wiérzchołek, np. A_i, trójkąta biegunowego pęku, to wówczas wszystkie promienie pęku, utworzonego przez biegunowe punktu A_i téj prostéj, schodzą się razem z bokiem przeciwległym A_kA_l trójkąta biegunowego. A zatym: *bieguny prostéj, przechodzącéj przez jeden wiérzchołek trójkąta biegunowego pęku krzywych stopnia 2-go, leżą na boku przeciwległym tegoż trójkąta.* Odpowiednio: *biegunowe punktu, leżącego na jednym boku trójkąta biegunowego szeregu krzywych stopnia 2-go, przechodzą przez wiérzchołek przeciwległy tegoż trójkąta.*

Aby się dowiedzieć, gdzie leżą punkty, które są odpowiednie punktom prostéj D, przechodzącéj przez A_i, uważmy, że biegunowe szeregu punktów na D względem $f=0$ i $g=0$ tworzą dwa pęki promieni jednokréślne, których wiérzchołki leżą na boku przeciwległym A_kA_l trójkąta biegunowego, spólnego tym dwu krzywym. Ponieważ A_kA_l jest biegunową punktu A_i względem $f=0$ i $g=0$, więc dwa promienie odpowiednie tych dwu pęków jednokréślnych zejdą się razem z bokiem A_kA_l. Te zatym dwa pęki promieni są perspektywiczne, a przeto punkty przecięcia się pozostałych par odpowiednich promieni, t. j. punkty sprzężone z punktami prostéj D względem $f=0$ i $g=0$, a więc i względem $\varphi \equiv f+\lambda g=0$, leżą na innéj prostéj D', przechodzącéj przez punkt A_i (gdyż punkt A_i jest sprzężony z punktem przecięcia się prostych D i A_kA_l). A zatym: *punkty, sprzężone z punktami prostéj* D, *przechodzącéj przez jeden z wiérzchołków trójkąta biegunowego pęku, względem wszystkich krzywych stopnia 2-go tego pęku, leżą na innéj prostéj* D', *przechodzącéj przez tenże wiérzchołek trójkąta biegunowego.* Odpowiednio: *promienie, sprzężone z promieniami pęku, którego wiérzchołek* P *leży na jednym z boków trójkąta biegunowego szeregu, względem wszystkich krzywych stopnia 2-go tego szeregu, są promieniami drugiego pęku, którego wiérzchołek* P' *leży na tymże boku trójkąta biegunowego.*

W tym więc przypadku, *linija stopnia 2-go, na któréj leżą punkty sprzężone z punktami prostéj* D *względem krzywych pęku, składa się z prostych* D′ *i* A_kA_l; *na* D′ *leżą punkty sprzężone ze wszystkimi punktami prostéj* D, *prócz tego, który schodzi się razem z punktem* A_i, *gdyż z nim są sprzężone wszystkie punkty prostéj* A_kA_l. Odpowiednio: *linija stopnia 2-go, którą obwodzą proste sprzężone z prostymi, wychodzącymi z* P, *względem krzywych szeregu, składa się z dwu punktów* P′ *i* A_i; *przez punkt* P′ *przechodzą proste sprzężone ze wszystkimi prostymi, wychodzącymi z* P, *prócz téj, która się schodzi razem z prostą* A_kA_l, *gdyż z nią są sprzężone wszystkie proste, przechodzące przez* A_i.

Ponieważ środki krzywych stopnia 2-go jednego pęku, lub jednego szeregu, są biegunami prostéj w nieskończoności, zatym: *środki krzywych stopnia 2-go pęku leżą na krzywéj stopnia 2-go, opisanéj na trójkącie biegunowym pęku.* Odpowiednio: *środki krzywych stopnia 2-go szeregu leżą na jednéj prostéj.*

Nakoniec: *średnice krzywych stopnia 2-go pęku, sprzężone z pewnym kierunkiem, przechodzą przez jeden punkt.* Odpowiednio: *średnice krzywych stopnia 2-go szeregu obwodzą liniją stopnia 2-go.*

179. Możemy jeszcze udowodnić wiele innych twierdzeń, odnoszących się do pęku, lub szeregu krzywych stopnia 2-go, przyjmując, że jedna lub obie krzywe $f=0$ i $g=0$, wyznaczające pęk, lub szereg, roskładają się na parę prostych, lub odpowiednio na parę punktów.

Niech

$$\lambda g \equiv D_1 D_2;$$

wówczas mieć będziemy równanie

$$f + D_1 D_2 = 0,$$

które przedstawia krzywą stopnia 2-go, przechodzącą przez cztéry punkty: P_1, P′ i P_2, P″, w których krzywą $f=0$ przecinają proste $D_1=0$ i $D_2=0$. Jeżeli punkt P_1 schodzi się razem z P_2, a P′ z P″, t. j. jeżeli prosta $D_1=0$ schodzi się razem z prostą $D_2=0$, to wtedy mieć będziemy równanie

$$f + D^2 = 0,$$

przedstawiające krzywą stopnia 2-go, która dotyka krzywéj $f=0$ w dwu punktach P i P′, w których tę krzywą przecina prosta $D=0$. Prosta D jest cięciwą styczności krzywych $f=0$ i $f+D^2=0$, stycznych dwukrotnie.

Weźmy pod uwagę dwie krzywe stopnia 2-go, które z krzywą stopnia 2-go $f=0$ są styczne dwukrotnie. Równania tych dwu krzywych są:

$$f + D_1^2 = 0 \quad \text{i} \quad f + D_2^2 = 0.$$

Odejmując je od siebie, mamy

$$D_1^2 - D_2^2 = 0,$$

czyli

$$D_1 - D_2 = 0 \quad \text{i} \quad D_1 + D_2 = 0,$$

równania pary spólnych cięciw dwu krzywych uważanych. Z postaci tych równań widzimy, że te cięciwy są harmonicznie sprzężone z parą cięciw styczności $D_1=0$ i $D_2=0$. A zatym: *jeżeli dwie krzywe stopnia 2-go, są styczne dwukrotnie do trzeciéj krzywéj stopnia 2-go, to wówczas dwie cięciwy styczności tych dwu krzywych z trzecią i jedna z trzech par spólnych cięciw tychże dwu krzywych przechodzą przez jeden punkt i tworzą pęk harmoniczny cztérech promieni.*

Niech będą teraz dane trzy krzywe stopnia 2-go,

$$f+D_1^2=0,\quad f+D_2^2=0,\quad f+D_3^2=0,$$

styczne dwukrotnie do czwartéj krzywéj stopnia 2-go $f=0$. Odejmując od siebie każde dwa z tych równań, mamy

$$D_2^2-D_3^2=0,\quad D_3^2-D_1^2=0,\quad D_1^2-D_2^2=0,$$

czyli

$$D_2\pm D_3=0,\quad D_3\pm D_1=0,\quad D_1\pm D_2=0.$$

Stąd widoczna, że każde trzy cięciwy

$$D_2-D_3=0,\ D_3-D_1=0,\ D_1-D_2=0;\ D_2+D_3=0,\ D_3+D_1=0,\ D_1-D_2=0;$$
$$D_2+D_3=0,\ D_3-D_1=0,\ D_1+D_2=0;\ D_2-D_3=0,\ D_3+D_1=0,\ D_1+D_2=0$$

przechodzą przez jeden punkt. A zatym: *jeżeli trzy krzywe stopnia 2-go są styczne dwukrotnie do czwartéj krzywéj stopnia 2-go, to sześć cięciw spólnych każdéj pary krzywych przechodzą po trzy przez jeden punkt.*

UKŁAD KRZYWYCH STOPNIA 2-GO DWUWIÉRZCHOŁKOWY I DWUPODSTAWOWY.

180. Jeżeli w równaniu

$$(1)\qquad f+DD_i=0$$

za D_i będziemy podstawiali coraz inne wyrażenia stopnia 1-go względem spółrzędnych punktu, to otrzymamy coraz inną krzywą stopnia 2-go. Wszystkie te krzywe przechodzić będą przez te same dwa punkty, mianowicie przez punkty, w których prosta $D=0$ przecina krzywą $f=0$. Zbiór tych wszystkich krzywych nazwiemy układem dwuwiérzchołkowym krzywych stopnia 2-go; prosta $D=0$, przechodząca przez oba wiérzchołki układu, zowie się osią układu. Dwie krzywe układu dwuwiérzchołkowego przecinają się nadto w dwu innych punktach; prosta, łącząca te dwa punkty, zowie się osią drugą tych dwu krzywych. Podobnie, jeżeli $F=0$ jest równaniem stopnia 2-go względem spółrzędnych linii prostéj, a $P=0$ i $P_i=0$ są równaniami dwu punktów, to równanie

$$F+PP_i=0,$$

przy rozmaitych wartościach na i, przedstawiać będzie rozmaite krzywe stopnia 2-go, mające dwie styczne krzywéj $F=0$, wychodzące z $P=0$, za styczne spólne. Zbiór tych wszystkich krzywych zowie się układem dwupodstawowym krzywych stopnia 2-go, punkt $P=0$ zowie się środkiem układu. Dwie krzywe układu dwupodstawowego mają nadto jeszcze dwie inne styczne spólne; punkt przecięcia się tych stycznych zowie się środkiem drugim tych dwu krzywych.

Weźmy pod uwagę trzy krzywe układu dwuwiérzchołkowego

$$f + DD_1 = 0, \quad f + DD_2 = 0, \quad f + DD_3 = 0.$$

Odejmując od siebie każde dwa z tych równań, mamy

$$D(D_2 - D_3) = 0, \quad D(D_3 - D_1) = 0, \quad D(D_1 - D_2) = 0.$$

Równania

$$D_2 - D_3 = 0, \quad D_3 - D_1 = 0, \quad D_1 - D_2 = 0$$

są osiami drugimi par krzywych 2-éj i 3-éj, 3-éj i 1-éj, 1-éj i 2-éj. Ich suma algiebraiczna jest tożsamościowo równa 0; a zatym: *trzy osi drugie trzech krzywych stopnia 2-go układu dwuwiérzchołkowego przecinają się w jednym punkcie.* Odpowiednio dowiéść możemy twierdzenia: *trzy środki drugie trzech krzywych stopnia 2-go tego samego układu dwupodstawowego leżą na jednéj prostéj.*

KRZYWE STOPNIA 2-GO HOMOTETYCZNE.

181. Dwie krzywe stopnia 2-go, przechodzące przez też same dwa punkty w nieskończoności, nazywamy podobnymi i podobnie położonymi, albo, za Chasles'm, homotetycznymi. Wrazie, gdy dwie krzywe stopnia 2-go homotetyczne są elipsami, ich spólne dwa punkty w nieskończoności są urojone sprzężone, gdy są hiperbolami — rzeczywiste różne, gdy zaś są parabolami — przedstawiają punkt podwójny rzeczywisty. Wszystkie koła są (art. 109) homotetyczne.

Układ krzywych stopnia 2-go homotetycznych jest przypadkiem szczególnym układu dwuwiérzchołkowego krzywych stopnia 2-go. Osią tego układu jest prosta w nieskończoności. Oś zaś druga dwu krzywych takiego układu, t. j. dwu krzywych homotetycznych, nazywa się osią pierwiastkową (axe radical), albo liniją potęgową (Potenzlinie), albotéż liniją cięciwową (Chordale).

Twierdzenie §-u poprzedzającego można w zastosowaniu do układu krzywych homotetycznych tak wypowiedziéć: *trzy osi pierwiastkowe każdych dwu z trzech krzywych homotetycznych przecinają się w jednym punkcie.* Punkt przecięcia się tych osi pierwiastkowych zowie się środkiem pierwiastkowym uważanych trzech krzywych homotetycznych.

Oś układu krzywych stopnia 2-go homotetycznych jest prostą w nieskończoności; a zatym, z uwagi, iż jest w tym przypadku

$$D \equiv 0 \,.\, x + 0 \,.\, y + 1 = 1,$$

otrzymujemy z równania (1) w art. 180

$$f + D_i = 0, \tag{1}$$

jako równanie krzywych homotetycznych z krzywą $f = 0$ (i z sobą). Ponieważ D_i zawiéra tylko wyrazy stopnia 1-go względem x i y, więc równania dwu krzywych stopnia 2-go homotetycznych mają odpowiednie spółczynniki przy x^2, xy i y^2 równe (lub proporcyjonalne), a zatym

$$(3)\qquad \begin{cases} K \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \text{ i} \\ K' \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0 \end{cases}$$

są równaniami dwu krzywych homotetycznych, a

$$(4)\qquad K - K' \equiv 2(a_{13} - b_{13})x + 2(a_{23} - b_{23})y + (a_{33} - b_{33}) = 0$$

jest równaniem osi pierwiastkowéj tych dwu krzywych.

Osią zatym pierwiastkową dwu kół

$$K \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$$
$$K' \equiv (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - r'^2 = 0$$

jest prosta

$$K - K' \equiv 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 - r^2 - r'^2) = 0.$$

Atoli te wyrażenia K i K', gdy w nie za x, y podstawimy spółrzędne punktu, leżącego na osi pierwiastkowéj, przedstawiają kwadraty długości stycznych, wyprowadzonych z tego punktu do kół $K = 0$ i $K' = 0$; a zatym: *oś pierwiastkowa dwu kół jest miejscem gieometrycznym punktu, z którego wyprowadzone styczne do obu kół są jednakowéj długości.* — Łatwo spostrzéc, że *oś pierwiastkowa dwu kół jest prostopadłą do prostéj, łączącéj ich środki;* albowiém równanie téj prostéj jest

$$(\beta' - \beta)(x - \alpha) - (\alpha' - \alpha)(y - \beta) = 0.$$

182. Ponieważ w równaniach krzywych homotetycznych we spółrzędnych punktu x i y spółczynniki a_{11}, a_{12}, a_{22} wyrazów stopnia 2-go są jednakowe, przeto:

a. *asymptoty krzywych stopnia 2-go homotetycznych są równoległe;* albowiém są one równoległe do prostych przedstawionych przez równania [art. 105, (7)]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y = 0;$$

b. *osi główne tych krzywych są do siebie równoległe,* jako dwusieczne kątów między asymptotami (art. 108); i wogóle,

c. *średnice tych krzywych sprzężone z pewnym kierunkiem są do siebie równoległe;* albowiém, jeżeli przez β oznaczymy kąt, który z osią x-ów układu prostokątnego tworzy średnica którójkolwiek z tych krzywych, sprzężona z pewną średnią czyniącą z tąż osią x-ów kąt α, to równanie (art. 108)

$$a_{11} + a_{12}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + a_{22}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0,$$

wyznacza jednę tylko wartość na β;

d. *długości średnic jednéj z dwu krzywych homotetycznych są proporcyjonalne do długości średnic równoległych drugiéj,* co wynika bespośrednio z artykułów 111 i 112.

e. Z własności zaś d. wynika, że *proste, łączące punkty końcowe średnic równoległych dwu krzywych homotetycznych przecinają się w dwu punktach, leżących na prostéj, która łączy środki tych krzywych.* Jakoż, niech C i C' będą środkami dwu krzywych homotetycznych (fig. 46), DE i D'E' ich średnicami równoległymi, a S i S' punktami, w których proste DD' i D'E przecinają prostą CC'; oznaczmy nadto, przy jakimkolwiek kierunku średnic, $\frac{CD}{C'D'}=m$, a przeto $\frac{CE}{C'D'}=-m$. Z podobieństwa trójkątów SCD i SC'D', tudzież S'CE i S'C'D', wypada

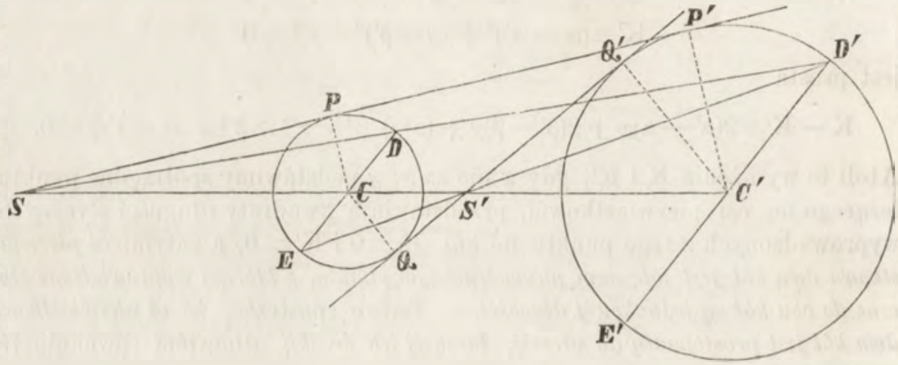


Fig. 46.

$$\frac{SC}{SC'}=\frac{CD}{C'D'}=m \quad \text{i} \quad \frac{S'C}{S'C'}=\frac{CE}{C'D'}=-m,$$

t. j. położenie punktów S i S' nie zależy od kierunku średnic DE i D'E'. — Punkty S i S' są zarazem punktami, w których liniją środków CC' przecinają styczne spólne dwu krzywych homotetycznych. Albowiém, jeżeli PP' i QQ' są stycznymi spólnymi, to prosta CP jest równoległą do C'P', a CQ do C'Q', średnice zaś CP i C'P', jako sprzężone z kierunkiem stycznéj PP', są do siebie równoległe, jakrównież średnice CQ i C'Q', sprzężone z kierunkiem stycznéj QQ'. Stąd zaś wynika, że styczna PP' przechodzi przez punkt S, a styczna QQ' przez S'. — Zauważmy jeszcze, że

$$\frac{SC}{SC'}+\frac{S'C}{S'C'}=0, \quad \text{czyli} \quad \frac{CS}{SC'}+\frac{CS'}{S'C'}=0;$$

punkty więc S i S' tworzą parę harmonicznie sprzężoną z parą punktów C i C'.

Punkty S i S' zowią się **środkami podobieństwa** danych dwu krzywych, i mianowicie: punkt S **środkiem zewnętrznym**, a punkt S' **środkiem wewnętrznym**.

183. *Jeżeli trzy krzywe stopnia 2-go są homotetyczne, to wówczas sześć środków podobieństwa leżą po trzy na czterech prostych, a mianowicie: na jednéj leżą trzy środki zewnętrzne, a na każdéj z trzech pozostałych dwa środki wewnętrzne i jeden zewnętrzny.* Jakoż, niech $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$, $(\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3)$, $(\alpha'''_1, \alpha'''_2, \alpha'''_3)$ będą spółrzędnymi jednorodnymi środków trzech krzywych K_1, K_2, K_3 (fig. 47) homotetycznych, a m', m'', m''' liczbami, proporcyjonalnymi do długości średnic równoległych trzech krzywych. Oznaczmy przez

$$S_1(x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3) \quad \text{i} \quad \Sigma_1(\xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \xi'_3),$$
$$S_2''(x''_1, \quad x''_2, \quad x''_3) \quad \text{i} \quad \Sigma_2(\xi''_1, \quad \xi''_2, \quad \xi''_3),$$
$$S'''_3(x'''_1, \quad x'''_2, \quad x'''_3) \quad \text{i} \quad \Sigma_3(\xi'''_1, \quad \xi'''_2, \quad \xi'''_3)$$

środki podobieństwa zewnętrzne i wewnętrzne odpowiednich par krzywych: K_2, K_3; K_3, K_1; K_1, K_2.

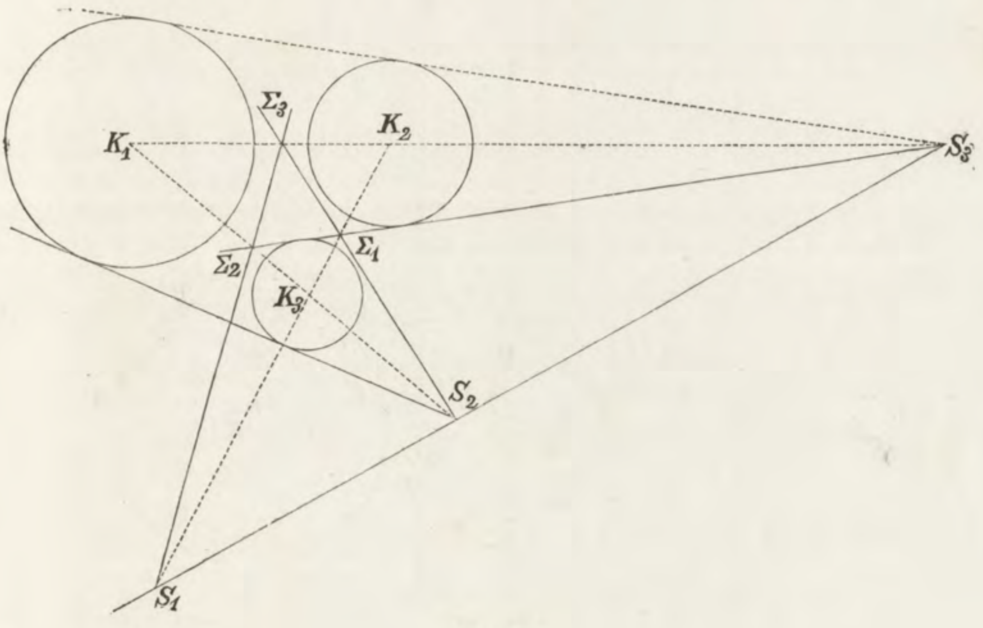


Fig. 47.

Mamy tu:

$$x'_1 = m'''\alpha''_1 - m''\alpha'''_1, \; x'_2 = m'''\alpha''_2 - m''\alpha'''_2, \; x'_3 = m'''\alpha''_3 - m''\alpha'''_3,$$
$$\xi'_1 = m'''\alpha''_1 + m''\alpha'''_1, \; \xi'_2 = m'''\alpha''_2 + m''\alpha'''_2, \; \xi'_3 = m'''\alpha''_3 + m''\alpha'''_3,$$
$$x''_1 = m'\alpha'''_1 - m'''\alpha'_1, \; x''_2 = m'\alpha'''_2 - m'''\alpha'_2, \; x''_3 = m'\alpha'''_3 - m'''\alpha'_3,$$
$$\xi''_1 = m'\alpha'''_1 + m'''\alpha'_1, \; \xi''_2 = m'\alpha'''_2 + m'''\alpha'_2, \; \xi''_1 = m'\alpha'''_3 + m'''\alpha'_3,$$
$$x'''_1 = m''\alpha'_1 - m'\alpha''_1, \; x'''_2 = m''\alpha'_2 - m'\alpha''_2, \; x'''_3 = m''\alpha'_3 - m'\alpha''_3,$$
$$\xi'''_1 = m''\alpha'_1 + m'\alpha''_1, \; \xi'''_2 = m''\alpha'_2 + m'\alpha''_2, \; \xi'''_3 = m''\alpha'_3 + m'\alpha''_2;$$

a zatym

$$\begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \\ x'''_1, & x'''_2, & x'''_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \xi''_3 \\ \xi'''_1, & \xi'''_2, & \xi'''_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \\ \xi'''_1, & \xi'''_2, & \xi'''_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_3 \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \xi''_3 \\ x'''_1, & x'''_2, & x'''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Z tego widzimy, że odpowiednie punkty: S_1, S_2, S_3; S_1, Σ_2, Σ_3; Σ_1, S_2, Σ_3; Σ_1, Σ_2, S_3 leżą na téj saméj prostéj. Te cztéry proste nazywamy osiami podobieństwa.

184. *Jeżeli ze środka* S *podobieństwa dwu krzywych* K *i* K′ *homotetycznych, mających swe środki w* K *i* K′ (fig. 48), *wyprowadzimy dwie sieczne, z których jedna przecina krzywe odpowiednio w* A, B; A′, B′, *a druga odpowiednio w* C, D; C′, D′, *to wówczas dwie proste* AC, B′D′, *tudzież dwie proste* BD, A′C′, *przecinają się w punktach* E, F, *leżących na osi pierwiastkowéj.*

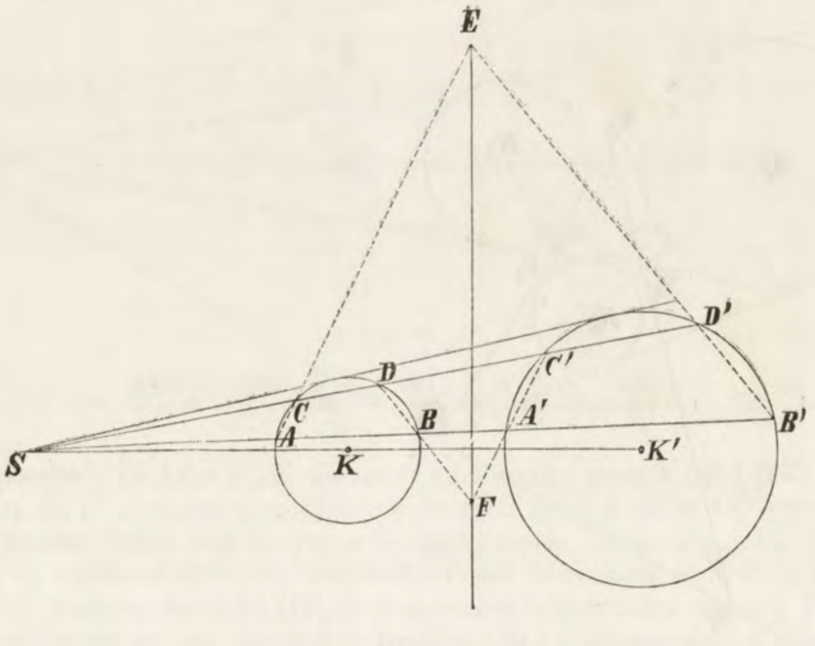


Fig. 48.

Jakoż, jeżeli sieczną SABA′B′ weźmiemy za oś x-ów, a sieczną SCDC′D′ za oś y-ów i oznaczymy $SA = a$, $SB = b$, $SA' = a'$, $SB' = b'$, $SC = c$, $SD = d$, $SC' = c'$, $SD' = d'$, to równaniami prostych AC, A′C′, BD, B′D′ będą odpowiednio

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{c'} = 1, \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{d} = 1, \quad \frac{x}{b'} + \frac{y}{d'} = 1.$$

Ponieważ zaś prosta KA jest równoległą do K′A′, KB do K′B′, KC do K′C′, KD do K′D′, zatym z uwagi, że dane dwie krzywe są homotetyczne, mamy

$$\frac{a'}{a}=\frac{\mathrm{K'A'}}{\mathrm{KA}}=m,\quad \frac{b'}{b}=\frac{\mathrm{K'B'}}{\mathrm{KB}}=m,\quad \frac{c'}{c}=\frac{\mathrm{K'C'}}{\mathrm{KC}}=m,\quad \frac{d'}{d}=\frac{\mathrm{K'D'}}{\mathrm{KD}}=m,$$

skutkiem czego równania prostych A'C' i B'D' przejdą odpowiednio na

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=m \quad \text{i} \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{d}=m.$$

Dodając do siebie tak równania prostych AC i B'D', jak i równania prostych A'C' i BD, otrzymujemy w obu razach toż samo równanie

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=1+m, \tag{5}$$

przedstawiające prostą EF, przechodzącą tak przez punkt E, w którym się przecinają proste AC i B'D', jak i przez punkt F, w którym się przecinają proste A'C' i BD.

Okażemy, że ta prosta (5) jest osią pierwiastkową krzywych (3). Kładąc w równaniu (3) krzywéj K raz $y=0$, drugi raz $x=0$, otrzymamy na wyznaczenie liczb $a, b,$ i c, d dwa równania stopnia 2-go,

$$a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}=0 \quad \text{i} \quad a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

z których wypada

$$a+b=-\frac{2a_{13}}{a_{11}},\quad ab=\frac{a_{33}}{a_{11}},\quad \text{a przeto}\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{2a_{13}}{a_{33}},$$

i $$c+d=-\frac{2a_{23}}{a_{22}},\quad cd=\frac{a_{33}}{a_{22}},\quad \text{a przeto}\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-\frac{2a_{23}}{a_{33}}.$$

Podstawiwszy te wartości za $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ w równanie (5), mieć będziemy

$$2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}(1+m)=0,$$

któremu można nadać postać

$$2a_{13}(1-m)x+2a_{23}(1-m)+a_{33}(1-m^2)=0. \tag{5'}$$

Z równania zaś krzywéj K' otrzymamy podobnie

$$a'+b'=-\frac{2b_{13}}{a_{11}},\quad a'b'=\frac{b_{33}}{a_{11}},\quad c'+d'=-\frac{2b_{23}}{a_{22}},\quad c'd'=\frac{b_{33}}{a_{22}},$$

lub, z uwagi, że $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=m,$

$$m(a+b)=-\frac{2b_{13}}{a_{11}},\qquad m^2ab=\frac{b_{33}}{a_{11}},$$

$$m(c+d)=-\frac{2b_{23}}{a_{22}},\qquad m^2cd=\frac{b_{33}}{a_{22}},$$

Porównywając te wartości z poprzednio znalezionymi, mamy

$$ma_{13}=b_{13},\quad ma_{23}=b_{23},\quad m^2a_{33}=b_{33},$$

co wstawiając w (5′) za $m a_{13}$, $m a_{23}$, $m^2 a_{33}$, otrzymujemy równanie prostéj EF:

$$2(a_{13}-b_{13})x+2(a_{23}-b_{23})y+(a_{33}-b_{33})=0,$$

które jest [art. 181, (4)] równaniem osi pierwiastkowéj dwu krzywych K i K′. Prosta EF jest więc osią pierwiastkową.

ĆWICZENIA.

(150). Znaléść równanie krzywéj stopnia 2-go, która przechodzi przez 5 punktów (1, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 3), (2, 2).

(151). Znaléść równanie pęku linij stopnia 2-go, którego wiérzchołkami są punkty (1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1).

(152). Znaléść równanie trzech par cięciw spólnych dwu krzywych stopnia 2-go $f=0$ i $g=0$.

(153). Okazać, że krzywa zadania (141) jest opisana na trójkącie z sobą samym sprzężonym względem obu krzywych $f=0$ i $g=0$.

(154). Nazywając punkt, w którym się przecinają proste, łączące odpowiednie wiérzchołki dwu trójkątów z sobą sprzężonych względem krzywéj stopnia 2-go, biegunem każdego z tych trójkątów względem téj krzywéj, a prostą, która łączy punkty przecięcia się odpowiednich boków obu trójkątów, osią każdego z nich względem téj krzywéj, okazać, że: $\Theta=0$ *wyraża warunek, aby biegun trójkąta wpisanego w krzywą* $g=0$ *względem krzywéj* $f=0$ *leżał na* $g=0$, oraz, *aby oś trójkąta opisanego na krzywéj* $f=0$ *względem krzywéj* $g=0$ *była styczną do krzywéj* $f=0$.

(155). Znaléść miejsce punktu przecięcia się normalnych do krzywéj stopnia 2-go, wystawionych w końcach cięciwy, która przechodzi przez punkt dany (α, β).

(156). Znaléść warunek, aby trójkąt opisany na $f=0$ był wpisany w $g=0$.

(157). Z dwu kół $x^2+y^2=r^2$ i $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r'^2$ kiedy jedno jest wpisane, a drugie opisane na tym samym trójkącie?

(158). Znaléść równanie pary stycznych, stycznych do krzywéj stopnia 2-go $f=0$ w punktach, w których tę krzywą przecina prosta $\frac{u_1x_1}{h_1}+\frac{u_2x_2}{h_2}+\frac{u_3x_3}{h_3}=0$.

(159). Znaléść środek koła, do którego są stycznymi boki trójkąta z sobą samym sprzężonego względem hiperboli równobocznéj.

(160). Wiérzchołki dwu trójkątów, z których każdy jest z sobą samym sprzężony względem krzywéj stopnia 2-go $f=0$, leżą na jednéj krzywéj stopnia 2-go, oraz: boki dwu trójkątów, z których każdy jest z sobą samym sprzężony względem krzywéj stopnia 2-go, są styczne do jednéj krzywéj stopnia 2-go.

(161). Znaléść warunek, aby dwa koła były do siebie stycznymi zewnętrznie lub wewnętrznie.

(162). Równania kół, mających spólną oś pierwiastkową, wrazie gdy tę oś przyjmiemy za oś y-ów a liniją środków za oś x-ów, jest postaci $x^2+y^2-2\lambda x\pm\delta^2=0$, gdzie λ oznacza liczbę nieoznaczoną, a δ długość stałą.

(163). Znaléść spółrzędne punktu, przez który przechodzą biegunowe punktu (x', y') względem kół $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \delta^2 = 0$.

(164). Okazać, że istnieją takie dwa punkty, iż ich biegunowe względem kół $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \delta^2 = 0$ są prostymi stałymi.

(165). Znaléść warunek, aby dwa koła $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c'^2 = 0$ przecinały się pod kątem prostym.

(166). Jeżeli z punktu na spólnéj osi pierwiastkowéj układu kół wyprowadzimy styczne do każdego z tych kół, to miejscem punktów styczności jest koło, przecinające każde z tamtych kół pod kątem prostym i przechodzące przez dwa punkty zadania (165).

(167). Znaléść biegunową środków podobieństwa dwu kół względem jednego z tych kół.

(168). Jeżeli środek pierwiastkowy S trzech kół K_1, K_2, K_3 połączymy z biegunami B_1, B_2, B_3 któréjkolwiek z cztérech osi podobieństwa tych kół, biegunami względem odpowiednich kół K_1, K_2, K_3, to te trzy proste SB_1, SB_2, SB_3 przecinają koła K_1, K_2, K_3 odpowiednio w punktach P_1 i P'_1, P_2 i P'_2, P_3 i P'_3. Okazać, że dwa układy trzech punktów P_1, P_2, P_3 i P'_1, P'_2, P'_3 wyznaczają dwa koła, z których każde jest styczne do trzech kół K_1, K_2, K_3 w tychże punktach.

(169). Znaléść związek między wzajemnymi odległościami cztérech punktów na kole.

(170). Jeżeli koło K jest styczne do cztérech kół K_1, K_2, K_3, K_4 i jeżeli $\overline{ik}$ oznacza długość stycznéj spólnéj do dwu kół K_i, K_k, to okazać, że

$$\overline{12}\,.\,\overline{34} \pm \overline{14}\,.\,\overline{23} \pm \overline{13}\,.\,\overline{24} = 0.$$

(171). Znaléść równania ośmiu kół stycznych do trzech kół danych.

ROZDZIAŁ XIII.

WYZNACZENIE KRZYWYCH STOPNIA 2-GO ZAPOMOCĄ DANYCH WARUNKÓW.

185. W artykule 173 okazaliśmy, że można zawsze — mówiąc wogólności — odnaléść krzywą stopnia 2-go, która czyni zadość pięciu warunkom pojedyńczym, t. j. takim, iż każdy z nich prowadzi do jednego równania między spółczynnikami równania ogólnego téj krzywéj. Łatwo zrozumiéć, że jeżeli jeden z tych warunków prowadzi do równania stopnia drugiego lub wyższego względem spółczynników, to wówczas miéć będziemy dwa lub więcéj rozwiązań, wskazujących, że istnieje odpowiednio dwie lub więcéj krzywych stopnia 2-go, zadość czyniących warunkom danym. Z drugiéj strony, może się zdarzyć, że jeden warunek daje dwa albo i więcéj równań między spółczynnikami, a przeto mogą zachodzić warunki wielokrotne, równoważne dwu lub więcéj warunkom pojedyńczym, jak to niżéj zobaczymy.

Ażeby więc ocenić w każdym przypadku, czy warunki dane dostatecznie wyznaczają krzywą stopnia 2-go, lubtéż nie, potrzeba:

a. wykazać, jakie warunki należy uważać za pojedyńcze i znaléść klasę każdego warunku pojedyńczego, t. j. stopień tego równania między spółczynnikami w równaniu ogólnym krzywéj, do którego ów warunek prowadzi;

b. wyznaczyć ilość krzywych stopnia 2-go, mających uczynić zadość pięciu danym warunkom pojedyńczym, przy wiadoméj klasie każdego z tych warunków;

c. dokonać szczegółowego rozbioru warunków wielokrotnych i wyznaczyć, ilu warunkom pojedyńczym są one równoważne, a jednocześnie odnaléść klasę tych warunków pojedyńczych.

186. Warunki pojedyńcze. — Zajmiemy się jedynie dwoma rodzajami warunków pojedyńczych: t. z. warunkami punktowymi i warunkami linijowymi; albowiém, jak to zobaczymy, wszelkie inne można uważać albo jako przypadki szczególne, albo jako powtórzenia dwu takich warunków pojedyńczych.

Niech

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

będzie równaniem ogólnym krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych jednorodnych (np. szczególnych) punktu i niech (x'_1, x'_2, x'_3), (x''_1, x''_2, x''_3) będą spółrzędnymi dwu punktów na płaszczyźnie téj krzywéj. Ponieważ równanie

$$(2)\quad x'_1f_1(x''_1, x''_2, x''_3) + x'_2f_2(x''_1, x''_2, x''_3) + x'_3f_3(x''_1, x''_2, x''_3) = 0, \text{ lub}$$

$$(2')\quad x''_1f_1(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_2f_2(x'_1, x'_2, x'_3) + x''_3f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$$

wyraża warunek, aby z dwu tych punktów jeden (każdy) leżał na biegunowéj drugiego z nich względem krzywéj (1), czyli, aby te dwa punkty były z sobą sprzężonymi względem krzywéj (1), więc, jeżeli dwa punkty są dane, to warunek, aby one były sprzężonymi, daje nam jedno równanie stopnia 1-go między spółczynnikami równania ogólnego (1) krzywéj stopnia 2-go. Pięć takich warunków wystarczy zatym do wyznaczenia pięciu stosunków między tymi spółczynnikami, a przeto i do wyznaczenia krzywéj stopnia 2-go.

187. Niech

$$(3)\quad \begin{cases} \varkappa'_1x' + \varkappa'_2x_2 + \varkappa'_3x_3 = 0, \\ \varkappa''_1x_1 + \varkappa''_2x_2 + \varkappa''_3x_3 = 0 \end{cases}$$

będą równaniami dwu prostych. Jeżeli (x'_1, x'_2, x'_3) są spółrzędnymi bieguna piérwszéj z tych prostych względem krzywéj (1), mamy wówczas

$$f_1(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda\varkappa'_1,\quad f_2(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda\varkappa'_2,\quad f_3(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda\varkappa'_3,$$

skąd nawzajem wypada

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x'_1 &= \lambda(\mathrm{A}_{11}\varkappa'_1 + \mathrm{A}_{21}\varkappa'_2 + \mathrm{A}_{31}\varkappa'_3), \\ \mathrm{A}x'_2 &= \lambda(\mathrm{A}_{12}\varkappa'_1 + \mathrm{A}_{22}\varkappa'_2 + \mathrm{A}_{32}\varkappa'_3), \\ \mathrm{A}x'_3 &= \lambda(\mathrm{A}_{13}\varkappa'_1 + \mathrm{A}_{23}\varkappa'_2 + \mathrm{A}_{33}\varkappa'_3). \end{aligned}$$

Podstawmy wartości stąd wynikające na x'_1, x'_2, x'_3 za x_1, x_2, x_3 w drugie z równań (3); otrzymamy wówczas równanie

$$(4)\quad \begin{aligned} \mathrm{A}_{11}\varkappa'_1\varkappa''_1 + \mathrm{A}_{32}\varkappa'_2\varkappa''_2 + \mathrm{A}_{33}\varkappa'_3\varkappa''_3 + \mathrm{A}_{23}(\varkappa'_2\varkappa''_3 + \varkappa''_2\varkappa'_3) + \\ + \mathrm{A}_{31}(\varkappa'_3\varkappa''_1 + \varkappa''_3\varkappa'_1) + \mathrm{A}_{12}(\varkappa'_1\varkappa''_2 + \varkappa''_1\varkappa'_2) = 0, \end{aligned}$$

lub, używając znakowania wyznacznikowego,

$$(4')\quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \varkappa'_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \varkappa'_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \varkappa'_3 \\ \varkappa''_1, & \varkappa''_2, & \varkappa''_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie wyraża warunek, pod jakim biegun piérwszéj z dwu prostych (3) względem krzywéj (1) leży na drugiéj prostéj; a że ono jest symetryczne względem spółczynników równań obu prostych, więc wyraża ono także warunek, pod jakim biegun drugiéj z dwu prostych (3) leży na piérwszéj prostéj, czyli warunek, pod jakim dwie proste (3) są sprzężone względem krzywéj (1). Zauważmy, że to równanie jest stopnia 2-go wyględem spółczynników w równaniu krzywéj (1). A zatym, jeżeli są dane dwie proste, to warunek, aby te dwie proste były sprzężone względem krzywéj stopnia 2-go, daje jedno równanie stopnia 2-go między spółczynnikami w równaniu ogólnym téj krzywéj. Stąd zaś wypada, że jeżeli takim warunkiem zastąpimy jeden z warunków artykułu poprzedzającego, wówczas — mówiąc w ogólności — otrzymamy dwa układy wartości na pięć stosuuków między spółczynnikami równania (1).

188. Weźmy następnie pod uwagę równanie ogólne krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych linii prostéj,

$$(5)\quad F(u_1, u_2, u_3) \equiv A_{11}u_1{}^2 + A_{22}u_2{}^2 + A_{33}u_3{}^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 = 0$$

i niech $(u'_1, u'_2\, u'_3)$, (u''_1, u''_2, u''_3) będą spółrzędnymi dwu linij prostych. Wiadomo, że równanie

$$(6)\quad u'_1F_1(u''_1, u''_2, u''_3) + u'_2F_2(u''_1, u''_2, u''_3) + u'_3F_3(u''_1, u''_2, u''_3) = 0, \text{ lub}$$

$$(6')\quad u''_1F_1(u'_1, u'_2, u'_3) + u''_2F_2(u'_1, u'_2, u'_3) + u''_3F_3(u'_1, u'_2, u'_3) = 0$$

wyraża warunek, pod jakim jedna z tych prostych przechodzi przez biegun drugiéj, czyli, pod jakim te dwie proste są sprzężone względem krzywéj stopnia 2-go (5). A zatym, jeżeli dane są dwie proste, to warunek, aby one były sprzężone względem krzywéj stopnia 2-go, daje jedno równanie stopnia 1-go między spółczynnikami równania ogólnego (5) téj krzywéj; stąd zaś wypada, że pięć takich warunków wystarcza w zupełności do wyznaczenia krzywéj stopnia 2-go.

189. Niech

$$(7)\quad \begin{cases} \varkappa'_1u_1 + \varkappa'_2u_2 + \varkappa'_3u_3 = 0 \\ \varkappa''_1u_1 + \varkappa''_2u_2 + \varkappa''_3u_3 = 0 \end{cases}$$

będą równaniami dwu punktów. Sposobem podobnym, jak w art. 187, znajdziemy, że równanie

$$(8)\quad \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & \varkappa'_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & \varkappa'_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & \varkappa'_3 \\ \varkappa''_1, & \varkappa''_2, & \varkappa''_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wyraża warunek, pod jakim dwa punkty (7) są sprzężone względem krzywéj (5). To równanie jest stopnia 2-go względem spółczynników w równaniu (5); zatym, jeżeli są dane dwa punkty, to warunek, aby one były sprzężone względem krzywéj stopnia 2-go, daje nam jedno równanie stopnia 2-go między spółczynnikami w równaniu ogólnym (5) téj krzywéj. Stąd zaś wypada, że jeżeli takim warunkiem zastąpimy jeden z warunków, rozważanych w artykule poprzedzającym, to wówczas — mówiąc wogólności — otrzymamy dwa układy wartości na pięć stosunków między spółczynnikami równania (5).

190. Wurunek, aby krzywa stopnia 2-go była taką, żeby dwa dane punkty były względem niéj sprzężonymi, nazwiemy warunkiem punktowym (w-p.); warunek zaś, aby krzywa stopnia 2-go była taką, żeby dwie dane proste były względem niéj sprzężonymi, nazwiemy warunkiem linijowym (w-l.). Warunki te są pojedyńczymi, albowiém prowadzą one do jednego równania między spółczynnikami w równaniu ogólnym krzywéj stopnia 2-go.

Możemy teraz wyznaczyć ilość krzywych stopnia 2-go, dopełniających pięciu danych warunków pojedyńczych.

a. *Pięciu warunkom punktowym może uczynić zadość tylko jedna krzywa stopnia 2-go.* Albowiém, gdy użyjemy spółrzędnych punktu, każdy z tych warunków da jedno równanie stopnia 1-go (art. 186) między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych punktu, a pięć takich równań da tylko jeden układ wartości na stosunki między tymi spółczynnikami.

b. *Cztérem warunkom punktowym i jednemu linijowemu mogą uczynić zadość conajwięcéj dwie krzywe stopnia 2-go.* Albowiém, gdy użyjemy spółrzędnych punktu, każdy z cztérech w-p. da jedno równanie stopnia 1-go, a jeden w-l. jedno równanie stopnia 2-go (art. 187) między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych punktu. Z tych pięciu równań wyznaczymy pięć stosunków między spółczynnikami; wszakże, skoro jedno z nich jest stopnia 2-go, będziemy mieli dwa rozwiązania, wskazujące na istnienie dwu krzywych, dopełniających tych pięciu warunków.

c. *Trzem warunkom punktowym i dwu linijowym mogą uczynić zadość conajwięcéj cztéry krzywe stopnia 2-go.* Albowiém, gdy użyjemy spółrzędnych punktu, trzy w-p. dadzą trzy równania stopnia 1-go, a dwa w-l. dadzą dwa równania stopnia 2-go między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych punktu. Miéć więc będziemy pięć równań, które, gdy dwa z nich są stopnia 2-go, dadzą cztéry układy wartości na pięć stosunków między tymi spółczynnikami, a to wskazuje, że mogą istniéć cztéry krzywe stopnia 2-go, dopełniające tych pięciu warunków.

d. *Dwu warunkom punktowym a trzem linijowym mogą uczynić zadość conajwięcéj cztéry krzywe stopnia 2-go.* Albowiém, gdy użyjemy spółrzędnych linii prostéj, to dwa w-p. dadzą dwa równania stopnia 2-go (art. 189), a trzy w-l. trzy równania stopnia 1-go (art. 188) między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych linii prostéj. Liczba krzywych jest więc w tym przypadku ta sama, co w przypadku 3-cim.

e. *Jednemu warunkowi punktowemu i cztérem linijowym mogą uczynić zadość conajwięcéj dwie krzywe stopnia 2-go.* Albowiém w-p. daje jedno równanie stopnia 2-go, a cztéry w-l. dają cztéry równania stopnia 1-go między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych linii prostéj. Liczba krzywych jest znów ta sama, co w przypadku 2-im.

f. *Pięciu warunkom linijowym może uczynić zadość tylko jedna krzywa stopnia 2-go.* Albowiém te warunki dają pięć równań stopnia 1-go między spółczynnikami równania ogólnego krzywéj stopnia 2-go we spółrzędnych linii prostéj. Liczba krzywych będzie zatym ta sama, co w przypadku 1-ym.

191. Warunki złożone. Pozostaje nam rozebrać najczęściéj spotykane warunki i odnaléść liczbę w-p., lub w-l., którym każdy z nich jest równoważny. Poznawszy zaś to, będziemy mogli w każdym przypadku szczególnym napewno osądzić, czy dane warunki są, czytéż nie są dostateczne, i ile krzywych stopnia 2-go można poprowadzić, czyniących zadość warunkom danym.

1° »Dany punkt na krzywéj«.

Punkt dany na krzywéj, leżąc na własnéj biegunowéj, jest z sobą samym sprzężony. Ten więc warunek jest równoważny jednemu w-p.

2° »Dana styczna do krzywéj«.

Styczna do krzywéj, przechodząc przez własny biegun, jest z sobą samą sprzężona. Ten więc warunek jest równoważny jednemu w-l.

3° »Dana średnica«.

Średnica jest biegunową punktu w nieskończoności i przechodzi przez środek, który jest biegunem prostéj w nieskończoności; średnica zatym i prosta w nieskończoności są dwiema prostymi z sobą sprzężonymi. Ten więc warunek jest równoważny jednemu w-l.

4° »Dany punkt i dana biegunowa tego punktu«.

Niech będzie P danym punktem i oznaczmy przez Q i R dwa dowolnie obrane punkty na danéj biegunowéj tego punktu. Z uwagi, że biegunowa punktu P przechodzi przez punkt Q i przez punkt R, wynika, że ten warunek jest równoważny dwu w-p.; z uwagi zaś, że biegun prostéj QR leży tak na prostéj QP, jak i na prostéj RP, wypada, że tenże warunek jest równoważny także dwu w-l.

5° »Dany punkt i dana styczna w tym punkcie«.

Ten warunek, jako przypadek szczególny poprzedzającego, jest równoważny albo dwu w-p., albo dwu w-l.

6° »Dana asymptota«.

Ten warunek jest także przypadkiem szczególnym warunku 4-go; albowiém asymptota jest styczną w punkcie nieskończenie odległym. Wskutek tego ten warunek jest równoważny dwu w-p., lub dwu w-l.

7° »Dany kierunek jednéj asymptoty«.

W tym przypadku dany jest jeden punkt krzywéj, mianowicie punkt w nieskończoności. Ten więc warunek, jako przypadek szczególny warunku 1-go, jest równoważny jednemu w-p.

8° »Żądana krzywa ma być parabolą«.

Parabola jest styczną do prostéj w nieskończoności; ten więc warunek jest przypadkiem szczególnym warunku 2-go, a przeto równoważnym jednemu w-l.

9° »Żądana krzywa ma być kołem«.

Koło przechodzi przez dwa punkty urojone w nieskończoności; ten więc warunek jest równoważny dwu w-p.

10° »Dany środek«.

Środek jest biegunem prostéj w nieskończoności; ten więc warunek, jest taksamo, jak warunek 4-ty, równoważny dwu w-p., albo dwu w-l.

11° »Dany trójkąt z sobą samym sprzężony«.

Ten warunek jest widocznie równoważny albo trzem w-p., albo trzem w-l.

12° »Dane położenie dwu średnic sprzężonych«.

Ten warunek, jako przypadek szczególny poprzedzającego, jest także równoważny trzem w-p., albo trzem w-l.

13° »Dane kierunki dwu średnic sprzężonych«.

Punkty, w których dowolne dwie proste, mające te kierunki, przecina jakakolwiek prosta, są sprzężone z sobą względem krzywéj; ten więc warunek jest równoważny jednemu w-p.

14° »Dane położenie jednéj osi głównéj«.

Położenie dane jednéj osi głównéj, z uwagi, że oś główna jest średnicą, jest, według 3-go, równoważne jednemu w-l. Atoli, skoro jednocześnie jest dany kierunek drugiéj osi głównéj, więc, według 13-go, ten warunek jest równoważny nadto jednemu w-p.

15° »Dane położenie dwu osi głównych«.

Ten warunek, jako przypadek szczególny warunku 12-go, jest równoważny trzem w-p., albo trzem w-l.

16° »Dane jedno ognisko«.

W tym przypadku są dane dwie styczne z punktów kołowych urojonych (art. 145); ten warunek jest więc równoważny dwu w-l.

17° »Dana jedna kierownica«.

Kierownica, jako biegunowa ogniska, przecina krzywą w dwu punktach, w których do téj krzywéj są stycznymi dwie proste, wychodzące z ogniska do punktów kołowych urojonych. Ten warunek jest więc równoważny dwu w-p.

18° »Dana krzywa homotetyczna z żądaną«.

Ten warunek jest równoważny dwu w-p.; albowiém wszystkie krzywe homotetyczne przecinają prostą w nieskończoności w dwu tych samych punktach.

19° »Dana krzywa stopnia 2-go podwójnie styczna do żądanéj«.

Ten warunek należy uważać jako równoważny warunkowi, kiedy dwie styczne są dane, a więc dwu w-l.; albowiém wrazie, kiedy ta krzywa roskłada się na dwie proste, te dwie proste są dwiema stycznymi.

20° »Żądana krzywa ma być hiperbolą równoboczną«.

Ten warunek można uważać jako równoważny warunkowi, kiedy dany jest kierunek jednéj asymptoty; albowiém, gdyby był dany kierunek jednéj asymptoty, to tymsamym byłby już w tym przypadku dany kierunek drugiéj asymptoty, jako prostopadłéj do piérwszéj. Ten więc warunek jest równoważny jednemu w-p.

192. Zastosowanie. — Damy kilka przykładów, jako zastosowanie powyższych wypadków.

Przez pięć danych punktów można poprowadzić tylko jednę krzywą stopnia 2-go. Albowiém w tym przypadku mamy pięć w-p.

Aby tę krzywą wykréślić, należy sobie przypomniéć twierdzenie art. 51, według którego punkty przecięcia się odpowiednich promieni dwu pęków promieni jednokréślnych leżą na krzywéj stopnia 2-go, która przechodzi zarazem przez wiérzchołki tych pęków. Niech więc P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 będą pięcioma danymi punktami. Uważajmy P_4 i P_5 jako wiérzchołki dwu pęków jednokréślnych i połączmy te wiérzchołki z punktami P_1, P_2, P_3; natenczas promienie P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3 piérwszego pęku będą odpowiednimi promieniom P_5P_1, P_5P_2, P_5P_3 drugiego pęku. Aby otrzymać szósty punkt P krzywéj, przechodzącéj przez pięć punktów P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, dość dla jakiegokolwiek czwartego promienia P_4P piérwszego pęku odnaléść odpowiedni mu promień w drugim pęku (sposobem wyłożonym w art. 50). Punkt przecięcia się tych dwu promieni będzie punktem szóstym żądanéj krzywéj. Tym sposobem można znaléść ilekolwiek nowych punktów, a więc i poznać kształt krzywéj.

Do tegoż samego prowadzi inny sposób, opiérający się na twierdzeniu Pascal'a (art. 162), według którego trzy pary boków przeciwległych sześcioboku wpisanego w krzywą stopnia 2-go przecinają się w trzech punktach na jednéj prostéj. — Jakoż połączmy punkty P_1 i P_2, P_4 P_5 (fig. 49) linijami prostymi i te linije przedłużmy aż do przecięcia się w punkcie L; poprowadźmy następnie przez punkt P_5 prostą w kierunku dowolnym aż do przecięcia się z prostą P_2P_3 w punkcie M; nakoniec poprowadźmy prostą P_3P_4 aż do przecięcia się w N z prostą LM: prosta NP_1 przecina prostą dowolnie obraną P_5M w punkcie P_6, który jest punktem szóstym krzywéj stopnia 2-go, przechodzącéj przez pięć punktów $P_1, \ldots, P_5$. Zmieniając wciąż kierunek prostéj P_5M, otrzymywać będziemy coraz inny punkt, jako odpowiedni szósty.

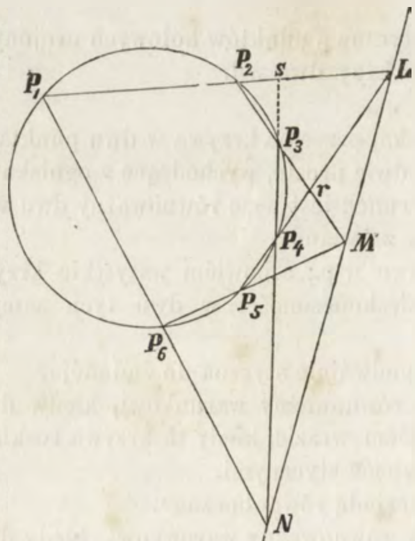


Fig. 49.

Jeżeli w sześcioboku Pascal'a wiérzchołek np. P_6 coraz się zbliża do wiérzchołka P_1, to wówczas bok P_6P_1 zdąża do położenia stycznéj do krzywéj w punkcie P_1. Z téj uwagi wynika sposób kréślenia stycznéj do krzywéj stopnia 2-go w jednym z pięciu punktów, np. w P_1, przez które ta krzywa ma przechodzić. Jakoż, połączmy P_1 z P_2 i P_4 z P_5 i przedłużmy proste P_1P_2, P_4P_5 aż do przecięcia się w L; połączmy następnie P_2 z P_3 i P_5 z P_1 ($=P_6$)

i proste P_2P_3, P_5P_1 przedłużmy aż do przecięcia się w M; poprowadźmy nakoniec prostą P_3P_4 aż do przecięcia się w N z prostą LM: prosta P_1N jest styczną do krzywéj w punkcie P_1.

Wiedząc to, można wyznaczyć położenie i długości dwu średnic sprzężonych krzywéj stopnia 2-go, mającéj przechodzić przez pięć punktów danych. Niech *a, b, c, d, e* (fig. 50) będą punktami danymi. Wyznaczmy (w sposób dopiéroco podany) styczne *a*A, *b*B, *c*C do krzywéj w punktach *a, b, c,* i oznaczmy przez S i T punkty przecięcia się par stycznych *a*A, *b*B i *b*B, *c*C. Prosta, łącząca punkt S ze środkiem *f* cięciwy *ab*, jest średnicą sprzężoną z kierunkiem cięciwy *ab*, i podobnie prosta, łącząca punkt T ze środkiem *g* cięciwy *bc*, jest średnicą sprzężoną z kierunkiem cięciwy *bc*. Te dwie zatym średnice przecinają się w środku O linii krzywéj. Wyprowadźmy z O prostą OS' równoległą do *ab;* natenczas OS i OS' będą kierunkami dwu średnic sprzężonych. Aby znaléść jeszcze długości połów tych średnic O*k* i O*k*', wyprowadźmy z *a* prostą *af*' równoległą do SO aż do przecięcia się w *f*' z OS' i oznaczmy przez S' punkt przecięcia średnicy OS' ze styczną *a*A. Skoro cięciwa *ab* jest biegunową punktu S, a *af*' biegunową punktu S', zatym mamy $Ok = \sqrt{Of.OS}$ i $Ok' = \sqrt{Of'.OS'}$.

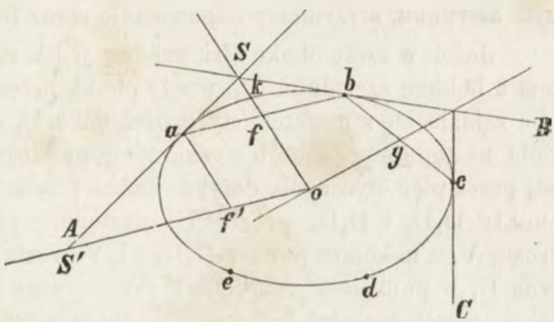


Fig. 50.

Jeżeliby się okazało, że dwie średnice SO i TO są do siebie równoległe, krzywa byłaby parabolą. Aby znaléść ognisko i kierownicę téj paraboli, przez punkty *a* i *b* prowadzimy dwie średnice, tudzież dwie proste, które z odpowiednimi stycznymi *a*A i *b*B czynią takie same kąty, jak tylkoco wzmiankowane średnice. Te dwie proste przetną się w ognisku paraboli. Z ogniska spuszczamy prostopadłe na styczne i na przedłużeniach tych prostopadłych odcinamy długości równe tym prostopadłym: prosta łącząca końcowe punkty jest kierownicą.

193. *Mając danych pięć prostych, można poprowadzić tylko jednę krzywą stopnia 2-go, styczną do tych prostych.* Albowiém w tym przypadku mamy pięć w-l.

Aby wyznaczyć jakąkolwiek szóstą styczną, można się oprzéć albo na twierdzeniu art. 51, według którego proste, łączące każde dwa odpowiednie punkty dwu szeregów punktów prostolinijowych i jednokréślnych, obwodzą krzywą stopnia 2-go, do któréj jednocześnie obie podstawy tych szeregów są styczne, albotéż na twierdzeniu Brianchon'a (art. 166), według którego proste, łączące trzy pary wiérzchołków przeciwległych sześciokąta opisanego na krzywéj stopnia 2-go, przecinają się w jednym punkcie. Podamy tu tylko drugi z tych sposobów

Jakoż, niech D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 będą danymi pięcioma prostymi. Połączmy prostą U punkt przecięcia się prostych D_1, D_2 z punktem, w którym przecinają się proste D_4, D_5; następnie z punktu przecięcia się prostych D_2, D_3 wyprowadźmy prostą dowolną V, która przecina prostą U w O, a prostą D_5 w A. Nakoniec połączmy punkt przecięcia się prostych D_3, D_4 z punktem O prostą W i tę prostą przedłużmy aż do przecięcia się z prostą D_1 w punkcie B. Proste AB i D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 są bokami sześcioboku Brianchon'a, a więc prosta AB jest szóstą styczną krzywéj stopnia 2-go, do któréj są stycznymi proste D_1, D_2, D_3, D_4, D_5. Prowadząc prostą V coraz w innym kierunku, otrzymamy odpowiednio coraz inną szóstą styczną AB.

Jeżeli w sześcioboku Brianchona jeden z boków, np. D_6, zejdzie się razem z bokiem sąsiednim D_1, wtedy punkt przecięcia się tych dwu boków razem zejdzie się z punktem styczności boku D_1 do krzywéj. Z téj uwagi wypada następujący sposób wyznaczenia punktów, w których krzywéj, określonéj przez pięć stycznych, dotyka każda z tych stycznych. Jakoż, połączmy punkty D_1D_2 i D_4D_5 prostą U, następnie punkty D_2D_3 i D_5D_1 $(=D_5D_6)$ prostą V, a nakoniec punkty D_3D_4 i UV prostą W: prosta W przetnie styczną D_1 w punkcie styczności. Wyznaczywszy tym sposobem punkty styczności na trzech sąsiednich stycznych, można potym, taksamo jak w artykule poprzedzającym, wynaléść położenie i długości pary średnic sprzężonych.

194. *Mając dane cztéry punkty i jednę prostą, przechodzą przez jeden z punktów danych, można poprowadzić przez te punkty tylko jednę krzywą stopnia 2-go, do któréj dana prosta jest styczną w tym danym punkcie, przez który ta prosta przechodzi.* Albowiém i w tym przypadku mamy pięć w-p.

Wykréślenie krzywéj zapomocą tych warunków można oprzéć na dwu wnioskach, wynikających z twierdzenia Pascal'a. Jeżeli naprzód w sześcioboku Pascal'a wiérzchołek P_2 razem się zejdzie z wiérzchołkiem P_1, a wiérzchołek P_5 z wiérzchołkiem P_4, wtedy dwa boki przeciwległe P_1P_2 i P_4P_5 tego sześcioboku staną się stycznymi w dwu wiérzchołkach przeciwległych P_1 i P_4 czworoboku $P_1P_3P_4P_6$, wpisanego w krzywą stopnia 2-go. Mamy zatym twierdzenie: *pary boków przeciwległych czworoboku, wpisanego w krzywą stopnia 2-go, i pary stycznych do krzywéj w dwu jego wiérzchołkach przeciwległych przecinają się w punktach, leżących na jednéj prostéj.*

Wyobraźmy sobie następnie, że wiérzchołki sześcioboku Pascal'a P_2, P_4 i P_6 schodzą się razem odpowiednio z wiérzchołkami P_1, P_3 i P_5. Przy tym przypuszczeniu, boki P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 tego sześcioboku stają się stycznymi w odpowiednich wiérzchołkach P_1, P_3, P_5 trójkąta $P_1P_3P_5$, wpisanego w krzywą stopnia 2-go. Twierdzenie Pascal'a przechodzi zatym teraz na następujące: *boki trójkąta, wpisanego w krzywą stopnia 2-go, przecinają się ze stycznymi w jego wiérzchołkach przeciwległych w trzech punktach, leżących na jednéj prostéj.* Tego twierdzenia dowiedliśmy już w art. 165.

Otóż, jeżeli dane są cztéry punkty P_1, P_2, P_3, P_4 i styczna D_1 w punkcie P_1, to, zapomocą piérwszego z tych twierdzeń, znajdziemy styczną w P_3, a następnie, zapomocą drugiego, styczną w P_2, i wykréślenie krzywéj sprowadzi się do przypadku, rozważanego w art. 192.

195. *Mając cztéry proste dane i punkt dany na jednéj z tych prostych, można znaléść tylko jednę krzywą, styczną do tych prostych, dla któréj punkt dany jest punktem styczności prostéj, na któréj ten punkt leży.* Albowiém mamy tu pięć w-l.

Wykréślenie krzywéj zapomocą tych warunków opiéra się znowu na dwu wnioskach, dających się wyprowadzić z twierdzenia Brianchon'a. Te dwa wnioski zawiérają twierdzenia, odpowiadające podług zasady dwoistości twierdzeniom, dowiedzionym w artykule poprzedzającym, a mianowicie: *dwie przekątne czworoboku, opisanego na krzywéj stopnia 2-go, i prosta, łącząca punkty styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie*; oraz: *proste, łączące wiérzchołki trójkąta opisanego na krzywéj stopnia 2-go z punktami styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.*

Otóż, jeżeli do krzywéj mają być stycznymi cztéry proste dane, D_1, D_2, D_3, D_4, i jeżeli P_1 jest danym punktem styczności prostéj D_1, to, zapomocą piérwszego z wypowiedzianych dopiéroco twierdzeń, znajdziemy naprzód punkt styczności P_3 na D_3, a następnie, zapomocą drugiego, punkt styczności P_2 na D_2, poczym postąpimy tak, jak w art. 192.

196. *Przez cztéry dane punkty można poprowadzić dwie parabole.* Albowiém mamy w tym przypadku cztéry w-p. i jeden w-l.

Aby te parabole wykréślić, gdy A, A', B, B' są cztérema danymi punktami (fig. 51), weźmy np. AA' za oś x-ów, a BB' za oś y-ów, i oznaczmy $OA=a$, $OA'=a'$, $OB=b$, $OB'=b'$. Równanie krzywéj stopnia 2-go, przechodzącéj przez te cztéry punkty, jest widocznie

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)-kxy=0,$$

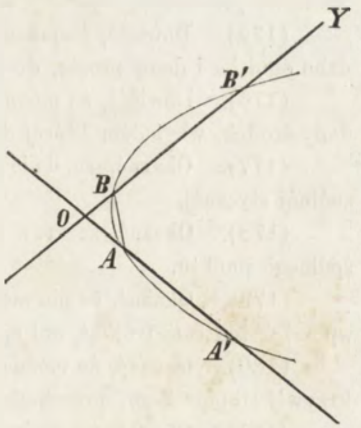


Fig. 51.

gdzie k jest czynnikiem nieoznaczonym. Porządkując to równanie, mamy

$$\frac{x^2}{aa'}+\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{a'b}-k\right)xy+\frac{y^2}{bb'}+ \text{ wyrazy}$$

stopni niższych $=0$. Ta krzywa będzie parabolą, jeżeli

$$\frac{4}{aa'bb'}=\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{a'b}-k\right)^2,$$

skąd wypada

$$k=\frac{1}{ab'}+\frac{1}{a'b}\pm\frac{2}{\sqrt{aa'bb'}}.$$

Równania zatym dwu paraból możebnych są

$$\left(\frac{x}{\sqrt{aa'}} \pm \frac{y}{\sqrt{bb'}}\right)^2 + \text{wyrazy stopni niższych} = 0.$$

Stąd czytamy, że osi tych dwu paraból są odpowiednio równoległe do prostych $\frac{x}{\sqrt{aa'}} + \frac{y}{\sqrt{bb'}} = 0$ i $\frac{x}{\sqrt{aa'}} - \frac{y}{\sqrt{bb'}} = 0$. Punkt w nieskończoności (w kierunku jednéj lub drugiéj z tych dwu prostych) i cztéry dane punkty tworzą pięciokąt wpisany w krzywą stopnia 2-go. Można zatym, według art. 192, wynaléść styczne do krzywéj w dwu z tych cztérech punktów, a potym, według końcowéj uwagi art. 192, znaléść jéj ognisko i kierownicę.

ĆWICZENIA.

---

(172). Zapomocą twierdzeń art. 51 dowiéść twierdzeń Pascal'a i Brianchon'a.

(173). Dowiéść, że można tylko jednę parabolę wpisać w dany czworobok.

(174). Dowiéść, że można wykréślić dwie krzywe stopnia 2-go, mające dane ogniska i przechodzące przez dany punkt.

(175). Dowiéść, że można wykréślić tylko jednę krzywą stopnia 2-go, mającą dane ogniska i daną prostą, do żądanéj krzywéj styczną.

(176). Dowiéść, że można wykréślić tylko jednę krzywą stopnia 2-go, mającą dany środek, względem któréj dany trójkąt jest z sobą samym sprzężony.

(177). Okazać, że dwie krzywe stopnia 2-go spółogniskowe nie mogą miéć spólnéj stycznéj.

(178). Okazać, że trzy krzywe stopnia 2-go spółogniskowe nie mogą miéć spólnego punktu.

(179). Okazać, że nie można dwu krzywych stopnia 2-go spółśrodkowych ani wpisać w ten sam trójkąt, ani opisać na tym samym trójkącie.

(180). Okazać, że można wykréślić cztéry koła podwójnie styczne do danéj krzywéj stopnia 2-go, przechodzące przez punkt dany, lub styczne do prostéj danéj.

(181). Okazać, że w dany czworobok można wpisać tylko jednę krzywą stopnia 2-go, mającą środek na danéj prostéj.

(182). Wykréślić krzywą stopnia 2-go, mając dane trzy jéj punkty i jedno ognisko.

(183). Wykréślić krzywą stopnia 2-go, mając dane trzy jéj styczne i jedno ognisko.

(184). Wykréślić krzywą stopnia 2-go, mając dane trzy punkty i jednę kierownicę.

(185). Wykréślić parabolę, mając dane jedno jéj ognisko i dwa punkty.

(186). Wykréślić parabolę, mając dane jednę jéj kierownicę i dwa punkty.

(187). Wykréślić hiperbolę, mając dane trzy jéj punkty i kierunki asymptot.

(188). Wykréślić hiperbolę, mając dane położenie jednéj jéj asymptoty, jeden wiérzchołek główny i jeden punkt.

(189). Znaléść miejsce wiérzchołka głównego paraboli, któréj ogniskiem jest dany punkt, a styczną dana prosta.

(190). Znaléść miejsce ogniska krzywéj stopnia 2-go, wpisanéj w dany równoległobok.

(191). Znaleść miejsce ogniska i wiérzchołka głównego hiperboli, dla któréj jedna z dwu danych prostych przedstawia położenie jednéj asymptoty, a druga jednéj kierownicy.

(192). Znaléść miejsce środka krzywéj stopnia 2-go, przechodzącéj przez cztéry punkty spólne dwu danym krzywym stopnia 2-go.

(193). Znaléść miejsce środka hiperboli, któréj ogniskiem jest jeden z dwu danych punktów, a drugi punktem przecięcia się jéj z prostą daną, równoległą do jednéj jéj asymptoty.

(194). Znaiéść miejsce wiérzchołków głównych hiperboli równobocznéj, przechodzącéj przez punkt dany, któréj jedną z asymptot jest prosta dana.

(195). Znaléść miejsce środka hiperboli równobocznéj, opisanéj na danym trójkącie.

(196). Znaléść miejsce ogniska paraboli, któréj stycznymi są dane dwie proste, a dany punkt na jednéj z tych prostych jéj punktem styczności.

(197). Dane trzy punkty A, B, C i prosta, a odcinek zmienny MN téj prostéj jest widziany z punktu A pod danym kątem: znaléść punkt przecięcia się prostych BM i CN.

(198). Koło zmienne jest styczne do danéj elipsy w punkcie danym: znaléść miejsce punktu przecięcia się stycznych do obu tych krzywych.

ROZDZIAŁ XIV.

ZARYS TEORYI KRZYWYCH ALGIEBRAICZNYCH RZĘDU n-GO.

197. Liczba punktów wyznaczających krzywą algiebraiczną rzędu n-ego. Równanie ogólne krzywéj algiebraicznéj rzędu n-go

$$(1)\quad 0=f(x,y)\equiv a+(bx+b_1y)+(cx^2+c_1xy+c_2y^2)+\ldots+(gx^n+g_1x^{n-1}y+\ldots+g_ny^n)$$

zawiéra

$$(2)\qquad 1+2+3+\ldots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

spółczynników stałych $a, b, b_1, c, \ldots, g_n$. Stąd wnosimy, że *istnieje zawsze krzywa algiebraiczna rzędu n-ego, przechodząca przez* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ *punktów danych* $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots,$ *i — mówiąc wogólności — tylko jedna taka krzywa.*

Jakoż, wyrażając, że krzywa (1) przechodzi przez te punkty, miéć będziemy równania warunkowe

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a+bx_1+b_1y_1+cx_1^2+\ldots.=0,\\ a+bx_2+b_1y_2+cx_2^2+\ldots.=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

które wyznaczają stosunki spółczynników $a, b, b_1, c, \ldots.$ W równaniu więc krzywéj pozostanie niewyznaczony tylko czynnik stały, którego wartość jest obojętną. Z równań (1) i (3) otrzymujemy

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & x^2, & \ldots \\ 1, & x_1, & y_1, & x_1^2, & \ldots \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2^2, & \ldots \\ \ldots & & & & \end{vmatrix}=0,$$

t. j. równanie krzywéj, przechodzącéj przez punkty dane. Należy wszakże zauważywć, że jeżeli wyznacznik równań (3)

$$\begin{Vmatrix} 1, x_1, y_1, x_1^2, \ldots \\ 1, x_2, y_2, x_2^2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{Vmatrix} = 0,$$

t. j. jeżeli $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ z $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ wyznaczników, które otrzymamy z symbolu po stronie lewéj przez opuszczenie każdéj pokolei kolumny, jest równych 0, to wówczas równania (3) nie wyznaczają stosunków między spółczynnikami $a, b, b_1, c, \ldots$; albowiém wtedy otrzymywane wartości tych stosunków przedstawiają się w postaci nieoznaczonéj $\frac{0}{0}$. W tym więc przypadku mieć będziemy nieskończenie wiele krzywych, przechodzących przez punkty dane.

198. Jeżeli liczba punktów danych jest równa $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$, wówczas liczba równań warunkowych kształtu (3) będzie o 1 mniejszą, aniżeli w przypadku poprzedzającym. Rugując wtedy z równań (1) i (3) $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$ stosunków między spółczynnikami, otrzymamy równanie

$$\begin{vmatrix} a+bx, y, x^2, \ldots \\ a+bx_1, y_1, x_1^2, \ldots \\ a+bx_2, y_2, x_2^2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

czyli

$$a\varphi + b\psi = 0, \tag{6}$$

gdzie φ i ψ są funkcyjami wyznaczonymi stopnia n-go, a stosunek stałych a i b pozostaje dowolnym. Zmieniając ten stosunek, otrzymamy p ę k k r z y w y c h r z ę d u n-g o, z których każda przechodzi przez punkty dane.

Atoli krzywe pęku przechodzą przez wszystkie punkty, w których się przecinają krzywe $\varphi = 0$ i $\psi = 0$. Że zaś dwie krzywe rzędu n-go przecinają się w n^2 punktach, przeto, wrazie, gdy $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 < n^2$ (co ma miejsce przy $n > 2$), wszystkie krzywe pęku przechodzą jeszcze przez $n^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2$ punktów, prócz $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$ punktów danych, wyznaczających pęk. Mamy zatym twierdzenie: *wszystkie krzywe algiebraiczne rzędu n-go, przechodzące przez* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 2$ *punktów, przechodzą jednocześnie przez* $n^2 - \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 2$ *innych punktów, odpowiednio przez tamte wyznaczonych.* Lubo więc $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$ punktów wyznacza wogóle krzywą algiebraiczną rzędu n-go, to jednak, wrazie, gdy jeden z danych punktów jest taki, iż on, według powyższego twierdzenia, jest wyznaczony przez

$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-2$ z danych punktów, krzywa nie jest przez te punkty wyznaczona.

199. Wszczególności, jeżeli $n=3$, mamy twierdzenie: *wszystkie krzywe rzędu 3-go, przechodzące przez 8 punktów danych, mają nadto punkt dziewiąty spólny.* Z tego twierdzenia można wyprowadzić dowodzenie twierdzenia Pascal'a (art. 162). Jakoż, niech (fig. 52) 1, 2, 3, 4, 5, 6 będą następującymi po sobie bokami sześcioboku wpisanego w krzywą stopnia 2-go; (1, 4), (2, 5), (3, 6) punktami przecięcia się boków przeciwległych 1 i 4, 2 i 5, 3 i 6. Boki nieparzyste tworzą łącznie liniję C_1 rzędu 3-go; boki parzyste tworzą łącznie drugą liniję C_2 rzędu 3-go; nakoniec krzywa stopnia 2-go C i prosta D, przechodząca przez punkty (1, 4), (2, 5), tworzą łącznie trzecią liniję C_3 rzędu 3-go. Linija C_3 przechodzi przez 8 punktów przecięcia się linij C_1 i C_2, mianowicie przez punkty (1, 2), (1, 4), (1, 6); (3, 2), (3, 4); (5, 2), (5, 4), (5, 6); a zatym przechodzi i przez punkt dziewiąty (3, 6). Skoro zaś ten punkt nie leży na krzywéj C, więc znajduje się on na prostéj D. A zatym punkty (1, 4), (2, 5) i (3, 6) leżą na jednéj prostéj.

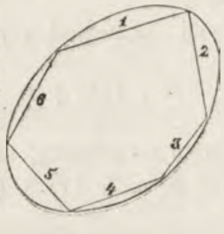


Fig. 52.

200. Dwie krzywe algiebraiczne, z których jedna jest rzędu m-go, a druga rzędu n-go, mają mn punktów spólnych; albowiém liczba układów wartości na dwie niewiadome x, y, czyniących jednocześnie zadość dwu równaniom

$$f(x, y)=0 \quad \text{i} \quad \varphi(x, y)=0,$$

z których jedno jest stopnia m-go, a drugie stopnia n-go, jest równa mn. Stąd wnosimy, że *przez* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ *punktów danych nie można poprowadzić krzywéj algiebraicznéj rzędu n-go właściwéj, jeżeli więcéj, aniżeli* mn *z tych punktów leży na krzywéj rzędu m-go, przy* $m<n$. Albowiém, jeżeliby to było możebne, wówczas krzywa rzędu n-go miałaby z krzywą rzędu m-go więcéj, aniżeli mn punktów spólnych. Lubo więc, w tym przypadku, punkty dane wyznaczają równanie stopnia n-go, jednak to równanie jest przywiedlnym, t. j. jest iloczynem równań stopni niższych, tak, iż przedstawia układ krzywych rzędów niższych. *Ażeby linija rzędu n-go, przechodząca przez* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ *danych punktów, mogła być krzywą właściwą, conajwięcéj* $mn-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *z tych punktów może leżéć na krzywéj rzędu m-go, przy* $m<n$. Jakoż, jeżeliby na krzywéj rzędu m-go leżał o jeden punkt więcéj, to natenczas przez pozostałe punkty, których jest

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1-mn+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-1=\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)-1,$$

możnaby poprowadzić krzywą rzędu $(n-m)$-go. Ta krzywa rzędu $(n-m)$-go z krzywą rzędu m-go tworzyłyby liniją rzędu n-go, przechodzącą przez $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ punktów danych; a zatym, według twierdzenia art. 197, nie możnaby wtedy przez te punkty żadnéj innéj linii rzędu n-go poprowadzić. — Tak np., linija rzędu 3-go, przechodząca przez 9 punktów, których 6 leży na krzywéj stopnia 2-go, jest układem téj krzywéj i prostéj, przechodzącéj przez trzy pozostałe punkty.

201. Punkty wielokrotne. *Prostą przecina krzywą algiebraiczną rzędu n-ego w n punktach.* Jakoż, weźmy pod uwagę jakąkolwiek prostą. Niech x, y będą spółrzędnymi punktu p danego na téj prostéj, a X, Y spółrzędnymi jéj punktu bieżącego P; oznaczmy przez r odległość zmienną pP, a przez l i m dostawy kątów, które kierunek pP téj prostéj czyni z kierunkami dodatnymi osi x i y, do siebie prostopadłych. Mamy wtedy

$$\text{(1)} \qquad X = x + lr, \quad Y = y + mr.$$

Jeżeli punkt P jest punktem przecięcia się prostéj pP z krzywą algiebraiczną rządu n-go

$$\text{(2)} \qquad f(X, Y) = 0,$$

natenczas wartości (1) na X, Y' uczynią zadość równaniu (2), t. j. będzie

$$\text{(3)} \qquad f(x + lr, \quad y + mr) = 0.$$

To równanie daje wartości na odległość r punktu przecięcia się prostéj (1) z krzywą (2) od punktu p. Pozostaje okazać, że równanie (3) jest względem r stopnia n-go. W tym celu nieodzowna wyprowadzić uprzednio pewien wzór zasadniczy z dziedziny rachunku różniczkowego.

202. Niech $f(x)$ będzie funkcyą zmiennéj x całkowitą stopnia n-go,

$$\text{(4)} \qquad f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. + a_n x^n.$$

Oznaczmy

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} f'(x) \equiv a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} \\ f''(x) \equiv \quad 2a_2 + \ldots\ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) \equiv \qquad n(n-1)(n-2)\ldots 2 . 1 a_n. \end{cases}$$

Funkcyje (5), z których piérwsza otrzymuje się z funkcyi $f(x)$ przez zmniejszenie w każdym wyrazie wykładnika potęgi x-a o 1 i przez pomnożenie tegoż wyrazu przez wykładnik pierwotny, a każda następująca według tego samego prawidła wyprowadzić się daje z poprzedzającéj, zowią się pochodnymi funkcyi $f(x)$, a mianowicie $f'(x)$ pochodną piérwszą, albo rzędu 1-go, $f''(x)$ pochodną drugą,..., $f^{(n)}(x)$ pochodną n-ą. Widoczna, że »pochodna n-a funkcyi całkowitéj stopnia n-go jest liczbą stałą«, skąd znowu wynika, że »pochodne następne są równe 0«. — Te pochodne będziemy oznaczali sposobem przyjętym w rachunku różniczkowym odpowiednio przez $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, ..., $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, t. j.

$$(6) \qquad f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}, \quad f''(x) \equiv \frac{(d^2fx)}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcyją całkowitą stopnia n-go np. z dwiema zmiennymi x i y, od siebie niezależnymi,

$$(7) \qquad f(x, y) \equiv a + bx + b_1y + cx^2 + c_1xy + c_2y^2 + \ldots.$$

Jeżeli téj funkcyi weźmiemy naprzód pochodną i-ą względem x, t. j. uważając y za liczbę stałą, a następnie téj pochodnéj pochodną k-ą względem y, t. j. przyjmując, że przytym x jest liczbą stałą, to otrzymamy pewną funkcyją — wogóle — obu zmiennych, która zowie się pochodną $(i+k)$-ą, wziętą i razy względem x, a k razy względem y. Tę pochodną oznaczać będziemy sposobem przyjętym w rachunku różniczkowym przez $\frac{\partial^{i+k}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^k}$. Tak np., dla

$$f(x, y) \equiv a + bx + b_1y + cx^2 + c_1xy + c_2y^2$$

mamy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = b + 2cx + c_1y,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = b_1 + c_1x + 2c_2y,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = c_1, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2c_2.$$

»Wszystkie pochodne n-te funkcyi całkowitéj stopnia n-go są liczbami stałymi«. »Wartość pochodnéj, wziętéj względem obu zmiennych, nie zależy od porządku, w jakim się je bierze względem oddzielnych zmiennych«. Prawdziwość tych twierdzeń uwidoczniona w powyższych wzorach.

203. Podstawmy we wzorze (4) $x + h$ za x; będzie wtedy

$$f(x+h) \equiv a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n.$$

A gdy poszczególne potęgi dwumianu $x + h$ rozwiniemy zapomocą wzoru Newton'a i stronę drugą uporządkujemy podług potęg rosnących liczby h, to wypadnie, według (5) i (6),

$$(8) \qquad f(x+h) \equiv f(x) + \frac{h}{1}\frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Podstawmy taksamo we wzorze (7) $x + h$ i $y + k$ za x i y. Rozwijając $f(x+h, y+k)$ podług potęg rosnących liczby h zapomocą wzoru (8), mamy

$$f(x+h, y+k) \equiv f(x, y+k) + \frac{h}{1}\frac{\partial f(x, y+k)}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2 f(x, y+k)}{\partial x^2} + \ldots +$$
$$+ \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n f(x, y+k)}{\partial x^n}.$$

Gdy zaś następnie, zapomocą tego samego wzoru, rozwiniemy

$$f(x, y+k),\quad \frac{\partial f(x, y+k)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 f(x, y+k)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} f(x, y+k)}{\partial x^{n-1}}$$

podług potęg rosnących liczby k i uwzględnimy, że $\frac{\partial^n f(x, y+k)}{\partial x^n}$ jest liczbą od x i y niezależną, a więc, że zamiast $\frac{\partial^n f(x, y+k)}{\partial x^n}$ można pisać $\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n}$, wówczas

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) \equiv f(x, y) &+ \frac{k}{1}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{k^2}{1.2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \ldots + \frac{k^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} \\ &+ \frac{h}{1}\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{k}{1}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \ldots + \frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x \partial y^{n-1}}\right\} \\ &+ \frac{h^2}{2}\left\{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \ldots + \frac{k^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \end{aligned}$$

Oznaczywszy, dla skrócenia, przy $i=1, 2, \ldots, n$,

$$(9)\qquad \Delta^i f(x, y) \equiv \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^i} h^i + \binom{i}{1}\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^{i-1}\partial y} h^{i-1}k + \ldots + \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial y^i} k^i,$$

możemy wzorowi poprzedniemu nadać postać

$$(10)\ f(x+h,\ y+k) \equiv f(x,y) + \frac{1}{1}\Delta f(x,y) + \frac{1}{1.2}\Delta^2 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\Delta^n f(x,y).$$

Wzory (8) i (10) zowią się wzorami Taylor'a.

Taksamo można rozwinąć funkcyją trzech lub więcéj zmiennych.

204. Rozwińmy zapomocą wzoru (10) lewą stronę równania (3) podług potęg rosnących liczb lr i mr. Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(11)\qquad f(x, y) + \frac{r}{1}\Delta f(x,y) + \frac{r^2}{1.2}\Delta^2(x, y) + \ldots + \frac{r^n}{1.2\ldots n}\Delta^n f(x, y) = 0,$$

gdzie, przy $i=1, 2, \ldots, n$,

$$(12)\qquad \Delta^i f(x, y) = \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^i} l^i + \binom{i}{1}\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^{i-1}\partial y} l^{i-1}m + \ldots + \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial y^i} m^i.$$

Równanie (11) jest stopnia n-go względem r, co dowodzi, że prosta (1), pP, a więc jakakolwiek prosta, przecina krzywą algiebraiczną rzędu n-go (2) w n (i tylko w n) punktach. Te punkty albo mogą być wszystkie rzeczywiste, albotéż niektóre z nich, a niekiedy wszystkie mogą być urojone, co zależy od tego, jakimi są pierwiastki równania (11).

205. Załóżmy, że spółrzędne punktu danego p czynią zadość równaniu

$$f(x, y) = 0,$$

t. j. że punkt p leży na krzywéj (1), a nadto, że spółczynniki kierunkowe l i m prostéj pP czynią zadość równaniu warunkowemu

$$(13) \qquad 0 = \Delta f(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} l + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} m.$$

W tym przypadku, równanie (11) ma czynnik r^2, co dowodzi, że prosta pP ma z krzywą (1) w p dwa punkty spólne, prócz $p-2$ innych punktów. Taką prostą nazywamy **styczną** krzywéj (1) w punkcie p, który znowu zowie się **punktem styczności**.

Ostatnie równanie daje wartość na stosunek $l:m$ spółczynników kierunkowych stycznéj. Otrzymamy zatym równanie stycznéj, mnożąc owe równanie przez r, a następnie podstawiając w nim za lr i mr wartości $X-x$ i $Y-y$, wynikające ze związków (1). Równanie więc stycznéj do krzywéj (1) w punkcie (x, y) jest

$$(14) \qquad (X-x)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Z tego równania czytamy, że styczna w punkcie (x, y) jest prostą oznaczoną, wyjąwszy przypadek, kiedy spółrzędne tego punktu czynią zadość nietylko równaniu $f(x, y) = 0$, ale jednocześnie równaniom $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$. Tym przypadkiem zajmiemy się teraz szczegółowiéj.

206. Niech będzie jednocześnie

$$(15) \qquad f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

W tym przypadku, równanie warunkowe $\Delta f(x, y) = 0$ staje się tożsamościowym, a przeto każda prosta, wychodząca z punktu p, określonego równaniami (15), przecina krzywą (1) w dwu punktach, schodzących się razem z punktem p. Ten punkt, t. j. punkt określony równaniami (15), nazywamy **punktem podwójnym** krzywéj (1).

Pomiędzy prostymi, wychodzącymi z punktu podwójnego, znajdują się takie dwie, które w tym punkcie przecinają krzywą w trzech punktach; albowiem jeżeli spółczynniki kierunkowe l, m czynią zadość równaniu kwadratowemu

$$(16) \qquad 0 = \Delta^2 f(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} l^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} lm + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} m^2,$$

wówczas trzy pierwiastki równania (11) będą równe 0. Te dwie osobliwe proste nazywamy stycznymi do krzywéj (2) w punkcie podwójnym p. Otrzymamy równanie tych dwu stycznych, mnożąc równanie (16) przez r^2, a następnie zamiast lm i mr podstawiając w nim $X-x$ i $Y-y$. Równaniem więc tych stycznych jest

$$(17) \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}(X-x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}(X-x)(Y-y) + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}(Y-y)^2 = 0.$$

Ponieważ krzywa $f(x, y) = 0$ w punkcie podwójnym posiada dwie styczne, zatym widoczna, że w tym punkcie przecinają się dwie gałęzi krzywéj. Należy wszakże rozróżnić trzy przypadki punktu podwójnego.

a. Jeżeli równanie (16) daje na stosunek $l:m$ dwie wartości rzeczywiste i od siebie różne, wtedy obie styczne w punkcie podwójnym istnieją rzeczywiście. W tym więc przypadku, dwie rzeczywiste gałęzi krzywéj przecinają się w punkcie podwójnym. Taki punkt podwójny nazywa się węzłem krzywéj.

b. Jeżeli pierwiastki równania (16) są zespolone, wtedy dwie styczne w punkcie podwójnym nie istnieją w rzeczywistości, albo raczéj są urojone i sprzężone, a zatym przecinają się w punkcie rzeczywistym. W tym przypadku, przez punkt podwójny, lubo on stanowi część składową krzywéj, nie przechodzi żadna rzeczywista gałąź krzywéj. Taki punkt podwójny nazywa się punktem odosobnionym krzywéj.

b. Jeżeli oba pierwiastki równania (16) są sobie równe, wtedy obie styczne w punkcie podwójnym razem się z sobą schodzą. Taki punkt podwójny zowie się punktem zwrotu krzywéj. Według tego określenia, punkt podwójny, określony równaniami (15), będzie punktem węzłowym, punktem odosobnionym, lub punktem zwrotu, według tego, czy wyróżnik lewéj strony równania (16), t. j. wyrażenie

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

posiada w tym punkcie wartość ujemną, dodatną, czytéż równą 0.

207. Trzy rodzaje punktów podwójnych krzywéj algiebraicznéj uwidocznimy na przykładzie. Weźmy pod uwagę t. z. parabolę rzędu 3-go, t. j. krzywą, daną przez równanie

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c),$$

w którym zakładamy, że

$$0 < a < b < c.$$

Z tego równania widzimy, że parabola rzędu 3-go leży całkowicie po prawéj stronie osi y-ów (gdyż, dla $x<0$, y jest liczbą urojoną), tudzież, że oś x-ów jest osią symetryi téj krzywéj (gdyż, dla $x>0$, y przyjmuje dwie wartości, różniące się tylko znakiem). Dla $x=a$, $x=b$ i $x=c$, jest $y=0$;

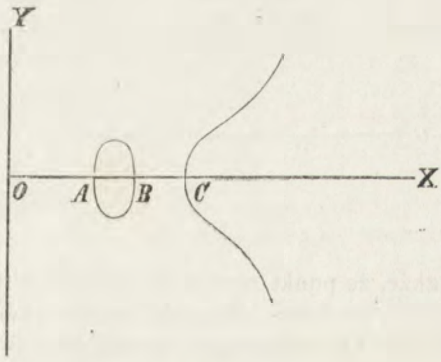


Fig. 53.

a zatym, jeżeli (fig. 53) $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, to krzywa przechodzi przez punkty A, B, C. Gdy nadto

dla $x<a$ rzędna y posiada wartość urojoną,
„ $a<x<b$ „ „ „ „ rzeczywistą i skończoną,
„ $b<x<c$ „ „ „ „ urojoną, a
„ $x>c$ „ „ „ „ rzeczywistą i razem z x wzra-

stającą do nieskończoności, więc widocznie krzywa składa się z dwu części od siebie oddalonych: z jajka (owalu), zawartego między A i B, i z gałęzi nieskończonéj, poczynającéj się w punkcie C. Figura 53 wskazuje kształt téj krzywéj.

Zrobimy teraz trzy założenia względem wartości liczb a, b, c.

a. Niechaj naprzód $b = c$. W tym przypadku, punkt B schodzi się z punktem C (fig. 54), wskutek czego owal łączy się w B z gałęzią nieskończoną; punkt B staje się punktem podwójnym, w którym krzywa samę siebie przecina. Równanie zatym

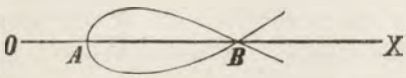


Fig 54.

$$y^2 = (x - a)(x - b)^2,$$

w którym $a < b$, przedstawia krzywą z punktem węzłowym $(b, 0)$.

b. Niech następnie $a = b$. W tym przypadku, owal ściągnął się w jeden punkt A (fig. 55), zupełnie odosobniony od gałęzi nieskończonéj. Równanie zatym

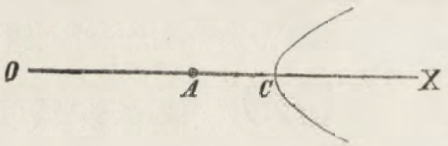


Fig. 55.

$$y^2 = (x - a)^2 (x - c),$$

w którym $a < c$, przedstawia krzywą z punktem odosobnionym, a do niéj należącym $(a, 0)$.

c. Niech nakoniec $a = b = c$. W tym przypadku, owal ściągnął się w jeden punkt A (fig. 56) i złączył się z gałęzią nieskończoną, wskutek tego, że wiérzchołek C téj gałęzi zeszedł się z tym punktem. Mamy teraz tylko gałąź nieskończoną z wiérzchołkiem w A, który jest punktem zwrotu krzywéj. Równanie zatym

Fig. 56.

$$y^2 = (x - a)^3$$

przedstawia krzywą z punktem zwrotu $(a, 0)$.

Z tego przykładu widzimy także, że punkt zwrotu jest punktem podwójnym odmiennego rodzaju, aniżeli punkt węzłowy, lub punkt odosobniony. Jakoż, jeden warunek $(b = c$, lub $a = b)$ był potrzebny, aby krzywa $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ posiadała węzeł, lub punkt odosobniony, gdy tymczasem dwu warunkom $(a = b = c)$ stać się musiało zadość, aby ta krzywa posiadała punkt zwrotu. Dlategotéż, mówiąc następnie, że punkt jest podwójnym, zwykle rozumiéć przez to będziemy albo węzeł, albo punkt odosobniony. To samo wypada z artykułu 206. Albowiém dwie spółrzędne punktu zwrotu powinny uczynić zadość nietylko trzem równaniom (15), ale jeszcze równaniu

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right\}^2 = 0.$$

208. Załóżmy, że oprócz (15) jest także $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} =$ $= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$, i przyjmijmy, dla większéj ogólności, że taksamo rzecz się ma z wszystkimi pochodnymi rzędu 3-go,..., $(k-1)$-go, lecz, że przynajmniéj jedna z pochodnych rzędu k-go jest $\gtrless 0$. Równanie (11) będzie wtedy miało k pierwiastków równych 0, co dowodzi, że każda prosta, przez punkt $p(x, y)$ przechodząca, ma w tym punkcie z krzywą $f(x, y) = 0$ k punktów spólnych. Punkt p jest w tym przypadku punktem k-krotnym krzywéj algiebraicznéj $f(x, y) = 0$. Pomiędzy prostymi, przechodzącymi przez punkt k-krotny krzywéj, znajduje się k takich, z których każda ma w tym punkcie jeszcze jeden punkt spólny z krzywą. Jakoż, jeżeli

$$(18) \quad 0 = \Delta^k f(x, y) \equiv \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^k} l^k + \binom{k}{1} \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k-1} \partial y} l^{k-1} m + \ldots + \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial y^k} m^k,$$

natenczas każda z k prostych, przechodzących przez punkt k-krotny p, których spółczynniki czynią zadość równaniu (18) stopnia k-go względem $l : m$, mieć będzie w p $k+1$ punktów spólnych z krzywą. Te proste nazywamy stycznymi do krzywéj w punkcie k-krotnym p. Stosownie zaś do tego, jakimi są pierwiastki równania (18), punkt k-krotny posiadać będzie różne cechy.

Każdy punkt k-krotny można uważać jako skupienie $\frac{1}{2} k(k-1)$ punktów podwójnych. Albowiém, gdy k gałęzi krzywéj wzajemnie się przecina, to istnieje $\frac{1}{2} k(k-1)$ punktów podwójnych. Jeżeli zaś te wszystkie gałęzi przechodzą przez jeden punkt, to wtedy zamiast $\frac{1}{2} k(k-1)$ punktów podwójnych występuje jeden punkt k-krotny.

Spółrzędne punktu k-krotnego uczynić mają zadość conajmniéj

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k+1),$$

równaniom warunkowym. Stąd wynika, że, jeżeli chodzi o wyznaczenie równania krzywéj zapomocą punktów, to każdy punkt k-krotny należy uważać jako równoważny $\frac{1}{2} k(k+1)$ conajmniéj punktom zwyczajnym (pojedyńczym).

209. Rodzaj krzywéj algiebraicznéj. — *Krzywa algiebraiczna rzędu n-go może mieć conajwięcéj $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktów podwójnych, jeżeli się nie roskłada na krzywe rzędów niższych.* Jakoż, załóżmy, że ma ona punktów podwójnych o jeden więcéj. W tym przypadku, przez $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ punktów podwójnych krzywych f i przez $n-3$ innych punktów (pojedyńczych), dowolnie na niéj obranych, a więc przez

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1 + n - 3 = \frac{1}{2}(n-1)n - 1$$

punktów możnaby nakréślić krzywą φ rzędu $(n-2)$-go, którąby z krzywą f miała

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right\}+n-3=n(n-2)+1$$

punktów spólnych (rachując każdy punkt podwójny krzywéj f jako dwa punkty przecięcia się obu tych krzywych).

Atoli dwie krzywe rzędu n-go i $(n-2)$-go mogą miéć tylko $n(n-2)$ punktów spólnych, jeżeli one nie mają, przynajmniéj częściowo, zejść się z sobą razem. A zatym krzywa f, mając część spólną z krzywą φ, sama roskłada się na więcéj krzywych. Jeżeli oznaczymy przez d liczbę punktów podwójnych (węzłów, lub punktów odosobnionych), a przez r liczbę punktów zwrotu krzywéj rzędu n-go, natenczas, według dowiedzionego dopiéroco twierdzenia, mamy

$$d+r\leqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Różnicę

$$p\equiv\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-(d+r)$$

nazywamy r o d z a j e m krzywéj algiebraicznéj rzędu n-go i oznaczamy przez p.

210. *Jeżeli rodzaj linii krzywéj algiebraicznéj jest równy 0, t. j. jeżeli krzywa posiada największą możebną ilość punktów podwójnych, wówczas spółrzędne któregokolwiek punktu krzywéj można wyrazić jako funkcyje wymierne jednego parametru* (jednéj liczby zmiennéj).

Jakoż, przez $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktów podwójnych krzywéj rzędu n-go $f(x,y)=0$ i przez $n-3$ punktów pojedyńczych, obranych dowolnie na téj krzywéj, a więc przez pewnych $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-3=\frac{1}{2}(n-1)n-2$ punktów, można sobie wystawić poprowadzony pęk krzywych rzędu $(n-2)$-go. Niech

$$\varphi(x,y,\lambda)\equiv\varphi_1(x,y)+\lambda\varphi_2(x,y)=0$$

będzie równaniem tego pęku, gdzie λ jest parametrem nieoznaczonym, a φ_1 i φ_2 są dwiema funkcyjami rzędu $(n-2)$-go, w zupełności przez powyższe punkty wyznaczonymi. Wyrugujmy z równań $f(x,y)=0$ i $\varphi(x,y,\lambda)=0$ jednę niewiadomą, np. y; niech

$$\psi(x)=0$$

będzie równaniem wypadkowym. To równanie jest stopnia $n(n-2)$-go względem x, stopnia $(n-2)$-go względem spółczynników równania $f=0$, a stopnia n-go względem spółczynników równania $\varphi=0$. Ponieważ spółczynniki równania $\varphi=0$ są funkcyjami linijowymi parametru λ, zatym spółczynniki równania $\psi(x)=0$ są względem λ funkcyjami stopnia n-go. Pierwiastkami równania wypadkowego są: odcięte punktów, w których się przecinają dwie krzywe $f=0$ i $\varphi=0$, a więc odcięte $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktów podwójnych krzywéj $f=0$, z których każda jest pierwiastkiem podwójnym równania $\psi(x)=0$; odcięte $n-3$ punktów pojedyńczych, któreśmy dowolnie obrali na krzywéj $f=0$; a nadto, z uwagi, że

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-3\right\}=n(n-2)-1,$$

odcięta jeszcze jednego punktu przecięcia się dwu krzywych $f=0$ i $\varphi=0$. A zatym, jeżeli z równania wypadkowego $\psi(x)=0$ usuniemy zapomocą dzielenia $n(n-2)-1$ czynników dwumiennych, z których każdy jest różnicą między x i jednym z tych pierwiastków wiadomych, wówczas pozostanie jeden tylko czynnik dwumienny, w który wchodzi jedyny pierwiastek niewiadomy. Przyrównywając do zera ten właśnie czynnik dwumienny, otrzymamy ów pierwiastek, jako funkcyją wymierną stopnia n-go parametru λ. Ten pierwiastek oznacza odciętą punktu na $f=0$, przez który przechodzi krzywa pęku $\varphi=0$; zmieniając λ, otrzymywać będziemy coraz inny punkt krzywéj $f=0$, a więc i coraz inną odciętą tego punktu.

Spółrzędna zatym x punktu jakiegokolwiek na $f=0$ wyrazi się przez

$$x=\chi(\lambda),$$

gdzie $\chi(\lambda)$ oznacza funkcyją parametru λ wymierną. Otrzymamy zaś wartość odpowiednią na y, gdy metodą, używaną przy poszukiwaniu największego spólnego dzielnika, znajdziemy pierwiastek spólny dwu równań

$$f[\chi(\lambda), y]=0, \quad \varphi[\chi(\lambda), y, \lambda]=0.$$

Ten pierwiastek, t. j. wartość żądana na y, wyrazi się także jako funkcyja wymierna parametru λ, i mieć będziemy

$$y=\omega(\lambda).$$

Krzywe, których spółrzędne x, y mogą być tym sposobem wyrażone jako funkcyje wymierne tego samego parametru λ, nazywają się **krzywymi jednobieżnymi**.

211. Asymptoty krzywych algiebraicznych. Przez **asymptotę** linii krzywéj algiebraicznéj rozumiemy liniją prostą, która tę krzywą przecina w dwu punktach w nieskończoności. Liniją prostą, w obu kierunkach nieograniczoną, można uważać za koło o promieniu nieskończenie wielkim; dlategoteż dwa punkty nieskończenie odległe, w których asymptota przecina krzywą, można uważać za punkt styczności między obiema linijami. A zatym, zgodnie z powyżéj podanym określeniem, *asymptotę krzywéj algiebraicznéj można uważać za styczną do krzywéj w punkcie nieskończenie odległym.* Z tego wypada, że żadna asymptota nie może krzywéj rzędu n-go przecinać w więcéj niż $n-2$ punktach, oprócz dwu punktów, leżących w nieskończoności.

Ażeby znaléść liczbę asymptot krzywéj rzędu n-go i równania tychże asymptot, napiszmy równanie krzywéj w postaci

$$(1)\qquad 0=f(x,y)\equiv f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+f_{n-2}(x,y)+\ldots+f_1(x,y)+a,$$

gdzie f_n, f_{n-1}, $f_{n-2},\ldots f_1$ oznaczają sumy wszystkich wyrazów odpowiednio stopnia n-go, $(n-1)$-go, ..., 1-go, czyli funkcyje jednorodne zmiennych x i y odpowiednio tychże stopni. Ponieważ $f_n(x,y)=x^n f_n\left(1,\frac{y}{x}\right)$, $f_{n-1}(x,y)=x^{n-1}f_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right),\ldots$, przeto równanie (1) można przedstawić także pod postacią

$$(2)\quad 0=f(x,y)\equiv x^n f_n\left(1,\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}f_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+x^{n-2}f_{n-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\\ +\ldots+xf_1\left(1,\frac{y}{x}\right)+a.$$

Weźmy pod uwagę liniją prostą, któréj równanie jest

$$(3)\qquad y=\mu x+\nu.$$

Aby otrzymać odcięte x punktów, w których prosta (3) przecina krzywą, dość w (2) podstawić $\frac{y}{x}=\mu+\frac{\nu}{x}\cdot$ Tymsposobem znajdziemy równanie

$$0=x^n f_n\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)+x^{n-1}f_{n-1}\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)+x^{n-2}f_{n-2}\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)+\\ +\ldots+xf_1\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)+a,$$

które, jak się zaraz przekonamy, jest względem x stopnia n-go. Jakoż, stosując wzór Taylor'a, otrzymamy

$$f_n\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)=f_n(1,\mu)+\frac{\nu}{x}\frac{df_n(1,\mu)}{d\mu}+\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{x^2}\frac{d^2f_n(1,\mu)}{d\mu^2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\;\frac{\nu^n}{x^n}\;\frac{d^nf_n(1,\mu)}{d\mu^n},$$

$$f_{n-1}\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)=f_{n-1}(1,\mu)+\frac{\nu}{x}\frac{df_{n-1}(1,\mu)}{d\mu}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\nu^{n-1}}{x^{n-1}}\frac{d^{n-1}f_{n-1}(1,\mu)}{d\mu_{n-1}},$$

$$f_{n-2}\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)=f_{n-2}(1,\mu)+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\frac{\nu^{n-2}}{x^{n-2}}\frac{d^{n-2}f_{n-2}(1,\mu)}{d\mu},$$

. . . .

$$f_1\left(1,\mu+\frac{\nu}{x}\right)=f_1(1,\mu)+\frac{\nu}{x}\frac{df_1(1,\mu)}{d\mu}.$$

Podstawiając te wartości w równanie ostatnie i, dla skrócenia, oznaczając

$$(4)\left\{\begin{aligned}
A_n\ &=f_n(1,\mu),\\
A_{n-1}&=\nu\frac{df_n(1,\mu)}{d\mu}+f_{n-1}(1,\mu),\\
A_{n-2}&=\frac{\nu^2}{2}\frac{d^2f_n(1,\mu)}{d\mu^2}+\nu\frac{df_{n-1}(1,\mu)}{d\mu}+f_{n-2}(1,\mu),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_0&=\frac{\nu^n}{1.2\ldots n}\;\frac{d^nf_n(1,\mu)}{d\mu^n}+\frac{\nu^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}f_{n-1}(1,\mu)}{d\mu^{n-1}}+\ldots+\nu\frac{df_1(1,\mu)}{d\mu}+a,
\end{aligned}\right.$$

mieć będziemy równanie

(5) $$0 = f(x, \mu x + \nu) \equiv A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_o,$$

które widocznie jest stopnia n-go względem x. Stąd wypada (co już wiadome), że prosta przecina krzywą rzędu n-go w n punktach.

Jeżeli spółczynnik kierunkowy μ prostéj (3) jest pierwiastkiem równania

(6) $$A_n \equiv f_n(1, \mu) = 0,$$

to wówczas równanie (5) sprowadza się do stopnia $(n-1)$-go, a więc jeden jego pierwiastek staje się nieskończonym. Jeżeli nadto wyraz niezależny ν w równaniu prostéj (3) uczyni zadość równaniu warunkowemu

(7) $$A_{n-1} \equiv \nu \frac{df_n(1, \mu)}{d\mu} + f_{n-1}(1, \mu) = 0,$$

wówczas jeszcze drugi pierwiastek równania (5) stanie się nieskończonym. A zatym, jeżeli w (3) za μ i ν podstawimy wartości, otrzymane z równań (6) i (7), to wtedy prosta (3), przecinając krzywą $f(x, y) = 0$ w dwu punktach w nieskończoności, będzie asymptotą téj krzywéj. Równanie (6) jest względem μ stopnia n-go, a więc daje n wartości na μ; dla każdéj z tych wartości wypada z równania (7) tylko jedna wartość na ν. Mamy zatym twierdzenie: *krzywa rzędu n-go posiada n asymptot.*

Niektóre z tych asymptot będą urojone, wrazie jeżeli nie wszystkie pierwiastki równania (6) są rzeczywiste. Atoli, ponieważ każde równanie o spółczynnikach rzeczywistych może mieć tylko parzystą liczbę pierwiastków urojonych, lub zespolonych, przeto dodatkowo można powiedzieć: *krzywa rzędu nieparzystego ma przynajmniéj jednę asymptotę rzeczywistą, a przeto nie może być zamkniętą.*

Jeżeli μ_i jest jednym z pierwiastków równania (6), natenczas, wskutek (7), równanie asymptoty odpowiednéj jest

(8) $$y = \mu_i x - \left\{ f_{n-1}(1, \mu_i) : \frac{df(1, \mu_i)}{d\mu_i} \right\}.$$

212. Zastanowimy się nad pierwiastkami równania (6), określającego kierunki asymptot.

a. Jeżeli pierwiastek μ_i równania (6) czyni zadość równaniu $f_{n-1}(1, \mu_i) = 0$, to równanie asymptoty o tym kierunku jest $y = \mu_i x$, t. j. ta asymptota przechodzi przez początek spółrzędnych. Ogólniéj, jeżeli równanie krzywéj $f(x, y) = 0$ nie zawiéra w sobie wyrazów stopnia $(n-1)$-go, wówczas równania (6) i (7) sprowadzają się do

$$f_n(1, \mu) = 0 \quad \text{i} \quad \nu \frac{df_n(1, \mu)}{d\mu} = 0.$$

Drugie z tych równań, jeżeli $\frac{df_n(1, \mu)}{d\mu} \lesseqgtr 0$, daje $\nu = 0$. W tym więc przypadku, wszystkie asymptoty przechodzą przez początek, a ich równanie będzie wypadkiem rugowania μ z równań $y=\mu x$ i $f_n(1, \mu)=0$, t. j. $f_n\left(1, \frac{y}{x}\right)$, czyli

$$f_n(x, y)=0.$$

Tak np., równanie asymptot hiperboli $ax^2+2bxy+cy^2=d$ jest

$$ax^2+2bxy+cy^2=0.$$

b. Jeżeli równanie $f_n(1, \mu)=0$ ma pierwiastek podwójny, to wtedy jest zarazem $\frac{df_n(1, \mu)}{d\mu}=0$. W tym przypadku, wartość odpowiednia na ν jest nieskończoną [wyjąwszy przypadek, kiedy także $f_{n-1}(1, \mu)=0$], a więc asymptota oddali się też do nieskończoności. Ten przypadek zachodzi w paraboli, któréj równanie można przedstawić pod postacią

$$(ax+by)^2+cx+dy+f=0.$$

Gałęzi krzywéj $f(x, y)=0$, tu należące, zowią się parabolicznymi, gdy tymczasem gałęzi krzywéj, mające asymptoty rzeczywiste i leżące w odległości skończonéj, nazywają się hiperbolicznymi.

c. Jeżeli pierwiastek podwójny μ_i równania $f_n(1, \mu)=0$ jest zarazem pierwiastkiem równania $f_{n-1}(1, \mu)=0$, to wówczas w równaniu (5) tak $A_n=0$, jak i $A_{n-1}=0$, niezależnie od ν, t. j. każda prosta o kierunku μ_i przecina krzywą $f(x, y)=0$ w dwu punktach w nieskończoności. Wszakże pomiędzy tymi prostymi są dwie, z których każda przecina krzywą jeszcze w trzecim punkcie w nieskończoności. Albowiém, jeżeli dla $\mu=\mu_i$, przyjmiemy

$$A_{n-2}\equiv\frac{\nu^2}{2}\frac{d^2f_n(1, \mu)}{d\mu^2}+\nu\frac{df_{n-1}(1, \mu)}{d\mu}+f_{n-2}(1, \mu)=0, \tag{9}$$

skąd wypadają dwie wartości ν'_i i ν''_i na ν, to wówczas trzy pierwiastki równania (5) staną się nieskończenie wielkimi. Te dwie proste $y=\mu_i x+\nu'_i$, $y=\mu_i x+\nu''_i$ nazwiemy asymptotami krzywéj $f(x, y)=0$, odpowiadającymi pierwiastkowi podwójnemu μ_i równania $f(1, \mu)=0$ wrazie, gdy ten pierwiastek jednocześnie czyni zadość równaniu $f_{n-1}(1, \mu)=0$.

d. Jeżeli jeden z pierwiastków równania $f_n(1, \mu)=0$ jest 0 lub ∞, to wówczas odpowiadająca mu asymptota będzie równoległą odpowiednio do osi x-ów, lub do osi y-ów. Te asymptoty można wynaléść bespośrednio z samego równania krzywéj. Jakoż, jeżeli to równanie uporządkujemy podług potęg malejących jednéj zmiennéj, np. x, to

$$0=gx^n+(g_1y+f)x^{n-1}+(g_2y^2+f_1y+e)x^{n-2}+\ldots.$$

Stąd czytamy, że jeżeli $g=0$, to $g_1y+f=0$ będzie asymptotą do osi x-ów równoległą; jeżeli nadto $g_1=0$ i $f=0$, to wówczas $g_2y^2+f_2y+e=0$ przedstawiać będzie dwie asymptoty równoległe do osi x-ów, i t. d. Taksamo znaléść można asymptoty równoległe do osi y-ów.

213. Należałoby jeszcze rozebrać przypadek ogólny, kiedy równanie $f_n(1, \mu)=0$ ma $k<n$ pierwiastków równych; wyprowadziłoby to nas jednak poza granice, nakreślone niniejszemu zarysowi. Poprzestajemy tylko na dowiedzeniu jeszcze twierdzenia następującego:

Jeżeli równanie krzywéj rzędu n-go daje się sprowadzić do postaci

$$0=f(x, y)\equiv(y+ax+b)\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}, \tag{10}$$

gdzie φ_{n-1} *i* φ_{n-2} *oznaczają funkcyje odpowiednio stopnia* $(n-1)$*-go i* $(n-2)$*-go, to prosta*

$$y+ax+b=0$$

jest asymptotą téj krzywéj.

Jakoż, jeżeli w równaniu (10) podstawimy $y=-(ax+b)$, to równanie (10) nie będzie zawiérało wyrazów stopnia n-go i $(n-1)$-go, a przeto w równaniu (5) $A_n=0$ i $A_{n-1}=0$. Stąd wynika, że równanie np. krzywéj rzędu 3-go, która ma trzy asymptoty rzeczywiste, powinno się dać przywiéść do postaci

$$(y+a_1x+b_1)(y+a_2x+b_2)(y+a_3x+b_3)=lx+my+n,$$

a z tego widzimy, że trzy punkty w odległości skończonéj, w których te trzy asymptoty

$$y+a_1x+b_1=0,\quad y+a_2x+b_2=0,\quad y+a_3x+b_3=0$$

przecinają krzywą rzędu 3-go, leżą na prostéj $lx+my+n=0$.

Rozwiązując równanie (10) względem $y+ax+b$ i dzieląc obie strony przez $\sqrt{1+a^2}$, otrzymamy

$$\frac{y+ax+b}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1}}.$$

Piérwsza strona tego równania wyraża odległość prostopadłą punktu (x, y) na krzywéj (10) od asymptoty $y+ax+b=0$. Przyjmijmy, że x i y rosną do nieskończoności. Ułamek $\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1}}$ jest właściwy; przeto granica, do któréj ten ułamek zdąża dla $x=y=\infty$, jest równą 0. Stąd wypada, że również odległość prostopadła punktu na gałęzi krzywéj od asymptoty téj gałęzi zmiejsza się nieograniczenie, dążąc do 0, wmiarę jak ten punkt oddala się do nieskończoności. Zatym: *asymptota jest styczną do krzywéj.*

Jeżeli asymptotę $y+ax+b=0$ weźmiemy za oś x-ów nowego układu spółrzędnych, to natenczas zapomocą odpowiedniéj zmiany spółrzędnych można równanie (10) przywiéść do postaci

$$y\psi_{n-1}+\psi_{n-2}=0,\quad\text{czyli}\quad y=-\frac{\psi_{n-2}}{\psi_{n-1}}.$$

Ponieważ tak dla $x=+\infty$, jak i dla $x=-\infty$, ułamek $\frac{\psi_{n-2}}{\psi_{n-1}}$ dąży do granicy 0, jest więc $y=0$ i dla $x=+\infty$ i dla $x=-\infty$. Stąd wnosimy, że oba punkty w nieskończoności, w których asymptota przecina krzywą, są niejako dwoma końcami téj asymptoty przedłużonéj do nieskończoności w obu kierunkach.

214. Twierdzenie Euler'a o funkcyjach jednorodnych. Hesyjan. Wyniki badań, które jeszcze zamierzamy przeprowadzić nad krzywymi rzędu n-go, znacznie zręczniéj dadzą się przedstawić, jeżeli odniesiemy równanie krzywéj do układu spółrzędnych trójkątnych, wskutek czego stanie się ono jednorodnym

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \Sigma a_{ijk} x^i_1 x^j_2 x^k_3 = 0, \tag{1}$$

gdzie a_{ijk} są spółczynnikami stałymi, a znak sumy odnosi się do wszystkich wartości i, j, k, całkowitych i dodatnych, lub równych 0, takich, iż

$$i + j + k = n. \tag{2}$$

Oznaczmy, dla skrócenia,

$$\left\{\begin{aligned} &f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad f_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ &f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \qquad f_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \\ &f_{23} = f_{32} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \; f_{31} = f_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \; f_{12} = f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Z (1) wynika

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \Sigma i a_{ijk} x_1^{i-1} x_2^j x_3^k, \\ f_2 &\equiv \Sigma j a_{ijk} x_1^i x_2^{j-1} x_3^k, \\ f_3 &\equiv \Sigma k a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^{k-1}. \end{aligned}$$

Mnożąc te trzy tożsamości odpowiednio przez x_1, x_2, x_3 i następnie dodając je do siebie, otrzymamy nową tożsamość,

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \equiv \Sigma (i + j + k) a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k,$$

lub, wskutek (2) i (1),

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = n f. \tag{4}$$

Wzór (4) wyraża własność zasadniczą funkcyi f, jednorodnéj, stopnia n-go, podaną przez Euler'a. Ponieważ pochodne piérwsze f_1, f_2, f_3 są także funkcyjami jednorodnymi, ale już stopnia o 1 niższego, przeto mamy, wskutek (4) i przy uwzględnieniu oznaczeń (3),

$$\begin{aligned} x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + x_3 f_{13} &\equiv (n-1) f_1, \\ x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + x_3 f_{23} &\equiv (n-1) f_2, \\ x_1 f_{31} + x_3 f_{32} + x_3 f_{33} &\equiv (n-1) f_3. \end{aligned}$$

Wyznacznik pochodnych drugich

$$\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ f_{21}, f_{22}, f_{23} \\ f_{31}, f_{32}, f_{33} \end{vmatrix}$$

odgrywa nader ważną rolę w badaniach następnych; dlatego, dla skrócenia, będziemy go oznaczali literą $H(f)$ a nazywali hesyjanem funkcyi f od nazwy geometry Hesse'go, który piérwszy wskazał wielką jego ważność dla teoryi krzywych algiebraicznych.

215. Styczne krzywéj rzędu n-go. Oznaczmy przez X_1, X_2, X_3 spółrzędne punktu bieżącego P na prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty dane p i p', których spółrzędne są (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3); możemy wtedy przyjąć

(1) $$X_1 = x_1 + \lambda x'_1, \quad X_2 = x_2 + \lambda x'_2, \quad X_3 = x_3 + \lambda x'_3.$$

Znaczenie gieometryczne czynnika λ wyznacza proporcyja

(2) $$pP : Pp' = \lambda : 1.$$

Jeżeli punkt P jest punktem przecięcia się prostéj pp' z krzywą rzędu n-go

(3) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

to wówczas czynnik λ czyni zadość równaniu warunkowemu

$$f(x_1 + \lambda x'_1, \quad x_2 + \lambda x'_2, \quad x_3 + \lambda x'_3) = 0,$$

które, po rozwinięciu lewéj jego strony według wzoru Taylor'a, przybiéra postać

(4) $$f + \lambda \Delta f + \frac{\lambda}{1.2} \Delta^2 f + \ldots + \frac{\lambda^n}{1.2\ldots n} \Delta^n f = 0.$$

W tym równaniu f jest wartością funkcyi $f(x_1, x_2, x_3)$ w punkcie p, a

$$\Delta f \equiv x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + x'_3 f_3,$$

$$\Delta^2 f \equiv x'^2_1 f_{11} + x'^2_2 f_{22} + x'^2_3 f_{33} + 2x'_2 x'_3 f_{23} + 2x'_3 x'_1 f_{31} + 2x'_1 x'_2 f_{12}, \text{ i t. d.};$$

ogólnie, dla $m \leqq n$,

(5) $$\Delta^m f \equiv \Sigma \frac{m!}{i!j!k!} f_{ijk} x'^i_1 x'^j_2 x'^k_3$$

gdzie znak sumy odnosi się podobnież do wartości i, j, k, takich, iż $i+j+k=m$, a f_{ijk} oznacza wartość w punkcie p pochodnéj m-éj $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^i_1 \partial x^j_2 \partial x^{m-i-j}_3}$ funkcyi f.

Równanie (4) jest stopnia n-go względem λ; to dowodzi, że prosta pp' przecina krzywą $f=0$ w n punktach.

Prosta pp' będzie styczną do krzywéj $f=0$ w punkcie p, jeżeli

$$f = 0 \quad \text{i} \quad \Delta f = 0,$$

albowiém wtedy dwa pierwiastki równania (4) są równe 0. Piérwsze z tych równań warunkowych wyraża, że punkt p leży na krzywéj f, a drugie, że punkt p' leży na prostéj

(6) $$X_1 f_1 + X_2 f_2 + X_3 f_3 = 0.$$

Ponieważ równaniu téj prostéj czynią zadość także spółrzędne punktu p, gdyż podług twierdzenia Euler'a, jest teraz

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \equiv nf = 0,$$

przeto równanie (6) jest równaniem stycznéj do krzywéj $f=0$ w punkcie p.

216. Biegunowe krzywéj rzędu n-go i klasa téj krzywéj. Równanie

(1) $$\Delta^m f = 0,$$

którego lewa strona jest określona tożsamością (5) artykułu poprzedzającego, wrazie, gdy w nim uważać będziemy spółrzędne punktu p' jako dane, a spółrzędne punktu p jako bieżące, będzie przedstawiało pewną krzywą rzędu $(n-m)$-go. Albowiém, ponieważ f jest funkcyją stopnia n-go, to pochodne m-te téj funkcyi są funkcyjami stopnia $(n-m)$-go. Tę krzywą nazywamy biegunową m-tą punktu danego p' względem krzywéj rzędu n-go

(2) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Wszczególności

(3) $$\Delta f \equiv x'_1 f + x'_2 f_2 + x'_3 f_3 = 0$$

jest równaniem biegunowéj piérwszéj punktu p' względem téj krzywéj.

Wyprowadźmy z punktu p' styczną do krzywéj $f=0$ i oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 spółrzędne punktu styczności téj nieznanéj stycznéj. Mamy wtedy naprzód równanie warunkowe (2), a następnie, z uwagi, że styczna w tym punkcie przechodzi przez punkt p', będzie miało miejsce również równanie warunkowe (3). A zatym, punkt styczności téj stycznéj jest przecięciem się dwu krzywych (2) i (3), t. j. krzywéj danéj i biegunowéj piérwszéj punktu p' względem krzywéj danéj. Piérwsza z tych krzywych jest rzędu n-go, a druga rzędu $(n-1)$-go; obie przecinają się zatym w $n(n-1)$ punktach. Stąd wnosimy, że *z każdego punktu p' — mówiąc wogólności — można wyprowadzić $n(n-1)$ stycznych do krzywéj rzędu n-go, czyli klasa krzywéj rzędu n-go jest — mówiąc wogólności — równa iloczynowi $n(n-1)$.* Poniżéj okażemy, że wrazie, gdy dana krzywa posiada punkty wielokrotne, to ta liczba odpowiednio się zmniejszy.

217. Punkty przegięcia krzywéj rzędu n-go. Niech (x_1, x_2, x_3) i $(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$ będą spółrzędnymi punktu p i punktu p' na krzywéj rzędu n-go

(1) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Założmy nadto, że punkt p' jest nieskończenie bliski punktu p, a więc, że przyrostki h_1, h_2, h_3 są nieskończenie małe.

Styczna do krzywéj $f=0$ w punkcie p jest przedstawiona przez równanie

(2) $$\sum_{i=1}^{i=3} X_i f_i(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

a równanie stycznéj w punkcie p' do téj saméj krzywéj jest

$$\sum_{i=1}^{i=3} X_i f_i(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ x_3 + h_3) = 0.$$

Zamiast ostatniego równania można, uwzględniając związek (2), pisać

$$\sum_{i=1}^{i=3} X_i [f_i(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ x_3 + h_3) - f(x_1, x_2, x_3)] = 0.$$

Atoli, podług wzoru Taylor'a jest

$$f_i(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ x_3 + h_3) - f_i(x_1, x_2, x_3) = \Delta f_i + \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\Delta^{n-1} f$$

gdzie $$\Delta f_i \equiv h_1 f_{i1} + h_2 f_{i2} + h_3 f_{i3}$$

jest względem h_1, h_2, h_3 wyrażeniem stopnia 1-go, a wyrażenia $\Delta^2 f_i$, $\Delta^3 f_i, \ldots$ zawiérają te nieskończenie małe przyrostki odpowiednio w stopniu 2-im, 3-im,..., a przeto, jako nieskończenie małe względem Δf_i, mogą być opuszczone. Możemy zatym oznaczyć

$$f_i(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ x_3 + h_3) - f_i(x_1, x_2, x_3) = h_1 f_{i1} + h_2 f_{i2} + h_2 f_{i3},$$

wskutek czego równanie stycznéj do $f = 0$ w punkcie p' przywiedzie się do

(3) $$\sum_{i=1}^{i=3} X_i (h_1 f_{i1} + h_2 f_{i2} + h_2 f_{i3}) = 0.$$

Z porównania równań (2) i (3) wypada, że jeżeli

(4) $$\frac{h_1 f_{11} + h_2 f_{12} + h_3 f_{13}}{f_1} = \frac{h_1 f_{21} + h_2 f_{22} + h_3 f_{23}}{f_2} = \frac{h_1 f_{31} + h_2 f_{32} + h_3 f_{33}}{f_3},$$

to wówczas styczna w punkcie p zejdzie się razem ze styczną w punkcie p'. Taki punkt p krzywéj $f = 0$, który jest punktem styczności prostéj, schodzącéj się razem ze styczną w punkcie sąsiednim p', zowie się p u n k t e m p r z e g i ę c i a téj krzywéj. *Zatym styczna w punkcie przegięcia przechodzi przez trzy punkty krzywéj, schodzące się z punktem przegięcia.*

Spółrzędne punktu przegięcia p czynią zadość równaniu (1) i równaniom (4), zamiast których można pisać

$$h_1 f_{11} + h_2 f_{12} + h_3 f_{13} = k f_1,$$
$$h_1 f_{21} + h_2 f_{22} + h_3 f_{23} = k f_2,$$
$$h_1 f_{31} + h_2 f_{32} + h_3 f_{33} = k f_3,$$

rozumiejąc przez k czynnik nieoznaczony. Z uwagi, że funkcyje f_1, f_2, f_3 są jednorodne stopnia $(n-1)$-go, mamy nadto

$$x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + x_3 f_{13} = (n-1) f_1,$$
$$x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + x_3 f_{23} = (n-1) f_2,$$
$$x_1 f_{31} + x_2 f_{32} + x_3 f_{33} = (n-1) f_3.$$

Wskutek tego, równaniom poprzedzającym można nadać postać:

$$f_{11}\left(h_1-\frac{kx_1}{n-1}\right)+f_{12}\left(h_2-\frac{kx_2}{n-1}\right)+f_{13}\left(h_3-\frac{kx_3}{n-1}\right)=0,$$

$$f_{21}\left(h_1-\frac{kx_1}{n-1}\right)+f_{22}\left(h_2-\frac{kx_2}{n-1}\right)+f_{23}\left(h_3-\frac{kx_3}{n-1}\right)=0,$$

$$f_{31}\left(h_1-\frac{kx_1}{n-1}\right)+f_{32}\left(h_2-\frac{kx_2}{n-1}\right)+f_{33}\left(h_3-\frac{kx_3}{n-1}\right)=0.$$

Ponieważ różnice $h_1-\frac{kx_1}{n-1}$, $h_2-\frac{kx_2}{n-1}$, $h_2-\frac{kx_3}{n-1}$ nie mogą być wszystkie razem równe 0, gdyż, w przeciwnym razie, byłoby $\frac{h_1}{x_1}=\frac{h_2}{x_2}=\frac{h_3}{x_3}$, a więc także $\frac{x_1+h_1}{x_1}=\frac{x_2+h_2}{x_2}=\frac{x_3+h_3}{x_3}$, a to być nie może, jeżeli punkty p i p' są punktami oddzielnymi, przeto wyznacznik trzech ostatnich równań t. j. hesyjan

(5) $$H(f)\equiv\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}\end{vmatrix}$$

jest równy 0. A zatym, punkty przegięcia krzywéj $f=0$ leżą zarazem na krzywéj $H(f)=0$. Skoro te dwie krzywe, z których piérwsza jest z założenia stopnia n-go, a druga widocznie stopnia $3(n-2)$-go, przecinają się w $3n(n-2)$ punktach, zatym mamy twierdzenie: *krzywa rzędu n-go posiada — mówiąc wogólności — 3n(n — 2) punktów przegięcia.* Ta liczba, jak to niebawem okażemy, odpowiednio się zmniejszy wrazie, gdy dana krzywa $f=0$ posiada punkty wielokrotne.

218. Wpływ punktów wielokrotnych na klasę i na ilość punktów przegięcia krzywéj rzędu n-go. Niech (x_1, x_2, x_3) będą spółrzędnymi punktu podwójnego p linii krzywéj rzędu n-go

(1) $$f(x_1, x_2, x_3)=0.$$

Ponieważ każda prosta pp', przez punkt podwójny przechodząca, ma z krzywą w tym punkcie dwa punkty spólne, przeto, jak to wynika z art. 205, mamy niezależnie od spółrzędnych (x'_1, x'_2, x'_3) punktu p',

(2) $$\Delta f\equiv x'_1f_1+x'_2f_2+x'_3f_3=0,$$

t. j.

(3) $$f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0.$$

Ażeby więc istniał punkt dwukrotny na krzywéj $f=0$, musi być dopełniony warunek, który otrzymamy, gdy z trzech równań (3) wyrugujemy stosunki $x_1:x_2:x_3$. Jeżeli $D=0$ jest tym wypadkiem rugowania, natenczas wyrażenie D zowie się wyróżnikiem wielomianu f. Ten warunek jest wystarczający, albowiém równanie czwarte, $f=0$, któremu mają uczynić zadość spółrzędne punktu podwójnego, jest, podług twierdzenia Euler'a (art. 214), wynikiem równań (3). Funkcyje f_1, f_2, f_3 są jednorodne stopnia $(n-1)$-go; mamy zatym dla punktu dwukrotnego

$$f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 \equiv (n-1)f_1 = 0,$$
$$f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 \equiv (n-1)f_2 = 0,$$
$$f_{11}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3 \equiv (n-1)f_3 = 0.$$

Rugując z tych równań stosunki $x_1 : x_2 : x_3$, będziemy mieli

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{H}(f) \equiv \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Z równania (2) czytamy, że *punkt podwójny krzywéj $f=0$ jest zarazem punktem piérwszéj biegunowéj $\Delta f = 0$ jakiegokolwiek punktu p' względem téj krzywéj;* z równania zaś (4) wypada, że *punkt podwójny krzywéj $f=0$ jest zarazem punktem krzywéj Hesse'go $\mathrm{H}(f)=0$.*

219. Aby określić dokładniéj znaczenie punktu podwójnego krzywéj $f=0$ względem krzywych $\Delta f=0$ i $\mathrm{H}(f)=0$, weźmy ten punkt za wiérzchołek A_3 trójkąta odniesienia. Wtedy, dla $x_1=x_2=0$, mamy $f=0$, $f_1=0$, $f_2=0$ i $f_3=0$; równanie więc krzywéj $f=0$ nie powinno w sobie zawiérać wyrazów stopnia 0 i 1-go względem x_1 i x_2, a przeto jest ono postaci

$$f \equiv \varphi_2 x_3^{n-3} + \varphi_3 x_3^{n-2} + \ldots + \varphi_n = 0,$$

gdzie $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ oznaczają funkcyje jednorodne zmiennych x_1, x_2 odpowiednio stopnia 2-go, 3-go, ..., n-go. A nadto

$$\varphi_2 \equiv \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0$$

będzie równaniem obu stycznych do krzywéj $f=0$ w punkcie podwójnym. W przypadku szczególnym, kiedy punkt podwójny jest punktem zwrotu, wyrażenie φ_2 będzie kwadratem zupełnym, a zatym wówczas mieć będziemy równanie postaci

$$\varphi_2 \equiv (ax_1 + by_1)^2 = 0,$$

jako równanie stycznéj w punkcie zwrotu. Wskutek tego, każda z pochodnych piérwszych f_1, f_2, f_3 funkcyi f nie będzie zawiérała zmiennych x_1 i x_2 w stopniu 0, a nadto dwie piérwsze f_1 i f_2 zawiérają potęgi tych zmiennych 1-szą i wyższe, a trzecia f_3 2-gą i wyższe. Stąd wynika, że *punkt podwójny p krzywéj $f=0$ jest punktem pojedyńczym piérwszéj biegunowéj $\Delta f=0$ jakiegokolwiek punktu p' względem téj krzywéj.*

W przypadku szczególnym, kiedy punkt podwójny jest punktem zwrotu, pochodne f_1, f_2, f_3 będą zawiérały w wyrazach stopnia najniższego względem x_1 i x_2, jako czynnik spólny, wyrażenie linijowe $ax_1 + by_1$. Stąd wypada, że *styczna w punkcie zwrotu do krzywéj $f=0$ jest zarazem styczną do piérwszéj biegunowéj $\Delta f=0$ w punkcie pojedyńczym, który się razem schodzi z tymże punktem zwrotu.*

Przy tych samych założeniach, najniższe potęgi zmiennych x_1 i x_2 w pochodnych drugich

$$f_{11},\ f_{22},\ f_{33},\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12}$$

są odpowiednio $\quad 0,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0.$

Skoro więc

(4') $$H(f) \equiv f_{11}f_{22}f_{33} + 2f_{23}f_{31}f_{12} - f_{11}f_{23}^2 - f_{22}f_{31}^2 - f_{33}f_{12}^2,$$

zatym widocznie w funkcyi $H(f)$ najniższa potęga zmiennych x_1 i x_2 jest 2-ga. A zatym: *punkt podwójny krzywéj $f=0$ jest także punktem podwójnym krzywéj Hesse'go $H(f)=0$.*

Nietrudno także okazać, że *styczne do $f=0$ w punkcie podwójnym są zarazem stycznymi do $H(f)=0$ w tymże punkcie.* Jakoż, jeżeli weźmiemy dwie styczne w punkcie podwójnym za boki A_3A_2 i A_3A_1, trójkąta odniesienia, to wówczas równanie obu stycznych będzie

$$\varphi_2 \equiv x_1x_2 = 0$$

i wtedy wyrazy stopnia najniższego względem x_1 i x_2 wyrażenia (4') na $H(f)$ zawiérać będzie, jako czynnik spólny, tak x_1, jakteż x_2; albowiém x_1 jest czynnikiem spólnym pochodnych f_{22}, f_{23}, f_{33}, a x_2 jest czynnikiem spólnym pochodnych f_{11}, f_{13}, f_{33}, a przynajmniéj jedna z tych pochodnych wchodzi do wyrażenia (4') na $H(f)$.

W przypadku szczególnym, kiedy punkt podwójny jest punktem zwrotu, będzie inaczéj. Jakoż, jeżeli styczną w punkcie zwrotu krzywéj $f=0$ weźmiemy za bok A_3A_2 trójkąta odniesienia, wówczas równanie téj stycznéj będzie

$$\varphi_2 \equiv x_1^2 = 0.$$

Stąd zaś wypada, że w pochodnych

$$f_{11},\ f_{22},\ f_{33},\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12}$$

najniższe potęgi zmiennych x_1 i x_2 są teraz odpowiednio 0, 1, 2, 2, 1, 1. Najniższa więc potęga zmiennych x_1 i x_2 w funkcyi $H(f)$ jest teraz 3, a nie 2, jak przedtym, a nadto każdy wyraz stopnia najniższego względem x_1 i x_2 w rozwinięciu (4') funkcyi $H(f)$ widocznie zawiéra x_1^2, jako czynnik spólny. Stąd wypada: *punkt zwrotu krzywéj $f=0$ jest punktem potrójnym krzywéj $H(f)=0$, a nadto z trzech stycznych do $H(f)=0$ w punkcie potrójnym dwie schodzą się razem ze styczną do $f=0$ w punkcie zwrotu.*

220. Zapomocą twierdzeń poprzedzających można okazać, jaki wpływ na zmniejszenie klasy i ilości punktów przegięcia krzywéj rzędu n-go mają punkty podwójne (węzły i punkty odosobnione) i punkty zwrotu téj krzywéj.

a. W artykule 216 okazaliśmy, że klasa krzywéj rzędu n-go, czyli ilość stycznych dających się wyprowadzić z jakiegokolwiek punktu p' do téj krzywéj, jest równa ilości punktów, w których ta krzywa $f=0$ przecina się ze swoją piérwszą biegunową $\Delta f=0$. Jeżeli krzywa $f=0$ nie posiada ani punktów podwójnych, ani też punktów zwrotu, to natenczas, z powodu, że krzywa $\Delta f=0$ jest stopnia $(n-1)$-go, krzywa $f=0$ jest klasy $n(n-1)$-éj. Atoli, jeżeli krzywa $f=0$ posiada punkty podwójne, lub punkty zwrotu, to wówczas jéj klasa odpowiednio się zmniejszy. Jakoż, przyjmując, że punkt p jest punktem podwójnym krzywéj $f=0$, z uwagi, że ten punkt jest zarazem punktem pojedyńczym krzywéj $\Delta f=0$, należy pośród punktów przecięcia się krzywych $f=0$ i $\Delta f=0$ uważać punkt p za dwa punkty. Prosta, łącząca ten punkt p z jakimkolwiek punktem p', lubo przecina krzywą $f=0$ w dwu punktach schodzących się razem z punktem p, nie jest jednak styczną w zwykłym znaczeniu. A zatym: *każdy punkt podwójny krzywéj $f=0$ zmniejsza ilość stycznych, dających się wyprowadzić do téj krzywéj z jakiegokolwiek punktu, czyli klasę téj krzywéj, o 2.*

Jeżeli, powtóre, punkt p jest punktem zwrotu krzywéj $f=0$, to z powodu, że ten punkt jest zarazem punktem pojedyńczym krzywéj $\Delta f=0$, a styczna do $f=0$ w punkcie zwrotu jest także styczną do $\Delta f=0$, należy taki punkt uważać za trzy punkty przecięcia się krzywych $f=0$ i $\Delta f=0$. A że prosta, łącząca p z jakimkolwiek punktem p', nie jest styczną do $f=0$ w zwykłym znaczeniu, więc *punkt zwrotu krzywéj $f=0$ zmniejsza klasę krzywéj o 3.* A zatym, jeżeli krzywa posiada d punktów podwójnych, a r punktów zwrotu, to, oznaczywszy przez ν jéj klasę, według powyższego, mamy

$$\nu=n(n-1)-2d-3r. \tag{5}$$

b. W artykule 217 okazaliśmy, że ilość punktów przegięcia krzywéj rzędu n-go $f=0$ jest równa ilości punktów, w których krzywą $f=0$ przecina krzywa $\mathrm{H}(f)=0$ rzędu $3(n-2)$. To twierdzenie jest prawdziwe tylko wtedy, kiedy $f=0$ nie posiada punktów podwójnych i punktów zwrotu.

Jakoż, jeżeli punkt p jest punktem podwójnym krzywéj $f=0$, to natenczas ten punkt jest także punktem podwójnym krzywéj $\mathrm{H}(f)=0$, a nadto styczne do obu gałęzi krzywéj $f=0$ są stycznymi do obu gałęzi krzywéj $\mathrm{H}(f)=0$ w tymże punkcie. Z piérwszego względu należy uważać punkt p za 4, a z drugiego powodu jeszcze za dalsze 2, a więc razem za 6 spólnych punktów dwu krzywych $f=0$ i $\mathrm{H}(f)=0$. A zatym, *każdy punkt podwójny krzywéj $f=0$ zmniejsza ilość punktów przegięcia téj krzywéj o 6.*

Jeżeli zaś punkt p jest punktem zwrotu krzywéj $f=0$, to ten punkt jest zarazem punktem trzykrotnym dla $\mathrm{H}(f)=0$, a nadto dwie styczne do $\mathrm{H}(f)=0$ w tym punkcie schodzą się razem ze styczną w p do $f=0$. Z piérwszego względu należy uważać punkt p za $2.3=6$ punktów, a ze względu drugiego jeszcze za 2 dalsze punkty przecięcia się dwu krzywych $f=0$ i $\mathrm{H}(f)=0$. A zatym: *każdy punkt zwrotu krzywéj $f=0$ zmniejsza ilość punktów przegięcia téj krzywéj o 8.*

Oznaczmy przez ρ ilość punktów przegięcia krzywéj rzędu n-go $f=0$, która posiada d punktów podwójnych, a r punktów zwrotu; wówczas będzie

$$\rho=3n(n-2)-6d-8r. \tag{6}$$

Wrazie, jeżeli krzywa $f=0$ posiada punkty wielokrotne, należy każdy punkt wielokrotny zastąpić równoważną liczbą punktów podwójnych i sumę liczb podwójnych tak otrzymanych wprowadzić do wzorów (5) i (6).

221. Styczne wielokrotne. Weźmy dla danéj krzywéj

(1) $$f(x_1, x_2, x_3)=0$$

biegunowo wzajemną

(2) $$F(x_1, x_2\ x_3)=0$$

względem jakiéjkolwiek kierownicy stopnia 2-go. Wiadomo, że każdemu punktowi na jednéj z krzywych $f=0$, lub $F=0$, odpowiada styczna do drugiéj z tych krzywych. Jeżeli n punktów na jednéj z tych krzywych leży na jednéj prostéj, natenczas n stycznych do drugiéj przechodzi przez jeden punkt, a zatem rzęd jednéj z nich jest klasą drugiéj.

Punktowi podwójnemu jednéj z krzywych $f=0$, lub $F=0$, odpowiada styczna podwójna do drugiéj, t. j. styczna, która drugiéj krzywéj dotyka w dwu punktach. I taksamo, punktowi np. k-ktrotnemu jednéj z krzywych $f=0$, lub $F=0$, będzie odpowiadała styczna k-krotna (t. j. z k punktami styczności) do drugiéj. Jeżeli zaś jedna z krzywych $f=0$, lub $F=0$, posiada punkt zwrotu, t. j. punkt podwójny, w którym obie styczne schodzą się z sobą razem, tworząc jednę prostą, to natenczas druga posiada styczną zwrotu, t. j. styczną podwójną, któréj oba punkty styczności schodzą się z sobą razem w jeden punkt, punkt przegięcia téj krzywéj. Ile więc jedna z krzywych $f=0$, lub $F=0$, posiada punktów podwójnych, lub punktów zwrotu, tyle druga krzywa posiada stycznych podwójnych, lub odpowiednio stycznych zwrotu, czyli punktów przegięcia.

Wskutek tego, każde twierdzenie, odnoszące się do jednéj z krzywych biegunowo wzajemnych $f=0$, lub $F=0$, da nam odpowiednie twierdzenie dla drugiéj, gdy tylko w wysłowieniu tego twierdzenia podstawimy: klasę za rzęd, styczną za punkt styczności, styczną podwójną za punkt podwójny, styczną zwrotu, czyli punkt przegięcia, za punkt zwrotu, i nawzajem.

222. Wzory Plücker'a. Weźmy pod uwagę dwa wzory

$$\nu= n(n-1) - 2d - 3r,$$
$$\rho=3n(n-2)- 6d - 8r,$$

wyprowadzone w artykule 220, a wyrażające klasę ν i ilość punktów przegięcia ρ krzywéj rzędu n-go, która posiada d punktów podwójnych i r punktów zwrotu.

Z tych wzorów otrzymamy nowe, gdy w nich za ν, ρ, n, d, r podstawimy odpowiednio n, r, ν, δ, ρ, gdzie nowo wprowadzona litera δ oznacza liczbę stycznych podwójnych. Znajdziemy tym sposobem

$$n= \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\rho$$
$$r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\rho.$$

Te cztéry wzory podał Plücker. Są one wielkiéj doniosłości, gdyż stanowią punkt wyjścia w klasyfikacyi linij krzywych oddzielnych rzędów.

KILKA PRZYKŁADÓW KRZYWYCH ALGIEBRAICZNYCH STOPNI WYŻSZYCH.

223. Muszla (konchojda) Nikomedesa. Jeżeli na prostéj OP, przechodzącéj przez punkt stały O i przecinającéj prostą stałą X'X w T, odetniemy po obu stronach punktu T stałą długość TP, natenczas miejscem punktu P będzie krzywa, która się zowie muszlą Nikomedesa. Punkt stały O jest biegunem, stała prosta X'X kierownicą, a stała długość TP parametrem muszli.

Znajdziemy równanie téj linii. Niech P (fig. 57) będzie jakimkolwiek

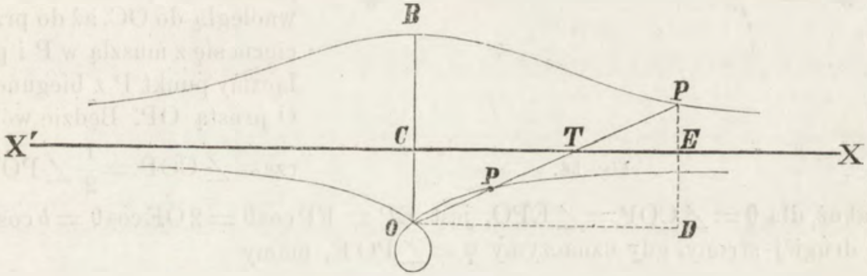


Fig. 57.

jéj punktem. Spuśćmy prostą OCB prostopadłą na X'X i oznaczmy $\angle$BOP$=\theta$, OC$=a$, CB$=$TP$=b$ i OP$=r$. Równaniem biegunowym muszli będzie zatym OP$=$OT$+$TP, czyli

(1) $$r = a \sec\theta \pm b.$$

Przyjąwszy OC za kierunek dodatny osi y-ów, a równoległą do X'X za oś x-ów, i kładąc $x=$OD, $y=$DP, mieć będziemy

$$\cos\theta = \frac{y}{r}, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Podstawiwszy zaś te wartości w (1), otrzymamy

(2) $$(x^2+y^2)(y-a)^2 = b^2y^2,$$

jako równanie muszli we spółrzędnych prostokątnych. Jeżeli za początek spółrzędnych weźmiemy punkt C, to mieć będziemy (pisząc $y+a$ zamiast y)

(3) $$x^2y^2 = (a+y)^2(b^2-y^2).$$

To równanie daje obie gałęzi krzywéj; gałąź bliższa bieguna nazywa się gałęzią niższą, a gałąź dalsza zowie się gałęzią wyższą. Obie gałęzi mają kierownicę X'X za wspólną asymptotę.

Jeżeli $b > a$, to biegun O jest punktem węzłowym gałęzi niższéj; jeżeli $b = a$, to biegun O jest punktem zwrotu téj gałęzi; a jeżeli $b < a$, to biegun O będzie należał do krzywéj, jako punkt odosobniony.

Nikomedes rozwiązał zapomocą swéj krzywéj dwa zagadnienia, sławne w starożytności: podwojenie sześcianu i rozdzielenie kąta na trzy części równe. Podamy tu tylko rozwiązanie drugiego z tych zagadnień.

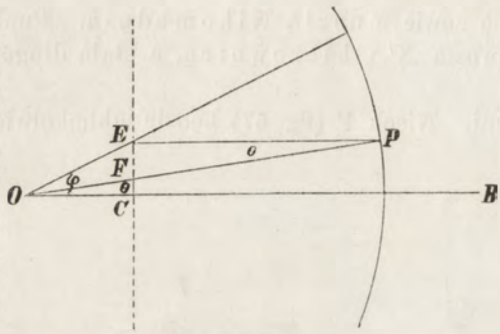


Fig. 58.

Niech COE (fig. 58) będzie kątem danym. Weźmy za kierownicę muszli jakąkolwiek prostą EC, prostopadłą do OC, a za parametr muszli $b=2\text{OE}$. Poprowadźmy prostą EP, równoległą do OC, aż do przecięcia się z muszlą w P i połączmy punkt P z biegunem O prostą OP. Będzie wówczas $\angle \text{COP}=\frac{1}{2}\angle \text{POE}$.

Jakoż, dla $\theta=\angle\text{COP}=\angle\text{EPO}$, jest $\text{EP}=\text{FP}\cos\theta=2\,\text{OE}\cos\theta=b\cos\theta$. Z drugiéj strony, gdy oznaczymy $\varphi=\angle\text{POE}$, mamy

$$\frac{\text{EP}}{\text{OE}}=\frac{b\cos\theta}{\frac{1}{2}b}=2\cos\theta=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cdot$$

Stąd wypada $\sin\varphi=2\sin\theta\cos\theta$, $\varphi=2\theta$, a więc $\theta=\frac{1}{2}\varphi$. Kąt COP jest więc częścią trzecią kąta COE.

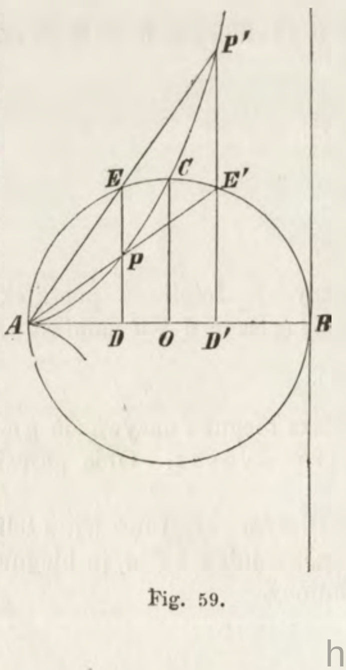


Fig. 59.

224. Cysojda Dioklesa. Niech O (fig. 59) będzie środkiem koła, AB jego średnicą. Wystawmy parę rzędnych DE, D′E′, równooddalonych od środka, i z punktu A poprowadźmy sieczne AE i AE′, które przecinają rzędne D′E′ i DE odpowiednio w punktach P′ i P. Miejsce gieometryczne tych punktów zowie się c y s o j d ą D i o k l e s a.

Aby znaléźć równanie téj krzywéj we spółrzędnych prostokątnych, wprowadźmy $x=\text{AD}'$, $y=\text{D}'\text{P}'$, $\text{AO}=a$; wtedy

$$\text{AD}:\text{DE}=\text{AD}':\text{D}'\text{E}',\quad \text{czyli}$$
$$2a-x:\sqrt{x(2a-x)}=x:y.$$

Stąd wynika

$$y^2(2a-x)=x^3,$$

równanie cysojdy.

Początek A jest widocznie punktem

zwrotu, a prostopadła do AB, przez B przechodząca, jest asymptotą téj krzywéj, symetrycznéj względem AB.

Zapomocą cysojdy rozwiązuje się z łatwością zagadnienie: »znaléść dwie średnie proporcyjonalne między dwiema danymi długościami«. Niech a i b będą dwiema danymi długościami. Długością $a = \mathrm{AC}$ (fig. 60), jako promieniem, nakréślmy półokrąg i wykréślmy odpowiadającą mu cysojdę AGD. W środku C wystawmy rzędną $\mathrm{CE} = b$ i poprowadźmy prostą BE, która przecina cysojdę w G. Prosta AG przecina CE w F: długość CF jest jedną ze średnich proporcyjonalnych między a i b. Poprowadźmy jeszcze prostą GH prostopadłą do AB; niech $x = \mathrm{AH}, y = \mathrm{HG}$; natenczas trójkąty podobne ACF i AHG, tudzież BHG i BCE, dadzą

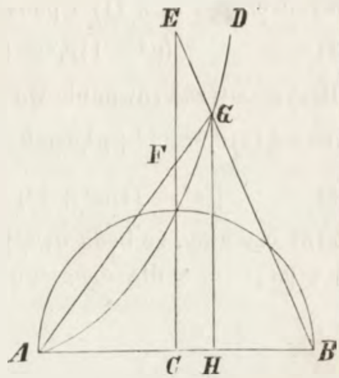


Fig. 60.

$$\frac{a}{x} = \frac{\mathrm{CF}}{y} \quad \text{i} \quad \frac{2a - x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Te równania wraz z równaniem krzywéj dają

$$\mathrm{CF} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Zmieniając w poprzedzającym wykréśleniu role długości a i b, jednę na drugą, znajdziemy długość $\sqrt[3]{ab^2}$ drugiéj średniéj proporcyjonalnéj; jest bowiém

$$a : \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{ab^2} : b.$$

Przyjmując w poprzedzającym wykréśleniu $b = 2a$, mieć będziemy

$$\mathrm{CF} = a\sqrt[3]{2}.$$

A zatym CF jest wtedy krawędzią sześcianu, którego objętość jest dwa razy większą od objętości sześcianu o krawędzi a. Widzimy więc, że zapomocą cysojdy Dioklesa możemy bardzo łatwo rozwiązać zagadnienie o podwojeniu sześcianu.

Przyjąwszy zaś $b = na$, mieć będziemy $\mathrm{CF} = a\sqrt[3]{n}$ t. j. krawędź sześcianu, mającego objętość n razy większą od sześcianu o krawędzi a.

225. Jajko Descartes'a. Miejsce gieometryczne punktu P (fig. 61), którego odległości r_1 i r_2 od dwu punktów stałych F_1 i F_2, zwanych **o g n i s k a m i**, zadość uczynią związkowi

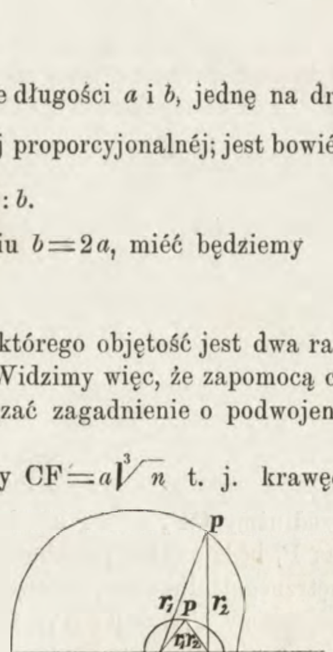


Fig. 61.

(1) $$r_1 + \mu r_2 = a,$$

gdzie μ oznacza liczbę stałą, zaś a długość stałą, nazywa się **j a j k i e m D e s c a r t e s'a**.

Aby otrzymać równanie biegunowe téj krzywéj, weźmy ognisko F_1 za biegun, F_1F_2 za oś biegunową i oznaczmy $F_1F_2 = c$, $\angle PF_1F_2 = \theta$; natenczas z figury widzimy, że

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2cr_1\cos\theta. \tag{2}$$

Wyznaczając r_2 z (1) i podstawiając w (2), mieć będziemy

$$(\mu^2 - 1)r_1^2 - 2(c\mu^2\cos\theta - a)r_1 + c^2\mu^2 - a^2 = 0. \tag{3}$$

Otrzymamy zaś równanie we spółrzędnych prostokątnych, podstawiając w równanie (3) $r_1^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, a mianowicie

$$[(\mu^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2c\mu^2x + c^2\mu^2 - a^2]^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Z (3) czytamy, że będą dwa jajka odpowiadające zagadnieniu: dla jednego $r_1 + \mu r_2 = a$, a dla drugiego $r_1 - \mu r_2 = a$; piérwsze leży wewnątrz drugiego.

Tego można dowieść gieometrycznie. Z ogniska F_1 (fig. 62), jako środka, nakréślmy koło promieniem a. Przez ognisko F_2 poprowadźmy dowolnie cięciwę DE i połączmy F_1 z D i z E. Natenczas, jeżeli weźmiemy $PD = \mu PF_2$, $DQ = \mu F_2Q$, punkt P będzie punktem jajka wewnętrznego, a Q będzie punktem jajka zewnętrznego; albowiém $PD = \mu F_2P$ jest to samo, co $a - F_1P = \mu F_2P$, a $DQ = \mu F_2Q$ to samo, co $F_1Q - a = \mu F_2Q$, czyli odpowiednio $F_1P + \mu F_2P = a$ i $F_1Q - \mu F_2Q = a$.

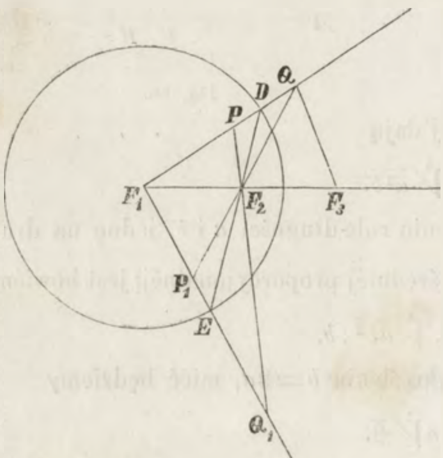


Fig. 62.

Zważmy, że F_2D jest dwusieczną kąta PF_2Q; jakoż, z uwagi, że $PD = \mu F_2P$, $DQ = \mu F_2Q$, mamy

$$PD : DQ = F_2P : F_2Q.$$

Przedłużmy QF_2 i PF_2 aż do przecięcia się w P_1 i Q_1 z F_1E; natenczas P_1 będzie także punktem jajka wewnętrznego, a Q_1 punktem jajka zewnętrznego; albowiém, z powodu, że trójkąty PF_2D i P_1F_2E mają kąty równe, mamy $P_1E = \mu F_2P_1$; taksamo jest $EQ_1 = \mu F_2Q_1$. Według znanego twierdzenia, mamy nakoniec

$$F_2P \,.\, F_2Q = PD \,.\, DQ + F_2D^2, \text{ skąd } (1 - \mu^2)F_2P \,.\, F_2Q = F_2D^2.$$

Że zaś, z podobieństwa trójkątów, $F_2P : F_2P_1 = F_2D : F_2E$, przeto jest jeszcze

$$(1 - \mu^2)F_2Q \,.\, F_2P_1 = F_2D \,.\, F_2E = \text{stałej}.$$

A zatym iloczyn $F_2Q \,.\, F_2P_1$ jest stały. Tego twierdzenia dowiódł Quetelet.

Chasles okazał, że jajko Descartes'a posiada jeszcze trzecie ognisko F_3, leżące na prostéj F_1F_2 zewnątrz obu jajek. Jakoż, poprowadźmy QF_3 tak, aby $\angle F_2QF_3 = \angle F_2F_1P_1$; natenczas, ponieważ punkty P_1, F_1, Q, F_3 leżą na obwodzie tego samego koła, mamy

$$F_1F_2 \,.\, F_2F_3 = F_2Q \,.\, F_2P_1 = \text{stałéj}.$$

To równanie wyznacza punkt F_3. Owóż, punkt F_3 posiada tę samę własność względem krzywéj, co punkty F_1 i F_2. Aby to uwydatnić, dogodniéj nam będzie, gdy równanie (1) napiszemy w postaci

$$mr_1 \pm lr_2 = nc_3, \tag{5}$$

gdzie $c_3 = F_1F_2$, a l, m, n są liczbami stałymi. Należy zauważyć, że w tym przypadku $n > m > l$. Ponieważ $\angle F_1F_3Q = \angle F_1P_1F_2 = \angle F_1PF_2$, przeto trójkąty F_1PF_2 i F_1F_3Q mają kąty równe; mamy zatym $\dfrac{F_1P}{F_1F_3} = \dfrac{F_2P}{F_3Q} = \dfrac{F_1F_2}{F_1Q}$.
Wskutek tego, równanie $mF_1P + lF_2P = nF_1F_2$, wynikające z równania (5),

przejdzie na $\qquad mF_1F_3 + lF_3Q = nF_1Q,$

czyli $\qquad nF_1Q - lF_3Q = mF_1F_3,$

lub przy $F_1Q = r_1$, $F_3Q = r_2$, $F_1F_3 = c_2$, na

$$nr_1 - lr_3 = mc_2.$$

Punkt F_3 jest więc istotnie trzecim ogniskiem jajka Descartes'a.

226. Ślimak Pascal'a. Jajko Descartes'a zamieni się na *ślimak Pascal'a*, gdy $a = c\mu$, gdzie c jest odległością obu ognisk F_1 i F_2; w tym przypadku, jedno ognisko F_1 znajdzie się na krzywéj i będzie punktem podwójnym téj krzywéj. Podstawiwszy $a = c\mu$ w równaniu (3) artykułu poprzedzającego, otrzymamy równanie postaci

$$(\mu^2 - 1)r_1{}^2 - 2(c\mu^2\cos\theta - c\mu)r_1 = 0,$$

czyli
$$r = 2a\cos\theta \pm b,$$

jako równanie biegunowe ślimaka Pascal'a.

Toż samo równanie otrzymamy z następującego określenia ślimaka Pascal'a. Jeżeli na siecznéj FR (fig. 63) koła o promieniu a, wyprowadzonéj z punktu stałego F na obwodzie koła, odetniemy po obu stronach punktu R, przecięcia się téjże siecznéj z kołem, długość stałą $RP = P'R = b$, to natenczas miejscem gieometrycznym punktów P, P' będzie ślimak Pascal'a. Albowiém, gdy

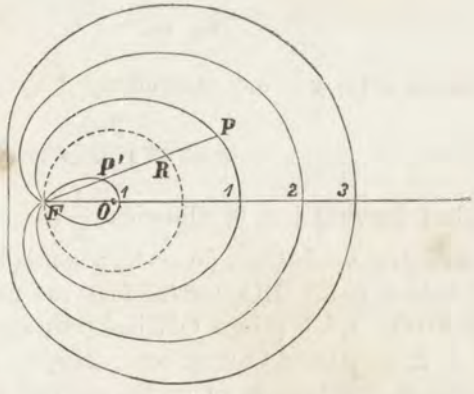


Fig. 63.

$FO=a$, $FP=r$, $FP'=r'$, $PFO=\theta$, mamy: $FP=FR+RP$ i $FP'=FR-P'R$, t. j. $r=2a\cos\theta+b$ i $r'=2a\cos\theta-b$. A zatym

(1) $$r=2a\cos\theta\pm b$$

jest miejscem gieometrycznym punktów P i P'.

Wstawiając w równanie (1)

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},$$

otrzymujemy

(2) $$(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2),$$

jako równanie ślimaka we spółrzędnych prostokątnych. Łatwo spostrzéc, że punkt $x=y=0$, t. j. punkt F, jest punktem podwójnym, a mianowicie: węzłem przy $b<a$, punktem zwrotu przy $b=a$, a punktem odosobnionym przy $b>a$. W przypadku, kiedy $b=a$, ślimak Pascal'a zowie się liniją s e r c o w ą (kardiojdą).

227. Liść Descartes'a. Krzywą, przedstawioną przez równanie

(1) $$x^3+y^3-3axy=0,$$

nazywają l i ś c i e m D e s c a r t e s'a. Widzimy wprost z równania, że początek spółrzędnych jest punktem węzłowym i że osi spółrzędnych są stycznymi w tymże punkcie. Łatwo także spostrzéc, że

(2) $$x+y+a=0$$

jest równaniem jednéj asymptoty rzeczywistéj téj krzywéj. Jeżeli więc $AO=BO=a$ (fig. 64), to AB jest tą asymptotą.

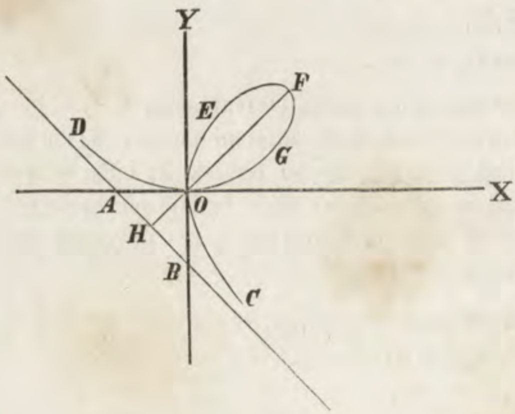


Fig. 64.

Liść Descartes'a jest krzywą jednobieżną; kładąc bowiém w (1) $y=\lambda x$, otrzymamy

(3) $$x=\frac{3a\lambda}{1+\lambda^3},\quad y=\frac{3a\lambda^2}{1+\lambda^3};$$

rodzaj krzywéj jest 0; albowiém $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r=0$. Wartościom parametru λ od $-\infty$ do -1 odpowiada gałąź CO, wartościom na λ od -1 do 0 gałąź DO, wartościom zaś na λ od 0 do ∞ odpowiada pętlica OEFGO. Jeżeli prosta OH jest prostopadłą do AB, natenczas $OF=3\,OH$.

228 Jajko Cassini'ego. Miejsce gieometryczne punktu, którego iloczyn odległości od dwu punktów stałych, zwanych ogniskami, jest niezmienny, zowiemy j a j k i e m C a s s i n i'e g o.

Niech P (fig. 65) będzie jakimkolwiek punktem krzywéj, F i F′ ogniskami téj krzywéj, O środkiem odcinka FF′, $x = \mathrm{OM}$, $y = \mathrm{MP}$, $\mathrm{OF} = c$, $\mathrm{FP} = r$, $\mathrm{F'P} = r'$, a m^2 stałym iloczynem promieni FP i F′P. Z określenia mamy $rr' = m^2$; z figury zaś widać, że $r^2 = (x - c)^2 + y^2$; $r'^2 = (x + c)^2 + y^2$. Równanie więc prostokątne krzywéj jest

(1) $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = m^4$,

a równanie biegunowe

(2) $r^4 + 2c^2(1 - 2\cos^2\theta)r^2 = m^4 - c^4$.

Jeżeli $m^2 > c^2$, krzywa jest pojedyńczą; jeżeli $m^2 < c^2$ krzywa, nie przecina osi y-ów i składa się wtedy z dwu oddzielnych jajek. Jeżeli nakoniec $m^2 = c^2$, to równania (1) i (2) zamieniają się odpowiednio na

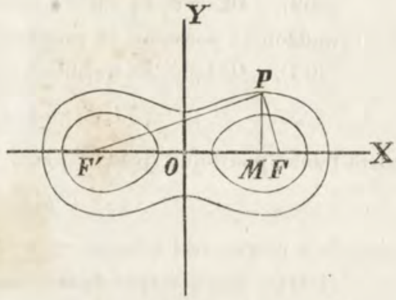


Fig. 65.

(3) $$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

(4) $$r^2 = 2c^2\cos 2\theta,$$

i, w tym przypadku, jajko Cassini'ego nazywa się lemniskatą Bernoulli'ego.

W lemniskacie początek O (fig. 66) jest punktem węzłowym i zarazem punktem przegięcia. Lemniskata jest także krzywą jednobieżną, lubo jéj rodzaj jest określony liczbą

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r - d = 2.$$

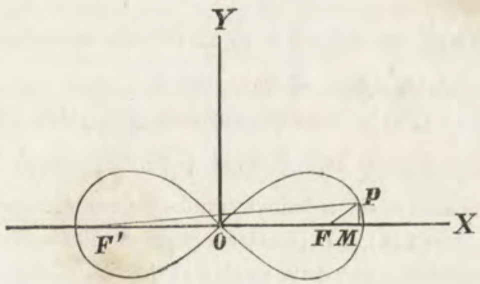


Fig. 66.

Jakoż, wstawiając w równanie, (3) $y = xt$, mamy $x = \dfrac{c\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$; kładąc zaś następnie $1 - t = \lambda^2(1 + t)$, otrzymujemy

(5) $$x = \frac{c\sqrt{2}\,\lambda(1+\lambda^2)}{1+\lambda^4}, \quad y = \frac{c\sqrt{2}\,\lambda(1-\lambda^2)}{1+\lambda^4}.$$

ĆWICZENIA.

(199). Wyznaczyć styczne w początku do krzywéj $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

(200). Okazać, że początek jest punktem krzywéj $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$ odosobnionym, lub węzłowym, według tego, czy a i b są tegoż samego znaku, czytéż jedna z tych liczb jest ujemną, a druga dodatną.

(201). Znaléść liczbę i gatunek punktów podwójnych krzywéj

$$(x^2-a^2)^2=ay^2(3a+2y).$$

(202). Okazać, że cztéry styczne do krzywéj rzędu 3-go $\varphi_3+\varphi_2+\varphi_1=0$ wyprowadzone z początku są przedstawione przez równanie $4\varphi_1\varphi_3=\varphi_2^2$.

(203). Okazać, że warunek, aby krzywa rzędu 3-go

$$xy^2+ax^3+bx^2+cx+d+2ey=0$$

miała punkt podwójny, jest taki sam, jak warunek, aby równanie

$$ax^4+bx^3-cx^2+dx-e^2=0$$

miało dwa pierwiastki równe.

(204). Znaléść spółrzędne punktu przegięcia krzywéj $x^3-3bx^2+a^2y=0$.

(205). Okazać, że jeżeli początek jest punktem przegięcia krzywéj

$$\varphi_n+\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}+\ldots\ldots+\varphi_2+\varphi_1=0,$$

to natenczas φ_2 jest podzielone przez φ_1.

(206). Okazać, że punkt przegięcia krzywéj

$$ay^3+3bxy^2+3cx^2y+dx^3+3ex^2=0$$

leży na prostéj $ay+bx=0$ i ma za spółrzędne $x=-\dfrac{3a^2e}{G}$, $y=\dfrac{3abe}{G}$, gdzie $G=a^2d-3abc+2b^3$.

(207). Znaléść warunek, pod jakim trzy asymptoty krzywéj

$$a_0+3b_0x+3b_1y+3c_0x^2+6c_1yx+3c_2y^2+d_0x^3+3d_1x^2y+3d_2xy^2+d_3y^3=0$$

przecinają się w jednym punkcie i znaléść spółrzędne tego punktu.

(208). Z początku wyprowadzamy równoległą do któréjkolwiek z asymptot krzywéj $y(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f)-x^3=0$; okazać, że odcinek téj prostéj, zawarty między początkiem i prostą $dx+ey+f=0$, jest podzielony przez krzywą na dwie części równe.

(209). Okazać, że wszystkie trzy asymptoty krzywéj

$$ax^2y+bxy^2+a'x^2+b'y^2+a''x+b''y=0$$

są rzeczywiste i znaléść równania tych asymptot.

(210). Z punktu O wyprowadźmy dwie sieczne o danych kierunkach, które krzywą rzędu n-go przecinają odpowiednio w punktach $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; okazać, że stosunek $\dfrac{OP_1 \,.\, OP_2 \ldots OP_n}{OQ_1 \,.\, OQ_2 \ldots OQ_n}$ nie zależy od położenia punktu O.

(211). Z punktów O i O' wyprowadźmy sieczne równoległe, które krzywą rzędu n-go przecinają odpowiednio w punktach $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$; okazać, że stosunek $\dfrac{OP_1 \,.\, OP_2 \ldots OP_n}{O'P'_1 . O'P'_2 \ldots O'P'_n}$ nie zależy od kierunku tych siecznych.

(212). Jeżeli wielobok o m bokach przecina krzywą rzędu n-go, to natenczas iloczyn z odległości punktów przecięcia się boków 12, 23, 34, ..., $m1$ z krzywą, rachowanych odpowiednio od wiérzchołków 1, 2, 3, ..., m, jest równy iloczynowi z odległości tychże punktów przecięcia, rachowanych odpowiednio od wiérzchołków 2, 3, 4 ... 1, pomnożonemu przez $(-1)^{mn}$ (twierdzenie Carnot'a).

(213). Jeżeli prostą przecinają boki BC, CA, AB trójkąta ABC w punktach L, M, N, to natenczas $BL.CM.AN = -CL.AM.BN$.

(214). Okazać, że jeżeli krzywa rzędu 3-go posiada trzy punkty przegięcia rzeczywiste, to te trzy punkty leżą na jednéj prostéj.

(215). Na prostéj z P, przecinającéj krzywą rzędu n-go w punktach R_1, R_2, $R_3, \ldots, R_n$, obierzmy taki punkt Π, aby było

$$\frac{n}{P\Pi} = \frac{1}{PR_1} + \frac{1}{PR_2} + \ldots + \frac{1}{PR_n};$$

okazać, że miejscem punktu Π jest prosta, mianowicie $(n-1)$-sza biegunowa punktu P względem danéj krzywéj (twierdzenie Cotes'a).

(216). Na prostéj o danym kierunku, wychodzącéj z dowolnego punktu Q, przecinającéj krzywą rzędu n-go w punktach $R_1, R_2, \ldots, R_n$, obierzmy taki punkt Π, aby było

$$n.Q\Pi = QR_1 + QR_2 + \ldots + QR_n;$$

okazać, że miejscem punktu Π jest linija prosta (twierdzenie Newton'a).

(217). Prosta, wychodząca z P, przecina krzywą rzędu n-go w punktach R_1, $R_2, \ldots, R_n$, a n asymptot téj krzywéj w punktach $S_1, S_2, \ldots, S_n$; okazać, że

$$PR_1 + PR_2 + \ldots + PR_n = PS_1 + PS_2 + \ldots + PS_n$$

(twierdzenie Newton'a).

(218). Jeżeli w n punktach $S_1, S_2, \ldots, S_n$, w których jakakolwiek prosta przecina krzywą rzędu n-go, wykréślimy styczne $T_1, T_2, \ldots, T_n$ do téj krzywéj, a następnie przez $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ oznaczymy odpowiednie punkty, w których poprzeczna z O przecina krzywą i owe styczne, to wówczas

$$\frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \ldots + \frac{1}{OP_n} = \frac{1}{OQ_1} + \frac{1}{OQ_2} + \ldots + \frac{1}{OQ_n}$$

(twierdzenie Maclaurin'a).

(219). Okazać, że jeżeli $n+1$ boków jakiegokolwiek wieloboku kształtu zmiennego obraca się około $n+1$ punktów danych, a jednocześnie n jego wiérzchołków opisuje n krzywych danych odpowiednio rzędu m_1-go, m_2-go, $\ldots, m_n$-go, to $(n+1)$-y wiérzchołek opisze krzywą rzędu $2m_1m_2\ldots m_n$-go (twierdzenie Maclaurin'a).

WSKAZÓWKI DO ĆWICZEŃ.

(1). $u=\frac{3}{2}$, $v=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{2}{3}$, $b=2$.

(2). $x=\frac{1}{2}(x'+x'')$, $y=\frac{1}{2}(y'+y'')$.

(3). Wziąwszy środek O odległości między dwoma danymi punktami za początek spółrzędnych, kierunek OB za dodatny kierunek osi x-ów, a prostopadłą do AB za oś y-ów, położywszy $AO=OB=a$ i oznaczywszy przez x, y spółrzędne punktu bieżącego P, mieć będziemy.

$$AP^2=(a\pm x)^2+y^2, \quad BP^2=(a\mp x)^2+y^2.$$

A zatym
$$(a+x)^2+y^2=(a-x)^2+y^2,$$
czyli
$$4ax=0, \quad \text{t. j.} \quad x=0,$$
jest równaniem miejsca żądanego. Miejscem więc żądanym jest prostopadła do AB, przechodząca przez środek O téj prostéj.

(4). Niech będzie podstawa $AB=2a$, a różnica kwadratów dwu pozostałych boków $AC^2-BC^2=m^2$. Obrawszy taki układ osi spółrzędnych, jak w zadaniu poprzedzającym, i oznaczywszy przez x, y spółrzędne wiérzchołka C, mieć będziemy

$$(a+x)^2+y^2-(a-x)^2-y^2=m^2,$$

czyli
$$4ax=m^2, \quad \text{t. j.} \quad x=\frac{m^2}{4a}.$$

Miejscem żądanym jest więc pewna prosta, prostopadła do AB.

(5). Obierzmy układ osi, jak poprzednio, i przyjmijmy $x=OD$, $y=DP$; będzie wówczas

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AD,$$

czyli
$$(m-y)^2=4a^2+y^2-4a(a+x),$$
skąd
$$2my-4ax=m^2.$$

Żądanym miejscem jest więc linija prosta.

(6). Jeżeli (α, β) są spółrzędnymi punktu danego O, (x, y) spółrzędnymi punktu bieżącego P, a $OP=r$, to w układzie osi, tworzących kąt ω, mamy

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2,$$

w układzie zaś prostokątnym $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$ mieć będziemy

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

Miejsce żądane jest krzywą rzędu 2-go. Z wysłowienia zadania wynika, że tą krzywą jest koło, którego środkiem jest punkt dany, a promień jest równy r.

(7). Obrawszy znowu, jak w zagadnieniach (3), (4), (5), środek O prostéj AB za początek, OB za oś x-ów, a prostopadłą do niéj za oś y-ów, i położywszy $AO = OB = c$, $AP \pm BP = 2a$, mieć będziemy

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} \pm \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a.$$

Znosząc zaś niewymierność, otrzymujemy

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Miejscem żądanym jest więc pewna krzywa rzędu 2-go, która dla $a^2 > c^2$ zowie się elipsą, a dla $a^2 < c^2$ hiperbolą.

(8). Z punktu danego F spuśćmy prostopadłą FD na daną prostą i weźmy środek A prostéj DF za początek spółrzędnych, kierunek AF za dodatny kierunek osi x-ów, a prostopadłą do DF za oś y-ów, i połóżmy $DA = AF = m$. Z punktu bieżącego P spuśćmy prostopadłą PE na daną prostą i połączmy P z F. Mamy $PF = PE$, t. j.

$$\sqrt{(x-m)^2+y^2} = x+m;$$

stąd wypada

$$y^2 = 4mx.$$

Żądanym miejscem jest więc znowu pewna krzywa rzędu 2-go, która się zowie parabolą.

(9). $x^2+y^2=31.$

(10). $x^2-27y^2+12=0.$

(11). $r^2\cos 2\theta = a^2.$

(12). $x^2+y^2=(2a-x)^2.$

(13). $a=0$, lub $a=1$.

(14). Jeżeli $x\cos\varphi + y\cos\psi - p = 0$ i $x\cos\varphi' + y\cos\psi' - p' = 0$ są równaniami normalnymi dwu danych prostych, to

$$(x\cos\varphi + y\cos\psi - p) \mp (x\cos\varphi' + y\cos\psi' - p') = 0$$

będzie równaniem obu (jednéj i drugiéj) dwu siecznych.

(16). $(y_2+y_3-2y_1)x-(x_2+x_3-2x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1+x_1y_3-x_3y_1)=0,$

(18). $(x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y-[x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)].$

(20). $2(y_1-y_2)y+2(x_1-x_2)x-(x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2)=0$

(22). $B:A=\dfrac{1}{5}\cdot$

(23). $\dfrac{\pi}{2}\cdot$

(24). Jeżeli $x\cos\varphi + y\cos\psi - p = 0$ jest równaniem normalnym prostéj, to ma być

$$\cos\varphi\,\Sigma m_ix_i + \cos\psi\,\Sigma m_iy_i - p\,\Sigma m_i = 0.$$

Zapomocą tego związku, rugując p, otrzymamy

$$(x\,\Sigma m_i - \Sigma m_ix_i)\cos\varphi + (y\,\Sigma m_i - \Sigma m_iy_i)\cos\psi = 0.$$

Żądana prosta przechodzi zatym przez punkt

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \quad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}.$$

Ten punkt nazywa się środkiem średnich odległości danych punktów.

(25). Weźmy OA za oś x-ów, prostą OC równoległą do danego kierunku za oś y-ów i oznaczmy przez α, β spółrzędne OA i AP punktu P. Jeżeli $y = mx$ jest równaniem prostéj OB, natenczas $\beta = mn\alpha$, czyli $y = mnx$ będzie równaniem miejsca punktu P.

(26). Jeżeli $OA = a$, $OB = b$, a przeto $OA' = a - k$, $OB' = b + k$, to równanie miejsca będzie wynikiem rugowania k z równań $bx + ay - ab + k(x - a) = 0$ i $bx + ay - ab - k(y - b) = 0$, t. j. $x + y = a + b$.

(27). $r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + r_2 r \sin(\theta_2 - \theta) + r r_1 \sin(\theta - \theta_1) = 0$.

(29). Wziąwszy A za biegun, a prostopadłą AD do stałéj prostéj za oś biegunową, i położywszy $AD = a$, $\frac{AB}{CA} = \frac{\sin C}{\sin B} = m$, znajdziemy $r\cos(\theta - A) = \frac{a}{m}$. Miejscem żądanym jest więc pewna prosta.

(29). Albowiém proste równoległe tworzą pęk promieni, którego wiérzchołek leży w nieskończoności.

(30). art. 39.

(31). art. 39.

(32). Jeżeli $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ są równaniami boków BC, CA, AC, to $m_2 D_2 - m_3 D_3 = 0$, $m_3 D_3 - m_1 D_1 = 0$, $m_1 D_1 - m_2 D_2 = 0$ będą równaniami prostych AO, BO, CO, a więc $m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0$, $m_3 D_3 + m_1 D_1 = 0$, $m_1 D_1 + m_2 D_2 = 0$ będą równaniami prostych B′C′, C′A′, A′B′. A zatym pary boków BC, B′C′; CA, C′A′; AB, A′B′ przecinają się na prostéj $m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0$.

(34). Jeżeli ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ są cztérema położeniami trójkąta, to $(N.AA_1A_2A_3) = (N.BB_1B_2B_3)$. Stąd wypada $(AA_1A_2A_3) = (BB_1B_2B_3)$, a więc także $(M.AA_1A_2A_3) = (L.BB_1B_2B_3)$, co znowu dowodzi, że i $(M.CC_1C_2C_3) = (L.CC_1C_2C_3)$. Dwa więc pęki (MC, MC_1, MC_2, MC_3) i (LC, LC_1, LC_2, LC_3) są jednokréślne (art. 51).

(35). Postąpić podobnie, jak w zagadnieniu poprzedzającym, a potym zastosować art. 51.

(36). Jeżeli APB, A_1PB_1, A_2PB_2, A_3PB_3 i AQB, A_1QB_1, A_2QB_2, A_3QB_3 są cztérema położeniami obu kątów, to mieć będziemy $(P.AA_1A_2A_3) = (Q.AA_1A_2A_3)$; a że $(P.AA_1A_2A_3) = (P.BB_1B_2B_3)$ i $(Q.AA_1A_2A_3) = (Q.BB_1B_2B_3)$, przeto $(P.BB_1B_2B_3) = (Q.BB_1B_2B_3)$, a zatym i t. d.

(37). *a)* $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2\Delta}{s_1 + s_2 + s_3}$; *b)* $-x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2\Delta}{s_2 + s_3 - s_1}$; i t.d.

c) $x_1 = \frac{1}{2} s_1 \cot A_1$, $x_2 = \frac{1}{2} s_2 \cot A_2$, $x_3 = \frac{1}{2} s_3 \cot A_3$.

(38). $$= \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \\ x'''_1, & x'''_2, & x'''_3 \end{vmatrix}.$$

(39). $\frac{\Delta}{4}$.

(40). $2\Delta \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3$.

(43). $\frac{l_1}{s_1} = \frac{l_2 + l_3}{s_2 + s_3}$.

(45). $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = 0$ i $l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 + l_3\lambda_3 = 0$.

(47). Spółrzędne środka O prostéj, łączącéj punkty P i P', w których się przecinają pary prostych $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$, $l_1x_1 - l_2x_2 - l_3x_3 = 0$, i $l_1x_1 + l_2x_2 - l_3x_3 = 0$, $l_1x_1 - l_2x_2 + l_3x_3 = 0$, są 0, $\frac{2\Delta \frac{s_2}{l_2}}{\frac{s_2^2}{l_2^2} - \frac{s_3^2}{l_3^2}}$, $\frac{-2\Delta \frac{s_3}{l_3}}{\frac{s_2^2}{l_2^2} - \frac{s_3^2}{l_3^2}}$; i t. d. Te środki leżą na prostéj $\frac{l_1x_1}{s_1} + \frac{l_2x_2}{s_2} + \frac{l_3x_3}{s_3} = 0$.

(52). Jeżeli $u_1 = 0$, $u_3 = 0$; $u_2 = 0$, $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3 = 0$ są równaniami dwu par wiérzchołków przeciwległych, to środki trzech przekątnych leżą na prostéj, danéj przez równania

$$(\lambda_3 - \lambda_1)u_1 = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)u_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)u_3.$$

(53). $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 6yz = (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 - 4z^2$.

(54). Jakoż, spółczynniki kwadratów w rozłożeniu F będą pierwiastkami równania

$$0 = -\lambda^3 + \lambda^2(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) - \lambda\left\{\begin{vmatrix}\alpha_{22}, \alpha_{23}\\ \alpha_{32}, \alpha_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\alpha_{31}, \alpha_{33}\\ \alpha_{11}, \alpha_{13}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\alpha_{11}, \alpha_{12}\\ \alpha_{21}, \alpha_{22}\end{vmatrix}\right\} + \begin{vmatrix}\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}\\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}\\ \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}\end{vmatrix},$$

czyli

$$0 = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{A}\left\{\begin{vmatrix}a_{22}, a_{23}\\ a_{32}, a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{31}, a_{33}\\ a_{11}, a_{13}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11}, a_{12}\\ a_{21}, a_{22}\end{vmatrix}\right\} - \frac{\lambda}{A}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \frac{1}{A},$$

lub nakoniec

$$0 = -A\lambda^3 + \lambda^2\left\{\begin{vmatrix}a_{22}, a_{23}\\ a_{32}, a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{31}, a_{33}\\ a_{11}, a_{13}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11}, a_{12}\\ a_{21}, a_{22}\end{vmatrix}\right\} - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1.$$

Jest więc $\lambda = \frac{1}{s}$ (art. 71). Wielomian F zowie się d o ł ą c z o n y m do f.

(55). Wyróżnik przyrównany do zera daje na wyznaczenie a_{12} równanie stopnia 2-go $12a_{12}^2 - 35a_{12} + 25 = 0$; stąd $a'_{12} = \frac{5}{3}$, $a''_{12} = \frac{5}{4}$.

(56). Wyróżnik wielomianu $1 - \cos^2\lambda_1 - \cos^2\lambda_2 - \cos^2\lambda_3 + 2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3$ jest od zera różny. Jakoż, rozumiejąc przez α_1 kąt między ścianami x_3x_1 i x_1x_2 równoległościanu, kładąc $d^2 = \sin^2\lambda_2 \sin^2\lambda_3 \sin^2\alpha_1$ i uwzględniając, że $\cos\lambda_1 = \cos\lambda_2\cos\lambda_3 + \sin\lambda_2\sin\lambda_3\cos\alpha_1$, znajdziemy, że ów wyróżnik jest równy d.

(57). Proste $x - y - 1 = 0$ i $x - 4y + 2 = 0$.

(58). Proste $x + \theta y + \theta^2 = 0$, $x + \theta^2 y + \theta = 0$, gdzie θ jest pierwiastkiem zespolonym równania $z^3 - 1 = 0$.

(59). $\frac{\pi}{4}$ i θ.

(60). $\left(x-\frac{15}{8}\right)^2-\left(y-\frac{3}{8}\right)^2=0.$

(61). Albowiém to równanie wychodzi na $(x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3)^2+$ $+(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+z_3\sin A_3)^2=0.$

(62). $\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \end{vmatrix}=0.$

(63). Jeżeli $\begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3 \\ x'''_1, & x'''_2, & x'''_3 \end{vmatrix}=0.$

(64). Prostą zagadnienia (62).

(65). Podstawiwszy w równaniu ogólnym raz $y=0$, drugi raz $x=0$, otrzymamy dwa równania: $a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}=0$, $a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}\,0$, skąd $a+a'=-\frac{2a_{13}}{a_{11}}$, $aa'=\frac{a_{33}}{a_{11}}$, $b+b'=-\frac{2a_{23}}{a_{22}}$, $bb'=\frac{a_{33}}{a_{22}}$, a więc położywszy $a_{11}=k.bb'$, miéć będziemy $a_{22}=k.aa'$, $2a_{13}=-kbb'(a+a')$ $2a_{23}=-kaa'(b+b')$, $a_{33}=k.aa'bb'$. Równanie żądane będzie więc postaci

$$bb'x^2+2\lambda xy+aa'y^2-bb'(a+a')x-aa'(b+b')y+aa'bb'=0,$$

gdzie $\lambda=\frac{a_{12}}{k}$ jest czynnikiem nieoznaczonym.

(66). Albowiém wziąwszy boki przeciwległe czworokąta, utworzonego przez 4 punkty dane, za osi, otrzymamy w równaniu biegunowéj punktu (x', y') względem krzywéj spółczynnik nieoznaczony a_{12} w stopniu 1-ym. Równanie zatym rozłoży się na dwa równania dwu prostych oznaczonych, które się przetną w punkcie stałym.

(67). Są rozwiązaniami równań $x'-y'-3=\frac{x'-3y'}{3}=1-3x'$, a więc $x'=\frac{9}{2}$, $y'=14$.

(68). $12x^2-18xy+13y^2-6x-8y+7=0.$

(69). Biegunowa punktu x, y na szukanéj krzywéj względem kierownicy ma za równanie $Xx+Yy-1=0$; ta biegunowa ma być styczną do krzywéj danéj, a zatym

$$\begin{vmatrix} A, & B, & 0, & x \\ B, & C, & 0, & y \\ 0, & 0, & -1, & -1 \\ x, & y, & -1, & 0 \end{vmatrix}=0$$

czyli $Cx^2-2Bxy+Ay^2=AC-B^2$ i to jest równaniem żądanym.

(70). Wziąwszy ramiona kąta za osi spółrzędnych, miéć będziemy równanie krzywéj $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2x\sqrt{a_{11}a_{33}}+2y\sqrt{a_{22}a_{33}}+a_{33}=0$; a zatym otrzymamy: *a)* $xy=\frac{2a_{33}}{9(a_{12}+\sqrt{a_{11}a_{22}})}$,

$$b)\ x^2\cos\omega + xy(1+\cos^2\omega) + y^2\cos\omega = \frac{2a_{33}}{(a_{12}+\sqrt{a_{11}a_{22}})\cos^2\omega},$$

$$c)\ 4x^2\cos\omega + 2(2+\cos^2\omega)xy + 2y^2\cos\omega = \frac{2a_{33}}{a_{12}+\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

(71). *a)* Elipsa, *b)* hiperbola, *c)* parabola.

(72). Parabolę, do któréj osi spółrzędnych są styczne w punktach $x=a$ i $y=b$.

(73). Spółrzędne środka krzywych obu równań są $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Mamy zatym

$$a)\ 5x^2+4xy+y^2-19=0,\quad b)\ 3x^2+4xy+y^2+\frac{81}{4}=0.$$

(74). *a)* $s_1+s_2=6$, $s_1s_2=1$, stąd $s_1=3-2\sqrt{2}$, $s_2=3+2\sqrt{2}$, a więc $(3-2\sqrt{2})x^2+(3+2\sqrt{2})y^2-19=0$; *b)* $s_1+s_2=4$, $s_1s_2=-1$; stąd $s_1=2+\sqrt{5}$, $s_2=-(\sqrt{5}-2)$, a więc $(\sqrt{5}+2)x^2-(\sqrt{5}-2)y^2+19=0$.

(75). $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ ma przejść na $s_1X^2+s_2Y^2$ i jednocześnie $x^2+y^2+2xy\cos\omega$ na X^2+Y^2, a więc i $a_{11}x^2+2a_{12}y+a_{22}y^2-s(x_2+y^2+2xy\cos\omega)$ na $s_1X^2+s_2Y^2-s(X^2+Y^2)$. Porównywając wyróżniki obu wyrażeń, mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}-s\cos\omega \\ a_{12}-s\cos\omega, & a_{22}-s \end{vmatrix} = (s-s_1)(s-s_2),$$

a więc s_1 i s_2 są pierwiastkami równania $(a_{11}-s)(a_{22}-s)-(a_{12}-s\cos\omega)^2=0$.

(76). $16x_2+41y^2=32$.

(77). $x^2-15y^2=3$.

(78). $y^2+\frac{x}{5\sqrt{5}}=0$.

(79). $y^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}x$.

(80). Bo $m=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(81). Jeżeli (x_i, y_i) są spółrzędnymi prostokątnymi punktów danych $(i=1, 2, \ldots, n)$, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ liczbami stałymi, to mamy wówczas $\sum_{i=1}^{i=n} m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]=a^2$; a zatym miejscem żądanym jest koło

$$x^2+y^2-2\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}x-2\frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}y+\frac{\Sigma m_i x_i^2+\Sigma m_i y_i^2-a^2\Sigma m_i}{\Sigma m_i}=0.$$

(81). Biorąc jeden z punktów danych za początek spółrzędnych prostokątnych, a prostą, przechodzącą przez drugi dany punkt, za oś x-ów, i oznaczając przez a odległość obu punktów, przez α zaś i β kąty stałe między stycznymi, które można wyprowadzić z obu punktów do tych kół, znajdziemy

$$x^2+y^2+\frac{2a\sin^2\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}x-\frac{a^2\sin^2\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=0$$

jak równanie żądanego miejsca (koła).

(83.) Wziąwszy ramiona danego kąta za osi spółrzędnych i oznaczywszy przez α, β spółrzędne środka jednego z kół, otrzymamy, jako równanie tego koła,

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2$. Stąd wypada $a^2=4(r^2-\beta^2\sin^2\omega)$, $b^2=4(r-\alpha^2\sin^2\omega)$; a zatym $\alpha^2-\beta^2=\frac{a^2-b^2}{\sin^2\omega}$ jest równaniem żądanego miejsca (hiperboli).

(84). Hiperbola, jeżeli $\angle A<\frac{\pi}{2}$; elipsa, jeżeli $\angle A>\frac{\pi}{2}$; prosta, jeżeli $\angle A=\frac{\pi}{2}$.

(86). Wziąwszy P za początek spółrzędnych prostokątnych, a PK za oś x-ów, otrzymamy równanie krzywéj $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0$. Wziąwszy $y=mx+n$ za równanie prostéj QR, miéć będziemy, jako równanie pary prostych PQ i PR, $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{2}{n}(a_{13}x+a_{23}y)(y-mx)=0$. Aby te proste były jednakowo pochylone do PK (osi x-ów), winno być $n=\frac{ma_{23}-a_{13}}{a_{12}}$. A więc równanie prostéj QR jest $y=mx+\frac{ma_{23}-a_{13}}{a_{22}}$; ta prosta przechodzi zatym, przy jakimkolwiek m, przez punkt $\left(-\frac{a_{23}}{a_{12}},\ -\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)$.

(89). $xb(bx'-ay')+ya(ay'+bx')=a^2b^2$.

(90). Odniéść równanie elipsy do obu średnic sprzężonych jako osi spółrzędnych.

(92). Elipsa $\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$.

(93). Krzywa rzędu 4-go: $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

(94). Równanie pary stycznych jest $\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2=0$; stąd $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2ab\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1}}{x'^2+y'^2-a^2-b^2}$.

(95). $x^2+y^2=a^2+b^2$.

(98). Weźmy środek koła za początek, AB za oś x-ów, a średnicę do PQ równoległą za oś y-ów; wówczas $y^2=x^2-a^2$ będzie równaniem miejsca żądanego (hiperboli równobocznéj, odniesionéj do dwu średnic sprzężonych).

(99). Wziąwszy środek podstawy za początek, a podstawę za oś x-ów układu prostokątnego, otrzymamy równanie miejsca żądanego (hiperboli równobocznéj) $x^2-y^2=a^2$.

(100). Spuśćmy z wiérzchołka C prostopadłą CO na AB; weźmy O za początek, OB za oś x-ów, OC za oś y-ów, i połóżmy $AO=a$, $OB=b$, $OC=c$; równaniu hiperboli $(a_{11}=-a_{22})$ równobocznéj $x^2-y^2+2\lambda xy+(a-b)x+\frac{c^2+ab}{c}y-ab=0$, uczynią zadość, niezależnie od λ, $x=0$, $y=\frac{ab}{c}$, a także $x=0$, $y=c$.

(104). Weźmy środek koła za początek, a promień OA za oś x-ów układu prostokątnego; oznaczmy przez (a, b) spółrzędne punktu B i połóżmy łuk $AB=\alpha$. Jeżeli x i y są spółrzędnymi punktu C na AB takiego, iż łuk $AC=\frac{1}{3}\alpha$, to $x=r\cos\frac{\alpha}{3}$, $y=r\sin\frac{\alpha}{3}$, $a=r\cos\alpha=r\left(4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}\right)$, $b=r\sin\alpha=$

$=r\left(3\sin\frac{\alpha}{3}-4\sin^3\frac{\alpha}{3}\right)$, skąd wypada $2xy-bx+ay=0$. Punkt C więc leży na hiperboli równobocznéj. Spółrzędne środka téj hiperboli są $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, a jéj asymptoty są równoległe do osi spółrzędnych.

(105). Hiberbola równoboczna $y^2-x^2-\frac{p}{2}x-\frac{3p^2}{4}=0$.

(106). Parabola $y^2=\frac{2\alpha^2}{p}(x-\alpha-p)$.

(107). Parabola.

(109). Albowiém, jeżeli $y=mx+\frac{p}{2m}$, $y=m'x+\frac{p}{2m'}$, $y=m''x+\frac{p}{2m''}$ są trzema stycznymi, a przeto $\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$, $\left(\frac{p}{2m'^2}, \frac{p}{m'}\right)$, $\left(\frac{p}{2m''^2}, \frac{p}{m''}\right)$ są spółrzędnymi punktów styczności. (Zob. Omyłki druku).

(110). Rugując y z równań $y^2=2px$ i $Y-y=-\frac{y}{p}(X-x)$, otrzymamy $2px^3+4p(p-X)x^2+2p(p-X)^2x-p^2Y^2=0$. Pierwiastki x', x'', x''' są odciętymi spodków trzech normalnych z punktu (X, Y); mamy zatym $y'=\sqrt{2px'}$, $y''=2\sqrt{2px''}$, $y'''=\sqrt{2px'''}$. Ma być

$$[(X-x')^2+(Y-y')^2]+[(X-x'')^2+(Y-y'')^2]+[(X-x''')^2+(Y-y''')^2]=a^2.$$

Rozwijając to wyrażenie i zważając, że $x'+x''+x'''=-2(p-X)$, $x'^2+x''^2+x'''^2=2(p-X)^2$, $y'+y''+y'''=0$, $y'^2+y''^2+y'''^2=-4p(p-X)$, mieć będziemy $X^2+3Y^2+4pX=a^2+2p^2$, równanie elipsy.

(112). $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{b}\right)$.

(114). Koło padnie całkiem zewnątrz elipsy, jeżeli nachylenie prostych, równoległych do osi wielkiéj, jest większe od $\operatorname{arctg}\frac{ae}{b}$.

(115). Równania dwu elips, mających mimośrody równe, a osi wielkie równoległe, są $\frac{(x-\alpha_1)^2}{a_1^2}+\frac{(y-\beta_1)^2}{a_1^2(1-e^2)}=1$ i $\frac{(x-\alpha_2)^2}{a_2^2}+\frac{(y-\beta_2)^2}{a_2^2(1-e^2)}=1$; odejmując te równania od siebie, otrzymamy równanie cięciwy spólnéj

$$2(1-e^2)(\alpha_1-\alpha_2)x+2(\beta_1-\beta_2)y+(1-e^2)(\alpha_2^2-\alpha_1^2-a_2^2+a_1^2)+\beta_2^2-\beta_1^2=0.$$

Suma równań trzech cięciw będzie tożsamościowo równa 0.

(116). Jeżeli x, y są spółrzędnymi punktu P, a X, Y spółrzędnymi środka koła, to mamy $Y=\frac{\text{pole trójkąta FPF}'}{\text{obwód trójkąta FPF}'}=\frac{ey}{1+e}$, $X=ex$. Ponieważ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, więc znajdziemy, że miejscem żądanym jest inna elipsa.

(120). Wziąwszy ognisko za początek, a prostopadłą do kierownicy za oś x-ów, otrzymamy, jako równanie krzywéj, $x^2+y^2-(mx+h)^2=0$; a więc równania trzech wzmiankowanych prostych będą: $(1-m^2)x+\mu y-mh=0$, $x+\mu y=0$, $mx+h=0$.

(121). Wziąwszy ognisko za początek układu prostokątnego, otrzymamy równanie krzywéj $x^2+y^2-(mx+ny+h)^2=0$. Żądane miejsce jest wypadkiem rugowania kątów φ i ψ z trzech równań $x+y\operatorname{tg}\varphi=(mx+ny+h)\sec\varphi$, $x+y\operatorname{tg}\psi=(mx+ny+h)\sec\psi$, $\operatorname{tg}(\varphi-\psi)=a$, t. j.

$$a^2(x^2+y^2)=[a^2+(1-\sqrt{1+a^2})^2][mx+ny+h]^2.$$

Żądane miejsce jest więc hiperbolą.

(123). Albowiém równanie tego koła jest

$$x^2=y^2-\frac{b^4-c^2\beta^2}{b^2\beta}y-c^2=0.$$

(126). Bo równanie téj hiperboli jest $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\sec^2\alpha=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$.

(127). Równania tych dwu stycznych można pisać: $y=m\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2m}$, $y=-\frac{1}{m}\left(x+\frac{p'}{2}\right)-\frac{p'}{2}m$. Rugując m, otrzymamy $x+\frac{p+p'}{2}=0$.

(129). Porównaj (27).

(131). Bo wzmiankowaną sumą jest $\dfrac{n+e\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)}{p}=\dfrac{n}{p}$, gdyż $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=0$.

(133). Według art. 159, znajdziemy:

$$\frac{x_1^0}{a_1(-a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3)}=\frac{x_2^0}{a_2(a_1s_1-a_2s_2+a_3s_3)}=\frac{x_3^0}{a_3(a_1s_1+a_2s_2-a_3s_3)}.$$

(134). Według art. 159, znajdziemy

$$\frac{x_1^0}{a_2s_3+a_3s_2}=\frac{x_2^0}{a_3s_1+a_1s_3}=\frac{x_3^0}{a_1s_2+a_2s_1}.$$

(135). Równanie prostéj, przechodzącéj przez dwa punkty (x'_1, x'_2, x'_3) i (x''_1, x''_2, x''_3) na krzywéj, jest

$$x_1(x'_2x''_3-x''_2x'_3)+x_2(x'_3x''_1-x''_3x'_1)+x_3(x'_1x''_2-x''_1x'_3)=0,$$

przyczym $a_1x'_2x'_3+a_2x'_3x'_1+a_3x'_1x'_2=0$ i $a_1x''_2x''_3+a_2x''_3x''_1+a_3x''_1x''_2=0$. Dwa ostatnie równania dają

$$\frac{a_1}{x'_1x''_1(x'_2x''_3-x''_2x'_3)}=\frac{a_2}{x'_2x''_2(x'_3x''_1-x''_3x'_1)}=\frac{a_3}{x'_1{}^3x''_3(x'_1x''_2-x''_1x'_2}.$$

Wskutek tego, równanie siecznéj przywodzi się do

$$\frac{a_1x_1}{x'_1x_1''}+\frac{a_2x_2}{x'_2x''_2}+\frac{a_3x_3}{x'_3x''_3};$$

sieczna zamieni się na styczną, gdy oba te punkty zejdą się razem; a zatym $\frac{a_1x_1}{x'_1{}^2}+\frac{a_2x_2}{x'_2{}^2}+\frac{a_3x_3}{x'_3{}^2}=0$ jest równaniem stycznéj w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3).

(136). Rugowanie x'_1, x'_2, x'_3 z równań $\frac{a_1x_1}{x'_1{}^2}+\frac{a_2x_2}{x'_2{}^2}+\frac{a_3x_3}{x'_3{}^2}=0$,

$\frac{a_1}{x'_1}+\frac{a_2}{x'_2}+\frac{a_3}{x'_3}=0$ i $\frac{a_3}{x'^2_3}\sin A_2-\frac{a_2}{x'^2_2}\sin A_3=0$ (to ostatnie wyraża warunek równoległości stycznéj do $x_1=0$, art. 63) daje

$$(\sqrt{a_3\sin A_3}\pm\sqrt{a_2\sin A_2})^2 x_1+a_1(x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)=0,$$

jako równanie obu stycznych. Cięciwa styczności jest biegunową punktu w nieskończoności na prostéj A_2A_3, t. j. punktu, w którym się przecinają proste $x_1=0$ i $x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3=0$, t. j. $\frac{x'_1}{0}=\frac{x'_2}{\sin A_3}=-\frac{x'_3}{\sin A_2}$. Jéj równanie jest zatym $(a_2\sin A_2-a_3\sin A_3)x_1+a_1(x_2\sin A_2-x_3\sin A_3)=0$.

(137). Równania normalnych w A_1, A_2, A_3 są: $(a_2-a_3\cos A_1)x_2-(a_3-a_2\cos A_1)x_3=0$, $(a_3-a_1\cos A_2)x_3-(a_1-a_3\cos A_2)x_1=0$, $(a_1-a_2\cos A_3)x_1-(a_2-a_1\cos A_3)x_2=0$. Te trzy proste przetną się w jednym punkcie, jeżeli $a_1(a_2^2-a_3^2)(\cos A_1+\cos A_2\cos A_3)+a_2(a_3^2-a_1^2)(\cos A_2+\cos A_3\cos A_1)+a_3(a_1^2-a_2^2)(\cos A_3+\cos A_1\cos A_2)=0$. Podstawiwszy w wyrazach piérwszych dwumianów $\cos A_1=-\cos(A_2+A_3)$ i t. d., a potym uwzględniwszy, że $s_1:s_2:s_3=\sin A_1:\sin A_2:\sin A_3$, otrzymamy żądane równanie warunkowe.

(138). Jeżeli $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ są spółrzędnymi środka koła $f(x_1, x_2, x_3)=0$, r promień koła, a $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ kątami, które ten promień czyni z A_2A_3, A_3A_1 i A_1A_2, to mamy $x_1=x_1{}^0+r\sin\gamma_1$, $x_2=x_2{}^0+r\sin\gamma_2$, $x_3+x_3{}^0+r\sin\gamma_3$ dla punktu na kole, zatym $r^2=-\frac{f(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)}{f(\sin\gamma_1, \sin\gamma_2, \sin\gamma_3)}$. Ponieważ dla środka koła opisanego $\frac{x_1{}^0}{\cos A_1}=\frac{x_2{}^0}{\cos A_2}=\frac{x_3{}^0}{\cos A_3}=\frac{2\Delta}{s_1\cos A_1+s_2\cos A_2+s_3\cos A_3}$, a dla koła, względem którego trójkąt jest z sobą samym sprzężony,

$$\frac{x_1{}^0}{\cos A_2\cos A_3}=\frac{x_2{}^0}{\cos A_3\cos A_1}=\frac{x_3{}^0}{\cos A_1\cos A_2}=\frac{2\Delta}{s_1\cos A_2\cos A_3+\dots},$$

przeto

$$R^2=\frac{4\Delta^2(\cos A_2\cos A_3\sin A_1+\dots)}{(s_1\cos A_1+\dots)^2(\sin\gamma_2\sin\gamma_3\sin A_1+\dots)},\ \rho^2=\frac{4\Delta^2(\cos^2A_2\cos^2A_3\sin 2A_1+\dots)}{(s_1\cos A_2\cos A_3+\dots)^2(\sin^2\gamma_1\sin 2A_1+\dots)}.$$

Podstawiając te wartości w podane równanie i uwzględniając, że, wskutek wzorów (29) — (32) w art. 63,

$\sin^2\gamma_1\sin 2A_1+\dots=2\sin A_1\sin A_2\sin A_3$, $\sin\gamma_2\sin\gamma_3\sin A_1+\dots=-\sin A_1\sin A_2\sin A_3$,

łatwo sprawdzimy to równanie.

(140). Wziąwszy ten trójkąt za trójkąt odniesienia i przez x'_1, x'_2, x'_3 oznaczywszy spółrzędne punktu danego, znajdziemy $\frac{x'^2_1}{x_1}+\frac{x'^2_2}{x_2}+\frac{x'^2_3}{x_3}=0$, jako równanie miejsca środków.

(141). Gdy $(x'_1,\dots)$, $(x''_2,\dots)$ są dwoma dowolnie obranymi punktami na stałéj prostéj, a $P'=0$, $P''=0$ i $Q'=0$, $Q''=0$ równaniami biegunowych tych punktów względem krzywych $f=0$ i $g=0$, to $(x_1=x'_1+\lambda x''_1,\dots)$ są spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na téj prostéj, a $P'+\lambda P''=0$ i $Q'+\lambda Q''=0$ równaniami biegunowymi tego punktu względem $f=0$ i $g=0$. Te dwie biegunowe przecinają się na krzywéj stopnia 2-go $P'Q''-P''Q'=0$. Ta krzywa jest opisaną na trójkącie z sobą samym sprzężonym względem obu danych krzywych, jak to zobaczymy w rozdziale następującym.

(142). Równanie biegunowéj jakiegokolwiek punktu na $x_1=0$ względem krzywéj $f=0$ jest $x'_2f_2+x'_3f_3=0$. Spółrzędne punktów, w których krzywą $f\equiv a_{11}x_1^2+\ldots=0$ przecina $x_1=0$, dają równanie $a_{22}x'^2_2+2a_{23}x'_2x'_3+a_{32}x'^2_3=0$. Rugowanie x'_2 i x'_3 z tych dwu równań prowadzi do żądanego równania $a_{22}f_3^2-2a_{23}f_2f_3+a_{33}f_2^2=0$.

(143). Żądanym równaniem jest $(a_1x_1)^{\frac{1}{2}}+(a_2x_2)^{\frac{1}{2}}+(a_3x_3)^{\frac{1}{2}}=0$ z warunkami (art. 166) $\frac{a_1}{\varkappa_1}+\frac{a_2}{\varkappa_2}+\frac{a_3}{\varkappa_3}=0$ i $\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3}=0$, skąd

$$a_1:a_2:a_3=\left(\frac{1}{\varkappa_2\lambda_3}-\frac{1}{\varkappa_3\lambda_2}\right):\ldots.$$

(144). $(s_1x_1)^{\frac{1}{2}}+(s_2x_2)^{\frac{1}{2}}+(s_3x_3)^{\frac{1}{2}}=0$.

(146). Gdyż równania tych trzech stycznych są $\frac{x_2}{x'_2}+\frac{x_3}{x'_3}=\frac{2x_1}{x'_1}$, $\frac{x_3}{x'_3}+\frac{x_1}{x'_1}=\frac{2x_2}{x'_2}$, $\frac{x_1}{x'_1}+\frac{x_2}{x'_2}=\frac{2x_3}{x'_3}$.

(147). Wziąwszy $a_1a_2a_3$ za trójkąt, mieć będziemy równania boków czworoboku: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$, $-a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$, $a_1x_1-a_2x_2+a_3x_3=0$, $a_1x_1+a_2x_2-a_3x_3=0$, a równania krzywych: $-a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+a_3x_3^2=0$, $a_1^2x_1^2-a_2^2x_2^2+a_3x_3^2=0$, $a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2-a_3^2x_3^2=0$.

(148). Kładąc w równaniu krzywéj $x_1=x_1^0+\lambda_1\rho$, $x_2=x_2^0+\lambda_2\rho$, $x_3=x_3^0+\lambda_3\rho$ i przyrównywając do zera spółczynnik przy ρ, mieć będziemy $a_1\lambda_1x_1^0+a_2\lambda_2x_2^0+a_3\lambda_3x_3^0=0$; a więc $a_1\lambda_1x_1+a_2\lambda_2x_2+a_3\lambda_3x_3=0$ jest równaniem żądanéj średnicy.

(149). $\left(\frac{\varkappa_1^2}{a_1}+\frac{\varkappa_2^2}{a_2}+\frac{\varkappa_3^2}{a_3}\right)(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2)-(\varkappa_1x_1+\varkappa_2x_2+\varkappa_3x_3)^2=0$.

(150). Elipsa $4x^2+5xy+4y^2-16x-16y+12=0$, któréj środek leży w punkcie $\left(\frac{16}{13}, \frac{16}{13}\right)$, a połowy osi elipsy są $=\left(\frac{200}{139}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{200}{39}\right)^{\frac{1}{2}}$ (układ prostokątny).

(151). $x^2+y^2-2x-2y+1+\lambda(x^2-xy+y^2-x-y)=0$.

(152). $Ag^3-\theta fg^2+\theta'f^2g-Bf^3=0$.

(153). Albowiém równanie téj krzywéj

$$\begin{aligned}P'Q''-P''Q'\equiv(x'_1f_1+x'_2f_2+x'_3f_3)(x''_1g_1+x''_2g_2+x''_3g_3)\\-(x''_1f_1+x''_2f_2+x''_3f_3)(x'_1g_1+x'_2g_2+x'_3g_3)=0\end{aligned}$$

przywodzi się do postaci

$$\begin{aligned}(x'_2x''_3-x''_2x'_3)(f_2g_3-f_3g_2)+(x'_3x''_1-x''_3x'_1)(f_3g_1-f_1g_3)+\\+(x'_1x''_2-x''_1x'_2)(f_1g_2-f_2g_1)=0,\end{aligned}$$

skąd czytamy, że ta krzywa przechodzi przez punkty, dla których

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} (= -\lambda),$$

t. j. przez wiérzchołki trójkąta z sobą samym sprzężonego względem $f=0$ i $g=0$.

(154). Równanie krzywéj $g=0$, jako opisanéj na trójkącie odniesienia, jest postaci $g \equiv \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \frac{b_3}{x_3} = 0$. Równania boków trójkąta sprzężonego z trójkątem odniesienia względem $f=0$, jako biegunowych wiérzchołków, są $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$. Stąd znajdziemy dla spółrzędnych bieguna obu trójkątów $A_{23}x_1 = A_{31}x_2 = A_{12}x_3$. Podstawiwszy w $g=0$ za x_1, x_2, x_3 wartości $\frac{1}{A_{23}}$, $\frac{1}{A_{31}}$, $\frac{1}{A_{12}}$, otrzymamy $A_{23}b_1 + A_{31}b_2 + A_{12}b_3 = 0$, jako warunek, aby biegun leżał na $g=0$. Atoli strona piérwsza tego równania warunkowego jest $= \frac{1}{2}\theta$. Część więc piérwsza twierdzenia jest dowiedziona. Podobnie dowiéść można części drugiéj.

(155). Spodki normalnych, które z punktu (ξ, η) do krzywéj $f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ można wyprowadzić, leżą na przecięciu téj krzywéj z krzywą $g \equiv 2(c^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y) = 0$. Podstawiwszy w równaniu spólnych cięciw tych dwu krzywych (ćw. 152) $x = \alpha$, $y = \beta$, otrzymamy

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2\beta\xi - b^2\alpha\eta - c^2\alpha\beta)^3 + 2a^2b^2c^2\xi\eta\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^3 + 2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)$$
$$(a^2\beta\xi - b^2\alpha\eta - c^2\alpha\beta)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^2 = 0,$$

jako równanie żądanego miejsca. Jest to krzywa rzędu 3-go. Jeżeli $\alpha = 0$, lub $\beta = 0$, to ta krzywa roskłada się na prostą $\xi = 0$, lub $\eta = 0$, i krzywą stopnia 2-go. Jeżeli punkt (α, β), leży w nieskończoności, to ta krzywa zamienia się na krzywą stopnia 2-go.

(156). Kładąc a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3 odpowiednio za x_1, x_2, x_3, można będzie równanie krzywéj $f=0$ tak pisać: $f \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0$. Że zaś równanie krzywéj $g=0$ ma być kształtu $g \equiv 2(b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_2) = 0$, zatym $A = -4$, $B = 2b_1b_2b_3$, $\theta = 4(b_1 + b_2 + b_3)$, $\theta' = -(b_1 + b_2 + b_3)^2$. Stąd wypada $\theta^2 = 4A\theta'$. Skoro A, θ, θ' są niezmiennikami, więc ten sam związek powinien zachodzić między spółczynnikami równań ogólnych obu krzywych.

(157). Jeżeli $d^2 = r'^2 \pm 2rr'$, gdzie d oznacza odległość środków obu kół.

(158). Mamy w równaniu $f + \lambda\left(\frac{u_1x_1}{h_1} + \frac{u_2x_2}{h_2} + \frac{u_3x_3}{h_3}\right)^2 = 0$ parametr λ tak wyznaczyć, aby to równanie przedstawiało parę prostych. Skoro $B=0$ i $\theta'=0$, to równanie sześcienne na λ sprowadza się do $A + \lambda\theta = 0$. Atoli $\theta = A_{11}\frac{u_1^2}{h_1^2} + A_{22}\frac{u_2^2}{h_2^2} + A_{33}\frac{u_3^2}{h_3^2} + 2A_{23}\frac{u_2u_3}{h_2h_3} + 2A_{31}\frac{u_3u_1}{h_3h_1} + 2A_{12}\frac{u_1u_2}{h_1h_2} \equiv F(u_1, u_2, u_3)$ jest piérwszą stroną równania danéj krzywéj $f=0$ we spółrzędnych linii prostéj; mamy zatym $A + \lambda F = 0$, a więc

$$\mathrm{F}f = \mathrm{A}\left(\frac{u_1x_1}{h_1} + \frac{u_2x_2}{h_2} + \frac{u_3x_3}{h_3}\right)^2$$

jest żądanym równaniem. Jeżeli zaś dana prosta jest sama styczną, to obie styczne z nią się zejdą; odpowiednim zatym warunkiem jest wtedy $\mathrm{F}=0$, jak być powinno.

(159). Gdy $f \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$, $g \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$, mamy $\theta' \equiv \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$. Środek zatym leży na hiperboli.

(160). Przez wiérzchołki jednego z trójkątów i przez dwa wiérzchołki drugiego trójkąta poprowadźmy krzywą stopnia 2-go $g=0$. Wziąwszy ten drugi trójkąt za trójkąt odniesienia, będzie można równanie danéj krzywéj $f=0$ tak pisać: $f \equiv x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0$. Ponieważ krzywa $g=0$ jest opisana na piérwszym trójkącie, zatym $\theta = b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$. Atoli ta krzywa przechodzi przez dwa wiérzchołki drugiego trójkąta, który jest trójkątem odniesienia, więc także $b_{11}=0$ i $b_{22}=0$; a więc jeszcze $b_{33}=0$, t. j. $g=0$ przechodzi także przez trzeci wiérzchołek drugiego trójkąta. Podobnie dowiedzie się drugiéj części twierdzenia.

(161). Jeżeli $\mathrm{K} \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r = 0$ i $\mathrm{K}' \equiv (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - r'^2 = 0$ są równaniami dwu kół, wtedy, kładąc $d^2 = (\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2$, mieć będziemy $d^2 = (r \pm r')^2$, lub $\overline{\mathrm{K}'} = r^2 \pm 2rr'$, gdy $\overline{\mathrm{K}'} = d^2 - r'^2$.

(162). Albowiém te koła przechodzą wszystkie przez 2 punkty: $x=0$, $y^2 = \mp \delta^2$.

(163). Jest przecięciem się prostych $xx' + yy' + \delta^2 = 0$, $x + x' = 0$.

(164). $y'=0$, $x' = \pm\delta$; gdyż wtedy równania $xx' + yy' + \delta^2 = 0$ i $x + x' = 0$ będą przedstawiały jednę prostą. Skoro $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \delta^2 \equiv (x-\lambda)^2 + y^2 - (\lambda^2 - \delta^2) = 0$, dla $\lambda^2 = \delta^2$, daje $y=0$ i $x = \lambda = \pm\delta$, więc widoczna, że te dwa punkty należą, jako przypadki szczególne, do układu kół o spólnéj osi pierwiastkowéj. Poncelet nazwał je punktami granicowymi układu kół o spólnéj osi pierwiastkowéj.

(165). $2(aa' + bb') = c^2 + c'^2$.

(167). Spółrzędne środków podobieństwa dwu kół $\mathrm{K}_1 = (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - r_1{}^2 = 0$, $\mathrm{K}_2 = (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 - r_2{}^2 = 0$ są $\frac{r_2\alpha_1 \mp r_1\alpha_2}{r_2 \mp r_1}$, $\frac{r_2\beta_1 \mp r_1\beta_2}{r_2 \mp r_1}$; a zatym równaniem ich biegunowéj względem K_1 jest $(\alpha_1 - \alpha_2)(x-\alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2)(y-\beta_1) + r_1(r_1 \mp r_2) = 0$.

(168). Jakoż, przyjmijmy, że koło $\mathrm{K} \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$ jest styczne do trzech kół danych $\mathrm{K}_1 \equiv (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - r_1{}^2 = 0$, $\mathrm{K}_2 \equiv (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 - r_2{}^2 = 0$, $\mathrm{K}_3 \equiv (x-\alpha_3)^2 + (y-\beta_3)^2 - r_3{}^2 = 0$, np. do wszystkich trzech zewnętrznie. Kładąc wtedy, dla $i = 1, 2, 3$, $\overline{\mathrm{K}_i} = (\alpha-\alpha_i)^2 + (\beta-\beta_i)^2 - r_i^2$, mieć będziemy (ćw. 161) $\overline{\mathrm{K}_1} = r^2 + 2rr_1$, $\overline{\mathrm{K}_2} = r^2 + 2rr_2$, $\overline{\mathrm{K}_3} = r^2 + 2rr_2$, skąd wypada $\overline{\mathrm{K}_1} - \overline{\mathrm{K}_2} = 2r(r_1 - r_2)$, $\overline{\mathrm{K}_1} - \overline{\mathrm{K}_3} = 2r(r_1 - r_3)$. Oznaczmy następnie przez (x_1, y_1) spółrzędne punktu P_1, w którym koło K jest styczne do koła K_1. Ponieważ styczność jest zewnętrzna, więc mamy $x_1 - \alpha : \alpha_1 - x_1 = r : r_1$, i $y_1 - \beta : \beta_1 - y_1 = r : r_1$, skąd wypada znowu $\alpha = \frac{(r+r_1)x_1 - r\alpha_1}{r_1}$, $\beta = \frac{(r+r_1)y_1 - r\beta_1}{r_1}$. Wstawmy teraz te wartości na α i β w dwa ostatnie równania; wypadnie wtedy, po uskutecznieniu łatwych uproszczeń,

$$\text{(a)}\quad \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)x_1+2(\beta_2-\beta_1)y_1+\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2-(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2-r_3{}^2)}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2}=$$
$$=\frac{2(\alpha_3-\alpha_1)x_1+2(\beta_3-\beta_1)y_1+\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2-(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2}.$$

Dodajmy nareszcie po 1 do obu stron ostatniego równania; natenczas wypadnie

$$\text{(b)}\quad \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(x_1-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_2)(y_1-\beta_1)+r_1(r_1-r_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2-(r_1-r_2)^2}=$$
$$=\frac{(\alpha_1-\alpha_3)(x_1-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_3)(y_1-\beta_1)+r_1(r_1-r_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2-(r_1-r_3)^2}.$$

Z (a) czytamy, że punkt styczności P_1 leży na prostéj, przechodzącéj przez środek pierwiastkowy S trzech danych kół, a z (b), że ten sam punkt leży na prostéj, przechodzącéj przez punkt przecięcia się biegunowych względem koła K_1 środków podobieństwa zewnętrznych kół K_1, K_2 i kół K_1, K_3, czyli przez biegun B_1 względem koła K_1 osi podobieństwa zewnętrznéj trzech danych kół. Stąd widoczna, że istnieje 8 kół stycznych do trzech kół danych.

(169). Cztéry punkty $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ leżą na kole $x^2+y^2-2ax-2by+c^2=0$, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1{}^2+y_1{}^2, & -2x_1, & -2y_1, & 1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2, & -2x_2, & -2y_2, & 1 \\ x_3{}^2+y_3{}^2, & -2x_3, & -2y_3, & 1 \\ x_4{}^2+y_4{}^2, & -2x_4, & -2y_4, & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & x_1{}^2+y_1{}^2 \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2{}^2+y_2{}^2 \\ 1, & x_3, & y_3, & x_3{}^2+y_3{}^2 \\ 1, & x_4, & y_4, & x_4{}^2+y_4{}^2 \end{vmatrix}=0.$$

Rozwijając iloczyn tych dwu wyznaczników, t. j. wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 0 & , \overline{A_1A_2}^2 & , \overline{A_1A_3}^2 & , \overline{A_1A_4}^2 \\ \overline{A_1A_2}^2 & , 0 & , \overline{A_2A_3}^2 & , \overline{A_2A_4}^2 \\ \overline{A_1A_3}^2 & , \overline{A_2A_3}^2 & , 0 & , \overline{A_3A_4}^2 \\ \overline{A_1A_4}^2 & , \overline{A_2A_4}^2 & , \overline{A_3A_4}^2 & , 0 \end{vmatrix}=0,$$

i kładąc $2S=A_1A_2 . A_3A_4+A_1A_3 . A_2A_4+A_1A_4 . A_2A_3$, znajdziemy $S(S-A_1A_2 . A_3A_4)(S-A_1A_3 . A_2A_4)(S-A_1A_4 . A_2A_3)=0$, a zatym żądany związek jest

$$A_1A_2 . A_3A_4 \pm A_1A_3 . A_2A_4 \pm A_1A_4 . A_2A_3=0.$$

(170). Niech będą O, O_i, O_k środkami trzech kół K, K_i, K_k, A_i i A_k niech będą punktami styczności K z K_i i K z K_k. Trójkąt równoramienny A_iOA_k daje $A_iA_k=2r\sin\frac{1}{2}A_iOA_k$. Atoli z trójkąta O_iOO_k, w którym

$$O_iO_k=\sqrt{(\alpha_i-\alpha_k)^2+(\beta_i-\beta_k)^2},\quad OO_i=r-r_i,\ OO_k=r-r_k$$

wypada $\sin^2\frac{1}{2}A_iOA_k=\dfrac{[(\alpha_i-\alpha_k)^2+(\beta_i-\beta_k)^2]-(r_i-r_k)^2}{4(r-r_i)(r-r_k)}=\dfrac{ik^2}{4(r-r_i)(r-r_k)}$;

jest więc $A_iA_k = \pm \frac{r.ik}{\sqrt{(r-r_i)(r-r_k)}}$. A że (169) $A_1A_2 . A_3A_4 \pm A_1A_3 . A_2A_4 \pm$ $\pm A_1A_4 . A_2A_3 = 0$, więc i t. d.

(171). Załóżmy, że w zadaniu poprzedzającym koło K_4 jest punktem. Ten punkt będzie zarazem punktem koła K stycznego do K_1, K_2 i K_3, a $\overline{41}$, $\overline{42}$, $\overline{43}$ będą długościami stycznych z tego punktu odpowiednio do kół K_1, K_2, K_3, a więc $\overline{41} = \sqrt{K_1}$, $\overline{42} = \sqrt{K_2}$, $\overline{43} = \sqrt{K_3}$. Wstawiwszy wartości w równanie zadania poprzedzającego, otrzymamy $\overline{23}\sqrt{K_1} \pm \overline{31}\sqrt{K_2} \pm \overline{12}\sqrt{K_3} = 0$, jako równanie cztérech par kół, stycznych do trzech kół danych.

(172). Niech $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ będzie sześciobokiem wpisanym w krzywą stopnia 2-go (fig. 49), a L, M, N punktami przecięcia się par boków przeciwległych P_1P_2, P_4P_5; P_2P_3, P_5P_6; P_3P_4, P_6P_1. Wziąwszy P_1 i P_5 za wiérzchołki dwu pęków, mamy podług art. 51 $(P_1 . P_2P_3P_4P_6) = (P_5 . P_2P_3P_4P_6)$. Oznaczmy przez r i s punkty przecięcia się par boków P_2P_3, P_4P_5 i P_1P_2, P_3P_4; będzie wtedy $(P_1 . P_2P_3P_4P_6) =$ $= (sP_3P_4N)$ i $(P_5 . P_2P_3P_4P_6) = (P_2P_3rM)$, a przeto $(sP_3P_4N) = (P_2P_3rM)$. Przyjmując nakoniec punkt L za spólny wiérzchołek tych dwu pęków, których promienie przechodzą odpowiednio przez s, P_3, P_4, N i przez P_2, P_3, r, M, mamy $(sP_3P_4N) =$ $= (L . sP_3P_4N)$ i $(P_2P_3rM) = (L . P_2P_3rM)$. Stąd wypada $(L . sP_3P_4N) = (L . P_2P_3rM)$. A że promienie Ls i LP_2, LP_4 i Lr razem się ze sobą schodzą, więc i promienie LN i LM zejdą się razem, t. j. punkty L, M, N leżą na jednéj prostéj. Podobnie dowiéść można twierdzenia Brianchon'a.

(173). Albowiém dane warunki są równoważne 5 w-l.

(174). Albowiém dane warunki są równoważne $2 . 2 = 4$ w-l. i 1 w-p.

(175). Albowiém dane warunki są równoważne $2 + 2 + 1 = 5$ w-l.

(176). Albowiém dane warunki są równoważne $2 + 3$ w-p. lub $2 + 3$ w-l.

(177). Albowiém pięciu w-l. może uczynić zadość tylko jedna krzywa stopnia 2-go.

(178). Albowiém pięciu warunkom, z których 4 są w-l. a jeden w-p., mogą uczynić zadość tylko dwie krzywe stopnia 2-go.

(179). Albowiém pięciu w-l. lub w-p. może uczynić zadość tylko jedna krzywa stopnia 2-go.

(180). Albowiém pięciu warunkom, z których 3 są w-p. a 2 są w-l., lub przeciwnie 2 są w-p., a 3 są w-l., mogą uczynić zadość 4 krzywe st. 2.

(181). Albowiém warunek, aby środek leżał na danéj prostéj, jest równoważny jednemu w-l., mianowicie warunkowi, aby ta prosta była sprzężoną z prostą w nieskończoności.

(182). Dość znaléść kierownicę, należącą do danego ogniska. Jeżeli A, B, C są trzema danymi punktami, a F jest danym ogniskiem, to należy z F wyprowadzić proste FD i FE, prostopadłe do dwusiecznych FG i FH kątów AFB i BFC, i te proste przedłużyć do przecięcia się odpowiednio z AB i BC w D i E: prosta DE będzie kierownicą należącą do ogniska F (art. 149). Są tu możliwe cztéry rozwiązania, bo każdy z kątów AFB i BFC ma po dwie dwusieczne, wewnętrzną i zewnętrzną. Tak być powinno, bo dane warunki są równoważne 3 w-p. i 2 w-l.

(183). Z ogniska danego spuścić prostopadłe na trzy dane styczne. Spodki tych trzech prostopadłych leżą na kole spółśrodkowym z żądaną krzywą i mającym promień $=a$.

(184). Dość znaléść ognisko należące do téj kierownicy. W figurze, odnoszącéj się do ćw. (182), dane są punkty A, B, C, D, E; nadto punkty G i D tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą A, B, i taksamo punkty H i E tworzą parę, harmonicznie sprzężoną z parą B i C. Gdy F jest żądanym ogniskiem, to $\angle \mathrm{GFD} = \angle \mathrm{HFE} = \frac{\pi}{2}$.

(185). Z danych punktów A i B, jako ze środków, kréślimy koła promieniami AF i BF. Styczna spólna tych dwu kół jest kierownicą. Są tu dwa rozwiązania możebne.

(186). Z danych dwu punktów nakréślić koła promieniami równymi ich odległościom od danéj kierownicy; te dwa koła przetną się w ognisku. Są tu dwa rozwiązania możebne.

(187). Rozwiązanie polega na tym twierdzeniu, że asymptoty, uważane za szczególny przypadek hiperboli, i hiperbola mają spólne średnice sprzężone. Gdy A, B, C są trzema punktami danymi, to, zaznaczywszy kierunki średnic sprzężonych z kierunkami cięciw AB i BC, w tych kierunkach prowadzimy proste odpowiednio przez środki cięciw AB i BC. Te dwie proste przetną się w środku hiperboli żądanéj.

(188). Jeżeli A jest danym wiérzchołkiem głównym, P danym punktem, a ST daną asymptotą, to prowadzimy AP aż do przecięcia się z asymptotą w Q, następnie na przedłużeniu PA odcinamy $AQ' = PQ$, nakoniec z A kréślimy koło styczne do ST, a z Q′ wyprowadzamy styczną do tego koła. Ta styczna będzie drugą asymptotą żądanéj hiperboli.

(189). Spodek prostopadłéj z ogniska na styczną leży na stycznéj w wiérzchołku głównym; koło nakréślone na téj prostopadłéj, jako na średnicy, jest żądanym miejscem.

(190). Rozwiązanie polega na tym twierdzeniu, że promienie wodzące, wyprowadzone z dwu ognisk do punktu przecięcia się dwu stycznych, czynią kąty równe z tymi stycznymi. Miejscem żądanym jest hiperbola, mająca środek w punkcie przecięcia przekątnych.

(191). Wziąć punkt przecięcia się asymptoty i kierownicy za początek, a kierownicę za oś y-ów układu prostokątnego; równanie hiperboli będzie wtedy kształtu $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - m^2x^2 = 0$. Jeżeli $y = ax$ jest równaniem danéj asymptoty, to natenczas równanie $(x-\alpha)^2 + (ax-\beta)^2 - m^2x^2 = 0$ powinno na x dać dwie wartości ∞; stąd wypadnie $m^2 = 1 + a^2$ i $\beta = -\frac{1}{a}\alpha$. Miejscem ogniska jest więc prosta, przechodząca przez początek i prostopadła do asymptoty, i t. d.

(192). Gdy $f=0$ i $g=0$ są dwiema danymi krzywymi, natenczas otrzymamy równanie żądanego miejsca przez rugowanie λ z $f_1 + \lambda g_1 = 0$ i $f_2 + \lambda g_2 = 0$.

(193). Wziąć daną prostą za oś y-ów, a prostopadłą do niéj, przechodzącą przez dane ognisko, za oś x-ów. Gdy a i b oznaczają odległości ogniska i punktu danego od początku, to równaniem hiperboli będzie: $(1-m^2)x^2 \mp 2mxy -$

$-2(a+mh)x\mp 2hy+a^2-h^2=0$, gdzie m jest ilością nieoznaczoną, a $h=\mp b\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Następnie należy zmienić kierunek osi x-ów tak, aby nowa oś x-ów była równoległa do drugiéj asymptoty, a potym przeniéść początek do środka.

(194). Wziąć daną prostą za oś y-ów, a prostopadłą do niéj z danego punktu za oś x-ów. Żądane miejsce jest pewną parabolą.

(195). Biorąc podstawę AB za oś x-ów, a prostopadłą CO z wiérzchołka C na AB za oś y-ów, i kładąc $AO=a$, $OB=b$, $OC=c$, jako równanie hiperboli, otrzymamy $x^2+2\lambda xy-y^2+(a-b)x+\frac{ab+c^2}{c}y-ab=0$. Stąd wynika $2(x^2+y^2)+$ $+(a-b)x-\frac{ab+c^2}{c}y=0$, jako równanie żądanego miejsca.

(196). Biorąc dwie dane proste za osi x i y, otrzymamy, jako równanie paraboli,

$$\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+1=0,$$

gdzie z dwu długości a i b jedna jest daną.

(198). Równanie krzywéj stopnia 2-go, stycznéj do elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w punkcie (x', y'), jest $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)(lx+my+n)=0$. Jeżeli ta krzywa jest kołem, wówczas $\frac{1}{a^2}+\frac{lx'}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{my'}{b^2}$ i $\frac{ly'}{b^2}+\frac{mx'}{a^2}=0$. Stąd zaś wyznaczymy l i m, tak iż pozostanie tylko jedna liczba nieoznaczona n, i t. d.

(199). $x^2-y^2=0$.

(200). Bo równanie stycznych w początku jest $ay^2+bx^2=0$.

(201). Dwa węzły $x=+a$, $y=0$; $x=-a$, $y=0$.

(202). Albowiém punkty styczności leżą na przecięciu się piérwszéj biegunowéj początku, $2\varphi_1+\varphi_2=0$, z daną krzywą, t. j. z krzywą $2\varphi_3+\varphi_2=0$.

(203). Albowiém oba warunki są wypadkiem rugowania x z równań $ax^4+bx^3+cx^2+dx-e^2=0$ i $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$.

(204). $x=b$, $y=\frac{2b^3}{a^2}$.

(205). Albowiém styczna w punkcie przegięcia ma z krzywą tylko $n-3$ punktów spólnych oprócz punktu przegięcia; a że równaniem stycznéj w początku jest $\varphi_1=0$, zatym dla $\varphi_1=0$ jest także $\varphi_2=0$.

(206). Krzywa Hesse'go $H(f)=-180e^2(ay+bx)x=0$ wskazuje, że punkt przegięcia leży na przecięciu się krzywéj z prostą $ay+bx=0$.

(207). Sprowadzić równanie krzywéj do postaci $\varphi_3+\varphi_1+\varphi_0=0$ przez przeniesienie początku do punktu (α, β). Znajdziemy warunek $\begin{vmatrix} d_0, d_1, d_2 \\ d_1, d_2, d_3 \\ c_0, c_1, c_2 \end{vmatrix}=0$, gdy

$$\alpha=\frac{c_1d_1-c_0d_2}{d_0d_2-d_1^2},\quad \beta=\frac{c_0d_1-c_1d_0}{d_0d_2-d_1^2}.$$

(209). $bx+b'=0$, $ay+a'=0$, $ab(ax+by)=a^2b'-a'b^2$.

(210). Jeżeli $f\equiv a+(bx+b_1y)+\ldots+(gx^n+g_1x^{n-1}+\ldots+g_ny^n)=0$ jest równaniem danéj krzywéj, a $x=x^0+r\cos\alpha$, $y=y^0+r\sin\alpha$ i $x=x^0+r'\cos\beta$, $y=y^0+r'\sin\beta$ są równaniami dwu siecznych, wyprowadzonych z punktu O (x^0, y^0), to wówczas

$$\frac{\mathrm{OP}_1\,.\,\mathrm{OP}_2\ldots\mathrm{OP}_n}{\mathrm{OQ}_1\,.\,\mathrm{OQ}_2\ldots\mathrm{OQ}_n}=\frac{g\cos^n\beta+g_1\cos^{n-1}\beta\sin\beta+\ldots+g_n\sin^n\beta}{g\cos^n\alpha+g_1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha+\ldots+g_n\sin^n\alpha}.$$

(211). Jeżeli $(x\,,\,y)$ i $(x',\,y')$ są spółrzędnymi punktów O i O′, to

$$\frac{\mathrm{OP}_1\,.\,\mathrm{OP}_2\ldots\mathrm{OP}_n}{\mathrm{O'P'}_1\,.\,\mathrm{O'P'}_2\ldots\mathrm{O'P'}_n}=\frac{f(x\,,\,y)}{f(x',\,y')}.$$

(212). Zastosować do każdego boku twierdzenie (211) i uwzględnić, że $\mathrm{AB}=-\mathrm{BA}$.

(213). Por. (212) w przypadku, gdy $n=1$, $m=3$.

(214). Por. (212) w przypadku, gdy $m=3$, $n=3$, przyczym trzy punkty przegięcia należy przyjąć za wierzchołki trójkąta.

(215). Oznaczmy przez $(x_1x_2x_3)$ i $(\xi_1\xi_2\xi_3)$ spółrzędne jednorodne lub trójkątne punktów P i Π, a przez $(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3)$ spółrzędne któregokolwiek z n punktów R, w których prosta PΠ przecina krzywą rzędu n-go $f(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3)=0$. Wówczas $\mathrm{X}_1=\xi_1+\lambda x_1$, $\mathrm{X}_2=\xi_2+\lambda x_2$, $\mathrm{X}_3=\xi_3+\lambda x_3$, gdzie $\lambda=\mathrm{R}\Pi:\mathrm{PR}$. Wstawiając te wartości w $f=0$, otrzymamy

$$f(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)+\lambda\Delta f(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)+\ldots+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\Delta^{n-1}f(\xi_1\xi_2\xi_3)+\frac{\lambda^n}{n!}\Delta^n f(\xi_1\xi_2\xi_3)=0,$$

gdzie $$\Delta f(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)\equiv x_1\frac{df}{d\xi_1}+x_2\frac{df}{d\xi_2}+x_3\frac{df}{df_3},\ \text{ i t. d.}$$

Jeżeli $\Delta^{n-1}f(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)=0$, to wtedy suma pierwiastków poprzedzającego równania jest równa 0; a zatym $\sum\limits_{i=1}^{i=n}\frac{\mathrm{R}_i\Pi}{\mathrm{PR}_i}\equiv\sum\limits_{i=1}^{i=n}\frac{\mathrm{P}\Pi-\mathrm{PR}_i}{\mathrm{PR}_i}=0$, skąd $\frac{n}{\mathrm{P}\Pi}=\sum\limits_{i=n}^{i=n}\frac{1}{\mathrm{PR}_i}$. Równanie $\Delta^{n-1}f(\xi_1\xi_2\xi_3)=0$ jest względem ξ_1, ξ_2, ξ_3 stopnia 1-go, zatym miejscem punktu Π jest prosta.

(216). Przyjmijmy, że w zagadnieniu poprzedzającym punkt P oddala się do nieskończoności. Wtedy odległości PR_i stają się równymi sobie; zatym $\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathrm{R}_i\Pi=0$, czyli $\sum\limits_{i=1}^{i=n}(\mathrm{Q}\Pi-\mathrm{QR}_i)=0$, skąd $n\mathrm{Q}\Pi=\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathrm{QR}_i$.

(217). Albowiém, jeżeli $a_1x+b_1y+c_1=0,\ldots,a_nx+b_ny+c_n=0$ są równaniami asymptot krzywéj $f=0$, natenczas wyrazy stopnia n-go i $(n-1)$-go w równaniach $f=0$ i $(a_1x+b_1y+c_1)\ldots(a_nx+b_ny+c_n)=0$ będą jednakowe.

(218). Gdyż każda styczna przechodzi przez dwa nieskończenie siebie bliskie punkty krzywéj.

(219). Weźmy np. pod uwagę czworobok, którego boki obracają się około punktów P_1, P_2, P_3 i P_4, a trzy wierzchołki opisują krzywe S_1, S_2 i S_3, odpowiednio rzędu m_1-go, m_2-go i m_3-go. Z jednego z wymienionych punktów, np. z P_4, wyprowadźmy jakąkolwiek prostą P_4D; ona przetnie krzywą S_1 w m_1 punktach α_r, gdzie $r = 1, 2, \ldots, m_1$. Łącząc każdy z tych punktów z punktem P_1, otrzymamy pęk m_1 prostych, z których każda przetnie krzywą S_2 w m_2 punktach $\beta_s^{(i)}$, gdzie $s = 1, 2, \ldots, m_2$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$. Łącząc następnie każdy z tych $m_1 m_2$ punktów z P_2, otrzymamy pęk $m_1 m_2$ prostych, z których każda przetnie krzywą S_3 w m_3 punktach $\gamma_t^{(i,k)}$, gdzie $t = 1, 2, \ldots, m_3$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, $k = 1, 2, \ldots, m_2$. Łącząc nakoniec te punkty z P_3, otrzymamy trzeci pęk $m_1 m_2 m_3$ prostych, który prosta P_4D przecina w tyluż punktach. Zatym Prosta P_4D przecina miejsce gieometryczne wierzchołka czwartego w $m_1 m_2 m_3$ punktach. — Punkt P_4 jest punktem tego miejsca $m_1 m_2 m_3$-krotnym. Jakoż, prosta P_4P_3 przecina S_3 w m_3 punktach; m_3 prostych, łączących te punkty z P_2, przecinają S_2 w $m_2 m_3$ punktach; $m_2 m_3$ prostych, łączących te punkty z P_1, przecinają S_1 w $m_1 m_2 m_3$ punktach; proste nakoniec, łączące te punkty z P_4 utworzą $m_1 m_2 m_3$ czworoboków, czyniących zadość warunkom zadania. Ostatnie boki tego wieloboku schodzą się razem w punkcie P_4 na prostéj P_4D, a więc i punkt P_4 jest punktem żądanego miejsca, punktem $m_1 m_2 m_3$-krotnym. — A zatym prosta P_4D przecina miejsce, utworzone przez wiérzchołek ostatni czworoboku w $2m_1 m_2 m_3$ punktach.

Jeżeli punkty dane leżą na jednéj prostéj, to miejscem ostatniego wiérzchołka jest krzywa rzędu $m_1 m_2 \ldots m_n$-go. Albowiém wtedy punkt P_4 nie będzie punktem tego miejsca.

Z powyższego, według zasady dwoistości, wynika:

»Jeżeli $n+1$ wiérzchołków wieloboku kształtu zmiennego opisuje $n+1$ prostych danych, gdy tymczasem n jego boków jest stycznych do n krzywych danych, odpowiednio klasy m_1-éj, m_2-éj, $\ldots, m_n$-éj, to bok $(n+1)$-y obwodzi krzywą klasy $2m_1 m_2 \ldots m_n$-éj, lub $m_1 m_2 \ldots m_n$-éj, zależnie od tego, czy dane proste nie przechodzą, czytéż przechodzą przez jeden punkt.«

CZĘŚĆ DRUGA.

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI.

ROZDZIAŁ I.

O PUNKCIE.

---

1. Spółrzędne równoległe punktu. Podobnie, jak na płaszczyznie punkt, lub liniją prostą, można wziąć w przestrzeni punkt, lub płaszczyznę, lubtéż liniją prostą za figurę elementarną.

Aby wyznaczyć położenie punktu w przestrzeni zapomocą spółrzędnych, użyjemy układu społrzędnych, t. j. układu trzech płaszczyzn, które po dwie przecinają się według trzech linij prostych X'X, Y'Y, Z'Z (fig. 67). Te trzy płaszczyzny zowią się płaszczyznami spółrzędnych, proste, według których płaszczyzny spółrzędnych po dwie się przecinają, zowią się osiami spółrzędnych, a punkt O przecięcia się trzech osi zowie się początkiem spółrzędnych.

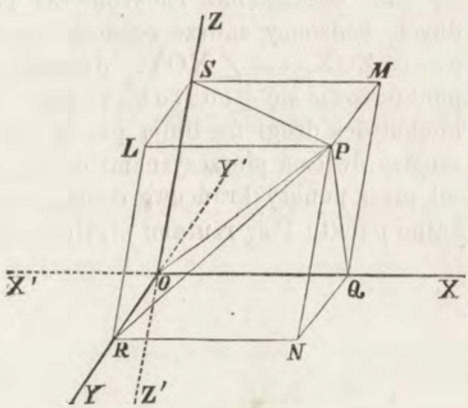


Fig. 67.

Przez punkt P, którego położenie mamy wyznaczyć, poprowadźmy trzy płaszczyzny:

płaszczyznę PMQN, równoległą do płaszczyzny YZ,
„ PNRL, „ „ „ ZX,
„ PLSM, „ „ „ XY; te trzy płaszczyzny odmierzają na osiach trzy odcinki OQ, OR i OS, które się zowią spółrzędnymi punktu P równoległymi. Jeżeli kierunki OX, OY, OZ trzech osi weźmiemy za dodatne, a przeto kierunki wprost przeciwne

tamtym, OX', OY', OZ', za ich kierunki ujemne, to natenczas spółrzędne punktu będziemy uważali za dodatne lub za ujemne, według tego, czy odcinki osi, przedstawiające te spółrzędne i rachowane od spólnego początku, leżą na kierunkach dodatnych, czytéż na kierunkach ujemnych osi. Spółrzędne punktu będziemy oznaczali literami x, y, z; jest więc dla punktu P: $x = OQ$, $y = OR$, $z = OS$, czyli $x = OQ$, $y = QN$, $z = NP$.

Jeżeli dane jest położenie punktu P, wtedy są dane także jego spółrzędne równoległe, tak co do wartości bezwzględnéj, jak i co do znaku. Nawzajem, jeżeli dane są trzy spółrzędne x, y, z (co do wartości bezwzględnéj i co do znaku), to wówczas istnieje jeden tylko punkt w przestrzeni, mający te trzy spółrzędne. A mianowicie, jeżeli a, b, c są wartościami bezwzględnymi trzech spółrzędnych x, y, z, to punkt, dla którego

$x = a$, $y = b$, $z = c$, leży w kącie bryłowym OXYZ,
$x = -a$, $y = b$, $z = c$, „ „ „ „ OX'YZ,
$x = -a$, $y = -b$, $z = c$, „ „ „ „ OX'Y'Z,
$x = a$, $y = -b$, $z = c$, „ „ „ „ OXY'Z,
$x = a$, $y = b$, $z = -c$, „ „ „ „ OXYZ',
$x = -a$, $y = b$, $z = -c$, „ „ „ „ OX'YZ',
$x = -a$, $y = -b$, $z = -c$, „ „ „ „ OX'Y'Z',
$x = a$, $y = -b$, $z = -c$, „ „ „ „ OXY'Z'.

Punkt P wtedy leży na płaszczyznie YZ, ZX, lub XY, kiedy odpowiednio $x = 0$, $y = 0$, lub $z = 0$. Jeżeli zaś $y = z = 0$, $z = x = 0$, lub $x = y = 0$, to punkt P leży odpowiednio na osi x-ów, y-ów, lub z-ów. Jeżeli nakoniec $x = y = z = 0$, to punkt P leży w początku spółrzędnych.

2. Spółrzędne prostokątne punktu. Kąty między osiami spółrzędnych będziemy zawsze oznaczali przez λ, μ, ν, a mianowicie $\lambda = \angle YOZ$, $\mu = \angle ZOX$, $\nu = \angle XOY$. Jeżeli te kąty są proste, to układ spółrzędnych punktu zowie się p r o s t o k ą t n y m. Rozumiejąc przez rzut prostokątny jakiéjkolwiek drogi na liniją prostą (oś rzutu), odcinek téj ostatniéj, zawarty między dwiema płaszczyznami do téj prostéj prostopadłymi, a przechodzącymi przez punkty krańcowe drogi, możemy powiedziéć, że spółrzędne prostokątne punktu P są rzutami prostokątnymi promienia OP na osi spółrzędnych.

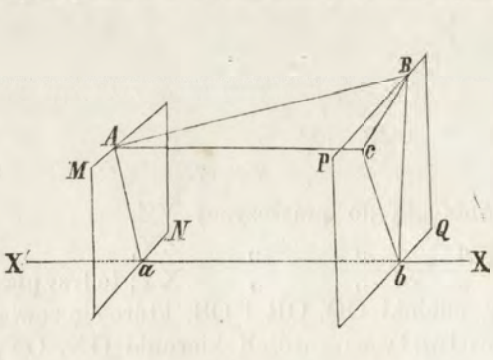


Fig. 68.

Podobnie, jak w art. 10-ym części I-éj, można i tu okazać, że *rzut prostokątny drogi prostolinijowéj na jakąkolwiek oś jest, co do wartości bezwzględnéj i co do znaku, równy długości drogi, pomnożonéj przez dostawę kąta, który kierunek téj drogi czyni z kierunkiem dodatnym osi rzutu*, t. j. z prostą, wyprowadzoną z punktu drogi równolegle do osi rzutu i w stronę kierunku dodatnego téjże osi.

Jakoż, niech (fig. 68) AB będzie daną drogą prostolinijową, a X'X kierunkiem dodatnym osi rzutu. Dajmy, że płaszczyzny MN i PQ przesunięte przez początek A i przez koniec B drogi AB, a do osi X'X prostopadłe, przecinają tę oś odpowiednio w punktach a i b; ab będzie wtedy rzutem drogi AB. Poprowadźmy przez A prostą AC, równoległą do X'X, aż do przecięcia się w C z płaszczyzną PQ, i poprowadźmy proste CB i Cb. Z trójkąta ACB wypada $AC = AB \cos CAB$; a że $AC = ab$, jako równoległe między równoległymi, zatym

$$ab = AB \cos CAB,$$

co było do okazania.

Wiedząc to, oznaczmy przez α, β, γ kąty, które (fig. 67) promień OP czyni z kierunkami dodatnymi osi OX, OY, OZ układu prostokątnego, a przez r długość promienia OP; dla spółrzędnych x, y, z punktu P mieć będziemy wtedy

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \tag{1}$$

Pospolicie będziemy używali układu prostokątnego osi; gdy zaś wypadnie użyć układu nieprostokątnego, to wyraźnie o tym wspomnimy.

3. Długość promienia i związek między jego dostawami kierunkowymi. Aby się oswoić ze sposobem wyznaczenia punktu zapomocą spółrzędnych, rozwiążemy kilka zagadnień, przyczym wyprowadzimy szereg wzorów zasadniczych, ważnego natępnie znaczenia. Wynajdziemy naprzód odległość punktu P, danego przez spółrzędne, od początku O, czyli długość promienia OP (fig. 67).

W tym celu rzućmy czworobok skośny OQNP pokolei na kierunki OX, OY, OZ i OP. Stosując znane twierdzenie o rzucie wieloboku (I, art. 10), które ma miejsce niezależnie od tego, czy wielobok jest płaski, czy, jak tu, skośny, otrzymamy równości

$$\left\{\begin{array}{l} x + y\cos\nu + z\cos\mu = r\cos\alpha, \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = r\cos\beta, \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = r\cos\gamma, \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = r, \end{array}\right. \tag{2}$$

gdzie λ, μ, ν, α, β, γ i r mają znaczenie określone w artykule poprzedzającym. Pomnóżmy ostatnią z tych równości przez r i podstawmy w nią wyrażenia na $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$ dane przez trzy piérwsze równości; będziemy mieli wogóle

$$r^2 = x(x + y\cos\nu + z\cos\mu) + y(x\cos\nu + y + z\cos\lambda) + z(x\cos\mu + y\cos\lambda + z),$$

czyli

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu, \tag{3}$$

wrazie zaś, gdy spółrzędne są prostokątne $\left(\lambda = \mu = \nu = \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(4) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Rugowanie liczb x, y, z, r z równań (2) daje nadto

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & \cos\alpha \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & \cos\beta \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli, po rozwinięciu wyznacznika,

$$(5') \qquad \sin^2\lambda\cos^2\alpha + \sin^2\mu\cos\beta + \sin^2\nu\cos^2\gamma - 2(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu)\cos\beta\cos\gamma -$$
$$- 2(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda)\cos\gamma\cos\alpha - 2(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu)\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Jest to związek, który zachodzi między dostawami kątów α, β, γ, utworzonych przez kierunek promienia OP z kierunkami osi OX, OY, OZ, czyli związek między *dostawami kierunkowymi* promienia OP. W przypadku, kiedy spółrzędne są prostokątne, związek (5) sprowadza się do

$$(6) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Związek (6) otrzymać możemy bespośrednio, dodając do siebie kwadraty równań (1) i uwzględniając związek (4).

4. Odległość między dwoma punktami. Niech x, y, z i x', y' z' będą spółrzędnymi dwu punktów P i P'. Z punktu P wyprowadźmy trzy osi PX', PY', PZ', odpowiednio równoległe do osi OX, OY, OZ, i oznaczmy $\pm(x-x') = \xi$, $\pm(y-y') = \eta$, $\pm(z-z') = \zeta$; ξ, η, ζ są widocznie spółrzędnymi punktu P' względem osi PX', PY', PZ'; przeto, gdy oznaczymy PP'$=r$, mieć będziemy, według (3),

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\eta\zeta\cos\lambda + 2\zeta\xi\cos\mu + 2\xi\eta\cos\nu.$$

Wstawiwszy za ξ, η, ζ powyższe wartości, otrzymamy wogóle

$$(7) \qquad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(y-y')(z-z')\cos\lambda +$$
$$+ 2(z-z')(x-x')\cos\mu + 2(x-x')(y-y')\cos\nu,$$

wrazie zaś, gdy spółrzędne są prostokątne,

$$(8) \qquad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

5. Kąt między dwoma promieniami. Oznaczmy przez α, β, γ i α', β', γ' kąty, które z kierunkami osi OX, OY, OZ czynią promienie OP i OP', a przez x, y, z spółrzędne OQ, QN, NP punktu P na promieniu OP i oznaczmy OP$=r$, $\angle$POP'$=\theta$. Rzucając czworobok skośny OQNP na kierunki OX, OY, OZ i OP', mamy

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x \qquad + y\cos\nu + z\cos\mu &= r\cos\alpha, \\ x\cos\nu + y \qquad + z\cos\lambda &= r\cos\beta, \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z \qquad &= r\cos\gamma, \\ x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' &= r\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Rugowanie liczb x, y, z, r z tych równań daje:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} 1 & , \cos\nu & , \cos\mu & , \cos\alpha \\ \cos\nu & , \ 1 & , \cos\lambda & , \cos\beta \\ \cos\mu & , \cos\lambda & , \ 1 & , \cos\gamma \\ \cos\alpha' & , \cos\beta' & , \cos\gamma' & , \cos\theta \end{vmatrix} = 0,$$

skąd wypada następująca wartość na $\cos\theta$:

$$(11)\quad (1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu)\cos\theta =$$
$$=\sin^2\lambda\cos\alpha\cos\alpha'+\sin^2\mu\cos\beta\cos\beta'+\sin^2\nu\cos\gamma\cos\gamma' -$$
$$-(\cos\lambda-\cos\mu\cos\nu)(\cos\beta\cos\gamma'+\cos\beta'\cos\gamma)-$$
$$-(\cos\mu-\cos\nu\cos\lambda)(\cos\gamma\cos\alpha'+\cos\gamma'\cos\alpha)-$$
$$-(\cos\nu-\cos\lambda\cos\mu)(\cos\alpha\cos\beta'+\cos\alpha'\cos\beta),$$

wrazie zaś, gdy spółrzędne są prostokątne,

$$(12)\qquad \cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

a stąd

$$\sin^2\theta = 1-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')^2 =$$
$$=(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')-$$
$$-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')^2,$$

czyli

$$(13)\quad \sin^2\theta=(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)^2+$$
$$+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)^2.$$

6. Stosunki kierunkowe promienia. Wyrażenie na dostawę kąta między dwoma promieniami uprości się, gdy zamiast dostaw kierunkowych promieni OP i OP′ wprowadzimy do tego wyrażenia t. z. stosunki kierunkowe tychże promieni.

Wiadomo, że stosunki między spółrzędnymi x, y, z punktu P na promieniu OP, a długością r tego promienia, nie zależą od położenia punktu P. Te stosunki

$$(14)\qquad \frac{x}{r}=l,\quad \frac{y}{r}=m,\quad \frac{z}{r}=n$$

nazywają się *stosunkami kierunkowymi* promienia OP. Jeżeli spółrzędne są prostokątne, wówczas stosunki kierunkowe przechodzą na dostawy kierunkowe, $l=\cos\alpha$, $m=\cos\beta$, $n=\cos\gamma$. Stosunki kierunkowe (l, m, n) promienia OP można uważać także za spółrzędne tego punktu na owym promieniu, którego odległość od początku $r=1$.

Wskutek tego, mamy, według trzech piérwszych równań (2),

$$(15)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = l + m\cos\nu + n\cos\mu, \\ \cos\beta = l\cos\nu + m + n\cos\lambda, \\ \cos\gamma = l\cos\mu + m\cos\lambda + n. \end{cases}$$

Oznaczmy przez l', m', n' stosunki kierunkowe drugiego promienia OP'; wówczas taksamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha' &= l' + m'\cos\nu + n'\cos\mu\\ \cos\beta' &= l'\cos\nu + m' + n'\cos\lambda\\ \cos\gamma' &= l'\cos\mu + m'\cos\lambda + n'.\end{aligned}$$

Podstawmy te wartości na $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$,... w wyrażenie (10); otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu, & l+m\cos\nu+n\cos\mu\\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda, & l\cos\nu+m+n\cos\lambda\\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1, & l\cos\mu+m\cos\lambda+n\\ l'+m'\cos\nu+n'\cos\mu, & l'\cos\nu+m'+n'\cos\lambda, & l'\cos\mu+m'\cos\lambda+n', & \cos\theta \end{vmatrix}=0.$$

W tym wyznaczniku do elementów ostatniéj kolumny dodajmy elementy trzech piérwszych, pomnożone odpowiednio przez $-l$, $-m$, $-n$; natenczas trzy pierwsze elementy ostatniéj kolumny staną się równe 0, wskutek czego równanie ostatnie sprowadzi się do

$$\cos\theta = l(l'+m'\cos\nu+n'\cos\mu)+m(l'\cos\nu+m'+n'\cos\lambda)+n(l'\cos\mu+m'\cos\lambda+n'),$$

czyli

$$(16)\quad \cos\theta = ll'+mm'+nn'+(mn'+m'n)\cos\lambda+(nl'+n'l)\cos\mu+(lm'+l'm)\cos\nu.$$

Podstawmy jeszcze we wzorze (3) za x, y, z wartości (14); wówczas, po podzieleniu przez r^2, będzie

$$(17)\qquad 1 = l^2+m^2+n^2+2mn\cos\lambda+2nl\cos\mu+2lm\cos\nu.$$

Wzór (17) wyraża związek między stosunkami kierunkowymi promienia, a wzór (16) daje wartość na dostawę kąta między dwoma promieniami, wyrażoną przez stosunki kierunkowe tychże promieni. Dwa promienie o stosunkach kierunkowych (l, m, n) i (l', m', n') są do siebie prostopadłe, gdy

$$(18)\quad 0 = ll'+mm'+nn'+(mn'+m'n)\cos\lambda+(nl'+n'l)\cos\mu+(lm'+l'm)\cos\nu.$$

7. Objętość równoległościanu wyrażona przez długość trzech krawędzi. Oznaczmy przez θ kąt, który oś OZ czyni z prostopadłą do płaszczyzny XY, a przez V objętość równoległościanu, mającego jako jedną z przekątnych promień OP (fig 67); wówczas będzie

$$V = xy\sin\nu \times z\cos\theta = xyz\sin\nu\cos\theta.$$

Aby wyznaczyć $\cos\theta$, oznaczmy przez (l, m, n) stosunki kierunkowe prostopadłéj do płaszczyzny XY i uważmy, że stosunki kierunkowe osi X, Y, Z są odpowiednio (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Ponieważ ta prostopadła czyni z osiami X i Y kąty proste, a z osią Z kąt θ, zatym mamy, według wzorów (18) i (16),

$$\begin{aligned} l+m\cos\nu+n\cos\mu &= 0\quad,\\ l\cos\nu+m+n\cos\lambda &= 0\quad,\\ l\cos\mu+m\cos\lambda+n &= \cos\theta.\end{aligned}$$

Z dwu piérwszych równań wypada

$$\frac{l}{\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu}=\frac{m}{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}=\frac{n}{\sin^2\nu},$$

a wskutek trzeciego równania każdy z tych stosunków jest równy stosunkowi

$$\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}.$$

A że nadto, wskutek tych trzech równań, wzór (17), który także tak pisać można

$$1=l(l+m\cos\nu+n\cos\mu)+m(l\cos\nu+m+n\cos\lambda)+n(l\cos\mu+m\cos\lambda+n),$$

przywodzi się do

$$1=n\cos\theta,$$

zatym mamy

$$\frac{n}{\sin^2\nu}=\frac{1}{\sin^2\nu\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

skąd

$$\cos\theta=\frac{1}{\sin\nu}\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}.$$

Jest więc

$$\text{(19)}\qquad V=xyz\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}.$$

Wziąwszy szóstą część tego wyrażenia, miéć będziemy objętość czworościanu (tetraedru), którego trzy krawędzi w kierunku osi X, Y, Z są równe x, y, z. Jeżeli tę objętość oznaczymy przez Π, to

$$\text{(22)}\qquad \Pi=\frac{1}{6}xyz\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}.$$

Należy zauważyć, że objętość czworościanu, którego trzy krawędzi, z jednego wiérzchołka wychodzące, są x, y, z, nie zmieni się ze zmianą długości tych krawędzi, jeżeli ich iloczyn pozostanie niezmienionym. Ta uwaga będzie nam potrzebną w następującym artykule.

8. Objętość czworościanu wyrażona przez spółrzędne wiérzchołków. Oznaczmy przez (x, y, z) (x', y', z') (x'', y'', z'') i (x''', y''', z''') spółrzędne prostokątne wiérzchołków P, P', P'' i P''' czworościanu PP'P''P''' i oznaczmy $PP'=r'$, $PP''=r''$, $PP'''=r'''$. Przetnijmy trzy krawędzi PP', PP'', PP''' płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny XY, w punktach Q', Q'', Q''' i oznaczmy $PQ'=\rho'$, $PQ''=\rho''$, $PQ'''=\rho'''$. Jeżeli przyjmiemy, że $r'r''r'''=\rho'\rho''\rho'''$, to czworościan PP'P''P''' będzie równoważny z czworościanem PQ'Q''Q'''. Aby wyznaczyć objętość tego ostatniego czworościanu, oznaczmy przez (ξ', η'), (ξ'', η''), (ξ''', η''') spółrzędne x i y punktów Q', Q'', Q''' względem osi równoległych do OX, OY, OZ, a przez punkt P przechodzących, przez ζ zaś odległość prostopadłą punktu P od płaszczyzny trójkąta

Q'Q''Q'''. Ponieważ pole trójkąta Q'Q''Q''' jest co do wielkości i co do znaku równe

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi' , & \eta' , & 1 \\ \xi'' , & \eta'' , & 1 \\ \xi''' , & \eta''' , & 1 \end{vmatrix},$$

przeto objętość czworościanu PQ'Q''Q''', a więc i czworościanu PP'P''P''', jest równa

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi' , & \eta' , & 1 \\ \xi'' , & \eta'' , & 1 \\ \xi''' , & \eta''' , & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3}\zeta = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \xi' , & \eta' , & \zeta \\ \xi'' , & \eta'' , & \zeta \\ \xi''' , & \eta''' , & \zeta \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), (ξ_3, η_3, ζ_3) spółrzędne punktów P', P'', P''' względem tychże samych osi; wtedy

$$\xi' = \frac{\rho'}{r'}\xi_1, \quad \eta' = \frac{\rho'}{r'}\eta_1, \quad \zeta = \frac{\rho'}{r'}\zeta_1,$$

$$\xi'' = \frac{\rho''}{r''}\xi_2, \quad \eta'' = \frac{\rho''}{r''}\eta_2, \quad \zeta = \frac{\rho''}{r''}\zeta_2,$$

$$\xi''' = \frac{\rho'''}{r'''}\xi_3, \quad \eta''' = \frac{\rho'''}{r'''}\eta_3, \quad \zeta = \frac{\rho'''}{r'''}\zeta_3,$$

wskutek czego wyrażenie poprzedzające przechodzi na

$$\Pi = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \xi_1 , & \eta_1 , & \zeta_1 \\ \xi_2 , & \eta_2 , & \zeta_2 \\ \xi_3 , & \eta_3 , & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

gdyż $\frac{\rho'\rho''\rho'''}{r'r''r'''} = 1$. A że jeszcze

$$\xi_1 = x' - x, \quad \eta_1 = y' - y, \quad \zeta_1 = z' - z,$$
$$\xi_2 = x'' - x, \quad \eta_2 = y'' - y, \quad \zeta_2 = z'' - z,$$
$$\xi_3 = x''' - x, \quad \eta_3 = y''' - y, \quad \zeta_3 = z''' - z,$$

przeto ostatecznie

$$\Pi = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x' - x , & y' - y , & z' - z \\ x'' - x , & y'' - y , & z'' - z \\ x''' - x , & y''' - y , & z''' - z \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 , & x , & y , & z \\ 0 , & x' - x , & y' - y , & z' - z \\ 0 , & x'' - x , & y'' - y , & z'' - z \\ 0 , & x''' - x , & y''' - y , & z''' - z \end{vmatrix},$$

czyli

$$(21)\qquad \Pi = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1, x, y, z \\ 1, x', y', z' \\ 1, x'', y'', z'' \\ 1, x''', y''', z''' \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie niniejsze jest dodatne lub ujemne, według tego, czy obieg trójkąta P'P''P''', widziany z wierzchołka P, jest dodatny, czytéż ujemny.

9. Równanie płaszczyzny. Jeżeli punkt P jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny, przechodzącéj przez trzy punkty P', P'', P''', to wówczas objętość czworościanu PP'P''P''' jest równa 0. Według artykułu poprzedzającego, mamy w tym przypadku

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} x, y, z, 1 \\ x', y', z', 1 \\ x'', y'', z'', 1 \\ x''', y''', z''', 1 \end{vmatrix} = 0,$$

lub, kładąc

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} y', z', 1 \\ y'', z'', 1 \\ y''', z''', 1 \end{vmatrix} = \mathrm{A}, \; -\begin{vmatrix} x', z', 1 \\ x'', z'', 1 \\ x''', z''', 1 \end{vmatrix} = \mathrm{B}, \; \begin{vmatrix} x', y', 1 \\ x'', y'', 1 \\ x''', y''', 1 \end{vmatrix} = \mathrm{C}, \; -\begin{vmatrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \\ x''', y''', z''' \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

$$(24)\qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0.$$

Równanie to wyraża warunek, któremu czynią zadość spółrzędne jakiegokolwiek punktu (punktu bieżącego) na płaszczyźnie, przechodzącéj przez trzy punkty dane; z tego powodu nazywamy je **równaniem płaszczyzny**. A zatym, *w układzie spółrzędnych równoległych punktu płaszczyznę przedstawia równanie stopnia 1-go między tymi spółrzędnymi.* Nawzajem każde równanie kształtu (24) przedstawia płaszczyznę. Jakoż, dając na x i y dowolne wartości x' i y', otrzymamy, przez rozwiązanie równania (24), wartość z' na z, i będzie

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' + \mathrm{D} = 0.$$

Podobnym sposobem dla $x = x''$, $y = y''$ otrzymamy $z = z''$, a dla $x = x'''$, $y = y'''$ otrzymamy $z = z'''$; będzie więc również

$$\mathrm{A}x'' + \mathrm{B}y'' + \mathrm{C}z'' + \mathrm{D} = 0,$$
$$\mathrm{A}x''' + \mathrm{B}y''' + \mathrm{C}z''' + \mathrm{D} = 0.$$

Trzy ostatnie równania dają

$$\frac{\mathrm{A}}{\begin{vmatrix} y', z', 1 \\ y'', z'', 1 \\ y''', z''', 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{B}}{-\begin{vmatrix} x', z', 1 \\ x'', z'', 1 \\ x''', z'', 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{C}}{\begin{vmatrix} x', y', 1 \\ x'', y'', 1 \\ x''', y''', 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{D}}{-\begin{vmatrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \\ x''', y''', z''' \end{vmatrix}},$$

wskutek czego równanie (24) przechodzi na

$$x\begin{vmatrix} y' , z' , 1 \\ y'' , z'' , 1 \\ y''' , z''' , 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' , z' , 1 \\ x'' , z'' , 1 \\ x''' , z''' , 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' , y' , 1 \\ x'' , y'' , 1 \\ x''' , y''' , 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' , y' , z' \\ x'' , y'' , z'' \\ x''' , y''' , z''' \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$\begin{vmatrix} x , y , z , 1 \\ x' , y' , z' , 1 \\ x'' , y'' , z'' , 1 \\ x''' , y''' , z''' , 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ostatnie równanie przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez trzy punkty (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''); a zatym wszystkie punkty, których spółrzędne czynią zadość równaniu stopnia 1-go (24), leżą na jednéj płaszczyźnie; to równanie przestawia zatym płaszczyznę.

10. Równanie powierzchni krzywéj. Można wogóle okazać, że miejscem punktów, których spółrzędne czynią zadość jednemu równaniu

$$F(x , y , z) = 0$$

jest pewna powierzchnia, wogólności krzywa.

Weźmy naprzód pod uwagę przypadek szczególny, kiedy w równanie wchodzi tylko jedna spółrzędna, np. x,

$$F(x) = 0.$$

Wiadomo, że takie równanie posiada skończoną, albotéż nieskończenie wielką liczbę pierwiastków $a, b, c, \ldots$, oddzielonych od siebie przedziałami skończonymi; jest zatym ono równoważne równaniom $x = a$, $x = b$, $x = c, \ldots$, z których każdemu, jak np. równaniu $x = a$, czyni zadość każdy punkt na płaszczyźnie równoległéj do płaszczyzny YOZ w odległości a od téj płaszczyzny. A zatym, miejscem punktów, których spółrzędne czynią zadość równaniu $F(x) = 0$, jest szereg płaszczyzn równoległych do YOZ w odległościach $= a, b, c, \ldots$ od YOZ.

Jeżeli powtóre, w dane równanie wchodzą tylko dwie spółrzędne, jak np. w równanie

$$F(x , y) = 0,$$

to natenczas, nakréśliwszy na płaszczyźnie XY krzywą, przedstawioną przez równanie $F(x , y) = 0$, i poprowadziwszy przez jakikolwiek punkt téj krzywéj prostą równoległą do OZ, łatwo spostrzeżemy, że nietylko spodek, ale i każdy punkt téj prostéj uczyni zadość równaniu $F(x , y) = 0$. A zatym, miejscem punktów, których spółrzędne czynią zadość równaniu danemu, jest powierzchnia, utworzona przez prostą równoległą do osi OZ, przechodzącą kolejno przez każdy punkt pewnéj krzywéj, nakréślonéj na płaszczyźnie XY. Taka powierzchnia zowie się powierzchnią walcową; ta zaś krzywa, czyli ślad powierzchni walcowéj na płaszczyźnie XY, jest jedną z nieskończenie wielu krzywych, które nazywamy kierownicami powierzchni walcowéj.

W przypadku nakoniec, kiedy w dane równanie $F(x, y, z)=0$ wchodzą wszystkie trzy spółrzędne, znajdziemy naprzód położenie tych punktów miejsca gieometrycznego, przedstawionego przez to równanie, które znajdują się w odległości c od płaszczyzny XY. Te punkty leżą widocznie na przecięciu się powierzchni walca $F(x, y, c)=0$ z płaszczyzną $z=c$, a więc wogóle na pewnéj linii krzywéj. Zmieniając c w sposób ciągły od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymamy szereg nieprzerwany linij krzywych płaskich, które, nieprzerwanie po sobie następując, utworzą pewną powierzchnią krzywą. A zatym miejscem punktów, których spółrzędne czynią zadość równaniu $F(x, y, z)=0$, jest pewna powierzchnia, wogólności krzywa.

Jeżeli równanie $F(x, y, z)=0$ jest algiebraiczne stopnia n-go, to powierzchnia, przez to równanie przedstawiona, zowie się též **powierzchnią algiebraiczną rzędu n-go**. Płaszczyzna jest więc powierzchnią algiebraiczną rzędu 1-go.

11. Punkt na linii prostéj, łączącéj dwa punkty dane. Niech (x', y', z) i (x'', y'', z'') będą spółrzędnymi dwu punktów danych P′ i P″, a (x, y, z) spółrzędnymi punktu P na prostéj, która łączy tamte dwa punkty, dzielącego odległość między nimi w stosunku danym: $P'P : PP'' = m'' : m'$. Aby wyznaczyć spółrzędne (x, y, z), przyjmijmy naprzód, że prosta P′P″ przechodzi przez początek spółrzędnych O, oznaczmy przez l, m, n stosunki kierunkowe téj prostéj, a nadto $OP=r$, $OP'=r'$, $OP''=r''$. Ponieważ $P'P=OP-OP'=r-r'$, $PP''=OP''-OP=r''-r$, zatym, według założenia,

$$r-r' : r''-r = m'' : m',$$

a więc także

$$\begin{aligned} lr-lr' &: lr''-lr = m'' : m',\\ mr-mr' &: mr''-mr = m'' : m',\\ nr-nr' &: nr''-nr = m'' : m'. \end{aligned}$$

Atoli

$$\begin{aligned} lr &= x\ , & mr &= y\ , & nr &= z,\\ lr' &= x'\ , & mr' &= y'\ , & nr' &= z',\\ lr'' &= x''\ , & mr'' &= y''\ , & nr'' &= z''. \end{aligned}$$

Wstawiwszy te wartości w poprzedzające proporcyje, mieć będziemy

$$(\alpha)\qquad (x'-x):(x''-x)=(y'-y):(y''-y')=(z'-z):(z''-z)=m'':m',$$

skąd wypada

$$(25)\qquad x=\frac{m'x'+m''x''}{m'+m''},\quad y=\frac{m'y'+m''y''}{m'+m''},\quad z=\frac{m'z'+m''z''}{m'+m''}.$$

Jeżeli prosta P′P″ nie przechodzi przez początek spółrzędnych O, to natenczas dość jakikolwiek punkt P_0 na prostéj P′P″ obrać za początek nowych osi, równoległych do pierwotnych, i, jeżeli (x_0, y_0, z_0) są spółrzędnymi puntku P_0 względem dawnych osi, podstawić w (α) odpowiednio $x-x_0$,

$y-y_0$, $z-z_0$, $x'-x_0$, $y'-y_0$, $z'-z_0$, $x''-x_0$, $y''-y_0$, $z''-z_0$ zamiast $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, wskutek czego związek (α) zmianie nie ulegnie. I do tego więc przypadku odnoszą się wzory (25).

Łatwo zauważyć możemy, że punkt P leży albo między punktami P' i P'', albo na przedłużeniu odcinka P'P'', według tego, czy $m'm''>0$, czyteż $m'm''<0$. W przypadku drugim, punkt P leży na przedłużeniu odcinka P'P'' bliżéj punktu P', lub bliżéj punktu P'', według tego, czy $-\frac{m''}{m'}<1$, czyteż $-\frac{m''}{m'}>1$. Kładąc $\frac{m''}{m'}=\lambda$, przywodzimy wzory (25) do postaci

$$x=\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda},\quad y=\frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda},\quad z=\frac{z'+\lambda z''}{1+\lambda}. \tag{26}$$

12. Równania linii prostéj i linii podwójnie krzywéj. Jeżeli liczbę stosunkową λ będziemy zmieniali w sposób ciągły, to punkt, którego spółrzędne są określone wzorami (26), będzie zmieniał swe położenie na prostéj P'P'' w sposób ciągły, czyli opisze prostą nieograniczoną, przechodzącą przez punkty P' i P''. Rugując zatym liczbę λ z trzech równań (26), otrzymamy dwa równania między spółrzędnymi punktu bieżącego na linii prostéj, czyli równania linii prostéj, przechodzącéj przez dwa dane punkty (x', y', z') i (x'', y'', z''). Aby uskutecznić to rugowanie, napiszmy równania (26) w postaci

$$x-x'+\lambda(x-x'')=0,\quad y-y'+\lambda(y-y'')=0,\quad z-z'+\lambda(z-z'')=0.$$

Z nich wypada

$$\begin{vmatrix} y-y', & y-y'' \\ x-x', & x-x'' \end{vmatrix}=0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} z-z', & z-z'' \\ x-x', & x-x'' \end{vmatrix}=0,$$

czyli, po odjęciu elementów kolumny piérwszéj od elementów kolumny drugiéj,

$$\begin{vmatrix} y-y', & y'-y'' \\ x-x', & x'-x'' \end{vmatrix}=0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} z-z', & z'-z'' \\ x-x', & x'-x'' \end{vmatrix}=0,$$

albo

$$\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{x-x'}{x'-x''},\qquad \frac{z-z'}{z'-z''}=\frac{x-x'}{x'-x''}. \tag{27}$$

Te równania są stopnia 1-go względem spółrzędnych punktu bieżącego; a zatym, *liniją prostą przedstawiają dwa jednoczesne równania stopnia 1-go względem spółrzędnych punktu bieżącego.*

Nawzajem, *jakiekolwiek dwa równania stopnia 1-go między trzema spółrzędnymi punktu bieżącego przedstawiają liniją prostą.* Jakoż, każde z dwu równań

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, \end{cases}$$

wzięte oddzielnie, przedstawia płaszczyznę, a zatym punkt, którego spółrzędne czynią zadość obu równaniom jednocześnie, leży i na jednéj i na drugiéj z tych płaszczyzn, a więc na linii prostéj, według któréj te dwie płaszczyzny się przecinają.

Ogólnie, jakiekolwiek dwa równania między trzema spółrzędnymi punktu bieżącego,

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

uważane pospołu, przedstawiają liniją krzywą. Albowiém każde z tych równań, wzięte oddzielnie, przedstawia powierzchnią. Punkt więc, którego spółrzędne czynią zadość obu równaniom jednocześnie, leży i na jednéj i na drugiéj powierzchni, czyli na linii, według któréj te dwie powierzchnie się przecinają. Ta linija — wogóle mówiąc — zowie się liniją podwójnie krzywą.

13. Spółrzędne biegunowe punktu. Położenie punktu w przestrzeni wyznacza się niekiedy zapomocą *układu spółrzędnych biegunowych*. Jeżeli OX, OY, OZ (fig. 69) są trzema osiami do siebie prostopadłymi, a P pewnym punktem w przestrzeni, to położenie punktu P będzie wyznaczone, gdy wyznaczone zostaną: długość r promienia OP, wielkość θ kąta POZ, który promień OP tworzy z osią OZ, i wielkość φ kąta, który płaszczyzna, przechodząca przez OP i OZ, czyni z pewną płaszczyzną stałą, przechodzącą przez OZ, np. z płaszczyzną ZX. Trzy ilości r, θ, φ zowiemy *spółrzędnymi biegunowymi* punktu. Gdy punkt jest dany, natenczas są dane także jego spółrzędne biegunowe i nawzajem, gdy są dane trzy liczby a, b, c, takie, iż $0 \leq a < \infty$, $0 \leq b \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, natenczas istnieje jeden punkt, którego spółrzędnymi biegunowymi są

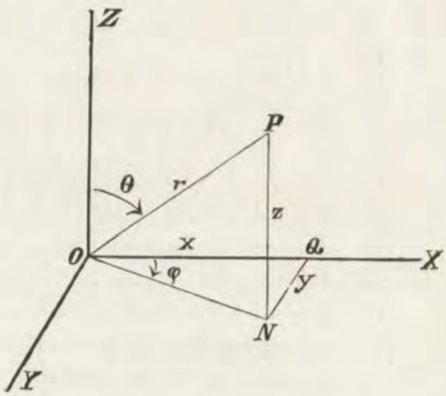


Fig. 69.

$$r = a, \quad \theta = b, \quad \varphi = c.$$

Ten punkt jest jednym z cztérech punktów, w których przecinają się: powierzchnia kuli o promieniu a, mająca środek w początku O, powierzchnia stożka, którego wiérzchołek leży w O, oś schodzi się z osią OZ, a tworząca czyni z osią kąt b, i płaszczyzna, która przechodzi przez oś OZ i czyni z płaszczyzną ZX kąt c.

Między tak określonymi spółrzędnymi biegunowymi punktu P a spółrzędnymi prostokątnymi tego punktu w układzie osi OX, OY, OZ, zachodzą bardzo proste związki. Jakoż, poprowadźmy prostą PN, prostopadłą do XY, aż do przecięcia się w N z tą płaszczyzną, i NQ, prostopadłą do OX, aż do przecięcia się z nią w punkcie Q. Wtedy.

$$(28) \quad \begin{cases} x = OQ = ON\cos\varphi = OP\sin\theta\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = QN = ON\sin\varphi = OP\sin\theta\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = NP = OP\cos\theta = r\cos\theta. \end{cases}$$

Stąd zaś wypada nawzajem

$$(29) \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{a zatym} \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

ĆWICZENIA.

(1). Znaléść położenie punktów, przedstawionych przez równania

$$x^2 + y^2 = 2z^2, \quad x + y = 2z, \quad xy = a^2.$$

(2). Okazać, że trójkąt, utworzony przez trzy punkty, których spółrzędne prostokątne są (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), jest równobocznym.

(3). Dostawy kierunkowe prostéj są proporcyjonalne do liczb (1, 2, 3); znaléść ich wartości.

(4). Znaléść kąt między dwiema prostymi, których dostawy kierunkowe są proporcyjonalne odpowiednio do liczb (1, 2, 3) i (5, —4, 1).

(5). A, B, C są trzema punktami, leżącymi odpowiednio na osiach x-ów, y-ów i z-ów, i $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; znaléść: *a)* spółrzędne środków prostych BC, CA, AB; *b)* spółrzędne środka ciężkości trójkąta ABC i *c)* odległości tego punktu od A, B i C.

(6). Dostawy kierunkowe dwu prostych są odpowiednio (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2); znaléść dostawy kierunkowe (l, m, n) prostéj prostopadłéj do obu prostych danych, i okazać, że jeżeli jedna z tych prostych leży na XY i czyni z osią OX kąt α, a druga leży na YZ i czyni z osią OZ kąt γ, to natenczas $\dfrac{l}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{m}{-1} = \dfrac{n}{\operatorname{tg}\gamma}$.

(7). Jeżeli promień OP ze swymi rzutami na płaszczyzny spółrzędnych prostokątnych czyni kąty, tworzące postęp różnicowy, którego różnicą jest 45^0, to ten promień leży na jednéj z płaszczyzn spółrzędnych. Podobnie rzecz się ma, jeżeli ten promień czyni z osiami spółrzędnych kąty wogóle α, 2α i 3α.

(8). Suma trzech kątów ostrych, które promień OP czyni z osiami układu prostokątnego, jest mniejsza od 120^0.

(9). Znaléść kąt między dwoma promieniami, których dostawy kierunkowe są określone przez dwa równania jednorodne odpowiednio stopnia 2-go i 1-go,

$$al^2 + bm^2 + cn^2 + 2a'mn + 2b'nl + 2c'lm = 0 \quad \text{i} \quad \alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

(10). Promienie, których dostawy kierunkowe są dane przez równania $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ i $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, są do siebie prostopadłe, jeżeli $\alpha^2(b + c) + \beta^2(c + a) + \gamma^2(a + b) = 0$, a równoległe, jeżeli

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = 0.$$

(11). Dostawy kierunkowe prostéj, tworzącéj kąty równe z trzema prostymi, których dostawy kierunkowe są (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n''), są proporcyjonalne do $m(n' - n'') + m'(n'' - n) + m''(n - n')$, $n(l' - l'') + n'(l'' - l) + n''(l - l')$, $l(m' - m'') + l'(m'' - m) + l''(m - m')$. Jeżeli dane proste są do siebie prostopadłe, to dostawy kierunkowe żądanéj prostéj będą $\frac{l + l' + l''}{\sqrt{3}}$, $\frac{m + m' + m''}{\sqrt{3}}$, $\frac{n + n' + n''}{\sqrt{3}}$.

(12). Znaléść dostawy kierunkowe (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2) dwu prostych, które leżą na płaszczyźnie dwu danych promieni i dzielą kąty między nimi na równe części.

(13). Wyrazić odległość między dwoma punktami danymi przez spółrzędne biegnnowe tychże punktów.

(14). Spółrzędne biegunowe punktu są $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$; znaléść jego spółrzędne prostokątne.

ROZDZIAŁ II.

O PŁASZCZYŹNIE.

14. Równanie płaszczyzny. Okazaliśmy w rozdziale poprzedzającym, że równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu przedstawia płaszczyznę. Do tegoż dojść możemy bespośrednio.

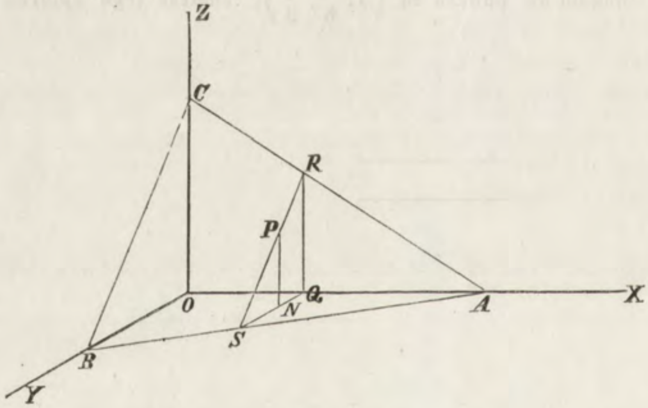


Fig. 70.

Niech P (fig. 70) będzie jakimkolwiek punktem (bieżącym) na płaszczyźnie, która przecina osi x-ów, y-ów i z-ów odpowiednio w punktach A, B, C. Przez ten punkt P poprowadźmy płaszczyznę równoległą do YZ i przecinającą płaszczyzny ZX i XY według prostych RQ i QS, a daną płaszczyznę według prostéj RS, poprowadźmy prostą PN, równoległą do RQ, aż do przecięcia się w N z QS, i oznaczmy $\mathrm{OQ}=x$, $\mathrm{QN}=y$, $\mathrm{NP}=z$, $\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$. Z podobieństwa trójkątów QRS i NPS wypada

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{QR}}=\frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{QS}}=1-\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QS}}.$$

Atoli, ponieważ prosta QR jest równoległą do OC, a QS do OB, mamy także

$$\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{OC}}=\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{OB}}.$$

Stąd zaś wypada

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{QR}}\cdot\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{OC}}=\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{OA}}-\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QS}}\cdot\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{OB}},$$

czyli

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{OC}}+\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{OA}}=1-\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}},$$

lub

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}}+\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{OB}}+\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{OC}}=1,$$

t. j.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1}$$

A zatym, płaszczyznę przedstawia równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu bieżącego. W równaniu (1) a, b, c są wartościami odcinków, które ta płaszczyzna odmierza na osiach. To równanie (1) zowie się równaniem symetrycznym płaszczyzny. Od wielkości i od znaków liczb a, b, c zależy położenie płaszczyzny, przedstawionéj przez równanie (1). Nawzajem, równanie ogólne stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu bieżącego

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \tag{2}$$

przedstawia płaszczyznę. Jakoż, równanie (2) nie przestanie przedstawiać téj saméj figury gieometrycznéj, gdy lewą jego stronę, t. j. spółczynniki A, B, C, D pomnożymy przez tę samę liczbę. Podzielmy zatym to równanie przez $-\mathrm{D}$ i oznaczmy

$$-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}=\frac{1}{a},\quad -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}=\frac{1}{b},\quad -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\frac{1}{c}; \tag{3}$$

otrzymamy wówczas równanie

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

przedstawiające płaszczyznę, która odmierza na osiach x, y, z odcinki a, b, c.

15. Związki (3) między spółczynnikami A, B, C, D w równaniu ogólnym płaszczyzny, t. j. w równaniu (2), a odcinkami a, b, c, posłużą do wyznaczenia płaszczyzny, w któréj równaniu brak pewnych wyrazów.

a. Jeżeli $\mathrm{D}=0$, wówczas, według (3), $a=b=c=0$; a zatym równanie

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=0$$

przedstawia płaszczyznę, która przechodzi przez początek spółrzędnych.

b. Jeżeli $\mathrm{C}=0$, wówczas $c=\infty$; płaszczyzna więc, przedstawiona przez równanie

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{D}=0,$$

jest równoległą do osi z-ów. — Taksamo równania $\mathrm{A}x+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ i $\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ przedstawiają płaszczyzny równoległe odpowiednio do osi y-ów i do osi z-ów.

c. Jeżeli $B=C=0$, wówczas $b=c=\infty$; a zatym równanie

$$Ax+D=0, \quad \text{czyli} \quad x=a$$

przedstawia płaszczyznę równoległą do płaszczyzny YZ.—Taksamo równanie $By+D=0$, czyli $y=b$ przedstawia płaszczyznę równoległą do ZX, a równanie $Cz+D=0$, czyli $z=c$ przedstawia płaszczyznę równoległą do XY.

d. Jeżeli w poprzedzającym przypadku jeszcze i $D=0$, to odpowiednio mieć będziemy równania

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0,$$

które przedstawiają płaszczyzny YZ, ZX, XY.

e. Jeżeli nakoniec $A=B=C=0$, wówczas $a=b=c=\infty$; a zatym równanie

$$D=0$$

należy uważać jako przedstawiające płaszczyznę w nieskończoności

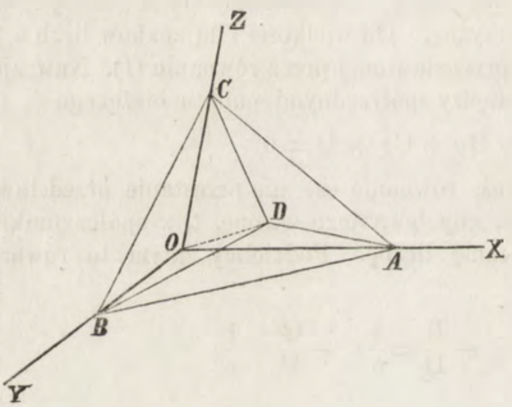


Fig. 71.

16. Spuśćmy z początku O (fig. 71) prostopadłą OD na płaszczyznę, która na osiach odmierza odcinki OA, OB, OC, połączmy D z A, B, C i oznaczmy $OD=p$, $\angle XOD=\alpha$, $\angle YOD=\beta$, $\angle ZOD=\gamma$, $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Z trójkątów prostokątnych OAD, OBD, OCD wypada

$$p=a\cos\alpha=b\cos\beta=c\cos\gamma. \tag{4}$$

Wstawiając wartości na a, b, c, wynikające z tych związków, w równanie (1), mieć będziemy równanie normalne płaszczyzny

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{5}$$

Aby wyrazić długość p prostopadłéj z początku na płaszczyznę i dostawy kierunkowe $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ téj prostopadłéj przez spółczynniki A, B, C i D równania ogólnego płaszczyzny, t. j. równania (2), podstawmy w związki (4) za a, b, c wartości wynikające ze związków (3). Otrzymamy tym sposobem

$$\frac{p}{-D}=\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}. \tag{6}$$

Z tych zaś związków, przy uwzględnieniu związku zachodzącego między dostawami kierunkowemi promienia [art. 3, (5')], znajdziemy, że każdy z wypisanych stosunków jest równy stosunkowi

$$(7)\quad \frac{\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sqrt{A^2\sin^2\lambda+B^2\sin^2\mu+C^2\sin^2\nu+2(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)BC+2(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)CA+2(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)AB}}.$$

W przypadku, kiedy spółrzędne są prostokątne $\left(\lambda=\mu=\nu=\frac{\pi}{2}\right)$, mamy

$$(8)\qquad \frac{p}{-D}=\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

W tych wzorach należy wziąć pierwiastek ze znakiem przeciwnym znakowi spółczynnika D, ażeby długość p wypadła dodatną.

To wskazuje, że, chcąc równanie ogólne płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$ przywieść do postaci normalnéj, należy to równanie pomnożyć przez wyrażenie (7), lub przez $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, według tego, czy układ osi spółrzędnych nie jest, czytéż jest prostokątny.

17. Spółrzędne płaszczyzny. Równanie jakiéjkolwiek płaszczyzny można przywieść do postaci

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

gdzie a, b, c oznaczają odcinki, które ta płaszczyzna odmierza na osiach spółrzędnych. Od wielkości i od znaku (kierunku) tych odcinków zależy położenie płaszczyzny, tak iż, jeżeli płaszczyzna jest daną, wtedy także te odcinki są dane; i nawzajem, jeżeli dane są wartości bezwzględne i znaki tych odcinków, wtedy położenie płaszczyzny jest niewątpliwie wyznaczone. Z tego powodu możnaby ilości a, b, c nazwać spółrzędnymi płaszczyzny; wszakże dogodniéj wziąć za spółrzędne płaszczyzny odwrotności liczb a, b, c, wzięte ze znakami przeciwnymi. Kładąc zatym

$$(9)\qquad -\frac{1}{a}=u,\quad -\frac{1}{b}=v,\quad -\frac{1}{c}=w,$$

nazwiemy te liczby u, v, w spółrzędnymi płaszczyzny.

Wprowadzając te spółrzędne do poprzedzającego równania, otrzymamy

$$(10)\qquad ux+vy+wz+1=0.$$

To równanie wyraża związek między dopiéroco określonymi spółrzędnymi płaszczyzny u, v, w i spółrzędnymi punktu x, y, z, który leży na téj płaszczyźnie. Jeżeli więc spółrzędne płaszczyzny u, v, w są dane, to spółrzędne wszelkich punktów leżących na danéj płaszczyźnie, lecz tylko tych punktów, uczynią zadość równaniu (10). W tym więc przypadku równanie (10) przedstawia płaszczyznę o spółrzędnych u, v, w.

Jeżeli przeciwnie, spółrzędne punktu x, y, z są dane, natenczas spółrzędne u, v, w wszelkich płaszczyzn, przechodzących przez ten punkt, lecz tylko tych płaszczyzn, uczynią zadość równaniu (10). W tym przypadku równanie (10) będzie równaniem punktu, którego spółrzędne są x, y, z, A zatym: *jeżeli punkt wyznaczymy przez trzy spółrzędne x, y, z, natenczas wyrażenie analityczne płaszczyzny będzie równaniem stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu; jeżeli zaś płaszczyznę wyznaczymy przez trzy spółrzędne u, v, w, natenczas wyrażenie analityczne punktu będzie równaniem stopnia 1-go między spółrzędnymi płaszczyzny.*

Nawzajem: *każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi punktu przedstawia płaszczyznę, a każde równanie stopnia 1-go między spółrzędnymi płaszczyzny przedstawia punkt.*

Jakoż, dzieląc równanie ogólne stopnia 1-go np. między spółrzędnymi płaszczyzny,

$$\mathrm{L}u + \mathrm{M}v + \mathrm{N}w + \mathrm{P} = 0,$$

przez P, i kładąc $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{P}} = x$, $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = y$, $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = z$, mamy

$$xu + yv + zw + 1 = 0,$$

równanie kształtu (10), które przedstawia punkt o spółrzędnych x, y, z. —

W ogólności, każde równanie $\mathrm{F}(u, v, w) = 0$ między trzema spółrzędnymi płaszczyzny przedstawia zbiór płaszczyzn, z których każda dotyka pewnéj powierzchni, czyli przedstawia powierzchnią — obwiednią wszystkich płaszczyzn, stycznych do téj powierzchni. Podobnie bowiém, jak w układzie spółrzędnych punktu, gdy trzy punkty na powierzchni, przedstawionéj przez równanie $f(x, y, z) = 0$, razem się ze sobą zejdą, to płaszczyzna, przechodząca przez te trzy punkty, staje się styczną do téj powierzchni, takrównież, gdy trzy płaszczyzny, których spółrzędne czynią zadość równaniu $\mathrm{F}(u, v, w) = 0$, razem się ze sobą zejdą, to wówczas punkt przecięcia się tych trzech płaszczyzn staje się punktem styczności ich do pewnéj powierzchni.

Jeżeli równanie $\mathrm{F}(u, v, w) = 0$ jest algiebraiczne stopnia n-go, to powierzchnią, przez to równanie przedstawioną, nazywamy powierzchnią algiebraiczną klasy n-éj. Zatym punkt jest powierzchnią algiebraiczną klasy 1-éj.

Płaszczyzny, których spółrzędne jednocześnie czynią zadość dwu równaniom $\mathrm{F}_1(u, v, w) = 0$ i $\mathrm{F}_2(u, v, w) = 0$, są płaszczyznami stycznymi jednocześnie do obu powierzchni, przedstawionych przez te równania. Szereg nieskończony tych płaszczyzn obwodzi nową powierzchnią, którą nazwiemy powierzchnią rozwijalną, albowiém, jak to zobaczymy, taką powierzchnią można rozwinąć na płaszczyźnie.

18. Odległość prostopadła punktu od płaszczyzny. Niech x', y' z' będą spółrzędnymi punktu danego, a $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ równaniem normalnym danéj płaszczyzny. Poprowadźmy przez ten punkt płaszczyznę równoległą do danéj. Równanie normalne téj płaszczyzny będzie

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0,$$

gdzie α, β, γ mają te same wartości, co w równaniu poprzedzającym. Ponieważ ta płaszczyzna ma przechodzić przez punkt dany, przeto

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p' = 0,$$

skąd wypada

$$p' = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

Oznaczmy jeszcze przez δ odległość prostopadłą punktu danego od płaszczyzny danéj. Natenczas, przyjmując tę odległość za dodatną lub za ujemną, według tego, czy punkt dany i początek leżą z téj saméj strony, czytéż po stronach przeciwnych płaszczyzny danéj, będziemy mieli

$$\delta = p - p',$$

lub, wstawiwszy za p' wartość powyższą,

(11) $$\delta = -(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p).$$

A zatym: *lewa strona równania normalnego płaszczyzny, gdy w nim za spółrzędne bieżące podstawimy spółrzędne punktu danego i wypadek podstawienia weźmiemy ze znakiem przeciwnym, przedstawia (co do wielkości i znaku) odległość prostopadłą punktu danego od téj płaszczyzny.*

Jeżeli płaszczyzna jest dana przez równanie ogólne $Ax+By+Cz+D=0$, natenczas przywiódszy uprzednio to równanie do postaci normalnéj, miéć będziemy w układzie prostokątnym spółrzędnych

(12) $$\delta = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

gdzie pierwiastek należy wziąć ze znakiem spółczynnika D.

Jeżeli zaś dana płaszczyzna jest wyznaczona przez swe spółrzędne u, v, w, tak, iż jéj równanie jest $ux + vy + wz + 1 = 0$, natenczas w układzie prostokątnym spółrzędnych miéć będziemy

(13) $$\delta = \frac{ux' + vy' + wz' + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

19. Kąt między dwiema płaszczyznami. Przez kąt między dwiema płaszczyznami rozumiéć należy kąt między dwiema prostopadłymi do tych płaszczyzn, wyprowadzonymi z jednego punktu, np. z początku spółrzędnych. Niech więc

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{i} \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

będą równaniami dwu płaszczyzn. Oznaczmy przez (α, β, γ) i $(\alpha', \beta', \gamma')$ kąty, które z osiami x, y, z czynią prostopadłe do tych płaszczyzn, wyprowadzone np. z początku spółrzędnych. W układzie prostokątnym spółrzędnych mamy

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A'} = \frac{\cos\beta'}{B'} = \frac{\cos\gamma'}{C'} = \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}};$$

jeżeli więc przez θ oznaczymy kąt między tymi dwiema prostopadłymi, a więc i między dwiema danymi płaszczyznami, to (art. 5)

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \\ \sin\theta &= \frac{(BC'-B'C)^2 + (CA'-C'A)^2 + (AB'-A'B)^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{(BC'-B'C)^2 + (CA'-C'A)^2 + (AB'-A'B)^2}{AA'+BB'+CC'}. \end{aligned}\right.$$

Z tych wzorów wypada

$$(15)\qquad AA' + BB' + CC' = 0,$$

jako warunek konieczny i dostateczny, aby dwie dane płaszczyzny były do siebie prostopadłe. Warunek zaś konieczny i dostateczny, aby dwie dane płaszczyzny były do siebie równoległe, przedstawia równanie

$$(BC'-B'C)^2 + (CA'-C'A)^2 + (AB'-A'B)^2 = 0,$$

które się roskłada na trzy następujące:

$$(16)\qquad BC'-B'C=0,\quad CA'-C'A=0,\quad AB'-A'B=0.$$

Jeżeli spółczynniki A', B', C' nie są równe 0, równania warunkowe przywodzą się do dwu następujących

$$(16')\qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Zatym: *dwie płaszczyzny, których równania różnią się od siebie jedynie wyrazem, od x, y, z niezależnym, są do siebie równoległe.*

20. Równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez prostą przecięcia się dwu danych płaszczyzn. *Jeżeli*

$$E' \equiv u'x + v'y + w'z + 1 = 0,\quad E'' \equiv u''x + v''y + w''z + 1 = 0$$

są równaniami dwu płaszczyzn, natenczas równanie

$$(17)\quad E' + \lambda E'' \equiv (u' + \lambda u'')x + (v' + \lambda v'')y + (w' + \lambda w'')z + (1+\lambda) = 0,$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ, przedstawia jakąkolwiek płaszczyznę E, *przechodzącą przez prostą przecięcia się dwu danych płaszczyzn.* Albowiém, popiérwsze, równanie (17) jest równaniem stopnia 1-go, powtóre, równaniu (17) uczynią zadość wszystkie układy wartości na x, y, z, które czynią zadość jednocześnie obu równaniom $E'=0$ i $E''=0$, a więc płaszczyzna, przedstawiona przez równanie (17), przechodzi istotnie przez prostą, według któréj dane dwie płaszczyzny się przecinają; nakoniec, można czynnikowi nieoznaczonemu λ nadać taką wartość, aby płaszczyzna (17) przechodziła przez punkt dowolnie wybrany, a więc równanie (17) może przedstawiać pewną, j a k ą k o l w i e k zresztą, płaszczyznę, przechodzącą przez prostą przecięcia się dwu danych płaszczyzn.

Oznaczając przez u, v, w spółrzędne płaszczyzny, przedstawionéj przez równanie (17), mamy

$$u=\frac{u'+\lambda u''}{1+\lambda},\quad v=\frac{v'+\lambda v''}{1+\lambda},\quad w=\frac{w'+\lambda w''}{1+\lambda}. \tag{18}$$

Znaczenie gieometryczne czynnika λ wypływa z uwag następujących. Oznaczmy przez δ' i δ'' odległości prostopadłe punktu bieżącego na płaszczyźnie (17) odpowiednio od płaszczyzn $\mathrm{E}'=0$ i $\mathrm{E}''=0$; wówczas będzie (art. 18)

$$\mathrm{E}'=\delta'\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}\ \text{ i }\ \mathrm{E}''=\delta''\sqrt{u''^2+v''^2+w''^2}.$$

A że, według (17), $\lambda=-\dfrac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}''}$, zatym mamy

$$\lambda=-\varkappa\frac{\delta'}{\delta''},\quad \text{gdzie } \varkappa=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}:\sqrt{u''^2+v''^2+w''^2}.$$

Co do znaku, λ będzie dodatne lub ujemne, według tego, czy płaszczyzna (17) nie przechodzi, czytéż przechodzi przez ten kąt między dwiema płaszczyznami, w którego otworze leży początek spółrzędnych. Oznaczywszy jeszcze przez $(\mathrm{E}'\mathrm{E})$ i $(\mathrm{E}''\mathrm{E})$ kąty, które płaszczyzna (17) czyni odpowiednio z płaszczyznami $\mathrm{E}'=0$ i $\mathrm{E}''=0$, mieć będziemy $\delta':\delta''=\sin(\mathrm{E}'\mathrm{E}):\sin(\mathrm{E}''\mathrm{E})=$ $=\sin(\mathrm{E}'\mathrm{E}):-\sin(\mathrm{E}\mathrm{E}'')$; a zatym ostatecznie

$$\lambda=\varkappa\frac{\sin(\mathrm{E}'\mathrm{E})}{\sin(\mathrm{E}\mathrm{E}'')}. \tag{19}$$

Jeżeli analogicznie postąpimy z równaniami dwu danych punktów

$$\mathrm{P}'\equiv x'u+y'v+z'w+1=0,\quad \mathrm{P}''\equiv x''u+y''v+z''w+1=0,$$

to znajdziemy, że równanie

$$\mathrm{P}'+\lambda\mathrm{P}''\equiv(x'+\lambda x'')u+(y'+\lambda y'')v+(z'+\lambda z'')w+(1+\lambda)=0, \tag{20}$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ, przedstawia jakikolwiek punkt P na prostéj, łączącéj dwa dane punkty. Spółrzędne tego punktu są

$$x=\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda},\quad y=\frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda},\quad z=\frac{z'+\lambda z''}{1+\lambda}, \tag{21}$$

a znaczenie gieometryczne czynnika λ daje wzór (art. 11)

$$\lambda=\frac{\mathrm{P}'\mathrm{P}}{\mathrm{P}\mathrm{P}''}. \tag{22}$$

Powyższe wyniki możemy także tak wypowiedziéć:

Jeżeli $\mathrm{R}=0$, $\mathrm{R}'=0$, $\mathrm{R}''=0$ *są równaniami trzech płaszczyzn, lub trzech punktów, i jeżeli te trzy płaszczyzny przecinają się według jednéj prostéj, lub odpowiednio te trzy punkty leżą na jednéj prostéj, to natenczas istnieją trzy takie liczby* $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa''$, *które uczynią zadość tożsamości*

$$\varkappa\mathrm{R}+\varkappa'\mathrm{R}'+\varkappa''\mathrm{R}''\equiv 0, \tag{23}$$

i nawzajem. Albowiém można tę tożsamość zastąpić przez

$$\mu R \equiv R' + \lambda R'',$$

gdzie $\mu = -\varkappa : \varkappa'$, $\lambda = \varkappa'' : \varkappa'$. Stąd bespośrednio widzimy, że płaszczyzna, lub punkt, przedstawione przez równanie $R = 0$, odpowiednio przechodzi przez prostą przecięcia się płaszczyzn $R' = 0$ i $R'' = 0$, lub leży na prostéj, łączącéj punkty $R' = 0$ i $R'' = 0$.

Jeżeli tu

(24) $R \equiv ax + by + cz + d$, $R' \equiv a'x + b'y + c'z + d'$, $R'' \equiv a''x + b''y + c''z + d''$,

to natenczas, na mocy tożsamościowego związku (23),

$$\varkappa a + \varkappa' a' + \varkappa a'' = 0,\ \varkappa b + \varkappa' b' + \varkappa'' b'' = 0,\ \varkappa c + \varkappa' c' + \varkappa'' c'' = 0,\ \varkappa d + \varkappa' d' + \varkappa'' d'' = 0.$$

A zatym, jeżeli trzy płaszczyzny $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$ przecinają się według jednéj prostéj, to natenczas wszystkie cztéry wyznaczniki stopnia 3-go, które otrzymać możemy z symbolu

$$\left\| \begin{matrix} a\ , & b\ , & c\ , & d \\ a'\ , & b'\ , & c'\ , & d' \\ a''\ , & b''\ , & c''\ , & d'' \end{matrix} \right\|$$

przez opuszczenie każdéj pokolei kolumny, są równe 0. — Analogiczny wypadek otrzymamy dla trzech punktów, leżących na jednéj prostéj.

21. Własności kąta bryłowego trójściennego. Niech

$$E_1 = 0,\quad E_2 = 0,\quad E_3 = 0$$

będą równaniami ścian kąta bryłowego trójściennego. Jeżeli przyjmiemy, że początek spółrzędnych znajduje się wewnątrz tego kąta, natenczas

$$E_{12} \equiv E_1 - E_2 = 0,\ E_{23} \equiv E_2 - E_3 = 0,\ E_{31} = E_3 - E_1 = 0$$

będą równaniami płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych wewnętrznych tego kąta bryłowego, a

$$E'_{12} \equiv E_1 + E_2 = 0,\ \ E'_{23} = E_2 + E_3 = 0,\ \ E'_{31} = E_3 + E_1 = 0$$

będą równaniami płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych zewnętrznych tegoż kąta bryłowego. Z tożsamości

$$\begin{aligned} E_{12} + E_{23} + E_{31} &\equiv 0, \\ E'_{23} - E'_{31} + E_{12} &\equiv 0, \\ E'_{31} - E'_{12} + E_{23} &\equiv 0, \\ E'_{12} - E'_{23} + E_{31} &\equiv 0 \end{aligned}$$

widzimy, że *trzy pary płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych wewnętrznych i zewnętrznych kąta bryłowego trójściennego, przechodzą po trzy przez jednę prostą.* Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego.

Przez trzy krawędzi E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 poprowadźmy płaszczyzny, dzielące każdy z tych kątów dwuściennych na dwie części tak, iż stosunek ich wstaw jest odpowiednio $\mu_2:\mu_3$, $\mu_3:\mu_1$, $\mu_1:\mu_2$. Wtedy równania tych trzech płaszczyzn będą

$$E_{23}\equiv\frac{E_2}{\mu_2}-\frac{E_3}{\mu_3}=0,\quad E_{31}\equiv\frac{E_2}{\mu_3}-\frac{E_1}{\mu_1}=0,\quad E_{12}\equiv\frac{E_1}{\mu_1}-\frac{E_2}{\mu_2}=0.$$

Stąd wypada tożsamość $E_{23}+E_{31}+E_{12}=0$. Mamy zatym twierdzenie ogólne: *płaszczyzny, dzielące kąty dwuścienne kąta bryłowego trójściennego na części, których stosunki wstaw są odpowiednio* $\mu_1:\mu_3$, $\mu_3:\mu_1$, $\mu_1:\mu_2$, *przechodzą przez jednę prostą.*

Jeżeli $E_1=0$, $E_2=0$, $E_3=0$ są równaniami normalnymi trzech ścian kąta bryłowego i jeżeli oznaczymy przez (2, 3), (3, 1), (1, 2) trzy odpowiednie kąty dwuścienne, wówczas równania

$$E_{23}\equiv E_2\cos(3,1)-E_3\cos(1,2)=0,\quad E_{31}\equiv E_3\cos(1,2)-E_1\cos(2,3)=0,$$
$$E_{12}=E_1\cos(2,3)-E_2\cos(3,1)=0$$

przedstawiają płaszczyzny, przechodzące przez trzy krawędzi i prostopadłe do ścian, tym krawędziom przeciwległych. Mamy zatym twierdzenie: *płaszczyzny, które rzucają prostopadle krawędzi kąta bryłowego trójściennego na ściany przeciwległe, przechodzą przez jednę prostą.*

22. Pęk płaszczyzn i szereg punktów. Zbiór płaszczyzn, przechodzących przez jednę prostą, zowiemy pękiem płaszczyzn, a zbiór punktów, leżących na jednéj prostéj, zowiemy szeregiem punktów. Jeżeli

$$R_1=0 \quad \text{i} \quad R_2=0$$

są równaniami dwu płaszczyzn pęku, lub dwu punktów szeregu, natenczas równanie

$$R_1+\lambda R_2=0,$$

z czynnikiem nieoznaczonym λ, przedstawiać może wszelką płaszczyznę tego pęku, lub odpowiednio wszelki punkt tego szeregu.

Przez stosunek podwójnego podziału $(E_1E_2E_3E_4)$ cztérech płaszczyzn jednego pęku rozumiemy iloraz

$$(E_1E_2E_3E_4)=\frac{\sin(E_1,E_3)}{\sin(E_3,E_2)}:\frac{\sin(E_1,E_4)}{\sin(E_4,E_2)}.$$

Jeżeli więc te cztéry płaszczyzny przetniemy płaszczyzną do nich prostopadłą, to otrzymamy pęk cztérech promieni, i stosunek podwójnego podziału tych cztérech promieni jest równy stosunkowi podwójnego podziału cztérech płaszczyzn.

Podobnie, przez stosunek podwójnego podziału $(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ cztérech punktów jednego szeregu rozumiemy iloraz

$$(Q_1Q_2Q_3Q_4)=\frac{Q_1Q_3}{Q_3Q_2}:\frac{Q_1Q_4}{Q_4Q_2}.$$

Stosunek podwójnego podziału cztérech płaszczyzn pęku jest równy stosunkowi podwójnego podziału cztérech punktów, w których te płaszczyzny przecina jakakolwiek linija prosta poprzeczna.

Jakoż, przez dowolną prostą D poprowadźmy płaszczyznę S, która spotyka prostą, według któréj te cztéry płaszczyzny przecinają się z sobą, w punkcie A, a płaszczyznę Σ, prostopadłą do tych płaszczyzn, według prostéj D'; niech następnie Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 i Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 będą odpowiednio punktami przecięcia się prostych D i D' z płaszczyznami E_1, E_2, E_3, E_4. Stosunek powójnego podziału $(E_1E_2E_3E_4)$ będzie wówczas równy stosunkowi podwójnego podziału cztérech odpowiednich promieni na Σ, a przeto także stosunkowi $(Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4)$, a więc także stosunkowi promieni, według których płaszczyzna S przecina dane płaszczyzny pęku, t. j. promieni AQ'_1, AQ'_2, AQ'_3, AQ'_4, a ten ostatni jest równy stosunkowi $(Q_1Q_2Q_3Q_4)$; mamy zatym $(E_1E_2E_3E_4)=(Q_1Q_2Q_3Q_4)$, co było do okazania.

Jeżeli

$$R_1=0,\quad R_2=0,\quad R_3\equiv R_1+\lambda R_2=0,\quad R_4\equiv R_1+\mu R_2=0$$

są równaniami cztérech płaszczyzn jednego pęku, lub cztérech punktów jednego szeregu, wówczas stosunek podwójnego podziału tychże płaszczyzn, lub odpowiednio punktów będzie równy $\lambda:\mu$ (art. 20).

Dwa pęki płaszczyzn, lub dwa szeregi punktów, przedstawione przez równania

$$R_1+\lambda R_2=0 \quad \text{i} \quad R'_1+\lambda R'_2=0,$$

zowiemy pękami jednokréślnymi, lub szeregami jednokréślnymi; a te płaszczyzny w tych dwu pękach, lub te punkty w tych dwu szeregach, które odpowiadają téj saméj wartości na λ, nazywamy płaszczyznami odpowiednimi lub punktami odpowiednimi.

Miejscem gieometrycznym prostych, według których przecinają się odpowiednie płaszczyzny dwu pęków jednokréślnych, lub które łączą odpowiednie punkty dwu szeregów jednokréślnych, jest powierzchnia, przedstawiona odpowiednio przez równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu, czyli powierzchnia rzędu 2-go, lub przez równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych płaszczyzny, czyli powierzchnia klasy 2-éj.

Jakoż, dwa równania, $R_1+\lambda R_2=0$ i $R'_1+\lambda R'_2=0$, uważane pospołu, przedstawiają liniją prostą, według któréj przecinają się dwie płaszczyzny, lub prostą, która łączy dwa punkty, przedstawione przez każde z tych równań, wzięte oddzielnie. Jeżeli zatym z tych równań wyrugujemy czynnik λ, to otrzymamy

$$R_1R'_2-R'_1R_2=0,$$

równanie stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu, lub odpowiednio względem spółrzędnych płaszczyzny. To równanie przedstawia miejsce prostych, według których przecinają się płaszczyzny odpowiednie dwu pęków jednokréślnych, lub które łączą odpowiednie punkty dwu szeregów jednokréślnych.

23. Cztéry płaszczyzny i cztéry punkty. Niech

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ E_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ E_4 \equiv A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{array}\right.$$

będą równaniami cztérech płaszczyzn. Jeżeli te cztéry płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, natenczas wartości na x, y, z, otrzymane z trzech równań, powinny uczynić zadość równaniu czwartemu; a zatym wtedy miéć powinniśmy

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomnóżmy w tym wyznaczniku elementy piérwszéj kolumny przez x i dodajmy do nich elementy kolumny drugiéj, pomnożone przez y, elementy trzeciéj, pomnożone przez z, tudzież elementy ostatniéj kolumny. Natenczas otrzymamy tożsamościowo

$$\begin{vmatrix} A_1x + B_1y + C_1z + D_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

lub, uwzględniając oznaczenia (α) i kładąc

$$\begin{vmatrix} B_2, C_2, D_2 \\ B_3, C_3, D_3 \\ B_4, C_4, D_4 \end{vmatrix} = \varkappa_1, -\begin{vmatrix} B_1, C_1, D_1 \\ B_4, C_4, D_4 \\ B_3, C_3, D_3 \end{vmatrix} = \varkappa_2, \begin{vmatrix} B_1, C_1, D_1 \\ B_2, C_2, D_2 \\ B_4, C_4, D_4 \end{vmatrix} = \varkappa_3, -\begin{vmatrix} B_1, C_1, D_1 \\ B_2, C_2, D_2 \\ B_3, C_3, D_3 \end{vmatrix} = \varkappa_4,$$

$$(\beta)\qquad \varkappa_1E_1 + \varkappa_2E_2 + \varkappa_3E_3 + \varkappa_4E_4 \equiv 0.$$

A zatym: *jeżeli cztéry płaszczyzny* (α) *przecinają się w jednym punkcie, wówczas istnieją cztéry liczby* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, *tożsamościowo czyniące zadość równaniu* (β). Nawzajem: *jeżeli istnieją takie liczby* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, *iż przy nich ma miejsce tożsamość* (β), *wówczas cztéry płaszczyzny* (α) *przecinają się w jednym punkcie.* Albowiém wartości na x, y, z, które czynią zadość jednocześnie trzem z tych równań (α), wskutek tożsamości (β) uczynią także zadość czwartemu z tych równań.

Podobnie można dowiéść twierdzeń analogicznych. *Jeżeli cztéry punkty* $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_4 = 0$ *leżą na jednéj płaszczyźnie, wówczas istnieją cztéry liczby* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, *czyniące zadość tożsamości* $\varkappa_1Q_1 + \varkappa_2Q_2 + \varkappa_3Q_3 + \varkappa_4Q_4 \equiv 0$. I nawzajem: *jeżeli* $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_4 = 0$ *są równaniami cztérech* *punktów i jeżeli istnieją liczby $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, czyniące zadość tożsamości $\varkappa_1 Q_1 + \varkappa_2 Q_2 + \varkappa_3 Q_3 + \varkappa_4 Q_4 \equiv 0$, wówczas te cztéry punkty leżą na jednéj płaszczyźnie.*

24. Własności czworościanu. Weźmy pod uwagę czworościan. Niech

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 0$$

będą równaniami jego ścian. Jeżeli początek spółrzędnych leży wewnątrz czworościanu, to równania

$$E_{12} \equiv E_1 - E_2 = 0, \quad E_{13} \equiv E_1 - E_3 = 0, \quad E_{14} \equiv E_1 - E_4 = 0,$$
$$E_{23} \equiv E_2 - E_3 = 0, \quad E_{24} \equiv E_2 - E_4 = 0, \quad E_{34} \equiv E_3 - E_4 = 0$$

przedstawiają płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych wewnętrznych, a równania

$$E'_{12} \equiv E_1 + E_2 = 0, \quad E'_{13} \equiv E_1 + E_3 = 0, \quad E'_{14} \equiv E_1 + E_4 = 0,$$
$$E'_{23} \equiv E_2 + E_3 = 0, \quad E'_{24} \equiv E_2 + E_4 = 0, \quad E'_{34} \equiv E_3 + E_4 = 0$$

przedstawiają płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych zewnętrznych tegoż czworościanu. Tożsamość

$$(\alpha) \qquad E_{12} + E_{23} + E_{34} - E_{14} \equiv 0$$

wskazuje, że cztéry płaszczyzny E_{12}, E_{23}, E_{34} i E_{14} przecinają się w jednym punkcie. Lecz przez ten punkt przechodzi także płaszczyzna E_{13}, przecinająca się z płaszczyznami E_{34} i E_{14} według jednéj prostéj, jak również płaszczyzna E_{24}, która z płaszczyznami E_{23} i E_{34} przecina się według jednéj prostéj (art. 21), zatym: *płaszczyzny dwusieczne sześciu kątów dwuściennych wewnętrznych czworościanu przechodzą przez jeden punkt.*

Mamy nadto tożsamości

$$(\beta) \qquad E_{12} + E_{23} + E'_{34} - E'_{14} \equiv 0,$$
$$(\gamma) \qquad E_{23} + E_{34} + E'_{14} - E'_{12} \equiv 0,$$
$$(\delta) \qquad E_{14} - E_{12} - E'_{23} + E'_{34} \equiv 0,$$
$$(\varepsilon) \qquad E_{34} - E_{14} + E'_{12} - E'_{23} \equiv 0.$$

Przez punkt (β) przechodzą jeszcze płaszczyzny E_{13} i E'_{24}, gdyż (art. 21) E_{13} przecina się według jednéj prostéj z E_{12} i E_{23}, a E'_{24} z E'_{34} i E_{23}, i podobnie przez punkt (γ) przechodzą także płaszczyzny E_{24} i E'_{13}, przez (δ) płaszczyzny E_{24} i E'_{13}, a przez (ε) płaszczyzny E_{13} i E'_{24}. Z tego wypada, że: *płaszczyzny dwusieczne trzech kątów dwuściennych zewnętrznych czworościanu, przyległych jednéj ścianie, i płaszczyzny dwusieczne trzech kątów dwuściennych wewnętrznych tegoż czworościanu, téj ścianie nieprzyległych, przechodzą przez jeden punkt.*

Nakoniec mamy tożsamości

$$(\zeta) \qquad E'_{12} - E'_{23} + E'_{34} - E'_{14} = 0,$$
$$(\eta) \qquad E'_{13} - E'_{34} + E'_{24} - E'_{12} = 0,$$
$$(\theta) \qquad E'_{14} - E'_{24} + E'_{23} - E'_{13} = 0.$$

Przez punkt (ζ) przechodzą jeszcze płaszczyzny E_{13} i E_{24}, przez punkt (η) płaszczyzny E_{23} i E_{14}, a przez punkt (θ) płaszczyzny E_{12} i E_{34}. A zatym: *płaszczyzny dwusieczne dwu kątów dwuściennych czworościanu wewnętrznych przeciwległych i płaszczyzny dwusieczne cztérech kątów dwuściennych zewnętrznych przy pozostałych krawędziach przecinają się w jednym punkcie.*

25. Pięć płaszczyzn i pięć punktów. Jeżeli

$$R_1=0,\ R_2=0,\ R_3=0,\ R_4=0$$

są równaniami cztérech płaszczyzn, nie przecinających się ani w jednym punkcie, ani według jednéj prostéj, lub cztérech punktów, nie leżących ani na jednéj prostéj, ani na jednéj płaszczyźnie, to natenczas każdą piątą płaszczyznę, lub odpowiednio każdy piąty punkt $R=0$ można przedstawić przez równanie

$$R \equiv \varkappa_1 R_1 + \varkappa_2 R_2 + \varkappa_3 R_3 + \varkappa_4 R_4 = 0,$$

gdzie $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ oznaczają liczby stałe skończone. Albowiém, jeżeli np. dla $i=1, 2, 3, 4$, $R_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z + d_i$, a $R = ax + by + cz + d$, to natenczas dla wyznaczenia liczb $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ mamy cztéry równania

$$\begin{aligned}
a_1\varkappa_1 + a_2\varkappa_2 + a_3\varkappa_3 + a_4\varkappa_4 &= a,\\
b_1\varkappa_1 + b_2\varkappa_2 + b_3\varkappa_3 + b_4\varkappa_4 &= b,\\
c_1\varkappa_1 + c_2\varkappa_2 + c_3\varkappa_3 + c_4\varkappa_4 &= c,\\
d_1\varkappa_1 + d_2\varkappa_2 + d_3\varkappa_3 + d_4\varkappa_4 &= d,
\end{aligned}$$

które dają jeden tylko układ wartości na te liczby — wartości skończonych, gdyż wyznacznik tych równań jest od 0 różny (art. 23).

To twierdzenie posłuży do uzasadnienia nowego układu spółrzędnych punktu i płaszczyzny, t. z. spółrzędnych czworościennych, o których będzie mowa w rozdziale IV.

ĆWICZENIA.

(15). Znaléść a. równanie płaszczyzny, która przechodzi przez trzy punkty (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) i b. równania płaszczyzn, które przechodzą przez dwa z tych punktów i są prostopadłe do płaszczyzny a.

(16). Znaléść równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez punkt (a, b, c) i równoległéj do płaszczyzny, która przechodzi przez punkty (b, c, a), (c, a, b) i jest prostopadłą do płaszczyzny, przechodzącéj przez wszystkie trzy punkty.

(17). Znaléść miejsce punktu równooddalonego od dwu punktów danych (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2).

(18). Trzy płaszczyzny E_1, E_2, E_3 znajdują się w odległościach p_1, p_2, p_3 od początku spółrzędnych; przez prostą przecięcia się każdych dwu prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do trzeciéj: okazać, że tak otrzymane trzy płaszczyzny przetną się według jednéj prostéj, przechodzącéj przez początek wrazie, jeżeli $p_1 \cos\theta_1 = p_2 \cos\theta_2 = p_3 \cos\theta_3$, gdzie θ_1, θ_2, θ_3 są kątami dwuściennymi, utworzonymi przez płaszczyzny E_2, E_3; E_3, E_1; E_1, E_2.

(19). Okazać, że przez dwa punkty (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_3) można poprowadzić dwie płaszczyzny odmierzające na osiach odcinki, których suma jest $=0$, i że te dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, jeżeli $\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - y_2} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0$.

(20). Okazać, że trzy płaszczyzny, prostopadłe do boków trójkąta i dzielące je na części równe, przecinają się według jednéj prostéj.

(21). Okazać, że cztéry płaszczyzny, prostopadłe do boków czworoboku skośnego i dzielące te boki na części równe, przecinają się w jednym punkcie.

(22). Okazać, że sześć płaszczyzn, prostopadłych do krawędzi czworościanu i dzielących te krawędzi na części równe, przecina się w jednym punkcie.

(23). Wiérzchołki czworościanu są $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$; znaléść równania jego ścian i okazać, że dwa kąty dwuścienne są proste, dwa spełniające się, a jeden 60^0, tudzież, że prostopadłe z wiérzchołków na przeciwległe ściany są odpowiednio $\frac{4}{\sqrt{6}}$, $-\frac{4}{\sqrt{6}}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

(24). Okazać, że trzy proste, które łączą środki krawędzi przeciwległych czworościanu, przecinają się w jednym punkcie.

(25). Okazać, że cztéry proste, które łączą środki ciężkości ścian czworościanu z przeciwległymi wiérzchołkami, przecinają się w jednym punkcie.

(26). Znaléść równanie biegunowe płaszczyzny.

(27). Wyprowadziwszy z początku trzy promienie o długości $=p$ i takie, aby nachylenia piérwszego względem osi x, y, z, drugiego względem osi y, z, x i trzeciego względem osi z, x, y były odpowiednio równe, a przez punkty końcowe tych promieni poprowadziwszy płaszczyzny do nich prostopadłe, znaléść spółrzędne punktu przecięcia się tych trzech płaszczyzn.

ROZDZIAŁ III.

O LINII PROSTÉJ.

26. Równania linii prostéj. Można uważać liniją prostą albo jako promień, t. j. jako zbiór punktów na jéj kierunku leżących, albo jako oś t. j. jako zbiór płaszczyzn przez nią przechodzących. Uważając prostą jako promień, należy ją przedstawić przez równania dwu płaszczyzn, które się według niéj przecinają,

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Uważając zaś prostą jako oś, należy ją przedstawić przez równania dwu punktów, które na niéj leżą,

$$(2)\qquad \begin{cases} Lu + Mv + Nw + P = 0, \\ L'u + M'v + N'w + P' = 0. \end{cases}$$

Wartości na x, y, z, które czynią zadość jednocześnie obu równaniom (1), są spółrzędnymi punktu na prostéj, według któréj przecinają się płaszczyzny, przedstawione przez każde z tych dwu równań oddzielnie. Wartości zaś na u, v, w, które czynią zadość jednocześnie obu równaniom (2), są spółrzędnymi płaszczyzny, która przechodzi przez oba punkty, przedstawione przez każde z tych dwu równań oddzielnie.

Oznaczmy przez (a, b, c) spółrzędne punktu dowolnie obranego na prostéj (1); mamy wówczas

$$Aa + Bb + Cc + D = 0,$$
$$A'a + B'b + C'c + D' = 0.$$

Odejmując te równania od równań (1), otrzymujemy

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$
$$A'(x-a) + B'(y-b) + C'(z-c) = 0,$$

skąd wypadają równania symetryczne prostéj we spółrzędnych punktu:

$$(3)\qquad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

gdzie $l=BC'-B'C$, $m=CA'-C'A$, $n=AB'-A'B$.

Taksamo oznaczając przez (α, β, γ) spółrzędne jakiéjkolwiek płaszczyzny, przechodzącéj przez prostą (2), mamy

$$L\alpha+M\beta+N\gamma+P=0,$$
$$L'\alpha+M'\beta+N'\gamma+P'=0,$$

a następnie

$$L(u-\alpha)+M(v-\beta)+N(w-\gamma)=0,$$
$$L'(u-\alpha)+M'(v-\beta)+N'(w-\gamma)=0,$$

skąd wypadają równania symetryczne prostéj we spółrzędnych płaszczyzny:

$$(4)\qquad \frac{u-\alpha}{\lambda}=\frac{v-\beta}{\mu}=\frac{w-\gamma}{\nu},$$

gdzie $\lambda=MN'-M'N$, $\mu=NL'-N'L$, $\nu=LM'-L'M$.

Równania (3) można jeszcze tak pisać:

$$\begin{cases} y=\frac{m}{l}x+\left(b-\frac{m}{l}a\right), \\ z=\frac{n}{l}x+\left(c-\frac{n}{l}a\right), \end{cases}$$

lub, kładąc m i n odpowiednio za $\frac{m}{l}$ i $\frac{n}{l}$, tudzież $b-\frac{m}{l}a=r$, $c-\frac{n}{l}a=s$,

$$(5)\qquad \begin{cases} y=mx+r, \\ z=nx+s. \end{cases}$$

Są to równania zwyczajne prostéj we spółrzędnych punktu; piérwsze z nich przedstawia płaszczyznę równoległą do osi z-ów, a drugie płaszczyznę równoległą do osi y-ów. — Taksamo, kładąc μ i ν za $\frac{\mu}{\lambda}$ i $\frac{\nu}{\lambda}$, tudzież $\beta-\frac{\mu}{\lambda}\alpha=\rho$, $\gamma-\frac{\nu}{\lambda}\alpha=\sigma$, można równania (4) przywiéść do postaci

$$(6)\qquad \begin{cases} v=\mu u+\rho, \\ w=\nu u+\sigma. \end{cases}$$

Są to także równania zwyczajne prostéj we spółrzędnych płaszczyzny; piérwsze z nich przedstawia punkt na płaszczyźnie xy, a drugie punkt na płaszczyźnie zx.

Jedno z równań (5) można zastąpić przez następujące

$$(7)\qquad mz-ny=t,\quad \text{gdzie}\quad t=ms-nr,$$

które przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez prostą (5), a do osi x-ów równoległą. — Taksamo jedno z równań (6) można zastąpić przez równanie

$$(8) \qquad \mu w - \nu v = \tau, \quad \text{gdzie} \quad \tau = \mu\sigma - \nu\rho,$$

które przedstawia punkt na płaszczyźnie YZ, w którym prosta (6) spotyka tę płaszczyznę.

27. Położenie prostej, danéj przez równania zwyczajne. Położenie prostéj (5) zależy od wartości spółczynników m, n, r, s; podobnie położenie prostéj (6) zależy od wartości spółczynników μ, ν, ρ, σ. Przez te bowiém spółczynniki można wyrazić tak spółrzędne punktów, w których prosta spotyka płaszczyzny spółrzędnych, jakoteż spółrzędne płaszczyzn, przechodzących przez prostą i równoległych do osi spółrzędnych. Jakoż, jeżeli przez L, M, N (fig. 72) oznaczymy punkty, w których prosta, przedstawiona przez równania (5) i (7), lub przez równania (6) i (8), spotyka płaszczyzny YZ, ZX, XY, to spółrzędnymi punktu L będą:

$$x = 0, \; y = r = \frac{\nu}{\tau}, \; z = s = -\frac{\mu}{\tau},$$

spółrzędnymi punktu M:

$$y = 0, \; z = \frac{t}{m} = -\frac{1}{\sigma}, \; x = -\frac{r}{m} = \frac{\nu}{\sigma},$$

spółrzędnymi punktu N:

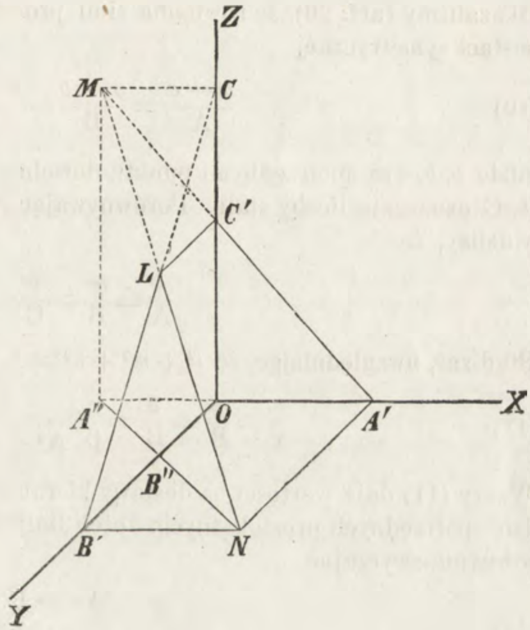


Fig. 72.

$$z = 0, \; x = -\frac{s}{n} = \frac{\mu}{\rho}, \; y = -\frac{t}{n} = -\frac{1}{\rho}.$$

Taksamo, jeżeli LNB, MNA′, MNA″ są płaszczyznami równoległymi odpowiednio do osi x-ów, y-ów i z-ów, przechodzącymi przez prostą (5) i (7), lub (6) i (8), natenczas

spółrzędnymi płaszczyzny LNB będą: $u = 0, \; v = \frac{n}{\tau} = \rho, \; w = -\frac{m}{\tau} = \sigma,$

„ „ MNA′ „ : $v = 0, \; w = -\frac{1}{s} = \frac{\tau}{\mu}, \; u = \frac{n}{s} = -\frac{\rho}{\mu},$

„ „ MNA″ „ : $w = 0, \; u = \frac{m}{r} = -\frac{\sigma}{\nu}, \; v = -\frac{1}{r} = -\frac{\tau}{\nu}.$

28. Kierunek linii prostéj. Niech l, m, n będą dostawami kierunkowymi prostéj, a, b, c spółrzędnymi prostokątnymi jakiegokolwiek punktu na téj prostéj, a x, y, z spółrzędnymi punktu bieżącego na niéj; oznaczmy nadto przez r odległość punktu (x, y, z) od (a, b, c). Wtedy, ponieważ $x-a, \; y-b,$

$z-c$ są rzutami prostokątnymi drogi r odpowiednio na osi x-ów, y-ów i z-ów, mamy

$$x-a=lr,\quad y-b=mr,\quad z-c=nr,$$

skąd

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}\;(=r). \tag{9}$$

Okazaliśmy (art. 26), że równania linii prostéj dają się zawsze przywieść do postaci symetrycznéj

$$\frac{x-a}{\mathrm{A}}=\frac{y-b}{\mathrm{B}}=\frac{z-c}{\mathrm{C}}, \tag{10}$$

gdzie a, b, c są spółrzędnymi punktu dowolnie obranego na téj prostéj, a A, B, C oznaczają liczby stałe. Porównywając równania (10) z równaniami (9), widzimy, że

$$\frac{l}{\mathrm{A}}=\frac{m}{\mathrm{B}}=\frac{n}{\mathrm{C}}.$$

Stąd zaś, uwzględniając, że $l^2+m^2+n^2=1$, mamy

$$\frac{l}{\mathrm{A}}=\frac{m}{\mathrm{B}}=\frac{n}{\mathrm{B}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}. \tag{11}$$

Wzory (11) dają wartości na dostawy kierunkowe l, m, n prostéj (10) w układzie spółrzędnych prostokątnych. Jeżeli linija prosta jest przedstawiona przez równania zwyczajne

$$\left\{\begin{aligned} y&=\mathrm{M}x+\mathrm{R},\\ z&=\mathrm{N}x+\mathrm{S},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

czyli

$$\frac{x}{1}=\frac{y-\mathrm{R}}{\mathrm{M}}=\frac{z-\mathrm{S}}{\mathrm{N}},$$

wówczas

$$\frac{l}{1}=\frac{m}{\mathrm{M}}=\frac{n}{\mathrm{N}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}}. \tag{13}$$

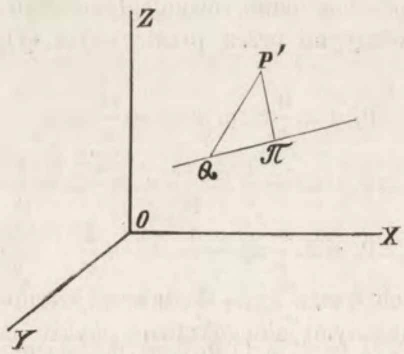


Fig. 73.

29. Odległość prostopadła punktu danego od prostéj danéj. Niech (x', y', z') będą spółrzędnymi punktu danego P′ (fig. 73), a

$$\frac{x-a}{\mathrm{A}}=\frac{y-b}{\mathrm{B}}=\frac{z-c}{\mathrm{C}} \tag{20}$$

równaniami prostéj danéj OΠ. Połączmy punkt P′ z punktem Q na danéj prostéj, którego spółrzędne są (a, b, c), spuśćmy prostopadłą $P'\Pi$, oznaczmy przez (α, β, γ) spółrzędne spodka Π téj prostopadłéj i nazwijmy $QP'=r'$, $Q\Pi=\rho$, $P'\Pi=d$, $\angle \Pi QP'=\theta$. Z trójkąta prostokątnego $Q\Pi P'$ wypada

$$(14) \qquad \rho=r'\cos\theta, \quad d=r'\sin\theta.$$

Ponieważ dostawy kierunkowe prostéj $Q\Pi$ są (art. 28)

$$l=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad m=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad n=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

a dostawy kierunkowe prostéj QP' wyrażają się przez

$$\frac{x'-a}{r'}, \quad \frac{y'-b}{r'}, \quad \frac{z'-c}{r'},$$

zatym mamy (art. 5)

$$\cos\theta=\frac{A(x'-a)+B(y'-b)+C(z'-c)}{r'\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\sin^2\theta=\frac{[B(z'-c)-C(y'-b)]^2+[C(x'-a)-A(z'-c)]^2+[A(y'-b)-B(x'-a)]^2}{r'^2(A^2+B^2+C^2)}.$$

Wstawiwszy te wartości za $\cos\theta$ i $\sin\theta$ w (14), otrzymamy

$$(15) \qquad \rho=\frac{A(x'-a)+B(y'-b)+C(z'-c)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$(16) \quad d=\frac{\{[B(z'-c)-C(y'-b)]^2+[C(x'-a)-A(z'-c)]^2+[A(y'-b)-B(x'-a)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Nadto, ponieważ

$$\frac{\alpha-a}{l}=\frac{\beta-b}{m}=\frac{\gamma-c}{n}=\rho,$$

mamy

$$(17) \qquad \alpha=a+l\rho, \quad \beta=b+m\rho, \quad \gamma=c+n\rho.$$

Wzór (16) daje odległość prostopadłą punktu danego od prostéj danéj, gdy tymczasem wzory (15) i (17) wyznaczają spółrzędne spodka téj prostopadłéj.

Jeżeli równania prostéj są dane pod postacią zwyczajną (12), wówczas

$$(15') \qquad \rho=\frac{x'+M(y'-R)+N(z'-S)}{\sqrt{1+M^2+N^2}},$$

$$(16') \quad d=\frac{\{[M(z'-S)-N(y'-R)]^2+[Nx'-(z'-S)]^2+[Mx'-(y'-R)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+M^2+N^2}}.$$

30. Kąt między daną prostą i daną płaszczyzną. Przez kąt między prostą i płaszczyzną rozumiemy dopełnienie kąta, który prosta czyni z prostopadłą do płaszczyzny. Niech więc

$$(\alpha) \qquad \frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}$$

będą równaniami danéj prostéj, a

$$(\beta) \qquad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

równaniem danéj płaszczyzny. Oznaczmy przez l, m, n dostawy kierunkowe prostéj (α), przez l', m', n' dostawy kierunkowe prostopadłéj do płaszczyzny (β), a przez θ kąt między prostą (α) a płaszczyną (β). Wtedy mamy

$$\sin\theta = ll' + mm' + nn'$$
$$\cos\theta = [(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2]^{\frac{1}{2}},$$

a że

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\frac{l'}{A'}=\frac{m'}{B'}=\frac{n'}{C'}=\frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

więc jest

$$(18) \qquad \sin\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$(19) \qquad \cos\theta=\frac{[(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Z tych wzorów wypada, jako warunek konieczny i dostateczny, ażeby prosta (α) była równoległą do płaszczyzny (β),

$$(20) \qquad AA'+BB'+CC'=0,$$

a jako warunek konieczny i dostateczny, ażeby prosta (α) była prostopadłą do płaszczyzny (β),

$$(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2=0, \text{ t. j.}$$
$$(21) \qquad BC'-B'C=0, \quad CA'-C'A=0, \quad AB'-A'B=0,$$

czyli

$$(21') \qquad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

31. Warunek, aby prosta dana leżała na płaszczyźnie danéj. Jeżeli prosta (α) leży na płaszczyźnie (β) (art. 30), wówczas, popiérwsze punkt (a, b, c) musi leżéć na téj płaszczyźnie, a powtóre, warunek równoległości prostéj i płaszczyzny winien być dopełniony. W skutek tych dwu warunków, jest

$$(22) \qquad \begin{cases} A'a+B'b+C'c+D'=0, \\ A'A+B'B+C'C \qquad =0. \end{cases}$$

Te dwa warunki są niezbędne i zarazem wystarczające do tego, ażeby prosta (α) leżała na płaszczyźnie (β).

Jeżeli prosta jest przedstawiona przez równania zwyczajne (12), to warunki ostatnie sprowadzą się do

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &B'R + C'S + D' = 0,\\ &A' + B'M + C'N = 0.\end{aligned}\right.$$

32. Kąt między dwiema prostymi. Przez kąt między dwiema prostymi, które się nie przecinają, rozumiemy, jak wiadomo, kąt między dwoma promieniami, równoległymi do danych prostych, wyprowadzonymi z jednego punktu, np. z początku. Niech więc

$$(\alpha)\qquad \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C},$$

$$(\beta)\qquad \frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C'}$$

będą równaniami dwu danych prostych. Oznaczmy przez (l, m, n) i (l', m', n') dostawy kierunkowe tych prostych, a przez θ kąt zawarty między tymi prostymi. Ponieważ

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{i} \quad \frac{l'}{A'} = \frac{m'}{B'} = \frac{n'}{C'} = \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

zatym mamy

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\\ \sin\theta &= \frac{[(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.\end{aligned}\right.$$

Dwie dane proste są do siebie prostopadłe, gdy

$$(25)\qquad AA'+BB'+CC' = 0;$$

dane zaś proste są do siebie równoległe, gdy

$$(26)\qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Te warunki są konieczne i dostateczne.

33. Odległość najkrótsza między dwiema prostymi. Dowiedziemy naprzód, że odległość najkrótsza między dwiema prostymi jest odcinkiem prostéj, prostopadłéj do każdéj z tych dwu prostych. Jakoż, niech BC i AD (fig. 74) będą dwiema danymi prostymi, a AB prostą do obu prostopadłą. Widoczna, że prosta AB jest krótszą, niż

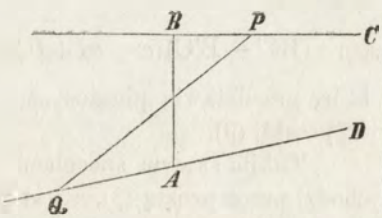


Fig. 74.

jakakolwiek inna prosta, która łączy bądź punkt A na AD z jakimkolwiek punktem prostéj BC, innym, niż B, bądź punkt B na BC z jakimkolwiek punktem na AD, innym, niż A. Niech P będzie owym punktem na BC, a Q owym punktem na AD. Proste PB i QA będą wtedy prostopadłymi do AB, a zatym AB będzie rzutem drogi QP na AB i będzie równa długości drogi PQ, pomnożonéj przez dostawę kąta między PQ i AB. Skoro dostawa kąta jest mniejsza od jedności, przeto $AB < PQ$. Niech nadto

$$(\alpha) \qquad \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C},$$

$$(\beta) \qquad \frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C'}$$

będą równaniami dwu danych prostych. Jeżeli przez prostą (α) poprowadzimy płaszczyznę równoległą do (β), a przez (β) płaszczyznę równoległą do (α), natenczas odległość prostopadła między tymi dwiema płaszczczyznami będzie najkrótszą odległością między prostymi (α) i (β).

Aby płaszczyzna

$$(\gamma) \qquad Lx + My + Nz + P = 0$$

przechodziła przez prostą (α) i była równoległą do prostéj (β), winno być (art. 30, 31)

$$(\delta) \qquad La + Mb + Nc + P = 0,$$

$$(\varepsilon) \qquad LA + MB + NC = 0,$$

$$(\zeta) \qquad LA' + MB' + NC' = 0.$$

Odejmując równanie (δ) od równania (γ), mamy

$$L(x-a) + M(y-b) + N(z-c) = 0,$$

gdy tymczasem z równań (ε) i (ζ) wypada

$$\frac{L}{BC' - B'C} = \frac{M}{CA' - C'A} = \frac{N}{AB' - A'B}.$$

Wstawiwszy w przedostatnie równanie zamiast L, M, N wartości, do których te spółczynniki są, według ostatniego związku, proporcyjonalne, otrzymamy równanie

$$(\eta) \quad (BC' - B'C)(x-a) + (CA' - C'A)(y-b) + (AB' - A'B)(z-c) = 0,$$

które przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez prostą (α), a równoległą do prostéj (β).

Takim samym sposobem znajdziemy równanie płaszczyzny, która przechodzi przez prostą (β), a jest równoległą do prostéj (α):

$$(\theta) \quad (BC' - B'C)(x-a') + (CA' - C'A)(y-b') + (AB' - A'B)(z-c') = 0.$$

Odległość płaszczyzny (η) od początku jest

$$\frac{(BC'-B'C)a+(CA'-CA')b+(AB'-A'B)c}{\sqrt{(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2}},$$

a odległość płaszczyzny (θ) także od początku jest

$$\frac{(BC'-B'C)a'+(CA'-C'A)b'+(AB'-A'B)c'}{\sqrt{(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2}}.$$

Różnica między tymi dwiema odległościami jest żądaną odległością najkrótszą między dwiema danymi prostymi. Oznaczając tę odległość najkrótszą przez E, mamy (bez względu na znak)

$$(27)\qquad E=\frac{(BC'-B'C)(a-a')+(CA'-C'A)(b-b')+AB'-A'B)(c-c')}{\sqrt{(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2}}.$$

Aby otrzymać jeszcze równania prostéj, któréj odcinkiem jest najkrótsza odległość między dwiema danymi prostymi (α) i (β), dość znaléść równania dwu płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez prostą (α) i jest prostopadłą do płaszczyzny (η), a druga przechodzi przez prostą (β) i jest prostopadłą do płaszczyzny (θ). Albowiém te dwie płaszczyzny przecinają się widocznie według żądanéj prostéj, a zatym ich równania przedstawiają tę prostą. Równania żądanéj prostéj są więc następujące:

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} x-a, & y-b, & z-c \\ A, & B, & C \\ AC'-B'C, & CA'-C'A, & AB'-A'B \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-a', & y-b', & z-c' \\ A', & B', & C' \\ BC'-B'C, & CA'-C'A, & AB'-A'B \end{vmatrix}=0.$$

Jeżeli dwie dane proste są przedstawione przez równania zwyczajne

$$(\alpha')\qquad \frac{x}{1}=\frac{y-R}{M}=\frac{z-S}{N},\qquad\qquad (\beta')\qquad \frac{x}{1}=\frac{y-R'}{M'}=\frac{z-S'}{N'},$$

to najkrótsza odległość między nimi wyrazi się przez

$$(27')\qquad E=\frac{(N-N')(R-R')-(M-M')(S-S')}{\sqrt{(MN'-M'N)^2+(M-M')^2+(N-N')^2}}.$$

34. Warunek, aby się dwie proste dane przecinały. Jeżeli dwie proste się przecinają, wówczas ich odległość najkrótsza jest równa 0. A zatym, jeżeli dwie proste (α) i (β), lub (α') i (β') (w artykule 33), przecinają się, wówczas

$$(29)\qquad (BC'-B'C)(a-a')+(CA'-C'A)(b-b')+(AB'-A'B)(c-c')=0,$$

lub odpowiednio

$$(29')\qquad \frac{M-M'}{R-R'}=\frac{N-N'}{S-S'}.$$

Ten warunek jest zarazem dostateczny. Do tego samego warunku można dojść bespośrednio, jak następuje.

Jeżeli proste (α) i (β) (art. 33) przecinają się, natenczas można przez obie poprowadzić jednę płaszczyznę

$$Lx + My + Nz + P = 0,$$

a zatym winno być (art. 31):

$$\begin{aligned} La &+ Mb + Nc + P = 0, \\ La' &+ Mb' + Nc' + P = 0, \\ LA &+ MB + NC = 0, \\ LA' &+ MB' + NC' = 0. \end{aligned}$$

Odejmując od siebie dwa piérwsze równania, mamy

$$L(a-a') + M(b-b') + N(c-c') = 0,$$

gdy tymczasem z dwu ostatnich wypada

$$\frac{L}{BC'-B'C} = \frac{M}{CA'-C'A} = \frac{N}{AB'-A'B}.$$

Rugując L, M, N z przedostatniego równania zapomocą dwu ostatnich równań, otrzymamy równanie warunkowe (29).

35. Spółrzędne linii prostéj. Równania linii prostéj, uważanéj jako promień, można zawsze sprowadzić do postaci (art. 26)

(1) $$y = mx + r, \quad z = nx + s,$$

a równania prostéj, uważanéj jako oś, do postaci

(2) $$v = \mu u + \rho, \quad w = \nu u + \sigma.$$

Położenie zatym téj prostéj zależy od wartości spółczynników m, n, r, s, do których można dodać $t = ms - nr$, lub odpowiednio od wartości spółczynników μ, ν, ρ, σ, do których można dodać $\tau = \mu\sigma - \nu\rho$. W artykule 27 wskazaliśmy, jak, mając wartości tych spółczynników, można wyznaczyć położenie prostéj. Te spółczynniki można zatym uważać za spółrzędne linii prostéj.

Mamy więc dwa układy spółrzędnych linii prostéj: spółrzędne m, n, r, s, $t = ms - nr$ linii prostéj, uważanéj jako promień, i spółrzędne μ, ν, ρ, σ, $\tau = \mu\sigma - \nu\rho$ linii prostéj, uważanéj jako oś.

Zamiast tych dwu układów po pięć spółrzędnych linii prostéj, z których jedna wyraża się przez cztéry pozostałe, można dla symetryi wziąć inne dwa układy po sześć spółrzędnych. Niech (x', y', z'), (x'', y'', z'') będą spółrzędnymi dwu punktów na prostéj (1); mamy wtedy:

$$\begin{aligned} y' &= mx' + r, \quad y'' = mx'' + r, \quad y' - y'' = m(x' - x''), \\ z' &= nx' + s, \quad z'' = nx'' + r, \quad z' - z'' = n(x' - x''). \end{aligned}$$

Z tych równań wypada

$$(30)\quad \begin{cases} m=\dfrac{y'-y''}{x'-x''}, \quad n=\dfrac{z'-z''}{x'-x''}, \quad r=\dfrac{x'y''-x''y'}{x'-x''}, \\ s=-\dfrac{z'x''-z''x'}{x'-x''}, \quad t=\dfrac{y'z''-y''z'}{x'-x''}. \end{cases}$$

Otóż za spółrzędne linii prostéj, uważanéj jako promień, można wziąć sześć wyrażeń

$$(31)\qquad x'-x'',\ y'-y'',\ z'-z'',\ y'z''-y''z',\ z'x''-z''x',\ x'y''-x''y',$$

pomiędzy którymi zachodzi tożsamościowy związek

$$(32)\ (x'-x'')(y'z''-y''z')+(y'-y'')(z'x''-z''x')+(z'-z'')(x'y''-x''y')\equiv 0.$$

Podobnie, niech (u', v', w'), (u'', v'', w'') będą spółrzędnymi dwu płaszczyzn, przechodzących przez prostą (6); mamy wtedy

$$\begin{aligned} v' &=\mu u'+\rho, & v'' &=\mu u''+\rho, & v'-v'' &=\mu(u'-u''), \\ w' &=\nu u'+\sigma, & w'' &=\nu u''+\sigma, & w'-w'' &=\nu(u'-u''). \end{aligned}$$

Z tych równań wypada

$$(33)\quad \begin{cases} \mu=\dfrac{v'-v''}{u'-u''}, \quad \nu=\dfrac{w'-w''}{u'-u''}, \quad \rho=\dfrac{u'v''-u''v'}{u'-u''}, \\ \sigma=-\dfrac{w'u''-w''u'}{u'-u''} \text{ i } \tau=\dfrac{v'w''-v''w'}{u'-u''}. \end{cases}$$

Otóż znowu za spółrzędne linii prostéj, uważanéj jako oś, można wziąć sześć wyrażeń

$$(34)\qquad u'-u'',\ v'-v'',\ w'-w'',\ v'w''-v''w',\ w'u''-w''u',\ u'v''-u''v',$$

pomiędzy którymi zachodzi tożsamościowy związek

$$(35)\ (u'-u'')(v'w''-v''w')+(v'-v'')(w'u''-w''u')+(w'-w'')(u'v''-u''v')\equiv 0.$$

Spółrzędne (31) lub (34) zowią się spółrzędnymi jednorodnymi linii prostéj, uważanéj jako promień, lub odpowiednio jako oś. Z wyrażeń (30) i (33) czytamy, że równanie algiebraiczne między spółrzędnymi zwyczajnymi m, n, r, s, t, lub $\mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$, jeżeli nie jest jednorodne, po wprowadzeniu tych nowych spółrzędnych stanie się jednorodnym.

36. Związek między dwoma układami spółrzędnych linii prostéj. Między dwoma układami spółrzędnych linii prostéj zachodzi związek uwagi godny. Niech $(x', y' z')$ i (x'', y'', z'') będą spółrzędnymi dwu punktów na prostéj, a (u', v', w') i (u'', v'', w'') spółrzędnymi dwu płaszczyzn, przechodzących przez tę samę prostą; mamy wtedy równania:

$$\begin{aligned} u'x'+v'y'+w'z'+1&=0, \\ u''x'+v''y'+w''z'+1&=0, \\ u'x''+v'y''+w'z''+1&=0, \\ u''x''+v''y''+w''z''+1&=0. \end{aligned}$$

Odejmując równanie drugie od piérwszego i czwarte od trzeciego, otrzymujemy

$$(u'-u'')x'+(v'-v'')y'+(w'-w'')z'=0,$$
$$(u'-u'')x''+(v'-v'')y''+(w'-w'')z''=0;$$

stąd zaś wypada

$$(\alpha)\qquad u'-u'':v'-v'':w'-w''=y'z''-y''z':z'x''-z''x':x'y''-x''y'.$$

Taksamo, odejmując równanie trzecie od piérwszego i czwarte od drugiego, otrzymujemy

$$(x'-x'')u'+(y'-y'')v'+(z'-z'')w'=0,$$
$$(x'-x'')u''+(y'-y'')v''+(z'-z'')w''=0,$$

skąd znowu wypada:

$$(\beta)\qquad x'-x'':y'-y'':z'-z''=v'w''-v''w':w'u''-w''u':u'v''-u''v'.$$

Nareszcie, jeżeli wyrugujemy x' z piérwszego i drugiego z owych równań, a x'' z trzeciego i czwartego, otrzymamy dwa równania

$$(u'v''-u''v')y'-(w'u''-w''u')z'+(u'-u'')=0,$$
$$(u'v''-u''v')y''-(w'u''-w''u')z''+(u'-u'')=0,$$

które, po wyrugowaniu z nich $u'v''-u''v'$, dają

$$(w'u''-w''u')(y'z''-y''z')=(u'-u'')(y'-y''),$$

czyli

$$(\gamma)\qquad y'-y'':y'z''-y''z'=w'u''-w''u':u'-u''.$$

Kładąc następnie, dla skrócenia,

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{14}=x'-x'',\ p_{24}=y'-y'',\ p_{34}=z'-z'',\ p_{23}=y'z''-y''z', \\ \qquad\qquad p_{31}=z'x''-z''x',\ p_{12}=x'y''-x''y', \\ \pi_{14}=u'-u'',\ \pi_{24}=v'-v'',\ \pi_{34}=w'-w'',\ \pi_{23}=v'w''-v''w', \\ \qquad\qquad \pi_{31}=w'u''-w''u',\ \pi_{12}=u'v''-u''v', \end{array}\right.$$

mieć będziemy, wskutek (α), (β) i (γ),

$$(37)\qquad p_{14}:p_{24}:p_{34}:p_{23}:p_{31}:p_{12}=\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{34}.$$

Jest to właśnie ów ważny związek, który zachodzi między dwoma układami spółrzędnych linii prostéj: p_{ij} i π_{ij}.

Wskutek tego związku, można w równaniu jednorodnym między spółrzędnymi linii prostéj, podstawić za spółrzędne jednego układu spółrzędne drugiego, a mianowicie, jeżeli $ijkl$ oznacza jednę z przemian 1423, 2431, 3412, 2314, 3124, 1234, należy wtedy za każde p_{ij} podstawić π_{kl}, lub odwrotnie, za każde π_{ij} spółrzędną p_{kl}. Związki tożsamościowe (32) i (35) można, używając znakowania teraz wprowadzonego, tak napisać:

$$(38)\qquad p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}=0,$$
$$(39)\qquad \pi_{14}\pi_{23}+\pi_{24}\pi_{31}+\pi_{34}\pi_{12}=0.$$

37. Moment dwu linij prostych. Najkrótszą odległość między dwiema prostymi

$$(1)\qquad \frac{x-x'_1}{l_1}=\frac{y-y'_1}{m_1}=\frac{z-z'_1}{n_1}\quad \text{i}\quad \frac{x-x'_2}{l_2}=\frac{y-y'_2}{m_2}=\frac{z-z'_2}{n_2},$$

w których (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2), są dostawami kierunkowymi prostych, wyraża się (art. 33) przez

$$\mathrm{E}\equiv\pm\frac{(x'_1-x'_2)(m_1n_2-m_2n_1)+(y'_1-y'_2)(n_1l_2-n_2l_1)+(z'_1-z'_2)(l_1m_2-l_2m_1)}{[(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1]^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mianownik po drugiéj stronie przedstawia wstawę kąta θ, zawartego między kierunkami obu prostych. Mnożąc zatym ten wzór przez $\sin\theta$, mieć będziemy

$$\pm\mathrm{E}\sin\theta=(x'_1-x'_2)(m_1n_2-m_2n_1)+(y'_1-y'_2)(n_1l_2-n_2l_1)+(z'_1-z'_2)(l_1m_2-l_2m_1),$$

lub, pisząc stronę prawą w postaci wyznacznika,

$$(2)\quad \pm\mathrm{E}\sin\theta=\begin{vmatrix} x'_1-x'_2, & l_1, & l_2\\ y'_1-y'_2, & m_1, & m_2\\ z'_1-z'_2, & n_1, & n_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x'_1, & l_1, & l_2\\ y'_1, & m_1, & m_2\\ z'_1, & n_1, & n_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x'_2, & l_1, & l_2\\ y'_2, & m_1, & m_2\\ z'_2, & n_1, & n_2\end{vmatrix}$$

$$=l_2(n_1y'_1-m_1z'_1)+m_2(l_1z'_1-n_1x'_1)+n_2(m_1x'_1-l_1y'_1)$$
$$+l_1(n_2y'_2-m_2z'_2)+m_1(l_2z'_2-n_2x'_2)+n_1(m_2x'_2-l_2y'_2).$$

Niech (x''_1, y''_1, z''_1) i (x''_2, y''_2, z''_2) będą dwoma innymi punktami, z których piérwszy leży na piérwszéj, a drugi na drugiéj z prostych (1), i oznaczmy przez r_1 i r_2 odległości między punktami (x'_1, y'_1, z'_1) i (x''_1, y''_1, z''_1), (x'_2, y'_2, z'_2) i (x''_2, y''_2, z''_2); natenczas

$$l_1=\frac{x'_1-x''_1}{r_1},\ m_1=\frac{y'_1-y''_1}{r_1},\ n_1=\frac{z'_1-z''_1}{r_1},\ l_2=\frac{x'_2-x''_2}{r_2},\ m_2=\frac{y'_2-y''_2}{r_2},\ n_2=\frac{z'_2-z''_2}{r_2}.$$

Wstawiwszy te wartości w wyrażenie (2), otrzymamy, po pomnożeniu obu stron przez r_1r_2,

$$\pm r_1r_2\mathrm{E}\sin\theta=(x'_1-x''_1)(y'_2z''_2-y''_2z'_2)+(y'_1-y''_1)(z'_2x''_2-z''_2x'_2)+$$
$$+(z'_1-z''_1)(x'_2y''_2-x''_2y'_2)$$
$$+(x'_2-x''_2)(y'_1z''_1-y_1''z'_1)+(y'_2-y''_2)(z'_1x''_1-z''_1x'_1)+$$
$$+(z'_2-z''_2)(x'_1y''_1-x''_1y'_1),$$

lub, oznaczywszy spółrzędne dwu prostych (1), uważanych jako promienie, odpowiednio przez $p'_{14}, p'_{24}, p'_{34}, p'_{23}, p'_{31}, p'_{12}$ i $p''_{14}, p''_{24}, p''_{34}, p''_{23}, p''_{31}, p''_{12}$,

$$(3)\quad \pm r_1r_2\mathrm{E}\sin\theta=p'_{14}p''_{23}+p'_{24}p''_{31}+p'_{34}p''_{12}+p''_{14}p'_{23}+p''_{24}p'_{31}+p''_{34}p'_{12}.$$

Wyrażenie $\mathrm{E}\sin\theta$ nazwał Cayley m o m e n t e m dwu prostych.

Jeżeli $\mathrm{E}=0$, lub $\theta=0$, to mamy

$$(4)\qquad p'_{14}p''_{23}+p'_{24}p''_{31}+p'_{34}p''_{12}+p''_{14}p'_{23}+p''_{24}p'_{31}+p''_{34}p'_{12}=0,$$

jako warunek konieczny, aby dwie proste się przecinały. Ten sam warunek można otrzymać bespośrednio, jeżeli w równaniu

$$\begin{vmatrix} x'_1, & y'_1, & z'_1, & 1 \\ x''_1, & y''_1, & z''_1, & 1 \\ x'_2, & y'_2, & z'_2, & 1 \\ x''_2, & y''_2, & z''_2, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

które wyraża, że cztéry punkty (x'_1), (x''_1), (x'_2) i (x''_2) leżą na jednéj płaszczyźnie, stronę lewą uporządkujemy zapomocą znanego twierdzenia Vandermonde'a podług elementów dwu piérwszych wiérszy, t. j. jeżeli wyznacznik stopnia 4-go rozłożymy na sumę sześciu iloczynów po dwa wyznaczniki stopnia 2-go, utworzone odpowiednio z dwu piérwszych i dwu ostatnich wierszy.

38. Skupienia linij prostych. Zastanowić się nam jeszcze wypada nad znaczeniem jednego, dwu, trzech i cztérech równań między spółrzędnymi linii prostéj.

Załóżmy naprzód, że między sześciu spółrzędnymi p_{ij} zachodzi jedno równanie algiebraiczne i jednorodne stopnia n-go,

$$(\alpha) \qquad F_n(p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) = 0.$$

Ponieważ między tymi samymi spółrzędnymi zachodzi związek tożsamościowy

$$(\beta) \qquad p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} + p_{34}p_{12} \equiv 0,$$

więc dwa równania (α) i (β) posłużą nam do wyznaczenia dwu ze stosunków

$$\frac{p_{24}}{p_{14}}, \frac{p_{34}}{p_{14}}, \frac{p_{23}}{p_{14}}, \frac{p_{31}}{p_{14}}, \frac{p_{12}}{p_{14}},$$

gdy na trzy pozostałe nadamy wartości dowolne. A że od wartości tych stosunków zależy położenie prostéj (art. 27), przeto tym sposobem wyznaczymy prostą. Równanie (α) przedstawia zatym potrójnie nieoznaczony układ prostych, który nazwiemy zespoleniem (Complex) linii prostych (promieni) rzędu n-go. — Jeżeli w równaniu (α) spółrzędne p_{ij} zastąpimy spółrzędnymi do nich proporcyjonalnymi π_{kl}, to otrzymamy równanie potrójnie nieoznaczonego układu prostych, który znowu nazwiemy zespoleniem linij prostych (osi) klasy n-éj.

Jeżeli w równaniu $F_n(p_{ij}) = 0$ jeden z punktów, wyznaczających każdy promień, np. (x'', y'', z''), będziemy uważali jako stały, wówczas to równanie zamieni się na równanie powierzchni rzędu n-ego, któréj wszystkie punkty (x', y', z') leżą na prostych, wyprowadzonych z jednego punktu (x'', y'', z''); tę powierzchnią nazwiemy powierzchnią stożkową rzędu n-go. Podobnie, jeżeli w równaniu $F_n(\pi_{kl}) = 0$ jednę z płaszczyzn, wyznaczających każdą oś, np. (u'', v'', w''), będziemy uważali jako stałą, natenczas to równanie będzie przedstawiało tylko zespolenia takich prostych, które leżą na płaszczyźnie stałéj i obwodzą liniją krzywą płaską, którą nazwiemy liniją krzywą klasy n-éj. A zatym, *w zespoleniu prostych rzędu n-go proste, które wychodzą z jednego punktu, tworzą powierzchnią stożkową rzędu n-go; w zespoleniu zaś prostych klasy n-éj proste, które leżą na jednéj płaszczyźnie, obwodzą liniją krzywą klasy n-éj.*

Weźmy teraz pod uwagę dwa równania jednorodne między spółrzędnymi prostéj

$$(\gamma) \qquad F_n = 0 \quad \text{i} \quad F_m = 0,$$

z których piérwsze jest stopnia n-go, a drugie stopnia m-go. Te dwa równania, uważane pospołu, przedstawiają podwójnie nieoznaczony układ prostych, który nazwiemy zestawieniem (Congruenz) prostych. Zestawienie więc prostych, przedstawione przez dwa równania (γ), jest zbiorem prostych, które są spólne zespoleniom, przedstawionym przez każde z tych równań oddzielnie. Przez każdy punkt w przestrzeni przechodzi mn prostych takiego zestawienia (spólne tworzące stożków, mających ten punkt za spólny wiérzchołek); podobnie, w każdéj płaszczyźnie leży mn prostych takiego zestawienia (spólne styczne krzywych obu zespoleń w téj płaszczyźnie).

Trzy równania jednorodne między spółrzędnymi prostéj,

$$(\delta) \qquad F_n = 0, \quad F_m = 0, \quad F_l = 0,$$

stopnia n-go, m-go i l-go, przedstawiają pojedyńczą nieoznaczoność prostych, które tworzą powierzchnią prostolinijową (regulus).

Jeżeli do równań (δ) dołączymy równania linii prostéj we spółrzędnych punktu,

$$y = \frac{p_{24}}{p_{14}} x + \frac{p_{23}}{p_{14}}, \quad z = \frac{p_{34}}{p_{14}} x - \frac{p_{31}}{p_{14}}, \quad \text{przy} \quad p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} + p_{34}p_{12} = 0,$$

lub równania téjże prostéj we spółrzędnych płaszczyzny,

$$v = \frac{\pi_{24}}{\pi_{14}} u + \frac{\pi_{23}}{\pi_{14}}, \quad w = \frac{\pi_{34}}{\pi_{14}} u - \frac{\pi_{31}}{\pi_{14}}, \quad \text{przy} \quad \pi_{14}\pi_{23} + \pi_{24}\pi_{31} + \pi_{34}\pi_{12} = 0,$$

i z tych równań wyrugujemy spółrzędne linii prostéj, to według tego, czy do równań (δ) wchodzą spółrzędne p_{ij}, czyteż π_{kl}, otrzymamy równanie powierzchni prostolinijowéj odpowiednio we spółrzędnych punktu x, y, z, lub we spółrzędnych płaszczyzny u, v, w. Ponieważ z dołączonych równań dwa są stopnia 1-go, a jedno stopnia 2-go względem spółrzędnych linii prostéj, przeto wypadek rugowania będzie w obu razach jednakowego stopnia, mianowicie stopnia $2lmn$-go. A zatym: *powierzchnia prostolinijowa jest — mówiąc wogólności — jednakowego rzędu i klasy.*

Nakoniec cztéry równania między spółrzędnymi linij prostéj, stopnia n-go, m-go, l-go i k-go,

$$(\varepsilon) \qquad F_n = 0, \; F_m = 0, \; F_l = 0, \; F_k = 0,$$

w połączeniu ze związkiem tożsamościowym stopnia 2-go

$$p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} + p_{34}p_{12} = 0, \text{ lub odpowiednio } \pi_{14}\pi_{23} + \pi_{24}\pi_{31} + \pi_{34}\pi_{12} = 0,$$

wyznaczają w zupełności $2klmn$ prostych, które są wspólne cztérem zespoleniom, przedstawionym przez każde z równań (ε) oddzielnie.

ĆWICZENIA.

(28). Znaléść równania prostéj, przechodzącéj przez punkty (1, 2, 3) i (3, 2, 1).

(29). Znaléść równania prostéj, przechodzącéj przez punkt (1, 2, 3) i prostopadłéj do płaszczyzny $x + 2y + 3z = 6$.

(30). Znaléść równania prostéj, która przechodzi przez punkt (1, 2, 3) i jest równoległą do płaszczyzny $x + 2y + 3z = 6$ i do płaszczyzny XY.

(31). Znaléść warunki, aby w układzie spółrzędnych nieprostokątnych prosta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ była prostopadłą do płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$.

(32). Znaléść równania prostéj, wyprowadzonéj z początku prostopadle do danéj prostéj i czyniącéj kąt dany z drugą prostą daną. Okazać, że, jeżeli dane dwie proste są do siebie prostopadłe, a kąt dany jest 45^0, istnieją dwie takie proste, do siebie prostopadłe.

(33). Znaléść kąt między prostymi $x = y = z$ i $x + y + z = 3$, $3x + 4y + 5z = 12$.

(34). Znaléść najkrótszą odległość między przekątną sześcianu i krawędzią, nie przecinającą téj przekątnéj.

(35). Okazać, że, przez stosowny dobór osi, można równania jakichkolwiek dwu prostych przywiéść do postaci $y = mx$, $z = c$ i $y = -mx$, $z = -c$.

(36). Znaléść równanie płaszczyzny, w któréj leżą dwie przecinające się proste: $y = Mx + R$, $z = Nx + S$ i $y = M'x + R'$, $z = N'x + S'$.

(37). Znaléść równania prostéj, przechodzącéj przez punkty dane (b, c, a), (c, a, b), i okazać, że ona jest prostopadłą tak do prostéj, która przechodzi przez początek i przez środek odległości między danymi punktami, jakoteż do każdéj z dwu prostych

$$x = y = z, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

(38). Znaléść równania prostéj, która przechodzi przez początek i przecina pod kątem prostym prostą $(m+n)x + (n+l)y + (l+m)z = a$, $(m-n)x + (n-l)y + (l-m)z = a$, i znaléść spółrzędne punktu przecięcia się tych prostych.

(39). Okazać, że proste, określone równaniami $l(b-c)yz + m(c-a)zx + n(a-b)xy = 0$, i $lx + my + nz = 0$, przecinają się pod kątem prostym.

(40). ABC, A'B'C' są dwiema prostymi, BB' ich najkrótszą odległością, C i C' jakimikolwiek dwoma punktami na tych prostych, ale takimi, iż prosta C'A jest prostopadłą do ABC, a CA' do A'B'C'; okazać, że $AB . BC = A'B' . B'C'$.

(41). Znaléść równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez dwie proste

$$\frac{x-a}{a'} = \frac{y-b}{b'} = \frac{z-c}{c'} \quad \text{i} \quad \frac{x-a'}{a} = \frac{y-b'}{b} = \frac{z-c'}{c}.$$

(42). Okazać, że trzy płaszczyzny $lx+my+nz=0$, $(m+n)x+(n+l)y+$ $+(l+m)z=0$, $x+y+z=0$ przecinają się według prostéj $\frac{x}{m-n}=\frac{y}{n-l}=\frac{z}{l-m}$.

(43). Równania dwu prostych są $x=y+2a=6(z-a)$ i $x+a=2y=-12z$. Znaléść równania dwu płaszczyzn, z których każda przechodzi przez jednę prostą, a jest równoległą do drugiéj prostéj, a następnie okazać, że najkrótsza odległość danych prostych $=2a$.

(44). Okazać, że równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez prostą $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$ i równoległéj do prostéj $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1$, $y=0$, jest $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$, i że jeżeli $2d$ jest najkrótszą odległością między dwiema prostymi, to $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

(45). Równania $\frac{ax+c'y+b'z}{x}=\frac{c'x+by+a'z}{y}=\frac{b'x+a'y+cz}{z}$ przedstawiają wogólności trzy proste wzajemnie do siebie prostopadłe; lecz jeżeli $a-\frac{b'c'}{a'}=b-\frac{c'a'}{b'}=c-\frac{a'b'}{c'}$, to te równania przedstawiają płaszczyznę i prostą prostopadłą do téj płaszczyzny.

ROZDZIAŁ IV.

O SPÓŁRZĘDNYCH JEDNORODNYCH.

SPÓŁRZĘDNE CZWOROŚCIENNE PUNKTU I PŁASZCZYZNY NAJOGÓLNIEJSZE.

39. Aby równania figur gieometrycznych w przestrzeni uczynić jednorodnymi, zamiast spółrzędnych zwyczajnych punktu *(x, y, z)*, lub płaszczyzny *(u, v, w)*, wprowadzimy t. z. spółrzędne jednorodne.

Połóżmy

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=\varkappa x_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2&=\varkappa x_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3&=\varkappa x_3,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4&=\varkappa x_4,\end{aligned}\right.$$

rozumiejąc przez $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \ldots$ jakiekolwiek liczby stałe, których wyznacznik

$$(2)\qquad D \equiv \begin{vmatrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1\,, & d_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2\,, & d_2 \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3\,, & d_3 \\ a_4\,, & b_4\,, & c_4\,, & d_4 \end{vmatrix}$$

nie jest równy 0, a przez $\varkappa$ czynnik nieoznaczony. Natenczas każdemu układowi wartości na x, y, z widocznie będzie odpowiadał układ wartości dokładnie wyznaczonych na stosunki $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$; i nawzajem, każdemu danemu układowi wartości na x_1, x_2, x_3, x_4 będzie odpowiadał jedyny układ wartości na x, y, z. Albowiém, rozwiązując równania (1) względem x, y, z i $\varkappa$, otrzymujemy

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\\ y&=\frac{B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\\ z&=\frac{C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4x_4}{D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4},\end{aligned}\right.$$

gdzie A_1, B_1, C_1, D_1, A_2,... oznaczają ilości dołączone do elementów a_1, b_1, c_1, d_1, a_2,... wyznacznika (2).

Liczby zmienne x_1, x_2, x_3, x_4, tak określone, nazywamy **spółrzędnymi jednorodnymi punktu**.

Spółrzędnym jednorodnym punktu można nadać następujące znaczenie gieometryczne. Weźmy pod uwagę cztéry płaszczyzny, których równania są

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad x_4=0.$$

Ponieważ, z założenia, wyznacznik (2) równań (1) nie jest 0, więc te płaszczyzny zamykają czworościan, którego objętość jest od 0 różna. Niech odpowiednio $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ będą ścianami tego czworościanu, przedstawionymi przez powyższe cztéry równania. Przyjąwszy, że równania tych ścian są odniesione do układu prostokątnego, i oznaczywszy przez δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 odległości prostopadłe tych ścian od pewnego punktu P (x, y, z), mieć będziemy

$$x_1=\frac{\delta_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\varkappa},\quad x_2=\frac{\delta_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}{\varkappa},$$
$$x_3=\frac{\delta_3\sqrt{a_3^2+b_3^2+c_3^2}}{\varkappa},\quad x_4=\frac{\delta_4\sqrt{a_4^2+b_4^2+c_4^2}}{\varkappa}.$$

Gdy następnie przez θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 oznaczymy cztéry kąty, które z prostopadłymi do ścian $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, zwróconymi w stronę odpowiednich wiérzchołków przeciwległych A_1, A_2, A_3, A_4 czworościanu, czynią cztéry proste takie, że

$$\cos\theta_1=\frac{\varkappa}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \cos\theta_2=\frac{\varkappa}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$
$$\cos\theta_3=\frac{\varkappa}{\sqrt{a_3^2+b_3^2+c_3^2}},\quad \cos\theta_4=\frac{\varkappa}{\sqrt{a_4^2+b_4^2+c_4^2}},$$

to natenczas będzie:

$$(4)\qquad x_1=\delta_1\sec\theta_1,\quad x_2=\delta_2\sec\theta_2,\quad x_3=\delta_3\sec\theta_3,\quad x_4=\delta_4\sec\theta_4.$$

A zatym spółrzędne jednorodne (x_1, x_2, x_3, x_4) punktu można uważać jako odległości tego punktu od ścian czworościanu $A_1A_2A_3A_4$, wzięte w kierunkach prostych dowolnie obranych. Z tego powodu, spółrzędne jednorodne, określone równaniami (1), zowią się także **spółrzędnymi czworościennymi punktu**; sam zaś czworościan $A_1A_2A_3A_4$, którego ściany są przedstawione odpowiednio przez równania $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, zowie się **czworościanem odniesienia**.

Ściany czworościanu odniesienia, uważając je jako rosciągające się do nieskończoności, roskładają przestrzeń na 15 obszarów. W celu odróżnienia od siebie tych obszarów, ustanawiamy następujące prawidło: jeżeli $ijkl$ oznacza jednę z cztérech przemian 1234, 2341, 3412, 4123, to natenczas spółrzędną x_i punktu P będziemy uważali za dodatną lub za ujemną, według tego, czy punkt P i wiérzchołek A_i leżą z téj saméj strony, czytéż po przeciwnych stronach ściany przeciwległéj $A_j A_k A_l$.

40. Podstawmy w równaniu płaszczyzny

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \tag{5}$$

za x, y, z wartości (3). Znosząc mianownik i kładąc

$$\left\{\begin{aligned} A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 &= \lambda u_1, \\ A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 &= \lambda u_2, \\ A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 &= \lambda u_3, \\ A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 &= \lambda u_4, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

otrzymamy

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \tag{7}$$

jako równanie jednorodne płaszczyzny.

Spółczynniki u_1, u_2, u_3, u_4 w tym równaniu nazywamy s p ó ł r z ę d n y m i c z w o r o ś c i e n n y m i p ł a s z c z y z n y, mającéj u, v, w za spółrzędne Plücker'a. Z równań (6) można podobnie, jakeśmy to uczynili w przypadku analogicznym (I, art. 55), wywnioskować, że spółrzędne czworościenne płaszczyzny można uważać za odległości cztérech wiérzchołków czworościanu od téjże płaszczyzny, wzięte w pewnych kierunkach dowolnie obranych.

Rozwiązując równania (6) względem u, v, w i λ, otrzymujemy, przy uwzględnieniu własności wyznacznika systematu dołączonego,

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4}, \\ v &= \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4}, \\ w &= \frac{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Wstawiając zaś wartości (8) za u, v. w w równanie punktu

$$xu + yv + zw + 1 = 0, \tag{9}$$

znosząc mianownik i uwzględniając związki (1), mamy

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0, \tag{10}$$

jako równanie j e d n o r o d n e punktu.

41. Jeżeli w równaniach (1) założymy $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$; $b_2 = 1$, $c_2 = d_2 = a_2 = 0$; $c_3 = 1$, $d_3 = a_3 = b_3 = 0$; $d_4 = 1$, $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, wówczas mieć będziemy

$$x = \varkappa x_1, \quad y = \varkappa x_2, \quad z = \varkappa x_3, \quad 1 = \varkappa x_4,$$

skąd

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{11}$$

Tak określone spółrzędne czworościenne (x_1, x_2, x_3, x_4) punktu zowią się spółrzędnymi jednorodnymi szczególnymi punktu. Ścianami czworościanu odniesienia są tu płaszczyzny spółrzędnych YZ$(x=0)$, ZX$(y=0)$, XY$(z=0)$ i płaszczyzna w nieskończoności $(1=0)$.

Przy tych samych założeniach, równania (6) przywodzą się do następujących:

$$u=\lambda u_1,\quad v=\lambda u_2,\quad w=\lambda u_3,\quad 1=\lambda u_4,$$

z których

$$(12)\qquad u=\frac{u_1}{u_4},\quad v=\frac{u_2}{u_4},\quad w=\frac{u_3}{u_4}.$$

Tak określone spółrzędne czworościenne (u_1, u_2, u_3, u_4) płaszczyzny zowią się spółrzędnymi jednorodnymi szczególnymi płaszczyzny.

Zapomocą wzorów (11) i (12) można przejść od spółrzędnych zwyczajnych punktu lub płaszczyzny do spółrzędnych jednorodnych szczególnych. Nawzajem, chcąc od tych ostatnich wrócić do piérwszych, dość w odpowiednich równaniach postawić $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ i $x_4=1$, lub odpowiednio $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$ i $u_4=1$.

SPÓŁRZĘDNE CZWOROŚCIENNE PROSTOPADŁE PUNKTU I PŁASZCZYZNY.

42. Na osobliwą uwagę zasługują spółrzędne czworościenne prostopadłe punktu i płaszczyzny, przez które rozumiemy odpowiednio odległości prostopadłe punktu od ścian czworościanu i odległości prostopadłe wiérzchołków czworościanu od płaszczyzny. Zajmiemy się naprzód spółrzędnymi punktu.

Między spółrzędnymi czworościennymi punktu zachodzi jeden związek, zapomocą którego, mając dane trzy z tych spółrzędnych, można wyznaczyć wartość czwartéj. Wyprowadzimy ten związek, biorąc pod uwagę tylko spółrzędne czworościenne prostopadłe, t. j. przyjmując, że x_1, x_2, x_3, x_4 oznaczają długości prostopadłych, spuszczonych z punktu P na ściany czworościanu odniesienia.

Aby wynaléść ten związek, określimy uprzednio, co należy rozumiéć przez objętość czworościanu dodatną i ujemną. Jeżeli wiérzchołki czworościanu oznaczymy przez A_1, A_2, A_3, A_4, a przez $ijkl$ będziemy rozumieli jedno z cztérech podstawień kołowych, dokonanych na układzie elementów (wskaźników) 1, 2, 3, 4, t. j. jednę z przemian 1234, 2341, 3412 i 4123, natenczas obieg ściany $A_jA_kA_l$, wskazany następstwem wskaźników j, k, l, a widziany z wiérzchołka przeciwległego A_i, może być albo dodatny albo też ujemny. W piérwszym razie będziemy uważali objętość czworościanu jako dodatną, a w drugim jako ujemną.

Załóżmy teraz, że objętość czworościanu odniesienia $A_1A_2A_3A_4$ jest dodatna i równa $+V$ i przez punkt P i każdą krawędź tego czworościanu poprowadźmy płaszczyznę. Wskutek tego, otrzymamy cztéry czworościany składowe:

$$(\alpha) \qquad PA_2A_3A_4,\ PA_3A_4A_1,\ PA_4A_1A_2 \text{ i } PA_1A_2A_3.$$

Jeżeli punkt P leży wewnątrz czworościanu odniesienia, to objętość każdego z czworościanów (α) będzie dodatną, a suma tych objętości będzie widocznie równa $+V$.

Jeżeli punkt P leży wewnątrz obszaru, ograniczonego jedną ścianą $A_jA_kA_l$ i przedłużeniami trzech ścian pozostałych czworościanu odniesienia, wówczas z czworościanów (α) jeden $PA_jA_kA_l$ będzie miał objętość ujemną, a objętości trzech pozostałych będą dodatne; atoli suma algiebraiczna objętości wszystkich cztérech będzie równa $+V$.

Jeżeli punkt P leży w obszarze przyległym jednéj krawędzi A_iA_j, a ograniczonym przedłużeniami ścian czworościanu, wówczas dwa z czworościanów (α) $PA_jA_kA_l$ i $PA_kA_lA_i$ będą dodatne, a pozostałe dwa $PA_iA_jA_k$ i $PA_lA_iA_j$ będą ujemne; wszakże i teraz suma algiebraiczna wszystkich cztérech będzie równa $+V$.

Jeżeli nakoniec punkt P leży wewnątrz kąta bryłowego, wiérzchołkiem przeciwległego jednemu kątowi bryłowemu, np. A_i, czworościanu odniesienia, wtedy z cztérech czworościanów (α) jeden $PA_jA_kA_l$ będzie dodatny, a trzy pozostałe $PA_kA_lA_i$, $PA_lA_iA_j$, $PA_iA_jA_k$ będą ujemne; jednak i w tym razie suma algiebraiczna wszystkich cztérech będzie równa $+V$.

A zatym, gdziekolwiek w przestrzeni leży punkt P, mamy zawsze

$$(\beta) \qquad PA_2A_3A_4 + PA_3A_4A_1 + PA_4A_1A_2 + PA_1A_2A_3 = A_1A_2A_3A_4.$$

Oznaczmy przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ pola dodatne ścian $A_1A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ i $A_1A_2A_3$, a przez x_1, x_2, x_3, x_4 spółrzędne czworościenne prostopadłe punktu P, wtedy, co do wielkości i znaku,

$$PA_jA_kA_l = \frac{1}{3}x_i\alpha_i, \text{ przy } i = 1, 2, 3, 4.$$

Wstawiwszy zaś te wartości w (β), otrzymamy związek żądany

$$(1) \qquad \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 = 3V.$$

Oznaczając przez h_1, h_2, h_3, h_4 długości prostopadłych z wiérzchołków A_1, A_2, A_3, A_4 na przeciwległe ściany i zważając, że

$$\alpha_1h_1 = \alpha_2h_2 = \alpha_3h_3 = \alpha_4h_4 = 3V,$$

można zamiast (1) napisać:

$$(2) \qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Zapomocą związku (1) lub (2) można każde niejednorodne równanie algiebraiczne między x_1, x_2, x_3, x_4 uczynić jednorodnym. Tak np., równanie $x_1 = a$ można zastąpić przez następujące

$$3V x_1 = a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4),$$

lub
$$x_1 = a\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4}\right).$$

43. Te ze spółrzędnych czworościennych płaszczyzny, które leżą z téj samej jéj strony, uważać będziemy, jako mające jednakowe znaki. Spółrzędne czworościenne prostopadłe, którymi tylko, jako najprostszymi, się zajmiemy, t. j. odległości prostopadłe wiérzchołków czworościanu odniesienia od płaszczyzny, oznaczymy przez u_1, u_2, u_3, u_4.

Niech

$$(3) \qquad \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 0$$

będzie równaniem danéj płaszczyzny. Aby znaléść spółrzędne czworościenne płaszczyzny (3), należy przedewszystkim wyznaczyć odległość prostopadłą jakiegokolwiek punktu od téjże płaszczyzny. W tym celu oznaczmy przez x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 spółrzędne czworościenne, a przez x', y', z' spółrzędne prostokątne punktu danego względem układu osi, których początek leży w środku czworościanu odniesienia. Oznaczmy następnie przez $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ i $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ kąty, które prostopadłe do ścian czworościanu odniesienia, przeciwległych wiérzchołkom A_1, A_2, A_3 i A_4, czynią z osiami x, y, z, a przez p_1, p_2, p_3, p_4 długości prostopadłych, spuszczonych z początku na też ściany. Wtedy miéć będziemy

$$(4) \qquad x_i = -(x\cos\alpha_i + y\cos\beta_i + z\cos\gamma_i - p_i), \text{ przy } i = 1, 2, 3, 4,$$

tudzież

$$(5) \qquad x'_i = -(x'\cos\alpha_i + y'\cos\beta_i + z'\cos\gamma_i - p_i), \text{ przy } i = 1, 2, 3, 4.$$

Wstawiwszy w (3) za x_i wartości (4), otrzymamy równanie danéj płaszczyzny we spółrzędnych prostokątnych punktu,

$$(\varkappa_1\cos\alpha_1 + \varkappa_2\cos\alpha_2 + \varkappa_3\cos\alpha_3 + \varkappa_4\cos\alpha_4)x + (\varkappa_1\cos\beta_1 + \varkappa_2\cos\beta_2 + \varkappa_3\cos\beta_3 + \varkappa_4\cos\gamma_4)y$$
$$+ (\varkappa_1\cos\gamma_1 + \varkappa_2\cos\gamma_2 + \varkappa_3\cos\gamma_3 + \varkappa_4\cos\gamma_4)z - (\varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2 + \varkappa_3 p_3 + \varkappa_4 p_4) = 0.$$

Jak wiemy (art. 18), odległość prostopadła punktu danego od téj płaszczyzny jest

$$\delta = \frac{(\varkappa_1\cos\alpha_1 + \ldots)x' + (\varkappa_1\cos\beta_1 + \ldots)y' + (\varkappa_1\cos\gamma_1 + \ldots)z' - (\varkappa_1 p_1 + \ldots)}{[(\varkappa_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (\varkappa_1\cos\beta_1 + \ldots)^2 + (\varkappa_1\cos\gamma_1 + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

lub, według związków (5),

$$\delta = \frac{\varkappa_1 x'_1 + \varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3 + \varkappa_4 x'_4}{[(\varkappa_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (\varkappa_1\cos\beta_1 + \ldots)^2 + (\varkappa_1\cos\gamma_1 + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

A gdy nakoniec w mianowniku wykonamy wskazane podnoszenie do kwadratu, zważając przytym, że $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$, i, dla skrócenia, kładąc

$$\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \cos\beta_i\cos\beta_j + \cos\gamma_i\cos\gamma_j = \cos\theta_{ij},$$

mieć będziemy

$$(6)\qquad \delta = \frac{\varkappa_1 x'_1 + \varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3 + \varkappa_4 x'_4}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]},$$

gdzie symbol

$$(7)\qquad [\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]^2 \equiv \varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2 + \varkappa_3{}^2 + \varkappa_4{}^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2\cos\theta_{12} + 2\varkappa_1\varkappa_3\cos\theta_{13} + \\ + 2\varkappa_1\varkappa_4\cos\theta_{14} + 2\varkappa_2\varkappa_3\cos\theta_{23} + 2\varkappa_2\varkappa_4\cos\theta_{24} + 2\varkappa_3\varkappa_4\cos\theta_{34},$$

a kąt θ_{ij} jest spełnieniem kąta dwuściennego czworościanu odniesienia, przeciwległego krawędzi A_iA_j. Wstawiwszy wwyrażenie (6) za x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 spółrzędne wierzchołków czworościanu odniesienia A_1, A_2, A_3, A_4, t. j. $(h_1, 0, 0, 0)$, $(0, h_2, 0, 0)$, $(0, 0, h_3, 0)$ i $(0, 0, 0, h_4)$, otrzymamy wartości spółrzędnych czworościennych płaszczyzny (3):

$$(8)\qquad \frac{u_1}{\varkappa_1 h_1} = \frac{u_2}{\varkappa_2 h_2} = \frac{u_3}{\varkappa_3 h_3} = \frac{u_4}{\varkappa_4 h_4} = \frac{1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]}.$$

Stąd wypada

$$\frac{1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]} = \frac{\frac{u_1}{h_1}}{\varkappa_1} = \frac{\frac{u_2}{h_2}}{\varkappa_2} = \frac{\frac{u_3}{h_3}}{\varkappa_3} = \frac{\frac{u_4}{h_4}}{\varkappa_4} = \frac{\left[\frac{u_1}{h_1}, \frac{u_2}{h_2}, \frac{u_3}{h_3}, \frac{u_4}{h_4}\right]}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]},$$

t. j.

$$\left[\frac{u_1}{h_1}, \frac{u_2}{h_2}, \frac{u_3}{h_3}, \frac{u_4}{h_4}\right] = 1,$$

czyli

$$(9)\qquad \frac{u_1{}^2}{h_1{}^2} + \frac{u_2{}^2}{h_2{}^2} + \frac{u_3{}^2}{h_3{}^2} + \frac{u_4{}^2}{h_4{}^2} + 2\frac{u_1u_2}{h_1h_2}\cos\theta_{12} + 2\frac{u_1u_3}{h_1h_3}\cos\theta_{13} + 2\frac{u_1u_4}{h_1h_4}\cos\theta_{14} + \\ + 2\frac{u_2u_3}{h_2h_3}\cos\theta_{23} + 2\frac{u_2u_4}{h_2h_4}\cos\theta_{24} + 2\frac{u_3u_4}{h_3h_4}\cos\theta_{34} = 1.$$

Jest to związek między spółrzędnymi czworościennymi płaszczyzny, zapomocą którego, mając dane trzy z nich, można wyznaczyć wartość czwartéj.

Wstawiwszy w (9)

$$h_1 = \frac{3V}{\alpha_1},\quad h_2 = \frac{3V}{\alpha_2},\quad h_3 = \frac{3V}{\alpha_3},\quad h_4 = \frac{3V}{\alpha_4},$$

gdzie $V, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mają znaczenie określone w art. 42, otrzymamy inną postać związku między spółrzędnymi u_1, u_2, u_3, u_4, mianowicie:

$$(9')\qquad \alpha_1{}^2u_1{}^2 + \alpha_2{}^2u_2{}^2 + \alpha_3{}^2u_3{}^2 + \alpha_4{}^2u_4{}^2 + 2\alpha_1\alpha_2u_1u_2\cos\theta_{12} + 2\alpha_1\alpha_3u_1u_3\cos\theta_{13} + \\ + 2\alpha_1\alpha_4u_1u_4\cos\theta_{14} + 2\alpha_2\alpha_3u_2u_3\cos\theta_{23} + 2\alpha_2\alpha_4u_2u_4\cos\theta_{24} + 2\alpha_3\alpha_4u_3u_4\cos\theta_{34} = 9V^2.$$

44. Podstawmy w równaniu płaszczyzny (3) za $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ wartości, wynikające ze związków (8); mieć będziemy wówczas równanie

$$(10)\qquad \frac{u_1x_1}{h_1} + \frac{u_2x_2}{h_2} + \frac{u_3x_3}{h_3} + \frac{u_4x_4}{h_4} = 0,$$

które wyraża związek między spółrzędnymi czworościennymi płaszczyzny i spółrzędnymi czworościennymi punktu na téj płaszczyźnie. A zatym, jeżeli w tym równaniu będziemy uważali spółrzędne płaszczyzny (u_1, u_2, u_3, u_4) jako dane, a spółrzędne punktu (x_1, x_2, x_3, x_4) jako zmienne, natenczas będzie ono równaniem płaszczyzny o spółrzędnych (u_1, u_2, u_3, u_4), uważanéj jako zbiór punktów na niéj leżących. Jeżeli przeciwnie, będziemy uważali spółrzędne punktu jako dane, a spółrzędne płaszczyzny jako zmienne, wówczas to równanie (10) będzie przedstawiało punkt (x_1, x_2, x_3, x_4), uważany jako obwiednia płaszczyzn, przezeń przechodzących.

Wskutek tego, równanie

$$(11) \qquad \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 0$$

przedstawia płaszczyznę, któréj spółrzędne są

$$(8) \qquad \frac{\frac{u_1}{h_1}}{\varkappa_1} = \frac{\frac{u_2}{h_2}}{\varkappa_2} = \frac{\frac{u_3}{h_3}}{\varkappa_3} = \frac{\frac{u_4}{h_4}}{\varkappa_4} = \frac{1}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4]},$$

gdy tymczasem równanie

$$(12) \qquad \varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 + \varkappa_4 u_4 = 0$$

przedstawia punkt, którego spółrzędne są

$$(13) \qquad \frac{\frac{x_1}{h_1}}{\varkappa_1} = \frac{\frac{x_2}{h_2}}{\varkappa_2} = \frac{\frac{x_3}{h_3}}{\varkappa_3} = \frac{\frac{x_4}{h_4}}{\varkappa_4} = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4}.$$

Jeżeli płaszczyzna (11) oddala się do nieskończoności, wówczas jéj spółrzędne u_1, u_2, u_3, u_4 dążą do wartości równych sobie. Wzory (8) dają wtedy

$$\varkappa_1 h_1 = \varkappa_2 h_2 = \varkappa_3 h_3 = \varkappa_4 h_4,$$

a zatym równanie

$$(14) \qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 0;$$

lub

$$(14') \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

przedstawia płaszczyznę w nieskończoności. Taksamo punkt (12) znajdzie się w nieskończoności, gdy

$$(15) \qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = 0,$$

albowiém wtedy wzory (13) dadzą $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \infty$. Równanie (10) nazwiemy równaniem **normalnym** płaszczyzny (u_1, u_2, u_3, u_4), lub punktu (x_1, x_2, x_3, x_4). Strona lewa tego równania wyraża odległość prostopadłą punktu (x_1, x_2, x_3, x_4) od płaszczyzny (u_1, u_2, u_3, u_4). Jakoż, jeżeli w wyrażenie (6) wstawimy za $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ wartości wynikające z (8), wówczas wypadnie

(16) $$\delta = \frac{u_1 x'_1}{h_1} + \frac{u_2 x'_2}{h_2} + \frac{u_3 x'_3}{h_3} + \frac{u_4 x'_4}{h_4}.$$

Jeżeli weźmiemy za spółrzędne czworościenne punktu, zamiast odległości prostopadłych punktu od ścian czworościanu, stosunki tych odległości do prostopadłych na te ściany z wiérzchołków przeciwległych, t. j. stosunki $\frac{x_1}{h_1}, \frac{x_2}{h_2}, \frac{x_3}{h_3}, \frac{x_4}{h_4}$, a te nowe spółrzędne oznaczymy także przez x_1, x_2, x_3, x_4, wówczas równanie normalne płaszczyzny lub punktu (10) przywiedzie się do

(17) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

t. j. będzie takież samo, jak równanie płaszczyzny lub punktu we spółrzędnych jednorodnych najogólniéjszych (art. 40). Związek między tymi spółrzędnymi jednorodnymi jest następujący:

(18) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

45. Wyznaczymy kąt θ między dwiema płaszczyznami

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 0 \quad \text{i} \quad \varkappa'_1 x_1 + \varkappa'_2 x_2 + \varkappa'_3 x_3 + \varkappa'_4 x_4 = 0,$$

gdy do równań tych płaszczyzn wprowadzimy spółrzędne prostokątne, a następnie postąpimy tak, jak w art. 19. Znajdziemy, że

$$\cos\theta = \frac{\varkappa_1\varkappa'_1 + \varkappa_2\varkappa'_2 + \varkappa_3\varkappa'_3 + \varkappa_4\varkappa'_4 + (\varkappa_1\varkappa'_2 + \varkappa'_1\varkappa_2)\cos\theta_{12} + \ldots}{[\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4][\varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3, \varkappa'_4]}.$$

Jeżeli dwie dane płaszczyzny są do siebie prostopadłe, wówczas mamy

$$\varkappa_1\varkappa'_1 + \varkappa_2\varkappa'_2 + \varkappa_3\varkappa'_3 + \varkappa_4\varkappa'_4 + (\varkappa_1\varkappa'_2 + \varkappa'_1\varkappa_2)\cos\theta_{12} + \ldots + (\varkappa_3\varkappa_4' + \varkappa'_3\varkappa_4)\cos\theta_{34} = 0.$$

Jeżeli dwie dane płaszczyzny są do siebie równoległe, wówczas w wyrażeniu powyższym na $\cos\theta$ licznik równy jest mianownikowi.

Znajdziemy jeszcze ten sam warunek równoległości dwu płaszczyzn, ale już uproszczony, w taki sposób. Dwie dane płaszczyzny, jako równoległe, przecinają się z sobą według prostéj, leżącéj na płaszczyźnie w nieskończoności, któréj równanie jest

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0.$$

Z równań tych trzech płaszczyzn wypada

$$(\varkappa_1\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_1) x_1 + (\varkappa_2\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_2) x_2 + (\varkappa_3\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_3) x_3 = 0,$$
$$(\varkappa'_1\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_1) x_1 + (\varkappa'_2\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_2) x_2 + (\varkappa'_3\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_3) x_3 = 0.$$

Tym równaniom powinno czynić zadość nieskończenie wiele układów wartości na stosunki $x_1 : x_2 : x_3$, t. j. równania te są tożsamościowe, a więc

$$\frac{\varkappa_1\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_1}{\varkappa'_1\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_1} = \frac{\varkappa_2\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_2}{\varkappa'_2\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_2} = \frac{\varkappa_3\alpha_4 - \varkappa_4\alpha_3}{\varkappa'_3\alpha_4 - \varkappa'_4\alpha_3},$$

co właśnie przedstawia warunki równoległości dwu danych płaszczyzn, w postaci najprostszéj.

46. Aby znaléść odległości ρ między dwoma danymi punktami (x_1, x_2, x_3, x_4) i (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), dość zauważyć, że kwadrat téj odległości jest stopnia 2-go i jednorodny względem $x_1 - x'_1$, $x_2 - x'_2$, $x_3 - x_3'$, $x_4 - x'_4$. Atoli zważywszy, że

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1 = \frac{x'_1}{h_1} + \frac{x'_2}{h_2} + \frac{x'_3}{h_3} + \frac{x_4'}{h_4},$$

mamy

$$\frac{x_1 - x'_1}{h_1} + \frac{x_2 - x'_2}{h_2} + \frac{x_3 - x'_3}{h_3} + \frac{x_4 - x'_4}{h_4} = 0,$$

skąd $\frac{(x_1 - x'_1)^2}{h_1^2} = -\left(\frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{h_1 h_2} + \frac{(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)}{h_1 h_3} + \frac{(x_1 - x'_1)(x_4 - x'_4)}{h_1 h_4}\right)$;

podobne wyrażenie otrzymamy dla $\frac{(x_2 - x'_2)^2}{h_2^2}$ i t. d. A zatym kwadrat odległości między dwoma punktami można wyrazić jako sumę sześciu iloczynów $\frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{h_1 h_2}, \ldots$, pomnożonych przez pewne czynniki.

Oznaczając przez a_{12} spółczynnik przy $\frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{h_1 h_2}$, zastosujmy powyższe wyrażenie do wynalezienia odległości między wiérzchołkami A_1 i A_2 czworościanu odniesienia. Spółrzędne tych wiérzchołków są odpowiednio $(h_1, 0, 0, 0)$ i $(0, h_2, 0, 0)$; zatym wszystkie wyrazy, prócz piérwszego, przywiodą się do 0, a wyraz piérwszy $= -a_{12}$. A zatym $A_1A_2^2 = -a_{12}$. Stąd wypada

$$-\rho^2 = A_1A_2^2 \frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{h_1 h_2} + A_1A_3^2 \frac{(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)}{h_1 h_3} + \\ + \ldots + A_3A_4^2 \frac{(x_3 - x'_3)(x_4 - x'_4)}{h_3 h_4},$$

lub, oznaczywszy przez ρ_{ik} długość krawędzi A_iA_k czworościanu odniesienia,

$$-\rho^2 = \rho_{12}^2 \frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{h_1 h_2} + \rho_{13}^2 \frac{(x_1 - x'_1)(x_3 - x'_3)}{h_1 h_3} + \\ + \ldots + \rho_{34}^2 \frac{(x_3 - x'_3)(x_4 - x'_4)}{h_3 h_4}.$$

47. Jeżeli (a_1, a_2, a_3, a_4) są spółrzędnymi punktu danego na prostéj, a (x_1, x_2, x_3, x_4) spółrzędnymi punktu bieżącego téjże prostéj, to oznaczywszy przez ρ odległość między tymi dwoma punktami, a przez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dostawy kątów, które prosta czyni z normalnymi do ścian czworościanu odniesienia, przeciwległych odpowiednim wierzchołkom A_1, A_2, A_3, A_4, otrzymamy, jako równania prostéj,

$$\frac{x_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - a_3}{\lambda_3} = \frac{x_4 - a_4}{\lambda_4} (= \rho).$$

Ponieważ dwa równania są wystarczające do wyznaczenia prostéj, przeto między $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ zachodzi pewien związek, który otrzymamy, gdy w równaniu $\frac{x_1-a_1}{h_1}+\frac{x_2-a_2}{h_2}+\frac{x_3-a_3}{h_3}+\frac{x_4-a_4}{h_4}=0$ podstawimy wartości za $x_1-a_1, \ldots,$ wynikające z równań linii prostéj. Mamy zatym

$$\frac{\lambda_1}{h_1}+\frac{\lambda_2}{h_2}+\frac{\lambda_3}{h_3}+\frac{\lambda_4}{h_4}=0.$$

Inny związek, ale nie jednorodny, wypada z otrzymanago powyżéj (art. 46) wyrażenia na ρ^2, t. j.

$$\rho_{12}{}^2\frac{\lambda_1\lambda_2}{h_1h_2}+\rho_{13}{}^2\frac{\lambda_1\lambda_3}{h_1h_3}+\ldots+\rho_{34}{}^2\frac{\lambda_3\lambda_4}{h_3\lambda_4}=-1.$$

W tych równaniach liczby $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ zowiemy dostawami kierunkowymi linii prostéj.

48. Aby znaléść kąt między dwiema prostymi

$$\frac{x_1-a_1}{\lambda_1}=\frac{x_2-a_2}{\lambda_2}=\frac{x_3-a_3}{\lambda_3}=\frac{x_4-a_4}{\lambda_4} \text{ i } \frac{x_1-a'_1}{\lambda'_1}=\frac{x_2-a'_2}{\lambda'_2}=\frac{x_3-a'_3}{\lambda'_3}=\frac{x_4-a'_4}{\lambda'_4},$$

weźmy dwie proste do nich równoległe, które przechodzą przez wiérzchołek A_1 i spotykają ścianę przeciwległą $A_2A_3A_4$ w punktach P i P'. Równania tych dwu prostych są odpowiednio

$$\frac{x_1-h_1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{\lambda_2}=\frac{x_3}{\lambda_3}=\frac{x_4}{\lambda_4} \text{ i } \frac{x_1-h_1}{\lambda'_1}=\frac{x_2}{\lambda'_2}=\frac{x_3}{\lambda'_3}=\frac{x_4}{\lambda'_4};$$

a zatym spółrzędne punktów P i P' są

$$\left(0, -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}h_1, -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}h_1, -\frac{\lambda_4}{\lambda_1}h_1\right) \text{ i } \left(0, -\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}h_1, -\frac{\lambda'_3}{\lambda'_1}h_1, -\frac{\lambda'_4}{\lambda'_1}h_1\right).$$

Według art. 46, mamy teraz

$$-PP'^2=h_1{}^2\left[\rho_{23}{}^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}\right)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_3}{\lambda'_1}\right)+\rho_{24}{}^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_4}{\lambda'_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\rho_{34}{}^2\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_3}{\lambda'_1}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_4}{\lambda'_1}\right)\right],$$

a nadto

$$-PP'^2=-[A_1P^2+A_1P'^2-2A_1P\,.\,A_1P'\cos(PA_1P')].$$

Porównywając prawe strony tych równań i uwzględniając, że

$$-A_1P^2=h_1{}^2\left[\rho_{12}{}^2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\rho_{13}{}^2\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\rho_{14}{}^2\frac{\lambda_4}{\lambda_1}+\rho_{23}{}^2\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1{}^2}+\rho_{24}{}^2\frac{\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1{}^2}+\rho_{34}{}^2\frac{\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1{}^2}\right],$$

$$-A_1P'^2=h_1{}^2\left[\rho_{12}{}^2\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}+\rho_{13}{}^2\frac{\lambda'_3}{\lambda'_1}+\rho_{14}{}^2\frac{\lambda'_4}{\lambda'_1}+\rho_{23}{}^2\frac{\lambda'_2\lambda'_3}{\lambda'_1{}^2}+\rho_{24}{}^2\frac{\lambda'_2\lambda'_4}{\lambda'_1{}^2}+\rho_{34}{}^2\frac{\lambda'_3\lambda'_4}{\lambda'_1{}^2}\right],$$

otrzymujemy

$$-2\sigma\sigma'\cos PA_1P' = \rho_{12}^2(\lambda_1\lambda'_2+\lambda'_1\lambda_2)+\rho_{13}^2(\lambda_1\lambda'_3+\lambda'_1\lambda_3)+\ldots+\rho_{34}^2(\lambda_3\lambda'_4+\lambda'_3\lambda_4),$$

gdzie

$$-\sigma^2=\rho_{12}^2\lambda_1\lambda_2+\rho_{13}^2\lambda_1\lambda_3+\ldots+\rho_{34}^2\lambda_3\lambda_4 \text{ i } -\sigma'^2=\rho_{12}^2\lambda'_1\lambda'_2+\rho_{13}^2\lambda'_1\lambda'_3+\ldots+\rho_{34}^2\lambda'_3\lambda'_4.$$

Dwie więc proste są do siebie prostopadłe, gdy

$$\rho_{12}^2(\lambda_1\lambda'_2+\lambda'_1\lambda_2)+\rho_{13}^2(\lambda_1\lambda'_3+\lambda'_1\lambda_3)+\ldots+\rho_{34}^2(\lambda_3\lambda'_4+\lambda'_3\lambda_4)=0.$$

Jako zaś warunek równoległości obu prostych, wypada $\frac{\lambda_1}{\lambda'_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda'_2}=\frac{\lambda_3}{\lambda'_3}=\frac{\lambda_4}{\lambda'_4}$.

49. Znajdźmy jeszcze dostawy kierunkowe normalnéj do płaszczyzny danéj. Niech

$$\frac{u_1x_1}{h_1}+\frac{u_2x_2}{h_2}+\frac{u_3x_3}{h_3}+\frac{u_4x_4}{h_4}=0$$

będzie równaniem normalnym danéj płaszczyzny. Równania prostopadłéj, spuszczonéj z wiérzchołka A_1 na ścianę przeciwległą $A_2A_3A_4$, są

$$\frac{x_1-h_1}{1}=\frac{x_2}{\cos\theta_{12}}=\frac{x_3}{\cos\theta_{13}}=\frac{x_4}{\cos\theta_{14}}=\rho;$$

a zatym dla punktu, w którym ta prosta przecina daną płaszczyznę, mamy

$$u_1+\left(\frac{u_1}{h_1}+\frac{u_2}{h_2}\cos\theta_{12}+\frac{u_3}{h_3}\cos\theta_{13}+\frac{u_4}{h_4}\cos\theta_{14}\right)\rho=0,$$

a nadto, jeżeli przez ε_1 oznaczymy kąt między normalną do danéj płaszczyzny i normalną do ściany $A_2A_3A_4$,

$$u_1=\pm\rho\cos\varepsilon_1.$$

Stąd wypada

$$\pm\cos\varepsilon_1=\frac{u_1}{h_1}+\frac{u_2}{h_2}\cos\theta_{12}+\frac{u_3}{h_3}\cos\theta_{13}+\frac{u_4}{h_4}\cos\theta_{14},$$

oraz wyrażenie analogiczne dla $\cos\varepsilon_2$, $\cos\varepsilon_3$, $\cos\varepsilon_4$.

SPÓŁRZĘDNE CZWOROŚCIENNE LINII PROSTÉJ.

50. Można uważać liniją prostą w przestrzeni albo jako promień, albo jako oś. W piérwszym razie jest ona wyznaczona, gdy dane są dwa punkty *(x')* i *(x'')*, na niéj leżące, a w drugim, gdy dane są dwie płaszczyzny *(u')* i *(u'')*, przez nią przechodzące.

Przez spółrzędne czworościenne linii prostéj, uważanéj jako promień łączący dwa punkty *(x')* i *(x'')*, rozumiéć będziemy spółrzędne cztérech płaszczyzn, przechodzących przez tę prostą i przez każdy z wiérzchołków A_1, A_2, A_3, A_4 czworościanu odniesienia. Przez spółrzędne czworościenne linii prostéj, uważanéj jako oś wyznaczoną przez dwie płaszczyzny *(u')* i *(u'')*, będziemy rozumieli spółrzędne cztérech punktów, w których ta prosta spotyka każdą ze ścian czworościanu odniesienia. Spółrzędne więc prostéj, wyznaczonéj przez dwa punkty, których spółrzędne czworościenne (najogólniéjsze jako równania czterech punktów, w których prosta, wyznaczona przez dwie płaszczyzny (u') i (u''), spotyka ściany czworościanu odniesienia, przeciwległe odpowiednio wierzchołkom A_1, A_2, A_3, A_4. Spółrzędnymi więc linii prostéj, wyznaczonéj przez dwie płaszczyzny, są liczby π_{kl}, t. j. sześć liczb

(6) $$\pi_{14},\ \pi_{24},\ \pi_{34},\ \pi_{23},\ \pi_{31} \text{ i } \pi_{12}.$$

51. Ponieważ każdy z punktów (5) leży na każdéj z płaszczyzn (2), przeto równaniom (2) stanie się zadość, gdy w nich za x_1, x_2, x_3, x_4 podstawimy spółrzędne punktów (6), t. j.

$$(0, \pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}),\ (\pi_{34}, 0, \pi_{41}, \pi_{13}),\ (\pi_{24}, \pi_{41}, 0, \pi_{12}) \text{ lub } (\pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{12}, 0).$$

Wykonawszy te podstawienia, otrzymamy cztery układy równań:

$$\begin{aligned}
p_{34}\pi_{34}+p_{42}\pi_{42}+p_{23}\pi_{23}&=0, & p_{42}\pi_{41}+p_{23}\pi_{13}&=0,\\
p_{41}\pi_{42}+p_{13}\pi_{23}&=0, & p_{34}\pi_{34}+p_{41}\pi_{41}+p_{13}\pi_{13}&=0,\\
p_{41}\pi_{34}+p_{12}\pi_{23}&=0, & p_{24}\pi_{34}+p_{12}\pi_{13}&=0,\\
p_{31}\pi_{34}+p_{12}\pi_{42}&=0; & p_{23}\pi_{34}+p_{12}\pi_{41}&=0;\\
p_{34}\pi_{41}+p_{23}\pi_{12}&=0, & p_{34}\pi_{31}+p_{42}\pi_{12}&=0,\\
p_{34}\pi_{24}+p_{13}\pi_{12}&=0, & p_{34}\pi_{23}+p_{41}\pi_{12}&=0,\\
p_{24}\pi_{24}+p_{41}\pi_{41}+p_{12}\pi_{12}&=0, & p_{24}\pi_{23}+p_{41}\pi_{31}&=0,\\
p_{23}\pi_{24}+p_{31}\pi_{41}&=0; & p_{23}\pi_{23}+p_{31}\pi_{31}+p_{12}\pi_{12}&=0.
\end{aligned}$$

Mamy tu 16 równań; 12 z nich jest dwumiennych, z których wypada, że

(7) $$p_{14}:p_{24}:p_{34}:p_{23}:p_{31}:p_{12}=\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{34};$$

cztery zaś pozostałe równania trójmienne, wskutek zależności (7), doprowadzają nas do dwu związków:

(8) $$p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}=0 \text{ i}$$

(9) $$\pi_{14}\pi_{23}+\pi_{24}\pi_{31}+\pi_{34}\pi_{12}=0.$$

ĆWICZENIA.

(46). Znaleść równania płaszczyzn, przechodzących przez krawędź A_1A_2 i dzielących na części równe kąty między płaszczyznami $A_1A_2A_3$ i $A_4A_1A_2$.

(47). Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez wierzchołek A_1 i równoległéj do ściany $A_2A_3A_4$.

(48). Okazać, że równanie płaszczyzny, która przechodzi przez A_3A_4, a jest równoległą do A_1A_2, jest $\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}=0$, lub $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0$.

(49). Okazać, że równania prostéj, łączącéj pierwsze punkty podziału krawędzi A_1A_2 i A_3A_4 na trzy części równe, są $\alpha_1x_1=2\alpha_2x_2$ i $\alpha_3x_3=2\alpha_4x_4$.

lub szczególne) są (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) i $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$, są spółczynnikami równań cztérech płaszczyzn, przechodzących przez tę prostą i przez wiérzchołki czworościanu odniesienia, gdy tymczasem spółrzędne prostéj, wyznaczonéj przez dwie płaszczyzny (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) i $(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4)$, są spółczynnikami równań cztérech punktów, w których ta prosta spotyka ściany czworościanu odniesienia.

Ponieważ za spółrzędne czworościenne wiérzchołka A_1 można wziąć $(\varkappa_1, 0, 0, 0)$, zatym równanie płaszczyzny, przechodzącéj przez ten wiérzchołek i przez prostą, łączącą dwa punkty (x') i (x''), jest następujące:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \varkappa_1, & 0, & 0, & 0 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3, & x'_4 \\ x''_1, & x''_2, & x''_3, & x''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli ten wyznacznik uporządkujemy według elementów piérwszego wiérsza i, dla skrócenia, oznaczymy

(1) $$p_{ij} = x'_i x''_j - x''_i x'_j = -p_{ji},$$

to otrzymamy piérwsze z równań

(2) $$\begin{cases} p_{34}x_2 + p_{42}x_3 + p_{23}x_4 = 0, \\ p_{34}x_1 + p_{41}x_3 + p_{13}x_4 = 0, \\ p_{24}x_1 + p_{41}x_2 + p_{12}x_4 = 0, \\ p_{23}x_1 + p_{31}x_2 + p_{12}x_3 = 0. \end{cases}$$

Trzy zaś ostatnie równania, przedstawiające płaszczyzny, które przechodzą przez uważaną prostą i przez odpowiedni z trzech pozostałych wiérzchołków A_2, A_3, A_4, wypadają, wskutek zastąpienia w powyższym wyznaczniku wiérsza drugiego odpowiednio przez $0, \varkappa_2, 0, 0$; $0, 0, \varkappa_3, 0$ i $0, 0, 0, \varkappa_4$. Za spółrzędne więc linii prostéj, wyznaczonéj przez dwa punkty, weźmiemy liczby p_{ij}, określone wzorem (1), t. j. sześć liczb

(3) $$p_{14},\ p_{24},\ p_{34},\ p_{23},\ p_{31} \text{ i } p_{12}.$$

Jeżeli te liczby (albo tylko stosunki między nimi) są dane, wtedy dane są również płaszczyzny (2), a więc tymsamym i prosta, przez przecięcie się tych płaszczyzn wyznaczona.

Podobnie, kładąc

(4) $$\pi_{kl} = u'_k u''_l - u''_k u'_l = -\pi_{lk},$$

znajdujemy

(5) $$\begin{cases} \pi_{34}u_2 + \pi_{42}u_3 + \pi_{23}u_4 = 0, \\ \pi_{34}u_1 + \pi_{41}u_3 + \pi_{13}u_4 = 0, \\ \pi_{24}u_1 + \pi_{41}u_2 + \pi_{12}u_4 = 0, \\ \pi_{23}u_1 + \pi_{31}u_2 + \pi_{12}u_3 = 0, \end{cases}$$

(50). Okazać, że spółrzędne środka ciężkości trójkąta odniesienia są $\frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} = \frac{x_3}{h_3} = \frac{x_4}{h_4}$.

(51). Płaszczyzna przecina każdą z sześciu krawędzi czworościanu; na każdéj z tych krawędzi weźmy jeszcze drugi punkt tak, aby ta krawędź była podzielona harmonicznie; okazać, że sześć płaszczyzn, z których każda przechodzi przez inny z sześciu ostatnich punktów i przez przeciwległą jemu krawędź czworościanu, przecina się w jednym punkcie.

(52). Jeżeli $\frac{x_1}{h_1 l_1} = \frac{x_2}{h_2 l_2} = \frac{x_3}{h_3 l_3} = \frac{x_4}{h_4 l_4}$ są równaniami punktu O, i jeżeli A_1O, A_2O, A_3O, A_4O przedłużymy odpowiednio do A'_1, A'_2, A'_2, A'_4 tak, aby $A_1O = OA'_1, \ldots$, to natenczas mieć będziemy dla punktu A'_1

$$\frac{2x_1}{h_1(l_1 - l_2 - l_3 - l_4)} = \frac{x_2}{h_2 l_2} = \frac{x_3}{h_3 l_3} = \frac{x_4}{h_4 l_4} = \frac{2}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}$$

i podobnie dla A'_2, A'_3, A'_4.

(53). Okazać, że jeżeli dwie krawędzi przeciwległe czworościanu podzielimy na trzy części równe i odpowiednie punkty podziału połączymy dwiema prostymi, to prosta dwusieczna tych dwu prostych jest także dwusieczną dwu innych krawędzi przeciwległych.

(54). Krawędzi przeciwległe czworościanu odniesienia są do siebie prostopadłe; okazać, że proste, przedstawiające najkrótsze odległości między krawędziami przeciwległymi, przecinają się w punkcie $x_1(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{14}^2 - k) = x_2(\rho_{21}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{24}^2 - k) = \ldots$, gdzie k oznacza sumę kwadratów któréjkolwiek pary krawędzi przeciwległych.

(55). Okazać, że spółrzędne płaszczyzny, przechodzącéj przez środki ciężkości ścian $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, są: $-\frac{u_1}{2} = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{h_1}{3}$.

(56). Okazać, że równanie środka ciężkości powierzchni czworościanu jest $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$.

(57). Okazać, że równanie środków ośmiu kul, stycznych do ścian lub do przedłużeń ścian czworościanu odniesienia, jest $\alpha_1 u_1 \pm \alpha_2 u_2 \pm \alpha_3 u_3 \pm \alpha_4 u_4 = 0$.

(58). Przez jakikolwiek punkt P poprowadźmy proste A_1P, A_2P, A_3P, A_4P, które przecinają przeciwległe ściany odpowiednio w a_1, a_2, a_3, a_4; okazać, że proste A_1A_2 i a_1a_2 przetną się i że ten punkt przecięcia się ich, wraz z punktem przecięcia się prostych A_3a_4 i A_1A_2, podzieli harmonicznie krawędź A_1A_2. Nadto okazać, że proste, łączące A_4 z punktem przecięcia się prostych A_1A_2, a_1a_2 i A_1 z punktem przecięcia się prostych A_4A_2, a_4a_2, przetną się w punkcie na prostéj A_2a_3.

ROZDZIAŁ V.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH PUNKTU.

52. Zmiana początku spółrzędnych. Niech O'X', O'Y', O'Z' (fig. 75) będą dodatnymi kierunkami trzech osi nowego układu spółrzędnych, równoległych do kierunków dodatnych OX, OY, OZ danego układu spółrzędnych, i zwróconymi w tę samę stronę. Oznaczmy przez $a = \mathrm{OS}$, $b = \mathrm{SR}$, $c = \mathrm{RO'}$ spółrzędne początku nowych spółrzędnych względem układu pierwotnego, przez $x = \mathrm{ON}$, $y = \mathrm{NQ}$, $z = \mathrm{QP}$ spółrzędne punktu P także względem pierwotnego układu osi, a przez $x' = \mathrm{O'N'}$, $y' = \mathrm{N'Q'}$ $z' = \mathrm{Q'P}$ spółrzędne tegoż punktu P względem nowych osi. Ponieważ

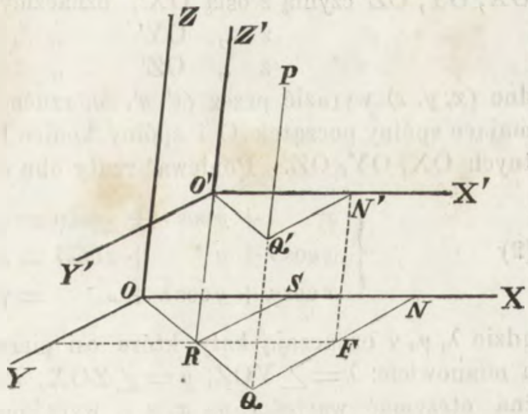


Fig. 75.

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OS} + \mathrm{SN} = \mathrm{OS} + \mathrm{RF} = \mathrm{OS} + \mathrm{O'N'},$$
$$\mathrm{NQ} = \mathrm{NF} + \mathrm{FQ} = \mathrm{SR} + \mathrm{N'Q'},$$
$$\mathrm{QP} = \mathrm{QQ'} + \mathrm{Q'P} = \mathrm{RO'} + \mathrm{Q'P},$$

zatym mamy

(1) $$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

53. Zmiana kierunków osi. Niech OX, OY, OZ (fig. 76) będą kierunkami dodatnymi osi układu pierwotnego, a OX', OY', OZ' kierunkami dodatnymi osi układu nowego, i niech dla punktu P będzie $x=$ON, $y=$NQ, $z=$QP; $x'=$ON$'$, $y'=$N$'$Q$'$, $z'=$Q$'$P. Dostawy kątów, które osi

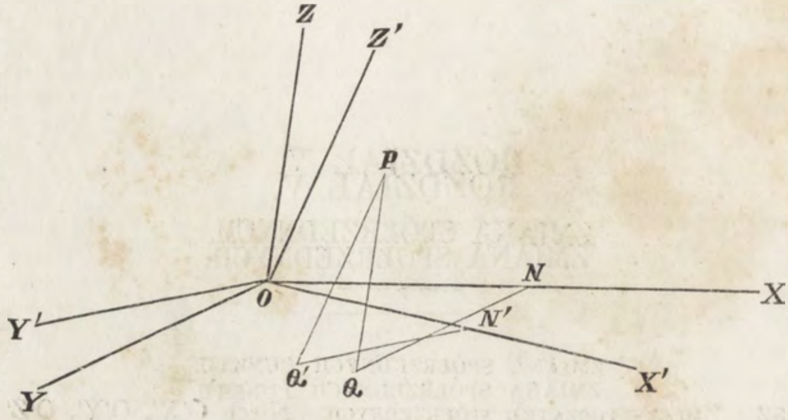


Fig. 76.

OX, OY, OZ czynią z osią OX$'$, oznaczmy przez $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
z „ OY$'$ „ „ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
z „ OZ$'$ „ „ $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Aby spółrzędne (x, y, z) wyrazić przez (x', y', z'), rzućmy dwie drogi ONQP i ON$'$Q$'$P, mające spólny początek O i spólny koniec P, pokolei na każdą z osi pierwotnych OX, OY, OZ. Ponieważ rzuty obu dróg są sobie równe, zatym:

$$(2)\qquad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{cases}$$

gdzie λ, μ, ν oznaczają kąty, które osi pierwotnego układu ze sobą czynią, a mianowicie: $\lambda = \angle$ YOZ, $\mu = \angle$ ZOX, $\nu = \angle$ XOY. Z równań (2) można otrzymać wartości na x, y, z, wyrażone przez x', y', z'. Te wyrażenia znajdziemy sposobem najprostszym w taki sposób.

Oznaczmy przez (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) stosunki kierunkowe odpowiednio osi OX$'$, OY$'$, OZ$'$; mamy wtedy (art. 6)

$$\alpha_1 = l_1 + m_1\cos\nu + n_1\cos\mu,\ \ \alpha_2 = l_2 + m_2\cos\nu + n_2\cos\mu,\ \ \alpha_3 = l_3 + m_3\cos\nu + n_3\cos\mu,$$
$$\beta_1 = l_1\cos\nu + m_1 + n_1\cos\lambda,\ \ \beta_2 = l_2\cos\nu + m_2 + n_2\cos\lambda,\ \ \beta_3 = l_3\cos\nu + m_3 + n_3\cos\lambda,$$
$$\gamma_1 = l_1\cos\mu + m_1\cos\lambda + n_1,\ \ \gamma_2 = l_2\cos\mu + m_2\cos\lambda + n_2,\ \ \gamma_3 = l_3\cos\mu + m_3\cos\lambda + n_3;$$

podstawiając te wartości w równania (2), otrzymujemy

$$x + y\cos\nu + z\cos\mu = (l_1x' + l_2y' + l_3z') + (m_1x' + m_2y' + m_3z')\cos\nu + (n_1x' + n_2y' + n_3z')\cos\mu,$$
$$x\cos\nu + y + z\cos\lambda = (l_1x' + l_2y' + l_3z')\cos\nu + (m_1x' + m_2y' + m_3z') + (n_1x' + n_2y' + n_3z')\cos\lambda,$$
$$x\cos\mu + y\cos\lambda + z = (l_1x' + l_2y' + l_3z')\cos\mu + (m_1x' + m_2y' + m_3z')\cos\lambda + (n_1x' + n_2y' + n_3z').$$

Wyznacznik spółczynników lewych stron tych równań jest od 0 różny; istnieje przeto tylko jeden układ wartości na x, y, z; tymi wartościami są więc, jak to bespośrednio widać,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'. \end{cases}$$

Między 9-u stosunkami kierunkowymi zachodzą trzy związki:

$$(4)\qquad \begin{cases} 1 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + 2m_1 n_1 \cos\lambda + 2n_1 l_1 \cos\mu + 2l_1 m_1 \cos\nu, \\ 1 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 + 2m_2 n_2 \cos\lambda + 2n_2 l_2 \cos\mu + 2l_2 m_2 \cos\nu, \\ 1 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 + 2m_3 n_3 \cos\lambda + 2n_3 l_3 \cos\mu + 2l_3 m_3 \cos\nu, \end{cases}$$

a nadto, jeżeli $\lambda' = \angle Y'OZ'$, $\mu' = \angle Z'OX'$, $\nu' = \angle X'OY'$ są kątami między kierunkami nowych osi, mamy

$$(5)\begin{cases} \cos\lambda' = l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 + (m_2 n_3 + m_3 n_2)\cos\lambda + (n_2 l_3 + n_3 l_2)\cos\mu + (l_2 m_3 + l_3 m_2)\cos\nu, \\ \cos\mu' = l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 + (m_3 n_1 + m_1 n_3)\cos\lambda + (n_3 l_1 + n_1 l_3)\cos\mu + (l_3 m_1 + l_1 m_3)\cos\nu, \\ \cos\nu' = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\cos\lambda + (n_1 l_2 + n_2 l_1)\cos\mu + (l_1 m_2 + l_2 m_1)\cos\nu. \end{cases}$$

Wyrażenia (3) spółrzędnych pierwotnych x, y, z są stopnia 1-go względem spółrzędnych nowych; stąd też stopień równania algiebraicznego między x, y, z nie zmieni się ze zmianą kierunków osi spółrzędnych.

Zauważmy jeszcze, że wskutek przekształcenia linijowego (3) wyrażenie kwadratowe

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$

przechodzi na $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\lambda' + 2z'x'\cos\mu' + 2x'y'\cos\nu.$

Oba bowiém wyrażenia przedstawiają kwadrat odległości punktu P od spólnego początku O.

54. Na szczególną uwagę zasługuje przypadek kiedy jeden z układów osi, albo oba są prostokątnymi.

Jeżeli tylko piérwszy układ jest prostokątny $\left(\lambda = \mu = \nu = \frac{\pi}{2}\right)$, wówczas równania (2) przywodzą się do

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{cases}$$

i między 9-u dostawami kierunkowymi nowych osi mamy teraz trzy związki

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{cases}$$

a nadto jest

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda' &= \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, \\ \cos\mu' &= \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, \\ \cos\nu' &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \right.$$

Wskutek zaś przekształcenia linijowego (6), przechodzi teraz wyrażenie kwadratowe

$$x^2 + y^2 + z^2$$

na
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\lambda + 2z'x'\cos\mu + 2x'y'\cos\nu.$$

Jeżeli także i drugi układ jest prostokątny $\left(\lambda' = \mu' = \nu' = \frac{\pi}{2}\right)$, wówczas utrzymują się wzory (6) i (7), lecz wzory (8) przejdą teraz na

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

W przypadku zatym, kiedy oba układy osi są prostokątnymi, zachodzi między 9-u dostawami kierunkowymi nowych osi 6 związków (7) i (9), zapomocą których z danych trzech z tych dostaw można wyznaczyć wartości pozostałych. W tym także przypadku, wskutek przekształcenia (6), przechodzi wyrażenie kwadratowe $x^2 + y^2 + z^2$ na $x'^2 + y'^2 + z'^2$. Przekształcenie zatym (6) jest w tym przypadku przekształceniem prostokątnym.

55. W przypadku, kiedy oba układy spółrzędnych są prostokątne, rzućmy (fig. 76) drogi ONQP i ON'Q'P na kierunki osi OX', OY', OZ'; wtedy

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &+ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \right.$$

Też same wyrażenia powinniśmy otrzymać z równań (6) przy założeniu, że między 9-u dostawami kierunkowymi α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 nowych osi, zachodzą związki (7) i (9). Rozwiązując równania (6) względem x', y', z', otrzymujemy

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta . x' &= A_1 x + B_2 y + C_1 z, \\ \Delta . y' &= A_2 x + B_2 y + C_2 z, \\ \Delta . z' &= A_3 x + B_3 y + C_3 z, \end{aligned} \right.$$

gdzie wyznacznik

$$(12) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

jest modułem przekształcenia (6), a A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 są ilościami dołączonymi do odpowiednich elementów wyznacznika Δ. Ponieważ — jak to zaraz zobaczymy — wyznacznik Δ jest od 0 różny, a przeto równania (6) mogą dać tylko jeden układ wartości na x', y', z', zatym rozwiązania (11) równań (6) nie mogą się różnić od wyrażeń (10). Mamy więc

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\Delta}, \quad \beta_i = \frac{B_i}{\Delta}, \quad \gamma_i = \frac{C_i}{\Delta}, \quad \text{przy } i=1, 2, 3. \tag{13}$$

Weźmy pod uwagę wyznacznik Δ. Mnożąc go przez siebie i uwzględniając związki (7) i (9), otrzymujemy

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, & \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{vmatrix},$$

t. j. $\Delta^2 = 1$, a więc $\Delta = \pm 1$; wyznacznik Δ jest zatym od 0 różny i nadto równy dodatnéj lub ujemnéj jedności.

Aby zbadać, kiedy wyznacznik Δ jest dodatny, a kiedy ujemny, dość poznać jego znaczenie gieometryczne. W artykule 7-ym okazaliśmy, że objętość czworościanu, którego jeden wiérzchołek leży w początku spółrzędnych prostokątnych, a trzy inne mają za spółrzędne (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), $(\xi_3, \eta_3 \zeta_3)$, jest, co do wartości i co do znaku,

$$\Pi = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \xi_1, \xi_2, \xi_3 \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3 \\ \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Ta wartość jest dodatną lub ujemną, według tego, czy obieg trójkąta $P_1P_2P_3$, wskazany następstwem jego wiérzchołków, a widziany z początku, jest dodatny, czytéż ujemny, a więc według tego, czy krawędź OP_1 tak leży względem krawędzi OP_2 i OP_3, jak OX względem OY i OZ, czytéż tak, jak kierunek ujemny osi x-ów względem OY i OZ. Otóż, w wyznaczniku Δ dostawy kierunkowe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ są zarazem spółrzędnymi punktów, które leżą na osiach nowych OX', OY', OZ' w odległości równéj 1 od początku. Wyznacznik Δ wyraża zatym sześciokrotną objętość czworościanu, którego trzy wiérzchołki leżą w tych punktach, a czwarty schodzi się razem z początkiem układu. Ten wyznacznik jest więc dodatny lub ujemny, według tego, czy, po obróceniu układu osi OX', OY', OZ' tak, aby oś OY' zeszła się razem z osią OY, a oś OZ' z osią OZ, trzecia oś OX' zejdzie się z dodatnym, czytéż z ujemnym kierunkiem dawnéj osi x-ów.

Załóżmy, że

$$\Delta = +1; \tag{14}$$

wtedy wyrażenia (13), przywodzą się do następujących:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1 = A_1 \equiv \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \\ \alpha_2 = A_2 \equiv \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \\ \alpha_3 = A_3 \equiv \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, & \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, & \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{array} \right. \tag{15}$$

Oprócz tych związków między 9-u dostawami kierunkowymi α_i, β_i, γ_i (przy $i=1, 2, 3$), zachodzą jeszcze następujące:

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1, \end{cases}$$

tudzież:

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0, \\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0, \\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0. \end{cases}$$

Piérwsze, t. j. (16), wyrażają związki między dostawami kierunkowymi odpowiednio osi OX, OY, OZ względem trzech osi OX′, OY′, OZ′, prostokątnych; a ostatnie wyrażają, iż układ osi OX, OY, OZ jest prostokątny.

Pomiędzy więc 9-u dostawami kierunkowymi osi jednego układu względem osi drugiego układu, przy założeniu, że oba te układy są prostokątne, zachodzi razem 22 związków, mianowicie (7), (9), (14), (15), (16) i (17); atoli tylko sześć z nich jest różnych od siebie, a wszystkie pozostałe są ich algiebraicznymi wynikami. Związki (14) i (15) wyprowadziliśmy z sześciu zasadniczych (7) i (9); moglibyśmy także z nich wprost wyprowadzić związki (16) i (17), wstawiając w (6) za x', y', z' wartości (10), wskutek czego równania (6) stają się tożsamościowymi.

56. Zmiana początku spółrzędnych i kierunków osi. Jeżeli chodzi o jednoczesną zmianę tak początku spółrzędnych, jak i kierunków osi, wtedy te dwie zmiany uskutecznia się jednę po drugiéj, zaczynając od któréjkolwiek z nich.

57. Wzory Euler'a. Wrazie, jeżeli oba układy spółrzędnych są prostokątne, wzory artykułu 54-go na zmianę spółrzędnych przedstawiają tę niedogodność, iż z 9-u kątów, w nie wchodzących, jest 6 zbytecznych; albowiém między dostawami tych 9-u kątów zachodzi sześć równań. Tę niedogodność usunął Euler, przez wprowadzenie tylko 3-ch kątów, wyznaczających położenie osi jednego układu spółrzędnych prostokątnych względem osi drugiego takiegoż układu. Niech OX, OY, OZ (fig. 77) będą kierunkami dodatnymi dawnych, a OX′, OY′, OZ′ kierunkami dodatnymi nowych osi. Niech następnie płaszczyzna X′Y′ przecina płaszczyznę XY w OX_1, a płaszczyzna, przechodząca przez OZ i OZ′, która więc jest prostopadłą do XY i X′Y′, niech przecina te dwie płaszczyzny odpowiednio według prostych OY i OY_2. Natenczas, z uwagi, że prosta OX_1 jest prostopadła do OZ i OZ′ a zatym i do OY_1 i OY_2, kąt $Y_1OY_2=ZOZ'$ jest kątem między płaszczyznami XY i X′Y′. Oznaczmy ten kąt przez θ, a kąty XOX_1 i X_1OX', z których piérwszy leży w płaszczyźnie XY, a drugi w płaszczyźnie X′Y′, oznaczmy odpowiednio przez φ i ψ.

Niech x, y, z będą spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu P względem osi OX, OY, OZ. Jeżeli przyjmiemy OX_1, OY_1 i OZ za nowe osi, to spółrzędna z nie zmieni się, gdy tymczasem między spółrzędnymi x i y i nowymi spółrzędnymi równoległymi do OX_1 i OY_1, które oznaczymy odpowiednio

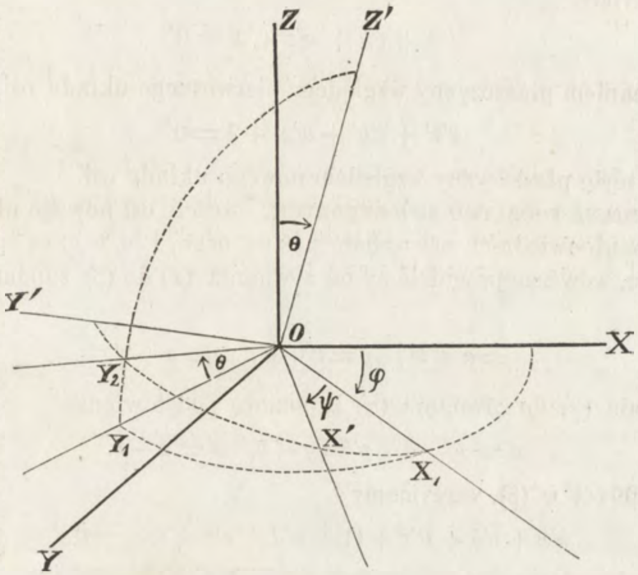


Fig. 77.

przez x_1 i y_1, będą miały miejsce, podług wzorów na zmianę spółrzędnych punktu na płaszczyźnie, związki

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Przyjmijmy następnie OX_1, OY_2 i OZ' za nowe osi, natenczas x_1 nie zmieni się, gdy tymczasem, jeżeli przez y_2 i z' oznaczymy nowe spółrzędne równoległe do OY_2 i OZ', będzie

$$y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta,$$
$$z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta.$$

Biorąc nakoniec OX', OY' i OZ' za nowe osi, skutkiem czego społrzędna z' nie zmieni się, mieć będziemy, jako wyrażenia nowych spółrzędnych x' i y', równoległe do OX' i OY',

$$x_1 = x' \cos\psi - y' \sin\psi,$$
$$y_2 = x' \sin\psi + y' \cos\psi.$$

Rugując zaś z tych 6-u równań liczby x_1, y_1, y_2, otrzymamy wzory Euler'a:

$$(18)\ \begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y = x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z = x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH PŁASZCZYZNY.

58. Niech

$$(\alpha) \qquad ux + vy + wz + 1 = 0$$

będzie równaniem płaszczyzny względem pierwotnego układu osi, a

$$(\beta) \qquad u'x' + v'y' + w'z' + 1 = 0$$

równaniem téjże płaszczyzny względem nowego układu osi.

a. Zmiana początku spółrzędnych. Jeżeli osi nowego układu są równoległe do odpowiednich osi układu pierwotnego, i (a, b, c) są spółrzędnymi ich początku, wówczas przejdziemy od równania (α) do (β) zapomocą podstawienia

$$(\gamma) \qquad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z',$$

a od równania (β) do równania (α) zapomocą podstawienia

$$(\delta) \qquad x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Podstawiając (δ) w (β), otrzymamy

$$u'x + v'y + w'z + (1 - u'a - v'b - w'c) = 0,$$

a przez porównanie tego równania z równaniem (α) mamy

$$(19) \qquad \frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} = \frac{1}{1 - au' - bv' - cw'}.$$

Podstawiając zaś (γ) w (α), a wypadek podstawienia,

$$ux' + vy' + wz' + (au + bv + cw + 1) = 0,$$

porównywając z równaniem (β), mamy

$$(20) \qquad \frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w} = \frac{1}{au + bv + cw + 1}.$$

Wzory (19) i (20) służą do przejścia od jednego do drugiego z układów spółrzędnych płaszczyzny, mających osi do siebie równoległe. Zauważmy, że skutkiem takiéj zmiany spółrzędnych płaszczyzny, stopień równania między tymi spółrzędnymi się nie zmienia.

b. Zmiana kierunków osi. Weźmiemy pod uwagę tylko dwa układy prostokątne. Aby przejść od równania (α) do równania (β), wykonamy przekształcenie (art. 54)

$$(\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x'_1 + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned} \right.$$

aby zaś przejść od równania (β) do równania (α), wykonamy przekształcenie (art. 55)

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Porównywając następnie wypadek ostatniego postępowania z równaniem (α), a wypadek poprzedniego z równaniem (β), otrzymamy:

$$(21) \qquad \begin{cases} u = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w', \\ v = \beta_1 u' + \beta_2 v' + \beta_3 w', \\ w = \gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_4 w', \end{cases}$$

i nawzajem

$$(22) \qquad \begin{cases} u' = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ w' = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w. \end{cases}$$

Stąd widoczna, że wzory służące do zmiany spółrzędnych płaszczyzny, są, w przypadku uważanym, takież same, jak wzory służące do przerobienia spółrzędnych punktu.

ZMIANA SPÓŁRZĘDNYCH LINII PROSTÉJ.

59. Widzieliśmy, że spółrzędne punktu i spółrzędne płaszczyzny ze zmianą osi w ten sposób się zmieniają, iż dawne spółrzędne są funkcyjami stopnia 1-go, czyli linijowymi spółrzędnych nowych, mającymi jako spółczynniki te liczby, które wyznaczają położenie nowych osi względem dawnych. Taksamo rzecz się ma ze spółrzędnymi linii prostéj, uważanéj czyto jako oś, czytéż jako promień.

Zacznijmy od spółrzędnych prostéj, uważanéj jako promień, przez które rozumiemy sześć liczb

$$(\alpha) \qquad \begin{gathered} p_{14} = x' - x'', \quad p_{24} = y' - y'', \quad p_{34} = z' - z'', \\ p_{23} = y'z'' - y''z', \quad p_{31} = z'x'' - z''x', \quad p_{12} = x'y'' - x''y', \end{gathered}$$

i przyjmijmy, że wskutek przejścia do nowego układu osi, te spółrzędne przechodzą na

$$(\beta) \qquad \begin{gathered} P_{14} = X' - X'', \quad P_{24} = Y' - Y'', \quad P_{34} = Z' - Z'', \\ P_{23} = Y'Z'' - Y''Z', \quad P_{31} = Z'X'' - Z''X', \quad P_{12} = X'Y'' - X''Y'. \end{gathered}$$

a. Zmiana początku spółrzędnych. Jeżeli tylko początek osi został przeniesiony do punktu (a, b, c), wówczas, z uwagi, że $x' = X' + a$, $y' = Y' + b$, $z' = Z' + c$; $x'' = X'' + a$, $y'' = Y'' + b$, $z'' = Z'' + c$, mieć będziemy

$$(23) \qquad P_{14} = p_{14}, \quad P_{24} = p_{24}, \quad P_{34} = p_{34},$$

gdy tymczasem

$$(24) \qquad \begin{cases} P_{23} = p_{23} + b p_{34} - c p_{24}, \\ P_{31} = p_{31} - a p_{34} + c p_{14}, \\ P_{12} = p_{12} + a p_{24} - b p_{14}, \end{cases}$$

skąd nawzajem

$$(25)\qquad \begin{cases} p_{23} = P_{23} - bP_{34} + cP_{24}, \\ p_{31} = P_{31} + aP_{34} - cP_{14}, \\ p_{12} = P_{12} - aP_{24} + bP_{14}. \end{cases}$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę spółrzędne niejednorodne linii prostéj m, n, r, s, $t = ms - nr$, i odpowiadające tymże nowe spółrzędne oznaczymy przez M, N, R, S, T, wówczas z równań ostatnich otrzymamy (art. 5 i 36)

$$(26)\qquad \begin{cases} m = M, \\ n = N, \\ r = R + b \quad - aM, \\ s = S + c \quad - aN, \\ t = T + cM - bN. \end{cases}$$

b. Zmiana kierunków osi. Załóżmy, że nowe osi mają ten sam początek, lecz różne kierunki. Ograniczymy się do układów prostokątnych.

Weźmiemy najprzód pod uwagę spółrzędne niejednorodne m, n, r, s, t linii prostéj. Jeżeli M, N, R, S, T są nowymi spółrzędnymi téj saméj linii prostéj, natenczas, w równaniach linii prostéj, odniesionych do pierwotnego układu,

$$(\gamma)\qquad y = mx + r, \quad z = nx + s,$$

za x, y, z podstawiając

$$(\delta)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{cases}$$

powinniśmy otrzymać równania téj saméj prostéj względem nowych osi, t. j. równania

$$(\varepsilon)\qquad Y = MX + R, \quad Z = NX + S.$$

I nawzajem, gdy w równaniach (ε) na X, Y, Z podstawimy

$$(\zeta)\qquad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ Y = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ Z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{cases}$$

wypaść powinny równania pierwotne (γ). Przekształcając równania (ε) według (ζ), mieć będziemy równania

$$(\alpha_2 - M\alpha_1)x + (\beta_2 - M\beta_1)y + (\gamma_2 - M\gamma_1)z = R,$$
$$(\alpha_3 - N\alpha_1)x + (\beta_3 - N\beta_1)y + (\gamma_3 - N\gamma_1)z = S,$$

z których, przez rugowanie raz z, drugi raz x, otrzymamy

$$-[(\gamma_2\alpha_3)+M(\gamma_3\alpha_1)+N(\gamma_1\alpha_2)]x+[(\beta_2\gamma_3)+(\beta_3\gamma_1)M+(\beta_1\gamma_2)N]y=\gamma_1 T-\gamma_2 S+\gamma_3 R$$
$$[(\alpha_2\beta_3)+(\alpha_3\beta_1)M+(\alpha_1\beta_2)N]x-[(\beta_2\gamma_3)+(\beta_3\gamma_1)M+(\beta_1\gamma_2)N]z=\beta_1 T-\beta_2 S+\beta_3 R,$$

gdzie $(\alpha_1\beta_2)=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ i t. d. Z porównania zaś ostatnich dwu równań z równaniami (γ), przy uwzględnieniu związków (15) w art. 55-ym, wypadnie nam

$$(27)\quad \begin{cases} m=\dfrac{\beta_1+\beta_2 M+\beta_3 N}{\alpha_1+\alpha_2 M+\alpha_3 N}, \quad n=\dfrac{\gamma_1+\gamma_2 M+\gamma_3 N}{\alpha_1+\alpha_2 M+\alpha_3 N}, \\ r=\dfrac{\gamma_1 T-\gamma_2 S+\gamma_3 R}{\alpha_1+\alpha_2 M+\alpha_3 N}, \quad s=-\dfrac{\beta_1 T-\beta_2 S+\beta_3 R}{\alpha_1+\alpha_2 M+\alpha_3 N}, \quad \text{a nadto} \\ t=\dfrac{\alpha_1 T-\alpha_2 S+\alpha_3 R}{\alpha_1+\alpha_2 M+\alpha_3 N}. \end{cases}$$

Jeżeli zaś mamy spółrzędne jednorodne linii prostéj, natenczas, z uwagi, że

$$p_{14}:p_{24}:p_{34}:p_{23}:p_{31}:p_{12}=1:m:n:t:-s:r,$$

wzory ostatnie dadzą:

$$(28)\quad \begin{cases} p_{14}=\alpha_1 P_{14}+\alpha_2 P_{24}+\alpha_3 P_{34}, & p_{23}=\alpha_1 P_{23}+\alpha_2 P_{31}+\alpha_3 P_{12}, \\ p_{24}=\beta_1 P_{14}+\beta_2 P_{24}+\beta_3 P_{34}, & p_{31}=\beta_1 P_{23}+\beta_2 P_{31}+\beta_3 P_{12}, \\ p_{34}=\gamma_1 P_{14}+\gamma_2 P_{24}+\gamma_3 P_{34}, & p_{12}=\gamma_1 P_{23}+\gamma_2 P_{31}+\gamma_3 P_{12}. \end{cases}$$

Uwagi godną jest tu ta okoliczność, że w wyrażenia spółrzędnych dawnych p_{14}, p_{24}, p_{34} wchodzą jedynie odpowiadające im nowe P_{14}, P_{24}, P_{34}, a w wyrażenia spółrzędnych dawnych p_{23}, p_{31}, p_{12} także tylko odpowiadające im nowe P_{23}, P_{31}, P_{12}. —

Podstawiwszy w tych wzorach zamiast spółrzędnych p_{ij} proporcyjonalne do nich π_{kl}, miéć będziemy wzory, służące do zmiany spółrzędnych linii prostéj, uważanéj jako oś.

ĆWICZENIA.

(59). Jeżeli (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) są dostawami kierunkowymi układu trzech osi prostokątnych (względem prostokątnych) i jeżeli $\dfrac{a}{l_1}+\dfrac{b}{m_1}+\dfrac{c}{n_1}=0$, $\dfrac{a}{l_2}+\dfrac{b}{m_2}+\dfrac{c}{n_2}=0$, okazać, że natenczas także $\dfrac{a}{l_3}+\dfrac{b}{m_3}+\dfrac{c}{n_3}=0$ i $a:b:c= =l_1 l_2 l_3 : m_1 m_2 m_3 : n_1 n_2 n_3$.

(60). Spółrzędne punktu są (1, 2, 3); znaléść spółrzędne tego punktu względem nowych osi, których równania są $x=y=z$; $2x=-y=2z$; $x=-z$, $y=0$.

(61). Przerobić równanie $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=a^2$ na inne, odniesione do nowych osi, wymienionych w ćwiczeniu (60).

(62). Okazać, że jeżeli każda z trzech prostych, do siebie wzajemnie prostopadłych, jest prostopadłą do dwu spośród innych trzech prostych, to i te ostatnie trzy proste są do siebie wzajemnie prostopadłe.

(63). Okazać, że proste, dwusieczne kątów między dwiema prostymi, określonymi przez równania: $lx + my + nz = 0$ i $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, leżą na dwu płaszczyznach

$$x^2[alm - b(n^2 + l^2)] + xy[a(m^2 + n^2) - c(n^2 + l^2)] - y^2[clm - b(m^2 + n^2)] = 0.$$

(64). Okazać, że przez zmianę kierunków osi prostokątnych równanie $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}yz + zx = a^2$ można przekształcić na $x^2 + \frac{5}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 = a^2$.

ROZDZIAŁ VI.

WYPROWADZENIE RÓWNAŃ KILKU POWIERZCHNI Z ICH OKREŚLENIA.

---

60. Kula. — Z kolei rzeczy wypada nam zająć się rozbiorem równania stopnia 2-go między spółrzędnymi punktu, w celu wykrycia wszelkich powierzchni rzędu 2-go. Wszakże, nim przystąpimy do tego zadania, pokażemy uprzednio, jak z określenia powierzchni można wyprowadzić jéj równanie. Przy téj sposobności zaznajomimy się z niektórymi powierzchniami rzędu 2-go, co znacznie nam ułatwi późniéj przeprowadzenie badań ogólnych.

Najprostszą powierzchnią krzywą jest powierzchnia kuli, którą się tak określa: *powierzchnia kuli jest miejscem gieometrycznym punktu, który w przestrzeni porusza się w ten sposób, że jego odległość od punktu stałego pozostaje wciąż taż sama.* Ta odległość niezmienna zowie się promieniem, a ów punkt stały zowie się środkiem kuli.

Niech będą (a, b, c) spółrzędnymi środka, (x, y, z) spółrzędnymi punktu bieżącego, a r długością promienia. W układzie zatym prostokątnym mamy

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{1}$$

i to jest równaniem kuli. Jest ono stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu; a zatym kula jest powierzchnią rzędu 2-go.

Porównywając równanie (1) z równaniem ogólnym stopnia 2-go

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{2}$$

widzimy, że równanie ogólne będzie przedstawiało kulę (w układzie prostokątnym), gdy

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}, \quad a_{23}=a_{31}=a_{12}=0. \tag{3}$$

Jeżeli te warunki są dopełnione, a więc jeżeli mamy dane równanie kształtu

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0, \tag{4}$$

to można łatwo znaléść spółrzędne środka i promień kuli, przedstawionéj przez to równanie. Jakoż, pisząc je w postaci

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=A^2+B^2+C^2-D$$

i porównywając z równaniem (1), mamy

(5) $a=-A$, $b=-B$, $c=-C$ i $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

61. Stożek. *Powierzchnia, którą tworzy prosta, poruszająca się w przestrzeni w ten sposób, że wciąż przechodzi przez punkt stały i wciąż przecina liniją stałą, zowie się powierzchnią stożkową, albo stożkiem.* Punkt stały zowie się wiérzchołkiem téj powiérzchni, a linija stała zowie się kierownicą stożka.

Niech (l, m, n) będą dostawami kierunkowymi prostéj tworzącéj, (a, b, c) zaś niech będą spółrzędnymi wiérzchołka. Równania zatym tworzącéj są

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}. \tag{1}$$

Niech nadto

$$F(x, y, z)=0, \quad \Phi(x, y, z)=0 \tag{2}$$

będą równaniami kierownicy.

Ponieważ prosta (1) wciąż przecina liniją (2), jakiekolwiek miałyby wartości dostawy kierunkowe l, m, n, więc mamy

$$F[x, b+\frac{m}{l}(x-a), c+\frac{n}{l}(x-a)]=0 \text{ i } \Phi[x, b+\frac{m}{l}(x-a), c+\frac{n}{l}(x-a)]=0.$$

Rugując spółrzędną x z tych dwu równań, otrzymamy związek między stosunkami $\frac{m}{l}$ i $\frac{n}{l}$ dostaw kierunkowych, który można pisać w postaci

$$\Psi\left(\frac{m}{l}, \frac{n}{l}\right)=0.$$

Temu równaniu uczynią zadość dostawy kierunkowe l, m, n, jeżeli prosta (1) ma wciąż przecinać liniją (2). Atoli x, y, z są spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na prostéj (1); zawsze więc, wskutek (1),

$$\frac{m}{l}=\frac{y-b}{x-a}, \quad \frac{n}{l}=\frac{z-c}{x-a}.$$

A zatym wogóle, jeżeli (x, y, z) są spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na prostéj, łączącéj dany punkt (a, b, c) z jakimkolwiek punktem linii (2), to mamy

$$\Psi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right)=0, \tag{3}$$

i to jest równanie powierzchni stożkowéj.

Kształt funkcyi Ψ zależy od natury kierownicy, t. j. od kształtu funkcyj F i Φ w równaniach (2). W każdym jednak razie, z samego kształtu równania (3) wypada, że równania wszelkich powierzchni stożkowych (t. j. jakakolwiek byłaby kierownica) są równaniami jednorodnymi względem $x-a$, $y-b$ i $z-c$.

Jeżeli wiérzchołek przyjmiemy za początek spółrzędnych, t. j. $a=b=c=0$, wówczas równanie powierzchni stożkowéj (3) przywiedzie się do

$$(4) \qquad \Psi\left(\frac{y}{x}, \ \frac{z}{x}\right)=0$$

i będzie jednorodnym względem x, y, z.

62. Równanie więc najogólniejsze powierzchni stożkowéj rzędu 2-go jest

$$(5) \quad A(x-a)^2+A'(y-b)^2+A''(z-c)^2+2B(y-b)(z-c)+2B'(z-c)(x-a)+ \\ +2B''(x-a)(y-b)=0.$$

Porównywając te równania z równaniem ogólnym stopnia 2-go

$$(6) \quad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

w którym, jak poprzednio, przyjmujemy $a_{ik}=a_{ki}$, otrzymać powinniśmy warunek, pod jakim równanie (6) przedstawia powierzchnię stożkową. Z tego porównania wypada:

$$(\alpha) \qquad a_{11}=A, \ a_{22}=A', \ a_{33}=A'', \ a_{23}=B, \ a_{31}=B', \ a_{12}=B'',$$

$$(\beta) \quad a_{14}=-(Aa+B''b+B'c), \ a_{24}=-(B''a+A'b+Bc), \ a_{34}=-(B'a+Bb+A''c),$$

$$(\gamma) \qquad a_{44}=Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+2B''ab.$$

Wskutek (α), związki (β) przechodzą na

$$(7) \qquad \begin{cases} a_{11}a+a_{12}b+a_{13}c+a_{14}=0, \\ a_{21}a+a_{22}b+a_{23}c+a_{24}=0, \\ a_{31}a+a_{32}b+a_{33}c+a_{34}=0, \end{cases}$$

wskutek zaś (α) i (β), przechodzi (γ) na

$$(8) \qquad a_{41}a+a_{42}b+a_{43}c+a_{44}=0.$$

Rugując a, b, c z cztérech równań (7) i (8), otrzymamy równanie warunkowe, jakiemu spółczynniki a_{ik} muszą uczynić zadość, jeżeli równanie (6) ma przedstawiać powierzchnię stożkową rzędu 2-go. Wypadkiem rugowania jest

$$(9) \qquad A \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}=0.$$

Jeżeli ten warunek jest dopełniony, to znajdziemy spółrzędne wiérzchołka, rozwiązując równania (7). Oznaczając przez A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} ilości dołączone do elementów $a_{14}=a_{41}$, $a_{24}=a_{42}$, $a_{34}=a_{43}$ i a_{44} wyznacznika A, będziemy mieli

$$(10) \qquad \frac{a}{A_{14}}=\frac{b}{A_{24}}=\frac{c}{A_{34}}=\frac{1}{A_{44}}.$$

Wartości spółrzędnych (a, b, c) wiérzchołka stożka są skończone, gdy $A_{44} \gtrless 0$.

Przypadek $A_{44}=0$ będzie rozebrany w ustępie następującym.

63. Walec. *Powierzchnia, którą tworzy prosta poruszająca się w przestrzeni w ten sposób, że wciąż pozostaje równoległą do danego kierunku i przecina stałą kierownicę, zowie się* p o w i e r z c h n i ą w a l c o w ą, *albo* w a l c e m.

Niech (l, m, n) będą dostawami kierunkowymi tworzącéj, a $(0, b, c)$ niech oznaczają spółrzędne punktu, w którym ta prosta spotyka płaszczyznę YZ. Wtedy równania

$$\frac{x}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \tag{1}$$

przedstawiają tworzącą. Rugując z tych dwu równań i równań kierownicy

$$F(x, y, z)=0, \quad \Phi(x, y, z)=0 \tag{2}$$

spółrzędne x, y, z, otrzymamy równanie

$$\Psi(b, c)=0.$$

Temu równaniu uczynić muszą zadość spółrzędne $(0, b, c)$ punktu, w którym prosta (1) spotyka płaszczyznę YZ, jeżeli ta prosta ma przecinać kierownicę (2).

Atoli x, y, z są spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na jakiéjkolwiek tworzącéj; zawsze więc, wskutek (1),

$$b=\frac{ly-mx}{l}, \quad c=\frac{lz-nx}{l}.$$

Wstawiwszy te wartości w poprzednie równanie, otrzymamy równanie

$$\Psi\left(\frac{ly-mx}{l}, \ \frac{lz-nx}{l}\right)=0, \tag{3}$$

będące równaniem walca, którego tworząca ma wciąż kierunek (l, m, n). Kształt funkcyi Ψ w tym równaniu zależy od kształtów funkcyj F i Φ w równaniach kierownicy (2), czyli od natury téjże kierownicy.

Jeżeli tworząca jest równoległa do jednéj z osi spółrzędnych, np. do osi x-ów, wówczas mamy $l=1$, $m=n=0$. Wskutek tego, równanie (3) przywiedzie się do

$$\Psi(y, z)=0. \tag{4}$$

To równanie przedstawia na płaszczyźnie YZ pewną krzywą, która się zowie ś l a d e m walca na téj płaszczyźnie. I jeżeli to równanie jest stopnia 2-go, przedstawiającym elipsę, hiperbolę, lub parabolę, to walec zowie się odpowiednio: e l i p t y c z n y m, h i p e r b o l i c z n y m, lub p a r a b o l i c z n y m.

Taksamo można okazać, że równania $\Psi(z, x)=0$ i $\Psi(x, y)=0$ przedstawiają walce, których tworzące są równoległe odpowiednio do osi y-ów i do osi z-ów.

64. Najogólniejsze równanie walca jest:

$$\begin{aligned}\text{A}(ly-mx)^2+\text{B}(lz-nx)^2+2\text{C}(ly-mx)(lz-nx)+\text{D}l(ly-mx)+\\ +2\text{E}l(lz-nx)+\text{F}l^2=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Porównanie tego równania z równaniem ogólnym stopnia 2-go

(6) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$

$(a_{ik}=a_{ki})$ dać nam powinno warunki, pod jakimi tož równanie (6) przedstawia powierzchnią walcową rzędu 2-go. Z tego porównania wypada

(α) $a_{22}=\mathrm{A}l^2,\ a_{33}=\mathrm{B}l^2,\ a_{23}=\mathrm{C}l^2,\ a_{24}=\mathrm{D}l^2,\ a_{34}=\mathrm{E}l^2,\ a_{44}=\mathrm{F}l^2,$

(β) $a_{11}=\mathrm{A}m^2+\mathrm{B}n^2+2\mathrm{C}mn,\ a_{12}=-(\mathrm{C}nl+\mathrm{A}lm),\ a_{13}=-(\mathrm{B}nl+\mathrm{C}lm),$
$a_{14}=-(\mathrm{E}nl+\mathrm{D}lm).$

Wskutek (α), związki (β) przechodzą na

$$a_{11}l^2=a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn,$$
$$a_{12}l+a_{22}m+a_{23}n=0,\qquad a_{13}l+a_{23}m+a_{33}n=0,\qquad a_{14}l+a_{24}m+a_{34}n=0.$$

Podstawiwszy w piérwsze z tych cztérech równań wartości na $a_{22}m$ i $a_{23}n$, wynikające z równań drugiego i trzeciego, otrzymamy

$a_{11}l^2=-(a_{12}lm+a_{13}ln)$, czyli $a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=0$. Mamy zatym:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n&=0,\\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n&=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n&=0,\\ a_{41}l+a_{42}m+a_{44}n&=0.\end{aligned}\right.$$

Rugując zaś l, m, n z którychkolwiek trzech z równań (7), otrzymujemy cztéry warunki:

$$(8)\qquad \mathrm{A}_{14}=0,\ \mathrm{A}_{24}=0,\ \mathrm{A}_{34}=0,\ \mathrm{A}_{44}=0,$$

gdzie $\mathrm{A}_{14}, \mathrm{A}_{24}, \mathrm{A}_{34}, \mathrm{A}_{44}$ są ilościami dołączonymi do elementów wyznacznika (9) w art. 62-m, mianowicie do elementów $a_{14}=a_{41},\ a_{24}=a_{42},\ a_{34}=a_{43},\ a_{44}$. Łatwo spostrzéc, że z dwu równań (8) wynikają dwa pozostałe.

Te cztéry warunki można krócéj tak pisać:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}\end{matrix}\right\|=0.$$

Jeżeli warunki (8) są dopełnione, to dwa którekolwiek z równań (7), np. dwa piérwsze, w połączeniu z równaniem $l^2+m^2+n^2=1$, dadzą

$$(9)\qquad \frac{l}{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}=\frac{m}{a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}}=\frac{n}{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}=$$
$$=\frac{1}{\left\{(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})^2+(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23})^2+(a_{11}a_{22}-a_{12})^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Są to wartości dostaw kierunkowych tworzącéj.

Ponieważ, wskutek (8),

$$\mathrm{A}\equiv a_{14}\mathrm{A}_{14}+a_{24}\mathrm{A}_{24}+a_{34}\mathrm{A}_{34}+a_{44}\mathrm{A}_{44}=0,$$

przeto, jeżeli równanie (6) przedstawia powierzchnią walcową, wówczas wyznacznik A jest równy 0 i jego wyznaczniki częściowe A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} są także równe 0.

65. Powierzchnia obrotowa. *Powierzchnia, którą tworzy dana linija obracająca się około stałéj prostéj* (osi obrotu) *tak, iż wciąż jest od niéj w téj saméj odległości, zowie się powierzchnią obrotową.* Niech

$$F(x, y, z)=0, \quad \Phi(x, y, z)=0 \tag{1}$$

będą równaniami tworzącéj, a

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \tag{2}$$

niech będą równaniami osi obrotu. W równaniach (2) l, m, n oznaczają dostawy kierunkowe osi obrotu, (a, b, c) zaś są spółrzędnymi punktu, dowolnie obranego na téjże osi.

Ze sposobu tworzenia się powierzchni obrotowéj wypada, że każdy punkt tworzącéj opisuje koło, czyli t. z. równoleżnik, którego środek leży na osi obrotu, a płaszczyzna jest do téj osi prostopadłą, t. j. że każda płaszczyzna, prostopadła do osi, przecina powierzchnią obrotową według koła, gdy tymczasem płaszczyzny, przechodzące przez oś obrotu, przecinają tę powierzchnią według krzywych przystających, czyli t. z. południków.

Niech x, y, z będą spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na jakimkolwiek równoleżniku, a r odległością tego punktu od punktu (a, b, c), dowolnie obranego na osi obrotu; natenczas miéć tu będziemy

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{3}$$

t. j. równanie kuli, któréj środek leży w (a, b, c), a powierzchnia przechodzi przez (x, y, z). Przecięcie kuli płaszczyzną jest kołem. Weźmy zatym pod uwagę płaszczyznę do osi obrotu prostopadłą. Równanie téj płaszczyzny jest

$$lx+my+nz=p, \tag{4}$$

gdzie p oznacza odległość prostopadłą płaszczyzny od początku spółrzędnych, a l, m, n mają takież samo znaczenie, jak w (2). Jeżeli płaszczyzna (4) przechodzi przez punkt (x, y, z), natenczas dwa równania (3) i (4) przedstawiają jedno z kół równoleżnikowych powierzchni obrotowéj.

Przez rugowanie spółrzędnych x, y, z z cztérech równań (1), (3) i (4) otrzymujemy związek

$$\Psi(r^2, p)=0,$$

któremu stanie się zadość, jeżeli koło, przedstawione przez równania (3) i (4), ma przecinać tworzącą (1). A gdy w tym związku za r^2 i p wstawimy wartości (3) i (4), to miéć będziemy równanie

$$\Psi[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,\ lx+my+nz]=0 \tag{5}$$

między spółrzędnymi x, y, z jakiegokolwiek punktu na jakimkolwiek równoleżniku powierzchni, utworzonéj przez obrót linii (1) około osi (2). Równanie (5) jest więc równaniem téj powierzchni obrotowéj. Kształt funkcyi Ψ zależy od kształtu funkcyi F i Φ w równaniach (1), czyli od natury linii tworzącéj.

W szczególności, jeżeli oś obrotu weźmiemy za jednę z osi spółrzędnych, np. za oś x-ów, wskutek czego $l=1$, $m=n=0$, i jeżeli przyjmiemy $a=b=c=0$, równanie (5) przywiedzie się do

$$\Psi(x^2+y^2+z^2,\ x)=0,$$

zamiast którego pisać można

$$y^2+z^2=\varphi(x). \tag{6}$$

Taksamo można okazać, że równania $z^2+x^2=\chi(y)$ i $x^2+y^2=\psi(z)$ przedstawiają powierzchnie, utworzone przez obrót pewnéj linii odpowiednio około osi y-ów i osi z-ów.

66. Równanie najogólniejsze powierzchni obrotowéj rzędu 2-go jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\mathrm{A}(lx+my+nz)^2+2\mathrm{B}(lx+my+nz)+\mathrm{C}=0. \tag{7}$$

Porównanie tego równania z równaniem ogólnym stopnia 2-go

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{8}$$

powinno nam dać warunki, pod jakimi to równanie (8) przedstawia powierzchnią obrotową rzędu 2-go. Z tego porównania wypada

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} 1+\mathrm{A}l^2&=ka_{11},\\ 1+\mathrm{A}m^2&=ka_{22},\\ 1+\mathrm{A}n^2&=ka_{33},\end{aligned}\right.\qquad (\beta)\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}mn&=ka_{23},\\ \mathrm{A}nl&=ka_{31},\\ \mathrm{A}lm&=ka_{12},\end{aligned}\right.\qquad (\gamma)\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}l-a&=ka_{14},\\ \mathrm{B}m-b&=ka_{24},\\ \mathrm{B}n-c&=ka_{34},\end{aligned}\right.$$

$(\delta)\qquad \mathrm{C}+a^2+b^2+c^2=ka_{44},$ a nadto mamy $(\varepsilon)\quad l^2+m^2+n^2=1,$

gdzie k oznacza czynnik stały.

Mnożąc przez siebie którekolwiek dwa równania (β) i dzieląc iloczyn przez trzecie, otrzymujemy

$$\mathrm{A}l^2=k\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}},\quad \mathrm{A}m^2=k\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}},\quad \mathrm{A}n^2=k\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}},$$

co porównywając z równaniami (α), mamy

$$a_{11}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}=a_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}\left(=-\frac{1}{k}\right). \tag{9}$$

Równania (9) są tymi dwoma równaniami warunkowymi, którym winno stać się zadość, jeżeli równanie (8) ma przedstawiać powierzchnią obrotową rzędu 2-go.

Jeżeli te warunki są dopełnione, wówczas, ponieważ liczbę k wyznaczają związki (9), równania (α), przy uwzględnieniu związku (ε), dają

$$\mathrm{A}=k(a_{11}+a_{22}+a_{33})-3,$$

a nadto dwa którekolwiek z równań (α), w połączeniu z (ε), dadzą wartości na dostawy kierunkowe l, m, n osi obrotu.

Równania zaś (γ) dają dwa związki

$$\frac{ka_{14}+a}{l}=\frac{ka_{24}+b}{m}=\frac{ka_{34}+c}{n},$$

zapomocą których przez dowolnie wziętą wartość na jednę z trzech spółrzędnych (a, b, c) punktu na osi obrotu dwie inne mogą być wyrażone. Mając więc kierunek osi obrotu i jeden punkt na niéj leżący, mamy tymsamym położenie osi. A wyznaczywszy a, b, c, otrzymamy wartość na B z któregokolwiek równania (γ), poczym wartość na C wypadnie z równania (δ).

To postępowanie jednak zawodzi, gdy a_{23}, a_{31}, lub a_{12} jest równe 0. Załóżmy, że $a_{23}=0$. Z piérwszego równania (β) wypada wtedy $mn=0$, a zatym $m=0$, albo $n=0$, a przeto, wskutek dwu ostatnich równań (β), i $a_{12}=0$, albo $a_{31}=0$. Dajmy, że $n=0$, a zatym i $a_{31}=0$; mamy wtedy

$$\mathrm{A}lm=ka_{12}, \quad ka_{33}=1 \quad \text{i}$$
$$(1-ka_{11})(1-ka_{22})=\mathrm{A}^2l^2m^2=k^2a_{12}{}^2,$$

skąd wynika

$$(a_{33}-a_{11})(a_{33}-a_{22})=a_{12}{}^2. \tag{10}$$

To równanie i $a_{31}=0$ będą dwoma warunkami tego, aby równanie (8), w którym $a_{23}=0$, przedstawiało powierzchnią obrotową rzędu 2-go. Z innymi przypadkami wyjątkowymi należy taksamo postąpić.

To postępowanie zawodzi jeszcze, jeżeli

$$a_{11}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}=a_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}=0;$$

albowiém wówczas k jest nieskończenie wielkie. Tym przypadkiem zajmiemy się późniéj.

67. Powierzchnie prostolinijowe. *Powierzchnia, utworzona przez liniją prostą, poruszającą się w przestrzeni według pewnego stałego prawa, nazywa się wogólności powierzchnią prostolinijową.* Ponieważ położenie prostéj zależy od wartości cztérech jéj spółrzędnych (art. 35), przeto cztéry warunki wyznaczają w zupełności jéj położenie. A zatym, jeżeli mamy tylko trzy warunki, wówczas położenie prostéj nie jest jeszcze dokładnie wyznaczone, lecz jedynie w ten sposób określone, że prosta winna stale leżéć na pewnéj powierzchni, któréj równanie możemy otrzymać w sposób następujący.

Niech

$$y=mx+r, \quad z=nx+s$$

będą równaniami prostéj. Trzy dane warunki prowadzą do trzech związków między cztérema spółrzędnymi m, n, r, s. Rugowanie tych spółrzędnych z tych trzech związków i dwu równań prostéj daje jedno równanie między spółrzędnymi (x, y, z) punktu bieżącego na tworzącéj w jakimkolwiek jéj położeniu, które jest równaniem miejsca żądanego. Jeżeli każde dwa po sobie następujące położenia prostéj tworzącéj leżą na jednéj płaszczyźnie, to powierzchnia prostolinijowa zowie się wtedy rozwijalną, a to dlatego, że można ją wtedy (bez rozdarcia) rozwinąć na płaszczyźnie. Jakoż, jeżeli $D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots$ (fig. 78) są po sobie następującymi położeniami prostéj tworzącéj i jeżeli prosta D_1 z prostą D_2 przecina się w O_1, prosta D_2 z D_3 w O_2, D_3 z D_4 w $O_3, \ldots$, wówczas, w obrocie płaszczyzny kąta $D_1O_1D_2$ około O_1D_2, aż się ona stanie przedłużeniem płaszczyzny kąta $D_2O_2D_3$, następnie płaszczyzny kąta $D_2O_2D_3$ około O_2D_3, aż się znowu ona stanie przedłużeniem płaszczyzny kąta $D_3O_3D_4, \ldots$, powierzchnia prostolinijowa będzie rozwinięta na płaszczyźnie. Szereg punktów $O_1, O_2, O_3, \ldots$, w których się przecinają każde dwa po sobie następujące położenia prostéj tworzącéj, w swym ciągu nieprzerwanym utworzy liniją, która się zowie **krawędzią zwrotu** powierzchni rozwijalnéj.

Powierzchnia stożkowa i powierzchnia walcowa są najprostszymi przykładami powierzchni prostolinijowych i rozwijalnych. Krawędzią zwrotu piérwszéj jest jéj wiérzchołek, a drugiéj jest punkt w nieskończoności, przez który przechodzą wszystkie położenia tworzącéj walca.

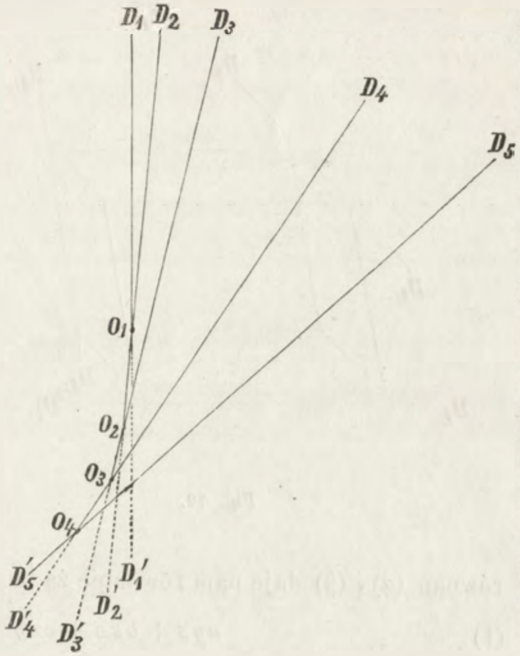


Fig. 78.

Jeżeli żadne dwa sąsiednie położenia prostéj tworzącéj nie leżą na téj saméj płaszczyznie, to powierzchnia prostolinijowa zowie się wtedy powierzchnią **skośną**, albo **wichrowatą**. Liniją, utworzoną przez odległości najkrótsze między każdymi dwoma sąsiednimi położeniami prostéj tworzącéj, nazywamy **krzywą zwężenia**, albo **krzywą ściéśnienia** powierzchni skośnéj. Damy kilka przykładów powierzchni skośnych.

68. *Znaléść równanie powierzchni utworzonéj przez prostą, która się ślizga wzdłuż trzech prostych danych, nierównoległych do jednéj i téj saméj płaszczyzny.*

Aby to zadanie rozwiązać w sposób najprostszy i zarazem symetryczny względem prostych danych, przesuńmy przez każdą z tych trzech danych prostych płaszczyzny równoległe do każdéj z dwu pozostałych; otrzymamy wtedy równoległościan, w którym trzy dane proste są trzema krawędziami. Środek tego równoległościanu weźmy za początek spółrzędnych, a proste, równoległe do danych, przez ten punkt przechodzące, weźmy za osi spółrzędnych. Jeżeli

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

są równaniami trzech par ścian przeciwległych równoległościanu, wówczas trzy dane proste D_1, D_2, D_3 (fig. 79) można przedstawić odpowiednio przez równania

$$y = b, \; z = -c; \; z = c, \; x = -a; \; x = a, \; y = -b.$$

Prostą, która przecina dwie proste D_2 i D_3, można uważać jako przecięcie się dwu płaszczyzn, z których piérwsza przechodzi przez D_2, a druga przez D_3. Równania zaś tych płaszczyzn są

(α) $z - c = \lambda(x + a)$ i
$y + b = \mu(x - a)$,

gdzie λ i μ są dwiema nieoznaczonymi liczbami stałymi. Te dwa zatym równania, uważane pospołu, przedstawiają prostą, przecinającą dwie dane proste D_2 i D_3. Aby ta prosta przecinała także trzecią daną prostą D_1, winno być także (art. 34)

(β) $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu = 0.$

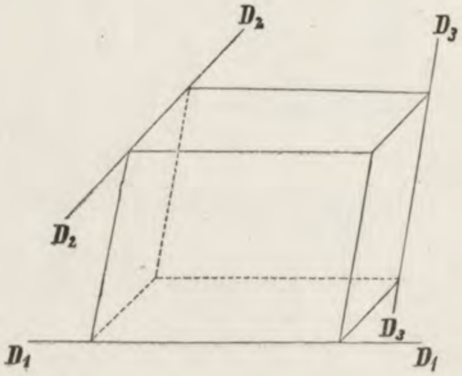


Fig. 79.

Rugowanie λ i μ z trzech równań (α) i (β) daje nam równanie żądanéj powierzchni

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0. \tag{1}$$

Ta powierzchnia jest więc powierzchnią rzędu 2-go; późniéj się okaże, że jest to t. z. h i p e r b o l o j d a j e d n o p o w ł o k o w a.

69. *Znaléść równanie powierzchni, którą tworzy prosta, ślizgająca się po trzech danych prostych, równoległych do téj saméj płaszczyzny.*

Weźmy jednę prostą za oś z-ów i przesuńmy płaszczyznę ZX równolegle do dwu pozostałych prostych D_2 i D_3. Wtedy równania tych dwu prostych będą

$$y = r, \quad z = nx; \quad y = r', \quad z = n'x.$$

Równania zatym prostéj, przecinającéj te dwie proste, można tak przedstawić:

$$z - nx = \lambda(y - r), \quad z - n'x = \mu(y - r'); \tag{α}$$

piérwsze z tych równań przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez D_2, a drugie płaszczyznę, przechodzącą przez D_3. Ponieważ prosta (α) ma przecinać oś z-ów, przeto dla $x = y = 0$ równania (α) powinny dać tę samę wartość na z, a to nastąpi, gdy (β) $$\lambda r = \mu r'.$$

Rugowanie zaś λ i μ z równań (α) i (β) prowadzi do równania

(2) $$r(z - nx)(y - r') - r'(z - n'x)(y - r) = 0,$$

które jest równaniem żądanéj powierzchni. Ta powierzchnia jest rzędu 2-go; późniéj się okaże, że jest to t. z. parabolojda hiperboliczna.

70. *Znaléść równanie powierzchni, utworzonéj przez prostą, która, ślizgając się po dwu prostych danych, pozostaje wciąż równoległą do danéj płaszczyzny.*

Weźmy odległość najkrótszą między dwiema danymi prostymi D_1 i D_2 za oś z-ów, a środek téj odległości za początek spółrzędnych prostokątnych; poprowadźmy nadto płaszczyznę ZX tak, aby dzieliła kąt między dwiema danymi prostymi na dwie części równe. Wtedy równania dwu danych prostych będą (ćwiczenie 35)

$$y = mx, \quad z = s; \quad y = -mx, \quad z = -s.$$

Równania zaś prostéj, która przecina obie te proste, są

(α) $$y - mx = \lambda(z - s), \quad y + mx = \mu(z + s);$$

albowiém piérwsze równanie przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez piérwszą, a drugie płaszczyznę przechodzącą przez drugą daną prostą. Jeżeli prosta (α) ma być wciąż równoległą do płaszczyzny danéj, któréj równanie jest

$$Ax + By + Cz = 0,$$

wówczas (art. 32)

(β) $$A(\lambda - \mu) - mB(\lambda + \mu) + 2mC = 0.$$

Rugowanie λ i μ z trzech równań (α) i (β) przywodzi do równania stopnia 2-go

$$A(mzx - sy) + B(yz - msx) + mC(z^2 - s^2) = 0,$$

które jest równaniem żądanéj powierzchni; późniéj zobaczymy, że ta powierzchnia jest także parabolojdą hiperboliczną.

71. Ogólniejszym od poprzedzającego jest zadanie następujące:

Znaléść równanie powierzchni, utworzonéj przez prostą, która, ślizgając się po danéj prostéj i po danéj krzywéj, wciąż pozostaje równoległą do danéj płaszczyzny.

Niech

(1) $$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} (= r)$$

będą równaniami danéj prostéj,

(2) $$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

równaniami danéj linii krzywéj, a

(3) $$l'x + m'y + n'z = p$$

równaniem normalnym danéj płaszczyzny. Spółrzędne jakiegokolwiek punktu na prostéj kierującéj (1) można wyrazić przez $a+lr$, $b+mr$, $c+nr$; dlategotéż równania

$$(4)\qquad \frac{x-a-lr}{\lambda}=\frac{y-b-mr}{\mu}=\frac{z-c-nr}{\nu}$$

będą przedstawiały prostą, która przecina prostą (1). Ta prosta (4) jest do płaszczyzny (3) równoległą wrazie, jeżeli

$$(5)\qquad l'\lambda+m'\mu+n'\nu=0.$$

Równania (4) i (5) można zastąpić przez dwa inne. Jakoż znajdziemy, że każdy z trzech stosunków (4) jest równy [wskutek (5)] stosunkowi

$$\frac{l'(x-a)+m'(y-b)+n'(z-c)-(ll'+mm'+nn')r}{0},$$

skąd wypada

$$(6)\qquad l'(x-a)+m'(y-b)+n'(z-c)=(ll'+mm'+nn')r,$$

jak również stosunkom

$$\frac{n(x-a)-l(z-c)}{n\lambda-l\nu}=\frac{n(y-b)-m(z-c)}{n\mu-m\lambda},$$

skąd znowu wynika, iż

$$(7)\qquad \frac{n(x-a)-l(z-c)}{n(y-b)-m(z-c)}=\frac{n\lambda-l\nu}{n\mu-m\lambda}.$$

Równania (6) i (7) są równoważne równaniom (4) i (5); przedstawiają zatym prostą, która, przecinając prostą (1), jest równoległą do płaszczyzny (3). Rugowanie x, y, z z cztérech równań (2), (6) i (7) doprowadza do związku

$$\Psi\left(\frac{n\lambda-l\nu}{n\mu-m\lambda},\quad (ll'+mm'+nn')r\right)=0,$$

któremu stać się musi zadość, jeżeli prosta (6), (7) ma przecinać także krzywą kierownicę (2).

W skutek (6) i (7), ten związek przechodzi na

$$(8)\qquad \Psi\left\{\frac{n(x-a)-l(z-c)}{n(y-b)-m(z-c)},\ l'(x-a)+m'(y-b)+n'(z-c)\right\}=0,$$

przedstawiający równanie żądanéj powierzchni, która się zowie powierzchnią k l i n o w a t ą, albo o s t r o k r ę g o w a t ą. Kształt funkcyi Ψ w tym równaniu zależy od kształtu funkcyi F i Φ w równaniach (2), czyli od natury danéj krzywéj kierownicy. Jeżeli przyjmiemy, że równania (2) są stopnia 1-go, wówczas równanie (8) będzie stopnia 2-go i będzie przedstawiało parabolojdę hiperboliczną.

Jeżeli daną płaszczyznę przyjmiemy za płaszczyznę XY, a punkt, w którym tę płaszczyznę spotyka dana prosta, za początek spółrzędnych, to będziemy mieli $l' = m' = n' = 0$, $a = b = c = 0$, a wtedy równanie (8) przejdzie na

$$\Psi\left(\frac{nx - lz}{ny - mz},\ z\right) = 0. \tag{9}$$

A jeżeli nadto dana prosta razem się schodzi z osią z-ów, to $l = m = 0$, $n = 1$, wskutek czego równanie (9) sprowadza się do

$$\Psi\left(\frac{x}{y},\ z\right) = 0, \text{ lub } z = \psi\left(\frac{x}{y}\right), \text{ lubteż } x = y\varphi(z). \tag{10}$$

ĆWICZENIA.

---

(65). Znaléść równanie biegunowe kuli, przyjąwszy za biegun jakikolwiek inny punkt, niż jéj środek. Okazać, że jeżeli z punktu stałego O wyprowadzimy jakąkolwiek cięciwę OPQ, przecinającą kulę w P i Q, to iloczyn OP.OQ jest niezmiennym.

(66). Z jakiegokolwiek punktu O wyprowadzamy prostą, która daną kulę przecina w P; na OP bierzemy punkt Q tak, aby iloczyn OP.OQ był równy liczbie stałéj k^2: znaléść miejsce punktu Q.

(67). A i B są dwoma punktami stałymi, a punkt P tak się posuwa, że stosunek PA do PB jest stałym. Znaléść miejsce punktu P.

(68). Okazać, że wszystkie punkty przecięcia się dwu kul leżą na kole, którego płaszczyzna jest prostopadła do prostéj, łączącéj środki obu kul.

(69). Okazać, że płaszczyzny trzech kół, według których trzy kule przecinają się po dwie, przecinają się z sobą według jednéj prostéj, prostopadłéj do płaszczyzny, na któréj leżą środki tych kul.

(70). Okazać, że sześć płaszczyzn, według których cztéry kule przecinają się po dwie, mają jeden punkt spólny.

(71). Znaléść równanie stożka, mającego wiérzchołek w początku spółrzędnych prostokątnych, którego kierownicą jest elipsa prostopadła do osi z-ów, mająca środek na osi z-ów, lub parabola prostopadła do osi z-ów, mająca oś równoległą do osi x-ów, a wiérzchołek na osi z-ów.

(72). Znaléść równanie stożka, którego wiérzchołek znajduje się na powierzchni danéj kuli, a kierownica jest kołem małym téjże kuli. Znaléść także krzywą, według któréj ten stożek przecina płaszczyzna, przechodząca przez środek kuli i prostopadła do średnicy, przechodzącéj przez wiérzchołek.

(73). Znaléść równanie powierzchni, utworzonéj przez obrót koła około prostéj, leżącéj na jego płaszczyźnie.

(74). Znaléść równanie powierzchni, utworzonéj przez obrót prostéj około drugiéj prostéj, któréj tamta nie przecina.

(75). Prosta stała AB przecina stałą płaszczyznę w A. Linija prosta AP porusza się tak, że stosunek wstawy kąta, który ona czyni z AB, do wstawy kąta, który ona tworzy z płaszczyzną stałą, jest stały. Znaléść równanie powierzchni utworzonéj przez AP.

(76). Znaléść równanie powierzchni klinowatéj, któréj tworząca przecina oś z-ów, jest równoległą do płaszczyzny XY i ślizga się po elipsie prostopadłéj do osi x-ów, mającéj środek na osi x-ów i osi równoległe do osi y-ów i z-ów.

(77). Znaléść równanie powierzchni, utworzonéj przez prostą, która się ślizga po trzech prostych, których spółrzędne są $\overset{(1)}{p}_{ij}$, $\overset{(2)}{p}_{ij}$ i $\overset{(3)}{p}_{ij}$.

(78). Okazać, że miejsce punktu, którego odległość od stałéj płaszczyzny jest zawsze równa jego odległości od stałéj prostéj, jest stożkiem.

(79). Znaléść równanie miejsca prostéj, która wciąż przecina dwie dane proste i jest prostopadłą do jednéj z nich. Wytłomaczyć wypadek, gdy dwie dane proste są do siebie prostopadłe.

(80). Znaléść miejsce punktu, przez który można poprowadzić trzy proste, do siebie wzajemnie prostopadłe, i takie, aby przecinały liniją krzywą, wyznaczoną przez równania $z=0$ i $ax^2+by^2=1$.

ROZDZIAŁ VII.

O WŁASNOŚCIACH OGÓLNYCH POWIERZCHNI KRZYWYCH STOPNIA 2-GO.

RÓWNANIE POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO WE SPÓŁRZĘDNYCH PUNKTU.

72. Powierzchnie, przedstawione przez równanie stopnia 2-go we spółrzędnych punktu, nazwaliśmy powierzchniami rzędu 2-go, a powierzchnie, przedstawione przez równanie stopnia 2-go we spółrzędnych płaszczyzny, powierzchniami klasy 2-éj. Tak jedne jak drugie powierzchnie będziemy nazywali powierzchniami stopnia 2-go; okaże się bowiém poniżéj, że powierzchnia rzędu 2-go, wyjąwszy przypadki szczególne, jest zarazem powierzchnią klasy 2-éj.

Równanie ogólne powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych punktu jednorodnych będziemy pisali w postaci

$$(1)\; f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

rozumiejąc przez a_{ik} liczby stałe i przyjmując, jak poprzednio, że $a_{ik} = a_{ki}$. Wrazie, gdy spółrzędne jednorodne są szczególnymi, t. j. gdy w równaniu (1) podstawimy $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, otrzymamy równanie ogólne powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych równoległych.

W równaniu (1) jest dziesięć wyrazów; atoli możemy jeden z jego spółczynników uczynić $= 1$, czyli podzielić całe równanie przez ten spółczynnik. Widoczna więc, że do wyznaczenia powierzchni stopnia 2-go wystarczy dziewięć warunków pojedyńczych, t. j. takich, iż każdy z nich daje tylko jedno równanie między spółczynnikami, jak np. dziewięć punktów, przez które powierzchnia ma przechodzić.

Płaszczyzna przecina powierzchnią stopnia 2-go według linii krzywéj stopnia 2-go. Jakoż, weźmy pod uwagę równanie powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych równoległych $f(x, y, z, 1) = 0$. Ponieważ można jakąkolwiek płaszczyznę wziąć za płaszczyznę XY, więc dość okazać, że ta właśnie płaszczyzna przecina powierzchnią stopnia 2-go według linii krzywéj stopnia 2-go. Otrzymamy równanie krzywéj, według któréj powierzchnią $f(x, y, z, 1) = 0$ przecina płaszczyzna XY, t. j. $z=0$, gdy w równaniu téj powierzchni przyjmiemy $z=0$. Równanie téj krzywéj $f(x, y, 0, 1)=0$ jest więc równaniem stopnia 2-go.

Płaszczyzny do siebie równoległe przecinają powierzchnią stopnia 2-go według krzywych homotetycznych. Albowiém równanie krzywéj, według któréj powierzchnią $f(x, y, z, 1)=0$ przecina płaszczyzna $z=c$, otrzymać możemy z równania téj powierzchni, przenosząc naprzód początek spółrzędnych do punktu $(0, 0, c)$, a następnie w równaniu przerobionym przyjmując $z=0$, co wychodzi najedno z podstawieniem wprost w równaniu powierzchni $z=c$. Ponieważ w równaniu téj krzywéj $f(x, y, c, 1)=0$ spółczynniki przy x^2, xy i y^2 sa takież same, jak w równaniu $f(x, y, 0, 1)=0$, więc obie krzywe są homotetyczne.

Linija prosta przecina powierzchnią stopnia 2-go w dwu punktach. Jakoż, weźmy pod uwagę prostą, łączącą dwa punkty dane P′ i P″, których spółrzędne jednorodne są (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) i $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$. Spółrzędne punktu jakiegokolwiek P na prostéj P′P″ można wyrazić przez

$$x_i=\lambda x'_i+\mu x''_i,\quad (i=1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

gdzie $\mu:\lambda=$ P′P : PP″. Jeżeli punkt P jest zarazem punktem przecięcia się prostéj P′P″ z powierzchnią (1), wówczas stosunek $\mu:\lambda$ uczyni zadość równaniu warunkowemu

$$f(\lambda x'_1+\mu x''_1,\ \lambda x'_2+\mu x''_2,\ \lambda x'_3+\mu x''_3,\ \lambda x'_4+\mu x''_4)=0,$$

czyli równaniu

$$\lambda^2 f'+2\lambda\mu(x''_1 f'_1+x''_2 f'_2+x''_3 f'_3+x''_4 f'_4)+\mu^2 f''=0. \tag{3}$$

W tym równaniu f' i f'' oznaczają wypadki podstawienia spółrzędnych punktów P′ i P″ w $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, a f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 wypadki podstawienia spółrzędnych punktu P′ w połowach pochodnych cząstkowych funkcyi $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, wziętych odpowiednio względem x_1, x_2, x_3, x_4, t. j. w funkcyjach

$$\left\{\begin{aligned} f_1&\equiv a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\ f_2&\equiv a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\ f_3&\equiv a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\ f_4&\equiv a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Równanie (3) jest stopnia 2-go względem $\mu:\lambda$; stąd wynika, że prosta (dowolna) P′P″ przecina powierzchnią stopnia 2-go w dwu punktach (rzeczywistych, lub urojonych). — Rozbiór tego równania (3) doprowadzi nas do poznania całego szeregu własności powierzchni stopnia 2-go.

73. Biegun i płaszczyzna biegunowa. Załóżmy naprzód, że spółrzędne dwu punktów P′ i P″ czynią zadość równaniu warunkowemu

$$x''_1 f'_1+x''_2 f'_2+x''_3 f'_3+x''_4 f'_4=0. \tag{5}$$

Równanie (3) sprowadza się w tym przypadku do $\lambda^2 f'+\mu^2 f''=0$ i daje na $\mu:\lambda$ dwie wartości liczebnie równe, ale różne co do znaku. To wskazuje, że dwa punkty przecięcia się prostéj P′P″ z krzywą (1) są w tym przypadku harmonicznie sprzężone z parą punktów P′ i P″. Przyjmijmy, że punkt P′ jest stały, i uważajmy ten punkt za wiérzchołek snopa promieni, roschodzących się we wszelkich możebnych kierunkach. Każdy z tych promieni przetnie powierzchnią (1) w dwu punktach, i na każdym z nich znajdować się będzie punkt, tworzący z punktem P′ parę punktów harmonicznie sprzężoną z parą punktów przecięcia. Spółrzędne zatym tych czwartych punktów harmonicznych czynią zadość temuż samemu równaniu stopnia 1-go

(6) $$x_1f'_1 + x_2f'_2 + x_3f'_3 + x_4f'_4 = 0,$$

z czego wynika, że te punkty leżą wszystkie na jednéj płaszczyźnie. Płaszczyznę (6) nazywamy płaszczyzną biegunową punktu P′, a punkt P′ zowie się biegunem płaszczyzny, przedstawionéj przez równanie (6) względem danéj powierzchni stopnia 2-go (1). A więc płaszczyzna biegunowa punktu danego względem danéj powierzchni stopnia 2-go, jest miejscem gieometrycznym punktu na promieniu, przechodzącym przez punkt dany, tworzącego z nim parę punktów, harmonicznie sprzężoną z parą punktów, w których ten promień przecina powierzchnią stopnia 2-go.

Równanie warunkowe (5) wyraża, że punkt P″ leży na płaszczyźnie biegunowéj punktu P′. To jednak równanie można także tak pisać:

$$x'_1f''_1 + x'_2f''_2 + x'_3f''_3 + x'_4f''_4 = 0,$$

rozumiejąc przez $f''_1, f''_2, f''_3, f''_4$ wypadki podstawienia spółrzędnych punktu P″ w funkcyjach f_1, f_2, f_3, f_4; w téj zaś postaci to równanie wyraża, że nawzajem punkt P′ leży na płaszczyźnie biegunowéj punktu P″. A zatym

Jeżeli z dwu punktów P′ *i* P″ *jeden leży na płaszczyźnie biegunowéj drugiego, to i drugi leży na płaszczyźnie biegunowéj piérwszego punktu.* Takie dwa punkty nazywamy punktami sprzężonymi względem danéj powierzchni stopnia 2-go. Ogólniéj można to samo twierdzenie tak wypowiedzieć:

Jeżeli punkt porusza się po płaszczyźnie, to płaszczyzna biegunowa tego punktu obraca się około bieguna téj płaszczyzny. Stąd wniosek:

Jeżeli punkt przebiega liniją prostą, to płaszczyzna biegunowa tego punktu obraca się około drugiéj prostéj, miejsca gieometrycznego biegunów płaszczyzn, które można poprowadzić przez piérwszą prostą. Te dwie proste, które w ten sposób sobie odpowiadają, iż płaszczyzny biegunowe punktów na jednéj z nich przechodzą przez drugą, nazywają się prostymi sprzężonymi względem danéj powierzchni stopnia 2-go.

Bespośrednim wynikiem poprzedzających twierdzeń jest następujące: *proste, sprzężone względem danéj powierzchni stopnia 2-go z prostymi, przechodzącymi przez jeden punkt, leżą na płaszczyźnie biegunowéj tego punktu.*

74. Oznaczmy przez (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) spółrzędne jednorodne płaszczyzny biegunowéj punktu P′; wówczas mieć będziemy

(7) $$u'_1 = f'_1,\ u'_2 = f'_2,\ u'_3 = f'_3,\ u'_4 = f'_4.$$

Te równania dają wartości na spółrzędne płaszczyzny biegunowéj, jeżeli spółrzędne bieguna są dane, i nawzajem, możemy z nich otrzymać spółrzędne bieguna, jeżeli są dane spółrzędne płaszczyzny biegunowéj. Z tych równań wypada jeszcze, że każdy punkt posiada tylko jednę płaszczyznę biegunową, z wyjątkiem punktu, którego spółrzędne czynią zadość jednocześnie czterem równaniom

(8) $$f'_1=0,\ f'_2=0,\ f'_3=0,\ f'_4=0.$$

Ten przypadek zajdzie wtedy, kiedy między spółczynnikami równania (1) ma miejsce związek

(9) $$A\equiv\begin{vmatrix} a_{11}\ , & a_{12}\ , & a_{13}\ , & a_{14} \\ a_{21}\ , & a_{22}\ , & a_{23}\ , & a_{24} \\ a_{31}\ , & a_{32}\ , & a_{33}\ , & a_{34} \\ a_{41}\ , & a_{42}\ , & a_{43}\ , & a_{44} \end{vmatrix}=0,$$

a zatym kiedy równanie (1) przedstawia stożek rzędu 2-go (art. 62) o wiérzchołku w punkcie P′, lub walec rzędu 2-go (art. 64), który można uważać za stożek o wiérzchołku w nieskończoności. Mamy zatym twierdzenie: *płaszczyzna biegunowa wiérzchołka stożka rzędu 2-go jest płaszczyzną nieoznaczoną.*

Do tego twierdzenia można dodać następujące: *płaszczyzna biegunowa jakiegokolwiek punktu względem stożka rzędu 2-go przechodzi przez wiérzchołek tegoż stożka.* Albowiém równaniu płaszczyzny biegunowéj punktu P′ względem powierzchni $f=0$, które także tak pisać można

$$x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + x'_3 f_3 + x'_4 f_4 = 0,$$

uczynią widocznie zadość spółrzędne punktu, dla którego jest jednocześnie $f_1=f_2=f_3=f_4=0$, czyli wrazie, gdy równanie $f=0$ przedstawia stożek, t. j. spółrzędne jego wiérzchołka.

Powiedzieliśmy wyżéj, że ze spółrzędnych dowolnie wziętéj płaszczyzny, można, zapomocą równań (7), wyznaczyć spółrzędne jéj bieguna. Wyjątek stanowią tylko płaszczyzny, które wrazie, kiedy powierzchnia stopnia 2-go jest stożkiem, nie przechodzą przez wiérzchołek tego stożka; albowiém wtedy równania (7) są niedorzeczne.

75. *Jeżeli punkt* P *opisuje szereg prostolinijowy punktów, natenczas płaszczyzna biegunowa* E *tego punktu opisze pęk płaszczyzn, jednokréślny z owym szeregiem punktów.* Jakoż, jeżeli P′ i P″ są dwoma punktami szeregu prostolinijowego opisanego przez P, to spółrzędne punktu P będą

(α) $$x_i=\lambda x'_i+\mu x''_i,\ \text{przy}\ \ i=1,\,2,\,3,\,4.$$

Płaszczyzna więc biegunowa E punktu P ma spółrzędne

$$u_i=f_i(\lambda x'_1+\mu x''_1,\ \lambda x'_2+\mu x''_2,\ \lambda x'_3+\mu x''_3,\ \lambda x'_4+\mu x''_4),$$

przy $i=1,2,3,4$, czyli $\mu_i=\lambda f'_i+uf''_i$, t. j.

(β) $$\mu_i=\lambda u'_i+\mu u''_i,$$

przy $i=1, 2, 3, 4$, gdzie (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) i $(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4)$ są spółrzędnymi płaszczyzn biegunowych punktów P′ i P″. — Z wyrażeń (α) i (β) czytamy, że, jeżeli punkt P porusza się po prostéj, łączącéj dwa punkty P′ i P″, wtedy płaszczyzna biegunowa punktu P obraca się około prostéj, według któréj przecinają się płaszczyzny biegunowe punktów P′ i P″. A nadto, jeżeli punkt w szeregu (α) i płaszczyznę biegunową tego punktu w pęku (β), odpowiadające téj saméj wartości na stosunek $\mu:\lambda$, uważać będziemy jako elementy odpowiadające sobie, wtedy widocznie pęk płaszczyzn (β) będzie jednokréślny z pękiem punktów (α). Niech Q będzie tym punktem na prostéj P′P″, który jest sprzężony z punktem P względem danéj powierzchni $f=0$. Posuwaniu się punktu P po prostéj P′P″ odpowiada posuwanie się punktu Q po téjże prostéj. Pary punktów, odpowiadające jednoczesnym położeniom punktów P i Q, są wszystkie harmonicznie sprzężone z parą punktów, w których prosta P′P″ przecina daną powierzchnią stopnia 2-go. Mamy zatym twierdzenie: *pary punktów sprzężonych względem danéj powierzchni stopnia 2-go, leżące na jednéj prostéj, tworzą inwolucyją; punktami asymptotycznymi téj inwolucyi są punkty przecięcia się téj prostéj z daną powierzchnią stopnia 2-go.*

76. Płaszczyzna styczna i prosta normalna. Przyjmijmy teraz, że punkt P′ znajduje się na powierzchni stopnia 2-go, że zatym

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)=0, \tag{10}$$

czyli, wskutek (4),

$$x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + x'_3 f'_3 + x'_4 f'_4 = 0. \tag{10'}$$

W tym przypadku płaszczyzna biegunowa punktu P′, jak to z (10′) bespośrednio widoczne, przechodzi przez punkt P′. A więc *płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego na powierzchni stopnia 2-go, przechodzi przez tenże punkt.* Jeżeli więc na płaszczyźnie biegunowéj punktu P′, leżącego na powierzchni, obierzemy dowolnie punkt P″, wówczas punkty P′ i P″ będą sprzężonymi względem téj powierzchni. Prosta P′P″ przecina zatym powierzchnią w dwu punktach, tworzących parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów P′ i P″. Z tych zaś dwu punktów przecięcia jeden razem się schodzi z punktem P′, a więc także i drugi zejdzie się razem z tymże punktem P′. To znaczy, że prosta P′P″ przecina powierzchnią w dwu punktach, schodzących się razem w punkcie P′. Taką prostą nazywamy s t y c z n ą do powierzchni w punkcie P′. Płaszczyzna biegunowa punktu P′ na powierzchni jest więc miejscem gieometrycznym prostéj stycznéj do niéj w tym punkcie P′. — Miejsce gieometryczne stycznych w punkcie P′ do powierzchni stopnia 2-go jest więc płaszczyzną; zowie się ona p ł a s z c z y z n ą s t y c z n ą do powierzchni w tymże punkcie. Punkt P′ jest p u n k t e m s t y c z n o ś c i. A zatym: *płaszczyzna biegunowa punktu na powierzchni stopnia 2-go jest płaszczyzną styczną do powierzchni w tymże punkcie,* i nawzajem, *biegun płaszczyzny stycznéj do powierzchni stopnia 2-go jest jéj punktem styczności.*

Równanie (6) jest więc także równaniem płaszczyzny stycznéj do powierzchni (1) w punkcie P′, jeżeli ten punkt leży na powierzchni, a zatym, jeżeli jego spółrzędne czynią zadość równaniu warunkowemu (10). Równanie płaszczyzny stycznéj w punkcie (x', y', z') we spółrzędnych równoległych jest

$$(6') \quad xf_1(x', y', z', 1) + yf_2(x', y', z', 1) + zf_3(x', y', z', 1) + f_4(x', y', z', 1) = 0.$$

Prostą, przechodzącą przez punkt styczności i prostopadłą do płaszczyzny stycznéj, nazywamy normalną do powierzchni w tymże punkcie. Równania więc normalnéj do powierzchni (1) w punkcie P′ są we spółrzędnych prostokątnych

$$(11) \qquad \frac{x-x'}{f_1(x', y', z', 1)} = \frac{y-y'}{f_2(x', y', z', 1)} = \frac{z-z'}{f_3(x', y', z', 1)}.$$

Ponieważ płaszczyzna styczna jest płaszczyzną biegunową punktu styczności, przeto (art. 74) *płaszczyzna styczna do stożka rzędu 2-go w jego wiérzchołku jest nieoznaczona,* t. j. każda prosta, przechodząca przez wiérzchołek stożka, przecina powierzchnią stożka w dwu punktach, które się razem z nim schodzą. Dlategotéż wiérzchołek stożka nazwać można punktem podwójnym. A nadto, *płaszczyzna styczna do stożka rzędu 2-go, lub do walca rzędu 2-go w jakimkolwiek punkcie, przechodzi zarazem przez wiérzchołek stożka, a więc przez tworzącą, na któréj leży punkt styczności.*

77. Stożek styczny. Przetnijmy powierzchnią stopnia 2-go płaszczyzną E′, któréj biegunem jest P′, i na krzywéj przecięcia weźmy dowolnie punkt P″; natenczas płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie P″, jako płaszczyzna biegunowa tego punktu, przechodzi (art. 70) przez punkt P′, a prosta P′P″ jest styczną do powierzchni w P″. Mamy zatym twierdzenie: *jeżeli biegun jakiéjkolwiek płaszczyzny połączymy liniją prostą z jakimkolwiek punktem krzywéj, według któréj ta płaszczyzna przecina powierzchnią stopnia 2-go, to ta prosta będzie styczną do powierzchni w owym punkcie krzywéj przecięcia.* Otrzymać zatym możemy styczne, które z punktu danego można wyprowadzić do powierzchni stopnia 2-go, łącząc ten punkt linijami prostymi z każdym punktem krzywéj, według któréj płaszczyzna biegunowa punktu danego przecina tę powierzchnią. Miejsce gieometryczne tych stycznych nazywa się stożkiem stycznym do powierzchni. *Punkty styczności stożka stycznego do powierzchni są punktami linii, według któréj tę powierzchnią przecina płaszczyzna biegunowa jego wiérzchołka.* Aby otrzymać równanie stożka stycznego do powierzchni stopnia 2-go, a mającego wiérzchołek w punkcie P′, uważmy, że prosta P′P″ będzie styczną do powierzchni (1), jeżeli w równaniu (3)

$$(12) \qquad f'.f'' - (x''_1f'_1 + x''_2f'_2 + x''_3f'_3 + x''_4f'_4)^2 = 0;$$

albowiém wtedy oba pierwiastki równania (3) będą sobie równe, a więc oba punkty, w których prosta P′P″ przecina powierzchnią, zejdą się z sobą razem w jeden punkt. Jeżeli więc punkt P′ będziemy uważali jako stały, a punkt P″ jako punkt bieżący na któréjkolwiek stycznéj, którą z punktu P'_1 można wyprowadzić do powierzchni stopnia 2-go, wówczas spółrzędne punktu P″, wskutek związku (12), uczynią zadość równaniu

$$(13) \qquad f'.f-(x_1f'_1+x_2f'_2+x_3f'_3+x_4f'_4)^2=0.$$

To równanie jest zatym równaniem stożka stycznego, który można wyprowadzić z punktu P′ do powierzchni stopnia 2-go, przedstawionéj przez równanie (1). Równanie (13) jest stopnia 2-go względem spółrzędnych punktu bieżącego (x_1, x_2, x_3, x_4); stąd wypada, *że stożek styczny do powierzchni stopnia 2-go jest powierzchnią rzędu 2-go.*

[Dla jakiegokolwiek punktu styczności jest $f=0$; wskutek tego równanie (13) sprowadza się do

$$x_1f'_1+x_2f'_2+x_3f'_3+x_4f'_4=0$$

t. j. do równania (6). Spółrzędne zatym punktów styczności stożka są punktami linii, według któréj płaszczyzna biegunowa jego wiérzchołka przecina powierzchnią stopnia 2-go, jak to wyżéj widzieliśmy.]

78. Środek. Biegun płaszczyzny w nieskończoności nazywamy **środkiem** powierzchni stopnia 2-go; albowiém ten punkt jest środkiem każdéj cięciwy, przezeń przechodzącéj.

Wzory (7) wyrażają spółrzędne płaszczyzny biegunowéj przez spółrzędne jéj bieguna. Jeżeli więc podstawimy w tych wzorach $u'_1=u'_2=u'_3=0$, to otrzymamy trzy równania

$$f'_1=0,\ f'_2=0,\ f'_3=0$$

między spółrzędnymi środka powierzchni (1).

Przechodząc od spółrzędnych jednorodnych szczególnych do spółrzędnych równoległych, miéć będziemy

$$(14) \qquad \begin{aligned} f(x,y,z,1)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \end{aligned}$$

jako równanie powierzchni stopnia 2-go; a równania

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} f_1\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0,\\ f_2\equiv a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0,\\ f_3\equiv a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0 \end{aligned} \right.$$

dadzą nam wartości na spółrzędne środka téj powierzchni.

Równania (17), gdy w nich x, y, z uważamy jako spółrzędne bieżące, przedstawiają nam trzy płaszczyzny, a mianowicie płaszczyzny biegunowe punktów w nieskończoności, leżących w kierunkach odpowiednio osi x-ów, y-ów i z-ów. Punkt przecięcia się tych trzech płaszczyzn jest środkiem powierzchni stopnia 2-go.

Te trzy płaszczyzny (15): albo (I) przecinają się w jednym punkcie, albo (II) przecinają się według jednéj prostéj, albotéż (III) schodzą się razem.

I. W piérwszym przypadku będzie tylko jeden środek, który leży: albo (1°) w odległości skończonéj, albo (2°) w odległości nieskończonéj.

1°. Jeżeli środek leży w odległości skończonéj, to jego spółrzędne (x_0, y_0, z_0) będą wyrażone przez równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} a_{14}, a_{12}, a_{13} \\ a_{24}, a_{22}, a_{23} \\ a_{34}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

i przez dwa podobne równania, t. j. mieć będziemy

$$(16) \qquad \frac{x_0}{A_{41}} = \frac{y_0}{A_{42}} = \frac{z_0}{A_{43}} = \frac{1}{A_{44}},$$

gdzie A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44} oznaczają ilości dołączone do elementów a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} wyznacznika A (9), będącego wyróżnikiem funkcyi $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

2°. Środek leży w nieskończoności, jeżeli

$$A_{44} = 0,$$

a przynajmniéj jedna z ilości A_{41}, A_{42}, A_{43} jest od 0 różną.

II. W drugim przypadku ma miejsce cała prosta środków, i ta prosta leży: albo (1°) w odległości skończonéj, albo (2°) w nieskończoności.

1°. Spółrzędne środka winny być wszystkie nieoznaczone; a zatym musi być jednocześnie

$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 0.$$

Jeżeli z piérwszego i drugiego z równań (15) wyrugujemy z, a z piérwszego i trzeciego spółrzędną y, to otrzymamy, jako równania prostéj środków,

$$(17) \qquad \alpha_{23}x - a_{23}a_{14} = \alpha_{31}y - a_{31}a_{24} = \alpha_{12}z - a_{12}a_{34},$$

gdzie α_{ik} oznacza ilość dołączoną do elementu a_{ik} wyznacznika A_{44}.

2°. Prosta środków leży w nieskończoności:

a. Jeżeli płaszczyzny (15) są do siebie równoległe, z których conajwięcéj dwie razem się z sobą schodzą. Warunek temu przypadkowi odpowiadający jest

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{22}}{a_{32}} = \frac{a_{23}}{a_{33}},$$

przyczym iloczyny $a_{23}a_{14}$, $a_{31}a_{24}$, $a_{12}a_{34}$ nie mogą być wszystkie sobie równe. Jeżeli wogólności oznaczymy przez α_{ik} ilość dołączoną do elementu a_{ik} wyznacznika A_{44}, to w tym przypadku każde $\alpha_{ik} = 0$, przy $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$.

b. Jeżeli jedna z płaszczyzn (15) jest sama w nieskończoności, a dwie inne albo są do siebie równoległe, albotéż schodzą się z sobą razem. W tym przypadku, ponieważ jedna, np. piérwsza płaszczyzna leży w nieskończoności, jest $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, a $a_{14} \gtrless 0$, prócz tego $\frac{a_{22}}{a_{32}} = \frac{a_{23}}{a_{33}}$, a nadto te dwa stosunki albo nie są, albotéż są równe stosunkowi $\frac{a_{24}}{a_{34}}$, według tego, czy druga i trzecia płaszczyzna są tylko do siebie równoległe, czytéż razem się z sobą schodzą.

c. Jeżeli jedna z płaszczyzn jest nieoznaczoną, a dwie inne są do siebie równoległe, lecz nie schodzą się z sobą razem. Przyjmijmy, że piérwsza jest nieoznaczona, wtedy $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$, a iloczyny $a_{23}a_{34}$ i $a_{33}a_{24}$ są od siebie różne.

d. Jeżeli dwie płaszczyzny leżą w nieskończoności, albotéż jedna leży w nieskończoności, a druga jest nieoznaczona. W tym przypadku z sześciu spółczynników a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31} tylko jeden z trzech piérwszych jest różny od 0 i jeżeli np. $a_{11} \gtrless 0$, natenczas z dwu spółczynników a_{24} i a_{34} albo jeden albo oba są także od 0 różne.

Stąd widzimy także, że w przypadku 2° jest zawsze $\alpha_{ik}=0$, przy $i=1, 2, 3$, $k=1, 2, 3$.

III. W trzecim przypadku ma miejsce cała płaszczyzna środków, która może także znajdować się w nieskończoności. Aby płaszczyzny (15) razem się z sobą zeszły, powinno być nietylko $\alpha_{ik}=0$, ale nadto $a_{23}a_{14}=a_{31}a_{24}=a_{12}a_{34}$.

Jeżeli płaszczyzna środków ma się znajdować w nieskończoności, to wszystkie spółczynniki a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{33} są równe 0, a ze spółczynników a_{14}, a_{24}, a_{34} przynajmniéj jeden jest różny od 0.

Z tego rozbioru wynika, że *istnieją trzy główne rodzaje powierzchni stopnia 2-go: powierzchnie mające tylko jeden środek, powierzchnie mające prostą środków i powierzchnie mające płaszczyznę środków.* Każdy z tych trzech rodzajów rospada się znowu na dwa, według tego, czy środek, prosta środków, lub płaszczyzna środków leżą w odległości skończonéj, czytéż w nieskończoności. O powierzchniach, odpowiadających temu ostatniemu przypadkowi, mówimy, że one środka nie posiadają.

Łatwo spostrzéc, że powierzchnie drugiego rodzaju są powierzchniami walcowymi (art. 64). Powierzchnie zaś trzeciego rodzaju są albo dwiema płaszczyznami równoległymi, albotéż dwiema płaszczyznami schodzącymi się razem w jednę. Albowiém, skoro w tym przypadku nietylko wyróżnik A, ale nadto wszystkie wyznaczniki częściowe tego wyróżnika stopnia 3-go i 2-go są równe 0, to funkcyja $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest sumą conajwięcéj dwu kwadratów, a więc także iloczynem dwu funkcyj stopnia 1-go (I, art. 72).

Jeżeli powierzchnia stopnia 2-go posiada środek, to może się zdarzyć, że ten punkt leży na niéj saméj. Natenczas spółrzędne środka (16) uczynią zadość równaniu

$$f(x_0, y_0, z_0, 1) \equiv x_0 f_1(x_0, y_0, z_0, 1) + y_0 f_2(x_0, y_0, z_0, 1) + z_0 f_3(x_0, y_0, z_0, 1) + \\ + f_4(x_0, y_0, z_0, 1) = 0,$$

t. j. będzie

$$f_4(x_0, y_0, z_0, 1) \equiv \frac{a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}}{A_{41}} = \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

czyli $A=0$. A zatym, *stożek rzędu 2-go jest jedyną powierzchnią stopnia 2-go, któréj środek leży na saméj powierzchni* (art. 62). *Wiérzchołek jest środkiem stożka.*

79. Stożek asymptotyczny. Jeżeli środek powierzchni stopnia 2-go weźmiemy za wierzchołek stożka stycznego do powierzchni, natenczas, wskutek (15), równanie tego stożka (13) przywiedzie się do:

$$f^0 f - x^2{}_4 f^0{}_4{}^2 = 0,$$

lub, ponieważ $\quad f^0 \equiv x'_1 f^0_1 + x'_2 f^0_2 + x'_3 f^0_3 + x'_4 f^0_4 = x'_4 f_4^0,$

do $\quad x'_4 f^2 - x^2{}_4 f^0{}_4 = 0;$

równanie więc tego stożka we spółrzędnych równoległych jest następujące:

$$f(x, y, z, 1) - f_4(x_0, y_0, z_0, 1) = 0, \tag{18}$$

gdzie x_0, y_0, z_0 są spółrzędnymi środka powierzchni $f(x, y, z, 1) = 0$.

Linija, według której stożek styczny dotyka powierzchni stopnia 2-go, jest liniją przecięcia się téj powierzchni z płaszczyzną biegunową wierzchołka stożka, a płaszczyzna biegunowa środka jest płaszczyzną w nieskończoności. Przeto stożek styczny (18), mający wierzchołek w środku powierzchni stopnia 2-go, dotyka tę powierzchnią w nieskończoności. Taki stożek styczny nazywamy stożkiem asymptotycznym powierzchni stopnia 2-go.

Wstawiając w równanie (18) za a_{14}, a_{24}, a_{34} wartości wynikające z równań, na które przejdą równania (15), gdy w nie za x, y, z podstawimy x_0, y_0, z_0, otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) + \\ + 2a_{31}(z-z_0)(x-x_0) + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

jednorodne względem $x-x_0, y-y_0, z-z_0$, które przedstawia stożek asymptotyczny do powierzchni stopnia 2-go, jeżeli x_0, y_0, z_0 są spółrzędnymi środka téj powierzchni.

Jeżeli $A_{44} = 0$, wówczas strona lewa równania (19) roskłada się na iloczyn dwu czynników stopnia 1-go, a przeto stożek asymptotyczny roskłada się wtedy na dwie płaszczyzny asymptotyczne. Ten przypadek może wtedy zajść, kiedy powierzchnia należy do rodzaju drugiego, gdyż powierzchnie rodzaju trzeciego nie mają środka.

80. Płaszczyzny średnicowe i średnice. Podobnie, jak środek jest biegunem płaszczyzny w nieskończoności, tak nawzajem, płaszczyzna biegunowa punktu w nieskończoności przechodzi przez środek powierzchni stopnia 2-go. Z własności harmonicznych bieguna i płaszczyzny biegunowéj wypada, że płaszczyzna biegunowa punktu, który w pewnym kierunku oddala się do nieskończoności, jest miejscem środków cięciw powierzchni stopnia 2-go, równoległych do tego kierunku. Z tego powodu płaszczyznę biegunową punktu, oddalającego się w pewnym kierunku do nieskończoności, nazywamy płaszczyzną średnicową powierzchni stopnia 2-go, sprzężoną z tym kierunkiem.

Znajdziemy równanie płaszczyzny średnicowéj powierzchni stopnia 2-go, sprzężonéj z danym kierunkiem. Niech równania, określające kierunek dany, będą

(20) $$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},$$

gdzie l, m, n oznaczają stosunki kierunkowe, czyli spółrzędne punktu znajdującego się w tym kierunku w odległości $=1$ od początku. Weźmy w tym kierunku punkt (x', y', z'); będzie wtedy

$$\frac{x'}{l}=\frac{y'}{m}=\frac{z'}{n}=r, \text{ skąd } x'=lr,\ y'=mr,\ z'=nr.$$

Wstawiwszy te wartości na x', y', z' w równanie płaszczyzny biegunowéj punktu (x', y', z'), mieć będziemy

$$xf_1(rl, rm, rn, 1)+yf_2(rl, rm, rn, 1)+zf_3(rl, rm, rn, 1)+f_4(rl, rm, rn, 1)=0.$$

Gdy to równanie podzielimy przez r i następnie przyjmiemy $r=\infty$, to otrzymamy równanie

(21) $$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)y+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)z+ \\ +(a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n)=0,$$

lub

(21') $$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})l+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}m)+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34})n=0,$$

które przedstawia płaszczyznę biegunową punktu, znajdującego się w nieskończoności w kierunku (20), t. j. płaszczyznę średnicową sprzężoną z tym kierunkiem.

Z równania (21') widoczna, że płaszczyzna średnicowa przechodzi przez środek powierzchni stopnia 2-go. Jeżeli powierzchnia posiada prostą środków, wówczas każda jéj płaszczyzna średnicowa przechodzi przez tę prostą; a jeżeli powierzchnia posiada całą płaszczyznę środków, wówczas każda jéj płaszczyzna średnicowa schodzi się razem z tą płaszczyzną.

Nadto z (21') widoczna, że płaszczyzny (15), których punkt spólny jest środkiem powierzchni stopnia 2-go, są płaszczyznami średnicowymi, sprzężonymi odpowiednio z kierunkami osi x-ów, y-ów i z-ów. Albowiém, równanie (21') przechodzi na równania (15) przez podstawienie $l=1$, $m=n=0$; $m=1$, $n=l=0$ i $n=1$, $l=m=0$. Z (21) czytamy nakoniec, że z każdym kierunkiem (l, m, n) jest sprzężona płaszczyzna średnicowa w zupełności oznaczona, wyjąwszy przypadek, kiedy jest jednocześnie

$$a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=0,\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n=0,\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n=0, \\ a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n=0,$$

t. j. kiedy (art. 64) powierzchnia stopnia 2-go jest walcem, a kierunek (l, m, n) jest kierunkiem tworzącéj tego walca.

81. Średnice sprzężone. Obierzmy dowolnie w przestrzeni punkt P, na płaszczyźnie biegunowéj punktu P punkt P', a na prostéj, według któréj przecinają się płaszczyzny biegunowe punktów P i P', punkt P''; natenczas te trzy punkty P, P' i P'' wraz z punktem P''', w którym się przecinają płaszczyzny biegunowe tamtych trzech punktów, będą wiérzchołkami czworościanu, który posiada widocznie tę własność (art. 73), że każdy wiérzchołek jest biegunem ściany przeciwległéj, i nawzajem, każda ściana jest płaszczyzną biegunową wiérzchołka przeciwległego. Taki czworościan nazwiemy czworościanem z sobą samym sprzężonym względem powierzchni stopnia 2-go; jego wiérzchołki tworzą czwórkę punktów sprzężonych względem téjże powierzchni, t. j. są po dwa sprzężone względem powierzchni.

Dla jakiéjkolwiek powierzchni stopnia 2-go istnieje nieskończenie wiele czworościanów z samymi sobą sprzężonych, albowiém trzy wiérzchołki takiego czworościanu, P, P′ i P″, są punktami dowolnymi odpowiednio w przestrzeni, na pewnéj płaszczyźnie i na pewnéj prostéj, a tylko czwarty wiérzchołek, P‴, jest punktem przez tamte wyznaczonym. Jeżeli wiérzchołek P czworościanu z samym sobą sprzężonego umieścimy w środku powierzchni stopnia 2-go, wtedy trzy inne punkty P′, P″, P‴, oddalą się do nieskończoności, a trzy ściany P″PP‴, P‴PP′, P′PP″ staną się płaszczyznami średnicowymi powierzchni. Te trzy płaszczyzny średnicowe, jako płaszczyzny biegunowe punktów w nieskończoności, t. j. odpowiednio punktów P′, P″ i P‴ w kierunkach PP′, PP″, PP‴, są z tymiż kierunkami sprzężone, t. j. każda z nich jest miejscem środków cięciw powierzchni stopnia 2-go, równoległych do prostéj, według któréj się dwie pozostałe przecinają. Takie trzy płaszczyzny średnicowe nazywamy płaszczyznami średnicowymi sprzężonymi. Trzy więc płaszczyzny średnicowe sprzężone powierzchni stopnia 2-go są trzema ścianami kąta bryłowego trójściennego, którego krawędzi wychodzą ze środka powierzchni ku trzem punktom w nieskończoności, tworzącym wraz ze środkiem czwórkę punktów sprzężonych.

Proste (nieograniczone), według których trzy płaszczyzny średnicowe sprzężone powierzchni stopnia 2-go przecinają się po dwie, nazywają się kierunkami sprzężonymi, a odcinki tych prostych między punktami ich przecięcia się z daną powierzchnią stopnia 2-go — średnicami sprzężonymi téj powierzchni.

Jakakolwiek powierzchnia stopnia 2-go posiada nieskończenie wiele układów płaszczyzn średnicowych i średnic sprzężonych; albowiém w czwórce punktów sprzężonych P, P′, P″, P‴ dwa: P′ i P″ są punktami dowolnymi odpowiednio na pewnéj płaszczyźnie i na pewnéj prostéj, a tylko dwa: P i P‴ są punktami oznaczonymi, a mianowicie punkt P jest środkiem powierzchni, a punkt P‴ jest punktem przecięcia się płaszczyzn biegunowych punktów P, P′ i P″.

Niech równania

$$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1},\quad \frac{x}{l_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2},\quad \frac{x}{l_3}=\frac{y}{m_3}=\frac{z}{n_3} \tag{22}$$

określają trzy kierunki; płaszczyzny średnicowe sprzężone z tymi kierunkami są równoległe odpowiednio do płaszczyzn

$$(a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1)x+(a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1)y+(a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1)z=0,$$
$$(a_{11}l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2)x+(a_{21}l_1+a_{22}m_2+a_{23}n_2)y+(a_{31}l_2+a_{32}m_2+a_{33}n_2)z=0,$$
$$(a_{11}l_3+a_{12}m_3+a_{13}n_3)x+(a_{21}l_3+a_{22}m_3+a_{23}n_3)y+(a_{31}l_3+a_{32}m_3+a_{33}n_3)z=0.$$

Jeżeli trzy kierunki (22) są kierunkami sprzężonymi, wówczas płaszczyzny, przedstawione przez wypisane równania, są równolegle do trzech płaszczyzn średnicowych sprzężonych, a zatym każdéj z tych płaszczyzn odpowiadają dwa z trzech kierunków (22); a mianowicie: piérwszéj kierunki (l_2, m_2, n_2) i (l_3, m_3, n_3), drugiéj kierunki (l_3, m_3, n_3) i (l_1, m_1, n_1), a trzeciéj kierunki (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2). A zatym wtedy miéć będziemy

$$(23)\quad\begin{cases} a_{11}l_2l_3+a_{22}m_2m_3+a_{33}n_2n_3+a_{23}(m_2n_3+m_3n_2)+a_{31}(n_2l_3+n_3l_2)+a_{12}(l_2m_3+l_3m_2)=0,\\ a_{11}l_3l_1+a_{22}m_3m_1+a_{33}n_3n_1+a_{23}(m_3n_1+m_1n_3)+a_{31}(n_3l_1+n_1l_3)+a_{12}(l_3m_1+l_1m_3)=0,\\ a_{11}l_1l_2+a_{22}m_1m_2+a_{33}n_1n_2+a_{23}(m_1n_2+m_2n_1)+a_{31}(n_1l_2+n_2l_1)+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1)=0,\end{cases}$$

t. j. te trzy związki winny zachodzić między kierunkami średnic sprzężonych.

82. Osi główne. Kierunek prostopadły do płaszczyzny średnicowéj, z tym kierunkiem sprzężonéj, nazywa się *kierunkiem głównym*, a średnica mająca taki kierunek, zowie się *osią główną* powierzchni stopnia 2-go.

A zatym, kierunek określony przez równanie

$$(20)\qquad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

jest kierunkiem głównym powierzchni (14) wrazie, jeżeli jest prostopadły do płaszczyzny średnicowéj

$$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)y+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)z+$$
$$+a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n)=0,$$

z nim sprzężonéj, a przeto, ponieważ

$$l+m\cos\nu+n\cos\mu,\quad l\cos\nu+m+n\cos\lambda,\quad l\cos\mu+m\cos\lambda+n$$

są dostawami kierunkowymi prostéj (20) — wrazie, jeżeli

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{l+m\cos\nu+n\cos\mu}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{l\cos\nu+m+n\cos\lambda}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{l\cos\mu+m\cos\lambda+n}.$$

Gdy przez s oznaczymy wartość tych stosunków, to

$$(24)\quad\begin{cases}(a_{11}-s)l+(a_{12}-s\cos\nu)m+(a_{13}-s\cos\mu)n=0,\\ (a_{21}-s\cos\nu)l+(a_{22}-s)m+(a_{23}-s\cos\lambda)n=0,\\ (a_{31}-s\cos\mu)l+(a_{32}-s\cos\lambda)m+(a_{33}-s)n=0,\end{cases}$$

skąd wypada

$$(25)\qquad \Delta(s)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}-s\cos\nu, & a_{13}-s\cos\mu\\ a_{21}-s\cos\nu, & a_{22}-s, & a_{23}-s\cos\lambda\\ a_{31}-s\cos\mu & a_{32}-s\cos\lambda, & a_{33}-s\end{vmatrix}=0;$$

nadto mamy

$$(26) \qquad l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos\lambda + 2nl\cos\mu + 2lm\cos\nu = 1.$$

Ażeby więc wyznaczyć kierunki główne powierzchni stopnia 2-go, potrzeba przedewszystkim znaléść trzy pierwiastki równania (25) stopnia 3-go względem niewiadoméj s. Następnie dwa którekolwiek równania (24) wraz z równaniem (26) dadzą już wartości na stosunki kierunkowe l, m, n kierunku głównego, odpowiadającego któremukolwiek z tych trzech pierwiastków.

Stąd wnosimy, że *powierzchnie stopnia 2-go — mówiąc wogólności — posiadają trzy osi główne.*

83. Dla bliższego zbadania téj własności powierzchni stopnia 2-go, należy nam szczegółowo rozebrać równanie (25) stopnia 3-go względem s. Lewa strona tego równania jest wyróżnikiem funkcyi jednorodnéj stopnia 2-go

$$\begin{aligned} \varphi - s\sigma \equiv & (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy) \\ & - s(x^2 + y^2 + z^2 + 2\cos\lambda yz + 2\cos\mu zx + 2\cos\nu xy). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcyja

$$\sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2\cos\lambda yz + 2\cos\mu zx + 2\cos\nu xy,$$

wyrażająca kwadrat odległości punktu (x, y, z) od początku spółrzędnych, przy wszelkich wartościach rzeczywistych na x, y, z jest wciąż dodatną, a staje się $=0$ tylko dla $x=y=z=0$, przeto (I, art. 75) wszystkie trzy pierwiastki równania (25) są rzeczywiste. Skutkiem tego, i z uwagi, że równania (24) wraz z równaniem (26), przy każdéj wartości rzeczywistéj na s, dają wartości także rzeczywiste na l, m, n, *kierunki osi głównych powierzchni stopnia 2-go są kierunkami rzeczywistymi.*

Oznaczmy przez s_1 i s_2 dwa od siebie różne pierwiastki równania (25), a przez (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2) stosunki kierunkowe osi głównych, odpowiadających tym dwu pierwiastkom; wskutek (24) będzie wtedy:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - s_1)l_1 + (a_{12} - s_1\cos\nu)m_1 + (a_{13} - s_1\cos\mu)n_1 = 0, \\
&(a_{21} - s_1\cos\nu)l_1 + (a_{22} - s_1)m_1 + (a_{23} - s_1\cos\lambda)n_1 = 0, \\
&(a_{31} - s_1\cos\mu)l_1 + (a_{32} - s_1\cos\lambda)m_1 + (a_{33} - s_1)n_1 = 0, \quad \text{tudzież} \\
&(a_{11} - s_2)l_2 + (a_{12} - s_2\cos\nu)m_2 + (a_{13} - s_2\cos\mu)n_2 = 0, \\
&(a_{21} - s_2\cos\nu)l_2 + (a_{22} - s_2)m_2 + (a_{23} - s_2\cos\lambda)n_2 = 0, \\
&(a_{31} - s_2\cos\mu)l_2 + (a_{32} - s_2\cos\lambda)m_2 + (a_{33} - s_2)n_2 = 0.
\end{aligned}$$

A gdy te równania pomnożymy odpowiednio przez $l_2, m_2, n_2, -l_1, -m_1, -n_1$ i iloczyny do siebie dodamy, to wypadnie ($s_2 - s_1$ jest, z założenia, różne od 0)

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 + (m_1n_2 + m_2n_1)\cos\lambda + (n_1l_2 + n_2l_1)\cos\mu + (l_1m_2 + l_2m_1)\cos\nu = 0.$$

A zatym, *kierunki osi głównych, odpowiadające dwu różnym od siebie pierwiastkom równania (25), są do siebie prostopadłe.*

Należy jeszcze zbadać przypadki, w których równanie wyróżnikowe (25) posiada dwa lub wszystkie trzy pierwiastki równe sobie.

1°. Jeżeli wszystkie trzy pierwiastki równania $\Delta(s)=0$ są od siebie różne, wówczas żaden z tych pierwiastków nie przywodzi do 0 wszystkich wyznaczników częściowych stopnia 2-go wyznacznika $\Delta(s)$. W tym więc przypadku z dwu z równań (24), przy wartościach s, równych każdemu z tych pierwiastków, otrzymamy wartości na stosunki $l:m:n$, a następnie, zapomocą równania (26), wyznaczymy liczby l, m, n. A zatym, jeżeli wszystkie trzy pierwiastki równania (25) są od siebie różne, to powierzchnia stopnia 2-go posiada trzy osi główne, z których każda jest prostopadłą do dwu innych.

2°. Jeżeli równanie $\Delta(s)=0$ posiada dwa pierwiastki równe $s_1=s_2$, to natenczas ten pierwiastek dwukrotny przywiedzie do zera wszystkie wyznaczniki częściowe stopnia 2-go wyznacznika $\Delta(s)$, skutkiem czego trzy równania (24) sprowadzą się do tego jednego, którego spółczynniki nie są wszystkie równe 0. Pierwiastkowi więc dwukrotnemu równania (25) odpowiada nieskończenie wiele kierunków głównych, a te wszystkie kierunki są prostopadłe do kierunku głównego, który odpowiada trzeciemu pierwiastkowi s_3 równania (25). W tym więc przypadku średnicę, któréj kierunek odpowiada pierwiastkowi pojedynczemu s_3, i dwie którekolwiek do niéj i do siebie prostopadłe średnice można wziąć za trzy osi główne.

3°. Jeżeli nakoniec równanie wyróżnikowe $\Delta(s)=0$ posiada pierwiastek trzykrotny $s_1=s_2=s_3$, to natenczas ten pierwiastek przywiedzie do 0 wszystkie wyznaczniki częściowe stopni 2-go i 1-go wyznacznika $\Delta(s)$. W tym więc przypadku równania (24) są tożsamościowe, a przeto istnieje nieskończenie wiele kierunków głównych i jakiekolwiek trzy średnice wzajemnie prostopadłe do siebie można wziąć za trzy osi główne.

RÓWNANIE POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO WE SPÓŁRZĘDNYCH PŁASZCZYZNY.

84. Oznaczmy przez u_1, u_2, u_3, u_4 spółrzędne jednorodne (szczególne) płaszczyzny stycznéj do powierzchni równania (1) w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), będzie wtedy (art. 76)

$$\begin{aligned}
f'_1 &\equiv a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 = \varkappa u_1,\\
f'_2 &\equiv a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 = \varkappa u_2,\\
f'_3 &\equiv a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 = \varkappa u_3,\\
f'_4 &\equiv a_{41}x'_1 + a_{42}x'_2 + a_{43}x'_3 + a_{44}x'_4 = \varkappa u_4,
\end{aligned}$$

a nadto mamy

$$(\alpha)\qquad x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + x'_4u_4 = 0.$$

Zakładając, że wyróżnik A funkcyi $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ nie jest równy 0, otrzymamy przez rozwiązanie cztérech piérwszych równań

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}x'_1 &= \varkappa(\mathrm{A}_{11}u_1 + \mathrm{A}_{21}u_2 + \mathrm{A}_{31}u_3 + \mathrm{A}_{41}u_4),\\
\mathrm{A}x'_2 &= \varkappa(\mathrm{A}_{12}u_1 + \mathrm{A}_{22}u_2 + \mathrm{A}_{32}u_3 + \mathrm{A}_{42}u_4),\\
\mathrm{A}x'_3 &= \varkappa(\mathrm{A}_{13}u_1 + \mathrm{A}_{23}u_2 + \mathrm{A}_{33}u_3 + \mathrm{A}_{43}u_4),\\
\mathrm{A}x'_4 &= \varkappa(\mathrm{A}_{14}u_4 + \mathrm{A}_{24}u_2 + \mathrm{A}_{34}u_3 + \mathrm{A}_{44}u_4);
\end{aligned}$$

a wskutek podstawienia tych wartości na Ax'_1, Ax'_2, Ax'_3, Ax'_4 w równanie (α), pomnożone przez A, równanie powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych płaszczyzny,

$$(27)\quad \begin{aligned} F(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2 + 2A_{23}u_2u_3 + \\ + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{14}u_1u_4 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 = 0, \end{aligned}$$

gdzie, wskutek tego, że $a_{ik} = a_{ki}$, jest též $A_{ik} = A_{ki}$. Równanie (27) można także tak pisać:

$$(28)\quad F(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & u_3 \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & u_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A zatym, z wyjątkiem przypadku, gdy $A = 0$, równanie powierzchni (1) stopnia 2-go we spółrzędnych płaszczyzny jest także równaniem stopnia 2-go, czyli

Powierzchnia rzędu 2-go jest zarazem powierzchnią klasy 2-éj.

85. Kiedy $A = 0$, wtedy powierzchnia przedstawiona przez równanie (1) jest stożkiem, walcem lub układem dwu płaszczyzn. Weźmy pod uwagę tylko przypadek, kiedy ta powierzchnia jest stożkiem.

Przyjąwszy wiérzchołek stożka za początek spółrzędnych, przedstawimy ten stożek przez równanie

$$(29)\quad f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

a równanie płaszczyzny stycznéj do stożka w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) przez równanie

$$x_1f'_1 + x_2f'_2 + x_3f'_3 = 0.$$

Jeżeli więc u_1, u_2, u_3, u_4 są spółrzędnymi téj płaszczyzny, to mamy

$$\begin{aligned} f'_1 &\equiv a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = \varkappa u_1, \\ f'_2 &\equiv a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = \varkappa u_2, \\ f'_3 &\equiv a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = \varkappa u_3, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = u_4, \end{aligned}$$

a nadto

$$x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 = 0.$$

Rugując $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, \varkappa$ z tych równań, otrzymujemy dwa równania

$$u_4 = 0 \quad \text{i} \quad F(u_1, u_2, u_3) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

lub, oznaczając ogólnie przez P funkcyją stopnia 1-go względem spółrzędnych płaszczyzny u_1, u_2, u_3, u_4,

(30) $$u_4 = 0, \qquad F(u_1, u_2, u_3) + Pu_4 = 0.$$

A zatym, jeżeli powierzchnia przedstawiona przez równanie (1) jest stożkiem, to powierzchnią tę wyraża się we spółrzędnych płaszczyzny przez dwa równania jednoczesne, z których piérwsze jest równaniem wiérzchołka stożka, a drugie równaniem powierzchni stopnia 2-go. Płaszczyzny, których spółrzędne u_1, u_2, u_3, u_4 czynią zadość obu równaniom, są płaszczyznami stycznymi do téj powierzchni $F(u_1, u_2, u_3) + Pu_4 = 0$, przecinającymi się w punkcie $u_4 = 0$, a przeto obwodzą stożek styczny do powierzchni $F(u_1, u_2, u_3) + Pu_4 = 0$, mający wiérzchołek w punkcie $u_4 = 0$.

86. Jak powierzchnia rzędu 2-go tym się charakteryzuje, że linija prosta przecina ją w dwu punktach, tak znowu cechą gieometryczną powierzchni klasy 2-éj jest to, że przez każdą prostą można przesunąć dwie płaszczyzny styczne do téj powierzchni. Jakoż, weźmy pod uwagę prostą, według któréj przecinają się dwie płaszczyzny dowolnie dane e' i e'', których spółrzędne są (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) i $(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4)$. Spółrzędne jakiéjkolwiek płaszczyzny e, przechodzącéj przez tę prostą, można wyrazić przez

(31) $$u_i = \lambda u_i' + \mu u_i'', \text{ przy } i = 1, 2, 3, 4.$$

A zatym, jeżeli płaszczyzna e dotyka powierzchni klasy 2-éj, danéj przez równanie (28), wówczas

$$F(\lambda u'_1 + \mu u''_1,\ \lambda u'_2 + \mu u''_2,\ \lambda u'_3 + \mu u''_3,\ \lambda u'_4 + \mu u''_4) = 0, \quad \text{czyli}$$

(32) $$\lambda^2 F' + 2\lambda\mu(u''_1 F'_1 + u''_2 F'_2 + u''_3 F'_3 + u''_4 F'_4) + \mu^2 F'' = 0,$$

gdzie F' i F'' oznaczają wartości funkcyi F odpowiednio dla $u_i = u_i'$ i $u_i = u_i''$, a F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 są wartościami połów pochodnych cząstkowych funkcyi F, wziętych odpowiednio względem u_1, u_2, u_3, u_4, dla $u_i = u_i'$.

Równanie (32) jest stopnia 2-go względem $\mu : \lambda$; a zatym przez uważaną prostą można przesunąć dwie płaszczyzny styczne do powierzchni (28), t. j. do powierzchni klasy 2-éj.

87. Rozbiérając równanie (32) podobnie, jakeśmy rozbiérali równanie analogiczne linij krzywych klasy 2-éj (część I, rozdział VII), znajdziemy, że równanie

(33) $$u_1 F'_1 + u_2 F'_2 + u_3 F'_3 + u_4 F'_4 = 0$$

jest równaniem bieguna płaszczyzny e' względem powierzchni (28), lub równaniem punktu, w którym płaszczyzna e' dotyka powierzchni (28), jeżeli jest jednocześnie $F(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = 0$.

Oznaczając przez x_1, x_2, x_3, x_4 spółrzędne tego bieguna lub tego punktu styczności, będziemy mieli

$$F'_1 = \varkappa x_1, \quad F'_2 = \varkappa x_2, \quad F'_3 = \varkappa x_3, \quad F'_4 = \varkappa x_4,$$

a nadto, w drugim z tych dwu przypadków, $x_1 u'_1 + x_2 u'_2 + x_3 u'_3 + x_4 u'_4 = 0$. Rugowanie u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, $\varkappa$ z tych równań doprowadza nas do

$$(34) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & A_{24}, & x_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & A_{34}, & x_3 \\ A_{41}, & A_{42}, & A_{43}, & A_{44}, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

równania powierzchni (28) we spółrzędnych punktu. Stąd widzimy, że nawzajem,

Powierzchnia klasy 2-éj jest zarazem powierzchnią rzędu 2-go.

Tym twierdzeniem nie jest wszakże objęty przypadek, kiedy wyróżnik $\alpha \equiv \Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$ funkcyi $F(u_1, u_2, u_3, u_4)$ jest równy 0 (porównaj art. 84). I podobnie, jak równanie (1), w przypadku, kiedy wyróżnik $A = 0$, przedstawia stożek stopnia 2-go, t. j. taką powierzchnią stopnia 2-go, iż płaszczyzny biegunowe wszystkich punktów przestrzeni względem téj powierzchni przechodzą przez jeden punkt, — równanie (28), w przypadku, kiedy wyróżnik $\alpha = 0$, przedstawia taką powierzchnią stopnia 2-go, iż bieguny wszelkich płaszczyzn w przestrzeni względem téj powierzchni leżą na jednéj płaszczyźnie. Ta powierzchnia zowie się **powierzchnią granicową stopnia 2-go**. Jakoż, zważmy naprzód, że równanie (33) wyraża także warunek, aby biegun płaszczyzny (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) leżał na płaszczyźnie (u_1, u_2, u_3, u_4), tudzież, że to równanie téż można tak pisać:

$$(33') \qquad u'_1F_1 + u'_2F_2 + u'_3F_3 + u'_4F_4 = 0.$$

Przyjmijmy teraz, że wyróżnik α funkcyi $F(u_1, u_2, u_3, u_4)$ jest równy 0. Z własności wyznaczników wiadomo, że istnieją, przy tym założeniu, wartości na u_1, u_2, u_3, u_4, od 0 różne, dla których jest jednocześnie

$$(35) \qquad \begin{cases} F_1 \equiv A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4 = 0, \\ F_2 \equiv A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4 = 0, \\ F_3 \equiv A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4 = 0, \\ F_4 \equiv A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4 = 0. \end{cases}$$

A zatym, jeżeli $\alpha = 0$, wówczas równaniu (33') stanie się zadość, jakiekolwiek dalibyśmy wartości na u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, t. j. bieguny wszelkich płaszczyzn leżą na jednéj płaszczyźnie, któréj spółrzędne są dane przez równania (35).

Z powyższego wynika, że i punkty styczności wszelkich płaszczyzn stycznych do powierzchni granicowéj stopnia 2-go, jako bieguny tychże płaszczyzn, leżą na jednéj płaszczyźnie, czyli *powierzchnia granicowa stopnia 2-go jest płaszczyzną*. Podstawmy w równaniu (28), wrazie kiedy ono przedstawia powierzchnią granicową stopnia 2-go, $u_4 = 0$; wtedy otrzymamy

$$(36) \qquad F(u_1, u_2, u_3, 0) = 0,$$

równanie stożka stycznego do powierzchni granicowéj, mającego wierzchołek w początku spółrzędnych. Ten stożek stopnia 2-go jest styczny do powierzchni granicowéj, która, jak wiemy, jest płaską; widocznie przeto powierzchnia granicowa jest ograniczona krzywą stopnia 2-go, według któréj właśnie ten stożek styczny przecina się z płaszczyzną powierzchni granicowéj. A zatym, *powierzchnia granicowa stopnia 2-go jest powierzchnią płaską, ograniczoną przez krzywą stopnia 2-go.*

To, że równanie (34) wrazie, gdy $\alpha = 0$, przedstawia powierzchnią płaską, wynika wprost z tego, że przy $\alpha = 0$ wyznacznik strony lewéj tego równania, jest kwadratem zupełnym. Jakoż, oznaczmy przez α_{ik} ilości dołączone do elementów A_{ik} wyróżnika α i w wyznaczniku (34) do elementów piérwszéj jego kolumny, pomnożonych przez α_{11}, dodajmy elementy drugiéj, trzeciéj i czwartéj jego kolumny, pomnożone odpowiednio przez α_{12}, α_{13} i α_{14}. Wtedy, ponieważ

$$\alpha_{11}A_{i1} + \alpha_{12}A_{i2} + \alpha_{13}A_{i3} + \alpha_{14}A_{i4} = 0,$$

przy $i = 1, 2, 3, 4$, otrzymamy

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \frac{\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4}{\alpha_{11}} \begin{vmatrix} A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & x_1 \\ A_{22}, & A_{23}, & A_{24}, & x_2 \\ A_{32}, & A_{33}, & A_{34}, & x_3 \\ A_{42}, & A_{43}, & A_{44}, & x_4 \end{vmatrix},$$

albo, po uporządkowaniu strony prawéj według elementów ostatniéj kolumny,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv -\frac{(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4)^2}{\alpha_{11}},$$

albo nakoniec, z uwagi, że, wskutek $\alpha = 0$, jest $\alpha_{ik}{}^2 + \alpha_{ii}\alpha_{kk}$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv -(\sqrt{\alpha_{11}}x_1 + \sqrt{\alpha_{22}}x_2 + \sqrt{\alpha_{33}}x_3 + \sqrt{\alpha_{44}}x_4)^2.$$

ZASADA DWOISTOŚCI.

88. Powierzchnia rzędu 2-go jest zarazem powierzchnią klasy 2-éj, i nawzajem, powierzchnia klasy 2-éj jest zarazem powierzchnią rzędu 2-go; dwojaka zatym interpretacyja wypadków z tego samego rachunku, uskutecznionego na równaniu jednorodnym stopnia 2-go względem cztérech zmiennych, t. j. uważanie tych zmiennych bądź jako spółrzędne punktu, bądźtéż jako spółrzędne płaszczyzny, prowadzi jednocześnie do dwu twierdzeń, odnoszących się do powierzchni stopnia 2-go. Te dwa twierdzenia odpowiadają sobie w ten sposób, że każdy punkt w wysłowieniu jednego z nich jest w drugim zastąpiony przez płaszczyznę, każda płaszczyzna (jako zbiór punktów na niéj leżących) przez punkt (jako zbiór płaszczyzn przez ten punkt przechodzących), każda prosta uważana jako promień przez prostą uważaną jako oś, każda powierzchnia rzędu 2-go lub klasy 2-éj przez powierzchnią klasy 2-éj lub rzędu 2-go, a w szczególności stożek rzędu 2-go (względem którego płaszczyzny biegunowe wszelkich punktów przechodzą przez jeden punkt, wiérzchołek stożka) przez powierzchnią granicową stopnia 2-go (względem któréj bieguny wszelkich płaszczyzn leżą na jednéj płaszczyźnie, płaszczyźnie powierzchni granicowéj), i nakoniec krzywa przecięcia się dwu powierzchni stopnia 2-go (jako miejsce punktów spólnych powierzchniom) przez powierzchnią rozwijalną styczną do dwu powierzchni stopnia 2-go (jako obwiednią płaszczyzn stycznych spólnych tym powierzchniom). Teoryja biegunów i płaszczyzn biegunowych daje nam także metodę takiego podwajania twierdzeń i zagadnień gieometrycznych, t. z. metodę biegunowych wzajemnych.

Niech S będzie jakąkolwiek daną powierzchnią; uważajmy tę powierzchnią jako zbiór punktów na niéj leżących. Płaszczyzny biegunowe oddzielnych punktów na S względem danéj powierzchni stopnia 2-go K, którą nazwiemy kierownicą, są płaszczyznami stycznymi do innéj powierzchni Σ. Te dwie powierzchnie S i Σ w ten sposób sobie wzajemnie odpowiadają, iż nietylko każdemu punktowi na S odpowiada pewna płaszczyzna styczna do Σ, ale i nawzajem, każdéj płaszczyźnie stycznéj do S odpowiada pewien punkt na Σ. Z tego powodu dwie powierzchnie S i Σ nazwiemy powierzchniami biegunowo wzajemnymi.

Jeżeli powierzchnia S jest rzędu n-go, wtedy powierzchnia Σ jest klasy n-éj; albowiém n punktom, w których jedna i ta sama prosta przecina powierzchnią S, odpowiada n płaszczyzn stycznych do Σ, przechodzących przez jednę prostą, z tamtą sprzężoną względem kierownicy K (art. 73). W szczególności, jeżeli powierzchnia S jest rzędu 2-go, jéj biegunowo wzajemna Σ jest klasy 2-éj, a więc i rzędu 2-go. Stąd téż, z twierdzenia odnoszącego się do powierzchni rzędu 2-go można wyprowadzić inne twierdzenie, do tychże powierzchni się odnoszące, wypowiadając wprost twierdzenie odpowiednie dla powierzchni biegunowo wzajemnéj.

ĆWICZENIA.

(81). Okazać, że płaszczyzna biegunowa punktu (x', y', z') względem kuli $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$ jest prostopadłą do prostéj, łączącéj ten punkt ze środkiem kuli.

(82). Znaléść równanie prostéj, biegunowo wzajemnéj z prostą

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

i okazać, że prosta biegunowo wzajemna z prostą, przez środek powierzchni przechodzącą, jest prostą w nieskończoności.

(83). Znaléść spółrzędne środka powierzchni

$$x^2+y^2+3z^2+3yz+zx+xy-7x-14y-25z+1=0.$$

(84). Okazać, że powierzchnia

$$a_{11}x^2+4y^2+9z^2+12yz+6zx+4xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

posiada środek w nieskończoności, lub prostą środków w nieskończoności, według tego, czy $a_{11} \gtrless 1$, czyteż $a_{11} = 1$.

(85) Jeżeli (x, y, z) są spółrzędnymi powierzchni

$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) - 2Ax - 2By - 2Cz + 1 = 0$, okazać, że

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma),$$

i, że wrazie, gdy $a + b + c = 0$ i $A + B + C = 0$, powierzchnia mieć będzie prostą środków $x - \dfrac{Aa}{a^2 + b^2 + c^2} = y - \dfrac{Bb}{a^2 + b^2 + c^2} = z - \dfrac{Cc}{a^2 + b^2 + c^2}$.

(86). Równanie $32x^2 + y^2 + z^2 + 6yz - 16zx - 16xy - 6x - 12y - 12z + 18 = 0$ jest odniesione do układu prostokątnego; znaléść dostawy kierunkowe osi głównych powierzchni przedstawionéj przez to równanie.

(87). Okazać, że dwie powierzchnie, których równania we spółrzędnych prostokątnych są:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - (ax + by + cz)^2 = d^4,$$

$$\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right)\left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} - 1\right) - \left(\frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C}\right)^2 = 1,$$

mają osi główne jednakowego kierunku.

(88). Okazać, że dwie powierzchnie

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 1, \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

mają — mówiąc wogólności — tylko jeden układ średnic sprzężonych jednakowego kierunku; lecz jeżeli

$$\frac{1}{A}\left(a - \frac{b'c'}{a'}\right) = \frac{1}{B}\left(b - \frac{c'a'}{b'}\right) = \frac{1}{C}\left(c - \frac{a'b'}{c'}\right),$$

to ma miejsce nieskończenie wiele takich układów, przyczym kierunek jednéj średnicy będzie jednaki we wszystkich.

(89). Okazać, że styczne, wyprowadzone z początku do powierzchni $f \equiv a_{11}x^2 + \ldots + a_{44} = 0$, leżą na stożku $a_{44}f - (a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44})^2 = 0$; rozważając przypadek, kiedy to miejsce sprowadza się do dwu płaszczyzn, znaléść warunek, aby powierzchnia f była sama stożkiem.

(90). Równanie powierzchni

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 1,$$

biegunowo wzajemnéj względem kuli $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$, jest

$$A_{44}[\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) + \gamma(z-\gamma)]^2 = \alpha_{11}(x-\alpha)^2 + \alpha_{22}(y-\beta)^2 + \alpha_{33}(z-\gamma)^2 +$$
$$+ 2\alpha_{23}(y-\beta)(z-\gamma) + 2\alpha_{31}(z-\gamma)(x-\alpha) + 2\alpha_{12}(x-\alpha)(y-\beta),$$

gdzie A_{44} jest wyróżnikiem strony lewéj równania powierzchni, a α_{ik} są ilościami dołączonymi do elementów w wyznaczniku A_{44}.

ROZDZIAŁ VIII.

KLASYFIKACYJA POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

UPROSZCZENIE RÓWNANIA OGÓLNEGO.

89. Własności powierzchni stopnia 2-go, wyłożone w artykule poprzedzającym, zużytkujemy obecnie w celu wykrycia wszelkich powierzchni, których równania we spółrzędnych punktu są równaniami stopnia 2-go.

Niech

(1) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$

będzie danym równaniem ogólnym powierzchni stopnia 2-go, odniesionym do jakiegokolwiek układu spółrzędnych równoległych.

Przyjąwszy, że pierwotne osi spółrzędnych tworzą z sobą kąty λ, μ, ν, t. j. że $YOZ=\lambda$, $ZOX=\mu$, $XOY=\nu$, odnieśmy równanie (1) do nowych osi OX', OY', OZ', których stosunki kierunkowe są odpowiednio (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3). Aby otrzymać równanie powierzchni względem tych nowych osi, można równanie (1) przekształcić linijowo zapomocą wzorów

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=l_1x' +l_2y' +l_3z',\\ y&=m_1x' +m_2y' +m_3z',\\ z&=n_1x' +n_2y' +n_3z'. \end{aligned}\right.$$

Jeżeli założymy, że nowe osi spółrzędnych są równoległe do trzech kierunków sprzężonych powierzchni (art. 81), to natenczas wypadek podstawienia wartości (2) na x, y, z w (1) będzie następujący:

$$\begin{aligned}(3)\qquad &(a_{11}l_1^2+a_{22}m_1^2+a_{33}n_1^2+2a_{23}m_1n_1+2a_{31}n_1l_1+2a_{12}l_1m_1)x'^2\\ &+(a_{11}l_2^2+a_{22}m_2^2+a_{33}n_2^2+2a_{23}m_2n_2+2a_{31}n_2l_2+2a_{12}l_2m_2)y'^2\\ &+(a_{11}l_3^2+a_{22}m_3^2+a_{33}n_3^2+2a_{23}m_3n_3+2a_{31}n_3l_3+2a_{12}l_3m_3)z'^2\\ &+2(a_{14}l_1+a_{24}m_1+a_{34}n_1)x'+2(a_{14}l_2+a_{24}m_2+a_{34}n_2)y'+\\ &\qquad\qquad +2(a_{14}l_3+a_{24}m_3+a_{34}n_3)z'+a_{44}=0;\end{aligned}$$

albowiem spółczynniki wyrazów, w które wchodzą iloczyny $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, będą [wskutek wzorów (23) w art. (81)] równe 0. A zatym:

Jeżeli równanie powierzchni stopnia 2-go odniesiemy do trzech osi, które są równoległe do trzech kierunków sprzężonych téj powierzchni, to w otrzymane równanie nie wejdą wyrazy, zawierające iloczyny spółrzędnych.

Przyjmijmy w szczególnym przypadku, że nowe osi są równoległe do trzech osi głównych, t. j. do trzech kierunków sprzężonych i do siebie wzajemnie prostopadłych. Równanie powierzchni będzie wtedy kształtu (3), na wyznaczenie zaś stosunków kierunkowych nowych osi mieć będziemy równania następujące (art. 82):

$$(4)\qquad \begin{cases} (a_{11}-s)l + (a_{12}-s\cos\nu)m + (a_{13}-s\cos\mu)n=0,\\ (a_{21}-s\cos\nu)l + (a_{22}-s)m + (a_{23}-s\cos\lambda)n=0,\\ (a_{31}-s\cos\mu)l + (a_{32}-s\cos\lambda)m + (a_{33}-s)n=0, \end{cases}$$

gdzie s jest pierwiastkiem równania stopnia 3-go,

$$(5)\qquad \Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}-s\cos\nu, & a_{13}-s\cos\mu \\ a_{21}-s\cos\nu, & a_{22}-s, & a_{23}-s\cos\lambda \\ a_{31}-s\cos\mu, & a_{32}-s\cos\lambda, & a_{23}-s \end{vmatrix} = 0,$$

przyczym

$$(6)\qquad l^2+m^2+n^2+2mn\cos\lambda+2nl\cos\mu+2lm\cos\nu=1.$$

Wzory (4), (5), (6) upraszczają się wrazie, kiedy pierwotny układ spółrzędnych jest prostokątny, t. j. $\lambda=\mu=\nu=\frac{\pi}{2}\cdot$ Takich wzorów uproszczonych będziemy używali w ćwiczeniach.

Mnożąc równania (4) odpowiednio przez l, m, n, a następnie je dodając, otrzymujemy, uwzględniając jeszcze związek (6),

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn+2a_{31}nl+2a_{12}lm=s.$$

Stąd czytamy, że *spółczynniki przy* x'^2, y'^2, z'^2 *w równaniu* (3) *są pierwiastkami równania* (5). Oznaczywszy zatym te pierwiastki przez s_1, s_2 i s_3, tudzież, dla skrócenia, położywszy:

$$(7)\ a_{14}l_1+a_{24}m_1+a_{34}n_1=h_1,\ a_{14}l_2+a_{24}m_2+a_{34}n_2=h_2,\ a_{14}l_3+a_{24}m_3+a_{34}n_3=h_3,$$

będziemy mogli równanie (3) tak pisać

$$(8)\qquad s_1x'^2+s_2y'^2+s_3z'^2+2h_1x'+2h_2y'+2h_3z'+a_{44}=0.$$

90. Przekształćmy teraz równanie (8) przez przeniesienie początku spółrzędnych do innego punktu, przy zachowaniu jednak tego samego kierunku osi. Oznaczając przez (α, β, γ) spółrzędne początku nowych spółrzędnych, potrzeba w równaniu (8) podstawić

$$(9)\qquad x'=\alpha+x,\quad y'=\beta+y,\quad z'=\gamma+z.$$

Wskutek tego otrzymamy

$$(10)\ s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+2(h_1+s_1\alpha)x+2(h_2+s_2\beta)y+2(h_3+s_3\gamma)z+k=0, \text{ przy}$$

$$(11)\qquad k=s_1\alpha^2+s_2\beta^2+s_3\gamma^2+2h_1\alpha+2h_2\beta+2h_3\gamma+a_{44},$$

jako równanie powierzchni stopnia 2-go, odniesione do trzech osi prostokątnych, równoległych do osi głównych powierzchni i przecinających się w punkcie, którego spółrzędne względem osi X', Y', Z' są (α, β, γ), a przeto względem osi pierwotnych $(l_1\alpha+l_2\beta+l_3\gamma,\ m_1\alpha+m_2\beta+m_3\gamma,\ n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma)$.

Można skorzystać z nieoznaczoności spółrzędnych (α, β, γ), aby równanie (10) sprowadzić do postaci jaknajprostszéj. W tym celu należy rozróżnić trzy przypadki: (I), kiedy pierwiastki równania (5), t. j. $\Delta(s)=0$, są wszystkie trzy od 0 różne; (II), kiedy jeden pierwiastek tego równania jest 0, i (III), kiedy dwa pierwiastki równania $\Delta(s)=0$ są równe 0. Przypadek, kiedy wszystkie trzy pierwiastki równania $\Delta(s)=0$ są $=0$, jest niemożebny, gdyż wtedy równanie (10) byłoby równaniem stopnia 1-go.

I. W piérwszym przypadku, możemy wziąć

$$\alpha=-\frac{h_1}{s_1},\ \beta=-\frac{h_2}{s_2},\ \gamma=-\frac{h_3}{s_3}. \tag{12}$$

Wskutek tego równanie (10) przejdzie na

$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+k=0, \tag{13}$$

gdzie, według (11) i (12),

$$k=a_{44}-(s_1\alpha^2+s_2\beta^2+s_3\gamma^2). \tag{14}$$

Z samego kształtu równania (13) widoczna, że powierzchnia stopnia 2-go przedstawiona przez to równanie posiada środek i że tym środkiem jest początek spółrzędnych. To samo wynika wprost z równania (5). Jakoż, skoro to równanie nie posiada pierwiastka $=0$, to wyznacznik

$$A_{44}\equiv\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

będący w owym równaniu wyrazem od s niezależnym, nie może być $=0$, a więc (art. 78) powierzchnia (1) posiada jeden, ale tylko jeden środek w odległości skończonéj.

Oznaczmy przez a^2, b^2, c^2 wartości bezwzględne stosunków $-\frac{k}{s_1}, -\frac{k}{s_2}, -\frac{k}{s_3}$. Natenczas, zależnie od tego, jakimi są znaki liczb s_1, s_2, s_3, k, równanie (13) przywiedzie się, dla $k\gtrless 0$, do jednego z cztérech kształtów:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\ \ 1, \tag{I$_1$}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{I$_2$}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\ \ 1, \tag{I$_3$}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{I$_4$}$$

Wrazie zaś, jeżeli $k=0$, miéć będziemy, oznaczając przez a^2, b^2, c^2 wartości bezwzględne liczb $\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}$, jeszcze dwa następujące kształty:

$$(\mathrm{I}_5) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$(\mathrm{I}_6) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Powierzchnie (I_1) — (I_6) należą wszystkie do rodzaju piérwszego (art. 78) i do działu piérwszego, t. j. do tych, które posiadają tylko jeden środek w odległości skończonéj. Powierzchnią (I_1) nazywamy elipsojdą rzeczywistą; powierzchnią (I_2) elipsojdą urojoną (gdyż, według równania téj powierzchni, suma liczb dodatnych równa się liczbie ujemnéj); powierzchnia (I_3) hiperbolojdą jednopowłokową; powierzchnią (I_4) hiperbolojdą dwupowłokową. Równanie zaś (I_5) (będąc jednorodnym stopnia 2-go) przedstawia stożek rzeczywisty rzędu 2-go. Równaniu nakoniec (I_6) może uczynić zadość jedynie punkt $x=y=z=0$; wszakże powiadamy, że ono przedstawia stożek urojony.

II. Załóżmy, że $s_1=0$. W tym przypadku, skoro $A_{44}=0$, powierzchnia albo posiada jeden środek w nieskończoności, albo prostą środków.

Ponieważ z założenia, s_2 i s_3 są różne od 0, zatym można wziąć

$$(16) \qquad \beta=-\frac{h_2}{s_2}, \quad \gamma=-\frac{h_3}{s_3}.$$

Wskutek tego, równanie (10) przywiedzie się do

$$(17) \qquad s_2y^2+s_3z^2+2h_1x+k=0,$$

gdzie teraz

$$(18) \qquad k=2h_1\alpha-s_2\beta^2-s_3\gamma^2+a_{44}.$$

Jeżeli więc $h_1 \gtrless 0$, wówczas dla wyznaczenia α można przyjąć $k=0$, skąd

$$(19) \qquad \alpha=\frac{s_2\beta^2+s_3\gamma^2-a_{44}}{2h_1},$$

a równanie sprowadzi się do

$$(20) \qquad s_2y^2+s_3z^2+2h_1x=0.$$

Jeżeli zaś $h_1=0$, wówczas jakiekolwiek byłoby α, miéć będziemy

$$(21) \qquad s_2y^2+s_3z^2+k=0,$$

gdzie

$$(22) \qquad k=a_{44}-s_2\beta^2-s_3\gamma^2.$$

Oznaczmy w piérwszym przypadku przez p i q wartości bezwzględne stosunków $-\frac{h_1}{s_2}$ i $-\frac{h_1}{s_3}$. Natenczas, zależnie od tego, jakimi są znaki liczb s_2, s_3, h_1, równanie (20) sprowadzi się do jednego z dwu kształtów:

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

$$(\mathrm{II}_2) \qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x.$$

Równanie zaś (21), jeżeli przez b^2 i c^2 oznaczymy wartości bezwzględne stosunków $-\frac{k}{s_2}$ i $-\frac{k}{s_3}$, lub też $-\frac{1}{s_2}$ i $-\frac{1}{s_3}$ (według tego, czy $k \gtrless 0$, czyteż $k=0$), sprowadzi się do jednego z sześciu następujących kształtów:

$$(\text{II}_3) \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= \ \ 1,$$

$$(\text{II}_4) \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$(\text{II}_5) \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= \ \ 1,$$

$$(\text{II}_6) \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$(\text{II}_7) \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= \ \ 0,$$

$$(\text{II}_8) \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= \ \ 0.$$

Powierzchnie (II_1) i (II_2) należą do działu drugiego w rodzaju piérwszym, t. j. do tych, które posiadają jeden środek ale w nieskończoności; piérwszą z nich nazywamy p a r a b o l o j d ą e l i p t y c z n ą, a drugą p a r a b o l o j d ą h i p e r b o l i c z n ą. Powierzchnie zaś (II_3)—(II_8) należą do rodzaju drugiego działu piérwszego, t. j. do tych, które mają prostą środków w odległości skończonéj. Widocznie oś x-ów jest tą prostą środków. Powierzchnie (II_3) i (II_4) są w a l c a m i, których ślady na płaszczyźnie yz są e l i p s a m i (odpowiednio: rzeczywistą lub urojoną). Podobnież powierzchnie (II_5) i (II_6) są w a l c a m i, których ślady na płaszczyźnie yz są dwiema h i p e r b o l a m i s p r z ę ż o n y m i. Nakoniec równania (II_7) i (II_8) przedstawiają p a r y p ł a s z c z y z n (odpowiednio: rzeczywistych lub urojonych), przecinających się według osi x-ów.

III. Załóżmy, że $s_1=s_2=0$, a $s_3 \gtrless 0$. W tym przypadku można wziąć

$$(23) \qquad \gamma=-\frac{h_3}{s_3},$$

wskutek czego równanie (10) przejdzie na

$$(24) \qquad s_3z^2+2h_1x+2h_2y+k=0,$$

a równanie (11) na

$$(25) \qquad k=2h_1\alpha+2h_2\beta-s_3\gamma^2+a_{44}.$$

Ponieważ kierunki główne, odpowiadające pierwiastkom $s_1=s_2=0$ są nieoznaczone, dla pierwiastka bowiém podwójnego równania $\Delta(s)=0$ równania (4) nie są od siebie różne (art. 83), więc dla wyznaczenia kierunku (l_2, m_2, n_2), odpowiadającego pierwiastkowi $s_2=0$, można do równań (4) dołączyć np. równanie $h_2 \equiv a_{14}l_2 + a_{24}m_2 + a_{34}n_2 = 0$, a wtedy kierunek (l_1, m_1, n_1) będzie prostopadły do obu kierunków (l_2, m_2, n_2) i (l_3, m_3, n_3). Przyjąwszy, że $h_1 \equiv a_{14}l_1 + a_{24}m_1 + a_{34}n_1$ jest od 0 różne, będzie można wówczas jeszcze przyjąć, że

$$(26) \qquad k \equiv 2h_1\alpha - s_3\gamma^2 + a_{44} = 0, \quad \text{skąd} \quad \alpha = \frac{s_3\gamma^2 - a_{44}}{2h_1},$$

wskutek czego mieć będziemy, zamiast (24),

$$(27) \qquad s_3z^2 + 2h_1x = 0.$$

A jeżeli także $h_1 = 0$, natenczas będzie

$$(28) \qquad s_3z^2 + k = 0, \quad \text{gdzie} \quad k = a_{44} - s_3\gamma^2.$$

Gdy przez p oznaczymy wartość bezwzględną stosunku $-\frac{h_1}{s_3}$, to równanie (27) przywiedzie się do jednego z dwu kształtów:

$$(\mathrm{III}_1) \qquad z^2 = 2px,$$

$$(\mathrm{III}_2) \qquad z^2 = -2px.$$

Gdy zaś przez c^2 oznaczymy wartość bezwzględną stosunku $-\frac{k}{s_3}$, to równanie (28) przywiedzie się do

$$(\mathrm{III}_3) \qquad z^2 = c^2,$$

$$(\mathrm{III}_4) \qquad z^2 = -c^2.$$

Wrazie nakoniec, gdy $k = 0$, mamy jeszcze

$$(\mathrm{III}_5) \qquad z^2 = 0.$$

Równania (III_1) i (III_2) przedstawiają walce, których śladami na płaszczyźnie zx są parabole. Te dwie powierzchnie należą do działu drugiego w rodzaju drugim, t. j. do tych, które posiadają prostą środków w nieskończoności. Równania (III_3) i (III_4) przedstawiają pary płaszczyzn równoległych: piérwsze rzeczywistych, a drugie urojonych. Nakoniec równanie (III_5) przedstawia jednę płaszczyznę podwójną.

91. Rozumiejąc przez s_1, s_2, s_3 pierwiastki równania (5), t. j. $\Delta(s) = 0$, przez (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) kierunki tym pierwiastkom odpowiadające, które można wyznaczyć zapomocą równań (4), zaś $h_1, h_2, h_3, \alpha, \beta, \gamma, k$ według określających je równań (7), (12) i (11), będzie można wypadki poprzedzających badań tak z sobą zestawić:

s_1	s_2	s_3	h_1	k	powierzchnie stopnia 2-go
$\pm$	$\pm$	$\pm$		$\mp$	elipsojda
$\pm$	$\pm$	$\mp$		$\mp$	hiperbolojda jednopowłokowa
$\pm$	$\pm$	$\mp$		$\pm$	hiperbolojda dwupowłokowa
$\pm$	$\pm$	$\mp$		0	stożek
0	$\pm$	$\pm$	$\mp$		parabolojda eliptyczna
0	$\pm$	$\mp$	—		parabolojda hiperboliczna
0	$\pm$	$\pm$	0	$\mp$	walec eliptyczny
0	+	—	0	$\pm$	walec hiperboliczny
0	+	+	0	0	oś x-ów
0	$\pm$	$\mp$	0	0	dwie płaszczyzny przecinające się
0	0	$\pm$	$\pm$		walec paraboliczny
0	0	$\pm$	0	$\mp$	dwie płaszczyzny równoległe
0	0	$\pm$	0	0	płaszczyzna xy.

Oprócz tych trzynastu powierzchni, równanie stopnia 2-go nie przedstawia żadnéj innéj powierzchni, któraby istniała gieometrycznie. Przystąpimy teraz do bliższego zbadania kształtów tych powierzchni. Ograniczymy się jednak do rozważania tylko pięciu z nich, a mianowicie: elipsojdy, hiperbolojdy jedno- i dwupowłokowéj, parabolojdy eliptycznéj i parabolojdy hiperbolicznéj; pozostałe bowiém są nam już znane. Piérwsze trzy stanowią piérwszy dział, a dwie ostatnie drugi dział rodzaju piérwszego powierzchni stopnia 2-go, t. j. trzy piérwsze posiadają środek jeden w odległości skończonéj, a dwie ostatnie posiadają także jeden środek, ale w nieskończoności. Piérwsze trzy zowią się pospolicie powierzchniami stopnia 2-go ze środkiem, a dwie ostatnie powierzchniami stopnia 2-go bez środka.

POWIERZCHNIE STOPNIA 2-GO ZE ŚRODKIEM.

92. Elipsojda. Powierzchnią stopnia 2-go, któréj równanie daje się sprowadzić do postaci

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

nazwaliśmy elipsojdą.

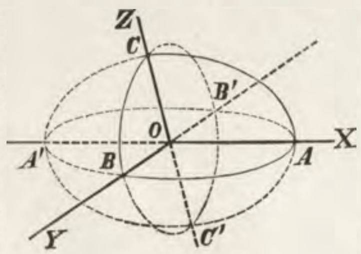


Fig. 80.

Z kształtu równania (1) widzimy, że x może się zmieniać tylko od $-a$ do $+a$, y od $-b$ do $+b$, a z od $-c$ do $+c$. Jeżeli więc weźmiemy na osi x-ów po obu stronach początku długości $OA=A'O=a$, na osi y-ów długości $OB=B'O=b$, na osi z-ów długości $OC=C'O=c$, i przez punkty A i A', B i B', C i C' poprowadzimy płaszczyzny odpowiednio równoległe do płaszczyzn YZ, ZX i XY, natenczas elipsojda (1) będzie całkowicie zawarta wewnątrz tak utworzonego równoległościanu. Początek jest środkiem elipsojdy; albowiém, jeżeli w równaniu (1) wstawimy

(2) $$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma,$$

to otrzymamy równanie

(3) $$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

które da na r dwie wartości liczebie równe, ale z przeciwnymi znakami. Każda więc cięciwa, przechodząca przez początek, jest w tym punkcie podzielona na dwie części równe.

Każda z płaszczyzn spółrzędnych przechodzi przez dwa kierunki główne elipsojdy; albowiém każda z nich jest miejscem środków cięciw równoległych do osi, która jest do niéj prostopadłą. Jakoż, cięciwy równoległe np. do osi z-ów, t. j. cięciwy, przedstawione przez równania

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

przecinają elipsojdę (1) w dwu punktach, dla których mamy

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}}.$$

Płaszczyzny spółrzędnych przecinają elipsojdę według trzech elips BCB'C', CAC'A', ABA'B', które nazywają się **przekrojami głównymi** elipsojdy. Jeżeli przetniemy elipsojdę (1) płaszczyzną równoległą do płaszczyzny YZ, to otrzymamy w przekroju elipsę, przedstawioną przez równanie

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

któréj środek leży na osi x-ów, a osi są równoległe do osi y-ów i z-ów i mają długości równe odpowiednio

$$2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{i} \quad 2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}.$$

Wmiarę, jak płaszczyzna przekroju oddala się od płaszczyzny YZ, elipsy przekroju coraz więcéj maleją, pozostają wszakże homotetycznymi względem elipsy przekroju głównego BCB'C'. Taksamo rzecz się ma z przekrojami równoległemi do dwu płaszczyzn ZX i XY. A zatym przekroje elipsojdy (1), równoległe do któréjkolwiek z trzech płaszczyzn spółrzędnych (głównych), są elipsami homotetycznymi z elipsą przekroju głównego. Stąd zaś wypada, że osi spółrzędnych, czyli kierunki główne, są osiami symetryi elipsojdy. Odcinki $A'A = 2a$, $B'B = 2b$, $C'C = 2c$ nazywamy **długościami** osi elipsojdy i jeżeli założymy $a > b > c$, to $2a$ jest jéj osią większą, $2b$ osią średnią, $2c$ osią mniejszą. Punkty końcowe A i A', B i B', C i C' na osiach zowiemy **wiérzchołkami** elipsojdy.

Podstawiając w (3) raz $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$, a drugi raz $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$, mieć będziemy

$$(5) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\gamma,$$

$$= \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\alpha - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\beta.$$

Ponieważ z założenia $a > b > c$, przeto widoczna z tego równania, że

$$c^2 \lesseqgtr r^2 \lesseqgtr a^2.$$

Elipsojda jest więc powierzchnią zamkniętą, a odległości jéj punktów od środka są conajwięcéj równe $a\left(\beta = \gamma = \frac{\pi}{2},\ \alpha = 0\right)$, a conajmniéj równe $c\left(\alpha = \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = 0\right)$. O innych przekrojach będzie mowa w rozdziale następującym.

W szczególnym przypadku, jeżeli $b = c$, równanie (1) sprowadza się do

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

i przedstawia elipsojdę obrotową, t. j. elipsojdę, którą utworzymy przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

około osi większéj (na osi x-ów). Istotnie przekroje elipsojdy (4), prostopadłe do osi x-ów, są kołami. Elipsojdę (4) nazywamy elipsojdą wydłużoną.

Jeżeli zaś $a = b$, to równanie (1) sprowadza się do

$$(5) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i przedstawia elipsojdę obrotową spłaszczoną, t. j. elipsojdę utworzoną przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

około osi mniejszéj (na osi z-ów).

Nakoniec, wrazie, gdy $a = b = c$, równanie elipsojdy (1) przywodzi się do

$$(6) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i przedstawia kulę, nakréśloną promieniem a z początku spółrzędnych.

93. Hiperbolojda jednopowłokowa. Powierzchnią, któréj równanie daje się przywieść do postaci

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

nazwaliśmy hiperbolojdą o jednéj powłoce. Płaszczyzna XY przecina tę hiperbolojdę według elipsy ABA′B′; płaszczyzny zaś ZX i YZ przecinają ją według hiperból: piérwsza według hiperboli, któréj osią rzeczywistą jest A′A, a oś urojona leży na osi OZ, a druga według hiperboli, któréj osią rzeczywistą jest B′B, a oś urojona leży na osi OZ. Przekroje równoległe do płaszczyzny XY są elipsami homotetycznymi,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

mającymi środki na OZ, a ich osi

$$2a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}},\quad 2b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}$$

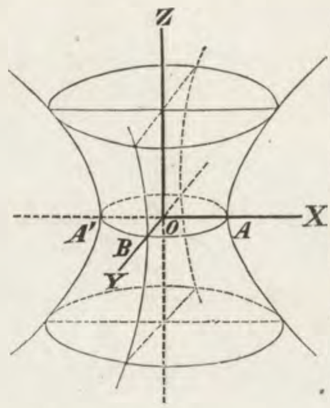


Fig. 81.

coraz więcéj rosną, wmiarę tego, jak ich płaszczyzny, czyto z jednéj, czytéż z drugiéj strony, coraz więcéj oddalają się od płaszczyzny XY; elipsa najmniejsza ABAB′, wyznaczona przez płaszczyznę XY, zowie się elipsą szyjną.

Hiperbolojda (1) składa się więc z jednéj powłoki ciągłéj, która rosciąga się do nieskończoności, rozszérzając się coraz więcéj po obu stronach elipsy szyjnéj.

Płaszczyzny równoległe do płaszczyzn XZ przecinają hiperbolojdę jednopowłokową (7) według hiperból homotetycznych, mających środki na osi y-ów; podobnie przekroje równoległe do płaszczyzny YZ są hiperbolami homotetycznymi, lecz mającymi swe środki na osi x-ów. Stąd wypada, że z trzech kierunków głównych, każdy z kierunków OX i OY przecina hiperbolojdę jednopowłokową w dwu punktach A, A′ i B, B′, gdy tymczasem trzeci kierunek główny OZ leży wewnątrz powierzchni. $AA'=2a$, $BB'=2b$, są długościami obu osi rzeczywistych; te osi są osiami elipsy szyjnéj, a $2c$ jest długością osi urojonéj.

Jeżeli $a=b$, to równanie (1) zamieni się na

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{8}$$

i przedstawia hiperbolojdę jednopowłokową obrotową, t. j. mogącą się utworzyć przez obrót hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=0$$

około osi urojonéj OZ.

94. Hiperbolojda dwupowłokowa. Równanie kształtu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{9}$$

przedstawia, jak powiedzieliśmy, hiperbolojdę dwupowłokową. Płaszczyzny YZ i ZY przecinają tę powierzchnią według hiperból, których oś rzeczywista $CC' = 2c$ ma kierunek osi OZ. Płaszczyzna XY nie przecina téj powierzchni, atoli przekroje równoległe do téj płaszczyzny są elipsami

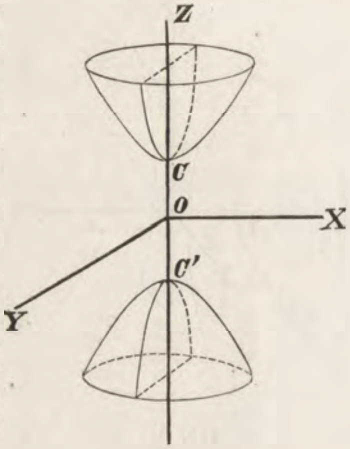


Fig. 82.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

homotetycznymi, mającymi środki na osi OZ, a których osi

$$2a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}, \quad 2b\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}$$

są rzeczywiste dopiéro przy $z^2 \geqq c^2$. Jeżeli więc przez C i C' poprowadzimy płaszczyzny równoległe do XY, natenczas między tymi płaszczyznami nie będzie się znajdował żaden punkt powierzchni.

Jeżeli płaszczyzna przekroju oddala się od punktu C w kierunku dodatnych z-ów, lub od punktu C' w kierunku ujemnych z-ów, to elipsa przekroju, pierwotnie zredukowana do jednego punktu, powiększa się nieograniczenie. Hiperbolojda (9) składa się więc z dwu powłók, rosciągających się do nieskończoności i od siebie oddzielonych. Z trzech osi powierzchni jedna $CC' = 2c$ jest rzeczywistą, a dwie inne $2a$, $2b$ są urojonymi.

Jeżeli dwie osi urojone, $2a$ i $2b$, są sobie równe, to równanie (9) sprowadza się do

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{10}$$

i przedstawia **hiperbolojdę dwupowłokową obrotową**, którą można utworzyć przez obrót hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad y = 0$$

około osi rzeczywistéj OZ.

95. Stożek asymptotyczny. Dwie hiperbolojdy, z których jedna jest jednopowłokową, a druga dwupowłokową, nazywamy *sprzężonymi*, jeżeli obie mają ten sam środek i teżsame osi, co do wielkości i kierunku, a osi rzeczywiste jednéj są urojonymi drugiéj. Równania

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \tag{11}$$

przedstawiają zatym dwie hiperbolojdy sprzężone.

Obie hiperbolojdy mają spólny stożek asymptotyczny; albowiém równanie tego stożka tak dla jednéj, jak i dla drugiéj powierzchni jest (art. 78)

$$(12)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

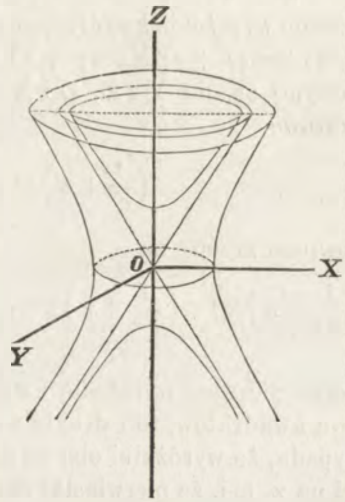


Fig. 83.

Hiperbolojda dwupowłokowa jest wtedy cała wewnątrz stożka asymptotycznego, który znowu jest wewnątrz hiperbolojdy jednopowłokowéj. Te trzy powierzchnie przecinają się w odległości nieskończonéj.

96. Związki między długościami osi i długościami średnic sprzężonych. Trzy powierzchnie stopnia 2-go ze środkiem, odniesione do swych osi, jako osi spółrzędnych, można przedstawić przez jedno równanie

$$(13)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

w elipsojdzie wszystkie trzy osi $2a$, $2b$, $2c$ są rzeczywiste; w hiperbolojdzie jednopowłokowéj oś $2c$ jest urojona, a więc za c należy wtedy w tym równaniu przyjąć $c\sqrt{-1}$; w hiperbolojdzie dwupowłokowéj osi $2a$ i $2b$ są urojone, a więc za a i b należy wtedy przyjąć $a\sqrt{-1}$ i $b\sqrt{-1}$.

Jeżeli zamiast osi tych powierzchni weźmiemy którykolwiek z układów średnic sprzężonych za osi spółrzędnych, to równanie każdéj z tych trzech powierzchni będzie takie samo, jak wtedy, kiedy osiami spółrzędnych są kierunki główne tych powierzchni. Albowiém, ponieważ środek jest początkiem spółrzędnych, niéma wyrazów zawiérających potęgi piérwsze spółrzędnych, a wskutek przyjęcia kierunków trzech średnic sprzężonych za kierunki osi spółrzędnych, znikną wyrazy zawiérające iloczyny yz, zx i xy. Równania zatym tych trzech powierzchni, odniesione do trzech średnic sprzężonych, będą kształtu:

$$(14)\qquad \frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1,$$

gdzie A, B, C są liczbami rzeczywistymi lub urojonymi.

Ażeby znaléść te liczby sposobem najkrótszym, należy tak postąpić. Jeżeli l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; $l_3\, m_3, n_3$ są dostawami kierunkowymi osi X, Y, Z równania (14) względem osi X, Y, Z równania (13), natenczas, chcąc otrzymać równanie (14), należy lewą stronę równania (13) przekształcić linijowo, kładąc

$$(15)\qquad \begin{cases} x=l_1X+l_2Y+l_3Z, \\ y=m_1X+m_2Y+m_3Z, \\ z=n_1X+n_2Y+n_3Z. \end{cases}$$

To przekształcenie linijowe powinno, jak wiemy, zamienić wyrażenie kwadratowe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ na wyrażenie kwadratowe $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}$; a że jednocześnie wyrażenie kwadratowe $x^2+y^2+z^2$ powinno przejść na $X^2+Y^2+Z^2+$ $+2YZ\cos\lambda+2ZX\cos\mu+2XY\cos\nu$, gdzie λ,μ,ν oznaczają kąty między nowymi osiami Y i Z, Z i X, X i Y, przeto jednocześnie wyrażenie kwadratowe

$$\left(\frac{1}{a^2}+\varkappa\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}+\varkappa\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}+\varkappa\right)z^2$$

powinno przejść na

$$\left(\frac{1}{A^2}+\varkappa\right)X^2+\left(\frac{1}{B^2}+\varkappa\right)Y^2+\left(\frac{1}{C^2}+\varkappa\right)Z^2+2\varkappa YZ\cos\lambda+2\varkappa ZX\cos\mu+$$
$$+2\varkappa XY\cos\nu.$$

Jeżeli piérwsze wyrażenie kwadratowe przy pewnéj wartości na $\varkappa$ jest sumą dwu kwadratów, to i drugie wyrażenie jest także sumą dwu kwadratów. Stąd wypada, że wyróżniki obu wyrażeń stają się równymi 0 przy téj saméj wartości na $\varkappa$, t. j. że pierwiastki obu równań

$$\left(\frac{1}{a^2}+\varkappa\right)\left(\frac{1}{b^2}+\varkappa\right)\left(\frac{1}{c^2}+\varkappa\right)=0 \quad \text{i}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A^2}+\varkappa, & \varkappa\cos\nu\,, & \varkappa\cos\mu \\ \varkappa\cos\nu\,, & \frac{1}{B^2}+\varkappa, & \varkappa\cos\lambda \\ \varkappa\cos\mu\,, & \varkappa\cos\lambda\,, & \frac{1}{C^2}+\varkappa \end{vmatrix}=0$$

są jednakie. Uporządkowawszy te równania i przyrównawszy do siebie spółczynniki przy tych samych potęgach liczby niewiadoméj $\varkappa$ obu równań, otrzymamy trzy związki:

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} A^2+B^2+C^2=a^2+b^2+c^2 \\ B^2C^2\sin^2\lambda+C^2A^2\sin^2\mu+A^2B^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2, \\ ABC\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}=abc, \end{array}\right.$$

a z nich, przy danych a, b, c i kierunkach średnic sprzężonych, wyznaczymy A, B i C.

Ponieważ liczba kwadratów dodatnych, ujemnych i równych zeru, na których sumę roskłada się wyrażenie kwadratowe, nie zmienia się wskutek przekształcenia linijowego (część I, rozdział V), przeto w lewéj stronie równania (14) będzie tyle kwadratów dodatnych i ujemnych, ile w lewéj stronie równania (13). Możemy więc przyjąć, że dla hiperbolojdy jednopowłokowéj C jest również urojone, a dla hiperbolojdy dwupowłokowéj urojonymi są A i B. 2A, 2B, 2C są długościami trzech średnic sprzężonych; wszystkie więc trzy są rzeczywistymi w elipsojdzie, jedna z nich 2C jest urojoną w hiperbolojdzie jednopowłokowéj, a dwie z nich 2A i 2B są urojonymi w hiperbolojdzie dwupowłokowéj.

Wiedząc to, możemy równania (16), odnosząc je do którejkolwiek z trzech powierzchni stopnia 2-go ze środkiem, tak ogólnie przeczytać:

a. *Suma algiebraiczna kwadratów długości którychkolwiek trzech średnic sprzężonych jest stała.*

b. *Suma algiebraiczna kwadratów pól trzech równoległoboków, utworzonych przez każdą parę średnic któregokolwiek układu trzech średnic sprzężonych, jest stała.*

c. *Objętość równoległościanu, którego krawędziami są trzy którekolwiek średnice sprzężone, jest stała.*

POWIERZCHNIE STOPNIA 2-GO BEZ ŚRODKA.

97. Parabolojda eliptyczna. Powierzchnią, przedstawioną przez równanie

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x, \tag{1}$$

nazwaliśmy parabolojdą eliptyczną. Ta powierzchnia przechodzi przez początek spółrzędnych; przekroje główne na XY i ZX są parabolami P i Q, których oś spólna ma kierunek OX.

Przetnijmy powierzchnią (1) płaszczyzną do OX prostopadłą. Dla $x=0$ przekrój redukuje się do punktu O, dając zaś na x wartości dodatne i coraz większe, otrzymamy elipsy homotetyczne, których środki leżą na OX i które nieograniczenie wzrastają. Parabolojda eliptyczna (1) jest więc jedną powłoką nieskończoną, położoną całkowicie z prawéj strony płaszczyzny YZ. Oś OX jest osią symetryi téj powierzchni, a punkt O jéj wiérzchołkiem.

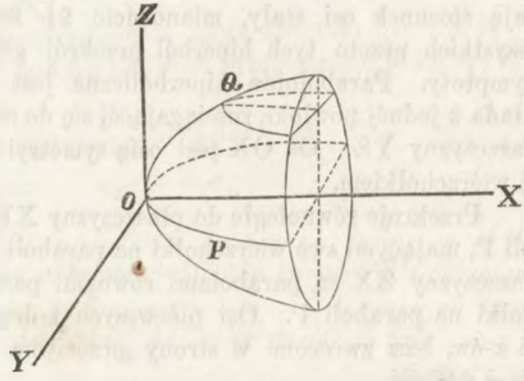


Fig. 84.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XY są parabolami równymi paraboli P i mającymi swe wiérzchołki na paraboli Q. Taksamo przekroje równoległe do płaszczyzny ZX są parabolami równymi paraboli Q, mającymi swe wiérzchołki na paraboli P. O innych przekrojach płaskich będzie mowa w rozdziale następującym.

Jeżeli $p=q$, parabolojda będzie obrotową.

98. Parabolojda hiperboliczna. Powierzchnią, przedstawioną przez równanie

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x, \tag{2}$$

nazwaliśmy parabolojdą hiperboliczną. Przekroje główne na XY i ZX są dwiema parabolami P i Q, których osi mają kierunki przeciwne na osi x-ów. Płaszczyzna YZ przecina powierzchnią według dwu prostych OA i OB, tworzących z osią OZ kąty, których styczna jest równa $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Przekroje równoległe do płaszczyzny YZ są hiperbolami takimi, iż wrazie, gdy ten przekrój leży po prawéj stronie płaszczyzny YZ, oś rzeczywista hiperboli jest równoległa do osi y-ów, a wrazie, gdy ów przekrój leży po lewéj stronie płaszczyzny YZ, oś rzeczywista hiperboli jest równoległa do osi z-ów. Rzuty tych wszystkich hiperból na płaszczyzny YZ mają stosunek osi stały, mianowicie $2\sqrt{2px} : 2\sqrt{2qx} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$; dla wszystkich przeto tych hiperból przekrój główny na YZ przedstawia ich asymptoty. Parabolojda hiperboliczna jest więc powierzchnią, która się składa z jednéj powłoki, rosciągającéj się do nieskończoności po obu stronach płaszczyzny YZ. Oś OX jest osią symetryi téj powierzchni; punkt O jest jéj wiérzchołkiem.

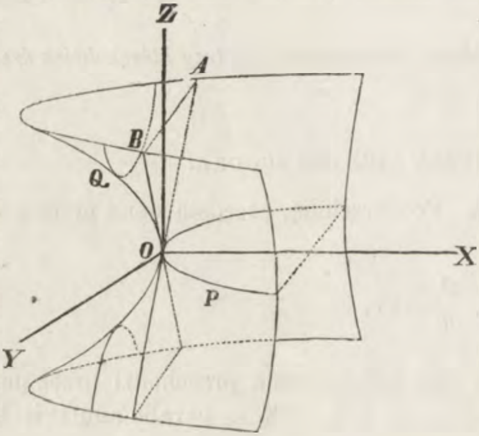


Fig. 85.

Przekroje równoległe do płaszczyzny XY są parabolami równymi paraboli P, mającymi swe wiérzchołki na paraboli Q; przekroje zaś równoległe do płaszczyzny ZX są parabolami równymi paraboli Q, mającymi swe wiérzchołki na paraboli P. Osi piérwszych i drugich paraból są równoległe do osi x-ów, lecz zwrócone w strony przeciwne. O innych przekrojach będzie mowa późniéj.

Równanie

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0 \tag{3}$$

przedstawia stożek asymptotyczny parabolojdy (2). Stożek ten roskłada się na dwie płaszczyzny

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \tag{4}$$

które przechodzą przez oś x-ów i przez te dwie proste OA i OB. Te dwie płaszczyzny są płaszczyznami asymptotycznymi parabolojdy hiperbolicznéj (2); są one miejscem asymptot przekrojów równoległych do płaszczyzny YZ.

99. Równania obu parabolojd, odniesione do jakichkolwiek trzech kierunków sprzężonych. Równania obu tych parabolojd można przedstawić przez jedno równanie

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x, \tag{5}$$

pamiętając, że jeżeli parabolojda jest hiperboliczną, to parameter q jest ujemny

Jeżeli przez l, m, n oznaczymy dostawy kierunkowe jakiéjkolwiek prostéj, natenczas równanie płaszczyzny średnicowéj powierzchni (5), z tą prostą sprzężonéj, będzie następujące [art. 77, (21')]:

$$\frac{y}{p}m+\frac{z}{q}n=l \quad \text{czyli} \quad mqy+npz=lpq. \tag{6}$$

Stąd widzimy, że *wszystkie płaszczyzny średnicowe obu parabolojd mają tenże kierunek, mianowicie kierunek ich osi* (t. j. osi OX). Z tego wypada, że dwa kierunki (l_2, m_2, n_2) i (l_3, m_3, n_3) wraz z kierunkiem osi x-ów, czyli z kierunkiem $(l_1=1, m_1=n_1=0)$, przedstawiają trzy kierunki sprzężone powierzchni (3), jeżeli [art. 81, (23)]

$$\frac{m_2m_3}{p}+\frac{n_2n_3}{q}=0. \tag{7}$$

Weźmy te trzy kierunki sprzężone za nowe kierunki osi x, y, z. Aby równanie (5) odnieść do tych nowych osi, dość przekształcić je linijowo, podstawiając

$$\left\{\begin{aligned} x&=x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=\phantom{x'+{}}m_2y'+m_3z',\\ z&=\phantom{x'+{}}n_2y'+n_3z'.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Wskutek tego przekształcenia, przy uwzględnieniu związku (7), jest

$$\left(\frac{{m_2}^2}{p}+\frac{{n_2}^2}{q}\right)y'^2+\left(\frac{{m_3}^2}{p}+\frac{{n_3}^2}{q}\right)z'^2=2x'+2l_2y'+2l_3z'.$$

A jeżeli następnie przeniesiemy początek do punktu (α, β, γ) i wyznaczymy spółrzędne tego punktu z warunków, aby spółczynniki przy y i z i wyraz niezależny były równe 0, to otrzymamy ostatecznie równanie

$$\frac{y^2}{\mathrm{P}}+\frac{z^2}{\mathrm{Q}}=2z, \tag{9}$$

gdzie

$$\frac{1}{\mathrm{P}}=\frac{{m_2}^2}{p}+\frac{{n_2}^2}{q},\quad \frac{1}{\mathrm{Q}}=\frac{{m_3}^2}{p}+\frac{{n_3}^2}{q}. \tag{10}$$

Równanie więc parabolojd, odniesione do jakichkolwiek trzech kierunków sprzężonych, gdy początek spółrzędnych leży na ich powierzchni, jest takie samo, jak równanie odniesione do kierunków głównych. Między parametrami P i Q w równaniu (9), a parametrami p i q w równaniu (3) mają miejsce związki (10). Nadto, ponieważ lewa strona równania (9) jest wypadkiem przekształcenia linijowego (8) lewéj strony równania (5), przeto parametry P i Q mają znaki jednakie, lub różne, według tego, czy parametry p i q są tegoż samego znaku, czytéż znaków różnych.

ĆWICZENIA.

(91). Określić bliżéj powierzchnie, przedstawione przez następujące równania (spółrzędne prostokątne):

1. $3z^2 - x^2 - y^2 + 4xy = a^2$.
2. $yz + zx + xy = a^2$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4zx + 2xy = 1$.
4. $x^2 + y^2 + 2(yz + zx + xy) = a^2$.
5. $2z^2 - 5x^2 - 2y^2 + 10xy + 4yz + 4y + 16z + 16 = 0$.
6. $x^2 + 2(yz + zx + xy) + 2(z - y - 1) = 0$.
7. $x^2 + y^2 + 3z^2 + 3yz + zx + xy - 7x - 14y - 25z + d = 0$.
8. $5y^2 - 2x^2 - z^2 - 4xy - 6yz + 8zx = 1$.

(92). Okazać, że równanie we spółrzędnych prostokątnych

$$a_{11}x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6zx + 4xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

będzie przedstawiało parabolojdę eliptyczną, walec paraboliczny, lub parabolojdę hiperboliczną, według tego, czy $a_{11} >, =,$ czytéż < 1.

(93). Jakie powierzchnie przedstawia poprzednie równanie, a). jeżeli $3a_{24} = 2a_{34}$, $a_{11} >=< 1$, i b). jeżeli $6a_{14} = 3a_{24} = 2a_{34}$, $a_{11} = 1$.

(94). Zbadać, jakimi są powierzchnie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(1 - \mu)yz - 2zx = c^2$ przy rozmaitych wartościach na μ.

(95). Zbadać podobnie powierzchnią

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{3x}{a} - \frac{3y}{b} - \frac{3z}{c} + 3 = 0$$

i okazać, że płaszczyzny spółrzędnych są do niéj styczne.

(96). Okazać, że jeżeli w równaniu ogólnym powierzchni stopnia 2-go jest $a_{23} = 0$, to wtedy równanie będzie przedstawiało parabolojdę obrotową wrazie, gdy $a_{33} = a_{22} \pm a_{11}$. Przy uwzględnieniu znaku wyższego, równaniami osi będą $a_{33}z + a_{34} = 0$, $(a_{33}x + a_{14})\sqrt{a_{11}} + (a_{33}y + a_{24})\sqrt{a_{22}} = 0$.

(97). Okazać, że równanie $a(y - z)^2 + b(z - x)^2 + c(x - y)^2 = d^2$ przedstawia walec, który jest hiperbolicznym, jeżeli $bc + ca + ab < 0$. Wrazie zaś, kiedy

$bc+ca+ab>0$, ten walec jest eliptycznym, lub urojonym, według tego, czy $a+b+c>0$, czyteż <0. Jeżeli $a+b+c=0$, to przekrój główny będzie hiperbolą równoboczną.

(98). Powierzchnia

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz+2cazx-2abxy=1$$

jest hiperbolojdą jednopowłokową, a suma kwadratów jéj osi rzeczywistych jest równa kwadratowi jéj osi urojonéj.

(99). Jeżeli r jest połową któréjkolwiek osi powierzchni

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2_{12}xy=1,$$

to okazać, że wartości na r^2 są pierwiastkami równania

$$\frac{a_{31}a_{12}}{a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}+\dfrac{a_{23}}{r^2}}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{31}+\dfrac{a_{31}}{r^2}}+\frac{a_{23}a_{31}}{a_{23}a_{31}-a_{33}a_{12}+\dfrac{a_{13}}{r^2}}=1.$$

(100). Powierzchnia, któréj równanie odniesione do osi tworzących z sobą kąty λ, μ, ν, jest $ax^2+by^2+cz^2=1$, będzie obrotową, jeżeli

$$\frac{a\cos\lambda}{\cos\lambda-\cos\mu\cos\nu}=\frac{b\cos\mu}{\cos\mu-\cos\nu\cos\lambda}=\frac{c\cos\nu}{\cos\nu-\cos\lambda\cos\mu}.$$

(101). Równanie $ax^2+by^2+cz^2=1$ wrazie, gdy je odniesiemy do osi nieprostokątnych lecz czyniących ze sobą kąty λ, μ, ν, może być przekształcone na $2m(yz+zx+xy)=1$ nieskończenie wielu sposobami. Okazać, że

$$\frac{m}{a}+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}=\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu-\frac{3}{2},$$

$$m^2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=\cos\mu\cos\nu+\cos\nu\cos\lambda+\cos\lambda\cos\mu-\cos\lambda-\cos\mu-\cos\nu,$$

$$\frac{2m^3}{abc}=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Okazać nadto, że jeżeli $\lambda=\mu=\nu=60^0$ to albo $-2a=b=c$, albo $a=-2b=c$, albotéż $a=b=-2c$.

(102). Okazać, że wrazie, gdy równanie hiperbolojdy, odniesione do osi nachylonych do siebie pod kątami λ, μ, ν takimi, że $\lambda+\mu+\nu=\pi$, jest

$$yz\cos\lambda+zx\cos\mu+xy\cos\nu=d^2,$$

to długość jednéj z jéj osi $=4d$, a mimośród (e) jéj przekroju eliptycznego głównego jest wyznaczony przez równanie

$$\frac{4e^4}{1-e^2}=\frac{1-8\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}{\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu}.$$

(103). Trzy dane punkty P_1, P_2, P_3 na prostéj pozostają wciąż na trzech płaszczyznach wzajem do siebie prostopadłych; okazać, że jakikolwiek punkt P na téj prostéj opisuje elipsojdę.

(104). Znaléść miejsce punktu, którego odległość od prostéj danéj jest wciąż równa jego odległości od płaszczyzny danéj.

(105). Znaléść miejsce punktu, przez który można poprowadzić trzy proste, wzajem do siebie prostopadłe i przecinające krzywą, określoną przez równania $z=0$, $ax^2+by^2=1$.

(106). Okazać, że miejscem środków wszystkich prostych, przechodzących przez punkt dany i ograniczonych dwiemá danymi płaszczyznami, jest walec hiperboliczny.

(107). Śladem elipsojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ na płaszczyźnie XY jest elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$; okazać, że stożek, mający tę elipsę za kierownicę, przecina elipsojdę jeszcze według drugiéj krzywéj płaskiéj, któréj płaszczyzna przecina płaszczyznę XY według biegunowéj rzutu wiérzchołka stożka na płaszczyznę XY względem téj elipsy.

(108). Jeżeli $(x_1, y_1\ z_1)$, (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) są spółrzędnymi końców P_1, P_2, P_3 połów r_1, r_2, r_3 trzech średnic sprzężonych powierzchni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, to natenczas

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2,\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2=b^2,\quad z_1^2+z_2^2+z_3^2=c^2,$$
$$y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0.$$

(109). Suma kwadratów rzutów trzech średnic sprzężonych powierzchni stopnia 2-go ze środkiem na jakąkolwiek prostą lub na jakąkolwiek płaszczyznę jest stała.

(110). Okazać, że równanie płaszczyzny przechodzącéj przez P_1, P_2, P_3, wymienione w zadaniu (108), jest

$$\frac{x}{a^2}(x_1+x_2+x_3)+\frac{y}{b^2}(y_1+y_2+y_3)+\frac{z}{c^2}(z_1+z_2+z_3)=1.$$

(111). Okazać, że jeżeli punkt P_1, określony w zadaniu (108), jest stały, to prostopadła ze środka na płaszczyznę $P_1P_2P_3$ opisuje stożek $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=$ $=(xx_1+yy_1+zz_1)^2$.

(112). Okazać, że walec, którego oś jest równoległą do OZ, a ślad na płaszczyźnie XY jest przedstawiony przez równanie biegunowe

$$\frac{ab}{r}=\sqrt{a^2\sin\theta+b^2\cos\theta}\left\{1-\frac{c^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}{a^2b^2}\right\},$$

jest miejscem kierownic wszystkich przekrojów elipsojdy przez płaszczyzny przechodzące przez oś najmniéjszą.

ROZDZIAŁ IX.

O WŁASNOŚCIACH SZCZEGÓLNYCH POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

PŁASZCZYZNY STYCZNE I PROSTE NORMALNE.

100. Powierzchnie ze środkiem. Równania powierzchni stopnia 2-go ze środkiem, odniesione do osi głównych, można pisać w postaci

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1. \tag{1}$$

Dla elipsojdy wszystkie trzy spółczynniki a, b, c posiadają wartości dodatne; dla hiperbolojdy jednopowłokowéj jeden z tych spółczynników, c, jest ujemny; dla hiperbolojdy dwupowłokowéj dwa spółczynniki, a i b, są ujemne; dla stożka należy na stronie prawéj tego równania napisać 0 zamiast 1, a c uważać jako ujemne.

Niech (x, y, z) będą spółrzędnymi punktu danego na powierzchni (1). Równanie zatym płaszczyzny stycznéj do powierzchni (1) w tym punkcie jest (art. 76)

$$aXx + bYy + cZz = 1. \tag{2}$$

Równanie zaś płaszczyzny średnicowéj sprzężonéj z kierunkiem prostéj, łączącéj punkt styczności ze środkiem, jest (art. 80)

$$aXx + bYy + cZz = 0.$$

A zatym, *płaszczyzna styczna do powierzchni stopnia 2-go ze środkiem jest równoległa do płaszczyzny średnicowéj sprzężonéj z kierunkiem prostéj, łączącéj środek powierzchni z punktem styczności.*

Jeżeli punkt (x, y, z) nie leży na powierzchni (1), wówczas równanie (2) przedstawia płaszczyznę biegunową tego punktu. A zatym, *płaszczyzna biegunowa względem powierzchni stopnia 2-go ze środkiem jest równoległa do płaszczyzny średnicowéj sprzężonéj z kierunkiem prostéj, łączącéj środek z biegunem.*

Oznaczmy przez (u, v, w) spółrzędne płaszczyzny stycznéj (2); mamy wtedy

$$u = -ax, \quad v = -by, \quad w = -cz.$$

Wstawiając wartości na x, y, z, stąd wynikające, w równanie (1), otrzymujemy

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 1, \tag{3}$$

jako równanie powierzchni stopnia 2-go ze środkiem we spółrzędnych płaszczyzny.

101. Oznaczmy przez p długość normalnéj, spuszczonéj ze środka na płaszczyznę styczną (2), a przez l, m, n dostawy kierunkowe téj normalnéj; będzie wówczas

$$\frac{l}{ax} = \frac{m}{by} = \frac{n}{cz} = \frac{p}{1} = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}}, \tag{4}$$

skąd następnie wypada

$$p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}. \tag{5}$$

A zatym, *płaszczyzna* $lx + my + nz - p = 0$ *jest styczną do powierzchni (1), jeżeli* $p = \pm\left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Weźmy pod uwagę trzy kierunki (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') do siebie nawzajem prostopadłe. Oznaczając przez p, p', p'' długości normalnych ze środka do trzech płaszczyzn stycznych, owym kierunkom odpowiadających, mamy

$$p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}, \quad p'^2 = \frac{l'^2}{a} + \frac{m'^2}{b} + \frac{n'^2}{c}, \quad p''^2 = \frac{l''^2}{a} + \frac{m''^2}{b} + \frac{n''^2}{c},$$

skąd

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{6}$$

A zatym, *suma kwadratów długości normalnych, spuszczonych ze środka powierzchni stopnia 2-go na trzy płaszczyzny styczne do siebie prostopadłe, jest stałą.* Stąd zaś wynika, że *miejscem punktu przecięcia się tych trzech płaszczyzn stycznych jest kula, przedstawiona przez równanie* $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Taksamo można dowieść następującego twierdzenia: *suma kwadratów odwrotności trzech średnic powierzchni stopnia 2-go ze środkiem, do siebie nawzajem prostopadłych, jest stałą.* Jakoż, jeżeli r, r', r'' są połowami tych średnic, a (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') ich dostawami kierunkowymi, to wtedy

$$\frac{1}{r^2} = al^2 + bm^2 + cn^2, \quad \frac{1}{r'^2} = al'^2 + bm'^2 + cn'^2, \quad \frac{1}{r''^2} = al''^2 + bm''^2 + cn''^2,$$

skąd

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} = a + b + c. \tag{7}$$

102. Równania normalnéj do powierzchni (1) w punkcie (x, y, z) są

(8) $$\frac{X-x}{ax}=\frac{Y-y}{by}=\frac{Z-z}{cz}\left(=p\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}\right).$$

Oznaczmy przez n_x, n_y, n_z długości odcinków normalnéj między punktem (x, y, z) a punktami $(0, Y_1, Z_1)$, $(X_2, 0, Z_2)$, $(X_3, Y_3, 0)$, w których ta normalna przecina płaszczyzny odpowiednio YZ, ZX i XY; natenczas z równań (8) wypada

(9) $$n_x=\frac{1}{ap},\quad n_y=\frac{1}{bp},\quad n_z=\frac{1}{cp},$$

a nadto

(10) $$Y_1=y(1-b)+pn_x,\quad Z_1=z(1-c)+pn_x,\quad \text{i t. d.}$$

103. Powierzchnie bez środka. — Powierzchnią stopnia 2-go bez środka możemy przedstawić przez równanie

(11) $$by^2+cz^2=2x,$$

jeżeli za osi spółrzędnych prostokątnych przyjmiemy trzy kierunki główne, wychodzące z punktu na téj powierzchni (z wiérzchołka głównego). Dla parabolojdy eliptycznéj oba spółczynniki b i c są dodatne (albo oba ujemne), a dla parabolojdy hiperbolicznéj jeden spółczynnik b jest dodatny, a drugi c ujemny.

Równanie płaszczyzny stycznéj do téj powierzchni w punkcie (x, y, z) jest

(12) $$bYy+cZz=X+x;$$

że zaś równanie płaszczyzny średnicowéj, sprzężonéj z kierunkiem prostéj, która łączy wiérzchołek główny powierzchni z punktem styczności, jest

(13) $$bYy+cZz=x,$$

przeto: *płaszczyzna styczna do powierzchni* (11) *i płaszczyzna średnicowa téj powierzchni sprzężona z kierunkiem prostéj, łączącéj wiérzchołek główny powierzchni z punktem styczności, przecinają płaszczyznę* YZ *(styczną w wiérzchołku) według téj saméj prostéj;* albowiém dla $X=0$ równanie (12) przechodzi na równanie (13).

Tożsamo twierdzenie odnosi się i do płaszczyzny biegunowéj i do płaszczyzny średnicowéj, sprzężonéj z prostą, która łączy wiérzchołek z biegunem.

Oznaczając przez u, v, w spółrzędne płaszczyzny stycznéj, miéć będziemy

$$u=\frac{1}{x},\quad v=-\frac{by}{x},\quad w=-\frac{cz}{x}.$$

Jeżeli wartości na x, y, z, stąd wynikające, wstawimy w równanie (11), to otrzymamy

(14) $$\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=2u,$$

jako równanie powierzchni stopnia 2-go bez środka we spółrzędnych płaszczyzny.

Nakoniec, równania normalnéj do powierzchni (11) w punkcie (x, y, z) są

(15) $$Y - y + by(X - x) = 0, \quad Z - z + cz(X - x) = 0.$$

PROSTE TWORZĄCE.

104. Powierzchnie ze środkiem. W rozdziale VI okazaliśmy, że niektóre powierzchnie stopnia 2-go można utworzyć zapomocą ruchu linii prostéj; teraz okażemy, w jakich przypadkach można przez punkt na powierzchni stopnia 2-go poprowadzić prostą, którąby cała leżała na téj powierzchni. Ponieważ powierzchnie stopnia 2-go, mające nieskończenie wiele środków, bądź na prostéj, bądźtéż na płaszczyźnie, są wszystkie prostolinijowe, możemy przeto rozważać tylko powierzchnie stopnia 2-go ze środkiem (oprócz stożka, który także jest powierzchnią prostolinijową) i powierzchnie stopnia 2-go bez środka.

Weźmy naprzód pod uwagę powierzchnią ze środkiem

(1) $$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Niech (α, β, γ) będzie punktem danym na téj powierzchni, a (l, m, n) niech będą dostawami kierunkowymi prostéj, przez ten punkt poprowadzonéj. Spółrzędne punktu bieżącego na téj prostéj są wtedy $\alpha + lr$, $\beta + mr$, $\gamma + nr$, gdzie r oznacza jego odległość od punktu (α, β, γ). Jeżeli ta prosta leży na powierzchni (1), wtedy przy każdéj wartości na r stanie się zadość równaniu

$$a(\alpha + lr)^2 + b(\beta + mr)^2 + c(\gamma + nr)^2 = 1;$$

a zatym będzie:

(2) $$al^2 + bm^2 + cn^2 = 0,$$

(3) $$a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0,$$

(4) $$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 1.$$

Ostatnie z tych równań warunkowych wyraża, że punkt (α, β, γ) leży na powierzchni (1); dwa zaś piérwsze wyznaczają dwie wartości na stosunki $l:m:n$. Rugując n z równań (2) i (3) mamy

(5) $$(ca\gamma^2 + a^2\alpha^2)l^2 + 2ab\alpha\beta lm + (bc\gamma^2 + b^2\beta^2)m^2 = 0,$$

skąd widzimy, że wartości na $l:m$ będą obie rzeczywiste lub zespolone, według tego, czy wyrażenie

$$(ca\gamma^2 + a^2\alpha^2)(bc\gamma^2 + b^2\beta^2) - a^2b^2\alpha^2\beta^2 \equiv abc\gamma^2$$

jest ujemne, czytéż dodatne. Ponieważ jednak γ^2 jest liczbą dodatną, więc obie wartości na $l:m$ będą rzeczywiste tylko wtedy, kiedy iloczyn abc jest ujemny, a więc kiedy powierzchnia (1) jest hiperbolojdą jednopowłokową $(a > 0,\ b > 0,\ c < 0)$.

A zatym: *hiperbolojda jednopowłokowa jest jedyną powierzchnią stopnia 2-go ze środkiem (oprócz stożka), na któréj leżą linije proste; przez każdy punkt hiperbo-*

lojdy jednopowłokowéj przechodzą dwie z prostych, na niéj leżących. Te proste zowią się **p r o s t y m i t w o r z ą c y m i**.

105. Z równań (3) wynika, że dwie proste tworzące hiperbolojdy, które można poprowadzić przez punkt (α, β, γ), leżą zarazem na płaszczyźnie stycznéj do niéj w tym punkcie. Albowiém, jeżeli przez (x, y, z) oznaczymy spółrzędne punktu bieżącego na któréjkolwiek z tych dwu prostych tworzących, mieć będziemy $l=\frac{x-\alpha}{r}$, $m=\frac{y-\beta}{r}$, $n=\frac{z-\gamma}{r}$, wskutek czego, z równania (3), przy uwzględnieniu równania (4), otrzymujemy

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=1.$$

To wskazuje, że punkt (x, y, z) leży na stycznéj do powierzchni (1) w punkcie (α, β, γ). A zatym, możnaby powiedziéć, że płaszczyzna styczna do hiperbolojdy jednopowłokowéj jednocześnie przecina tę powierzchnią według dwu prostych, które są dwiema prostymi tworzącymi hiperbolojdy.

Z równań (2), (3) i (4) można nadto otrzymać miejsce takiego punktu na hiperbolojdzie jednopowłokowéj, przez który przechodzą proste tworzące do siebie prostopadłe. Jakoż, oznaczając przez $l_1:m_1$ i $l_2:m_2$ dwa pierwiastki równania (5), mamy

$$\frac{l_1l_2}{m_1m_2}=\frac{b(c\gamma^2+b\beta^2)}{a(c\gamma^2+a\alpha^2)},$$

i podobnie znajdziemy

$$\frac{l_1l_2}{n_1n_2}=\frac{c(b\beta^2+c\gamma^2)}{a(b\beta^2+a\alpha^2)}.$$

Stąd zaś wypada

$$\frac{al_1l_2}{b\beta^2+c\gamma^2}=\frac{bm_1m_2}{c\gamma^2+a\alpha^2}=\frac{cn_1n_2}{a\alpha^2+b\beta^2},\ \text{czyli}\ \frac{l_1l_2}{\frac{1}{a}-\alpha^2}=\frac{m_1m_2}{\frac{1}{b}-\beta^2}=\frac{n_1n_2}{\frac{1}{c}-\gamma^2};$$

a że $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$, przeto

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

A zatym, miejscem owego punktu jest linija, według któréj hiperbolojda przecina się z kulą $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Z równań (2), (3) i (4) wynika jeszcze następujące:

$$(al^2+bm^2)(a\alpha^2+b\beta^2)-(a\alpha l+b\beta m)^2=(1-c\gamma^2)(-cn^2)-c^2\gamma^2n^2,$$

czyli

$$ab(\beta l-\alpha m)^2+cn^2=0. \tag{6}$$

To równanie i równanie (3) dają wartości na stosunki dostaw kierunkowych dwu prostych tworzących, przechodzących przez punkt (α, β, γ),

(7) $$\frac{l}{\pm\sqrt{\frac{-cb}{a}\beta-c\gamma\alpha}}=\frac{m}{\mp\sqrt{\frac{-ca}{b}\alpha-c\beta\gamma}}=\frac{n}{a\alpha^2+b\beta^2}.$$

106. Proste tworzące hiperbolojdy jednopowłokowéj można bespośrednio tak wyznaczyć. Równanie hiperbolojdy jednopowłokowéj, odniesione do osi,

(8) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

można przedstawić (przy wszelkich wartościach na θ) w postaci

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\cos\theta\pm\frac{z}{c}\sin\theta\right)^2+\left(\sin\theta\mp\frac{z}{c}\cos\theta\right)^2.$$

Stąd wypada, że

(9) $$\frac{x}{a}=\cos\theta+\frac{z}{c}\sin\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta-\frac{z}{c}\cos\theta,$$

jak również

(10) $$\frac{x}{a}=\cos\theta-\frac{z}{c}\sin\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta+\frac{z}{c}\cos\theta$$

czynią zadość równaniu hiperbolojdy. A zatym, prosta (9) i prosta (10) leżą na hiperbolojdzie (8).

Zmieniając θ, otrzymamy dwa układy prostych tworzących hiperbolojdy. Równania tych prostych można tak pisać:

(11) $$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta}=\frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\pm\frac{z}{c}.$$

Widzimy z nich, że proste do nich równoległe, a przechodzące przez środek, są tworzącymi stożka asymptotycznego hiperbolojdy. A zatym, *trzy tworzące hiperbolojdy nie mogą się znajdować na jednéj płaszczyźnie.*

Jeżeli $z=0$, wówczas $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$; a zatym θ jest kątem mimośrodowym (I, art. 123) punktu przecięcia się dwu prostych (11) ze śladem hiperbolojdy na płaszczyźnie XY (elipsa szyjna).

Jakikolwiek punkt hiperbolojdy (8) można przedstawić przez trzy równania

(12) $$x=a.\cos\theta\,\mathrm{cec}\,\varphi,\quad y=b.\sin\theta\sec\varphi,\quad z=c.\mathrm{tg}\,\varphi;$$

albowiém te wartości na x, y, z uczynią zadość równaniu (8) przy wszelkich wartościach na θ i φ. Równania zatym dwu tworzących, które przez ten punkt przechodzą, są:

(13) $$\frac{x-a\cos\theta\sec\varphi}{a\sin(\theta\pm\varphi)}=\frac{y-b\sin\theta\sec\varphi}{-b\cos(\theta\pm\varphi)}=\frac{z-c\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\pm c}.$$

Widzimy więc, że te tworzące przecinają elipsę szyjną hiperbolojdy w punktach, których kąty mimośrodowe są $\theta\pm\varphi$.

107. *Rzuty tworzących na płaszczyzny główne są stycznymi do śladów hiperbolojdy na tych płaszczyznach.* Jakoż, ślad hiperbolojdy na płaszczyźnie ZX ma za równanie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

a równanie rzutu tworzących na tę samę płaszczyznę jest

$$\frac{x}{a}=\cos\theta\pm\frac{z}{c}\sin\theta.$$

Rugując x z tych równań, otrzymujemy równanie

$$\frac{z^2}{c^2}\cos^2\theta\mp\frac{2z}{c}\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=0,$$

z którego wynikają na z dwie wartości równe. To wskazuje, że rzut tworzących na ZX dotyka śladu hiperbolojdy na ZX. Taksamo rzecz się ma z rzutami tworzących na XY i YZ.

Dwie tworzące tego samego układu nie przecinają się. Albowiém, jeżeliby prosta piérwszego lub drugiego układu

$$\frac{x}{a}=\cos\theta\pm\frac{z}{c}\sin\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta\mp\frac{z}{c}\cos\theta$$

przecinała się z inną prostą także odpowiednio piérwszego lub drugiego układu

$$\frac{x}{a}=\cos\theta'\pm\frac{z}{c}\sin\theta',\quad \frac{y}{b}=\sin\theta'\mp\frac{z}{c}\cos\theta',$$

to byłoby

$$\cos\theta-\cos\theta'\pm\frac{z}{c}(\sin\theta-\sin\theta')=0 \text{ i } \sin\theta-\sin\theta'\mp\frac{z}{c}(\cos\theta-\cos\theta'),$$

a przeto

$$(\cos\theta-\cos\theta')^2+(\sin\theta-\sin\theta')^2=0,$$

co możliwe tylko wtedy, kiedy $\theta=\theta'$.

Każde dwie tworzące różnych układów przecinają się. Jakoż, aby tworząca piérwszego lub drugiego układu

$$\frac{x}{a}=\cos\theta\pm\frac{z}{c}\sin\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta\mp\frac{z}{c}\cos\theta$$

przecinała się odpowiednio z tworzącą drugiego lub piérwszego układu

$$\frac{x}{a}=\cos\theta'\mp\frac{z}{c}\sin\theta',\quad \frac{y}{b}=\sin\theta'\pm\frac{z}{c}\cos\theta',$$

winno być dla punktu przecięcia

$$0=\cos\theta-\cos\theta'\pm\frac{z}{c}(\sin\theta+\sin\theta') \text{ i } 0=\sin\theta-\sin\theta'\mp\frac{z}{c}(\cos\theta+\cos\theta'),$$

a przeto $\cos^2\theta - \cos^2\theta' + \sin^2\theta - \sin^2\theta' = 0.$

Ten warunek jest dopełniony; dwie więc proste tworzące, należące do układów przeciwnych, przecinają się.

Miejscem punktu przecięcia się dwu tworzących układów przeciwnych, przechodzących przez punkty elipsy szyjnéj, których kąty mimośrodowe różnią się o kąt stały 2α, są dwa przekroje eliptyczne równoległe do płaszczyzny XY, przecinające ślady powierzchni na ZX i YZ w punktach, których kąty mimośrodowe są $\pm\alpha$. Jakoż, równania tych dwu tworzących, należących do układów przeciwnych, są

$$\frac{x}{a} = \cos(\theta+\alpha) \pm \frac{z}{c}\sin(\theta+\alpha), \quad \frac{y}{b} = \sin(\theta+\alpha) \mp \frac{z}{c}\cos(\theta+\alpha) \quad \text{i}$$

$$\frac{x}{a} = \cos(\theta-\alpha) \mp \frac{z}{c}\sin(\theta-\alpha), \quad \frac{y}{b} = \sin(\theta-\alpha) \pm \frac{z}{c}\cos(\theta-\alpha).$$

W punkcie przecięcia mamy

$$0 = \sin\theta\sin\alpha \mp \frac{z}{c}\sin\theta\cos\alpha, \quad \text{skąd} \quad \frac{z}{c} = \pm\operatorname{tg}\alpha.$$

Nadto

$$\frac{x}{a} = \cos\theta\cos\alpha \pm \frac{z}{c}\cos\theta\sin\alpha = \cos\theta\sec\alpha,$$

$$\frac{y}{b} = \sin\theta\cos\alpha \pm \frac{z}{c}\sin\theta\sin\alpha = \sin\theta\sec\alpha, \quad \text{skąd}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\alpha \quad \text{i} \quad \frac{z}{c} = \pm\operatorname{tg}\alpha.$$

Piérwsze równanie przedstawia walec eliptyczny, a drugie dwie płaszczyzny do XY równoległe — oba zatym przedstawiają żądane dwie elipsy.

O tworzeniu hiperbolojdy jednopowłokowéj zapomocą ruchu linii prostéj była mowa w art. 68.

108. Powierzchnie bez środka. Oznaczmy również przez (α, β, γ) spółrzędne punktu danego dowolnie na powierzchni bez środka

(14) $$by^2 + cz^2 = 2x,$$

a przez (l, m, n) dostawy kierunkowe prostéj, przez ten punkt przechodzącéj. Ta prosta leży na powierzchni, jeżeli

(15) $$b\beta^2 + c\gamma^2 = 2\alpha,$$

(16) $$b\beta m + c\gamma n = l,$$

(17) $$bm^2 + cn^2 = 0.$$

Ostatnie dwa równania dadzą dwie wartości na $l:m:n$, które będą rzeczywiste, jeżeli spółczynniki b i c różnią się znakami. A zatym, *parabolojda hiperboliczna jest jedyną powierzchnią stopnia 2-go bez środka, mającą linije proste jako tworzące; przez każdy punkt téj powierzchni przechodzą dwie takie proste.*

Widoczna nadto z równania (17), że jedna z dwu prostych tworzących, przechodzących przez jeden punkt powierzchni, jest równoległą do jednéj, a druga równoległą do drugiéj płaszczyzny asymptotycznéj powierzchni. Z równania zaś (16) wypada, że obie te proste leżą na płaszczyźnie stycznéj do powierzchni w punkcie (α, β, γ). A zatym możnaby powiedzieć, że płaszczyzna styczna do parabolojdy hiperbolicznéj przecina tę powierzchnią według dwu prostych tworzących, przechodzących przez punkt styczności.

109. Pisząc równanie parabolojdy hiperbolicznéj

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \tag{18}$$

w postaci

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} \pm \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x,$$

widzimy bespośrednio, że dwie proste, przedstawione przez równania

$$\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{k}{\sqrt{q}}, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} \pm \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt{q}}{k}\,x, \tag{19}$$

są dwiema prostymi tworzącymi téj powierzchni. Zmieniając k, otrzymamy dwa układy prostych tworzących.

Dwie tworzące tego samego układu nie przecinają się, a dwie tworzące układów różnych przecinają się. Jakoż, jeżeliby dwie proste tego samego układu

$$\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{k}{\sqrt{q}}, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} \pm \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt{q}}{k}\,x,$$

$$\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{k'}{\sqrt{q}}, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} \pm \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt{q}}{k'}\,x$$

przecinały się, to byłoby $k - k' = 0$, co nie możebne, gdyż te dwie proste są od siebie różne. Zmieniając zaś znaki podwójne w równaniach drugiego wiérsza, mieć będziemy równania prostéj należącéj do układu innego, niż prosta przedstawiona przez równania piérwszego wiérsza. Jeżeli te dwie proste przecinają się, wówczas jednocześnie

$$\frac{k+k'}{\sqrt{q}} = \frac{2y}{\sqrt{p}} = 2\sqrt{q}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'}\right)x, \quad \text{i}$$

$$\frac{k-k'}{\sqrt{q}} = \mp\frac{2z}{\sqrt{q}} = 2\sqrt{q}\left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right)x.$$

Ponieważ zaś te dwa równania wyznaczają po jednéj tylko wartości na x, y, i z, przeto dwie tworzące, należące do dwu różnych układów, rzeczywiście się przecinają.

Rzuty tworzących na płaszczyzny główne są styczne do przekrojów głównych. Albowiém, wskutek (19),

$$\pm\frac{2z}{\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt{q}}{k}\,x - \frac{k}{\sqrt{q}}$$

jest równaniem rzutu tworzących na płaszczyznę ZX. To równanie daje się sprowadzić do postaci

$$z = mx - \frac{q}{2m}, \quad \left(m = \pm \frac{q}{k}\right);$$

stąd zaś wypada (I, art. 139), że ta prosta jest styczną do paraboli $z^2 = -2qx$. Tak samo rzecz się ma z rzutami na płaszczyznę XY.

PRZEKROJE PŁASKIE.

110. Powierzchnie ze środkiem. Przekroje płaskie powierzchni stopnia 2-go do siebie równoległe są krzywymi stopnia 2-go homotetycznymi (art. 72). Chcąc zatym zbadać, według jakiéj krzywéj dana płaszczyzna przecina powierzchnią stopnia 2-go ze środkiem,

(1) $$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

dość wziąć pod uwagę płaszczyznę równoległą do danéj, przechodzącą przez środek powierzchni. Tego sposobu można użyć także wtedy, kiedy taki przekrój c e n t r a l n y jest urojonym (co np. miejsce miéć może w hiperbolojdzie dwupowłokowéj), albowiém wyrazy stopnia 2-go w równaniu tego przekroju będą takie same, jak w równaniu przekroju rzeczywistego, otrzymanego zapomocą pewnéj innéj płaszczyzny równoległéj do danéj.

Ażeby najprościéj otrzymać równanie przekroju centralnego, należy płaszczyznę tego przekroju wziąć za nową płaszczyznę XY, a ślad téj płaszczyzny na dawnéj płaszczyźnie XY za nową oś x-ów, przekształcić odpowiednio równanie powierzchni, a w tym równaniu przekształconym przyjąć $z = 0$. W tym celu najdogodniéj użyć wzorów Euler'a (art. 57), uproszczonych przez to, że w tym przypadku jest w nich $\psi = 0$. Nadto, skoro nam chodzi tylko o równanie przekroju, którego płaszczyzna jest nową płaszczyzną XY, można odrazu we wzorach Euler'a [przed uskutecznieniem przekształcenia równania (1)] podstawić $z' = 0$.

Jeżeli więc przez θ oznaczymy kąt między płaszczyzną przekroju i płaszczyzną XY, a przez φ kąt między śladem płaszczyzny przekroju na XY a osią x-ów, to podstawiając w równaniu (1)

(2) $$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\cos\theta\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\theta\cos\varphi, \\ y = y'\sin\theta, \end{cases}$$

otrzymamy wprost równanie przekroju centralnego powierzchni, przedstawionéj przez owo równanie. Jeżeli równanie płaszczyzny przekroju jest dane w postaci

(3) $$lx + my + nz = 0,$$

gdzie l, m, n oznaczają dostawy kierunkowe normalnéj do téj płaszczyzny, natenczas

(4) $$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{l}{m}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{l^2+m^2}}{n}.$$

Wskutek tego wzory (2) przechodzą na

(5) $$x = \frac{mx' + nly'}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad y = \frac{mny' - lx'}{\sqrt{l^2+m^2}}, \quad z = y'\sqrt{l^2+m^2}.$$

Przekształcając więc linijowo równanie (1) zapomocą wzorów (5), otrzymujemy (po opuszczeniu krések nad x i y)

(6) $$(am^2+bl^2)x^2 + 2lmn(a-b)xy + [(al^2+bm^2)n^2 + c(l^2+m^2)^2]y^2 = l^2+m^2,$$

jako równanie przekroju centralnego płaszczyzną (3). Ten zatym przekrój będzie elipsą, hiperbolą lub parabolą, według tego, czy wyróżnik

(7) $$(am^2+bl^2)[(al^2+bm^2)n^2 + c(l^2+m^2)^2] - l^2m^2n^2(a-b)^2 \equiv$$
$$\equiv (l^2+m^2)(bcl^2+cam^2+abn^2)$$

jest dodatny, ujemny, czytéż równy 0.

Ponieważ dla elipsojdy spółczynniki a, b, c w równaniu (1) są wszystkie dodatne, przeto *wszelkie przekroje elipsojdy są elipsami.*

111. Przekrój centralny (6) będzie kołem, jeżeli

(8) $$lmn(a-b) = 0,$$

(9) $$am^2+bl^2 = (al^2+bm^2)n^2 + c(l^2+m^2)^2.$$

Przyjmijmy, że co do wartości bezwzględnéj $a < b < c$. Wtedy, aby równaniu warunkowemu (8) stało się zadość, potrzeba, aby było albo $l=0$, albo $m=0$, albotéż $n=0$. A zatym, *płaszczyzny przekrojów centralnych kołowych powierzchni stopnia 2-go ze środkiem przechodzą przez osi główne tych powierzchni.*

Jeżeli $l=0$, to z równania warunkowego (9) wypada, że

$$am^2 = (bn^2+cm^2)m^2, \quad \text{czyli} \quad cm^2+bn^2 = a.$$

Mamy jednak $m^2+n^2=1$; z tych zaś dwu równań otrzymujemy

$$m = \pm\sqrt{\frac{a-b}{c-b}}, \quad n = \pm\sqrt{\frac{a-c}{b-c}},$$

wskutek czego, według (4),

(10) $$\varphi = 0, \quad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{a-b}{c-a}}.$$

Jeżeli $m=0$, to otrzymamy taksamo $l = \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{c-a}}$, $n = \pm\sqrt{\dfrac{c-b}{c-a}}$, a przeto

(11) $$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}.$$

Jeżeli nakoniec $n=0$, to $l=\pm\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}$, $m=\pm\sqrt{\frac{b-c}{b-a}}$, a przeto

$$\theta=0,\quad \operatorname{tg}\varphi=\pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}. \tag{12}$$

Ponieważ co do wartości bezwzględnéj $a<b<c$, a nadto dla elipsojdy spółczynniki te są wszystkie dodatne, dla hiperbolojdy jednopowłokowéj spółczynnik c jest ujemny, dla hiperbolojdy zaś dwupowłokowéj spółczynniki a i b są ujemne, zatym widoczna, że płaszczyzn centralnych, dających przekroje kołowe rzeczywiste, jest w elipsojdzie tylko dwie, t. j. te, dla których $m=0$. A zatym, *w elipsojdzie istnieją dwie płaszczyzny centralne, przecinajace te powierzchnią według koła; te dwie płaszczyzny przechodzą przez oś średnią* (b) *elipsojdy i czynią z płaszczyzną jéj osi największéj i średniéj* (a, b) *kąt* θ *taki, iż* $\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}$. — W hiperbolojdzie jednopowłokowéj te płaszczyzny centralne dadzą przekroje kołowe rzeczywiste,dla których $l=0$. A zatym, *w hiperbolojdzie jednopowłokowéj istnieją dwie płaszczyzny centralne, przecinające tę powierzchnią według koła; te dwie płaszczyzny przechodzą przez oś większą z dwu osi rzeczywistych i czynią z płaszczyzną osi rzeczywistych kąt* θ *taki, iż* $\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{\frac{a-b}{c-a}}=\pm\sqrt{\frac{b-a}{a-c}}$, $(a>b,\ c<0)$.— Taksamo w hiperbolojdzie dwupowłokowéj te płaszczyzny centralne, dają przekroje kołowe rzeczywiste, dla których $l=0$. A zatym, *w hiperbolojdzie dwupowłokowéj istnieją dwie płaszczyzny centralne, przecinające tę powierzchnią według koła; te dwie płaszczyzny przechodzą przez oś większą z dwu osi urojonych i czynią z płaszczyzną osi urojonych kąt* θ *taki, iż* $\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{\frac{a-b}{c-a}}$ $(a<0,\ b<0$, lecz $-b>-a)$.

112. Równania płaszczyzn centralnych, dających przekroje kołowe rzeczywiste, można otrzymać bez pomocy przekształcenia linijowego. Weźmy pod uwagę elipsojdę

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gdzie $a^2>b^2>c^2>0$. To równanie można przedstawić w postaci

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1, \quad \text{lub}$$

$$(x^2+y^2+z^2-b^2)+\left(\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)=0.$$

Z téj postaci równania elipsojdy widzimy, że na elipsojdzie znajdują się dwie krzywe, według których kulę $x^2+y^2+z^2-b^2=0$ przecinają płaszczyzny

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=0 \quad \text{i} \quad \frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=0.$$

Że zaś kulę każda płaszczyzna przecina według koła, zatym te dwie płaszczyzny są płaszczyznami przekroju kołowego elipsojdy. Łatwo spostrzéc, że te płaszczyzny są te same, co otrzymane w poprzedzającym artykule. — Taksamo można znaléść płaszczyzny przekrojów kołowych dla obu hiperbolojd.

113. Wracając do jakichkolwiek przekrojów płaskich powierzchni (11), znajdźmy miejsce środków wszystkich przekrojów równoległych. Niech

$$lx + my + nz = p \tag{13}$$

będzie równaniem normalnym jednéj z płaszczyzn tych przekrojów równoległych. Oznaczmy przez (α, β, γ) środek, a przez r promień przekroju, wyprowadzony w kierunku (λ, μ, ν); wartości na r wyznaczy równanie

$$a(\alpha + \lambda r)^2 + b(\beta + \mu r)^2 + c(\gamma + \nu r)^2 = 1;$$

że zaś wartości na r mają być równe liczebnie, a różnego znaku, przeto

$$a\alpha\lambda + b\beta\mu + c\gamma\nu = 0;$$

a nadto, ponieważ r leży na płaszczyźnie (13),

$$l\lambda + m\mu + c\nu = 0.$$

Te dwa równania mają miejsce dla nieskończonéj ilości wartości na $\lambda : \mu : \nu$; mamy zatym $a\alpha : b\beta : c\gamma = l : m : n$, t. j.

$$\frac{ax}{l} = \frac{by}{m} = \frac{cz}{n} \tag{14}$$

są równaniami miejsca żądanego. Łatwo spostrzéc, że równania (14) przedstawiają średnicę sprzężoną z kierunkiem płaszczyzny przekroju centralnego $lx + my + nz = 0$. A zatym, *miejscem środków przekrojów płaskich równoległych powierzchni stopnia 2-go ze środkiem jest średnica téj powierzchni, sprzężona z kierunkiem tych płaszczyzn.*

Z równania wyznaczającego r,

$$(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2)r^2 = 1 - a\alpha^2 - b\beta^2 - c\gamma^2, \tag{15}$$

wypada, że *przekroje płaskie równoległe są krzywymi homotetycznymi;* albowiém, jeżeli (λ', μ', ν') jest kierunkiem innego promienia r', to stosunek $r^2 : r'^2$ jest niezależny od p, a więc stały dla wszelkich przekrojów równoległych.

114. Jeżeli przekroje płaskie równoległe są przekrojami kołowymi, to prosta (14) przetnie powierzchnią (1) w punktach, które należy uważać za koła o nieskończenie małym promieniu. Te punkty zowią się p u n k t a m i k o ł o w y m i, albo u m b i l i k a m i. Ponieważ dla przekrojów kołowych elipsojdy mamy (art. 111)

$$l = \sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{\frac{c-b}{c-a}},$$

przeto umbiliki elipsojdy leżą na przecięciu się téj powierzchni z prostymi

(16) $$ax\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}=\pm cz\sqrt{\frac{c-a}{c-b}},\quad y=0.$$

Podobnie dla przekrojów kołowych obu hiperbolojd mamy

$$l=0,\quad m=\sqrt{\frac{b-a}{b-c}},\quad n=\sqrt{\frac{c-a}{c-b}};$$

a zatym ich umbiliki leżą na ich przecięciu się z prostymi

(17) $$by\sqrt{\frac{b-c}{b-a}}=\pm cz\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},\quad x=0.$$

115. Nietrudno znaléść także wielkość i kierunek osi głównych jakiegokolwiek przekroju płaskiego centralnego, jak również jego pole, jeżeli tym przekrojem jest elipsa. Jakoż, ponieważ środek przekroju płaskiego centralnego jest środkiem powierzchni, przeto równanie (15), wyrażające związek między długością r i kierunkiem (λ, μ, ν) promienia przekroju centralnego, którego płaszczyzna jest przedstawiona przez równanie $lx+my+nz=0$, sprowadza się do równania

$$(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2)r^2=1=\lambda^2+\mu^2+\nu^2;$$

mamy zaś nadto

(18) $$l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

Z tych dwu równań rugując r, otrzymujemy

(19) $$n^2[(ar^2-1)\lambda^2+(br^2-1)\mu^2]+(cr^2-1)(l\lambda+m\mu)^2=0.$$

To równanie, dla danéj długości r, wyznacza dwie wartości na $\lambda:\mu$. Jeżeli jednak dana długość ma być połową długości jednéj z dwu osi, to obie wartości na $\lambda:\mu$ są sobie równe, a przeto wtedy

$$[(ar^2-1)n^2+(cr^2-1)l^2][(br^2-1)n^2+(cr^2-1)m^2]=(cr^2-1)l^2m^2,$$

czyli $(br^2-1)(cr^2-1)l^2+(cr^2-1)(ar^2-1)m^2+(ar^2-1)(br^2-1)n^2=0$, albo

(20) $$\frac{l^2}{ar^2-1}+\frac{m^2}{br^2-1}+\frac{n^2}{cr^2-1}=0.$$

Równanie (20), stopnia 2-go względem r^2, wyznacza kwadraty połów osi głównych uważanego przekroju.

Jeżeli 2α i 2β są tymi dwiema osiami, wówczas mamy $\alpha^2\beta^2=$ $=(bcl^2+cam^2+abn^2)^{-1}$; a zatym, jeżeli przekrój jest eliptyczny, jego pole

(21) $$\pi\alpha\beta=\frac{\pi}{\sqrt{bcl^2+cam^2+abn^2}}.$$

Aby jeszcze znaléść kierunki osi głównych, uważmy, że spółczynnik przy λ^2 w (19), t. j. $(ar^2-1)n^2+(cr^2-1)l^2$, wskutek (20), daje się przywieść do $-\dfrac{m^2(cr^2-1)(ar^2-1)}{br^2-1}$. Równanie zatym (19) można także tak pisać:

$$\frac{ar^2-1}{br^2-1}m^2\lambda^2-2lm\lambda\mu+\frac{br^2-1}{ar^2-1}l^2\mu^2=0,$$

a stąd wynika

$$(22)\qquad (ar^2-1)\frac{\lambda}{l}=(br^2-1)\frac{\mu}{m}\left(=(cr^2-1)\frac{\nu}{n}\right).$$

Gdy w tych równaniach podstawimy α i β za r, to one wraz z równaniem (18) wyznaczą w zupełności kierunki obu osi głównych uważanego przekroju.

116. Powierzchnie bez środka. Weźmy teraz pod uwagę obie parabolojdy, w których równaniu

$$(23)\qquad by^2+cz^2=2x$$

zakładamy, że co do wartości bezwzględnéj $b<c$, przyczym c jest ujemne, jeżeli parabolojda jest hiperboliczną.

Przekształciwszy równanie (23) linijowo zapomocą wzorów (5) (art. 110), otrzymamy

$$(24)\qquad [bm^2n^2+c(l^2+m^2)^2]y^2-2blmnxy+bl^2x^2=2\sqrt{l^2+m^2}\,(mx+nly),$$

jako równanie przekroju płaszczyzną $lx+my+nz=0$. Ten przekrój jest więc elipsą, hiperbolą lub parabolą według tego, czy wyróżnik

$$[bm^2n^2+c(l^2+m^2)^2]bl^2-b^2l^2m^2n^2\equiv bcl^2(l^2+m^2)^2$$

jest dodatny, ujemny, czytéż równy 0.

Przekroje obu parabolojd będą zatym parabolami, jeżeli $l=0$, lub $l^2+m^2=1-n^2=0$, t. j. jeżeli ich płaszczyzny przechodzą przez oś główną parabolojd, albo są do téj osi równoległe. We wszystkich zaś innych przypadkach przekroje parabolojdy eliptycznéj są elipsami, a przekroje parabolojdy hiperbolicznéj hiperbolami.

Przekroje płaskie mogą być kołami, jeżeli $lmn=0$ i $bm^2n^2+c(l^2+m^2)^2=bl^2$.

Jeżeli $l=0$, to spółczynnik przy x^2 w równaniu (24) jest $=0$, a przekrój płaski jest wtedy parabolą.

Jeżeli $m=0$, wówczas mamy $cl^2=b$; skąd $l^2=\frac{b}{c}$, a wskutek tego $n^2=1-l^2=\frac{c-b}{c}$. Wskutek (4), mamy więc w tym przypadku

$$(25)\qquad \varphi=\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{\frac{b}{c-b}}.$$

Jeżeli nakoniec $n=0$, to otrzymamy $l^2=\frac{c}{b}$, $m^2=1-l^2=\frac{b-c}{b}$, a przeto

$$(26)\qquad \operatorname{tg}\varphi=\pm\sqrt{\frac{c}{b-c}},\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ w parabolojdzie eliptycznéj $0<b<c$, więc tylko wrazie $m=0$ przekroje kołowe są rzeczywiste. Jeżeli zaś parabolojda jest hiperboliczną,

wówczas, skoro $0 < b < -c$, tak wartość (25) na $\operatorname{tg}\theta$, jakoteż wartość (26) na $\operatorname{tg}\varphi$ będą urojone. Parabolojda zatym hiperboliczna nie posiada przekrojów kołowych.

Pisząc równanie parabolojdy eliptycznéj

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \tag{27}$$

w postaci $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{p} + z^2\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}\right) - \dfrac{x^2}{p} = 2x$, lub

$$(x^2+y^2+z^2-2px) + \left(z\sqrt{\frac{p-q}{q}} - x\right)\left(z\sqrt{\frac{p-q}{q}} + x\right) = 0,$$

widzimy bespośrednio, że na parabolojdzie znajdują się koła, według których płaszczyzny $z = \pm x\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}$ przecinają kulę $x^2+y^2+z^2-2px=0$. Te dwie zatym płaszczyzny są płaszczyznami przekrojów kołowych parabolojdy. Są to oczywiście te same dwie płaszczyzny, co powyżéj poznane.

Jeżeli (α, β, γ) są spółrzędnymi umbiliku parabolojdy eliptycznéj, to płaszczyzna styczna do parabolojdy w tym punkcie

$$x - \frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} = \alpha$$

jest równoległą do jednéj lub do drugiéj z dwu płaszczyzn przekrojów kołowych

$$x \pm z\sqrt{\frac{p-q}{q}} = 0.$$

A zatym jest

$$\beta = 0, \quad \gamma = \pm\sqrt{q(p-q)}, \quad \text{tudzież} \quad \alpha = \frac{1}{2}(p-q). \tag{28}$$

ĆWICZENIA.

(113). Znaléść równanie stożka stycznego do powierzchni $ax^2+by^2+cz^2=1$, mającego wiérzchołek w punkcie danym (α, β, γ).

(114). Znaléść równanie walca stycznego do powierzchni $ax^2+by^2+cz^2=1$, którego tworzące mają kierunek dany (λ, μ, ν).

(115). Okazać że płaszczyznę styczną do powierzchni $by^2+cz^2=2x$ o kierunku danym przedstawia równanie $lx+my+nz = -\dfrac{1}{2l}\left(\dfrac{m^2}{b}+\dfrac{n^2}{c}\right)$; następnie dowieść, że trzy powierzchnie $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=\dfrac{2z}{c_1}$, $\dfrac{x^2}{a_2^2}+\dfrac{y^2}{b_2^2}=\dfrac{2z}{c_2}$, $\dfrac{x^2}{a_3^2}+\dfrac{y^2}{b_3^2}=\dfrac{2z}{c_3}$ będą miały spólną płaszczyznę styczną, jeżeli

$$\begin{vmatrix} a_1^2, & a_2^2, & a_3^2 \\ b_1^2, & b_2^2, & b_3^2 \\ c_1^2, & c_2^2, & c_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(116). Miejscem środków przekrojów powierzchni $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ płaszczyznami stycznymi do powierzchni $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ jest powierzchnia

$$\frac{a^2}{\alpha} x^2 + \frac{b^2}{\beta} y^2 + \frac{c^2}{\gamma} z^2 = (ax^2 + by^2 + cz^2)^2.$$

(117). Okazać, że płaszczyzny styczne do stożka

$$\frac{x^2}{a^2(b^2 - c^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2 - c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 + b^2)} = 0$$

przecinają hiperbolojdę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ według hiperból równobocznych.

(118). Normalna do elipsojdy w punkcie P spotyka płaszczyzny główne w punktach G_1, G_2, G_3; okazać, że iloczyn $PG_1 . PG_2 . PG_3$ jest proporcyjonalny do sześcianu pola przekroju centralnego płaszczyzną sprzężoną ze średnicą, przechodzącą przez punkt P.

(119). Okazać, że z punktu danego można wyprowadzić sześć normalnych do powierzchni stopnia 2-go ze środkiem.

(120). Okazać, że gdy odmierzymy r na normalnéj do elipsojdy (nawewnątrz) tak, aby było $pr = m^2$, gdzie p oznacza długość prostopadłéj ze środka na płaszczyznę styczną, to miejscem punktu końcowego tego odcinka jest

$$\frac{a^2x^2}{(a^2 - m^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2 - m^2)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2 - m^2)^2} = 1.$$

(121). Okazać, że miejscem prostéj przecięcia się dwu płaszczyzn stycznych do stożka $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$, do siebie prostopadłych, jest stożek $(b + c)x^2 + (c + a)y^2 + (a + b)z^2 = 0$.

(122). Okazać, że miejscem punktu przecięcia się trzech płaszczyzn stycznych do powierzchni $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, które są do siebie nawzajem prostopadłe, jest płaszczyzna $x = -\frac{p + q}{2}$.

(123). Miejscem przecięcia się trzech linij stycznych do elipsojdy, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, wzajemnie do siebie prostopadłych, jest $(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$.

(124). Dowieść, że stożek styczny do elipsojdy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, mający wiérzchołek w (α, β, γ), przecina płaszczyzna XY według hiperboli równobocznéj, jeżeli $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 + b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$.

(125). Okazać, że sześć normalnych z punktów (α, β, γ) do elipsojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ leżą wszystkie na stożku

$$(b^2-c^2)\frac{\alpha}{x-\alpha}+(c^2-a^2)\frac{\beta}{y-\beta}+(a^2-b^2)\frac{\gamma}{z-\gamma}=0.$$

(126). Dowiéść, że suma iloczynów dwu prostopadłych, spuszczonych z dwu końców każdéj z trzech średnic sprzężonych powierzchni $ax^2+by^2+cz^2=1$ na jakąkolwiek płaszczyznę styczną, jest równa dwa razy wziętemu kwadratowi prostopadłéj, spuszczonéj na płaszczyznę styczną ze środka powierzchni.

(127). Znaléść kąt między tworzącymi hiperbolojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, przechodzącymi przez punkt (α, β, γ) na téj powierzchni.

(128). Dowiéść, że tworzące powierzchni $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, przechodzące przez punkt, dla którego $z=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}$, są do siebie prostopadłe.

(129). Okazać, że jeżeli dwie tworzące, wychodzące z punktu Q na hiperbolojdzie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, przecinają elipsę szyjną w P i P′ na końcach dwu średnic sprzężonych, to $QP^2+QP'^2=a^2+b^2+2c^2$.

(130). Okazać, że jeżeli przez dwie tworzące tego samego układu, przechodzące przez końce osi wielkiéj elipsy szyjnéj hiperbolojdy, poprowadzimy dwie płaszczyzny, i jeżeli te płaszczyzny przecinają się według jakiéjkolwiek trzeciéj tworzącéj, to ślady tych płaszczyzn na każdéj z dwu płaszczyzn centralnych przekroju kołowego są do siebie prostopadłe.

(131). Okazać, że jeżeli dwie tworzące hiperbolojdy są osiami spółrzędnych, to równanie powierzchni można sprowadzić do postaci $z^2+az=lyz+mzx+nxy$.

(132). Okazać, że kąt między dwiema tworzącymi parabolojdy $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=4z$, przechodzącymi przez punkt (α, 0, γ), jest $\arccos\frac{p-q+\gamma}{p+q+\gamma}$.

(133). Okazać, że prostopadłe z początku na tworzące parabolojdy $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ leżą na stożkach $\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)(ax\pm by)+2z^2=0$.

(134). Okazać, że prostopadłe z początku na tworzące hiperbolojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ leżą na stożku $\frac{a^2}{x^2}(b^2+c^2)^2+\frac{b^2}{y^2}(c^2+a^2)^2=\frac{c^2}{z^2}(a^2-b^2)^2$.

(135). Okazać, że kąt między tworzącymi hiperbolojdy $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$, przechodzącymi przez punkt (x, y, z), jest $\arccos\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania $\frac{x^2}{a(a+\lambda)}+\frac{y^2}{b(b+\lambda)}+\frac{z^2}{c(c+\lambda)}=0$.

(136). Tworzące hiperbolojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ przechodzą przez te punkty elipsy szyjnéj, których kąty mimośrodowe są α, β; okazać, że punkt ich przecięcia się jest wyznaczony przez równania

$$\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{y}{b\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{z}{\pm c\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{l}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha)}.$$

Nadto jeżeli δ jest odległością najkrótszą między dwiema tworzącymi tego samego układu, to

$$\frac{4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\delta^2}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{a^2}+\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{b^2}+\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{c^2}.$$

(137). Okazać, że jeżeli R oznacza długość połowy średnicy przekroju płaskiego powierzchni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ płaszczyzną centralną $lx+my+nz=0$, a r długość połowy średnicy równoległéj przekroju téj saméj powierzchni płaszczyzną równoległą $lx+my+nz-p=0$, to $r^2=R^2\left(1-\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}\right)$.

(138). Okazać że, jeżeli płaszczyzna $lx+my+nz=p$ przecina powierzchnią $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ według paraboli, to $a^2l^2+b^2m^2-c^2n^2=0$.

(139). Jeżeli płaszczyzna centralna przekroju kołowego elipsojdy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

przecina powierzchnią $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$, to suma kwadratów którychkolwiek dwu do siebie prostopadłych promieni krzywéj przecięcia jest stałą.

(140). *a)* Znaléść przekroje kołowe powierzchni $\frac{yz}{a^2}+\frac{zx}{b^2}+\frac{xy}{a^2}=1$ i *b)* okazać, że jeżeli przekrój téj powierzchni płaszczyzną $lx+my+nz=0$ jest hiperbolą równoboczną, to $\frac{1}{a^2l}+\frac{1}{b^2m}+\frac{1}{c^2n}=0$.

(141). Okazać, że ogniska wszystkich przekrojów parabolicznych powierzchni $\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}=x$ leżą na powierzchni $\left(x-\frac{y^2}{a}-\frac{z^2}{b}\right)\left(\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}\right)=\frac{ab}{4}\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$.

(142). Okazać, że ogniska wszystkich przekrojów centralnych powierzchni $ax^2+by^2+cz^2=1$ leżą na powierzchni

$$(x^2+y^2+z^2)(1-ax^2-by^2-cz^2)\left[a(c-b)^2y^2z^2+b(a-c)^2z^2x^2+c(b-a)^2x^2y^2\right]=$$
$$=(ax^2+by^2+cz^2)\left[(c-b)^2y^2z^2+(a-c)^2z^2x^2+(b-a)^2x^2y^2\right].$$

ROZDZIAŁ X.

O OGNISKACH POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

KRZYWE OGNISKOWE.

117. Powierzchnie stopnia 2-go posiadają tę własność, że stosunek kwadratu odległości punktu bieżącego na nich od ogniska przekroju głównego do iloczynu dwu jego odległości od płaszczyzn, przecinających się według kierownicy, należącej do tego ogniska, jest stały. Jakoż, weźmy pod uwagę np. elipsojdę, przedstawioną przez równanie

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

w którym $a^2>b^2>c^2$, i oznaczmy przez e_1, e_2, e_3 mimośrody przekrojów głównych tej elipsojdy, odpowiednio przez płaszczyzny YZ, ZX, XY. Spółrzędne ogniska przekroju przez płaszczyznę XY są $(ae_3, 0, 0)$, a zatym kwadrat odległości punktu bieżącego (x, y, z) na (1) od tego ogniska jest

$$=(x-ae_3)^2+y^2+z^2=x^2-2ae_3x+a^2e_3{}^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+z^2$$
$$=x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2ae_3x+a^2-\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)z^2=(e_3x-a)^2-\frac{b^2e_1{}^2z^2}{c^2}$$
$$=(e_3x-e'z-a)(e_3x+e'z-a),\ \text{jeżeli}\ e'=\frac{be_1}{c}.$$

Widzimy stąd, że kwadrat odległości punktu bieżącego (x, y, z) na (1) od ogniska przekroju płaszczyzną XY jest proporcyjonalny do iloczynu dwu funkcyj stopnia 1-go względem spółrzędnych tego punktu, a więc pozostaje w stosunku stałym do iloczynu jego odległości od dwu płaszczyzn

(2) $$e_3x-e'z-a=0\quad\text{i}\quad e_3x+e'z-a=0,$$

które się przecinają według prostej

(3) $$z=0\quad\text{i}\quad e_3x-a=0,$$

t. j. według kierownicy, należącej do ogniska przekroju $(ae_3, 0, 0)$. — Podobnie rzecz się ma ze względu na ogniska przekrojów głównych płaszczyznami ZX i YZ, lecz w tych przypadkach płaszczyzny, odpowiadające płaszczyznom (2), są urojone, lubo prosta ich przecięcia się jest rzeczywista.

Ogniska przekrojów głównych powierzchni stopnia 2-go nie są jedynymi punktami, względem których te powierzchnie posiadają dowiedzioną dopiéroco własność. Aby to okazać, znajdziemy warunki, jakim spółrzędne jakiegokolwiek punktu winny uczynić zadość, jeżeli kwadrat jego odległości od punktu bieżącego na powierzchni stopnia 2-go ma być proporcyjonalny do iloczynu odległości punktu bieżącego czyto od dwu płaszczyzn rzeczywistych, czytéż od dwu płaszczyn urojonych sprzężonych.

118. Powierzchnie ze środkiem. Oznaczmy przez (α, β, γ) spółrzędne punktu żądanego, a przez $(\alpha', \beta', \gamma')$ spółrzędne jakiegokolwiek punktu na prostéj, według któréj przecinają się dwie płaszczyzny; natenczas, przy wszelkich wartościach na (x, y, z), które czynią zadość równaniu powierzchni stopnia 2-go, wyrażenie $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$ winno być tożsamościowe równe iloczynowi $[l(x-\alpha')+m(y-\beta')+n(z-\gamma')][l'(x-\alpha')+$ $+m'(y-\beta')+n'(z-\gamma')]$, czyli równanie

$$(4)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-[l(x-\alpha')+m(y-\beta')+n(z-\gamma')]$$
$$[l'(x-\alpha')+m'(y-\beta')+n'(z-\gamma')]=0$$

powinno być tymże samym równaniem powierzchni stopnia 2-go.

Weźmy naprzód pod uwagę powierzchnią ze środkiem. Niech jéj równanie odniesione do osi głównych będzie

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\lambda,$$

gdzie $\lambda=1$ dla elipsojdy i obu hiperbolojd, a $\lambda=0$ dla stożka. — Aby równania (4) i (5) mogły być tożsamościowe, w równaniu (4) spółczynniki wyrazów zawierających yz, zx, xy winny być równe 0. Mamy zatym trzy równania warunkowe:

$$mn'+m'n=0,\quad nl'+n'l=0,\quad lm'+l'm=0,$$

którym stanie się zadość jedynie przy jednym z trzech następujących założeń:

$$(6)\left\{\begin{aligned} &n=0\,,\ n'=0\,,\ \frac{l'}{l}=-\frac{m'}{m},\\ &m=0\,,\ m'=0\,,\ \frac{n'}{n}=-\frac{l'}{l},\\ &l=0\,,\ l'=0\,,\ \frac{m'}{m}=-\frac{n'}{n},\end{aligned}\right.$$

a. Przy piérwszym założeniu, kładąc $\dfrac{m'}{m}=k$, przywiedziemy równanie (4) do

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+kl^2(x-\alpha')^2-km^2(y-\beta')^2=0.$$

Porównawszy zaś je z równaniem (5), mamy

$$(7)\qquad \begin{cases} a^2(1+kl^2)=b^2(1-km^2)=c^2, \\ \alpha+kl^2\alpha'=0 \quad \beta-km^2\beta'=0, \quad \gamma=0, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+kl^2\alpha'^2-km^2\beta'^2=-\lambda c^2, \end{cases}$$

skąd wypada

$$kl^2=-\frac{a^2-c^2}{a^2},\quad km^2=\frac{b^2-c^2}{b^2},\quad \alpha'=\frac{a^2\alpha}{a^2-c^2},\quad \beta'=\frac{b^2\beta}{b^2-c^2}.$$

Podstawiając te wartości w ostatnie z równań (7), otrzymujemy

$$(8)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2-c^2}+\frac{\beta^2}{b^2-c^2}=\lambda,\quad \gamma=0,$$

jako równanie miejsca punktu, którego kwadrat odległości od punktu bieżącego powierzchni (5) pozostaje w stosunku stałym do iloczynu odległości tego ostatniego punktu od dwu płaszczyzn. Tym miejscem jest więc krzywa stopnia 2-go na płaszczyźnie XY, którą nazwiemy **krzywą ogniskową**.

Każdemu punktowi $(\alpha, \beta, 0)$ téj krzywéj odpowiada, jako **kierownica**, prosta przecięcia się dwu płaszczyzn

$$m^2(y-\beta')^2-l^2(x-\alpha')^2=0;$$

ta prosta jest prostopadła do płaszczyzny XY i spotyka tę płaszczyznę w punkcie $(\alpha', \beta', 0)$ takim, iż

$$\alpha'=\frac{a^2\alpha}{a^2-c^2},\quad \beta'=\frac{b^2\beta}{b^2-c^2}.$$

Rugując α, β zapomocą tych równań z równania (8), otrzymamy równanie walca

$$(9)\qquad \frac{a^2-c^2}{a^4}\alpha'^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}\beta'^2=\lambda,\quad \gamma'=0$$

jako miejsca kierownic odpowiadających oddzielnym punktom krzywéj ogniskowéj (8). Ślad tego walca na płaszczyźnie XY nazywa się **krzywą kierującą**, odpowiadającą krzywéj ogniskowéj (8). Łatwo spostrzéc, że krzywa ogniskowa (8) i krzywa kierująca (9) są biegunowo wzajemnymi względem przekroju głównego, na którego płaszczyźnie obie leżą, i że prosta, łącząca spodek któréjkolwiek kierownicy z odpowiadającym jéj ogniskiem, jest normalną do krzywéj ogniskowéj.

b. Przy drugim założeniu, kładąc $\frac{l'}{l}=k$, sprowadzimy równanie (4) do

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-k[l^2(x-\alpha')^2-n^2(z-\gamma')^2]=0.$$

Z porównania tego równania z równaniem (5) wypada

$$(10)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2-b^2}-\frac{\gamma^2}{b^2-c^2}=\lambda,\quad \beta=0,$$

jako równania drugiéj krzywéj ogniskowéj na płaszczyźnie ZX, i

(11) $$\frac{a^2-b^2}{a^4}\alpha'^2-\frac{b^2-c^2}{c^4}\gamma'^2=\lambda,\quad \beta'=0,$$

jako równania odpowiedniéj krzywéj kierującéj. I tu także obie krzywe są biegunowo wzajemnymi względem przekroju głównego płaszczyzną ZX.

c. Przy trzecim założeniu, kładąc $\frac{n'}{n}=k$, zamiast równania (4) mieć będziemy

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+k[m^2(y-\beta')^2-n^2(z-\gamma')^2]=0,$$

a porównywając je z równaniem (5), otrzymujemy

(12) $$\frac{\beta^2}{b^2-a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-a^2}=\lambda,\quad \alpha=0,$$

jako równania trzeciéj krzywéj ogniskowéj, tudzież

(13) $$\frac{b^2-a^2}{b^4}\beta'^2+\frac{c^2-a^2}{c^4}\gamma'^2=\lambda,\quad \alpha'=0,$$

jako równania odpowiedniéj krzywéj kierującéj.

119. *Pośród trzech krzywych ogniskowych* (8), (10), (12) *i odpowiednich tymże krzywych kierujących jedna jest elipsą (w stożku punktem), druga hiperbolą (w stożku dwiema prostymi, przecinającymi się w wiérzchołku stożka), a trzecia krzywą urojoną (w stożku punktem).*

Zakładając, że co do wartości bezwzględnéj $a^2>b^2>c^2$, tudzież, że $c^2<0$ dla hiperbolojdy jednopowłokowéj, a $b^2<0$ i $c^2<0$ dla hiperbolojdy dwupowłokowéj, łatwo spostrzeżemy, że w elipsojdzie i w hiperbolojdzie jednopowłokowéj, elipsa ogniskowa i kierująca leżą na płaszczyźnie XY, a hiperbola ogniskowa i kierująca na płaszczyźnie ZX; w hiperbolojdzie zaś dwupowłokowéj rzecz się ma odwrotnie.

W stożku ($\lambda=0$), dla którego przyjmujemy $c^2<0$ i $a^2>b^2$, równania krzywych ogniskowych są:

$$\gamma=0,\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}+\frac{\beta^2}{b^2-c^2}=0;\ \beta=0,\ \frac{\alpha^2}{a^2-b^2}-\frac{\beta^2}{b^2-c^2}=0;\ \alpha=0,\ \frac{\beta^2}{a^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{a^2-c^2}=0.$$

A zatym w stożku

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

gdzie $a^2>b^2$, jedyną krzywą ogniskową przedstawiają dwie proste, przecinające się w wiérzchołku; te dwie proste leżą na płaszczyźnie ZX.

120. Powierzchnia bez środka. Aby otrzymać krzywe ogniskowe parabolojd

(14) $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

należy znowu uważać równanie (4) i równanie (14) jako przedstawiające tę samę powierzchnią. Tym sposobem znajdziemy naprzód trzy układy równań warunkowych (6). Postępując następnie taksamo, jak w art. 118, znajdziemy, że piérwszemu układowi odpowiada krzywa ogniskowa

$$\beta^2-(p-q)(2\alpha-q)=0, \quad \gamma=0, \tag{15}$$

a drugiemu krzywa ogniskowa

$$\gamma^2+(p-q)(2\alpha-p)=0, \quad \beta=0. \tag{16}$$

Trzeci układ równań warunkowych jest niemożebny; albowiém, ponieważ równanie (14) nie zawiéra w sobie x^2, więc porównanie równania (14) z równaniem (4), dla $l=l'=0$, prowadziłoby do niedorzeczności.

A zatym: *krzywymi ogniskowymi obu parabolojd są dwie parabole, z których jedna leży na płaszczyźnie* XY, *a druga na płaszczyźnie* ZX; *wiérzchołki obu są ogniskami odpowiednich przekrojów głównych.*

Krzywą kierującą, odpowiadającą paraboli ogniskowéj (15), jest także parabola

$$\beta'^2=\frac{p^2}{p-q}(2\alpha'+q), \quad \gamma'=0. \tag{17}$$

Ta parabola i parabola (15) są widocznie także biegunowo wzajemnymi względem paraboli $y^2=2px$, $z=0$ odpowiedniego przekroju głównego. Taksamo rzecz się ma z drugą parabolą ogniskową i odpowiadającą jéj krzywą kierującą. Nietrudno okazać, że ogniskowe walca eliptycznego i hiperbolicznego są dwiema prostymi, na których leżą ogniska przekrojów głównych, a ogniskowe walca parabolicznego są dwiema prostymi, z których jedna leży w odległości nieskończonéj, a druga przechodzi przez ogniska przekrojów głównych.

POWIERZCHNIE STOPNIA 2-GO SPÓŁOGNISKOWE.

121. Dwie powierzchnie stopnia 2-go, mające krzywe ogniskowe spólne, zowiemy powierzchniami stopnia 2-go s p ó ł o g n i s k o w y m i. Rozważymy tylko powierzchnie ze środkiem. Niech

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1 \tag{2}$$

będą równaniami osiowymi dwu powierzchni stopnia 2-go ze środkiem. Te dwie powierzchnie będą miały krzywe ogniskowe spólne, a więc będą spółogniskowymi, jeżeli

$$b'^2-c'^2=b^2-c^2, \quad c'^2-a'^2=c^2-a^2 \quad \text{i} \quad a'^2-b'^2=a^2-b^2,$$

lub jeżeli

$$a'^2-a^2=b'^2-b^2=c'^2-c^2, \tag{3}$$

t. j. jeżeli kierunki ich osi głównych razem się z sobą schodzą, a kwadraty tych osi różnią się o wielkość stałą. Stąd wypada, że równanie

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1,$$

gdy w nim na k będziemy nadawali wszelkie wartości rzeczywiste, przedstawi wszelkie możliwe powierzchnie stopnia 2-go, spółogniskowe z powierzchnią (1).

Kładąc w równaniu (1) $a^2-b^2=\beta^2$, $a^2-c^2=\gamma^2$, otrzymujemy równanie

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\beta^2}+\frac{z^2}{a^2-\gamma^2}=1,$$

które, gdy w nim, pozostawiając β^2 i γ^2 niezmiennymi, będziemy nadawali na a coraz inne wartości, przedstawiać będzie coraz inną powierzchnią stopnia 2-go tego samego układu spółogniskowego. W tym równaniu $2a$ nazywamy osią pierwszorzędną.

Przez punkt dowolnie dany można poprowadzić trzy powierzchnie spółogniskowe z powierzchnią daną, z których jedna jest elipsojdą, druga hiperbolojdą jednopowłokową, a trzecia hiperbolojdą dwupowłokową. Jakoż, jeżeli powierzchnia (4) ma przechodzić przez punkt (ξ, η, ζ), to k będzie pierwiastkiem równania

$$\frac{\xi^2}{a^2-k}+\frac{\eta^2}{b^2-k}+\frac{\zeta^2}{c^2-k}=1, \quad \text{czyli}$$

$$(k-a^2)(k-b^2)(k-c^2)+\xi^2(k-b^2)(k-c^2)+\eta^2(k-c^2)(k-a^2)+\zeta^2(k-a^2)(k-b^2)=0.$$

Załóżmy, że co do wartości bezwzględnéj $a^2>b^2>c^2$, przyczym albo c^2, albo b^2 i c^2 mogą być dodatne lub ujemne. Natenczas, jeżeli w lewéj stronie tego równania za k podstawimy a^2, b^2, c^2, $-\infty$, to znaki wypadku podstawienia będą odpowiednio $+ \; - \; + \; -$. Napisane więc równanie stopnia 3-go względem k ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, co dowodzi, że przez punkt (ξ, η, ζ) przechodzą trzy powierzchnie spółogniskowe z powierzchnią (1). Nadto, ilości a^2-k, b^2-k, c^2-k będą miały, odpowiednio trzem wartościom na k, następujące znaki

dla $c^2>k \quad :+,+,+,$
„ $b^2>k>c^2:+,+,-,$
„ $a^2>k>b^2:+,-,-.$

A zatym pierwiastkowi najmniejszemu odpowiada elipsojda, średniemu hiperbolojda jednopowłokowa, a największemu hiperbolojda dwupowłokowa.

Stąd także wypada, że dwie elipsojdy spółogniskowe, jak również dwie hiperbolojdy spółogniskowe, czyto obie jednopowłokowe, czytéż obie dwupowłokowe, nie mogą się z sobą przecinać.

Jeżeli trzy powierzchnie spółogniskowe przechodzą przez ten sam punkt, to normalne do tych powierzchni w tym punkcie są po dwie do siebie prostopadłe. Jakoż, odjąwszy od siebie dwa równania:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{\xi^2}{a^2-k}+\frac{\eta^2}{b^2-k}+\frac{\zeta^2}{c^2-k}=1,$$

otrzymamy

$$\frac{\xi^2}{a^2(a^2-k)}+\frac{\eta^2}{b^2(b^2-k)}+\frac{\zeta^2}{c^2(c^2-k)}=0;$$

a zatym, jeżeli (l, m, n) i $(l', m' n')$ są dostawami kierunkowymi normalnych w (ξ, η, ζ) do dwu powierzchni spółogniskowych (1) i (4), to

$$ll'+mm'+nn'=0.$$

Pomiędzy powierzchniami spółogniskowymi, przedstawionymi przez równanie (4), znajdują się dwie, osobliwie dla nas ważne. Jeżeli $a^2>b^2>c^2>0$, to natenczas, gdy k od 0 stopniowo wzrasta, powierzchnia, przy przejściu k przez wartość c^2, przejdzie z elipsojdy na hiperbolojdę jednopowłokową, a przy przejściu k przez wartość b^2 przejdzie z hiperbolojdy jednopowłokowéj na hiperbolojdę dwupowłokową.

Jeżeli $k=c^2$, to $z^2=0$ i powierzchnią spółogniskową należy uważać jako parę płaszczyzn schodzących się z XY. Ściśléj rzecz biorąc, jest ona wtedy granicą coraz więcéj spłaszczającéj się elipsojdy lub hiperbolojdy jednopowłokowéj, według tego czy k, dążąc do c^2, jest wciąż mniejsze, czytéż wciąż większe od c^2. Rozgraniczeniem zaś obu jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1, \quad z=0,$$

którąśmy poznali (art. 119) jako elipsę ogniskową. — Podobnie, dla $k=b^2$, mamy $y^2=0$, t. j. spółogniskowa może być uważana jako para płaszczyzn schodzących się z płaszczyzną ZX, będących granicą coraz więcéj spłaszczającéj się hiperbolojdy jednopowłokowéj lub dwupowłokowéj, według tego, czy k, dążąc do b^2, jest wciąż $<b^2$, czytéż $>b^2$. Rozgraniczeniem obu jest hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1, \quad y=0,$$

którąśmy poznali jako hiperbolę ogniskową.

Te dwie krzywe ogniskowe są spólne wszystkim powierzchniom spółogniskowym (4). Łatwo spostrzéc, że hiperbola ogniskowa przechodzi przez umbiliki elipsojd układu spółogniskowego (4), dla których mamy (art. 114)

$$\frac{x^2}{(a^2-k)(a^2-b^2)}=\frac{z^2}{(c^2-k)(b^2-c^2)}=\frac{1}{a^2-c^2}.$$

122. Niech $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ będzie równaniem osiowym elipsojdy. Kładąc $a^2-b^2=\beta^2$, $a^2-c^2=\gamma^2$, możemy, jeżeli $a^2>b^2>c^2$, $\beta^2<\gamma^2$, to równanie tak pisać:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\beta^2}+\frac{z^2}{a^2-\gamma^2}=1. \tag{5}$$

Oznaczmy przez a' i a'' połowy osi piérwszorzędnéj hiperbolojd jedno- i dwupowłokowéj spółogniskowych, przechodzących przez punkt (ξ, η, ζ) na elipsojdzie (5); natenczas

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1.$$

Ponieważ także

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{a^2 - \gamma^2} = 1,$$

zatym odejmując te dwa równania od siebie, mieć będziemy

$$\frac{\xi^2}{a^2\alpha^2} + \frac{\eta^2}{(a^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\zeta^2}{(a^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} = 0,$$

lub

$$\alpha^4 + A\alpha^2 + \frac{\xi^2\beta^2\gamma^2}{a^2} = 0,$$

Jeżeli pierwiastki tego równania, stopnia 2-go względem α^2 nazmiemy a'^2 i a''^2 to $a'^2a''^2 = \frac{\xi^2\beta^2\gamma^2}{a^2}$, skąd $\xi^2 = \frac{a^2a'^2a''^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{a^2a'^2a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$. Oznaczając przez b' i b'', c' i c'' połowy osi drugorzędnéj lub odpowiednio trzeciorzędnéj hiperbolojd jedno- i dwupowłokowéj, przechodzących przez punkt (ξ, η, ζ) na elipsojdzie (5), znajdziemy taksamo

$$\eta^2 = \frac{b^2b'^2b''^2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \quad \text{i} \quad \zeta^2 = \frac{c^2c'^2c''^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

A zatym, *jeżeli (a', b', c') i (a'', b'', c'') są połowami osi hiperbolojd jedno- i dwupowłokowéj, spółogniskowych z elipsojdą, któréj połowami osi są (a, b, c), i jeżeli owe hiperbolojdy przechodzą przez punkt (ξ, η, ζ) na téj elipsojdzie, to*

$$(6)\quad \xi^2 = \frac{a^2a'^2a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad \eta^2 = \frac{b^2b'^2b''^2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad \zeta^2 = \frac{c^2c'^2c''^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Stąd widzimy, że jeżeli o punkcie na elipsojdzie wiemy, na któréj z ośmiu części, na jakie płaszczyzny przez jéj osi przechodzące roskładają tę powierzchnią, on się znajduje, to możemy wyznaczyć położenie tego punktu zapomocą osi hiperbolojd spółogniskowych, przez ten punkt przechodzących.

Osi piérwszorzędne obu hiperbolojd spółogniskowych, przechodzących przez jakikolwiek punkt elipsojdy, zowią się s p ó ł r z ę d n y m i e l i p t y c z n y m i tego punktu. Ponieważ $b'^2 = a'^2 - \beta^2$, $b''^2 = a''^2 - \beta^2$, $c'^2 = a'^2 - \gamma^2$, $c''^2 = a''^2 - \gamma^2$, przeto, zamiast (6), można pisać

$$(6')\quad \xi^2 = \frac{a^2a'^2a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad \eta^2 = \frac{b^2(a'^2 - \beta^2)(a''^2 - \beta^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad \zeta^2 = \frac{c^2(a'^2 - \gamma^2)(a''^2 - \gamma^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

t. j. spółrzędne punktu na elipsojdzie można wyrazić zawsze przez spółrzędne eliptyczne tego punktu.

Równania dwu krzywych przecięcia się obu hiperbolojd spółogniskowych z elipsojdą we spółrzędnych eliptycznych są odpowiednio: a' lub $a''=$ stałéj.

123. *Jeżeli trzy powierzchnie spółogniskowe przechodzą przez punkt* P *i jeżeli jednę z nich przetniemy płaszczyzną centralną, równoległą do płaszczyzny stycznéj do niéj w* P, *natenczas osi tego przekroju będą równoległe do normalnych w* P *do dwu pozostałych powierzchni spółogniskowych. Nadto, jeżeli* $2a$, $2a'$, $2a''$ *są długościami osi piérwszorzędnych tych powierzchni, to kwadraty połów osi przekroju będą* $a^2-a'^2$ *i* $a^2-a''^2$. – Jakoż, niech $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1$ przedstawiają trzy powierzchnie spółogniskowe, przechodzące przez punkt P (ξ, η, ζ), gdy na k nadamy dwie wartości k' i k'', określone przez równanie stopnia 2-go

$$\frac{\xi^2}{a^2(a^2-k)}+\frac{\eta^2}{b^2(b^2-k)}+\frac{\zeta^2}{c^2(c^2-k)}=0.$$

Jeżeli (l, m, n), (l', m', n') i (l'', m'', n'') są dostawami kierunkowymi normalnych w P do tych trzech powierzchni spółogniskowych, to

$$\frac{\xi}{a^2 l}=\frac{\eta}{b^2 m}=\frac{\zeta}{c^2 n},\quad \frac{\xi}{(a^2-k')l'}=\frac{\eta}{(b^2-k')m'}=\frac{\zeta}{(c^2-k')n'},$$
$$\frac{\xi}{(a^2-k'')l''}=\frac{\eta}{(b^2-k'')m''}=\frac{\zeta}{(c^2-k'')n''}.$$

Te równania, łącznie z poprzednim, dają

$$\frac{a^2 l^2}{a^2-k}+\frac{b^2 m^2}{b^2-k}+\frac{c^2 n^2}{c^2-k}=0, \quad \text{i}$$

$$\frac{a^2-k'}{a^2}\cdot\frac{l'}{l}=\frac{b^2-k'}{b^2}\cdot\frac{m'}{m}=\frac{c^2-k'}{c^2}\cdot\frac{n'}{n},\quad \frac{a^2-k''}{a^2}\cdot\frac{l''}{l}=\frac{b^2-k''}{b^2}\cdot\frac{m''}{m}=\frac{c^2-k''}{c^2}\cdot\frac{n''}{n}.$$

Podług artykułu 115-go k' i k'' są kwadratami połów osi przekroju płaszczyzną $lx+my+nz=0$, równoległą do płaszczyzny stycznéj w P, a (l', m', n') i (l'', m'', n'') są dostawami kierunkowymi tychże osi. Nadto, ponieważ $a^2-k'=a'^2$ i $a^2-k''=a''^2$, przeto $k'=a^2-a'^2$, $k''=a^2-a''^2$.

Jeżeli a' i a'' są połowami osi piérwszorzędnych odpowiednio hiperbolojdy jedno- i dwupowłokowéj, to $a'>a''$, a więc $a^2-a'^2<a^2-a''^2$.

124. *O s i g ł ó w n e stożka stycznego do danéj powierzchni stopnia 2-go są normalnymi do trzech powierzchni z daną spółogniskowych, przechodzących przez wiérzchołek tego stożka.* Jakoż, niech $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ będzie daną powierzchnią stopnia 2-go, a (ξ, η, ζ) wiérzchołkiem stożka stycznego. Pisząc u_0 za $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1$, jako równanie tego stożka, odniesione do wiérzchołka jako początku, otrzymamy

$$u_0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}\right)^2=0.$$

Środek (x_0, y_0, z_0) przekroju tego stożka płaszczyzną $lx+my+nz=p$ wyznaczają równania (art. 113)

$$\frac{u_0x_0-\xi v}{la^2}=\frac{u_0y_0-\eta v}{mb^2}=\frac{u_0z_0-\zeta v}{nc^2}=\frac{u_0v-(u_0+1)v}{l\xi+m\eta+n\zeta}=\frac{-v}{l\xi+m\eta+n\zeta},$$

gdzie $v=\frac{\xi x_0}{a^2}+\frac{\eta y_0}{b^2}+\frac{\zeta z_0}{c^2}$. Niech następnie $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ będzie równaniem odniesionym do pierwotnych osi powierzchni spółogniskowéj z daną, przechodzącéj przez punkt (ξ, η, ζ) i mającéj w tym punkcie płaszczyznę styczną $lx+my+nz-p=0$. Mamy wówczas

$$p=l\xi+m\eta+n\zeta, \quad \text{tudzież} \quad \xi p=l\alpha^2, \quad \eta p=m\beta^2, \quad \zeta p=n\gamma^2.$$

Wskutek tego, powyższe równania dają

$$u_0x_0=\frac{lv}{p}(\alpha^2-a^2), \quad u_0y_0=\frac{mv}{p}(\beta^2-b^2), \quad u_0z_0=\frac{nv}{p}(\gamma^2-c^2);$$

a że $\alpha^2-a^2=\beta^2-b^2=\gamma^2-c^2=k$, przeto

$$\frac{x_0}{l}=\frac{y_0}{m}=\frac{z_0}{n}.$$

A zatym, środki wszelkich przekrojów stożka stycznego do danéj powierzchni, równoległych do płaszczyzny stycznéj do jakiéjkolwiek powierzchni spółogniskowéj, przechodzącéj przez wiérzchołek stożka, leżą na normalnéj do téj powierzchni; normalne więc w tym wiérzchołku do trzech powierzchni spółogniskowych z daną są kierunkami osi głównych stożka stycznego.

125. *Stożek styczny do powierzchni stopnia 2-go* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *jest obrotowy, jeżeli jego wiérzchołek* (ξ, η, ζ) *leży na jednéj z krzywych ogniskowych téj powierzchni.* Jakoż, stożek styczny do téj powierzchni ma za równanie

$$u_0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)^2=0,$$

gdzie u_0 ma takie samo znaczenie, jak w artykule poprzedzającym. W tym równaniu spółczynniki wyrazów zawiérających x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, są odpowiednio

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{11}=\frac{u_0}{a^2}-\frac{\xi^2}{a^4}, \quad a_{22}=\frac{u_0}{b^2}-\frac{\eta^2}{b^4}, \quad a_{33}=\frac{u_0}{c^2}-\frac{\zeta^2}{c^4},\\ &a_{23}=-\frac{\eta\zeta}{b^2c^2}, \quad a_{31}=-\frac{\zeta\xi}{c^2a^2}, \quad a_{12}=-\frac{\xi\eta}{a^2b^2}.\end{aligned}\right.$$

Jeżeli ten stożek jest obrotowy, to (art. 66)

$$(\beta)\quad \frac{a_{11}a_{23}-a_{31}a_{12}}{a_{23}}=\frac{a_{22}a_{31}-a_{12}a_{23}}{a_{31}}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{23}a_{31}}{a_{12}}.$$

Atoli, wskutek (α), mamy

$$a_{11}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}=\frac{u_0}{a^2},\quad a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}=\frac{u_0}{b^2},\quad a_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}=\frac{u_0}{c^2}.$$

Równaniom (β) stanie się zadość: jeżeli $a^2=b^2=c^2$, t. j. jeżeli dana powierzchnia stopnia 2-go jest kulą, albo jeżeli $u_0=0$, t. j. jeżeli punkt (ξ, η, ζ) leży na danéj powierzchni, w którymto przypadku stożek styczny jest właściwie płaszczyzną styczną do danéj powierzchni w punkcie (ξ, η, ζ). Jeżeli zaś ani piérwszy, ani drugi z przypadków wymienionych nie ma miejsca, to tylko wtedy, równaniom (β) możemy uczynić zadość kiedy dwa ze spółczynników a_{23}, a_{31}, a_{12} przyrównamy do 0, a trzeci przyjmiemy za różny od 0.

Jeżeli przyjmiemy $a_{31}=a_{12}=0$, $a_{23}\gtrless 0$, a przeto $\xi=0$, to stożek styczny będzie obrotowym wrazie, gdy (art. 66) $(a_{22}-a_{11})(a_{33}-a_{11})-a_{23}{}^2=0$, a więc, gdy

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}u_0-\frac{\eta^2}{b^4}\right)\left(\frac{a^2-c^2}{c^2a^2}u_0-\frac{\zeta^2}{c^4}\right)-\frac{\eta^2\zeta^2}{b^4c^4}=0.$$

Po wykonaniu działań i uproszczeń, znajdziemy, jako miejsce wiérzchołka stożka stycznego obrotowego (ponieważ u_0 jest różne od zera):

$$\frac{\eta^2}{b^2-a^2}+\frac{\zeta^2}{c^2-a^2}=1,\quad \xi=0,$$

Założenia $a_{12}=a_{23}$ i $a_{23}=a_{31}$ dają odpowiednio

$$\frac{\xi^2}{a^2-b^2}-\frac{\zeta^2}{b^2-c^2}=1,\quad \eta=0,\quad \text{i}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta^2}{b^2-c^2}=1,\quad \zeta=0.$$

Widzimy zatym, że stożek styczny do powierzchni stopnia 2-go jest obrotowym wrazie, gdy jego wiérzchołek leży na któréjkolwiek z krzywych ogniskowych téj powiérzchni.

Łatwo zrozumiéć, że stożek obrotowy styczny do elipsojdy będzie tylko wtedy rzeczywisty, jeżeli jego wiérzchołek leży na téj części hiperboli ogniskowéj, która się znajduje zewnątrz elipsojdy. Dla hiperbolojdy jednopowłokowéj ten wiérzchołek może leżéć bądź na elipsie, bądźteż na hiperboli ogniskowéj; albowiém piérwsza z tych krzywych leży całkiem zewnątrz, a druga całkiem wewnątrz hiperbolojdy. Nakoniec dla hiperbolojdy dwupowłokowéj miejscem wiérzchołka stożka stycznego obrotowego rzeczywistego jest elipsa ogniskowa, która zarazem przecina powierzchnią w punktach kołowych.

Nietrudno dowiéść, że każda styczna do krzywéj ogniskowéj jest osią stożka obrotowego stycznego, którego wiérzchołek razem się schodzi z punktem styczności téj stycznéj.

Badania, przeprowadzone w tym artykule, dają się łatwo rosciągnąć na obie parabolojdy.

ĆWICZENIA.

(143). Znaléść równania krzywych ogniskowych powierzchni

$$2x^2+3y^2+4z^2=9.$$

(144). Okazać, że jeżeli ogniska przekrojów głównych dwu parabolojd schodzą się z sobą razem, to i krzywe ogniskowe obu również razem się z sobą schodzą.

(145). Dla każdego przekroju płaskiego powierzchni stopnia 2-go, normalnego do jéj krzywéj ogniskowéj w jakimkolwiek punkcie, ów punkt jest ogniskiem.

(146). Na płaszczyźnie przekroju płaskiego, prostopadłéj do płaszczyzny krzywéj ogniskowéj, leżą dwie kierownice; okazać, że suma lub różnica odległości jakiegokolwiek punktu na przekroju od dwu odpowiednich ognisk jest stałą.

(147). Jeżeli stożek styczny do powierzchni stopnia 2-go ma wiérzchołek na któréjkolwiek kierownicy, to płaszczyzna biegunowa wiérzchołka przechodzi przez odpowiednie ognisko i jest prostopadłą do prostéj, łączącéj to ognisko z wiérzchołkiem stożka.

(148). Ogniska szeregu przekrojów równoległych elipsojdy, prostopadłych do płaszczyzny któréjkolwiek z krzywych ogniskowych, leżą na elipsie, stycznéj do odpowiedniéj krzywéj ogniskowéj.

(149). Znaléść równania spółogniskowych z powierzchnią $2x^2+3y^2+4z^2=9$, przechodzących przez punkt (1, 1, 1).

(150). Okazać, że równanie elipsojdy spółogniskowéj, która przechodzi przez punkt $(\alpha, 0, \gamma)$ na hiperboli ogniskowéj elipsojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, jest

$$\frac{x^2}{(b^2-c^2)\alpha^2}+\frac{(a^2-c^2)y^2}{(b^2-c^2)^2\alpha^2+(a^2-b^2)^2\gamma^2}+\frac{z^2}{(a^2-b^2)\gamma^2}=\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

(151). Jeżeli poprowadzimy dwie płaszczyzny styczne do dwu spółogniskowych, do siebie równoległe, to różnica kwadratów ich odległości od spólnego środka jest stałą.

(152). Biegun danéj płaszczyzny względem szeregu spółogniskowych leży na pewnéj prostéj, prostopadłéj do téj płaszczyzny; ta prosta jest normalną w punkcie styczności do téj spółogniskowéj, do któréj dana płaszczyzna jest styczną.

(153). Dwa punkty (x, y, z) i (x', y', z'), leżące odpowiednio na elipsojdach $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1$, zowią się odpowiednimi, jeżeli $\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'}$, $\frac{y}{b}=\frac{y'}{b'}$, $\frac{z}{c}=\frac{z'}{c'}$. Owóż, okazać, że jeżeli P, Q są dwoma punktami na jednéj elipsojdzie, a P′, Q′ punktami odpowiednimi na drugiéj elipsojdzie, to PQ′ = P′Q.

(154). Cięciwę, łączącą punkt na jednéj z krzywych ogniskowych z punktem na drugiéj krzywéj ogniskowéj téj saméj powierzchni stopnia 2-go, nazywamy cięciwą dwuogniskową téj powierzchni. Okazać, że jeżeli λ jest długością cięciwy dwuogniskowéj parabolojdy $\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=x$ i jeżeli ta cięciwa czyni kąty β i γ odpowiednio z osią y i z, to $\frac{1}{\lambda}=\frac{\cos^2\beta}{b}+\frac{\cos^2\gamma}{c}$.

(155). Przez stałą prostą są przesunięte płaszczyzny styczne do każdéj z szeregu powierzchni spółogniskowych; okazać, że normalne w punktach styczności utworzą parabolojdę hiperboliczną.

(156). Jeżeli pewna płaszczyzna dana jest styczną do powierzchni stopnia 2-go, któréj oś piérwszorzędna jest $=2\alpha$, w punkcie (ξ, η, ζ), to część normalnéj N w tym punkcie do téj powierzchni, zawarta między daną płaszczyzną i płaszczyzną biegunową punktu (ξ, η, ζ) względem spółogniskowéj, któréj oś piérwszorzędna $=2a$, wyrazi się przez $N=\frac{\alpha^2-a^2}{p}$, gdzie p oznacza odległość spólnego środka obu powierzchni od danéj płaszczyzny.

(157). Znaléść równanie stożka stycznego do danéj powierzchni stopnia 2-go, odniesione do normalnych do trzech powierzchni spółogniskowych, przechodzących przez wiérzchołek, jako do osi.

(158). Okazać, że można przez dany punkt poprowadzić trzy powierzchnie stopnia 2-go bez środka, spółogniskowe do danéj powierzchni stopnia 2-go bez środka, i że tymi będą: jedna parabolojda hiperboliczna, a dwie parabolojdy eliptyczne. Okazać także, że trzy normalne do tych trzech spółogniskowych w punkcie spólnym są po dwie do siebie prostopadłe.

(159). Trzy spółogniskowe parabolojdy przecinają się w S; stożek, mający wiérzchołek w S, jest styczny do czwartéj parabolojdy spółogniskowéj. Znaléść równanie tego stożka, odniesione do normalnych w S do trzech spółogniskowych, jako do osi.

(160). Znaléść miejsce punktu na szeregu spółogniskowych elipsojd, odpowiedniego danemu punktowi na danéj elipsojdzie.

ROZDZIAŁ XI.

RÓWNANIA POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO WE SPÓŁRZĘDNYCH CZWOROŚCIENNYCH.

126. Oznaczmy przez (x_1, x_2, x_3, x_4) spółrzędne czworościenne prostopadłe punktu bieżącego, a przez (h_1, h_2, h_3, h_4) odległości wiérzchołków A_1, A_2, A_3, A_4 czworościanu odniesienia od ścian czworościanu tym wiérzchołkom przeciwległych. Mamy wtedy związek $\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1$, zapomocą którego można każde niejednorodne równanie algiebraiczne między spółrzędnymi czworościennymi punktu uczynić jednorodnym. Dlategotéż, używając spółrzędnych czworościennych, możemy przyjąć, że równania w tych spółrzędnych są jednorodne.

Równanie więc ogólne powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych czworościennych punktu ma postać

$$(1)\quad f\equiv a_{11}x_1{}^2+a_{22}x_2{}^2+a_{33}x_3{}^2+a_{44}x_4{}^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2+ \\ +2a_{14}x_1x_4+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.$$

Jeżeli ta powierzchnia przechodzi przez wiérzchołek, np. A_1, czworościanu odniesienia, to jéj równaniu staje się zadość przy $x_1=h_1$, $x_2=x_3=x_4=0$, a zatym jest wtedy $a_{11}=0$. Podobnie rzecz się ma, gdy powierzchnia przechodzi przez którykolwiek inny wiérzchołek; a zatym, *równanie powierzchni stopnia 2-go, opisanéj na czworościanie odniesienia, jest kształtu:*

$$(2)\quad f\equiv a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{12}x_1x_2+a_{14}x_1x_4+a_{24}x_2x_4+a_{34}x_3x_4=0.$$

Jeżeli powierzchnia $f=0$ jest prostolinijową i na niéj leży jedna z krawędzi, np. A_1A_2, czworościanu odniesienia, natenczas jéj równaniu staje się zadość przy $x_3=x_4=0$, niezależnie od wartości na x_1 i x_2, a więc jest wtedy $a_{11}=0$, $a_{12}=0$ i $a_{22}=0$. Podobnie rzecz się ma, jeżeli na powierzchni leży jakakolwiek inna krawędź tego czworościanu; a zatym, *równanie powierzchni stopnia 2-go, na któréj leżą cztéry boki czworoboku skośnego* $A_1A_2A_3A_4$, *t. j. cztéry krawędzi* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 *czworościanu odniesienia, jest kształtu:*

(3) $$f \equiv a_{31}x_3x_1 + a_{24}x_2x_4 = 0.$$

W to równanie wchodzi jedna tylko ilość nieoznaczona $a_{31}:a_{24}$; to wskazuje, że *istnieje tylko jedna powierzchnia stopnia 2-go, przechodząca przez punkt dany, na któréj leży dany czworobok skośny.*

Zważmy jeszcze, że do powierzchni $f=0$ jest styczną np. krawędź A_1A_2, jeżeli, po podstawieniu w równaniu powierzchni $x_3=x_4=0$, wypadek podstawienia

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

będzie kwadratem zupełnym, czyli jeżeli

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Podobnie rzecz się ma z innymi krawędziami.

127. Oznaczmy przez (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) i $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ spółrzędne czworościenne dwu punktów dowolnie danych P′ i P″. Dla spółrzędnych punktu P, który odległość punktów P′ i P″ dzieli w stosunku $\mu:\lambda$, mamy

(4) $$\frac{x_1}{\lambda x'_1 + \mu x''_1} = \frac{x_2}{\lambda x'_2 + \mu x''_2} = \frac{x_3}{\lambda x'_3 + \mu x''_3} = \frac{x_4}{\lambda x'_4 + \mu x''_4}.$$

Jeżeli ten punkt jednocześnie leży na powierzchni (1), wówczas

(5) $$\lambda^2 f' + \lambda\mu(x''_1 f'_1 + x''_2 f'_2 + x''_3 f'_3 + x''_4 f'_4) + \mu^2 f'' = 0,$$

gdzie f' i f'' są wartościami funkcyi f odpowiednio w punktach P′ i P″, a f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 wartościami w punkcie P′ połów pochodnych cząstkowych funkcyi f, odpowiednio względem x_1, x_2, x_3, x_4.

Przeprowadzając taksamo rozbiór równania (5), jak poprzednio równania analogicznego w rozdziale VII, znajdziemy, że równanie

(6) $$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3 + x_4 f'_4 = 0$$

przedstawia płaszczyznę biegunową punktu P′ względem powierzchni $f=0$, tudzież, że równanie

(7) $$f'f - (x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3 + x_4 f'_4)^2 = 0$$

przedstawia stożek styczny do powierzchni $f=0$ z punktu P′.

Jeżeli punkt P′ leży na powierzchni $f=0$, a więc $f'=0$, to równanie (7) sprowadza się do równania (6), które w tym razie przedstawia płaszczyznę styczną do powierzchni $f=0$ w punkcie P′.

128. Oznaczmy przez $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ spółrzędne środka P^0 powierzchni $f=0$. Ponieważ płaszczyzna biegunowa środka jest płaszczyzną w nieskończoności, przeto dwa równania

$$x_1 f_1^0 + x_2 f_2^0 + x_3 f_3^0 + x_4 f_4^0 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 0,$$

z których piérwsze przedstawia płaszczyznę biegunową punktu P^0, a drugie płaszczyznę w nieskończoności, dają dla wyznaczenia spółrzędnych środka związki

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
f_1^0 &\equiv a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + a_{14}x_4^0 = \frac{\varkappa}{h_1},\\
f_2^0 &\equiv a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 + a_{24}x_4^0 = \frac{\varkappa}{h_2},\\
f_3^0 &\equiv a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 + a_{34}x_4^0 = \frac{\varkappa}{h_3},\\
f_4^0 &\equiv a_{41}x_1^0 + a_{42}x_2^0 + a_{43}x_3^0 + a_{44}x_4^0 = \frac{\varkappa}{h_4}
\end{aligned}
\right.
$$

Oznaczmy przez A wyróżnik $A \equiv \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ funkcyi f, a przez A_1, A_2, A_3, A_4 wartości, które ten wyróżnik przyjmie, jeżeli w nim zamiast elementów piérwszéj, drugiéj, trzeciéj i czwartéj kolumny weźmiemy odpowiednio $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}$. Natenczas, rozwiązując powyższe równania (8), otrzymamy

$$
(9)\qquad \frac{x_1^0}{A_1} = \frac{x_2^0}{A_2} = \frac{x_3^0}{A_3} = \frac{x_4^0}{A_4} = \frac{\varkappa}{A} = \frac{1}{\frac{1}{h_1}A_1 + \frac{1}{h_2}A_2 + \frac{1}{h_3}A_3 + \frac{1}{h_4}A_4}.
$$

Oznaczając nakoniec przez A_{ik} ilość dołączoną do elementu a_{ik} wyróżnika A, łatwo spostrzeżemy, że

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
A_1 &\equiv \frac{1}{h_1}A_{11} + \frac{1}{h_2}A_{12} + \frac{1}{h_3}A_{13} + \frac{1}{h_4}A_{14},\\
A_2 &\equiv \frac{1}{h_1}A_{21} + \frac{1}{h_2}A_{22} + \frac{1}{h_3}A_{23} + \frac{1}{h_4}A_{24}, \quad \text{i t. d.},
\end{aligned}
$$

a przeto

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \frac{1}{h_1}A_1 + \frac{1}{h_2}A_2 + \frac{1}{h_3}A_3 + \frac{1}{h_4}A_4 &\equiv \frac{A_{11}}{h_1^2} + \frac{A_{22}}{h_2^2} + \frac{A_{33}}{h_3^2} + \frac{A_{44}}{h_4^2} + 2\frac{A_{23}}{h_2h_3} + \\
&\quad + 2\frac{A_{31}}{h_3h_1} + 2\frac{A_{12}}{h_1h_2} + 2\frac{A_{14}}{h_1h_4} + 2\frac{A_{24}}{h_2h_4} + 2\frac{A_{34}}{h_3h_4}\\
&\equiv - \begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \frac{1}{h_1}\\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \frac{1}{h_2}\\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \frac{1}{h_3}\\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \frac{1}{h_4}\\
\frac{1}{h_1}, & \frac{1}{h_2}, & \frac{1}{h_3}, & \frac{1}{h_4}, & 0
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Środek powierzchni $f=0$ znajdzie się w nieskończoności, a więc powierzchnia będzie jedną z dwu **paraboloid**, jeżeli wyrażenie (11) jest równe 0, a wyrażenia (10) A_1, A_2, A_3, A_4 nie są $=0$. Jeżeli zaś wyrażenie (11) i wyrażenia (10) są jednocześnie 0, to ilość środków będzie nieskończenie wielka, a więc powierzchnia będzie albo walcem, albo układem dwu płaszczyzn.

129. Stożek styczny do powierzchni $f=0$, mający swój wiérzchołek w środku téj powierzchni, nazwaliśmy stożkiem asymptotycznym. Równanie stożka asymptotycznego powierzchni $f=0$ jest więc

$$f^0 f-(x_1 f_1{}^0+x_2 f_2{}^0+x_3 f_3{}^0+x_4 f_4{}^0)^2=0$$

lub, ponieważ, wskutek wzorów (8) i (9),

$$f^0 \equiv x_1{}^0 f_1{}^0+x_2{}^0 f_2{}^0+x_3{}^0 f_3{}^0+x_4{}^0 f_4{}^0=\varkappa=\frac{\mathrm{A}}{\frac{1}{h_1}\mathrm{A}_1+\frac{1}{h_2}\mathrm{A}_2+\frac{1}{h_3}\mathrm{A}_3+\frac{1}{h_4}\mathrm{A}_4}$$

$$x_1 f_1{}^0+x_2 f_2{}^0+x_3 f_3{}^0+x_4 f_4{}^0=\varkappa=\frac{\mathrm{A}}{\frac{1}{h_1}\mathrm{A}_1+\frac{1}{h_2}\mathrm{A}_2+\frac{1}{h_3}\mathrm{A}_3+\frac{1}{h_4}\mathrm{A}_4},$$

$$(12)\qquad \left(\frac{1}{h_1}\mathrm{A}_1+\frac{1}{h_2}\mathrm{A}_2+\frac{1}{h_3}\mathrm{A}_3+\frac{1}{h_4}\mathrm{A}_4\right)f-\mathrm{A}=0.$$

Jeżeli $\mathrm{A}=0$, a wyrażenie (11) nie jest równe 0, to równanie (12) sprowadza się do $f=0$, co wskazuje, że wtedy powierzchnia $f=0$ sama będzie stożkiem. A zatym: *jeżeli wyróżnik funkcyi f jest równy 0, a powierzchnia $f=0$ posiada środek, to ta powierzchnia jest stożkiem.*

130. Dajmy, że równanie (6) przedstawia płaszczyznę styczną do powierzchni $f=0$ w punkcie P' i oznaczmy przez u_1, u_2, u_3, u_4 spółrzędne czworościenne prostopadłe téj płaszczyzny stycznéj. Ponieważ równanie (6) i równanie $\frac{u_1 x_1}{h_1}+\frac{u_2 x_2}{h_2}+\frac{u_3 x_3}{h_3}+\frac{u_4 x_4}{h_4}=0$ powinny przedstawiać tę samę płaszczyznę, przeto jest

$$f'_1=\frac{\varkappa u_1}{h_1},\quad f'_2=\frac{\varkappa u_2}{h_2},\quad f'_3=\frac{\varkappa u_3}{h_3},\quad f'_4=\frac{\varkappa u_4}{h_4},$$

a nadto mamy $\frac{u_1 x'_1}{h_1}+\frac{u_2 x'_2}{h_2}+\frac{u_3 x'_3}{h_3}+\frac{u_4 x'_4}{h_4}=0$, albowiém punkt styczności P' leży na téj płaszczyźnie stycznéj. Rugując x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 i $\varkappa$ z tych pięciu równań, otrzymujemy równanie stopnia 2-go względem u_1, u_2, u_3, u_4, czyli równanie powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych czworościennych płaszczyzny:

$$(13)\qquad \mathrm{F}\equiv\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \frac{u_3}{h_3} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1}, & \frac{u_2}{h_2}, & \frac{u_3}{h_3}, & \frac{u_4}{h_4}, & 0 \end{vmatrix}=0$$

lub, rozwinąwszy wyznacznik,

$$(13') \quad -\mathrm{F} \equiv \mathrm{A}_{11}\frac{u_1^2}{h_1^2}+\mathrm{A}_{22}\frac{u_2^2}{h_2^2}+\mathrm{A}_{33}\frac{u_3^2}{h_3^2}+\mathrm{A}_{44}\frac{u_4^2}{h_4^2}+2\mathrm{A}_{23}\frac{u_2u_3}{h_2h_3}+2\mathrm{A}_{31}\frac{u_3u_1}{h_3h_1}+$$
$$+2\mathrm{A}_{12}\frac{u_1u_2}{h_1h_2}+2\mathrm{A}_{14}\frac{u_1u_4}{h_1h_4}+2\mathrm{A}_{24}\frac{u_2u_4}{h_2h_4}+2\mathrm{A}_{34}\frac{u_3u_4}{h_3h_4}=0.$$

W przypadku, kiedy $\mathrm{A}=0$, należy tak postąpić, jakeśmy postąpili w artykule 85.

Do powierzchni $\mathrm{F}=0$ będzie styczną ściana czworościanu odniesienia, przeciwległa wiérzchołkowi np. A_1, jeżeli równaniu $\mathrm{F}=0$ uczynią zadość wartości $u_1=h_1$, $u_2=u_3=u_4=0$, a więc jeżeli $\mathrm{A}_{11}=0$. A zatym,

$$(14) \quad \mathrm{A}_{23}\frac{u_2u_3}{h_2h_3}+\mathrm{A}_{31}\frac{u_3u_1}{h_3h_1}+\mathrm{A}_{12}\frac{u_1u_2}{h_1h_2}+\mathrm{A}_{14}\frac{u_1u_4}{h_1h_4}+\mathrm{A}_{24}\frac{u_2u_4}{h_2h_4}+\mathrm{A}_{34}\frac{u_3u_4}{h_3h_4}=0$$

jest równaniem ogólnym we spółrzędnych płaszczyzny téj powierzchni, do któréj są stycznymi ściany czworościanu odniesienia, czyli powierzchni wpisanéj w czworościan odniesienia.

Na powierzchni $\mathrm{F}=0$ leży np. krawędź $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, jeżeli jéj równaniu stanie się zadość, niezależnie od wartości na u_1 i u_2, przez podstawienie $u_3=u_4=0$, a więc jeżeli $\mathrm{A}_{11}=\mathrm{A}_{12}=\mathrm{A}_{22}=0$. A zatym, *równanie powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych płaszczyzny, na któréj leży czworobok skośny* $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$, *jest kształtu:*

$$(15) \quad \mathrm{A}_{31}\frac{u_3u_1}{h_3h_1}+\mathrm{A}_{24}\frac{u_2u_4}{h_2h_4}=0.$$

W to równanie wchodzi tylko jedna stała nieoznaczona A_{31} i A_{24}, co wskazuje, że *powierzchnią stopnia 2-go w zupełności wyznacza czworobok skośny, na niéj leżący, i jedna płaszczyzna do niéj styczna.*

Powierzchnia (15) jest hiperbolojdą jednopowłokową lub parabolojdą hiperboliczną, według tego, czy suma

$$\frac{\mathrm{A}_{31}}{h_3h_1}+\frac{\mathrm{A}_{24}}{h_2h_4}$$

jest różną od 0, czytéż równą 0.

RÓWNANIA POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO, ODNIESIONE DO CZWOROŚCIANU Z SOBĄ SAMYM SPRZĘŻONEGO.

131. Zapomocą przekształcenia linijowego można nieskończenie wielu sposobami rozłożyć funkcyją jednorodną stopnia 2-go między cztérema zmiennymi na sumę cztérech kwadratów, przyczym ilość kwadratów dodatnych, ujemnych i równych zeru będzie zawsze tażsama. Ponieważ przekształceniu linijowemu równania powierzchni odpowiada odniesienie tego równania do innego czworościanu, zatym przez stosowne dobranie nowego czworościanu odniesienia, można zawsze równanie powierzchni stopnia 2-go przywieść do postaci

(1) $$f \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ są ilościami stałymi, dodatnymi, ujemnymi, lub częściowo $=0$.

Czworościan odniesienia, odpowiadający równaniu (1), jest czworościanem z sobą samym sprzężonym względem powierzchni $f=0$, t. j. takim, że każda jego ściana jest płaszczyzną biegunową przeciwległego wiérzchołka. Jakoż, jeżeli w równaniu płaszczyzny biegunowéj

$$\alpha_1 x'_1 x_1 + \alpha_2 x'_2 x_2 + \alpha_3 x'_3 x_3 + \alpha_4 x'_4 x_4 = 0$$

punktu (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), zamiast spółrzędnych tego punktu, weźmiemy spółrzędne wiérzchołków A_1, A_2, A_3, A_4 czworościanu odniesienia, to otrzymamy odpowiednio równania

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

które są równaniami ścian czworościanu, przeciwległych tym wiérzchołkom.

Oznaczając przez A wyróżnik równania (1) mamy $A = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. A zatym, jeżeli równanie $f=0$ nie przedstawia stożka (lub w szczególności walca, albo dwu płaszczyzn), to wtedy żaden ze spółczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nie może być równy 0. Przy tym założeniu, zważając, że $A_{11} = \alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $A_{22} = \alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $A_{33} = \alpha_4\alpha_1\alpha_2$, $A_{44} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, gdy tymczasem, dla $i \gtrless k$, $A_{ik} = 0$, miéć będziemy (art. 130)

(2) $$F \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

gdzie

(3) $$\beta_1 = 1 : \alpha_1 h_1^2, \quad \beta_2 = 1 : \alpha_2 h_2^2, \quad \beta_3 = 1 : \alpha_3 h_3^2, \quad \beta_4 = 1 : \alpha_4 h_4^2,$$

jako równanie powierzchni (1) we spółrzędnych płaszczyzny, odniesione do czworościanu z sobą samym sprzężonego.

Jeżeli $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ są spółrzędnymi środka powierzchni (1) lub (2), natenczas (art. 128), uwzględniając oznaczenia (3), miéć będziemy

(4) $$\frac{x_1^0}{\beta_1 h_1} = \frac{x_2^0}{\beta_2 h_2} = \frac{x_3^0}{\beta_3 h_3} = \frac{x_4^0}{\beta_4 h_4} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4}.$$

Powierzchnia zatym (1) lub (2) (jeżeli $A \gtrless 0$) będzie powierzchnią ze środkiem, lub powierzchnią bez środka, według tego, czy suma spółczynników w równaniu (2), t. j. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ jest różną od 0, lub równą 0. Jeżeli $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ nie jest 0, można zawsze przyjąć, że $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = +1$; albowiém, w przeciwnym razie, dość równanie (2) podzielić przez $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$, a wtedy suma nowych spółczynników równania stanie się równą $+1$.

132. Przyjmijmy naprzód, że $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$; równanie (2), a więc i (1), przedstawia wtedy albo elipsojdę, albo jednę z dwu hiperbolojd, co zależy od znaków spółczynników $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

a. Jeżeli tylko jeden z tych cztérech spółczynników jest dodatny, a trzy inne są ujemne, to równanie przedstawia elipsojdę. Jakoż, niech będzie

$\beta_1 = b_1^2$, $\beta_2 = -b_2^2$, $\beta_3 = -b_3^2$, $\beta_4 = -b_4^2$. Równanie powierzchni we spółrzędnych płaszczyzny jest teraz

$$F \equiv b_1^2u_1^2 - b_2^2u_2^2 - b_3^2u_3^2 - b_4^2u_4^2 = 0, \tag{5}$$

a we spółrzędnych punktu

$$f \equiv \frac{x_1^2}{b_1^2h_1^2} - \frac{x_2^2}{b_2^2h_2^2} - \frac{x_3^2}{b_3^2h_3^2} - \frac{x_4^2}{b_4^2h_4^2} = 0, \tag{6}$$

przyczym $b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = +1$. — Ponieważ $f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \equiv \equiv b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = +1$, gdy tymczasem

$$f(h_1, 0, 0, 0) = \frac{1}{b_1^2}, \quad f(0, h_2, 0, 0) = -\frac{1}{b_2^2}, \quad f(0, 0, h_3, 0) = -\frac{1}{b_3^2},$$
$$f(0, 0, 0, h_4) = -\frac{1}{b_4^2},$$

zatym, rozumując taksamo, jak w art. 170 części I, znajdziemy, że środek i wierzchołek A_1 leżą wtedy z téj saméj strony, gdy tymczasem wierzchołki A_2, A_3, A_4 leżą po stronie przeciwnéj téj powierzchni. Połączmy środek P^0 z punktem $P'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, dowolnie obranym na ścianie $A_2A_3A_4$. Ponieważ $x'_1 = 0$, przeto dla spółrzędnych punktu bieżącego P na prostéj P^0P' mamy

$$\frac{x_1}{\lambda x_1^0} = \frac{x_2}{\lambda x_2^0 + \mu x'_2} = \frac{x_3}{\lambda x_3^0 + \mu x'_3} = \frac{x_4}{\lambda x_4^0 + \mu x'_4};$$

a zatym, jeżeli ten punkt jest punktem przecięcia się prostéj P^0P' z powierzchnią (6), to

$$f(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0 + \mu x'_2, \lambda x_3^0 + \mu x'_3, \lambda x_4^0 + \mu x'_4) = 0, \quad \text{czyli}$$
$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\left(\frac{x'_2}{h_2} + \frac{x'_3}{h_3} + \frac{x'_4}{h_4}\right) - \mu^2\left(\frac{x'^2_2}{b_2^2h_2^2} + \frac{x'^2_3}{b_3^2h_3^2} + \frac{x'^2_4}{b_4^2h^2_4}\right) = 0.$$

To równanie daje zawsze dwie wartości rzeczywiste na $\lambda:\mu$, co wskazuje, że każda prosta przechodząca przez środek powierzchni, przedstawionéj przez równanie (6) lub (5), przecina ją w dwu punktach rzeczywistych. Ta więc powierzchnia jest elipsojdą.

b. Jeżeli dwa ze spółczynników β_1, β_2, β_3, β_4 są dodatne, a dwa ujemne, to powierzchnia (2), a więc i (1), jest hiperbolojdą jednopowłokową. Połóżmy bowiém $\beta_1 = b_1^2$, $\beta_2 = b_2^2$, $\beta_3 = -b_3^2$, $\beta_4 = -b_4^2$; natenczas równania (2) i (1) [wskutek (3)] przywiodą się odpowiednio do

$$F \equiv b_1^2u_1^2 + b_2^2u_2^2 - b_3^2u_3^2 - b_4^2u_4^2 = 0 \quad \text{i} \tag{7}$$

$$f \equiv \frac{x_1^2}{b_1^2h_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2h_2^2} - \frac{x_3^2}{b_3^2h_3^2} - \frac{x_4^2}{b_4^2h_4^2} = 0, \tag{8}$$

przyczym $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1$. — Ostatnie równanie można tak pisać:

$$f \equiv \left(\frac{x_1}{b_1h_1} + \frac{x_3}{b_3h_3}\right)\left(\frac{x_1}{b_1h_1} - \frac{x_3}{b_3h_3}\right) + \left(\frac{x_2}{b_2h_2} + \frac{x_4}{b_4h_4}\right)\left(\frac{x_2}{b_2h_2} - \frac{x_4}{b_4h_4}\right) = 0.$$

Stąd bespośrednio widzimy, że powierzchnia, przez to równanie przedstawiona, jest prostolinijową, a więc, jako posiadająca środek, jest hiperbolojdą jednopowłokową.

c. Jeżeli trzy spółczynniki równania (2) są dodatne, a tylko jeden jest ujemny, to równanie przedstawia hiperbolojdę dwupowłokową. Jakoż, położywszy $\beta_1 = b_1^2$, $\beta_2 = b_2^2$, $\beta_3 = b_3^2$, $\beta_4 = -b_4^2$, mieć będziemy, jako równanie powierzchni,

$$F \equiv b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0, \tag{9}$$

lub odpowiednio [we spółrzędnych punktu, wskutek (3)]

$$f \equiv \frac{x_1^2}{b_1^2 h_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2 h_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2 h_3^2} - \frac{x_4^2}{b_4^2 h_4^2} = 0, \tag{10}$$

przyczym $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 = 1$. — Postępując taksamo, jak w przypadku piérwszym, znajdziemy, że wiérzchołki A_1, A_2, A_3 czworościanu odniesienia wraz ze środkiem P^0 leżą z téj saméj strony, a wiérzchołek A_4 leży po przeciwnéj stronie powierzchni, a następnie, że prosta, łącząca punkt P^0 z punktem P', dowolnie obranym na płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, nie przetnie powierzchni (10), jeżeli ten punkt P' leży w nieskończoności, t. j. gdy prosta P^0P' jest do płaszczyzny $A_1A_2A_3$ równoległa. To wskazuje, że powierzchnia, przedstawiona przez równanie (9) lub (10), jest hiperbolojdą dwupowłokową, gdyż nie każda prosta, przechodząca przez jéj środek, przecina ją w punktach rzeczywistych.

133. Przyjmijmy teraz, że suma spółczynników w równaniu (2) jest 0, t. j. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$. W tym przypadku równanie (2), a więc i (1) [jeżeli żadne α nie jest 0, a przeto żadne β nie jest ∞], przedstawia jednę z dwu parabolojd. Ponieważ te cztéry spółczynniki nie mogą być tego samego znaku, można zatym zrobić tylko dwa przypuszczenia.

a. Jeżeli trzy spółczynniki są jednakowego znaku, a czwarty spółczynnik jest przeciwnego znaku, np. jeżeli $\beta_1 = b_1^2$, $\beta_2 = b_2^2$, $\beta_3 = b_3^2$, $\beta_4 = -b_4^2$, gdzie b_1, b_2, b_3, b_4 oznaczają liczby rzeczywiste, to w tym przypadku równania (2) i (1) sprowadzają się do

$$F \equiv b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0 \quad \text{i} \tag{11}$$

$$f \equiv \frac{x_1^2}{b_1^2 h_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2 h_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2 h_3^2} - \frac{x_4^2}{b_4^2 h_4^2} = 0, \tag{12}$$

przyczym $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 = 0$. — Stąd wypada odpowiednio, dla $u_4 = 0$ i $x_4 = 0$,

$$b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x_1^2}{b_1^2 h_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2 h_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2 h_3^2} = 0.$$

A zatym przez wiérzchołek A_4 nie można przesunąć płaszczyzny stycznéj rzeczywistéj do uważanéj powierzchni, anitéż ściana $A_1A_2A_3$ $(x_4 = 0)$ nie przecina téj powierzchni w punktach rzeczywistych. A ponieważ parabolojdę hiperboliczną, jako powierzchnią prostolinijową, każda płaszczyzna przecina w punktach rzeczywistych i do niéj można przesunąć przez każdy punkt płaszczyznę styczną rzeczywistą, zatym równania (11) i (12) przedstawiają parabolojdę eliptyczną.

b. Jeżeli dwa spółczynniki są dodatne, a dwa ujemne, np. $\beta_1 = b_1^2$, $\beta_2 = b_2^2$, $\beta_3 = -b_3^2$, $\beta_4 = -b_4^2$, to w tym przypadku równania (2) i (1) sprowadzają się do postaci

$$(13) \qquad F \equiv b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_2^2 - b_4^2 u_4^2 = 0 \quad \text{i}$$

$$(14) \qquad f \equiv \frac{x_1^2}{b_1^2 h_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2 h_2^2} - \frac{x_3^2}{b_3^2 h_3^2} - \frac{x_4^2}{b_4^2 h_4^2} = 0,$$

przyczym $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = 0$. — Te równania przedstawiają widocznie powierzchnią prostolinijową; ta więc powierzchnia jest parabolojdą hiperboliczną.

Powyższe kryteryja nie zależą od położenia czworościanu odniesienia z sobą samym sprzężonego, jak to wynika z twierdzenia, podanego w artykule 74 części I.

CZWOROŚCIANY BIEGUNOWO WZAJEMNE WZGLĘDEM POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

134. Dwa czworościany zowiemy *z sobą sprzężonymi*, lub *biegunowo wzajemnymi* względem powierzchni stopnia 2-go, jeżeli ściany jednego z nich są płaszczyznami biegunowymi odpowiednich wiérzchołków drugiego.

Weźmy jeden z czworościanów za czworościan odniesienia $A_1A_2A_3A_4$, i niech

$$(1) \qquad f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

będzie równaniem powierzchni stopnia 2-go, odniesionym do tego czworościanu.

Ponieważ

$$(2) \qquad f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0, \; f_4 = 0$$

są odpowiednio równaniami płaszczyzn biegunowych wiérzchołków A_1, A_2, A_3, A_4 czworościanu odniesienia względem powierzchni (1), to równania te przedstawiają odpowiednio ściany $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_1$, $B_4B_1B_2$, $B_1B_2B_3$ czworościanu $B_1B_2B_3B_4$ biegunowo wzajemnego z czworościanem $A_1A_2A_3A_4$. Dla spółrzędnych wiérzchołków B_1, B_2, B_3, B_4, jako punktów przecięcia się trzech odpowiednich płaszczyzn (2), mamy odpowiednio:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{A_{11}}=\dfrac{x_2}{A_{12}}=\dfrac{x_3}{A_{13}}=\dfrac{x_4}{A_{14}}, \\ \dfrac{x_1}{A_{21}}=\dfrac{x_2}{A_{22}}=\dfrac{x_3}{A_{23}}=\dfrac{x_4}{A_{24}}, \\ \dfrac{x_1}{A_{31}}=\dfrac{x_2}{A_{32}}=\dfrac{x_3}{A_{33}}=\dfrac{x_4}{A_{34}}, \\ \dfrac{x_1}{A_{41}}=\dfrac{x_2}{A_{42}}=\dfrac{x_3}{A_{43}}=\dfrac{x_4}{A_{44}}, \end{cases}$$

gdzie, jak zawsze, A_{ik} oznaczają ilości dołączone do odpowiednich elementów a_{ik} w wyróżniku A funkcyi f.

Wiedząc to, możemy dowieść następującego twierdzenia: *proste, łączące odpowiednie wierzchołki dwu czworościanów biegunowo wzajemnych względem powierzchni stopnia 2-go, jak również proste przecięcia się dwu odpowiednich ścian tychże czworościanów należą do tego samego układu tworzących hiperbolojdy jednopowłokowéj.*

Weźmy naprzód pod uwagę układ cztérech piérwszych prostych A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 i A_4B_4; ich równania są widocznie

$$(4)\qquad \begin{matrix} \dfrac{x_2}{A_{12}}=\dfrac{x_3}{A_{13}}=\dfrac{x_4}{A_{14}}; & \dfrac{x_1}{A_{21}}=\dfrac{x_3}{A_{23}}=\dfrac{x_4}{A_{24}}; \\ \dfrac{x_1}{A_{31}}=\dfrac{x_2}{A_{32}}=\dfrac{x_4}{A_{34}}; & \dfrac{x_1}{A_{41}}=\dfrac{x_2}{A_{42}}=\dfrac{x_3}{A_{43}}. \end{matrix}$$

Otrzymamy zaś warunek, aby jakakolwiek prosta

$$(5)\qquad \varkappa_1x_1+\varkappa_2x_2+\varkappa_3x_3+\varkappa_4x_4=0,\quad \varkappa'_1x_1+\varkappa'_2x_2+\varkappa'_3x_3+\varkappa'_4x_4=0$$

przecinała piérwszą z tych prostych, jeżeli wyrugujemy x_1 z dwu ostatnich równań, a zamiast x_2, x_3, x_4 podstawimy ilości, do tych spółrzędnych proporcyjonalne, A_{12}, A_{13}. A_{14}. Kładąc, dla skrócenia, $\varkappa_i\varkappa'_k-\varkappa_k\varkappa'_i=\lambda_{ik}$, znajdziemy tym sposobem

$$A_{12}\lambda_{12}+A_{13}\lambda_{13}+A_{14}\lambda_{14}=0.$$

Taksamo, jako warunki, aby prosta (5) przecinała trzy pozostałe z prostych (4), znajdziemy:

$$\begin{aligned} A_{21}\lambda_{21}+A_{23}\lambda_{23}+A_{24}\lambda_{24}&=0, \\ A_{31}\lambda_{31}+A_{32}\lambda_{32}+A_{34}\lambda_{34}&=0, \\ A_{41}\lambda_{41}+A_{42}\lambda_{42}+A_{43}\lambda_{43}&=0. \end{aligned}$$

Ponieważ $A_{ik}=A_{ki}$, gdy tymczasem $\lambda_{ik}=-\lambda_{ki}$, zatym suma tych cztérech równań warunkowych jest tożsamościowo równa 0. To dowodzi, że prosta, która przecina trzy z tych prostych (4), przetnie także czwartą z nich. Te więc cztéry proste są tworzącymi tego samego układu hiperbolojdy jednopowłokowéj (porównaj art. 68). — Aby przeto otrzymać równanie téj hiperbolojdy, dość wyrazić, że prosta (5) przecina trzy piérwsze proste (4). W tym celu sprowadzimy naprzód równania (5) do innéj postaci. Oznaczając przez (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) spółrzędne punktu danego na prostéj (5), mamy:

$$\varkappa_1 x'_1 + \varkappa_2 x'_2 + \varkappa_3 x'_3 + \varkappa_4 x'_4 = 0, \quad \varkappa'_1 x'_1 + \varkappa'_2 x'_2 + \varkappa'_3 x'_3 + \varkappa'_4 x'_4 = 0.$$

Te równania w połączeniu z równaniami (5) dają:

$$\varkappa_1 (x_1 x'_4 - x_4 x'_1) + \varkappa_2 (x_2 x'_4 - x_4 x'_2) + \varkappa_3 (x_3 x'_4 - x_4 x'_3) = 0,$$
$$\varkappa'_1 (x_1 x'_4 - x_4 x'_1) + \varkappa'_2 (x_2 x'_4 - x_4 x'_2) + \varkappa'_3 (x_3 x'_4 - x_4 x'_3) = 0,$$

a stąd wypadają równania następujące

$$\frac{x_1 x'_4 - x_4 x'_1}{\lambda_{23}} = \frac{x_2 x'_4 - x_4 x'_2}{\lambda_{31}} = \frac{x_3 x'_4 - x_4 x'_3}{\lambda_{12}}.$$

Aby ta prosta przecinała trzy piérwsze proste (4), winno być:

$$\frac{A_{14} x_2 - A_{12} x_4}{\lambda_{31}} = \frac{A_{14} x_3 - A_{13} x_4}{\lambda_{12}},$$
$$\frac{A_{24} x_3 - A_{23} x_4}{\lambda_{12}} = \frac{A_{24} x_1 - A_{21} x_4}{\lambda_{23}},$$
$$\frac{A_{34} x_1 - A_{31} x_4}{\lambda_{23}} = \frac{A_{34} x_2 - A_{32} x_4}{\lambda_{31}}.$$

Pomnożywszy te równania przez siebie, wyrugujemy ilości λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} i otrzymamy żądane równanie w postaci

$$(A_{14} x_2 - A_{12} x_4)(A_{24} x_3 - A_{23} x_4)(A_{34} x_1 - A_{31} x_4) =$$
$$= (A_{14} x_3 - A_{13} x_4)(A_{24} x_1 - A_{21} x_4)(A_{34} x_2 - A_{32} x_4)$$

lub, wykonawszy mnożenie i podzieliwszy przez x_4,

$$(6) \quad (A_{12} A_{34} - A_{31} A_{24})(A_{23} x_1 x_4 + A_{14} x_2 x_3) + (A_{23} A_{14} - A_{12} A_{34}).$$
$$.(A_{31} x_2 x_4 + A_{24} x_3 x_1) + (A_{31} A_{24} - A_{23} A_{14})(A_{12} x_3 x_4 + A_{34} x_1 x_2) = 0.$$

Weźmy teraz pod uwagę drugi układ prostych, t. j. proste, według których przecinają się odpowiednie ściany obu czworościanów; równania tych prostych są odpowiednio

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = 0, & a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0, \\ x_2 = 0, & a_{21} x_1 + a_{33} x_3 + a_{24} x_4 = 0, \\ x_3 = 0, & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{34} x_4 = 0, \\ x_4 = 0, & a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 = 0. \end{cases}$$

Warunki zaś, aby jakakolwiek prosta

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 0, \quad \varkappa'_1 x_1 + \varkappa'_2 x_2 + \varkappa'_3 x_3 + \varkappa'_4 x_4 = 0$$

przecinała każdą z tych cztérech prostych są:

$$a_{12} \lambda_{34} + a_{13} \lambda_{42} + a_{14} \lambda_{23} = 0, \quad a_{21} \lambda_{43} + a_{23} \lambda_{14} + a_{24} \lambda_{31} = 0,$$
$$a_{31} \lambda_{24} + a_{32} \lambda_{41} + a_{34} \lambda_{12} = 0, \quad a_{41} \lambda_{32} + a_{42} \lambda_{13} + a_{43} \lambda_{21} = 0.$$

Ponieważ $a_{ik} = a_{ki}$, gdy tymczasem $\lambda_{ik} = -\lambda_{ki}$, przeto te cztéry równania warunkowe, dodane do siebie, dają wypadek tożsamościowo równy 0. To dowodzi, że prosta, która przecina trzy z tych prostych (7), przetnie także czwartą z nich. Proste (7) są więc tworzącymi tego samego układu hiperbolojdy jednopowłokowéj, któréj równanie jest, jak to łatwo znaléść, następujące:

$$(8)\qquad a_{31}a_{12}a_{14}x_1{}^2+a_{12}a_{23}a_{24}x_2{}^2+a_{23}a_{31}a_{34}x_3{}^2+a_{14}a_{24}a_{34}x_4{}^2+$$
$$+(a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34})(a_{23}x_2x_3+a_{14}x_1x_4)+(a_{12}a_{34}+a_{23}a_{14})(a_{31}x_3x_1+a_{24}x_2x_4)+$$
$$+(a_{23}a_{14}+a_{31}a_{24})(a_{12}x_1x_2+a_{34}x_3x_4)=0.$$

135. Twierdzenie Pascal'a (I, art. 162), odnoszące się do krzywych stopnia 2-go, można tak wypowiedziéć: »boki trójkąta przecinają krzywą stopnia 2-go w sześciu punktach, leżących po dwa na trzech prostych, któreto proste przecinają boki przeciwległe trójkąta w trzech punktach, leżących na jednéj prostéj«. Chasles udowodnił następujące twierdzenie analogiczne w przestrzeni: *krawędzi czworościanu przecinają powierzchnią stopnia 2-go w dwunastu punktach, przez które można przesunąć cztéry płaszczyzny, z których każda przechodzi przez trzy punkty, położone na krawędziach, wychodzących z tego samego wiérzchołka; proste przecięcia się każdéj z tych płaszczyzn ze ścianą przeciwległą czworościanu są tworzącymi tego samego układu pewnéj hiperbolojdy jednopowłokowéj.*

Jakoż, jeżeli

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2-\left(a_{23}+\frac{1}{a_{23}}\right)x_2x_3-\left(a_{31}+\frac{1}{a_{31}}\right)x_3x_1-\left(a_{12}+\frac{1}{a_{12}}\right)x_1x_2-$$
$$-\left(a_{14}+\frac{1}{a_{14}}\right)x_1x_4-\left(a_{24}+\frac{1}{a_{24}}\right)x_2x_4-\left(a_{34}+\frac{1}{a_{34}}\right)x_3x_4=0$$

jest równaniem powierzchni stopnia 2-go, odniesionym do tego czworościanu, to, skoro krawędzi A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4,... czworościanu przecinają tę powierzchnią w punktach, dla których mamy odpowiednio

$x_1=a_{12}x_2$ i $x_2=a_{12}x_1$; $x_1=a_{13}x_3$ i $x_3=a_{13}x_1$; $x_1=a_{14}x_4$ i $x_4=a_{14}x_1$, i t. d.,

równania tych płaszczyzn można przywiéść do postaci:

$$x_1=a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,$$
$$x_2=a_{21}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4,$$
$$x_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{34}x_4,$$
$$x_4=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3.$$

Przecięcia więc tych płaszczyzn odpowiednio z płaszczyznami $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, według drugiéj części poprzedzającego artykułu, są tworzącymi tego samego układu pewnéj hiperbolojdy.

ĆWICZENIA.

(161). **Okazać, że płaszczyzny, które dzielą dwie proste A_1A_2 i A_4A_3 w tym samym stosunku, obwodzą parabolojdę hiperboliczną, na któréj leżą te dwie proste.**

(162). **Okazać, że środki hiperbolojd jednopowłokowych, na których leży dany czworobok skośny, znajdują się na prostéj, łączącéj środki przekątnych tego czworoboku.**

(164). Znaléść równanie kuli, opisanéj na czworościanie odniesienia, a następnie warunki, aby równanie ogólne przedstawiało kulę.

(164). Wyznaczyć warunek, aby prosta $\frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\frac{x_3}{p_3}$ była styczną do powierzchni

$$a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{12}x_1x_2+a_{14}x_1x_4+a_{24}x_2x_4+a_{34}x_3x_4=0,$$

a następnie dowiéść, że $a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3=0$ jest równaniem płaszczyzny stycznéj do powierzchni w wiérzchołku A_4.

(165). Okazać, że równanie powierzchni stopnia 2-go, do któréj są styczne ściany czworościanu odniesienia, można tak pisać: $lqrx_1^2+mrpx_2^2+npqx_3^2+$ $+lmnx_4^2+(lp-mq-nr)(lx_1x_4+px_2x_3)+(mq-nr-lp)(mx_2x_4+qx_3x_1)+$ $+(nr-lp-mq)(nx_3x_4+rx_1x_2)=0$. Okazać, że ta powierzchnia będzie prostolinijową, jeżeli

$$l^2p^2+m^2q^2+n^2r^2>2mnqr+2nlrp+2lmpq;$$

tudzież, że jeżeli $lp=mq=nr$, to proste, łączące punkty styczności z przeciwległymi wiérzchołkami, przetną się w jednym punkcie.

(166). Czworościan jest z sobą samym sprzężony względem danéj kuli: dowiéść, że każda jego krawędź jest prostopadła do kierunku krawędzi przeciwległéj i że wszystkie trzy kąty płaskie przy jednym z wiérzchołków są rozwarte.

(167). Każda krawędź czworościanu jest równa krawędzi przeciwległéj: okazać, że średnica kuli opisanéj jest $=\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2}{2}}$, gdzie s_1, s_2, s_3 są trzema krawędziami ograniczającymi jednę ścianę.

(168). Powierzchnia stopnia 2-go jest opisana na czworościanie $A_1A_2A_3A_4$, a płaszczyzny styczne do niéj w A_1, A_2, A_3, A_4 ograniczają drugi czworościan $B_1B_2B_3B_4$: okazać że, jeżeli proste A_1B_1 i A_2B_2 przecinają się, to i proste A_3B_3 i A_4B_4 również się przecinają.

(169). Okazać, że powierzchnia

$$a_2a_3x_2x_3+a_3a_1x_3x_1+a_1a_2x_1x_2+a_1a_4x_1x_4+a_2a_4x_2x_4+a_3a_4x_3x_4=0$$

nie może być prostolinijową i że będzie parabolojdą eliptyczną, jeżeli

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)^2.$$

(170). Okazać, że powierzchnia

$$lx_2x_3+mx_3x_1+nx_1x_2+l'x_1x_4+m'x_2x_4+n'x_3x_4=0$$

będzie walcem, jeżeli:

$$ll'(m+n-l)+mm'(n+l-m)+nn'(l+m-n)=2lmn,$$
$$ll'(m'+n'-l)+mm'(n'+l-m')+nn'(l+m'-n')=2lm'n',$$
$$ll'(m+n'-l')+mm'(n'+l'-m)+nn'(l'+m-n')=2l'mn',$$
$$ll'(m'+n-l')+mm'(n+l'-m')+nn'(l'+m'-n)=2l'm'n.$$

ROZDZIAŁ XII.

O UKŁADACH POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

MIEJSCE GIEOMETRYCZNE PUNKTU I OBWIEDNIA PŁASZCZYZN STYCZNYCH, SPÓLNYCH DWU POWIERZCHNIOM STOPNIA 2-GO.

136. Przystępujemy do badania własności powierzchni stopnia 2-go, wynikających z wzajemnéj od siebie zależności tychże powierzchni. Ażeby rzecz należycie przedstawić, wyłożymy uprzednio niektóre wiadomości z teoryi ogólnéj powierzchni algiebraicznych.

Weźmy pod uwagę jakiekolwiek dwie powierzchnie algiebraiczne. Miejsce punktów spólnych tym dwu powierzchniom jest pewną liniją krzywą, którą nazwaliśmy (art. 12) linijną podwójnie krzywą, a którąby można także nazwać krzywą w przestrzeni, albo krzywą skośną. Jeżeli krzywą skośną, którą płaszczyzna dowolna przecina w n punktach, nazwiemy liniją krzywą skośną stopnia n-go, to natenczas *krzywa przecięcia się dwu powierzchni algiebraicznych odpowiednio rzędu m-go i n-go, t. j. takich, których równania we spółrzędnych punktu są algiebraiczne i odpowiednio stopnia m-go i n-go, jest krzywą skośną stopnia mn-go.* Albowiém, jeżeli do równań dwu danych powierzchni, które pospołu wzięte przedstawiają krzywą przecięcia się tych powierzchni, dołączymy równanie dowolnéj płaszczyzny, to te trzy równania, będąc odpowiednio stopnia m-go, n-go i 1-go, dadzą mn układów wartości na spółrzędne, czyniących zadość jednocześnie wszystkim trzem równaniom, a to dowodzi, że płaszczyzna dowolna przecina owę krzywą — wogóle mówiąc — w mn punktach.

Krzywa skośna danego stopnia może być krzywą przecięcia się dwu powierzchni rozmaitych rzędów, byle iloczyn tych rzędów był równy stopniowi krzywéj; oczywiście, że jeżeli ten stopień jest liczbą piérwszą, krzywa może być tylko krzywą przecięcia się płaszczyzny z powierzchnią takiego, jak jéj stopień, rzędu. Stąd krzywą skośną stopnia mn-go, która jest przecięciem się dwu powierzchni odpowiednio rzędu m-go i n-go, dla odróżnienia od innych krzywych tego samego stopnia, nazywamy nadto liniją rodzaju 1-go.

Obwiednia płaszczyzn stycznych, spólnych dwu powierzchniom krzywym, jest znowu pewną powierzchnią, którą nazwaliśmy (art. 67) powierzchnią rozwijalną, a to dlatego, że można ją (bez rozdarcia lub sfałdowania) rozwinąć na płaszczyźnie. Jeżeli *tę* powierzchnią rozwijalną, do któréj można przez punkt dowolny poprowadzić n płaszczyzn stycznych (rzeczywistych lub urojonych) nazwiemy powierzchnią rozwijalną stopnia n-go, to natenczas taksamo, jak poprzednio, można okazać, że *obwiednia płaszczyzn stycznych, spólnych dwu powierzchniom algiebraicznym odpowiednio klasy m-téj i n-téj, t. j. takim, których równania we spółrzędnych płaszczyzny są algiebraiczne, odpowiednio stopnia m-go i n-go, jest powierzchnią rozwijalną stopnia mn-go.* Tę powierzchnią nazwiemy nadto powierzchnią rozwijalną rodzaju 1-go, wrazie, gdy ona jest obwiednią dwu powierzchni, z których jedna jest rzędu m-go, a druga rzędu n-go, a to dla odróżnienia jéj od innych powierzchni rozwijalnych tegoż stopnia, będących obwiedniami dwu innych powierzchni, mających rzędy, których iloczyn jest mn.

137. Ilość spółczynników stałych w równaniu ogólnym powierzchni rzędu n-go lub klasy n-téj jest równa ilości waryjacyj z n elementów po 4, t. j. liczbie

$$\frac{4.5\ldots(4+n-1)}{1.2\ldots n}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Atoli, jeżeli chodzi o ilość stałych rozporządzalnych ze względu na ilość warunków, jakim taką powierzchnią poddać można, to liczbę powyższą należy zmniejszyć o jedność; gdyż ogólność równania nie zmniejszy się, jeżeli obie jego strony podzielimy przez jeden ze spółczynników. A zatym ilość stałych w równaniu ogólnym powierzchni rzędu n-go lub klasy n-téj, którymi można dowolnie rozporządzić, jest

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1\equiv\varphi(n).$$

Stąd czytamy, że powierzchnią rzędu n-go lub klasy n-téj zupełnie wyznaczymy zapomocą $\varphi(n)$ od siebie niezależnych równań stopnia 1-go między spółczynnikami, piérwszą np. przez $\varphi(n)$ punktów a drugą przez $\varphi(n)$ płaszczyzn stycznych, dowolnie danych.

Przez $\varphi(n)-1$ *punktów danych, można poprowadzić nieskończenie wiele powierzchni rzędu n-go, mających spólną krzywą przecięcia.* Albowiém, zapomocą $\varphi(n)-1$ równań warunkowych, orzekających, że dane punkty leżą na powierzchni rzędu n-go, można z równania ogólnego téj powierzchni wyrugować wszystkie spółczynniki, oprócz dwu, i równanie przywiéść do postaci (I, art. 198)

$$\lambda f_1+\mu f_2=0,$$

gdzie f_1 i f_2 są dwiema funkcyjami spółrzędnych stopnia n-go, zupełnie wyznaczonymi, a stosunek $\lambda:\mu$ jest nieoznaczony. Wszystkie te powierzchnie rzędu n-go, które przez $\varphi(n)-1$ punktów dowolnie danych można poprowadzić, mają spólną krzywą przecięcia, mianowicie krzywą, według któréj przecinają się dwie powierzchnie $f_1=0$ i $f=0$ rzędu n-go, zupełnie wyznaczone. — Stąd bespośrednio wynika, że *krzywą skośną stopnia n^2 rodzaju 1-go w zupełności wyznacza $\varphi(n)-1$ punktów dowolnie danych, przez które ta krzywa ma przechodzić.* Tak np. krzywą skośną stopnia 4-go, a rodzaju 1-go, wyznacza osiem punktów dowolnie danych; albowiém $\varphi(2)-1=8$.

Podobnie można udowodnić twierdzenie analogiczne: *istnieje nieskończenie wiele powierzchni klasy n-téj, do których $\varphi(n)-1$ dowolnie danych płaszczyzn jest stycznych, mających tę samę powierzchnią rozwijalną jako spólną obwiednią.* — Stąd zaś wypada, że *powierzchnią rozwijalną stopnia n^2 rodzaju 1-go w zupełności wyznacza $\varphi(n)-1$ płaszczyzn dowolnie danych, które do téj powierzchni mają być styczne.* Tak np. powierzchnią rozwijalną stopnia 4-go, a rodzaju 1-go, wyznacza osiem płaszczyzn stycznych dowolnie danych.

138. Przechodząc do powierzchni stopnia 2-go, weźmy pod uwagę naprzód krzywą przecięcia się dwu takich powierzchni. Niech

$$(1) \qquad f \equiv a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{33}x_3x_4=0 \quad \text{i} \quad g \equiv b_{11}x_1^2+\ldots+2b_{34}x_3x_4=0$$

będą ich równaniami jednorodnymi, które wzięte pospołu przedstawiają krzywą przecięcia. Jest ona krzywą skośną stopnia 4-go rodzaju 1-go, a osiem punktów ją wyznacza.

W szczególnych przypadkach ta krzywa jest układem dwu krzywych stopni niższych. Z tych przypadków rozbierzemy dwa najważniejsze.

a. Dajmy naprzód, że obie powierzchnie (1) mają spólną tworzącą D. Płaszczyzna dowolna E, przechodząca przez D, przecina nadto każdą z tych dwu powierzchni według drugiéj tworzącéj, należącéj do innego układu tworzących, a punkt przecięcia się P dwu takich drugich tworzących jest punktem spólnym obu powierzchniom. Jeżeli płaszczyzna E obraca się około tworzącéj D, to punkt P, pozostając wciąż punktem spólnym obu powierzchniom, opisze pewną krzywą C, obu powierzchniom spólną. A zatym, w tym przypadku linija przecięcia się dwu danych powierzchni $f=0$ i $g=0$, mających spólną tworzącą, składa się z téj tworzącéj i z krzywéj C, która jest krzywą stopnia 3-go, gdyż tworząca spólna jest stopnia 1-go.

Krzywa C *przecina wszystkie tworzące obu powierzchni, należące do tegoż układu, co tworząca spólna* D, *w dwu punktach, a tworzące układu przeciwnego tylko w jednym punkcie.* Albowiém jakakolwiek tworząca powierzchni $f=0$ przecina powierzchnią $g=0$ w dwu punktach, z których żaden albo tylko jeden leży na D, według tego, czy ta tworząca należy do tego samego, co D, lubtéż do innego układu. Że zaś te punkty, które nie leżą na D, leżą na C, przeto twierdzenie jest dowiedzione.

Krzywa C *przecina tworzącą spólną* D *w dwu punktach.* Albowiém płaszczyzna E, przechodząca przez spólną tworzącą D, przecina krzywą stopnia 3-go C w trzech punktach; jeden z tych punktów P leży na przecięciu się dwu drugich tworzących, według których płaszczyzna E przecina obie powierzchnie; dwa zatym pozostałe punkty leżą na D.

b. Załóżmy powtóre, że z ośmiu punktów, wyznaczających liniją przecięcia dwu powierzchni (1), pięć punktów leży na jednéj płaszczyźnie E. Ponieważ pięć punktów dowolnie danych na płaszczyźnie wyznacza tylko jednę krzywą stopnia 2-go, a płaszczyzna E przecina obie powierzchnie $f=0$ i $g=0$, każdą więc według krzywéj stopnia 2-go, przechodzącéj przez owe pięć punktów, przeto płaszczyzna E przecinają obie powierzchnie według téj saméj krzywéj. Weźmy płaszczyznę E za ścianę $x_4=0$ czworościanu odniesienia i podstawmy w równaniach (1) $x_4=0$. Otrzymane wypadki będą natenczas równaniami krzywych, według których płaszczyzna $x_4=0$ przecina dwie powierzchnie (1); a że te równania przedstawiają jednę krzywą, więc

$$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{a_{22}}{b_{22}}=\frac{a_{33}}{b_{33}}=\frac{a_{23}}{b_{23}}=\frac{a_{31}}{b_{31}}=\frac{a_{12}}{b_{12}}=\varkappa,$$

a przeto

$$(2)\ f-\varkappa g\equiv x_4[2(a_{14}-\varkappa b_{14})x_1+2(a_{24}-\varkappa b_{24})x_2+2(a_{34}-\varkappa b_{34})x_3+(a_{44}-\varkappa b_{44})x_4].$$

Widzimy z tego, że punkty spólne dwu powierzchni $f=0$ i $g=0$, jeżeli nie leżą na płaszczyźnie $x_4=0$, leżą na płaszczyźnie

$$2(a_{14}-\varkappa b_{14})x_1+2(a_{24}-\varkappa b_{24})x_2+2(a_{34}-\varkappa b_{34})x_3+(a_{44}-\varkappa b_{44})x_4=0.$$

A zatym: *jeżeli pięć punktów krzywéj przecięcia się dwu powierzchni stopnia 2-go leży na jednéj płaszczyźnie, to ta krzywa składa się z dwu krzywych płaskich stopnia 2-go.*

Ze wzoru (2) widzimy nadto, że *jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go $f=0$ i $g=0$ przecinają się według dwu krzywych płaskich stopnia 2-go, leżących na płaszczyznach* $E=0$ *i* $E'=0$, *to natenczas, przy pewnéj wartości na czynnik stały* $\varkappa$,

$$(3)\qquad f-\varkappa g\equiv E\,.\,E',$$

t. j. wyrażenie $f-\varkappa g$ jest iloczynem dwu czynników stopnia 1-go.

139. Niech

$$(4)\quad F\equiv A_{11}u_1{}^2+\ldots+2A_{34}u_3u_4=0 \quad \text{i} \quad G\equiv B_{11}u_1{}^2+\ldots+2B_{34}u_3u_3=0$$

będą równaniami jednorodnymi dwu powierzchni stopnia 2-go we spółrzędnych płaszczyzny. Wartości na (u_1, u_2, u_3, u_4), czyniące zadość jednocześnie obu równaniom, są spółrzędnymi płaszczyzny stycznéj spólnéj obu powierzchniom. Ciąg nieprzerwany tych płaszczyzn stycznych obwodzi powierzchnią rowijalną stopnia 4-go rodzaju 1-go. Proste, według których przecinają się każde dwie płaszczyzny sąsiednie styczne, są tworzącymi téj powierzchni, a ciąg punktów, w których przecinają się każde dwie tworzące sąsiednie, jest jéj krawędzią zwrotu. Należy zauważyć, że na każdéj płaszczyźnie stycznéj, przechodzącéj przez dwie tworzące sąsiednie, leżą trzy po sobie następujące punkty krawędzi zwrotu.

Podobnie, jak każda powierzchnia rozwijalna posiada krzywą skośną jako krawędź zwrotu, tak nawzajem każdą krzywą skośną można uważać jako krawędź pewnéj powierzchni rozwijalnéj, którą można utworzyć w sposób następujący. Weźmy na danéj krzywéj skośnéj trzy po sobie następujące punkty P, P′ P″. Styczna do téj krzywéj w P przechodzi przez P i P′, a styczna do krzywéj w P′ przechodzi przez P′ i P″, a zatym płaszczyzna, przesunięta przez te dwie sąsiednie styczne do krzywéj, przechodzi przez trzy sąsiednie punkty téjże krzywéj. Tę płaszczyznę zowiemy płaszczyzną ściśle styczną do krzywéj w punkcie P. Obwiednia płaszczyzn ściśle stycznych do krzywéj, odpowiadających każdemu jéj punktowi, jest żądaną powierzchnią rozwijalną, która daną krzywą ma za krawędź zwrotu.

Powierzchnia rozwijalna spólna dwu powierzchniom stopnia 2-go dotyka każdéj z tych powierzchni wzdłuż krzywéj skośnéj stopnia 4-go rodzaju 1-go. Jakoż, jeżeli $f \equiv a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{34}x_3x_4 = 0$ jest równaniem we spółrzędnych punktu piérwszéj z powierzchni (4), to spółrzędne płaszczyzny stycznéj do téj powierzchni w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) będą

$$u_1 = \varkappa f'_1, \quad u_2 = \varkappa f'_2, \quad u_3 = \varkappa f'_3, \quad u_4 = \varkappa f'_4;$$

a zatym, jeżeli ta płaszczyzna ma być styczną także do drugiéj powierzchni (4), to winno być także $G(f'_1, f'_2, f'_3, f'_4) = 0$. To równanie jest stopnia 2-go względem (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4). A więc miejsce gieometryczne punktów styczności płaszczyzn, stycznych jednocześnie do obu powierzchni (4), z piérwszą z tych powierzchni jest liniją przecięcia się téj powierzchni z powierzchnią stopnia 2-go $G(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0$, t. j. pewną krzywą skośną stopnia 4-go rodzaju 1-go. Taksamo rzecz się ma co do drugiéj powierzchni.

Podobnie można dowiéść twierdzenia analogicznego: *płaszczyzny, dotykające powierzchni stopnia 2-go wzdłuż krzywéj skośnéj stopnia 4-go rodzaju 1-go, dotykają jeszcze drugiéj powierzchni stopnia 2-go.* Jakoż, spółrzędne punktu styczności płaszczyzny (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) np. z piérwszą z powierzchni (4) są

$$x_1 = \varkappa F'_1, \quad x_2 = \varkappa F'_2, \quad x_3 = \varkappa F'_3, \quad x_4 = \varkappa F'_4,$$

gdzie F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 są wartościami dla $u_1 = u'_1, \ldots$ połów pochodnych cząstkowych funkcyi F, wziętych odpowiednio względem u_1, u_2, u_3, u_4. Jeżeli ten punkt leży na linii przecięcia się obu powierzchni (4) i jeżeli $g \equiv b_{11}x_1^2 + \ldots + 2b_{34}x_3x_4 = 0$ jest równaniem we spółrzędnych punktu drugiéj z nich, natenczas także $g(F'_1, F'_2, F'_3, F'_4) = 0$, t. j. owa płaszczyzna styczna do $F = 0$ w punkcie jéj przecięcia się z $G = 0$ jest zarazem styczną do drugiéj powierzchni stopnia 2-go, $g(F_1, F_2, F_3, F_4) = 0$.

Powierzchnia rozwijalna, spólna dwu powierzchniom (4) jest w zupełności wyznaczona przez osiem płaszczyzn dowolnych, stycznych do obu powierzchni. Jeżeli pięć z tych płaszczyzn przechodzi przez jeden punkt, to można łatwo okazać, że wówczas ta powierzchnia roskłada się na dwa stożki styczne stopnia 2-go, spólne obu danym powierzchniom. — Pięć bowiém płaszczyzn stycznych, wychodzących z jednego punktu, wyznacza w zupełności stożek styczny stopnia 2-go, mający ten punkt za wiérzchołek. A zatym, jeżeli pięć płaszczyzn stycznych, spólnych obu powierzchniom (4), przechodzi przez jeden punkt, to stożek styczny z tego punktu do jednéj powierzchni jest stycznym i do drugiéj. Weźmy ten punkt za wiérzchołek $u_4=0$ czworościanu odniesienia, i podstawmy w równaniach (4) $u_4=0$; otrzymane wypadki powinny być wtedy tożsamościowe (art. 85), a zatym

$$\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{A_{22}}{B_{22}}=\frac{A_{33}}{B_{33}}=\frac{A_{23}}{B_{23}}=\frac{A_{31}}{B_{31}}=\frac{A_{12}}{B_{12}}=\varkappa.$$

Wskutek tego mamy:

$$(5)\quad F-\varkappa G\equiv u_4[2(A_{14}-\varkappa B_{14})u_1+2(A_{24}-\varkappa B_{24})u_2+2(A_{34}-\varkappa B_{34})u_3+ \\ +(A_{44}-\varkappa B_{44})u_{44}].$$

Widzimy z tego, że płaszczyzny styczne, spólne obu powierzchniom (4), jeżeli nie przechodzą przez punkt $u_4=0$, przechodzą przez punkt

$$2(A_{14}-\varkappa B_{14})u_1+2(A_{24}-\varkappa B_{24})u_2+2(A_{34}-\varkappa B_{34})u_3+(A_{44}-\varkappa B_{44})u_4=0.$$

A zatym: *jeżeli pięć płaszczyzn stycznych, spólnych dwu powierzchniom stopnia 2-go, przechodzi przez jeden punkt, to natenczas powierzchnia rozwijalna spólna tym powierzchniom roskłada się na dwa stożki stopnia 2-go, styczne do obu powierzchni.*

Ze wzoru (5) widzimy nadto, że *jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go* $F=0$ *i* $G=0$ *są wpisane w dwa stożki stopnia 2-go, którego wierzchołkami są punkty* $P=0$ *i* $P'=0$, *natenczas przy pewnéj wartości na stałą* $\varkappa$, *mieć będziemy*

$$(6)\qquad F-\varkappa G\equiv PP',$$

t. j. lewa strona téj tożsamości jest iloczynem dwu czynników stopnia 1-go.

PĘK I SZEREG POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

140. Zbiór powierzchni stopnia 2-go, przechodzących przez tę samę krzywą skośną stopnia 4-go rodzaju 1-go, nazwiemy p ę k i e m powierzchni stopnia 2-go, a owę krzywą w ę z ł e m tego pęku. Zbiór zaś powierzchni stopnia 2-go, mających tę samę powierzchnią rozwijalną stopnia 4-go rodzaju 1-go jako spólną obwiednią, nazwiemy s z e r e g i e m powierzchni stopnia 2-go, a tę powierzchnią rozwijalną p o d s t a w ą tego szeregu.

Jeżeli

$$(1)\quad f\equiv a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{34}x_3x_4=0 \quad \text{i} \quad (2)\quad g\equiv b_{11}x_1^2+\ldots+2b_{34}x_3x_4=0$$

są równaniami we spółrzędnych punktu dwu powierzchni stopnia 2-go, to równanie

$$(3)\qquad f+\lambda g\equiv(a_{11}+\lambda b_{11})x_1^2+\ldots+2(a_{34}+\lambda b_{34})x_3x_4=0,$$

z parametrem nieoznaczonym λ, będzie przedstawiało wszelkie powierzchnie pęku, mającego jako węzeł tę krzywą, według któréj przecinają się dwie powierzchnie $f=0$ i $g=0$. — Podobnie, jeżeli

$$(1')\quad F\equiv A_{11}u_1^2+\ldots+2A_{34}u_3u_4=0 \quad \text{i} \quad (2')\quad G\equiv B_{11}u_1^2+\ldots+2B_{34}u_3u_4=0$$

są równaniami we spółrzędnych płaszczyzny dwu powierzchni stopnia 2-go, to równanie

$$(3') \qquad F + \lambda G \equiv (A_{11} + \lambda B_{11}) u_1^2 + \ldots + 2(A_{34} + \lambda B_{34}) u_3 u_4 = 0,$$

z parametrem nieoznaczonym λ, będzie przedstawiało wszelkie powierzchnie szeregu, mającego jako podstawę tę powierzchnią rozwijalną, która obwodzi obie powierzchnie $F=0$ i $G=0$.

Z równania (3) czytamy, że przez każdy punkt nie leżący na węźle przechodzi pewna powierzchnia pęku. Albowiém na wyznaczenie powierzchni pęku, przechodzącéj przez punkt dowolny (x_1', x'_2, x'_3, x'_4), mamy $f' + \lambda g' = 0$, skąd wypada na λ wartość oznaczona i skończona $\lambda = -\frac{f'}{g'}$, gdyż z założenia nie jest ani $f' = 0$, ani $g' = 0$. — Taksamo z równania (3') wypada, że każda płaszczyzna, która nie jest styczną do podstawy szeregu, jest styczną do jednéj z powierzchni szeregu.

Ponieważ punktom, spólnym dwu powierzchniom stopnia 2-go, odpowiadają, jako płaszczyzny biegunowe, płaszczyzny styczne spólne tym dwu powierzchniom stopnia 2-go, które są biegunowo wzajemnymi z poprzednimi dwiema powierzchniami, więc, stosując zasadę dwoistości, można z twierdzeń, odnoszących się do pęku powierzchni stopnia 2-go, wyprowadzić bespośrednio twierdzenia, odnoszące się do szeregu takichże powierzchni. Dlategotéż w dalszym ciągu zajmować się będziemy jedynie wyprowadzaniem własności pęku, a co do szeregu, to będziemy mogli ograniczyć się wysłowieniem twierdzeń analogicznych.

141. Równanie płaszczyzny biegunowéj punktu $P'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ względem powierzchni $f + \lambda g = 0$ jest

$$(4) \qquad (x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3 + x_4 f'_4) + \lambda (x_1 g'_1 + x_2 g'_2 + x_3 g'_3 + x_4 g'_4) = 0,$$

gdzie $f'_1, f'_2, \ldots$ i $g'_1, g'_2, \ldots$ są wartościami w punkcie P' połów pochodnych cząstkowych funkcyj f i g, wziętych odpowiednio względem $x_1, x_2, \ldots$

Z tego wypada, że płaszczyzny biegunowe tego samego punktu (P') względem wszelkich powierzchni pęku $(f + \lambda g = 0)$ przechodzą przez prostą stałą, a mianowicie przez prostą, według któréj z sobą się przecinają płaszczyzny biegunowe tegoż punktu względem obu powierzchni $(f = 0$ i $g = 0)$, wyznaczających węzeł pęku. A zatym: *płaszczyzny biegunowe tego samego punktu względem wszelkich powierzchni stopnia 2-go jednego pęku tworzą pęk płaszczyzn; pęki płaszczyzn biegunowych, odpowiadające rozmaitym punktom są pękami jednokréślnymi; a w tych pękach płaszczyznami odpowiednimi są płaszczyzny biegunowe względem téj saméj powierzchni pęku.* Odpowiednio: *bieguny téj saméj płaszczyzny względem wszelkich powierzchni stopnia 2-go jednego szeregu, tworzą szereg prostolinijowy punktów; szeregi prostolinijowe biegunów, odpowiadające rozmaitym płaszczyznom, są szeregami punktów jednokréślnymi, a w tych szeregach punktami odpowiednimi są bieguny względem téj saméj powierzchni szeregu.* — Ponieważ środek powierzchni stopnia 2-go jest biegunem płaszczyzny w nieskończoności, zatym możemy jeszcze dodać: *środki powierzchni stopnia 2-go jednego szeregu leżą na linii prostéj.*

Według prostéj, biegunowo wzajemnéj z prostą $P'P''$ względem powierzchni $f+\lambda g=0$, przecinają się płaszczyzny biegunowe punktów P' i P'' względem téj powierzchni. Te dwie płaszczyzny są odpowiednimi w tych dwu pękach płaszczyzn biegunowych, które względem pęku powierzchni $f+\lambda g=0$ odpowiadają punktom P' i P''. A ponieważ proste, według których przecinają się odpowiednie płaszczyzny dwu pęków płaszczyzn jednokréślnych, są widocznie (art. 22) układem tworzących powierzchni stopnia 2-go, przeto: *biegunowo wzajemne téj saméj prostéj* D *względem powierzchni stopnia 2-go jednego pęku są jednym układem tworzących pewnéj powierzchni stopnia 2-go; tworzące układu drugiego téj powierzchni są osiami pęków płaszczyzn biegunowych różnych punktów prostéj* D *względem powierzchni pęku.* Odpowiednio: *biegunowo wzajemne téj saméj prostéj* D *względem powierzchni stopnia 2-go jednego szeregu są jednym układem tworzących pewnéj powierzchni stopnia 2-go; tworzące układu drugiego téj powierzchni są podstawami szeregów prostolinijowych biegunów różnych płaszczyzn, przechodzących przez prostą* D, *względem powierzchni szeregu.*

Biegun płaszczyzny $P'P''P'''$ względem powierzchni $f+\lambda g=0$ jest punktem, w którym przecinają się płaszczyzny biegunowe punktów P', P'', P''' względem téj powierzchni. Oznaczmy, dla $i=1, 2, 3$, przez $e^{(i)}{}_1$ i $e^{(i)}{}_2$ płaszczyzny biegunowe punktu $P^{(i)}$ odpowiednio względem $f=0$ i $g=0$, a przez $E^{(i)}$ płaszczyznę biegunową tegoż punktu względem $f+\lambda g=0$; natenczas mieć będziemy

$$E'\equiv e'_1+\lambda e'_2=0,\quad E''\equiv e''_1+\lambda e''_2=0,\quad E'''\equiv e'''_1+\lambda e'''_2.$$

Rugując λ z tych trzech równań, otrzymujemy:

$$e'_1e''_2-e''_1e'_2=0,\quad e'_1e'''_2-e'''_1e'_2=0,\quad e''_1e'''_2-e'''_1e''_2=0.$$

Każde z tych trzech równań wynika z dwu pozostałych. Piérwsze dwa z nich, uważane pospołu, przedstawiają krzywą skośną stopnia 4-go rodzaju 1-go, która widocznie roskłada się na prostą, przedstawioną przez równania $e'_1=0$, $e'_2=0$, i na pewną krzywą stopnia 3-go. Ponieważ punkty prostéj $e'_1=e'_2=0$ nie są punktami powierzchni, przedstawionéj przez trzecie równanie, t. j. przez równanie $e''_1e'''_2-e'''_1e''_2=0$, przeto: *miejscem bieguna płaszczyzny stałéj względem powierzchni stopnia 2-go jednego pęku jest pewna krzywa skośna stopnia 3-go.* Odpowiednio: *obwiednią płaszczyzny biegunowéj punktu stałego względem powierzchni stopnia 2-go jednego szeregu jest pewna powierzchnia rozwijalna, która jest biegunowo wzajemną z krzywą stopnia 3-go.* — Ponieważ środek powierzchni stopnia 2-go jest biegunem płaszczyzny w nieskończoności, przeto z pierwszego z tych twierdzeń wypada jeszcze, że *środki powierzchni stopnia 2-go jednego pęku leżą na pewnéj krzywéj skośnéj stopnia 3-go.*

142. Powierzchnia $f+\lambda g=0$ będzie stożkiem rzędu 2-go, jeżeli wyróżnik funkcyi $f+\lambda g$ jest równy 0, a więc, jeżeli parametr λ jest pierwiastkiem równania stopnia 4-go

(5) $$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11}, & a_{12}+\lambda b_{12}, & a_{13}+\lambda b_{13}, & a_{14}+\lambda b_{14} \\ a_{21}+\lambda b_{21}, & a_{22}+\lambda b_{22}, & a_{23}+\lambda b_{23}, & a_{24}+\lambda b_{24} \\ a_{31}+\lambda b_{31}, & a_{32}+\lambda b_{32}, & a_{33}+\lambda b_{33}, & a_{34}+\lambda b_{34} \\ a_{41}+\lambda b_{41}, & a_{42}+\lambda b_{42}, & a_{43}+\lambda b_{43}, & a_{44}+\lambda b_{44} \end{vmatrix}=0.$$

A zatym: *między powierzchniami stopnia 2-go jednego pęku znajdują się cztéry stożki rzędu 2-go*, czyli: *przez krzywą przecięcia się dwu powierzchni stopnia 2-go można przesunąć cztéry stożki rzędu 2-go.* — Ponieważ stożkowi rzędu 2-go, t. j. powierzchni utworzonéj przez prostą, obracającą się około punktu stałego (wiérzchołka) i wciąż przecinającą stałą krzywą stopnia 2-go (kierownicę), odpowiada, jako biegunowo wzajemna, powierzchnia granicowa stopnia 2-go, t. j. powierzchnia płaska utworzona przez prostą, która, poruszając się wciąż na stałéj płaszczyźnie, obwodzi na téj płaszczyźnie krzywą stopnia 2-go, przeto twierdzeniem, odpowiadającym poprzedzającemu według zasady dwoistości, będzie następujące: *w szeregu powierzchni stopnia 2-go znajdują się cztéry powierzchnie granicowe stopnia 2-go*, czyli, *obwiednia płaszczyzn stycznych, spólnych dwu powierzchniom stopnia 2-go, obwodzi zarazem cztéry powierzchnie granicowe stopnia 2-go.*

Spółrzędne wiérzchołków każdego z cztérech stożków rzędu 2-go, należących do pęku $f+\lambda g=0$, czynią zadość równaniom

(6) $$f_1+\lambda g_1=0,\quad f_2+\lambda g_2=0,\quad f_3+\lambda g_3=0,\quad f_4+\lambda g_4=0,$$

w których λ oznacza pierwiastek odpowiedni równania (5).

Postępując taksamo, jakeśmy w przypadku analogicznym postąpili w artykule 175 części I-éj, można okazać, że wiérzchołki tych cztérech stożków są po dwa harmonicznie sprzężone względem każdéj powierzchni pęku. A zatym: *wiérzchołki cztérech stożków rzędu 2-go, należących do jednego pęku powierzchni stopnia 2-go, są wiérzchołkami czworościanu z sobą samym sprzężonego* (art. 131) *względem każdéj z tych powierzchni.* Odpowiednio: *płaszczyzny cztérech powierzchni granicowych stopnia 2-go, należących do jednego szeregu powierzchni stopnia 2-go, są ścianami czworościanu z sobą samym sprzężonego względem każdéj z tych powierzchni.* — Albo, innymi słowy: *powierzchnie stopnia 2-go jednego pęku lub jednego szeregu mają spólny czworościan z sobą samym sprzężony, którego wiérzchołki lub ściany są odpowiednio wiérzchołkami lub płaszczyznami cztérech stożków lub powierzchni granicowych stopnia 2-go, należących do tego pęku lub szeregu.*

143. Oznaczmy: przez A wyróżnik funkcyi $f\equiv a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{34}x_3x_4$; przez B wyróżnik funkcyi $g\equiv b_{11}x_1^2+\ldots+2b_{34}x_3x_4$; przez A_1, A_2, A_3 i A_4 te wartości, które przyjmie wyróżnik A, gdy w nim zamiast elementów kolumny 1-széj, lub 2-éj, lub 3-éj, lub nakoniec 4-éj podstawimy odpowiednie elementy jednoimiennych kolumn wyróżnika B; nawzajem, przez B_1, B_2, B_3 i B_4 wartości, które przyjmie wyróżnik B, gdy w nim taksamo zamiast elementów 1-éj, lub 2-éj, lub 3-éj, lub nakoniec 4-éj kolumny podstawimy odpowiednie elementy jednoimiennych kolumn wyróżnika A; i jeszcze przez A_{23}, A_{31}, A_{12}, A_{14}, A_{24}, A_{34}, lub odpowiednio przez B_{14}, B_{24}, B_{34}, B_{23}, B_{31}, B_{12} wartości, które przyjmie wyróżnik A, lub B, gdy w nim zamiast elementów kolumn, odpowiadających wskaźnikom, podstawimy odpowiednie elementy jednoimiennych kolumn wyróżnika B, lub A.

Rozwinąwszy wyznacznik (5) i uporządkowawszy jego wyrażenie według potęg niewiadoméj λ, otrzymamy równanie

$$(5') \qquad A + \Theta\lambda + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda^3 + B\lambda^4 = 0,$$

gdzie

$$(6)\begin{cases} \Theta \equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad \Theta' \equiv B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \\ \Phi \equiv A_{23} + A_{31} + A_{12} + A_{14} + A_{24} + A_{34} \equiv B_{14} + B_{24} + B_{34} + B_{23} + B_{31} + B_{12}. \end{cases}$$

Wartości na λ, przy których równanie $f + \lambda g = 0$ przedstawia stożek rzędu 2-go, nie zależą wcale od układu spółrzędnych, w których są wyrażone równania $f = 0$ i $g = 0$. Stąd wynika, że spółczynniki Θ, Φ i Θ' są taksamo jak A i B niezmiennikami względem wszelkiego przekształcenia linijowego. Te trzy spółczynniki, zawierając w sobie spółczynniki obu funkcyj f i g, nazywają się niezmiennikami spólnymi tych wielomianów, albotéż n i e z m i e n n i k a m i p ę k u $f + \lambda g = 0$.

Wiadomo, że wyróżniki A i B wrazie, gdy są równe 0, wyrażają iż powierzchnie $f = 0$ i $g = 0$ są stożkami rzędu 2-go (walcami, lub układem dwu płaszczyzn); taksamo niezmienniki spólne pęku wrazie, gdy one przywodzą się do 0, wyrażają pewne własności pęku, niezależne od układu spółrzędnych.

144. Aby znaléść znaczenia gieometryczne równań $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Phi = 0$, weźmy jakikolwiek czworościan z sobą samym sprzężony względem powierzchni $f = 0$ za czworościan odniesienia. Równanie téj powierzchni będzie wtedy kształtu:

$$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0;$$

a zatym $\qquad \Theta \equiv b_{11} a_2 a_3 a_4 + b_{22} a_3 a_4 a_1 + b_{33} a_4 a_1 a_2 + b_{44} a_1 a_2 a_3.$

Stąd widzimy, że $\Theta = 0$ dla $b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 0$, t. j. wtedy, kiedy równanie powierzchni $g = 0$ jest kształtu

$$g \equiv b_{23} x_2 x_3 + b_{31} x_3 x_1 + b_{12} x_1 x_2 + b_{14} x_1 x_4 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 = 0,$$

a więc wtedy, kiedy powierzchnia $g = 0$ jest opisana na tym czworościanie odniesienia. Przy tym samym założeniu co do czworościanu odniesienia, mamy

$$\Theta' \equiv a_1 B_{11} + a_2 B_{22} + a_3 B_{33} + a_4 B_{44},$$

gdzie B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{44} są ilościami dołączonymi odpowiednio do elementów b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44} wyróżnika B. Stąd widzimy, że również $\Theta' = 0$, jeżeli $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{44} = 0$, t. j. wtedy, kiedy równanie powierzchni $g = 0$ we spółrzędnych płaszczyzny jest kształtu:

$$G \equiv B_{23} u_2 u_3 + B_{31} u_3 u_1 + B_{12} u_1 u_2 + B_{14} u_1 u_4 + B_{24} u_2 u_4 + B_{34} u_3 u_4 = 0,$$

czyli wtedy, kiedy powierzchnia $g = 0$ jest wpisana w czworościan odniesienia. — Przyjąwszy, że czworościan odniesienia jest z sobą samym sprzężony względem powierzchni $g=0$, znajdziemy taksamo, że $\Theta=0$, jeżeli powierzchnia $f=0$ jest wpisaną w ten czworościan, a $\Theta'=0$, jeżeli powierzchnia $f=0$ jest opisana na tym czworościanie. — A zatym: *jeżeli powierzchnia $f=0$ lub $g=0$ jest wpisana w czworościan z sobą samym sprzężony względem powierzchni $g=0$ lub odpowiednio $f=0$, albo, jeżeli powierzchnia $g=0$ lub $f=0$ jest opisana na czworościanie z sobą samym sprzężonym względem powierzchni $f=0$ lub $g=0$, wówczas odpowiednio $\Theta=0$ lub $\Theta'=0$.* Zauważyć należy, że te dwie własności niezmienników Θ i Θ' tak są z sobą związane, iż istnienie któréjkolwiek jednéj z nich prowadzi za sobą istnienie drugiéj.

Jeżeli jeszcze czworościan z sobą samym sprzężony względem jędnéj z powierzchni $f=0$ i $g=0$, np. względem piérwszéj, przyjmujemy za czworościan odniesienia, to

$$\Phi \equiv \alpha_2\alpha_3(b_{11}b_{44}-b_{14}{}^2)+\alpha_3\alpha_1(b_{22}b_{44}-b_{24}{}^2)+\alpha_1\alpha_2(b_{33}b_{44}-b_{34}{}^2)+$$
$$+\alpha_1\alpha_4(b_{22}b_{33}-b_{23}{}^2)+\alpha_2\alpha_4(b_{33}b_{11}-b_{31}{}^2)+\alpha_3\alpha_4(b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2).$$

Będzie zatym $\Phi=0$, jeżeli

$$b_{22}b_{33}-b_{23}{}^2=b_{33}b_{11}-b_{13}{}^2=b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2=b_{11}b_{44}-b_{14}{}^2=b_{22}b_{44}-b_{24}{}^2=$$
$$=b_{33}b_{44}-b_{34}{}^2=0,$$

t. j. jeżeli do powierzchni $g=0$ każda krawędź tego czworościanu odniesienia jest styczną (art. 126). — Gdybyśmy podobnie za czworościan odniesienia przyjęli czworościan z sobą samym sprzężony względem $g=0$, to znaleźlibyśmy taksamo, że $\Phi=0$, jeżeli do powierzchni $f=0$ jest styczną każda krawędź tego czworościanu. — A zatym: *jeżeli każda krawędź czworościanu z sobą samym sprzężonego względem jednéj z dwu powierzchni $f=0$ i $g=0$ jest styczną do drugiéj z nich, to wówczas $\Phi=0$.*

145. Nie mogąc się wdawać w rozbiór szczegółowy równania wyróżnikowego (5), gdyż to przekraczałoby znacznie zakres niniejszéj pracy, wyprowadzimy jeszcze tylko własności kilku szczególnych pęków powierzchni stopnia 2-go.

Załóżmy naprzód, że jedna z powierzchni $f=0$ i $g=0$, wyznaczających węzeł pęku, roskłada się na dwie płaszczyzny; dajmy np., że $g\equiv E_1E_2$. Równanie pęku zamienia się wtedy na

$$f+\lambda E_1E_2=0 \qquad (8)$$

i przedstawia wszelkie powierzchnie stopnia 2-go, które przechodzą przez dwie krzywe stopnia 2-go, według których powierzchnią $f=0$ przecinają dwie płaszczyzny $E_1=0$ i $E_2=0$. Węzeł więc pęku roskłada się w tym przypadku na dwie krzywe płaskie stopnia 2-go, i dlatego pęk (8) zowiemy p ę k i e m o d w u w ę z ł a c h p ł a s k i c h.

Oznaczmy przez $E=0$ równanie płaszczyzny biegunowéj punktu (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) względem $f=0$, a przez E'_1 i E'_2 wypadki podstawienia tych spółrzędnych w E_1 i E_2; wtedy równanie płaszczyzny biegunowéj tego punktu względem (8) będzie

$$E + \lambda(E'_1 E_2 + E'_2 E_1) = 0,$$

a to równanie przywodzi się do $E = 0$, jeżeli jest $E'_1 = 0$ i $E'_2 = 0$. A zatym: *jakikolwiek punkt na prostéj, według któréj przecinają się płaszczyzny* $E_1 = 0$ *i* $E_2 = 0$ *obu węzłów pęku* $f + \lambda E_1 E_2 = 0$, *posiada tę samę płaszczyznę biegunową względem wszelkich powierzchni tego pęku.* Stąd zaś wypada, w przypadku szczególnym, że *powierzchnie pęku dwuwęzłowego* $f + \lambda E_1 E_2 = 0$ *mają płaszczyzny styczne spólne w tych dwu punktach, w których powierzchnią* $f = 0$ *przecina prosta* $E_1 = E_2 = 0$, *czyli, że wszystkie powierzchnie tego pęku są do siebie styczne w dwu tych samych punktach.*

Nawzajem, *jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go są do siebie styczne w dwu punktach, to krzywa ich przecięcia się roskłada się na dwie krzywe płaskie.* Albowiém, jeżeli przez oba punkty styczności i przez jakikolwiek trzeci punkt na przecięciu się tych dwu powierzchni przesuniemy płaszczyznę, to ta płaszczyzna przetnie obie powierzchnie według dwu krzywych stopnia 2-go, które, jako mające trzy punkty i dwie styczne w dwu z tych punktów spólne, są właściwie tążsamą jedną krzywą.

Podobnie można okazać, że *wszystkie powierzchnie pęku dwuwęzłowego* $f + \lambda E_1 E_2 = 0$ *mają jako spólną obwiednią, dwa stożki stopnia 2-go.* Jakoż, biegunowe wzajemne tych powierzchni stopnia 2-go, które są do siebie styczne w dwu punktach, są także powierzchniami stopnia 2-go podwójnie się dotykającymi, a dwu płaszczyznom przecięcia się piérwszych, odpowiadają, jako biegunowo wzajemne, dwa stożki styczne do drugich powierzchni.

Weźmy pod uwagę trzy powierzchnie stopnia 2-go,

$$f + EE_1 = 0, \quad f + EE_2 = 0, \quad f + EE_3 = 0.$$

Oprócz krzywéj płaskiéj $f = 0$, $E = 0$, spólnéj wszystkim trzem, mają każde dwie z tych powierzchni jeszcze drugą krzywą płaską spólną. Równania płaszczyzn, na których te krzywe leżą, są odpowiednio:

$$E_2 - E_3 = 0, \quad E_3 - E_1 = 0 \quad \text{i} \quad E_1 - E_2 = 0,$$

a suma tych równań jest tożsamościowo równa 0. A zatym: *jeżeli trzy powierzchnie stopnia 2-go mają jednę krzywą płaską spólną, wtedy każde dwie z tych powierzchni mają także drugą krzywą płaską spólną, a płaszczyzny, na których leżą owe trzy drugie krzywe, przechodzą przez jednę prostą.*

Jeżeli płaszczyzny $E_1 = 0$ i $E_2 = 0$ razem się schodzą z płaszczyzną $E = 0$, wówczas równanie (8) zamienia się na

$$f + \lambda E^2 = 0 \tag{9}$$

i przedstawia wszelkie powierzchnie stopnia 2-go, styczne do $f = 0$ wzdłuż krzywéj płaskiéj $f = 0$, $E = 0$.

Łatwo spostrzéc, że *dwie powierzchnie stopnia 2-go, styczne do siebie w trzech punktach, dotykają się wzdłuż krzywéj płaskiéj.* Albowiém, płaszczyzna, wyznaczona przez te trzy punkty, przecina obie powierzchnie według dwu krzywych stopnia 2-go, które, mając trzy punkty i styczne w tych punktach spólne, przedstawiają jednę krzywą.

Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie stopnia 2-go

$$f + E_1^2 = 0 \quad \text{i} \quad f + E_2^2 = 0,$$

które dotykają powierzchni $f = 0$ odpowiednio wzdłuż krzywych $f = 0$, $E_1 = 0$ i $f = 0$, $E_2 = 0$. Te dwie powierzchnie przecinają się według dwu krzywych płaskich, a równania tych krzywych są widocznie

$$E_1 - E_2 = 0 \quad \text{i} \quad E_1 + E_2 = 0.$$

A zatym: *jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go dotykają trzeciéj wzdłuż krzywych płaskich, natenczas one przecinają się z sobą według dwu krzywych płaskich, których płaszczyzny przechodzą przez prostą przecięcia się płaszczyzn piérwszych dwu krzywych i są z nimi harmonicznie sprzężone.*

146. Szczególnym przypadkiem pęku powierzchni stopnia 2-go o dwu węzłach płaskich jest układ powierzchni stopnia 2-go homotetycznych, t. j. taki, w którym płaszczyzna jednego węzła jest nieskończenie odległą. Według tego określenia, jeżeli $f = 0$ jest równaniem powierzchni stopnia 2-go, to równanie

$$f + E = 0 \tag{10}$$

będzie przedstawiało powierzchnią homotetyczną z $f = 0$. A zatym w równaniach dwu powierzchni stopnia 2-go homotetycznych jedynie spółczynniki wyrazów stopnia 1-go względem spółrzędnych i wyrazów, od nich niezależnych, są różne od siebie. Stąd wynika, podobnie, jak w teoryi krzywych stopnia 2-go homotetycznych, *istnienie środka podobieństwa, równoległość kierunków głównych, proporcyjonalność osi głównych* i t. d. w dwu powierzchniach stopnia 2-go homotetycznych.

Wszystkie kule są powierzchniami stopnia 2-go homotetycznymi i dlatego można je uważać jako mające przekrój płaski spólny w nieskończoności; ten przekrój jest widocznie kołem urojonym. Przekrój zatym płaski powierzchni stopnia 2-go będzie kołem, jeżeli krzywa przekroju przechodzi przez te dwa punkty, w których jego płaszczyzna przecina owo koło w nieskończoności.

Z téj uwagi można otrzymać ilość rozwiązań zagadnienia, mającego na celu wynalezienie przekrojów kołowych powierzchni stopnia 2-go. Jakoż, skoro przekrój powierzchni stopnia 2-go płaszczyzną w nieskończoności przechodzi przez cztéry punkty na kole urojonym w nieskończoności, to sześć prostych, łączących każde dwa z tych cztérech punktów, będą takimi, iż płaszczyzny, przechodzące przez którąkolwiek z nich, przetną powierzchnią według kół. A więc, *istnieje sześć szeregów płaszczyzn równoległych, które przecinają powierzchnią stopnia 2-go według kół.* Punkty styczności płaszczyzn stycznych do powierzchni, które można przesunąć przez którąkolwiek z tych sześciu prostych, będą umbilikami. A zatym, *powierzchnia stopnia 2-go posiada dwanaście umbilików, z których tylko cztéry są punktami rzeczywistymi.*

Powierzchnią obrotową można uważać jako dotykającą kuli w dwu punktach; albowiém np. równanie

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

można tak pisać:

$$(x^2+y^2+z^2-r^2)+\left\{\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)z^2-(a^2-r^2)\right\}=0.$$

Przeto *w powierzchniach obrotowych istnieje tylko jeden szereg przekrojów kołowych;* płaszczyzny tych przekrojów przechodzą przez prostą, która łączy punkty styczności przekroju kuli i powierzchni obrotowéj płaszczyzną w nieskończoności.

SIEĆ I SMUGA POWIERZCHNI STOPNIA 2-GO.

147. Załóżmy, że z $\varphi(n)$ punktów potrzebnych na wyznaczenie powierzchni rzędu n-go (art. 137), tylko $\varphi(n)-2$ punktów jest danych dowolnie. Ponieważ zapomocą równań warunkowych, wyrażających, że te punkty znajdują się na powierzchni rzędu n-go, można wyrugować z równania ogólnego téj powierzchni wszystkie spółczynniki, oprócz trzech, które pozostaną nieoznaczone, i to równanie przywiéść do postaci

(11) $$\lambda f+\mu g+\nu h=0,$$

gdzie f, g, h są funkcyjami oznaczonymi stopnia n-go, a λ, μ, ν są liczbami stałymi, których stosunki $\lambda:\mu:\nu$ są nieoznaczone, przeto widocznie *powierzchnie rzędu n-go, które przechodzą przez $\varphi(n)-2$ punktów dowolnie danych, przechodzą nadto przez $n^3-\varphi(n)+2$ innych punktów, przez tamte wyznaczonych.* Albowiém one przejść winny przez n^3 punktów, w których przecinają się trzy oznaczone powierzchnie rzędu n-go, $f=0$, $g=0$ i $h=0$. Stąd wynika, że wszystkie powierzchnie stopnia 2-go, które przechodzą przez siedem punktów dowolnie danych, przechodzą jeszcze przez punkt ósmy, przez tamte wyznaczony. — Taksamo można okazać, że *do powierzchni klasy n-téj, do któréj jest dowolnie danych $\varphi(n)-2$ płaszczyzn stycznych, jest jeszcze $n^3-\varphi(n)+2$ płaszczyzn stycznych, przez tamte wyznaczonych,* a w szczególności, że do powierzchni stopnia 2-go, do któréj siedem danych płaszczyzn jest stycznych, jest jeszcze styczną ósma płaszczyzna, przez tamte wyznaczona.

148. Zbiór powierzchni stopnia 2-go, które przechodzą przez punkty spólne lub do których są stycznymi płaszczyzny styczne, spólne trzem powierzchniom stopnia 2-go, nazywamy siecią lub odpowiednio smugą tych powierzchni. Jeżeli $f=0$, $g=0$, $h=0$ są równaniami we spółrzędnych punktu lub płaszczyzny trzech powierzchni stopnia 2-go, to równanie

(12) $$f+\lambda g+\mu h=0,$$

z dwoma parametrami nieoznaczonymi λ i μ, będzie równaniem każdéj powierzchni sieci lub odpowiednio smugi.

Łatwo spostrzéc, że przez dwa punkty dowolnie dane, byle niespólne powierzchniom $f=0$, $g=0$ i $h=0$, przechodzi tylko jedna powierzchnia sieci.

Taksamo istnieje tylko jedna powierzchnia smugi, do któréj są stycznymi dwie dowolnie dane płaszczyzny, nie będące płaszczyznami stycznymi, spólnymi powierzchniom $f=0$, $g=0$ i $h=0$.

Oznaczmy przez $E=0$, $E'=0$ i $E''=0$ płaszczyzny biegunowe tego samego punktu odpowiednio względem powierzchni $f=0$, $g=0$ i $h=0$; natenczas

$$E+\lambda E'+\mu E''=0$$

będzie równaniem płaszczyzny biegunowéj tegoż punktu względem któréjkolwiek powierzchni sieci (12); ta płaszczyzna przechodzi przez punkt stały $E=0$, $E'=0$, $E''=0$. A zatym: *płaszczyzny biegunowe tego samego punktu względem wszelkich powierzchni stopnia 2-go jednéj sieci przechodzą przez punkt stały.* Odpowiednio: *bieguny téj saméj płaszczyzny względem wszelkich powierzchni stopnia 2-go jednéj smugi leżą na płaszczyźnie stałéj.* — Na tym twierdzeniu Hesse oparł sposób kreślenia powierzchni stopnia 2-go, przechodzącéj przez dziewięć punktów danych.

ĆWICZENIA.

(171). Okazać, że linija prosta jest jedyną liniją stopnia 1-go.

(172). Okazać, że jedyną krzywą właściwą stopnia 2-go może być tylko przecięcie stożkowe, t. j. krzywa płaska stopnia 2-go.

(173). Okazać, że żadna linija prosta nie może krzywéj stopnia n-go, niepłaskiéj, przecinać w więcéj jak w $(n-1)$ punktach.

(174). Okazać, że krzywa stopnia 3-go jest albo płaską rzędu 3-go, albo częściowym przecięciem się dwu powierzchni stopnia 2-go, mających prostą spólną.

(175). Wiérzchołki dwu czworościanów, z których każdy jest z sobą samym sprzężonych względem téj saméj powierzchni stopnia 2-go, tworzą układ ósmiu punktów; okazać, że powierzchnie stopnia 2-go, przechodzące przez siedem z tych punktów, przechodzą i przez ósmy punkt.

(176). Jeżeli na kuli opiszemy czworościan z sobą samym sprzężony względem danéj powierzchni stopnia 2-go ze środkiem, to długość stycznéj do téj kuli, wyprowadzonéj ze środka powierzchni danéj, będzie stałą.

(177). Okazać, że środek kuli, wpisanéj w czworościan z sobą samym sprzężony względem hiperbolojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, dla któréj $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$, znajduje się na powierzchni téj hiperbolojdy.

(178). Okazać, że miejsce środków kul, opisanych na czworościanie z sobą samym sprzężonym względem parabolojdy, jest płaszczyzną.

(179). Okazać, że jeżeli do jednéj z dwu kul jest styczną krawędź czworościanu z sobą samym sprzężonego względem drugiéj kuli, to suma kwadratów promieni tych kul jest równa kwadratowi odległości ich środków, pomnożonemu przez $\frac{2}{3}$.

(180). Okazać, że jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go $f=0$ i $g=0$ są do siebie styczne, to wyróżnik funkcyi $f+\lambda g$ ma dwa pierwiastki równe; znaléść stąd warunek, aby dwie kule były styczne do siebie.

(181). Okazać, że jeżeli dwie powierzchnie stopnia 2-go są do siebie styczne, to punkt styczności jest punktem podwójnym krzywéj ich przecięcia się.

(182). Znaléść warunek, aby dwie powierzchnie stopnia 2-go były takimi, żeby w jednę z nich można było wpisać czworościan, któregoby dwie pary przeciwległych krawędzi znajdowały się na drugiéj z nich.

(183). Stosunek osi głównych dwu elipsojd spółśrodkowych i homotetycznych jest $1:n$, przy $n>1$; z jakiegokolwiek punktu na elipsojdzie zewnętrznéj wyprowadźmy stożek styczny do wewnętrznéj; okazać, że płaszczyzna przecięcia się tego stożka z elipsojdą zewnętrzną jest styczną do innéj elipsojdy homotetycznéj, mianowicie do téj, dla któréj stosunek jéj osi do osi elipsojdy wewnętrznéj jest $(n^2-2):2$.

(184). Znaléść miejsce punktu przecięcia się płaszczyzn, stycznych do powierzchni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ w końcach trzech średnic sprzężonych.

ROZDZIAŁ XIII.

ZARYS TEORYI OGÓLNÉJ POWIERZCHNI ALGIEBRAICZNYCH RZĘDU n-GO.

---

149. W tym zarysie teoryi ogólnéj powierzchni algiebraicznych ograniczymy się jedynie tymi własnościami, do których wyprowadzenia, oprócz rachunku algiebraicznego, wystarczają te wiadomości z rachunku różniczkowego, które podaliśmy w rozdziale XIV części I.

Okazaliśmy już w rozdziale poprzedzającym, że

$$\varphi(n) \equiv \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1$$

punktów lub płaszczyzn stycznych dowolnie danych wyznacza w zupełności powierzchnią algiebraiczną rzędu n-go, lub odpowiednio klasy n-téj. Jeżeli jest tylko $\varphi(n) - 1$ punktów (lub płaszczyzn stycznych) dowolnie danych, to natenczas istnieje nieskończenie wiele powierzchni rzędu n-go (klasy n-téj), które przechodzą przez te punkty (są styczne do tych płaszczyzn), a te wszystkie powierzchnie przecinają się według téj saméj krzywéj stopnia n-go rodzaju 1-go (są wpisane w tę samę powierzchnią rozwijalną stopnia n-go rodzaju 1-go). Zbiór tych powierzchni nazwaliśmy p ę k i e m (lub odpowiednio s z e r e g i e m).

Jeżeli zaś tylko $\varphi(n) - 2$ punktów (lub płaszczyzn stycznych) jest dowolnie danych, natenczas istnieje nieskończenie wiele powierzchni rzędu n-go (klasy n-téj), które przechodzą przez te punkty (są styczne do tych płaszczyzn), a te wszystkie powierzchnie przecinają się nadto w $n^3 - \varphi(n) + 2$ innych punktach (mają jeszcze $n^3 - \varphi(n) + 2$ innych płaszczyzn stycznych spólnych), przez tamte w zupełności wyznaczonych (art. 147). Zbiór tych powierzchni nazwaliśmy s i e c i ą (lub odpowiednio s m u g ą).

Łatwo spostrzéc, że powierzchnie jednéj sieci t. j. powierzchnie, przedstawione przez równania

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0,$$

gdzie f, φ, ψ są funkcyjami oznaczonymi stopnia n-go względem spółrzędnych punktu, a stosunki $\lambda:\mu:\nu$ są nieoznaczone, przechodzące przez ten sam punkt, niespólny powierzchniom $f=0$, $\varphi=0$ i $\psi=0$, tworzą pęk. Podobnie powierzchnie jednéj smugi, styczne do téj saméj płaszczyzny, ale nie jednéj z tych, które smugę wyznaczają, lub są przez tamte wyznaczone, tworzą szereg.

STYCZNE I NORMALNE.

150. Linija prosta przecina powierzchnią rzędu n-go w n punktach, rzeczywistych lub urojonych. Jeżeli conajmniéj dwa z tych punktów schodzą się razem w jednym punkcie, to wówczas mówimy, że prosta jest **styczną** do powierzchni w tym punkcie, zwanym jéj **punktem styczności**. Stąd wynika, że styczna do powierzchni rzędu n-go przecina tę powierzchnią, prócz w punkcie styczności, jeszcze co najwięcéj w $n-2$ punktach.

Niech

$$f(x, y, z)=0 \tag{1}$$

będzie równaniem powierzchni rzędu n-go we spółrzędnych prostokątnych punktu. Wyprowadźmy z punktu dowolnie danego $p(x, y, z)$ prostą, któréj dostawy kierunkowe są (λ, μ, ν). Oznaczając przez (X, Y, Z) spółrzędne punktu bieżącego P na téj prostéj i kładąc $pP=r$, mamy

$$X=x+\lambda r, \quad Y=y+\mu r, \quad Z=z+\nu r. \tag{2}$$

Jeżeli punkt P jest zarazem punktem powierzchni (1), wówczas

$$f(x+\lambda r,\ y+\mu r,\ z+\nu r)=0,$$

lub, rozwinąwszy stronę lewą zapomocą wzoru Taylor'a (I, art. 203),

$$f+\frac{r}{1}\Delta f+\frac{r^2}{2!}\Delta^2 f+\frac{r^3}{3!}\Delta^3 f+\ldots+\frac{r^n}{n!}\Delta^n f=0, \tag{3}$$

gdzie, dla $m=1, 2, \ldots, n$,

$$\Delta^m f\equiv\Sigma\frac{m!}{i!j!k!}\frac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\lambda^i\mu^j\nu^k, \tag{4}$$

a tu znak sumy rosciąga się na wszelkie wartości całkowite i dodatne liczb i, j, k, byle było $i+j+k=m$.

Prosta (2), t. j.

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu} \tag{5}$$

będzie styczną w p do powierzchni (1), jeżeli dwie spośród n wartości na r, wyznaczonych przez równanie (3), są sobie równe; a więc, jeżeli

(6) $\quad f=0,\quad$ oraz $\quad$ (7) $\quad \Delta f\equiv\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial f}{\partial y}+\nu\frac{\partial f}{\partial z}=0,$

Piérwsze równanie oznacza, że punkt p leży na powierzchni (1), a drugie wyraża związek między dostawami kierunkowymi stycznéj. Ponieważ na wyznaczenie trzech dostaw kierunkowych (λ, μ, ν) mamy tylko jedno równanie (7) (oprócz $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$), zatym widoczna, że powierzchnia w każdym punkcie p posiada nieskończenie wiele stycznych. Te wszystkie styczne leżą wszakże na téj saméj płaszczyźnie, mianowicie na téj, któréj równanie, wynikające wskutek rugowania λ, μ, ν z równań (5) i (7), jest

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{8}$$

Płaszczyzna (8) jest **płaszczyzną styczną** do powierzchni (1) w punkcie $p(x, y, z)$, a ten punkt jest jéj **punktem styczności**.

Prosta, przechodząca przez punkt p na powierzchni i prostopadła do płaszczyzny stycznéj w tym punkcie, zowie się **normalną** do powierzchni. Równania zatym normalnéj do powierzchni (1) w punkcie $p(x, y, z)$ są:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{9}$$

151. Pośród stycznych do powierzchni $f=0$ w punkcie $p\ (x, y, z)$ istnieją dwie, które z powierzchnią mają w p trzy punkty spólne. Jakoż, jeżeli do równania warunkowego (7) dołączymy równanie

$$\Delta^2 f \equiv \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\nu^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\mu\nu\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+2\nu\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, \tag{10}$$

wówczas równanie (3) będzie miało trzy pierwiastki równe 0. Te dwie styczne zowią się **stycznymi głównymi** do powierzchni $f=0$ w punkcie p, i widocznie są one tymi dwiema prostymi, przez punkt p przechodzącymi, według których stożek stopnia 2-go

$$\begin{aligned}(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+(Z-z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2(Y-y)(Z-z)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\\ +2(Z-z)(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\end{aligned} \tag{11}$$

mający wiérzchołek w tym punkcie p, przecina płaszczyzna styczna (8). — Weźmy punkt styczności p za początek spółrzędnych, a płaszczyznę styczną w tym punkcie za płaszczyznę XY. Równanie powierzchni $f=0$ przywiedzie się wtedy do postaci:

$$z+a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\ldots=0, \tag{12}$$

gdzie opuszczone wyrazy są stopnia wyższego niż 2-gi. Ponieważ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2a_{11}+\ldots,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a_{22}+\ldots,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2a_{33}+\ldots,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2a_{23}+\ldots,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2a_{31}+\ldots,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2a_{12}+\ldots,$$

przeto otrzymamy równanie dwu stycznych głównych w punkcie p, gdy w równaniu (11) za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots$ podstawimy tylkoco napisane wartości, a następnie przyjmiemy $x=y=z=0$ i $Z=0$. Tym sposobem znajdziemy

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0.$$

Te dwie styczne są urojone, rzeczywiste różne, lubteż rzeczywiste schodzące się z sobą razem, według tego, czy $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$, czy < 0, czyteż $= 0$.

Punkt p powierzchni zowie się, odpowiednio temu, **punktem eliptycznym**, **hiperbolicznym**, lub **parabolicznym**. Te nazwy pochodzą stąd, że, jak to piérwszy zauważył Dupin, płaszczyzna, równoległa do płaszczyzny stycznéj, a nieskończenie jéj bliska, przecina powierzchnią $f=0$ (gdy przyjmiemy pod uwagę jedynie punkty nieskończenie bliskie punktu p), odpowiednio według elipsy, hiperboli, lub paraboli.

Stycznym głównym można nadać inne znaczenie w sposób następujący. Płaszczyzna styczna do powierzchni $f=0$ w punkcie p przecina tę powierzchnią według pewnéj krzywéj, dla któréj punkt p jest punktem podwójnym; albowiém każda prosta, leżąca na płaszczyźnie stycznéj a przechodząca przez punkt p, przecina tę krzywą w n punktach, z których dwa schodzą się z sobą razem w punkcie p. Wskutek tego, dwie styczne główne do powierzchni w p są dwiema stycznymi do téj krzywéj w tym właśnie punkcie podwójnym. Będzie on punktem odosobnionym, punktem węzłowym, lub punktem zwrotu, według tego, czy dwie styczne główne są urojone, czy rzeczywiste różne, czyteż rzeczywiste razem się z sobą schodzące.

Jeżeli powierzchnia $f=0$ jest stopnia 2-go, to krzywa przecięcia się będzie krzywą stopnia 2-go; a że na téj krzywéj znajduje się punkt podwójny, więc jedynymi możebnymi linijami przecięcia będą albo nieskończenie mała elipsa, jak np. w elipsojdzie, albo dwie proste, które się przecinają lub razem się z sobą schodzą, jak np. odpowiednio w hiperbolojdzie jednopowłokowéj lub w walcu.

Łatwo spostrzéc, że jakakolwiek płaszczyzna, przechodząca przez jednę z dwu stycznych głównych, przecina powierzchnią według linii krzywéj, która w punkcie styczności ma punkt przegięcia; albowiém ta styczna przechodzi przez trzy sąsiednie punkty téj krzywéj. Stąd téż styczne główne zowią się także **stycznymi przegięcia**.

152. Okazaliśmy w poprzedzającym artykule, że płaszczyzna styczna do powierzchni $f=0$ przecina tę powierzchnią według krzywéj, mającéj w punkcie styczności punkt podwójny. Stąd wynika, że nawzajem, każda płaszczyzna, która powierzchnią przecina według krzywéj z punktem podwójnym, winna być uważana za płaszczyznę styczną do powierzchni, mającą w punkcie podwójnym punkt styczności. Jeżeli ta krzywa przecięcia ma dwa, trzy,... punkty podwójne, to płaszczyzna przecięcia będzie **płaszczyzną styczną podwójną, potrójną, i t. d.** Ponieważ do równania płaszczyzny wchodzą trzy stałe niezależne, przeto zawsze można tak wyznaczyć płaszczyznę, aby ona czyniła zadość trzem warunkom. Stąd wynika wogóle, że istnieje ilość skończona płaszczyzn stycznych potrójnych, t. j. takich, które powierzchnią $f=0$ przecinają według krzywéj z trzema punktami podwójnymi.

Płaszczyzną styczną osobliwą nazywamy taką płaszczyznę, która nie jest do powierzchni styczną w skończonéj ilości punktów, ale dotyka jéj wzdłuż całéj linii krzywéj albo prostéj. Przykładem takiéj płaszczyzny stycznéj jest płaszczyzna styczna stożka, walca i wogóle wszelkiéj powierzchni rozwijalnéj; liniją styczności jest w tym przypadku tworząca powierzchni rozwijalnéj.

Jeżeli płaszczyzna styczna jest osobliwą, wtedy każda prosta na niéj leżąca i przecinająca liniją styczności, ma z tą liniją w punkcie przecięcia dwa punkty spólne (bo ta linija jest miejscem punktów podwójnych przekroju powierzchni płaszczyzną styczną), a każda prosta do linii styczności styczna, jako zejście się dwu stycznych w punkcie podwójnym, ma z tą liniją w punkcie styczności cztéry punkty spólne. Łatwo spostrzéc, że ta styczna jest zejściem się dwu stycznych głównych do powierzchni. Chcąc więc znaléść warunek, aby płaszczyzna styczna była osobliwą, trzeba wyrazić, że w każdym punkcie istniejące dwie styczne główne do powierzchni schodzą się razem w jednę prostą, przechodzącą przez owe cztéry punkty razem się z sobą schodzące.

Dostawy kierunkowe stycznych głównych są wyznaczone przez równania (7) i (10). Ponieważ te dwie styczne razem się z sobą schodzą, przeto, dla skrócenia, oznaczywszy

$$f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x},\; f_2 \equiv \frac{\partial f}{\partial y},\; f_3 \equiv \frac{\partial f}{\partial z};\; f_{11} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\; f_{22} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\; f_{33} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$f_{23} \equiv f_{32} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},\; f_{31} \equiv f_{13} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x},\; f_{12} \equiv f_{21} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

na wyznaczenie dostaw kierunkowych téj jednéj stycznéj mamy

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{f_{11}\lambda + f_{12}\mu + f_{12}\nu}{f_1} = \dfrac{f_{21}\lambda + f_{22}\mu + f_{23}\nu}{f_2} = \dfrac{f_{31}\lambda + f_{32}\mu + f_{33}\nu}{f_3} \\ f_1\lambda + f_2\mu + f_3\nu = 0, \end{array} \right.$$

gdyż wtedy płaszczyzna (8) dotyka stożka (11). Warunkiem, aby te równania miały miejsce jednocześnie, jest

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} f_{11}\,, & f_{12}\,, & f_{13}\,, & f_1 \\ f_{21}\,, & f_{22}\,, & f_{23}\,, & f_2 \\ f_{31}\,, & f_{32}\,, & f_{33}\,, & f_3 \\ f_1\,, & f_2\,, & f_3\,, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a warunek, aby ta styczna przechodziła przez owe cztéry punkty razem się z sobą schodzące, sprowadza się do tego, aby wartości na $\lambda:\mu:\nu$, wyznaczone przez równanie (13), uczyniły zadość równaniu

$$(15) \qquad \Delta^3 f \equiv \Sigma \frac{3!}{i!j!k!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \lambda^i \mu^j \nu^k = 0, \quad \text{przy} \quad i+j+k=3.$$

Wtedy bowiém równanie (3) będzie miało cztéry piérwiastki $=0$.

Warunki, pod jakimi płaszczyzna styczna jest osobliwą, można jeszcze tak znaléść. Niech $lx+my+nz=p$ będzie płaszczyzną styczną do powierzchni $f=0$. Porównanie tego równania z równaniem (8) daje

$$\frac{f_1}{l} = \frac{f_2}{m} = \frac{f_3}{n} = \frac{xf_1 + yf_2 + zf_3}{p}.$$

Te równania, razem z równaniem $f=0$, dają spółrzędne punktu styczności, tudzież związek między l, m, n i p. Wynajdziemy więc warunki istnienia płaszczyzny stycznéj osobliwéj, uważając, że punkt styczności, wyznaczony przez te równania, może być jakimkolwiek punktem linii krzywéj, t. j. że jego spółrzędne są wtedy nieoznaczone.

PUNKTY WIELOKROTNE.

153. Jeżeli w punkcie p na powierzchni $f=0$ przywodzą się do zera pochodne f_1, f_2 i f_3, natenczas równanie (3) (art. 150) miéć będzie dwa pierwiastki $=0$ przy wszelkich wartościach na λ, μ, ν; to wskazuje, że wtedy każda prosta przechodząca przez punkt p miéć będzie z powierzchnią $f=0$ w punkcie p dwa punkty spólne, razem się z sobą schodzące, czyli, że punkt p będzie punktem podwójnym powierzchni $f=0$.

Pomiędzy prostymi, przechodzącymi przez punkt podwójny powierzchni znajdują się takie, które z powierzchnią mają jeszcze trzeci punkt spólny, razem się schodzący z punktem podwójnym. Albowiém, jeżeli, wcelu wyznaczenia λ, μ, ν, przyjmiemy

$$(10) \qquad \Delta^2 f \equiv f_{11}\lambda^2 + f_{22}\mu^2 + f_{33}\nu^2 + 2f_{23}\mu\nu + 2f_{31}\nu\lambda + 2f_{12}\lambda\mu = 0,$$

to natenczas każda prosta tego kierunku będzie miała trzy punkty spólne z powierzchnią, schodzące się razem, gdyż równanie (3) będzie wtedy miało trzy pierwiastki $=0$.

Te szczególne proste nazwiemy stycznymi w punkcie podwójnym do powierzchni; a ich miejscem jest stożek rzędu 2-go, którego równanie wypada wskutek wyrugowania λ, μ, ν z równań (5) i (10), a więc jest

$$(11) \qquad f_{11}(X-x)^2 + f_{22}(Y-y)^2 + f_{33}(Z-z)^2 + 2f_{23}(Y-y)(Z-z) + \\ + 2f_{31}(Z-z)(X-x) + 2f_{12}(X-x)(Y-y) = 0.$$

Ten stożek, mający wiérzchołek w punkcie p, nazwiemy stożkiem stycznym w punkcie podwójnym $p(x, y\, z)$ do powierzchni $f=0$. Pośród tworzących stożka stycznego (11) jest jednak sześć takich, które mają z powierzchnią $f=0$ cztéry punkty spólne, schodzące się razem w punkcie podwójnym; są to te tworzące, których dostawy kierunkowe jednocześnie czynią zadość równaniu (10) i równaniu

$$\Delta^3 f = 0.$$

Jeżeli nietylko piérwsze pochodne funkcyi f, ale nadto wszystkie pochodne cząstkowe téj funkcyi aż do rzędu $(m-1)$-go, włącznie, przy $m \leqq n$, przywodzą się do zera w punkcie p, to natenczas punkt p będzie m-krotnym, gdyż każda prosta, przechodząca przez taki punkt, ma z powierzchnią m punktów, razem się z sobą schodzących. Te jednak z prostych, przechodzących przez taki punkt m-krotny, których dostawy kierunkowe czynią zadość równaniu

$$\Delta^m f = 0,$$

mięć będą $m+1$ punktów, razem się z sobą schodzących, spólnych z powierzchnią. Nazwawszy te ostatnie proste stycznymi w punkcie m-krotnym, łatwo spostrzeżemy, że ich miejscem jest także stożek, mający wiérzchołek w punkcie m-krotnym, który się zowie stożkiem stycznym w punkcie m-krotnym. Jego równanie jest widocznie stopnia m-go względem spółrzędnych punktu.

154. Weźmy pod uwagę stożek styczny (11) do powierzchni $f=0$ w punkcie podwójnym $p(x, y, z)$. Prostopadłe do płaszczyzn stycznych tego stożka, wystawione w wiérzchołku p, są tworzącymi nowego stożka, który nazwiemy stożkiem normalnym powierzchni w jéj punkcie podwójnym p.

Równanie tego stożka normalnego znajdziemy w taki sposób. Równanie płaszczyzny stycznéj do stożka stycznego (11) jest

$$(f_{11}\lambda+f_{12}\mu+f_{13}\nu)(X-x)+(f_{21}\lambda+f_{22}\mu+f_{23}\nu)(Y-y)+(f_{31}\lambda+f_{32}\mu+f_{33}\nu)(Z-z)=0;$$

a zatym, jeżeli

$$\frac{X-x}{\lambda'}=\frac{Y-y}{\mu'}=\frac{Z-z}{\nu'}$$

są równaniami normalnéj do téj płaszczyzny w $p\ (x, y, z)$, to

$$\frac{f_{11}\lambda+f_{12}\mu+f_{13}\nu}{\lambda'}=\frac{f_{21}\lambda+f_{22}\mu+f_{23}\nu}{\mu'}=\frac{f_{31}\lambda+f_{32}\mu+f_{33}\nu}{\nu'},$$

a nadto $$\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0.$$

Rugując λ, μ, ν z tych równań, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & \lambda' \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & \mu' \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & \nu' \\ \lambda', & \mu', & \nu', & 0 \end{vmatrix}=0,$$

wskutek czego

$$(16)\qquad F \equiv \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & X-x \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & Y-y \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & Z-z \\ X-x, & Y-y, & Z-z, & 0 \end{vmatrix}=0$$

będzie równaniem żądanego stożka normalnego.

Stożek styczny (11) przejdzie na dwie płaszczyzny styczne, jeżeli wyróżnik lewéj strony równania (11) jest równy 0, t, j. jeżeli

$$\mathrm{R} \equiv \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Wtedy stożek normalny przejdzie na dwie płaszczyzny, razem się z sobą schodzące. Jakoż, oznaczmy przez R_{ik} ilość dołączoną do elementu f_{ik} wyznacznika R, a do elementów piérwszéj kolumny wyznacznika (16), pomnożonych przez R_{11}, dodajmy elementy drugiéj i trzeciéj kolumny, pomnożone odpowiednio przez R_{12} i R_{13}. Ponieważ $\mathrm{R}=0$, przeto

$$\mathrm{R}_{11}f_{11} + \mathrm{R}_{12}f_{12} + \mathrm{R}_{12}f_{13} = 0,$$

tudzież $\mathrm{R}_{11}f_{21} + \mathrm{R}_{12}f_{22} + \mathrm{R}_{13}f_{23} = 0,\quad \mathrm{R}_{11}f_{31} + \mathrm{R}_{12}f_{32} + \mathrm{R}_{13}f_{33} = 0.$

Wskutek tego

$$\mathrm{F} \equiv -\frac{1}{\mathrm{R}_{11}}[\mathrm{R}_{11}(\mathrm{X}-x) + \mathrm{R}_{12}(\mathrm{Y}-y) + \mathrm{R}_{13}(\mathrm{Z}-z)] \begin{vmatrix} f_{12}, & f_{13}, & \mathrm{X}-x \\ f_{22}, & f_{23}, & \mathrm{Y}-y \\ f_{32}, & f_{33}, & \mathrm{Z}-z \end{vmatrix},$$

lub, uporządkowawszy wyznacznik po prawéj według elementów ostatniéj kolumny,

$$\mathrm{F} = -\frac{1}{\mathrm{R}_{11}}[\mathrm{R}_{11}(\mathrm{X}-x) + \mathrm{R}_{12}(\mathrm{Y}-y) + \mathrm{R}_{13}(\mathrm{Z}-z)]^2.$$

A zatym, stożek normalny w punkcie podwójnym przechodzi w tym razie na dwie płaszczyzny, razem się schodzące. Równanie téj płaszczyzny jest

$$\mathrm{R}_{11}(\mathrm{X}-x) + \mathrm{R}_{12}(\mathrm{Y}-y) + \mathrm{R}_{13}(\mathrm{Z}-z) = 0. \tag{18}$$

ASYMPTOTY.

155. A s y m p t o t ą powierzchni jest prosta, która, pozostając sama w odległości skończonéj, przecina powierzchnią conajmniéj w dwu punktach w nieskończoności. P ł a s z c z y z n ą a s y m p t o t y c z n ą jest płaszczyzna styczna, któréj punkt styczności leży w nieskończoności, gdy ona znajduje się w odległości skończonéj. P o w i e r z c h n i ą a s y m p t o t y c z n ą jest obwiednia płaszczyzn asymptotycznych do danéj powierzchni.

Aby lepiéj wyrozumiéć te określenia, weźmy pod uwagę jakąkolwiek płaszczyznę styczną do powierzchni, i przyjmijmy, że jéj punkt styczności oddala się do nieskończoności. Ponieważ płaszczyzna w nieskończoności przecina powierzchnią według linii krzywéj, rzeczywistéj lub urojonéj, więc widocznie istnieje nieskończenie wiele kierunków — mówiąc wogólności —, w których ten punkt styczności można uważać jako oddalający się do nieskończoności. Każdemu z tych kierunków odpowiada pewna płaszczyzna asymptotyczna, a każda taka płaszczyzna jest miejscem odpowiednich asymptot, do siebie równoległych, gdyż każda z nich przechodzi przez tenże punkt styczności w nieskończoności.

Ponieważ na każdéj płaszczyźnie stycznéj w punkcie pojedyńczym powierzchni znajdują się dwie styczne główne, przechodzące przez trzy po sobie następujące punkty powierzchni, więc téż i na każdéj płaszczyźnie asymptotycznéj istnieją dwie asymptoty główne, które przechodzą przez trzy punkty w nieskończoności. Skoro następnie jakakolwiek płaszczyzna przechodząca przez jednę ze stycznych głównych przecina powierzchnią według krzywéj, dla któréj punkt styczności jest punktem przegięcia, przeto także krzywa, według któréj płaszczyzna, przechodząca przez jednę z asymptot głównych, przecina powierzchnią, posiada punkt przegięcia w nieskończoności.

Jeżeli przekrój powierzchni płaszczyzną nieskończenie odległą posiada punkt podwójny, wówczas, zamiast odpowiedniéj płaszczyzny asymptotycznéj, miéć będziemy walec asymptotyczny stopnia 2-go (czyli stożek, którego wiérzchołek leży w nieskończoności). Każda tworząca tego walca jest asymptotą. Pomiędzy tymi asymptotami jest sześć takich, które przecinają powierzchnią w cztérech punktach w nieskończoności. Przekrój powierzchni jakąkolwiek płaszczyzną równoległą do tworzących walca ma punkt podwójny, a przekrój powierzchni płaszczyzną styczną do walca ma punkt zwrotu w nieskończoności.

156. Aby znaléść asymptoty danéj powierzchni, postąpimy nieco odmiennie, niż w art. 211 części I. Niech (x, y, z) będą spółrzędnymi jakiegokolwiek punktu na asymptocie, a

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}(=r) \tag{19}$$

równaniami téj asymptoty. Dla punktów, w których ta asymptota przecina powierzchnią $f=0$, mamy

$$f(x+\lambda r,\ y+\mu r,\ z+\nu r)=0$$

Rozwińmy stronę lewą zapomocą wzoru Taylor'a według potęg i iloczynów liczb x, y, z, uważanych za przyrostki. Jeżeli przez $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots$ oznaczymy zbiór wyrazów funkcyi f odpowiednio stopnia n-go, $(n-1)$-go, $(n-2)$-go,..., t. j. jeżeli

$$f\equiv f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\dots+f_1+f_0,$$

i jeżeli przez $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_1$ oznaczymy wypadki podstawienia λ, μ, ν odpowiednio za x, y, z w tych funkcyjach jednorodnych $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_1$, to miéć będziemy

$$r^n\varphi_n+r^{n-1}(D\varphi_n+\varphi_{n-1})+r^{n-2}\left(\frac{1}{2!}D^2\varphi_n+D\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}\right)+\dots=0, \tag{20}$$

gdzie, dla $m=1, 2, \dots, p$, przy $1\leqslant p\leqslant n$,

$$D^m\varphi_p=\Sigma\frac{m!}{i!j!k!}\frac{\partial^m\varphi_p}{\partial\lambda^i\partial\mu^j\partial\nu^k}x^iy^jz^k,\quad i+j+k=m, \text{ i t. d.} \tag{21}$$

Równanie (20) ma dwa pierwiastki nieskończenie wielkie, jeżeli

$$(22)\qquad \varphi_n = 0 \quad \text{i} \quad D\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

Piérwsze z tych równań wskazuje, że wszystkie asymptoty są równoległe do tworzących stożka

$$(23)\qquad f_n(X, Y, Z) = 0,$$

a według drugiego z tych równań (22) wszystkie asymptoty, równoległe do jakiéjkolwiek tworzącéj stożka (23), leżą na płaszczyźnie

$$(24)\qquad x\frac{\partial\varphi_n}{\partial\lambda} + y\frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu} + z\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} + \varphi_{n-1} = 0,$$

która jest płaszczyzną asymptotyczną, równoległą do płaszczyzny stycznéj do stożka (23) wzdłuż owéj tworzącéj.

Dla asymptot głównych jest nadto

$$(25)\qquad \frac{1}{2!}D^2\varphi_n + D\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} = 0,$$

t. j. asymptoty główne są linijami przecięcia powierzchni stopnia 2-go (25) z płaszczyzną (24).

Nie mogąc się tu wdawać w bliższy rozbiór rozmaitych przypadków szczególnych, odsyłamy czytelnika w tym względzie do prac p. Painvin'a (*Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik*, tom LXV). Zwracamy tu tylko uwagę na to, że znajdziemy wyrażenia analityczne warunków, aby płaszczyzna asymptotyczna (24) była osobliwą, z rozważania, iż równaniu $D\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0$ stanie się wtedy zadość niezależnie od wartości na λ, μ, ν, gdyż jakakolwiek prosta na płaszczyźnie wyznaczonéj przez to równanie przecina powierzchnią w dwu punktach nieskończenie odległych; tudzież, że powierzchnia asymptotyczna, będąc obwiednią płaszczyzn asymptotycznych, jest powierzchnią rozwijalną, dotykającą danéj powierzchni wzdłuż przekroju téjże płaszczyzną w nieskończoności.

BIEGUNOWE.

157. Aby zręczniéj przedstawić badania, które jeszcze zamierzamy przeprowadzić, użyjemy spółrzędnych jednorodnych.

Niech więc

$$(1)\qquad f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

będzie równaniem we spółrzędnych jednorodnych punktu na powierzchni rzędu n-go. Oznaczmy przez (x_1, x_2, x_3, x_4) i (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) spółrzędne dwu punktów dowolnie danych p i p'. Wtedy znajdziemy punkty, w których prosta pp' przecina powierzchnią (1), podstawiając w równaniu (1) za X_1, $X_2, \ldots$ odpowiednio $\lambda x_1 + \mu x'_1$, $\lambda x_2 + \mu x'_2, \ldots$ Wynik podstawienia,

$$(2)\qquad f(\lambda x_1 + \mu x'_1,\ \lambda x_2 + \mu x'_2,\ \lambda x_3 + \mu x'_3,\ \lambda x_4 + \mu x'_4) = 0,$$

będzie równaniem stopnia n-go względem $\lambda:\mu$, którego pierwiastki wyznaczają stosunek odcinków, na jakie odległość między punktami p i p' dzielą punkty przecięcia się prostéj pp' z powierzchnią (1). Jeżeli jedna z wartości na $\lambda:\mu$ wypadnie $=0$, to odpowiedni punkt przecięcia zejdzie się razem z punktem p', a jeżeli jedna z wartości na $\lambda:\mu$ wypadnie ∞, to odpowiedni punkt przecięcia zejdzie się razem z punktem p.

Rozwińmy piérwszą stronę równania (2) zapomocą wzoru Taylor'a, uważając $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4$ za wartości początkowe, a $\mu x'_1, \mu x'_2, \mu x'_3, \mu x'_4$ za przyrostki cztérech zmiennych; mieć będziemy:

$$(3)\qquad \lambda^n f + \lambda^{n-1}\mu\Delta' f + \frac{1}{2!}\lambda^{n-2}\mu^2\Delta'^2 f + \ldots + \frac{1}{n!}\mu^n\Delta'_n f = 0,$$

gdzie $f \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, zaś, dla $m=1, 2, \ldots, n$,

$$(4)\qquad \Delta'^m f \equiv \Sigma \frac{m!}{i!j!k!l!} \frac{\partial^m f}{\partial x^i_1 \partial x^j_2 \partial x^k_3 \partial x^l_4} x'^i_1 x'^j_2 x'^k_3 x'^l_4,$$

a sumowanie rosciąga na wszystkie wartości dodatne i całkowite liczb i, j, k, l, których suma $i+j+k+l=m$.

Uważmy, że wszczególności

$$(5)\qquad \Delta' f \equiv x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x'_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

a każde $\Delta'^m f$ otrzymamy, gdy $\Delta' f$ podniesiemy do potęgi m-téj, a potym za $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^i \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^l$, gdzie $i+j+k+l=m$, podstawimy $\frac{\partial^m f}{\partial x^i_1 \partial x^j_2 \partial x^k_3 \partial x^l_4}$; tak iż symbolicznie można pisać

$$(6)\qquad \Delta'^m f \equiv \left(x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x'_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^m.$$

Rozwińmy teraz lewą stronę równania (2) zapomocą wzoru Taylor'a, lecz przyjmując, że $\mu x'_1, \mu x'_2, \mu x'_3, \mu x'_4$ są wartościami początkowymi, a $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4$ oznaczają przyrostki zmiennych. Otrzymamy wtedy:

$$(7)\qquad \mu^n f' + \mu^{n-1}\lambda\Delta f' + \frac{1}{2!}\mu^{n-2}\lambda^2\Delta^2 f' + \ldots + \frac{1}{n!}\lambda^n\Delta^n f' = 0,$$

gdzie znowu $f' \equiv f(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, a dla $m=1, 2, \ldots n$,

$$(8)\qquad \Delta^m f' \equiv \Sigma \frac{m!}{i!j!k!l!} \frac{\partial^m f'}{\partial x'^i_1 \partial x'^j_2 \partial x'^k_3 \partial x'^l_4} x^i_1 x^j_2 x^k_3 x^l_4,\quad i+j+k+l=m,$$

lub symbolicznie:

$$(8')\qquad \Delta^m f' \equiv \left(x_1 \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + x_2 \frac{\partial f'}{\partial x'_2} + x_3 \frac{\partial f'}{\partial x'_3} + x_4 \frac{\partial f'}{\partial x'_4}\right)^m.$$

Porównanie równań (3) i (7), które są tymi samymi, daje:

$$(9) \qquad \frac{1}{m!}\Delta'^m f \equiv \frac{1}{(n-m)!}\Delta^{n-m} f', \quad \text{dla} \quad m=1, 2, \ldots, n,$$

a zatym, wszczególności

$$(10) \quad \frac{1}{n!}\Delta'^n f \equiv f', \quad \frac{1}{(n-1)!}\Delta'^{n-1} f \equiv \Delta f', \quad \frac{1}{(n-2)!}\Delta'^{n-2} f \equiv \frac{1}{2!}\Delta^2 f', \text{ i t. d.}$$

158. Jeżeli spółczynniki w równaniu (3) przyrównamy do 0, to otrzymamy szereg równań

$$f=0, \quad \Delta' f=0, \quad \Delta'^2 f=0, \ldots, \quad \Delta'^m f=0, \ldots,$$

które, gdy w nich spółrzędne punktu p' będziemy uważali jako dane, a spółrzędne punktu p jako bieżące, przedstawiają powierzchnie odpowiednio rzędu n-go, $(n-1)$-go, $(n-2)$-go, ..., $(n-m)$-go, ... Piérwsza z tych powierzchni jest powierzchnią daną (1), a po niéj następujące zowią się p o w i e r z c h n i a m i b i e g u n o w y m i punktu danego p' względem powierzchni $f=0$ i odpowiednio $\Delta' f=0$ jest piérwszą powierzchnią biegunową, $\Delta^2 f=0$ drugą powierzchnią biegunową i t. d. Wogóle, równanie m-téj powierzchni biegunowéj punktu p' względem $f=0$ jest $\Delta'^m f=0$, a więc ta powierzchnia jest rzędu $(n-m)$-go.

Ponieważ widocznie

$$\Delta'^{k+l} f \equiv \Delta'^k (\Delta'^l f),$$

t. j. ponieważ ten sam wypadek otrzymamy, czy na f uskutecznimy wprost działanie oznaczone przez symbol Δ'^{k+l}, czytéż naprzód na f uskutecznimy działanie oznaczone przez symbol Δ'^l, a potym dopiéro na otrzymanym wypadku działanie oznaczone przez symbol Δ'^k, przeto $(k+l)$-ta powierzchnia biegunowa punktu p' względem $f=0$, jest k-tą powierzchnią biegunową tego samego punktu względem $\Delta'^l f=0$, t. j. względem l-téj powierzchni biegunowéj tegoż punktu, uważanéj względem $f=0$. A zatym ogólnie: *każda powierzchnia biegunowa jakiegokolwiek punktu jest także powierzchnią biegunową tegoż punktu względem wszystkich powierzchni biegunowych rzędów wyższych tegoż punku*, t. j. tych, których równania względem spółrzędnych bieżących są stopnia wyższego.

Postępując taksamo ze spółczynnikami rozwinięcia (7), t. j. przyrównywając je do zera, otrzymamy szereg równań

$$f'=0, \quad \Delta f'=0, \quad \Delta^2 f'=0, \ldots, \quad \Delta^m f'=0, \ldots,$$

kóre, gdy w nich spółrzędne punktu p będziemy uważali jako dane, a spółrzędne punktu p' jako bieżące, będą przedstawiały powierzchnie odpowiedio rzędu n-go, $(n-1)$-go, $(n-2)$-go, ..., $(n-m)$-go, ... Piérwsza z tych powierzchni jest daną (1), a następne są powierzchniami biegunowymi punku p względem $f=0$ odpowiednio 1-ą, 2-gą, ..., m-tą, ...

Z tożsamości (9) wypada, że *jeżeli punkt p leży na m-téj powierzchni biegunowéj punktu p', wtedy nawzajem punkt p' leży na $(n-m)$-téj powierzchni biegunowéj punktu p.* A zatym: *jeżeli punkt p opisuje powierzchnią rzędu $(n-m)$-go, kóra jest m-tą powierzchnią biegunową punktu p' względem powierzchni rzędu n-go*

$f=0$, *to natenczas* $(n-m)$*-ta powierzchnia biegunowa punktu* p *przechodzi przez punkt* p'.

159. Jeżeli punkt p jest punktem powierzchni $f=0$, a nadto spółrzędne punktu p' czynią zadość równaniu $\Delta' f=0$, wówczas dwu pierwiastkom równania (3) względem $\lambda:\mu$ odpowiada $\mu=0$; a zatym prosta pp' będzie styczną do powierzchni $f=0$ w punkcie p. Ponieważ spółrzędne punktu p', dowolnie obranego na którejkolwiek stycznéj, czynią zadość równaniu

$$X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+X_4\frac{\partial f}{\partial x^4}=0, \tag{11}$$

które przedstawia płaszczyznę, i ponieważ punkt p leży także na téj płaszczyznie, albowiém podług twierdzenia Euler'a o funkcyjach jednorodnych

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial x_4}\equiv nf=0,$$

zatym równanie (11) przedstawia miejsce wszystkich stycznych do powierzchni $f=0$ w punkcie p, czyli płaszczyznę styczną.

Ponieważ podług (9) $\Delta' f\equiv\frac{1}{n-1!}\Delta^{n-1}f'$, przeto płaszczyzna styczna do powierzchni $f=0$ w punkcie p jest $(n-1)$-ą powierzchnią biegunową punktu styczności względem $f=0$. Stąd zaś wypada, jako wniosek z twierdzenia dowiedzionego w artykule poprzedzającym, że *płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie* p *jest styczną do wszystkich jego powierzchni biegunowych w tymże punkcie.* A zatym: *powierzchnie biegunowe punktu na powierzchni* $f=0$ *przechodzą przez tenże punkt i mają w tym punkcie wraz z powierzchnią* $f=0$ *spólną płaszczyznę styczną.*

Jeżeli spółrzędne punktu p' czynią zadość nietylko równaniu $\Delta' f=0$, ale także równaniu $\Delta'^2 f=0$, to natenczas prosta pp' w p ma trzy punkty spólne z powierzchnią $f=0$. W tym przypadku prosta pp' leży nietylko na płaszczyźnie stycznéj (11), ale nadto na $(n-2)$-éj powierzchni biegunowéj punktu styczności p, t. j. na powierzchni

$$\begin{aligned}X_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+X_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+X_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}+X_4^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}+2X_2X_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}+\\+2X_3X_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}+2X_1X_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+2X_1X_4\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_4}+2X_2X_4\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_4}+\\+2X_3X_4\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_4}=0.\end{aligned} \tag{12}$$

A że, według tylkoco wypowiedzianego twierdzenia, płaszczyzna styczna (11) jest styczną do powierzchni (12) w p, przeto istnieją dwie proste styczne, mające w p trzy punkty spólne z $f=0$; te dwie styczne, któreśmy nazwali głównymi, albo stycznymi przegięcia (art. 151), są tymi dwiema prostymi (rzeczywistymi różnymi, lub razem się z sobą schodzącymi, lubtéż urojonymi), według których płaszczyzna styczna (11) przecina powierzchnią stopnia 2-go (12).

Te dwie styczne główne zejdą się razem z sobą, jeżeli równanie (12) przedstawia stożek stopnia 2-go. Oznaczmy, dla skrócenia $f_{ik} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \equiv f_{ki}$; wtedy warunek, aby równanie (12) przedstawiało stożek stopnia 2-go, wyrazi się, jak wiemy (art. 62), przez

$$\text{(13)} \qquad H(f) \equiv \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & f_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

A zatym, jeżeli punkt p powierzchni rzędu n-go $f=0$, leży zarazem na powierzchni $H(f)=0$, która jest widocznie rzędu $4(n-2)$-go, to w punkcie p jest tylko jedna styczna główna, czyli punkt p jest punktem parabolicznym powierzchni $f=0$. Powierzchnią $H(f)=0$ zowiemy powierzchnią Hesse'go powierzchni $f=0$. A zatym: *punkty paraboliczne powierzchni rzędu n-go $f=0$ leżą na przecięciu się téj powierzchni z odpowiadającą jéj powierzchnią Hesse'go.*

Jeżeli równanie (3), które wrazie, gdy $f=0$ i $\Delta' f=0$, jest stopnia $(n-2)$-go, posiada dwa pierwiastki równe, natenczas prosta pp' będzie styczną do powierzchni $f=0$ nietylko w punkcie p, ale nadto jeszcze w drugim punkcie, który odpowiada temu pierwiastkowi podwójnemu, i będzie styczną podwójną powierzchni $f=0$.

Przez każdy punkt powierzchni $f=0$ rzędu n-go przechodzi $(n+2)(n-3)$ stycznych podwójnych, t. j. takich prostych, które są styczne do powierzchni jeszcze w punktach innych niż pnnkt p. Jakoż, wiadomo z algiebry, że jeżeli równanie algiebraiczne

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

którego lewa strona jest funkcyją całkowitą i jednorodną względem λ i μ, a więc w którą wchodzi jedyna niewiadoma $\lambda : \mu$, posiada pierwiastek podwójny, to ten pierwiastek przywodzi do zera piérwsze pochodne cząstkowe funkcyi $\varphi(\lambda, \mu)$ względem λ i względem μ. A zatym wypadek rugowania λ i μ z dwu równań

$$\frac{\partial \varphi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0,$$

czyli równość zeru wyróżnika, czyli t. z. równanie wyróżnikowe funkcyi $\varphi(\lambda, \mu)$, jest warunkiem, pod jakim równanie $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ posiada pierwiastek podwójny. Jeżeli więc utworzymy równanie wyróżnikowe wyrażenia w lewéj stronie równania (3), które w uważanym przypadku ($f=0$ i $\Delta' f=0$) jest stopnia $(n-2)$-go, np. metodą rossprzęgającą Sylvester'a (w przytoczonéj *Teoryi wyznaczników*: § 79, art. 3), to znajdziemy, że równanie wyróżnikowe jest stopnia $(n-2)(n-3)$-go względem spółrzędnych punktu p, a stopnia $(n+2)(n-3)$ względem spółrzędnych punktu p', jak to widoczne np.

z wyrazu głównego $(\Delta'^2 f . \Delta'^n f)^{n-3}$ tego wyróżnika, gdy napiszemy go w postaci wyznacznika. Jeżeli więc punkt p będziemy uważali jako dany, a punkt p' jako punkt bieżący, to owo równanie wyróżnikowe przedstawi powierzchnią rzędu $(n+2)(n-3)$-go, która zarazem przechodzi przez punkt p i którą płaszczyzna styczna do $f=0$ w punkcie p przecina według $(n+2)(n-3)$ linij prostych. Te proste są stycznymi podwójnymi przechodzącymi przez punkt p.

160. Weźmy punkt p jako dany i nie leżący na powierzchni $f=0$, a punkt p' jako bieżący, i przyjmijmy, że $\Delta'^n f=0$ i $\Delta'^{n-1} f=0$. Wtedy prosta pp' będzie styczną do powierzchni $f=0$, wychodzącą z punktu danego p, a punkt p' będzie punktem styczności; albowiém wtedy dwie wartości na $\lambda:\mu$, które wyznacza równanie (3), stają się równe 0. Ponieważ według wzoru (9) $\Delta'^n f \equiv f'=0$, a $\Delta'^{n-1} f \equiv \Delta f'=0$, więc punkt styczności stycznéj do $f=0$ z punktu p leży na linii przecięcia się powierzchni $f=0$ z piérwszą biegunową punktu p względem téj powierzchni. A że ta piérwsza biegunowa jest powierzchnią rzędu $(n-1)$-go, więc miejscem tego punktu styczności jest pewna krzywa skośna stopnia $n(n-1)$-go.

Zbiór stycznych do powierzchni $f=0$ z punktu p tworzy stożek, którego płaszczyzny styczne są także płaszczyznami stycznymi do $f=0$. Otrzymamy równanie tego stożka, tworząc równanie wyróżnikowe dla wyrażenia w lewéj stronie równania (3); gdyż to równanie wyróżnikowe będzie wyrażało warunek, pod jakim prosta, łącząca punkt dany p z punktem p', przecina powierzchnią $f=0$ w dwu punktach razem się z sobą schodzących, t. j. będzie wyrażało, że punkt p' jest punktem na któréjkolwiek stycznéj z punktu p. Łatwo spostrzéc, że to równanie wyróżnikowe jest jednorodne i stopnia $n(n-1)$-go względem spółrzędnych tak punktu p jak i punktu p', jak to zresztą wypada z wyrazu głównego $(f . \Delta'^n f)^{n-1}$ wyróżnika, napisanego w postaci wyznacznika.

Jeżeli, przyjmując, że dany punkt p nie leży na powierzchni, przyjmiemy także, że $\Delta'^{n-2} f=0$, lub $\Delta^2 f'=0$, to natenczas prosta pp', wychodząca z p, będzie jedną ze stycznych głównych w punkcie p'; albowiém wtedy trzy pierwiastki $\lambda:\mu$ równania (3) będą równe 0. Ponieważ punkt p' jest teraz punktem przecięcia się trzech powierzchni

$$f'=0, \quad \Delta f'=0 \quad \text{i} \quad \Delta^2 f'=0,$$

odpowiednio rzędu n-go, $(n-1)$-go i $(n-2)$-go, a zatym: *przez punkt p, nie leżący na powierzchni rzędu n-go, przechodzi — mówiąc wogólności — $n(n-1)(n-2)$ stycznych głównych do téj powierzchni.*

Nie trudno okazać, że *przez punkt p, nie leżący na powierzchni $f=0$, można — mówiąc wogólności — poprowadzić $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ stycznych podwójnych do téj powierzchni.* Albowiém, według końcowego ustępu w artykule poprzedzającym, punkty styczności takich prostych są punktami przecięcia się danéj powierzchni, piérwszéj biegunowéj punktu p względem téj danéj powierzchni i powierzchni, przedstawionéj przez równanie wyróżnikowe wyrażenia w stronie lewéj równania (3), które wskutek tego, że $\Delta'^n f = 0$ i $\Delta'^{n-1} f = 0$, jest stopnia $(n-2)$-go względem $\lambda:\mu$. Ponieważ do tego równania wyróżnikowego wchodzą spółrzędne punktu p' w stopniu $(n-2)(n-3)$-im, więc tych punktów styczności będzie $n(n-1)(n-2)(n-3)$. Połowa téj ilości przypada na styczne podwójne, albowiém każda ma dwa punkty styczności.

Nakoniec *ilość płaszczyzn stycznych, dających się wyprowadzić z punktu* p, *nie leżącego na powierzchni* $f=0$, *a stycznych do téj powierzchni w punktach parabolicznych, jest* $4n(n-1)(n-2)$. Albowiém te punkty styczności leżą na danéj powierzchni, jéj piérwszéj biegunowéj punktu p i powierzchni Hesse'go, odpowiadającéj powierzchni danéj; a te powierzchnie, będące odpowiednio rzędu n-go, $(n-1)$-go i $4(n-2)$-go, przecinają się w $4n(n-1)(n-2)$ punktach.

Z teoryi stycznych, przechodzących przez jeden punkt, można wyznaczyć rzęd powierzchni biegunowo wzajemnéj względem danéj powierzchni $f=0$. Jakoż, ilość punktów, w których prosta dowolna przecina powierzchnią biegunowo wzajemną, jest równa ilości płaszczyzn stycznych do danéj powierzchni, które można przesunąć przez prostą dowolną. Weźmy więc pod uwagę dwa punkty A i B prostéj dowolnéj i punkt styczności C któréjkolwiek z płaszczyzn stycznych do danéj powierzchni $f=0$, przechodzących przez prostą AB. Punkt C leży widocznie tak na piérwszéj biegunowéj punktu A, jak i na piérwszéj biegunowéj punktu B, gdyż AC i BC są stycznymi do $f=0$ w C. A zatym punkty styczności płaszczyzn stycznych, przechodzących przez AB, są punktami przecięcia się danéj powierzchni z piérwszymi biegunowymi dwu punktów A i B, dowolnie obranych na téj prostéj; ich zatym ilość jest $n(n-1)^2$, a więc takimże jest rzęd powierzchni biegunowo wzajemnéj.

KILKA PRZYKŁADÓW POWIERZCHNI ALGIEBRAICZNYCH STOPNI WYŻSZYCH.

161. Pierścień kołowy. Koło, obracając się około prostéj (osi), która leży na jego płaszczyźnie, lecz go nie przecina, opisuje powierzchnią, którą zowiemy pierścieniem kołowym. Jeżeli oś obrotu weźmiemy za oś Z-ów, a miejsce środka koła obracającego się za płaszczyznę XY, i oznaczymy przez a promień tego koła, a przez c odległość jego środka od osi obrotu, to równanie pierścienia będzie

$$(1)\qquad f \equiv (X^2+Y^2+Z^2+c^2-a^2)^2 - 4c^2(X^2+Y^2) = 0.$$

Ponieważ $\dfrac{\partial f}{\partial X} \equiv 4(X^2+Y^2+Z^2+c^2-a^2)X - 8c^2X \equiv 8c(r-c)X,$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} \equiv 8c(r-c)Y,\quad \frac{\partial f}{\partial Z} = 8crZ,\quad \text{gdzie}\quad r^2 = X^2+Y^2,$$

więc równanie płaszczyzny stycznéj do powierzchni (1) w punkcie (x, y, z) jest

$$(r-c)x(X-x) + (r-c)y(Y-y) + rz(Z-z) = 0,$$

lub uwzględniając, że $z^2+(r-c)^2=a^2$, $r^2=x^2+y^2$,

(2) $$(r-c)(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y)+r\mathrm{Z}z=r^2(r-c)+rz^2=r[a^2+c(r-c)].$$

Dajmy, że płaszczyzna styczna przechodzi przez środek i np. przez oś Y i tworzy z osią X kąt α taki, że $a=c\sin\alpha$; znajdźmy krzywą, według któréj ta płaszczyzna styczna przecina pierścień. W jakimkolwiek punkcie (x, y, z) przekroju mamy $r=c-a\cos\theta$, $z=a\sin\theta$, $x=z\operatorname{ctg}\alpha$. Stąd wypada

$$\begin{aligned} y^2=r^2-x^2&=c^2-2ac\cos\theta+a^2\cos^2\theta-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\theta\\ &=c^2-2ac\cos\theta+a^2\cos^2\theta-(c^2-a^2)\sin^2\theta\\ &=c^2\cos^2\theta-2ac\cos\theta+a^2=(c\cos\theta-a)^2\end{aligned}$$

A zatym

$$(y\pm a)^2=c^2\cos^2\theta.$$

Nadto mamy

$$x^2+z^2=c^2\sin^2\theta.$$

Wskutek tego

$$x^2+(y\pm a)^2+z^2=c^2.$$

Przekrój zatym pierścienia płaszczyzną styczną, przechodzącą przez jego środek, składa się z dwu kół, które przecinają się w punktach styczności, przedstawiających dwa punkty podwójne.

Dla punktu pierścienia, leżącego na płaszczyźnie XY i np. na osi X-ów, mamy $x=c-a$, $y=0$, $z=0$. Równanie płaszczyzny stycznéj w tym punkcie jest $\mathrm{X}=c-a$; ta więc płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny YZ. Przekrój zatym pierścienia tą płaszczyzną styczną wyznaczają równania

$$\mathrm{X}=c-a \quad \text{i} \quad [\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2+2c(c-a)]^2-4c^2[\mathrm{Y}^2+(c-a)^2], \quad \text{czyli}$$
$$\mathrm{X}=c-a \quad \text{i} \quad [\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)^2-4ac\mathrm{Y}^2+4c(c-a)\mathrm{Z}^2=0.$$

Jeżeli $c=2a$, to drugie z tych równań przedstawia lemniskatę Bernoulli'ego (I, art. 228), mającą węzeł w punkcie styczności.

162. Powierzchnia falowa. Jeżeli do płaszczyzny przekroju centralnego powierzchni stopnia 2-go ze środkiem wystawimy normalną w jéj środku i na téj normalnéj odetniemy, począwszy od środka i po obu jego stronach, połowy długości obu osi tego przekroju, to miejsce tak otrzymanych punktów końcowych będzie powierzchnią dwupowłokową, która się zowie *powierzchnią falową*.

Jeżeli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ jest równaniem powierzchni stopnia 2-go, a $lx+my+nz=0$ równaniem płaszczyzny przekroju centralnego, to pierwiastki równania (art. 115) $\frac{a^2l^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2m^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2n^2}{c^2-r^2}=0$ stopnia 2-go względem r^2 są kwadratami połów długości osi tego przekroju. Kładąc w tym równaniu $x=lr$, $y=mr$, $z=nr$, otrzymamy, jako równanie powierzchni falowéj,

$$(1) \qquad \frac{a^2x^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-r^2}=0, \text{ gdzie } r^2=x^2+y^2+z^2, \text{ lub}$$

$$(1') \qquad f\equiv(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-[a^2x^2(b^2+c^2)+b^2y^2(c^2+a^2)+ \\ +c^2z^2(a^2+b^2)]+a^2b^2c^2=0.$$

Przekroje téj powierzchni jedną z płaszczyzn głównych roskładają się na koło i elipsę; albowiém równanie (1') przywodzi się

$$\text{dla } z=0 \text{ do } (x^2+y^2-c^2)(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)=0,$$
$$\text{dla } x=0 \text{ do } (y^2+z^2-b^2)(b^2y^2+c^2z^2-b^2c^2)=0,$$
$$\text{dla } y=0 \text{ do } (z^2+x^2-a^2)(c^2z^2+a^2x^2-c^2a^2)=0.$$

Toż samo bespośrednio wynika z rozważania gieometrycznego. Jakoż, jeżeli weźmiemy pod uwagę przekrój powierzchni tworzącéj (stopnia 2-go) płaszczyzną przechodzącą np. przez oś z-ów, to jedna jego oś $=2c$, gdy tymczasem druga leży na płaszczyźnie XY. Jeżeli więc wystawimy w środku normalną do płaszczyzny przekroju i na niéj odetniemy połowy długości tych osi, to jeden koniec opisze koło o promieniu $=c$, a drugi opisze krzywą taką samę, jak krzywa przekroju powierzchni tworzącéj płaszczyzną XY, tylko obróconą o 90^0. A zatym, *powierzchnia falowa posiada na każdéj z trzech płaszczyzn głównych po cztéry punkty podwójne*, mianowicie punkty przecięcia się odpowiedniego koła z odpowiednią elipsą.

Jeżeli powierzchnia stopnia 2-go jest elipsojdą i jeżeli $a^2>b^2>c^2$, wówczas tylko te punkty podwójne będą rzeczywiste, które leżą na płaszczyźnie ZX, i będą one umbilikami elipsojdy. Jakoż, równania

$$z^2+x^2-b^2=0 \quad \text{i} \quad c^2z^2+a^2x^2=c^2a^2$$

dają

$$(2) \qquad x^2=c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad z^2=a^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Łatwo okazać, że te wartości na x, z wraz z wartością $y=0$ (wskutek czego $r^2=b^2$), przywodzą do 0 tak f, jako też $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Drugie pochodne cząstkowe przybierają w tych punktach wartości

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8a^2c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2(a^2-b^2)(b^2-c^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=8a^2c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}[(a^2-b^2)(b^2-c^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

Stąd wypada równanie odpowiedniego stożka stycznego w postaci

$$(2) \qquad \frac{X^2}{b^2-c^2}-\frac{a^2-c^2}{4a^2c^2}Y^2+\frac{Z^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2+c^2}{[(a^2-b^2)(b^2-c^2)]^{\frac{1}{2}}}\frac{XZ}{ac}=0.$$

163. Z równania powierzchni falowéj, które także tak pisać można:

$$(4) \qquad f \equiv \frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1, \text{ gdzie } r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

wypada zapomocą łatwego rachunku:

$$(5)\left\{\begin{aligned} & f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{2x}{r^2 - a^2} - 2x\mathrm{P}, \; f_2 \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{2y}{r^2 - b^2} - 2y\mathrm{P}, \; f_3 \equiv \frac{2z}{r^2 - c^2} - 2z\mathrm{P}, \text{gdzie} \\ & \qquad \mathrm{P} \equiv \frac{x^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(r^2 - c^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Wiedząc to, wyznaczmy punkt styczności płaszczyzny stycznéj, któréj równanie jest

$$lx + my + nz = p,$$

i związek pomiędzy l, m, n i p.

Na wyznaczenie tego punktu mamy równania (art. 152)

$$(6) \qquad \frac{f_1}{l} = \frac{f_2}{m} = \frac{f_3}{n} = \frac{xf_1 + yf_2 + zf_3}{p} (= -2\sigma).$$

Atoli, uwzględniając związki (4) i (5), mieć będziemy

$$xf_1 + yf_2 + zf_3 = 2 - 2r^2\mathrm{P} = -2\sigma p,$$

tudzież
$$f_1{}^2 + f_2{}^2 + f_3{}^2 = 4(\mathrm{P} - 2\mathrm{P} + r^2\mathrm{P}^2) = 4\sigma^2,$$

wskutek czego

$$(7) \qquad \mathrm{P}\sigma p = \sigma^2, \;\; (r^2 - p^2)\sigma = p \;\text{ i }\; (r^2 - p^2)\mathrm{P} = 1.$$

Następnie z równań (6)

$$f_1 = -2l\sigma, \;\; f_2 = -2m\sigma, \;\; f_3 = -2n\sigma;$$

z tych zaś równań, przy uwzględnieniu związków (5) i (7), wypada

$$x\left(\frac{1}{r^2 - a^2} - \frac{1}{r^2 - p^2}\right) = -\frac{lp}{r^2 - p^2}, \quad y\left(\frac{1}{r^2 - b^2} - \frac{1}{r^2 - p^2}\right) = -\frac{mp}{r^2 - p^2},$$
$$z\left(\frac{1}{r^2 - c^2} - \frac{1}{r^2 - p^2}\right) = -\frac{np}{r^2 - p^2},$$

czyli

$$(8) \qquad \frac{x}{r^2 - a^2} = \frac{lp}{p^2 - a^2}, \;\; \frac{y}{r^2 - b^2} = \frac{mp}{p^2 - b^2}, \;\; \frac{z}{r^2 - c^2} = \frac{np}{p^2 - c^2},$$

$$(9) \quad x = lp\left(\frac{r^2 - p^2}{p^2 - a^2} + 1\right), \;\; y = mp\left(\frac{r^2 - p^2}{p^2 - b^2} + 1\right), \;\; z = np\left(\frac{r^2 - p^2}{p^2 - c^2} + 1\right).$$

Pomnożywszy następnie równania (8) odpowiednio przez l, m i n i dodawszy je do siebie, mieć będziemy

$$(10) \qquad \frac{l^2}{p^2 - a^2} + \frac{m^2}{p^2 - h^2} + \frac{n^2}{p^2 - c^2} = 0.$$

Gdy zaś dodamy do siebie kwadraty odpowiednich stron równań (9) i uwzględnimy związek (10), to wypadnie nam

$$r^2=x^2+y^2+z^2=p^2(r^2-p^2)^2\left\{\frac{l^2}{(p^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(p^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(p^2-c^2)^2}\right\}+p^2,$$

skąd

$$\frac{1}{r^2-p^2}=p^2\left\{\frac{l^2}{(p^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(p^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(p^2-c^2)^2}\right\}. \tag{11}$$

Równania (9) i (11) dają wartości na x, y, z w punkcie styczności, a równanie (10) wyraża związek między spółczynnikami l, m, n i p.

Możemy teraz okazać, że *powierzchnia falowa posiada cztéry rzeczywiste płaszczyzny styczne osobliwe.* Jakoż, według końcowéj uwagi w artykule 152, jeżeli płaszczyzna $lx+my+nz=p$ jest płaszczyzną styczną osobliwą, to jedna przynajmniéj spółrzędna punktu styczności jest nieoznaczoną. Z wzorów (9) wypada $y=\frac{0}{0}$, dla $m=0$ i $p^2=b^2$; przy tych wartościach jest także $r^2=\frac{0}{0}$, a więc i $x=\frac{0}{0}$ tudzież $z=\frac{0}{0}\cdot$ Aby znaléść l i n dla téj płaszczyzny stycznéj osobliwéj, naprzód ze związków (10) i (11) wyrugujemy spółczynnik m. Znajdziemy tym sposobem

$$\frac{p^2-b^2}{r^2-p^2}=p^2\left\{\frac{l^2(a^2-b^2)}{(p^2-a^2)^2}-\frac{n^2(b^2-c^2)}{(p^2-c^2)^2}\right\},$$

a stąd wypada, dla $p^2=b^2$,

$$\frac{l^2}{a^2-b^2}=\frac{m^2}{b^2-c^2}=\frac{1}{a^2-c^2}\quad(\text{gdyż } l^2+n^2=1). \tag{12}$$

Mamy zatym dwa kierunki rzeczywiste (gdyż $a^2>b^2>c^2$) płaszczyzn stycznych osobliwych $m=0\,\frac{l}{\sqrt{a^2-b^2}}=\pm\frac{n}{\sqrt{b^2-c^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}$, a że $p=\pm b$, więc założeniu zrobionemu odpowiadają cztéry płaszczyzny styczne osobliwe. Linije styczności są kołami, a zarazem przekrojami tymi płaszczyznami stycznymi jednéj z dwu kul, przedstawionych przez piérwsze i trzecie z równań (8), t. j. kul

$$r^2+\frac{a^2-b^2}{lb}x=a^2 \quad \text{i} \quad r^2-\frac{b^2-c^2}{nb}z=c^2.$$

Założeniom $p^2=a^2$, $l=0$ i $p^2=c^2$, $n=0$ odpowiadają płaszczyzny urojone.

Podstawmy w równaniu (10), wyrażającym warunek, pod jakim płaszczyzna $lx+my+nz=p$ jest styczną do powierzchni falowéj $-\frac{l}{p}=u$, $-\frac{m}{p}=v$, $-\frac{n}{p}=w$, $a=\frac{1}{a'}$, $b=\frac{1}{b'}$, $c=\frac{1}{c'}$; otrzymamy tym sposobem

$$\frac{a'^2u^2}{a'^2-\rho^2}+\frac{b'^2v^2}{b'^2-\rho^2}+\frac{c'^2w^2}{c'^2-\rho^2}=0,\quad \text{gdzie}\quad \rho^2=u^2+v^2+w^2, \tag{15}$$

t. j. równanie powierzchni falowéj we spółrzędnych płaszczyzny, którego kształt nie różni się od kształtu równania (1).

164. Powierzchnie rzędu 3-go. Na każdéj powierzchni rzędu 3-go leży ograniczona ilość linij prostych. Jakoż, równania linii prostéj

$$(1) \qquad y = mx + r, \quad z = nx + s$$

zawiérają w sobie cztéry stałe m, n, r, s. Podstawiwszy w równaniu powierzchni rzędu 3-go za y i z wartości (1), otrzymamy równanie stopnia 3-go względem x,

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

którego spółczynniki są funkcyjami całkowitymi stałych m, n, r, s.

Jeżeli, dla wyznaczenia tych stałych, przyjmiemy $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, to prosta (1) leżéć będzie cała na powierzchni. Ponieważ cztéry równania z czterema niewiadomymi mają — mówiąc wogólności — skończoną ilość rozwiązań, przeto widocznie na powierzchniach rzędu 3-go leży ilość ograniczona linij prostych.

Cayley dowiódł twierdzenia: *na każdéj powierzchni rzędu 3-go znajduje się 27 linij prostych rzeczywistych lub urojonych* i *każda taka powierzchnia posiada 45 płaszczyzn stycznych potrójnych, rzeczywistych lub urojonych.*

Aby dowiéść tego twierdzenia, wystawmy sobie jakąkolwiek płaszczyznę, przechodzącą przez jednę z prostych, leżących całkowicie na powierzchni rzędu 3-go; linija przecięcia się téj płaszczyzny z powierzchnią składa się z téj prostéj i z krzywéj płaskiéj stopnia 2-go, a dwa punkty podwójne, w których prostą przecina ta krzywa stopnia 2-go, są dwoma punktami styczności téj płaszczyzny do powierzchni.

Istnieje jednak pięć położeń płaszczyzny, przy których krzywa stopnia 2-go zamienia się na dwie proste. Jakoż, jeżeli prosta, np. oś X, leży całkowicie na powierzchni stopnia 3-go, to równanie powierzchni będzie kształtu:

$$yf_2 + z\varphi_2 = 0,$$

gdzie f_2 i φ_2 są funkcyjami stopnia 2-go. Gdy tę powierzchnią przetniemy płaszczyzną $\frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} (= r)$, to krzywa stopnia 2-go, która jest częścią przekroju, będzie przedstawiona przez równanie $\mu f'_2 + \nu\varphi'_2 = 0$, gdzie f'_2 i φ'_2 są kształtu $a_2r^2 + 2b_1rx + c_0x^2 + 2d_0x + 2e_1r + g_0$, przyczym spółczynniki a_2, b_1, e_1 będą funkcyjami jednorodnymi ilości μ i ν stopnia oznaczonego przez wskaźniki. Równanie więc krzywéj stopnia 2-go będzie kształtu:

$$\alpha_3r^2 + 2\beta_2rx + \gamma_1x^2 + 2\delta_1x + 2\varepsilon_2r + \varphi_1 = 0,$$

a ta krzywa zamieni się na dwie proste, jeżeli wyróżnik lewéj strony tego równania przywiedzie się do 0, t. j. jeżeli

$$\begin{vmatrix} \alpha_3, & \beta_2, & \varepsilon_2 \\ \beta_2, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \varepsilon_2, & \delta_1, & \varphi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie jest stopnia 5-go względem $\mu:\nu$, a zatym istnieje pięć położeń płaszczyzny, z których w każdym płaszczyzna, przechodząc przez jednę prostą, leżącą całkowicie na powierzchni rzędu 3-go, przecina tę powierzchnią jeszcze według dwu innych prostych. W każdym z tych pięciu położeń płaszczyzna jest styczną potrójną, albowiém przechodzi przez trzy punkty podwójne przekroju, t. j. punkty, w których te trzy proste przekroju przecinają się po dwie.

Przez każdą z trzech prostych na płaszczyźnie stycznéj potrójnéj można przesunąć cztéry płaszczyzny styczne potrójne, inne niż płaszczyzna owych trzech prostych, co nam daje 12 nowych płaszczyzn stycznych potrójnych i 24 nowych linij prostych. Mamy zatym razem 27 prostych na powierzchni rzędu 2-go. Pozostaje okazać, że na powierzchni nie może leżéć żadna inna taka prosta. Wypada to stąd, że punkt, w którym pewna prosta na powierzchni spotyka płaszczyznę styczną potrójną ABC, leży na jednéj z trzech prostych AB, BC, CA, któreto proste przedstawiają krzywą przekroju powierzchni płaszczyzną ABC. Niech ta prosta przecina się np. z prostą AB; wtedy na płaszczyźnie, która przechodzi przez tę prostą i przez AB, znajdować się winna trzecia prosta leżąca na powierzchni, a więc ta płaszczyzna będzie jedną z pięciu płaszczyzn stycznych potrójnych, które można przesunąć przez AB; owa zatym prosta jest jedną z powyższych 27 prostych.

Pięć płaszczyzn stycznych potrójnych można przesunąć przez każdą z 27 prostych; to czyni razem 5 . 27 płaszczyzn; atoli, ponieważ na każdéj z tych płaszczyzn leżą trzy z owych prostych, przeto istnieje tylko $\frac{5 \,.\, 27}{3} = 45$ różnych płaszczyzn stycznych potrójnych.

Należy zauważyć, że przyjmowaliśmy, iż powierzchnia rzędu 3-go jest jakakolwiek; gdyby ona była rozwijalną lub wogóle prostolinijową, to wtedy ilość prostych, na niéj leżących, byłaby nieskończoną.

ĆWICZENIA.

(185). Dowiéść, że płaszczyzna styczna do powierzchni $xyz = a^3$ tworzy z płaszczyznami spółrzędnych czworościan o objętości stałéj.

(186). Znaléść równanie płaszczyzny stycznéj w jakimkolwiek punkcie powierzchni $xyz + 2abc = bcx + cay + abz$, oraz stożka stycznego w punkcie (a, b, c).

(187). Okazać, że płaszczyzna styczna do powierzchni $a(yz + zx + xy) = xyz$ w punkcie przekroju téj powierzchni z kulą, mającą środek w początku spółrzędnych, wyznacza na osiach odcinki, których suma jest stała.

(188). Punkty na powierzchni stopnia 2-go, w których normalne przecinają normalną, do téj powierzchni poprowadzoną, w punkcie stałym, leżą na stożku stopnia 2-go, mającym wiérzchołek w punkcie stałym.

(189). Znaléść punkty na pierścieniu kołowym, w których normalne czynią kąty α, β, γ z osiami, oraz miejsca punktów, dla których γ jest stałe, i punktów, dla których $\alpha = \beta$.

(190). Znaléść równanie powierzchni stopnia 2-go, na któréj leżą wszystkie punkty styczności płaszczyzn przechodzących przez punkt zewnętrzny (α, β, γ), a. stycznych do powierzchni $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c^3$, i b. stycznych do powierzchni $xyz = a^3$, a następnie zbadać własności tych powierzchni przy rozmaitych położeniach punktu (α, β, γ).

(191). Znaléść miejsce spodka prostopadłéj z początku na płaszczyznę styczną do $by^2 + cz^2 = x$.

(192). Okazać, że 27 prostych na ogólnéj powierzchni rzędu 3-go przecinają się w 135 różnych punktach.

(193). Zastosować piérwszy ze sposobów podanych w art. 152 do wyznaczenia płaszczyzn stycznych osobliwych do powierzchni falowéj.

(194). Z rozmaitych punktów prostéj $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $z = 0$ wyprowadźmy proste asymptotyczne do hiperbolojdy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; okazać, że te proste leżą wszystkie na płaszczyznach $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}\sqrt{2}$.

(195). Okazać, że płaszczyzny asymptotyczne do powierzchni

$$z(x^2 + y^2) - ax^2 - by^2 = 0$$

są równoległe do płaszczyzny XY.

(196). Zbadać własności szczególne powierzchni

$$(z^2 + 2x^2 + 2y^2)^2 - (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 1)^2 = 0.$$

WSKAZÓWKI DO ĆWICZEŃ.

(1). $x = y = z = \pm a$.

(3). $\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\cos\beta}{2} = \frac{\cos\gamma}{3} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

(4). $\frac{\pi}{2}$.

(5). *a)* $\frac{b}{2}, \frac{c}{2}; \frac{c}{2}, \frac{a}{2}; \frac{a}{2}, \frac{b}{2}$; *b)* $\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}$; *c)* $\frac{1}{3}\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 4b^2 + c^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}$.

(6). Mamy $ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$, $ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$; stąd $\frac{l}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{m}{n_2 l_1 - n_1 l_2} = \frac{n}{l_1 m_2 - l_2 m_1} = \frac{1}{\pm \sin\theta}$, gdzie θ kąt między danymi prostymi.

(7). Jeżeli α jest kątem między promieniem i płaszczyzną YZ, a więc $90 - \alpha$ kątem między promieniem i osią x-ów, to $\cos^2(90 - \alpha) + \cos^2(90 - \alpha - 45) + \cos^2(90 - \alpha - 90) = 1$, skąd $\cos^2(45 - \alpha) = 0$; a zatym i t. d.

(9). Rugując n z dwu równań, otrzymamy $vl^2 + 2w'lm + um^2 = 0$, gdzie $v = a\gamma^2 - 2b'\gamma\alpha + c\alpha^2$, $w' = c'\gamma^2 - (a'\alpha + b'\beta)\gamma + c\alpha\beta$, $u = c\beta^2 - 2a'\beta\gamma + b\gamma^2$. Ponieważ (l_1, m_1, n_1) i (l_2, m_2, n_2) są dostawami kierunkowymi dwu promieni, przeto z powyższego wynika, iż $\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} = \frac{u}{v}, \ldots$, a więc

$$\frac{l_1 l_2}{u} = \frac{m_1 m_2}{v} = \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{-2w'} = \left\{\frac{(l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 - 4 l_1 l_2 m_1 m_2}{4(w'^2 - uv)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Łatwo spostrzéc, że $w'^2 - uv = \gamma^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2A'\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2C'\alpha\beta)$, gdzie $A, B, C, A', \ldots$ są ilościami dołączonymi do elementów $a, b, c, a', \ldots$ wyznacznika $\begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix}$. Odpowiednio mieć będziemy

$$\frac{l_1 l_2}{u} = \frac{m_1 m_2}{v} = \frac{n_1 n_2}{w} = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{2\alpha P} = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{2\beta P} = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{2\gamma P},$$

gdzie $P^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + \ldots$. Stąd wypada dla kąta θ między danymi promieniami

$$\frac{\cos\theta}{u + v + w} = \frac{\sin\theta}{2P\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

(12). Niech OP i OQ będą dwoma promieniami, których dostawy kierunkowe są (l, m, n) i $(l' m', n')$. Weźmy $OP = OQ = r$, połączmy PQ i niech R będzie środkiem prostej PQ; wtedy OR będzie jedną z dwusiecznych. Przedłużmy QO do Q', aby $OQ' = r$; połączmy P i Q' i tę prostą podzielmy w R' na połowy; wtedy OR' będzie drugą dwusieczną. Jeżeli $\angle POQ = 2\theta$, to, rzucając OP, OQ i OR na oś x-ów, otrzymamy $2rl_1\cos\theta = rl + rl'$, gdyż rzut OR jest średnią arytmetyczną rzutów OP i OQ. Podobnie rzucając OP, OQ' i OR na oś x otrzymamy, $2rl_2\sin\theta = = lr + r(-l')$; a zatym $l_1 = \frac{l+l'}{2\cos\theta}, \ldots,\ l_2 = \frac{l-l'}{2\sin\theta}, \ldots.$

(13). $= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

(14). $x = 1,\ y = \sqrt{3},\ z = 2\sqrt{3}$.

(15). a. $x + y + z = \frac{a(bc-a^2) + b(ca-b^2) + c(ab-c^2)}{(bc-a^2) + (ca-b^2) + (ab-c^2)}$; b. $(2a-b-c)x + + (2b-c-a)y + (2c-a-b)z = bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2$; inne dwa otrzymamy, uskuteczniając podstawienia kołowe na a, b, c, t. j. pisząc b, c, a lub c, a, b odpowiednio za a, b, c.

(16). $(2a-b-c)x + (2b-c-a)y + (2c-a-b)z = 2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

(17). Płaszczyzna $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$. Ta płaszczyzna jest prostopadła do prostéj, łączącéj dane punkty, albowiém dostawy kierunkowe jéj normalnéj są proporcyjonalne do $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$; nadto ona widocznie dzieli odcinek między danymi punktami na części równe.

(18). Jeżeli $l_1x + m_1y + n_1z - p_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2z - p_2 = 0$, $l_3x + m_3y - n_3z - p_3 = 0$ są równaniami normalnymi trzech danych płaszczyzn, to $(l_2 + \lambda l_3)x + (m_2 + \lambda m_3)y + (n_2 + \lambda n_3) = p_2 + \lambda p_3$ jest równaniem płaszczyzny przechodzącéj przez prostą przecięcia się płaszczyzn E_2 i E_3. Ta płaszczyzna jest prostopadła do E_1, jeżeli $(l_2 + \lambda l_3)l_1 + (m_2 + \lambda m_3)m_1 + (n_2 + \lambda n_3)n_1 = 0$, t. j. $\cos\theta_3 + \lambda\cos\theta_2 = 0$; a zatym $(l_2\cos\theta_2 - l_3\cos\theta_3)x + (m_2\cos\theta_2 - m_3\cos\theta_3)y + + (n_2\cos\theta_2 - n_3\cos\theta_3) = p_2\cos\theta_2 - p_3\cos\theta_3$ jest jéj równaniem. Taksamo znajdziemy równania dwu pozostałych płaszczyzn, i widocznie wszystkie te trzy płaszczyzny będą przechodziły przez początek i przetną się w jednéj prostéj, jeżeli $p_1\cos\theta_1 = p_2\cos\theta_2 = p_3\cos\theta_3$.

(19). Płaszczyzna $Ax + By + Cz + D = 0$ przechodzi przez dwa dane punkty; zatym $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ i $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, skąd $A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0$. Ta płaszczyzna odmierza na osiach odcinki, których suma $= 0$, zatym $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0$. Te dwa równania dają dwa układy wartości na $A : B : C$. Oznaczywszy je odpowiednio przez $A_1 : B_1 : C_1$ i $A_2 : B_2 : C_2$, otrzymamy z tych równań (rugując z nich raz C, a drugi raz A): $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $\frac{C_1C_2}{B_1B_2} = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}$. Te dwie zatym płaszczyzny będą do siebie prostopadłe, jeżeli $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ lub $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} + 1 + \frac{C_1C_2}{B_1B_2} = 0$, t. j. $\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - y_2} + \frac{1}{z_1 - z_2} = 0$.

(20). Równanie płaszczyzny E_1, prostopadłéj do boku P_2P_3 trójkąta $P_1P_2P_3$

i dzielącéj ten bok na części równe, jest (ćw. 17) $E_1 \equiv 2(x_2 - x_3)x + 2(y_2 - y_3)y + 2(z_2 - z_3)z + (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$, a zatym $E_1 + E_2 + E_3 = 0$.

(21). Znajdziemy równania tych płaszczyzn, jak w zadaniu 20; okaże się, iż $E_{12} + E_{23} + E_{34} + E_{41} \equiv 0$.

(22). Albowiém płaszczyzna E_{13}, odnosząca się do krawędzi P_1P_3, przechodzi przez punkt wzmiankowany w ćwiczeniu 21, przecinając się z płaszczyznami E_{12} i E_{23} według jednéj prostéj (ćw. 20). Przez ten sam punkt przechodzi także płaszczyzna E_{24}, przecinając się z płaszczyznami E_{41} i E_{12} według jednéj prostéj.

(24). Jeżeli $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$ są równaniami cztérech wiérzchołków, to $P_1 + P_2 = 0$, $P_3 + P_4 = 0$; $P_1 + P_3 = 0$, $P_2 + P_4 = 0$; $P_1 + P_4 = 0$, $P_2 + P_3 = 0$ będą równaniami środków trzech par krawędzi przeciwległych. Proste, łączące te trzy pary środków, przecinają się w punkcie $0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

(25). Skoro $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \equiv P_1 + (P_2 + P_3 + P_4) \equiv P_2 + (P_3 + P_4 + P_1) \equiv P_3 + (P_4 + P_1 + P_2) \equiv P_4 + (P_1 + P_2 + P_3)$, więc $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$ jest równaniem żądanego punktu.

(26). $A\cos\varphi\sin\theta + B\sin\varphi\sin\theta + C\cos\theta + \frac{D}{r} = 0$.

(27). Równania normalne trzech płaszczyzn są $lx + my + nz - p = 0$, $mx + ny + lz - p = 0$, $nx + ly + mz - p = 0$; zatym $x = y = z = \frac{p}{l + m + n}$.

(28). Niech $y = mx + r$, $z = nx + s$ będą równaniami żądanéj prostéj. Ta prosta ma przechodzić przez punkt (1, 2, 3), więc $2 = m + r$, $3 = n + s$; mamy zatym $y - 2 = m(x - 1)$, $z - 3 = n(x - 1)$; a że ta prosta przechodzi także przez punkt (3, 2, 1), więc $2 - 2 = m(3 - 1)$, $1 - 3 = n(3 - 1)$, skąd $m = 0$, $n = -1$. Równania zatym żądanéj prostéj są $y - 2 = 0$, $z - 3 = -(x - 1)$, czyli $x + z = 2$, $y = 2$.

(29). $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}$.

(30). $x + 2y = 5$, $z = 3$.

(31). Jeżeli $\lambda = \angle YOZ$, $\mu = \angle ZOX$, $\nu = \angle XOY$, to

$$\frac{l + m\cos\nu + n\cos\mu}{A} = \frac{l\cos\nu + m + n\cos\lambda}{B} = \frac{l\cos\mu + m\cos\lambda + n}{C}.$$

(32). Jeżeli (l, m, n), (l', m', n') i (λ, μ, ν) są dostawami kierunkowymi dwu danych prostych i prostéj żądanéj, to $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$ i $l'\lambda + m'\mu + n'\nu = \cos\alpha$. Ostatnie równanie można tak pisać: $(l'\lambda + m'\mu + n'\nu)^2 - \cos^2\alpha(l^2 + m^2 + n^2)$. To równanie i $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$ dają dwa układy wartości na $\lambda : \mu : \nu$. Jeżeli $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, i $ll' + mm' + nn' = 0$, to znajdziemy, że i $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$.

(33). $\frac{\pi}{2}$.

(34). Jeżeli c jest długością krawędzi sześcianu, to najkrótsza odległość $= \frac{c}{\sqrt{2}}$.

(35). Należy wziąć odległość najkrótszą między prostymi za oś z-ów, środek téj odległości za początek spółrzędnych, a płaszczyznę ZOX tak obrać, aby ona była dwusieczną kąta między dwiema prostymi.

(36). $(y - Mx - R) + \lambda(z - Nx - S) = 0$, lub $(y - M'x - R') + \lambda(z - N'x - S') = 0$, gdzie $M - M' + \lambda(N - N') = 0$.

(37). Równania prostéj, przechodzącéj przez (b, c, a) i (c, a, b), są $\frac{x-b}{b-c} = \frac{y-c}{c-a} = \frac{z-a}{a-b}$; równania zaś prostéj, przechodzącéj przez początek i przez punkt $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, są $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$. Mamy $(b+c)(b-c) + (c+a)(c-a) + (a+b)(a-b) = 0$, a zatym i t. d.

(38). Kładąc $mn - l^2 = l'$, $nl - m^2 = m'$, $lm - n^2 = n'$, mieć będziemy równania żądanéj prostéj: $\frac{x}{ln' - mm'} = \frac{y}{ml' - nn'} = \frac{z}{nm' - ll'}$, a spółrzędne punktu, przecięcia się: $x = \frac{a(ln' - mm')}{l'^2 + m'^2 + n'^2}$, $y = \frac{a(ml' - nn')}{l'^2 + m'^2 + n'^2}$, $z = \frac{a(nm' - ll')}{l'^2 + m'^2 + n'^2}$.

(39). Podług ćwiczenia 10.

(41). $(bc' - b'c)x + (ca' - c'a)y + (ab' - a'b)z = 0$.

(45). Równania dane można zastąpić następującymi: $(a-\lambda)x + c'y + b'z = 0$, $c'x + (b-\lambda)y + a'z = 0$, $b'x + a'y + (c-\lambda)z = 0$, skąd wypada

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & c', & b' \\ c', & b-\lambda, & a' \\ b', & c', & c-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ i t. d.}$$

(46). $x_3 - x_4 = 0$ jest równaniem dwusiecznéj kąta wewnętrznego, $x_3 + x_4 = 0$ dwusiecznéj kąta zewnętrznego.

(47). $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$.

(49). Gdyż spółrzędne tych punktów są odpowiednio $\left(\frac{2h_1}{3}, \frac{h_2}{3}, 0, 0\right)$ i $\left(0, 0, \frac{2h_3}{3}, \frac{h_4}{3}\right)$.

(51). Jeżeli $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 0$ jest równaniem płaszczyzny danéj, to równania sześciu płaszczyzn mają postać $\varkappa_i x_i - \varkappa_k x_k = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4)$.

(52). Bo, jeżeli x'_1, x'_2, x'_3 x'_4 są spółrzędnymi punktu A'_1, to $h_1 + x'_1 = 2x_1$, $x'_2 = 2x_2$, $x'_3 = 2x_3$, $x'_4 = 2x_4$.

(54). Ponieważ np. równania krawędzi A_1A_2 i A_3A_4 są odpowiednio $x_3 = x_4 = 0$ i $x_1 = x_2 = 0$, przeto można, jako wartości $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, (art. 47) wziąć odpowiednio $(1, -1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1, -1)$. Oznaczając przez θ kąt między tymi krawędziami, mamy $\pm 2\rho_{12}\rho_{34}\cos\theta = \rho_{13}{}^2 + \rho_{24}{}^2 - (\rho_{23}{}^2 + \rho_{14}{}^2), \ldots$. Każde dwie krawędzi przeciwległe będą do siebie prostopadłe, gdy $\rho_{12}{}^2 + \rho_{34}{}^2 = \rho_{13}{}^2 + \rho_{24}{}^2 = \rho_{23}{}^2 + \rho_{14}{}^2$; i t. d.

(55). Gdyż równanie téj płaszczyzny jest $-\frac{2x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_4} + \frac{x_4}{h_4} = 0$.

(60). Dostawy kierunkowe nowych osi są

$$\frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{1}=\frac{n_1}{1}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{l_2}{1}=\frac{m_2}{-2}=\frac{n_2}{1}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{l_3}{1}=\frac{m_3}{0}=\frac{n_3}{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ponieważ $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,\ldots$, więc nowe osi są do siebie prostopadłe; spółrzędne punktu względem nowych osi są $(2\sqrt{3},\ 0,\ -\sqrt{2})$.

(61). Podstawiając $\frac{x\sqrt{2}+y+z\sqrt{3}}{6}$, $\frac{x\sqrt{2}-2y}{\sqrt{6}}$, $\frac{x\sqrt{2}+y-z\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ odpowiednio za x, y, z, znajdziemy $4x^2+y^2+z^2=2a^2$.

(65). $r^2+r(\mathrm{A}\sin\theta\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\theta\sin\varphi+\mathrm{C}\cos\theta)+\mathrm{D}=0$. To równanie daje dwie wartości na r, których iloczyn jest równy D.

(66). Jeżeli miejscem punktu P jest

$$r^2+r(\mathrm{A}\sin\theta\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\theta\sin\varphi+\mathrm{C}\cos\theta)+\mathrm{D}=0,$$

natenczas, ponieważ $\mathrm{OQ}=\rho=\frac{k^2}{r}$, miejscem punktu Q będzie druga kula

$$\rho^2+\rho k^2\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\cos\theta\right)+\frac{k^4}{\mathrm{D}}=0.$$

(67). Biorąc A za początek, a AB$(=a)$ za oś x-ów, jako równanie miejsca mieć będziemy $x^2+y^2+z^2=m^2[(x-a)^2+y^2+z^2]$, t. j. pewną kulę.

(68). Jeżeli $\mathrm{K}=0$ i $\mathrm{K}'=0$ są równaniami dwu kul, to równanie $\mathrm{K}-\mathrm{K}'=0$ będzie równaniem płaszczyzny koła, według którego te kule przecinają się, prostopadłéj do prostéj, łączącéj środki obu kul.

(69) Jeżeli $\mathrm{K}_1=0$, $\mathrm{K}_2=0$, $\mathrm{K}_3=0$ są równaniami trzech kul danych, to $(\mathrm{K}_1-\mathrm{K}_2)+(\mathrm{K}_2-\mathrm{K}_3)+(\mathrm{K}_3-\mathrm{K}_1)\equiv 0$, skąd owo twierdzenie wynika.

(70). Wynika to z poprzedniego.

(71). Równania tworzącéj są (α) $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$, równania zaś kierownicy (β) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$; piérwsze z tych równań przedstawia walec prostopadły do XY o podstawie eliptycznéj. W przypadku drugim (β') $y^2=2px$, $z=c$; wtedy równanie piérwsze przedstawia walec prostopadły do XY o podstawie parabolicznéj. Rugowanie x, y, z z (α) i (β) daje (γ) $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$, a z (α) i (β') daje (γ') $cm^2=2pnl$. Wstawiając w (γ) i w (γ') za l, m, n wartości do nich proporcyjonalne x, y, z, otrzymujemy równania żądanych stożków: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ i $cy^2=2pzx$.

(72). Biorąc środek danéj kuli, mającéj promień $=a$, za początek, a punkt $(0, 0, a)$ za wiérzchołek, i przyjmując, że $lx+my+nz=p$ jest równaniem płaszczyzny koła małego, mieć będziemy równania tworzącéj (α) $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z-a}{\nu}$, a równania kierownicy (β) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $lx+my+nz=p$. Rugowanie x, y, z z (α) i (β) daje $2a\nu(l\lambda+m\mu+n\nu)=(p-na)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)$. A zatym

$(p-na)(x^2+y^2)+2a(z-a)(lx+my)-(p+na)(z-a)^2=0$ jest równaniem żądanego stożka. Przyjąwszy $z=0$, otrzymamy równanie koła.

(73). Wziąwszy oś obrotu za oś x-ów, a prostopadłą do niéj przez środek koła przechodzącą za oś z-ów, miéć będziemy równania koła tworzącego (α) $x^2+(z-c)^2=a^2$, $y=0$, a równania koła równoleżnikowego (β) $y^2+z^2=r^2$, $x=p$. Rugowanie x, y, z z (α) i (β) daje $p^2+(r-c)^2=a^2$. Podstawiając w tym równaniu za r^2 i p wartości (β) i znosząc niewymierność, otrzymamy $(x^2+y^2+z^2+c^2-a^2)^2-4c^2(y^2+z^2)=0$.

(74). Weźmy oś obrotu za oś z-ów, a najkrótszą odległość ($=a$) między tą osią a prostą ruchomą w jéj położeniu początkowym za oś x-ów; wtedy równania prostéj ruchoméj będą (α) $z=my$, $x=a$, a równania koła równoleżnikowego (β) $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=p$. Rugowanie x, y, z z (α) i (β) daje $a^2m^2+p^2(1+m^2)=r^2$. Wstawiając w tym związku za p i r wartości (β), otrzymujemy równanie żądanego miejsca $\frac{x^2+y^2}{a^2m^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$. Okazać, że ta powierzchnia jest hiperbolojdą obrotową o jednéj powłoce, t. j. powierzchnią, która powstaje przez obrót hiperboli $\frac{x^2}{a^2m^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$, $y=0$ około osi urojonéj.

(75). Jeżeli płaszczyznę stałą weźmiemy za płaszczyznę YZ i oznaczymy przez l, m, n dostawy kierunkowe prostéj AB, to równaniem powierzchni będzie $(mz-ny)^2+(nx-lz)^2+(ly-mx)^2=\varkappa^2(y^2+z^2)$.

(76). Ponieważ równania elipsy-kierownicy są $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=a$ (jako przecięcia walca prostopadłego do płaszczyzny YZ o podstawie eliptycznéj z płaszczyzną do osi x-ów prostopadłą), a równania prostéj tworzącéj (jako przecinającéj oś z-ów i równoległéj do płaszczyzny XY) są $y=mx$, $z=h$, przeto równanie żądanéj powierzchni jest $b^2x^2z^2-b^2c^2x^2+a^2c^2y^2=0$.

(77). Jeżeli p_{ij} są spółrzędnymi prostéj tworzącéj, to (art. 37) $p_{12}\overset{(i)}{p}_{34}+p_{23}\overset{(i)}{p}_{14}+$ $+p_{31}\overset{(i)}{p}_{24}+p_{14}\overset{(i)}{p}_{23}+p_{24}\overset{(i)}{p}_{31}+p_{34}\overset{(i)}{p}_{12}=0$, $i=1, 2, 3$. Rugowanie p_{ij} z tych trzech równań i równań trzech płaszczyzn, rzucających prostą p_{ij} na trzy płaszczyzny spółrzędnych: $p_{34}y-p_{24}z+p_{23}=0$, $p_{14}z-p_{34}x+p_{31}=0$, $p_{24}x-p_{14}y+p_{12}=0$, da nam równanie stopnia 2-go żądanéj powierzchni.

(78). Wziąwszy stałą prostą za oś z-ów, a punkt, w którym ta prosta przecina stałą płaszczyznę za początek spółrzędnych, znajdziemy, że równanie miejsca jest kształtu $(Ax+By+Cz)^2=D^2(x^2+y^2)$.

(80). $ax^2+by^2+(a+b)z^2=3$.

(81). $(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)+(z-\gamma)(z'-\gamma)=\rho^2$ jest równaniem płaszczyzny biegunowéj.

(82). Spółrzędne punktu bieżącego na prostéj danéj są $x=a+lr$, $y=b+mr$, $z=c+nr$. Płaszczyzna biegunowa tego punktu przechodzi przez prostą przecięcia się dwu płaszczyzn

$$xf_1(a, b, c, 1)+yf_2(a, b, c, 1)+zf_3(a, b, c, 1)+f_4(a, b, c, 1)=0 \quad \text{i}$$
$$xf_1(l, m, n, 1)+yf_2(l, m, n, 1)+zf_3(l, m, n, 1)+f_4(l, m, n, 1)=0.$$

(83). $x=1,\ y=2,\ z=3.$

(86). Odpowiednie równanie wyróżnikowe, ponieważ $\lambda=\mu=\nu=90^0$, sprowadza się do $S^3-34S^2-72S=0$, a zatym $S_1=0,\ S_2=36,\ S_3=-2$. Mamy więc: $32l_1-8m_1-8n_1=0,\ -8l_1+\ m_1+3n_1=0$, skąd $\frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{2}=\frac{n_1}{2}=\frac{1}{3}$,

$$l_2+2m_2+2n_2=0,\ -8l_2-35m_2+3n_2=0,\ \text{skąd}\ \frac{l_2}{4}=\frac{m_2}{-1}=\frac{n_2}{-1}=\frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$17l_3-4m_3-4n_3=0,\ -8l_3+\ 3m_3+3n_3=0,\ \text{skąd}\ \frac{l_3}{0}=\frac{m_3}{1}=\frac{n_3}{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

(88). Jeżeli $l,\ m,\ n$ są dostawami kierunkowymi któregokolwiek z tych układów, to $al+c'm+b'n=\mathrm{S}\mathrm{A}l,\ c'l+bm+a'n=\mathrm{SB}m,\ b'l+a'm+cn=\mathrm{SC}n$, skąd na wyznaczenie S otrzymujemy równanie stopnia 3-go, które tak pisać można:

$$1=\frac{b'c'}{aa'-b'c'-\mathrm{SA}a'}+\frac{c'a'}{bb'-c'a'-\mathrm{SB}b'}+\frac{a'b'}{cc'-a'b'-\mathrm{SC}c'}.$$

(91). 1. Hiperbolojda jednopowłokowa. 2. Hiperbolojda obrotowa; mimośród hiperboli tworzącéj $=\sqrt{\frac{3}{2}}$. 3. Hiperbolojda jednopowłokowa; osi są $\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \sqrt{6}+\sqrt{2},\ 1$, a dostawy kierunkowe osi są proporcyjonalne do $(1,\ \pm\sqrt{3}-2,\ 1),\ (1,\ 0,\ -1)$. 4. Walec hiperboliczny. 5. Hiperbolojda jednopowłokowa; środek $\left(\frac{6}{5},\ \frac{6}{5},\ -\frac{26}{5}\right)$. 6. Stożek; dostawy kierunkowe osi są $\left(0,\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. 7. Elipsojda, punkt, lub elipsojda urojona, stosownie do tego, czy $d<,=,>55$. 8. Walec hiperboliczny.

(92). Dla $a_{11}=1$ jest $\mathrm{A}_{41}=\mathrm{A}_{42}=\mathrm{A}_{43}=\mathrm{A}_{44}=0$.

(94). Elipsojdę, jeżeli $1-\mu<\sqrt{2}$; hiperbolojdę jednopowłokową, jeżeli $1-\mu>\sqrt{2}$; walec eliptyczny, jeżeli $1-\mu=\sqrt{2}$.

(95). Elipsojdę, któréj środek $\left(\frac{3a}{4},\ \frac{3b}{4},\ \frac{3c}{4}\right)$; kładąc $z=0$, otrzymamy $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2\right)^2+\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=0$, skąd wniesiemy, że $(a,\ b,\ 0)$ jest punktem styczności płaszczyzny XY.

(103). Weźmy te trzy płaszczyzny odpowiednio za płaszczyzny YZ, ZX i XY. Oznaczmy przez $(l,\ m,\ n)$ kierunek prostéj w pewnym położeniu, a przez $(x,\ y,\ z)$ spółrzędne punktu P i nazwijmy $\mathrm{PP}_1=r_1,\ \mathrm{PP}_2=r_2,\ \mathrm{PP}_3=r_3$; wtedy $x+lr_1=0$, $y+mr_2=0,\ z+nr_3=0$; a że $l^2+m^2+n^2=1$, więc $\frac{x^2}{{r_1}^2}+\frac{y^2}{{r_2}^2}+\frac{z^2}{{r_3}^2}=1$.

(104). Biorąc daną prostą za oś z-ów, a punkt, w którym ona przecina daną płaszczyznę, za początek spółrzędnych prostokątnych, i oznaczając przez $(l,\ m,\ n)$ kierunek danéj płaszczyzny, znajdziemy $(1-l^2)x^2+(1-m^2)y^2-n^2z^2-2mnyz-$ $-2nlzx-2lmxy=0$ (stożek).

(105). Jeżeli $\frac{\mathrm{X}-x}{l_i}=\frac{\mathrm{Y}-y}{m_i}=\frac{\mathrm{Z}-z}{n_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ są równaniami danych prostych, to natenczas $(ax^2+by^2-1)n_i^2+z^2(al_i^2+bm_i^2)-2an_il_izx-2bm_in_iyz=0$. Dodawszy do siebie te trzy równania, otrzymamy $ax^2+by^2+(a+b)z^2=1$, jako równanie miejsca.

(107). Jeżeli (α, β, γ) są spółrzędnymi wiérzchołka, to równaniem stożka będzie

$$\frac{\gamma^2}{a^2}x^2+\frac{\gamma^2}{b^2}y^2+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)z^2-\frac{2\alpha\gamma}{a^2}zx-\frac{2\beta\gamma}{b^2}yz+2\gamma z-\gamma^2=0.$$

Lewa strona winna być tożsamościowo równa

$$\gamma^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+z(lz+my+nz-p).$$

Stąd znajdziemy, że prosta, według któréj płaszczyznę XY przecina płaszczyzna $lx+my+nz-p=0$ drugiéj krzywéj płaskiéj (według któréj stożek przecina elipsojdę $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$), jest istotnie biegunową punktu $(\alpha, \beta, 0)$ względem $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0\right)$.

(108). Albowiém mamy $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1$, $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1$, $\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$, tudzież (art. 81) $\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}=\frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_1}{c^2}=$ $=\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=0$, skąd widoczna, że $\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \frac{z_1}{c}\right)$, $\left(\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}\right)$, $\left(\frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}\right)$ są dostawami kierunkowymi trzech prostych do siebie prostopadłych.

(109). Mamy (używając znakowania poprzedzającego rozdziału) $(lx_1+my_1+nz_1)^2+\ldots=l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2$ i $r_1^2-(lx_1+my_1+nz_1)^2+\ldots=$ $=r_1^2+r_2^2+r_3^2-(l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2)$, gdzie (l, m, n) wyznaczają kierunek odpowiednio prostéj lub płaszczyzny rzutu.

(110). Albowiém spółrzędne punktów P_1, P_2, P_3 czynią zadość temu równaniu.

(112). Niech $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ będzie równaniem elipsojdy, a $y=x\operatorname{tg}\theta$ równaniem płaszczyzny, przez oś z-ów przechodzącéj. Obrawszy ślad téj płaszczyzny na XY za nową oś x-ów, otrzymamy równanie przekroju elipsojdy tą płaszczyzną, odniesione do nowych osi, gdy w równaniu elipsojdy podstawimy $x=x'\cos\theta$, $y=x'\sin\theta$, $z=z'$. Tym zatym równaniem będzie $\frac{x'^2}{A^2}+\frac{z'^2}{C^2}=1$, gdzie $A^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$, $C^2=c^2$. Odległość ogniska tego przekroju od środka $=\sqrt{A^2-C^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\left\{1-\frac{c^2a(^2\sin^2\theta+b^2\cos\theta)}{a^2b^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$, a więc odległość kierownicy $=\frac{A^2}{\sqrt{A^2-C^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\left\{1-\frac{c^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}{a^2b^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$.

Oznaczając przez ξ i η spółrzędne spodka téj kierownicy na XY względem pierwotnych osi, mamy wtedy

$$\frac{\xi}{\cos\theta}=\frac{\eta}{\sin\theta}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\left\{1-\frac{c^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}{a^2b^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}=r$$

(gdyż $\xi^2+\eta^2=r^2$); a zatym i t. d.

(113). Niech $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}(=r)$ będą równaniami tworzącéj. Równanie $a(\alpha+lr)^2+b(\beta+mr)^2+c(\gamma+nr)^2=1$ da na r dwie wartości równe. A zatym $(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)(al^2+bm^2+cn^2)-(a\alpha l+b\beta m+c\gamma n)^2=0$. Równanie więc stożka stycznego jest

$$(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)[a(x-\alpha)^2+b(y-\beta)^2+c(z-\gamma^2]-[a\alpha(x-\alpha)+b\beta(y-\beta)+ \\ +c\gamma(z-\gamma)]^2=0.$$

Pisząc odpowiednio u, v, v_0 za $ax^2+by^2+cz^2-1$, $a\alpha x+b\beta y+c\gamma z-1$, $a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1$, przedstawimy ostatnie równanie w postaci $v_0(u-2v+u_0)=$ $=(v-u_0)^2$, a więc daje się ono przywiéść do $v_0u-v^2\equiv(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2-1)$ $(ax^2+by^2+cz^2-1)-(a\alpha x+b\beta y+c\gamma z-1)^2=0$ (por. art. 77).

(114). Zakładając, że w równaniu stożka stycznego (113) punkt (α, β, γ) oddala się do nieskończoności w kierunku (λ, μ, ν), a więc kładąc $\alpha=\lambda\rho$, $b=\mu\rho$, $\gamma=\nu\rho$, a następnie dzieląc przez ρ^2, i potym przyjmując $\rho=\infty$, otrzymamy równanie walca stycznego

$$(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2)(ax^2+by^2+cz^2-1)-(a\lambda x+b\mu y+c\nu z)^2=0.$$

(115). Z równania płaszczyzny stycznéj $bYy+cZz=x+X$ wypada $\frac{l}{-1}=\frac{m}{by}=\frac{n}{cz}=\frac{p}{x}$, skąd $p=-\frac{1}{2l}\left(\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)$. Płaszczyzny styczne do trzech danych powierzchni są: $lx+my+nz=-\frac{1}{2nc_1^2}(a_1^2l^2+b_1^2m^2)$, $lx+my+$ $+nz=-\frac{1}{2nc_2^2}(a_2^2l^2+b_2^2m^2)$, $lx+my+nz=-\frac{1}{2nc_3^2}(a_3^2l+b_3^2m^2)$. Ma być $\frac{a_1^2l^2+b_1^2m^2}{c_1^2}=\frac{a_2^2l^2+b_2^2m^2}{c_2^2}=\frac{a_3^2l_3^2+b_3^2m_3^2}{c_3^2}(=k)$. Rugowanie l^2, m^2, k^2 z tych trzech równań daje warunek żądany.

(116). Spółrzędne środka przekroju powierzchni $ax^2+by^2+cz^2=1$ płaszczyzną $lx+my+nz=p$ dają równania

$$\frac{ax}{l}=\frac{by}{m}=\frac{cz}{n}\left(=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{lx+my+nz}=\frac{lx+my+nz}{\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}}\right).$$ Stąd

$(ax^2+by^2+cz^2)\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)=p^2\left(=\frac{l^2}{\alpha}+\frac{m^2}{\beta}+\frac{n^2}{\gamma}\right)$; a że $l:m:n=ax:by:cz$, zatym mamy ostatecznie $(ax^2+by^2+cz^2)^2=\frac{a^2x^2}{\alpha}+\frac{b^2y^2}{\beta}+\frac{c^2z^2}{\gamma}$.

(117). Płaszczyzna $lx+my+nz=0$ jest styczną do stożka, jeżeli $a^2(b^2-c^2)l^2+b^2(a^2-c^2)m^2-c^2(a^2+b^2)n^2=0$. Ta płaszczyzna przetnie hiperbolojdę według hiperboli równobocznéj, jeżeli równanie (20) w art. 115 daje na r^2 dwie wartości, różniące się tylko znakiem, a więc także, jeżeli

$$a^2(b^2-c^2)l^2+b^2(a^2-c^2)m^2-c^2(a^2+b^2)n^2=0.$$

(118). Art. 102 i 115.

(119). Równania normalnéj do $ax^2+by^2+cz^2=1$ są

$$\frac{X-x}{ax}=\frac{Y-y}{by}=\frac{Z-z}{cz}(=\rho).$$

Jeżeli ta normalna przechodzi przez (α, β, γ), wtedy $\alpha=x(\rho a+1)$, $\beta=y(\rho b+1)$, $\gamma=z(\rho c+1)$; a zatym $\frac{a\alpha^2}{(\rho a+1)^2}+\frac{b\beta^2}{(\rho b+1)^2}+\frac{c\gamma^2}{(\rho c+1)^2}=1$. To równanie daje sześć wartości na ρ; istnieje więc — mówiąc wogólności — sześć normalnych.

(121). Z równań $al^2+bm^2+cn^2=0$, $lx+my+nz=0$ wypada $\frac{l_1l_2}{bz^2+cy^2}=\frac{m_1m_2}{cx^2+az^2}=\frac{n_1n_2}{ay^2+bx^2}$; a że $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$, więc $(bz^2+cy^2)+$ $+(cx^2+az^2)+(ay^2+bx^2)=0$, czyli $(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=0$.

(126). Dodać do siebie trzy wyrażenia $-(lx_1+my_1+nz_1)^2+\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)$, $-(lx_2+my_2+nz_2)^2+\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)$, $-(lx_3+my_3+nz_3)^2+\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)$, uwzględniając przytym związki podane w ćw. 108.

(127). Dostawy kierunkowe tworzących są dane przez równania

$$\frac{l\alpha}{a^2}+\frac{m\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}=0 \text{ i } \frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0,$$

z których, po wyrugowaniu m, wypada

$$\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)-\frac{2\alpha\gamma ln}{a^2c^2}+\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{a^2}\right)=0.$$

A zatym

$$\frac{l_1l_2}{n_1n_2}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{a^2}\right):\frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=\frac{\alpha^2-a^2}{\gamma^2+c^2},$$

$$\frac{l_1}{n_1}+\frac{l_2}{n_2}=\frac{2\alpha\gamma}{a^2c^2}:\frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=\frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2+c^2}.$$

Odpowiednio

$$\frac{l_1l_2}{\alpha^2-a^2}=\frac{m_1m_2}{\beta^2-b^2}=\frac{n_1n_2}{\gamma^2+c^2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{2\beta\gamma}=\frac{n_1l_2+n_2l_1}{2\gamma\alpha}=\frac{l_1m_2+l_2m_1}{2\alpha\beta},$$

a jeżeli θ jest kątem między tymi dwiema tworzącymi, to każdy z tych stosunków jest równy

$$\frac{\cos\theta}{(\alpha^2-a^2)+(\beta^2-b^2)+(\gamma^2-c^2)}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{4[\beta^2\gamma^2-(\beta^2-b^2)(\gamma^2+c^2)]+\ldots \text{wyrazy podobne}}}$$

skąd

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2+c^2}{2\sqrt{\gamma^2(a^2+b^2)+\beta^2(a^2-c^2)+\alpha^2(b^2-c^2)+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}}.$$

(128). W ćw. 127 przyjąć $\theta=\frac{\pi}{2}$, $b=a$; wskutek tego, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2= =2a^2-c^2$; a że $c^2(\alpha^2+\beta^2)-a^2\gamma^2=a^2c^2$, przeto $\gamma=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}$.

(129). Rzuty prostych QP i QP′ na płaszczyznę XY są styczne do elipsy szyjnéj w punktach końcowych dwu średnic sprzężonych. Suma więc kwadratów tych rzutów jest a^2+b^2. — Wyniesienie punktu Q nad XY jest równe c. Jakoż, jeżeli α, β, γ są spółrzędnymi punktu Q, to $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$, $\frac{l\alpha}{a^2}+\frac{m\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}=0$, skąd $\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)-2\frac{\alpha\beta}{a^2b^2}lm+\frac{m^2}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-1\right)=0$; a zatym $\frac{l_1l_2}{m_1m_2}=\frac{\alpha^2-a^2}{\beta^2-b^2}$. A że także $\frac{l_1l_2}{m_1m_2}=-\frac{a^2}{b^2}$, gdyż rzuty prostych QP i QP′ na XY są równoległe do dwu średnic sprzężonych elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, więc $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=2$. Że zaś $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1+\frac{\gamma^2}{c^2}$, przeto $\frac{\gamma^2}{c^2}=1$, t. j. $\gamma=c$. — Twierdzenie zatym Pitagorasa daje $QP^2+QP'^2=a^2+b^2+2c^2$.

(130). Równania jakichkolwiek płaszczyzn, przechodzących przez dwie tworzące, są $\frac{x}{a}-1+\varkappa\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=0$, $\frac{x}{a}+1+\varkappa'\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$. Prosta, według któréj te płaszczyzny przecinają się, będzie także tworzącą, jeżeli $\varkappa\varkappa'=-1$. Łatwo spostrzéc, że ślady tych płaszczyzn na płaszczyznach przekrojów kołowych,

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2+c^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2-b^2}=0,$$

są do siebie prostopadłe.

(131). Należy wziąć równanie ogólne i znaléść warunki, aby mu się stało zadość wskutek $x=z=0$ i wskutek $y=z=0$.

(135). Tworzące są równoległe do asymptot przekroju płaszczyzną $\frac{Xx}{a}+\frac{Yy}{b}+\frac{Zz}{c}=0$; kwadraty połów osi tego przekroju daje równanie $\frac{x^2}{a(a-r^2)}+\frac{y^2}{b(b-r^2)}+\frac{z^2}{c(c-r^2)}=0$. Jeżeli $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ są pierwiastkami tego równania, a 2θ kątem między asymptotami, to $\operatorname{tg}^2\theta=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; stąd $\cos 2\theta=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$.

(137). Podług art. 115 mamy $\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}\right)R^2=1$, a podług art. 113 $\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}\right)r^2=1-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}$; a że $\frac{\alpha}{a^2l}=\frac{\beta}{b^2m}=\frac{\gamma}{c^2n}=\frac{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}{l\alpha+m\beta+n\gamma}=$

$=\frac{l\alpha+m\beta+n\gamma}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$, skąd $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$, przeto $\left(\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}\right)r^2=1-\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$, a więc $r^2=R^2\left(1-\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}\right)$.

(138). Jeżeli przekrój jest parabolą, to prosta, łącząca środek przekroju z początkiem, jest równoległą do płaszczyzny przekroju.

(139). Dostawy kierunkowe normalnéj do płaszczyzny przekroju są $\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$, o, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$, a zatym, jeżeli (l, m, n), (l', m', n') są dostawami kierunkowymi dwu do siebie prostopadłych promieni r i r' przekroju, to $l^2+l'^2=1-\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}$, $m^2+m'^2=1$, $n^2+n'^2=1-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}$. Nadto $r^2=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2$, $r'^2=a^2l'^2+b^2m'^2+c^2n'^2$. Stąd

$$r^2+r'^2-\frac{a^4(b^2-c^2)+b^4(a^2-c^2)+c^4(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}.$$

(140). *a)* Jeżeli r jest długością promienia przekroju przez płaszczyznę $lx+my+nz=0$, a (λ, μ, ν) wyznaczają kierunek tego promienia, to $\frac{1}{r^2}=\frac{\mu\nu}{a^2}+\frac{\nu\lambda}{b^2}+\frac{\lambda\mu}{c^2}$ i $l\lambda+m\mu+n\nu=0$. A zatym przy wszelkich wartościach na λ, μ, ν, zgodnych z warunkiem $l\lambda+m\mu+n\nu=0$, $\frac{1}{r^2}=\varkappa$ (liczbie stałéj), a przeto $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\varkappa-\left(\frac{\mu\nu}{a^2}+\frac{\nu\lambda}{b^2}+\frac{\lambda\mu}{c^2}\right)=0$. Wyrażenie zatym $l\lambda+m\mu+n\nu$ jest czynnikiem lewéj strony téj tożsamości, t. j.

$$(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\varkappa-\left(\frac{\mu\nu}{a^2}+\frac{\nu\lambda}{b^2}+\frac{\lambda\mu}{c^2}\right)\equiv(l\lambda+m\mu+n\nu)\left(\frac{\varkappa}{l}\lambda+\frac{\varkappa}{m}\mu+\frac{\varkappa}{n}\nu\right).$$

Stąd $\varkappa\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)=-\frac{1}{a^2}$, $\varkappa\left(\frac{n}{l}+\frac{l}{n}\right)=-\frac{1}{b^2}$, $\varkappa\left(\frac{l}{m}+\frac{m}{l}\right)=-\frac{1}{c^2}$. Rugowanie l, m, n z tych trzech równań doprowadza do równania stopnia 3-go $6\varkappa^3-\varkappa\left(2+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)-\frac{1}{a^2b^2c^2}=0$, mającego jeden pierwiastek rzeczywisty. Temu zaś pierwiastkowi odpowiadające wartości za $l:m:n$ będą wyznaczone z dwu którychkolwiek z trzech przedostatnich równań i określą płaszczyznę przekroju kołowego. *b)* Jeżeli przekrój ma być hiperbolą równoramienną, to dla dwu kierunków do siebie prostopadłych winno być $\frac{1}{r}=0$. Należy przeto znaléść warunek, pod jakim dwa kierunki (λ, μ, ν), określone równaniami $\frac{\mu\nu}{a^2}+\frac{\nu\lambda}{b^2}+\frac{\lambda\mu}{c^2}=0$ i $l\lambda+m\mu+n\nu=0$, są do siebie prostopadłe.

(143). $6\alpha^2-12\gamma^2=1$, $\beta=0$; $4\alpha^2+12\beta^2=1$, $\gamma=0$.

(144). Ogniska przekrojów głównych parabolojd $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$, $\frac{y^2}{p'}+\frac{z^2}{q'}=2(x+h)$ schodzą się z sobą razem, jeżeli $p=p'-2h$, $q=q'-2h$.

Stąd wypada $p-q=p'-q'$, warunek, pod jakim schodzą się z sobą takie krzywe ogniskowe obu parabolojd.

(145). Jeżeli S jest punktem krzywéj ogniskowéj, przez który przechodzi płaszczyzna przekroju, to ta płaszczyzna przechodzi zarazem przez kierownicę odpowiadającą punktowi S. Niech PM, PN i PQ będą prostopadłymi spuszczonymi z punktu P przekroju odpowiednio na dwie płaszczyzny kierujące i na kierownicę. Mamy $SP^2=\varkappa.PM.PN$; a że dla wszelkich punktów P stosunki $PM:PQ$ i $PN:PQ$ są stałe, przeto $SP:PQ=$ stałéj. A zatym punkt S jest ogniskiem przekroju, a odpowiadająca mu kierownica jego kierownicą.

(146). Niech DQ, D'Q' będą tymi dwiema kierownicami, a S i S' odpowiednimi ogniskami, choćby nie leżącymi na płaszczyźnie przekroju. Ponieważ płaszczyzny kierujące, które wyznaczają kierownice, są do siebie równoległe, przeto spuściwszy z jakiegokolwiek punktu P przekroju prostopadłe PQ, PM, PN na kierownicę DQ i na dwie płaszczyzny ją wyznaczające, tudzież prostopadłe PQ', PM', PN' na kierownicę D'P' i na dwie płaszczyzny kierujące odpowiednie, mieć będziemy $SP^2=\varkappa.PM.PN$ i $S'P^2=\varkappa.PM'.PN'$. Atoli $PM:PQ=PM':PQ'$ i $PN:PQ=$ $=PN':PQ'$, skąd $PM.PN:PM'.PN'=PQ^2:PQ'^2$. Mamy zatym $SP:S'P=PQ:PQ'$, skąd $SP\pm S'P:PQ\pm PQ'=SP:PQ$. Atoli czyto suma $PQ+PQ'$, czytéż różnica $PQ-PQ'$ (według tego, czy punkt P leży, czytéż nie leży między kierownicami) jest stała, a stosunek $SP:PQ$ jest niezmienny dla każdego punktu P na przekroju. To wskazuje, że także $SP+S'P$ lub odpowiednio $SP-S'P$ posiada wartość stałą.

(149). Punkt dany leży na danéj powierzchni, a zatym

$$\frac{2x^2}{2k+1}+\frac{3y^2}{3k+1}+\frac{4z^2}{4k+1}=9$$

będą wtedy równaniami dwu spółogniskowych hiperbolojd, kiedy za k podstawimy pierwiastki równania $k^2+\frac{3}{4}k+\frac{29}{216}=0$.

(150). Równanie $(\varkappa-a^2)(\varkappa-b^2)(\varkappa-c^2)+\alpha^2(\varkappa-b^2)(\varkappa-c^2)+$ $+\gamma^2(\varkappa-a^2)(\varkappa-b^2)=0$ ma widocznie jeden pierwiastek $=b^2$, a ma jeszcze drugi $=b^2$, gdyż $\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}-\frac{\gamma^2}{b^2-c^2}=1$. Trzeci pierwiastek $=a^2+c^2-b^2-$ $-\alpha^2-\gamma^2$. Mamy $a^2-k=(b^2-c^2)+\alpha^2+\gamma^2=\frac{(a^2-c^2)\alpha^2}{a^2-b^2}$,

$b^2-k=(b^2-c^2)-(a^2-b^2)+\alpha^2+\gamma^2=\frac{(b^2-c^2)^2\alpha^2+(a^2-b^2)\gamma^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$,

$c^2-k=-(a^2-b^2)+\alpha^2+\gamma^2=\frac{(a^2-c^2)\gamma^2}{b^2-c^2}\cdot$ Podstawiwszy te wartości w $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1$, mieć będziemy żądane równanie.

(151). Jeżeli (a, b, c) (a', b', c') są połowami osi tych dwu spółogniskowych, a (l, m, n) dostawami kierunkowymi normalnéj do płaszczyzn stycznych, to $p^2=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2$, $p'^2=a'^2l^2+b'^2m^2+c'^2n^2$. Stąd $p^2-p'^2=a^2-a'^2=b^2-b'^2=$ $=c^2-c'^2$, gdyż $l^2+m^2+n^2=1$.

(152). Jeżeli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\beta^2}+\frac{z^2}{a^2-\gamma^2}=1$, jest jakąkolwiek z szeregu spółogniskowych, a $\lambda x + \mu y + \nu z = 1$ płaszczyzną daną, to miejscem jéj bieguna jest prosta $\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu} = \beta^2$, $\frac{x}{\lambda} - \frac{z}{\nu} = \gamma^2$.

(153). Jeżeli (x, y, z), (ξ, η, ζ), (x', y', z'), (ξ', η', ζ') są spółrzędnymi punktów P, Q. P', Q', to $(x - \xi')^2 - (x' - \xi)^2 = \left(x - \frac{a'}{a}\xi\right)^2 - \left(\xi - \frac{a'}{a}x\right)^2 = (a^2 - a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{a^2}\right)$, i t. d.

(156). Równanie $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{a^2 - \beta^2} + \frac{\zeta z}{a^2 - \gamma^2} = 1$ płaszczyzny biegunowéj punktu (ξ, η, ζ) można tak pisać: $\frac{\xi(x - \zeta)}{a^2} + \frac{\eta(y - \eta)}{a^2 - \beta^2} + \frac{\zeta(z - \zeta)}{a^2 - \gamma^2} = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\alpha^2 - \gamma^2} - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{a^2 - \beta^2} - \frac{\zeta^2}{a^2 - \gamma^2} = (a^2 - \alpha^2)\left(\frac{\xi^2}{a^2\alpha^2} + \frac{\eta^2}{(a^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\zeta^2}{(a^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}\right)$, a że $x - \xi = -\frac{\xi}{\alpha^2} Np$, $y - \eta = -\frac{\eta}{\alpha^2 - \beta^2} Np$, $z - \zeta = -\frac{\zeta}{\alpha^2 - \gamma^2} Np$, gdy N odcięte jest na wewnątrz, przeto $Np = \alpha^2 - a^2$.

(157). Skoro te normalne są osiami głównymi stożka, to jego równanie, odniesione do tych osi, jest kształtu $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$. Jeżeli p_1, p_2, p_3 są prostopadłymi ze środka danéj powierzchni na trzy płaszczyzny styczne w wiérzchołku do trzech spółogniskowych, to $\frac{x}{p_1} = \frac{y}{p_2} = \frac{z}{p_3}$ będą równaniami prostéj, łączącéj wiérzchołek ze środkiem, odniesionymi do tychże samych osi. A że ta prosta przechodzi zarazem przez środek krzywéj styczności, więc płaszczyzna styczności (czyli biegunowa wiérzchołka) jest równoległa do płaszczyzny średnicowéj stożka, sprzężonéj z tą prostą, t. j. do płaszczyzny $Ap_1x + Bp_2y + Cp_3z = 0$. Atoli, jeżeli λ, μ, ν są odcinkami normalnych odciętymi płaszczyzną styczności, to równanie téj płaszczyzny będzie $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = 1$, a zatym $Ap_1\lambda = Bp_2\mu = Cp_3\nu$. Oznaczmy nakoniec przez a_1, a_2, a_3 połowy osi piérwszorzędnych trzech spółogniskowych; wtedy, skoro (ćw. 156) $p_1\lambda = a_1{}^2 - a^2$, $p_2\mu = a_2{}^2 - a^2$, $p_3\nu = a_3{}^2 - a^2$, równaniem żądanym będzie $\frac{x^2}{a_1{}^2 - a^2} + \frac{y^2}{b_1{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{c_1{}^2 - c^2}$.

(160). Jeżeli (ξ, η, ζ) jest punktem danym na elipsojdzie, któréj oś piérwszorzędna $= 2a$, a (x, y, z) jest punktem odpowiednim na elipsojdzie spółogniskowéj, któréj oś piérwszorzędna $= 2a'$, to $a'^2 = \frac{a^2x^2}{\xi^2}$, $b'^2 = a'^2 - \beta^2 = \frac{b^2y^2}{\eta^2}$, $c'^2 = a'^2 - \gamma^2 = \frac{c^2z^2}{\zeta^2}$. Rugując a'^2 otrzymamy $\frac{a^2x^2}{\xi^2} - \frac{b^2y^2}{\eta^2} = \beta^2$, $\frac{a^2x^2}{\xi^2} - \frac{c^2z^2}{\zeta^2} = \gamma^2$, równania dwu walców hiperbolicznych, których przecięcie się przedstawia miejsce żądane.

(161). Jeżeli punkty A_1, A_2, A_3, A_4 weźmiemy za wiérzchołki trójkąta odniesienia, to równanie parabolojdy, na któréj leżą proste A_1A_2, A_3A_4, będzie $u_1u_3 - u_2u_4 = 0$. Stąd $u_1 : u_2 = u_4 : u_3$, a to właśnie okazuje prawdziwość twierdzenia.

(162) Równanie hiperbolojdy jednopowłokowéj, na któréj leży czworobok $A_1A_2A_3A_4$, ma postać $\beta u_1u_3 + \beta' v_2u_3 = 0$, gdzie $\beta + \beta'$ jest różne od 0. Dla spółrzędnych $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x^0_4)$ środka P^0 znajdziemy: $x_1^0 : h_1 = x_3^0 : h_3$, $x_2^0 : h_2 = x_4^0 : h_4$. A zatym, jeżeli przez P oznaczymy punkt przecięcia się płaszczyzny $A_1A_3P^0$ z krawędzią A_2A_4, a przez Q i R punkty przecięcia się prostych A_1P^0 i A_3P^0 odpowiednio z prostymi A_3P i A_1P, to $x_1^0 : h_1 = P^0Q : A_1Q$, $x_3^0 : h_3 = P^0R : A_3R$. Mamy zatym $P^0Q : A_1Q = P^0R : A_3R$; to dowodzi, że prosta QR jest równoległą do A_1R, tudzież że prosta PP^0 przechodzi przez środek P' boku A_1A_3 trójkąta A_1A_3P. A zatym środek hiperbolojdy leży na płaszczyźnie, przesuniętéj przez A_2A_4 i przez środek P' krawędzi przeciwległéj A_1A_3. Taksamo z drugiéj proporcyi można wywnioskować, że tenże środek leży na płaszczyźnie, przesuniętéj przez krawędź A_1A_3 i środek przeciwległéj krawędzi A_2A_4. Stąd wynika wypowiedziane twierdzenie.

(163). Przekroje powierzchni ścianami czworościanu powinny być kołami opisanymi na odpowiednich trójkątach. Równanie koła opisanego na trójkącie ściany $A_1A_2A_3$ jest $x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 = 0$, lub, jeżeli przez h_1, h_2, h_3 oznaczymy trzy wysokości trójkąta $A_1A_2A_3$, a przez s_{23}, s_{31}, s_{12} długości boków A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, $s_{23}^2 \frac{x_2x_3}{h_2h_3} + s_{31}^2 \frac{x_3x_1}{h_3h_1} + s_{12}^2 \frac{x_1x_2}{h_1h_2} = 0$. Atoli widocznie dla jakiegokolwiek punktu P na téj ścianie, stosunek $x : h$ jest niezależny od tego, czy x_i i h_i oznaczają prostopadłe z punktu P i z wiérzchołka A_i na jakąkolwiek ścianę pozostałą $x_i = 0$, czyteż prostopadłe na krawędź, według któréj ta ściana przecina się ze ścianą $x_4 = 0$. A zatym w równaniu ostatnim możemy przez h_1, h_2, h_3 rozumiéć prostopadłe z wiérzchołków A_1, A_2, A_3 na przeciwległe ściany, a przez x_1, x_2, x_3 odległości punktu bieżącego koła od tychże ścian. Postępując taksamo z pozostałymi ścianami, znajdziemy, że

$$s_{23}^2 \frac{x_2x_3}{h_2h_3} + s_{31}^2 \frac{x_3x_1}{h_3h_1} + s_{12}^2 \frac{x_1x_2}{h_1h_2} + s_{14}^2 \frac{x_1x_4}{h_1h_4} + s_{24}^2 \frac{x_2x_4}{h_2h_4} + s_{34}^2 \frac{x_3x_4}{h_3h_4} = 0.$$

jest równaniem kuli opisanéj na czworościanie odniesienia. — Równanie jakiéjkolwiek innéj kuli może się różnić od poprzedzającego tylko wyrazami stopnia 1-go, a te są kształtu $(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4}\right)$, gdzie drugi czynnik $= 1$. — Jeżeli iloczyn tych dwu czynników dodamy do poprzedzającego równania, a wypadek tego porównamy z równaniem ogólnym stopnia 2-go, to otrzymamy, po wyrugowaniu k_1, k_2, k_3, k_4, następujących 5 warunków:

$$\frac{a_{22}h_2^2 + a_{33}h_3^2 - 2a_{23}h_2h_3}{s_{23}^2} = \frac{a_{33}h_3^2 + a_{11}h_1^2 - 2a_{31}h_3h_1}{s_{31}^2} = \frac{a_{11}h_1^2 + a_{22}h_2^2 - 2a_{12}h_1h_2}{s_{12}^2} =$$
$$= \frac{a_{11}h_1^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{14}h_1h_4}{s_{14}^2} = \frac{a_{22}h_2^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{24}h_2h_4}{s_{24}^2} = \frac{a_{33}h_3^2 + a_{44}h_4^2 - 2a_{34}h_3h_4}{s_{34}^2}.$$

(170). Albowiém wtedy spółrzędne środka są nieoznaczone.

(171). Albowiém przez jakiekolwiek dwa punkty linii stopnia 1-go i trzeci punkt dowolnie obrany można przesunąć płaszczyznę, na któréj leży cała ta linija; gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy liniją stopnia 1-go, któraby płaszczyznę przecinała więcéj niż w jednym punkcie.

(172). Gdyż przez jakiekolwiek trzy punkty linii stopnia 2-go można przesunąć płaszczyznę, na któréj z tychże samych powodów, co w zagadnieniu (171), cała ta linija leżéć winna.

(173). Gdyż jeżeliby prosta przecinała w n punktach, to płaszczyzna, przez tę prostą przesunięta, przecinałaby krzywą więcéj niż w n punktach, co być nie może.

(174). Albowiém na powierzchni stopnia 2-go, przesuniętéj przez siedem punktów krzywéj i przez dwa punkty dowolne, zewnątrz niéj będące, cała ta linija leżéć winna, gdyż w przeciwnym razie linija stopnia 3-go przecinałaby powierzchnią stopnia 2-go więcéj niż w sześciu punktach, a to niemożliwe. Jeżeli powierzchnia rozkłada się na dwie płaszczyzny, to linija stopnia 3-go może być płaską i leżéć na jednéj z tych płaszczyzn.

(175). Niech każdy z dwu czworościanów będzie z sobą samym sprzężony względem powierzchni $f=0$; natenczas, odnosząc równanie téj powierzchni do jednego z tych czworościanów, będziemy mieli $f\equiv x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2$, rozumiejąc przez x_1, x_2, x_3, x_4 spółrzędne wraz z odpowiednimi spółczynnikami. Przez trzy wiérzchołki czworościanu odniesienia i przez cztéry wiérzchołki drugiego czworościanu poprowadźmy powierzchnią $g=0$. Ponieważ ta powierzchnia jest opisana na drugim, przeto $\Theta\equiv b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{44}=0$; a że przechodzi ona także przez trzy wiérzchołki piérwszego, więc $b_{11}=b_{22}=b_{33}=0$. Stąd wypada $b_{44}=0$; a więc ta powierzchnia przechodzi i przez czwarty wiérzchołek piérwszego czworościanu, przyjętego jako czworościan odniesienia.

(176). Albowiém, kładąc $f\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, a $g\equiv(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+$ $+(z-\gamma)^2-\rho^2$, mamy $\Theta=\frac{1}{a^2b^2c^2}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\rho^2-(a^2+b^2+c^2)]=0$, skąd $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\rho^2=a^2+b^2+c^2$.

(177). Przy tych samych założeniach, co w ćw. 176, ma być $\Theta'\equiv\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1-\rho^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0$. Stąd wypada $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1$, jeżeli $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$.

(178). Jeżeli $f\equiv ax^2+by^2+2nz=0$, a $g\equiv(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+$ $+(z-\gamma)^2-\rho^2=0$, to $\Theta\equiv-n^2(a+b)+2abn\gamma=0$. A zatym środek kuli leży na płaszczyźnie $z=\frac{n(a+b)}{2ab}$.

(179). Niech $f\equiv x^2+y^2+z^2-\rho^2=0$, $g\equiv(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\rho'^2=0$. Ma być $\Phi\equiv 2D^2-3(\rho^2+\rho'^2)=0$, gdzie $D^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$; stąd wypada $\rho^2+\rho'^2=\frac{2}{3}D^2$.

(180). Wziąwszy punkt styczności za początek, a płaszczyznę styczną za płaszczyznę sprzężoną z osią z-ów, miéć będziemy w $f=0$: $a_{14}=a_{24}=a_{44}=0$, a w $g=0$: $b_{14}=b_{24}=b_{34}=0$. Podstawiając te wartości w równaniu wyróżnikowym funkcyi $f+\lambda g$, miéć będziemy $(a_{34}+\lambda b_{34})^2[(a_{11}+\lambda b_{11})(a_{22}+\lambda b_{22})-$ $-(a_{12}+\lambda b_{12})^2]=0$. Jeżeli dwie powierzchnie są kulami, to równanie wyróżnikowe ma dwa pierwiastki równe; albowiém dwie kule, mając spólny przekrój płaski w nieskończoności, są w nieskończoności styczne podwójnie. Ażeby one dotykały się i w odległości skończonéj, także dwa inne pierwiastki winny być sobie równe. Tym sposobem znajdziemy $(D^2-\rho^2-\rho'^2)^2=4\rho^2\rho'^2$, skąd $D=\pm(\rho\pm\rho')$.

(181). Dwie powierzchnie stopnia 2-go przecinają się według krzywéj stopnia 4-go, a ta krzywa ma w każdym punkcie tylko jednę styczną, przecięcie się płaszczyzn stycznych do obu powierzchni w tym punkcie. Jakakolwiek płaszczyzna, przechodząca przez tę styczną, przecina obie powierzchnie według krzywych do siebie stycznych. Taka zatym płaszczyzna przechodzi przez dwa punkty krzywéj przecięcia razem się z sobą schodzące. Jeżeli się obie powierzchnie dotykają, to każda płaszczyzna, przechodząca przez punkt styczności, przetnie je według krzywych do siebie stycznych, a przeto każda taka płaszczyzna przechodzi przez dwa punkty krzywéj przecięcia razem się z sobą schodzące. Punkt styczności zatym jest punktem podwójnym téj krzywéj.

(182). Jeżeli $f\equiv a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{12}x_1x_2+a_{14}x_1x_4+a_{24}x_2x_4+a_{34}x_3x_4=0$, to $g\equiv b_{23}x_2x_3+b_{14}x_1x_4=0$. Stąd $B\equiv b_{23}{}^2b_{14}{}^2$,

$$\Theta\equiv 2(a_{23}a_{14}-a_{31}a_{24}-a_{12}a_{34})(b_{23}a_{14}+b_{14}a_{23})$$
$$\Phi\equiv(b_{23}a_{14}+b_{14}a_{23})^2+2b_{23}b_{14}(a_{23}a_{14}-a_{31}a_{24}-a_{12}a_{34})$$
$$\Theta'\equiv 2b_{23}b_{14}(b_{23}a_{14}+b_{14}a_{23}),$$
$$A\equiv a_{23}{}^2a_{14}{}^2+a_{31}{}^2a_{24}{}^2+a_{12}{}^2a_{34}{}^2-2a_{23}a_{31}a_{14}a_{24}-2a_{31}a_{12}a_{24}a_{34}-2a_{12}a_{23}a_{34}a_{14}.$$

Z tego zaś wynika, że $4B\Theta'\Phi\equiv\Theta'^3+8B^2\Theta$.

(183). Jeżeli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ jest równaniem elipsojdy wewnętrznéj, to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-n^2=0$ będzie równaniem zewnętrznéj. Równanie stożka stycznego do wewnętrznéj z punktu (α, β, γ) na zewnętrznéj jest

$$(n^2-1)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x\alpha}{a^2}+\frac{y\beta}{b^2}+\frac{z\gamma}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Ten stożek przecina zewnętrzną według dwu płaszczyzn

$$\left(\frac{x\alpha}{a^2}+\frac{y\beta}{b^2}+\frac{z\gamma}{c^2}-1\right)^2-(n^2-1)^2=0.$$

Jedna jest płaszczyzną styczną w (α, β, γ), a druga $\frac{x\alpha}{a^2}+\frac{y\beta}{b^2}+\frac{z\gamma}{c^2}+n^2-2=0$ jest styczną do elipsojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{(n^2-2)^2}{n^2}=0$. Wiadomo bowiém, że prosta $lx+my+nz+p=0$ jest styczną do elipsojdy $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1=0$, jeżeli $p^2=A^2l^2+B^2m^2+C^2n^2$; ten zaś warunek w uważanym przypadku sprowadza się do $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=n^2$.

(184). Powierzchnia spółśrodkowa i homotetyczna $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3$.

(185). Objętość tego czworościanu jest równa $\frac{9}{2}a^3$.

(186). Równanie płaszczyzny stycznéj w (x, y, z) jest $X(yz-bc)+$

$+ Y(zx - ca) + Z(xy - ab) = 2(xyz - abc)$; równanie zaś stożka stycznego w (a, b, c) jest $a(Y - b)(Z - c) + b(Z - c)(X - a) + c(X - a)(Y - b) = 0$.

(187). Bo gdy r jest promieniem kuli, to w punkcie styczności $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

(188). Normalne do powierzchni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ w (α, β, γ) i (x, y, z) są odpowiednio przedstawione przez równania:

$$\frac{a^2}{\alpha}(X - \alpha) = \frac{b^2}{\beta}(Y - \beta) = \frac{c^2}{\gamma}(Z - \gamma) \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{x}(X - x) = \frac{b^2}{y}(Y - y) = \frac{c^2}{z}(Z - z).$$

Druga normalna przetnie piérwszą, gdy

$$(b^2 - c^2)(\alpha yz + \beta\gamma x) + (c^2 - a^2)(\beta zx + \gamma\alpha y) + (a^2 - b^2)(\gamma xy + \alpha\beta z) = 0,$$

t. j. gdy punkt (x, y, z) leży na pewnéj powierzchni stopnia 2-go. Ta powierzchnia jest stożkiem rzędu 2-go, albowiém, jeżeli w wyróżniku napisanego równania,

$$\begin{vmatrix} 0 , & \gamma(a^2 - b^2) , & \beta(c^2 - c^2) , & \beta\gamma(b^2 - c^2) \\ \gamma(a^2 - b^2) , & 0 , & \alpha(b^2 - c^2) , & \gamma\alpha(c^2 - a^2) \\ \beta(c^2 - a^2) , & \alpha(b^2 - c^2) , & 0 , & \alpha\beta(a^2 - b^2) \\ \beta\gamma(b^2 - c^2) , & \gamma\alpha(c^2 - a^2) , & \alpha\beta(a^2 - b^2) , & 0 \end{vmatrix},$$

do elementów ostatniego wiérsza dodamy równoimienne elementy trzech piérwszych, pomnożone odpowiednio przez α, β, γ, to w ostatnim wiérszu wszystkie elementy równe 0; ten wyróżnik jest więc $= 0$.

(190). 1°. $\alpha(x^2 - yz) + \beta(y^2 - zx) + \gamma(z^2 - xy) = c^2$: hiperbolojda jedno- lub dwupowłokowa, według tego, czy $\alpha + \beta + \gamma > 0$, czyteż < 0; 2°. $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 3a^3$: hiperbolojda jedno- lub dwupowłokowa, według tego, czy $\alpha\beta\gamma < 0$, czyteż > 0.

(191). $4x(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$.

(196). Jeżeli krzywą $y^2 = x(x - 1)^2$, do któréj oś y-ów jest styczną, posiadającą węzeł w punkcie $x = 1$, $y = 0$, obrócimy około osi y-ów, to powstanie żądana powierzchnia. Aby znaléść punkty osobliwe, mieć będziemy, pisząc r^2 za $x^2 + y^2$,

$$f_1 \equiv 2x(4z^2 - 1 + 4r^2 - 3r^4) = 0, \quad f_2 \equiv 2y(4z^2 - 1 + 4r^2 - 3r^4) = 0,$$
$$f_3 \equiv 4z(z^2 + 2r^2) = 0.$$

Tym równaniom i równaniu powierzchni uczyni zadość $z = 0$ i albo 1° $x = y = 0$; albo 2° $r^2 = 1$. W przypadku pierwszym początek spółrzędnych jest punktem podwójnym; stożek styczny w tym punkcie jest $(X^2 + Y^2 = 0)$ liniją prostą, osią z-ów. W drugim przypadku mamy koło $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, złożone z samych punktów podwójnych. Stożek styczny w jakimkolwiek punkcie tego koła roskłada się na dwie płaszczyzny styczne, $(xX + yY - 1)^2 = Z^2$; obwiednie tych dwu płaszczyzn stycznych są dwoma stożkami, które się przecinają według koła $(z = 0, x^2 + y^2 = 1)$; każda tworząca tych stożków jest styczną do powierzchni w punkcie tego koła. — Aby znaléść osobliwe płaszczyzny styczne, mamy (art. 152) naprzód

$$2(\lambda x+\mu y)(4z^2-1+4r^2-3r^4)+4z(z^2+2r^2)\nu=0 \quad \text{i}$$
$$2(\lambda^2+\mu^2)(4z^2-1+4r^2-3r^4)+4\nu^2(3z^2+2r^2)+32(\lambda x+\mu y)\nu+ \\ +8(\lambda x+\mu y)^2(2-3r^2)=0.$$

A zatym dwie styczne główne zejdą się, jeżeli

$$\nu=0 \quad \text{i} \quad 4z^2-1+4r^2-3r^4=0,$$

a nadto mamy $(z^2+2r^2)^2-r^2(1+r^2)=0$. Jedynymi rozwiązaniami ostatnich dwu równań są 1⁰ $z^2=0$, $r^2=1$ i 2⁰ $z^2=\frac{4}{27}$, $r^2=\frac{1}{9}$. Piérwsze rozwiązanie nie daje żadnéj płaszczyzny stycznéj, lecz tylko dwa stożki, o których dopiéro była mowa. Drugie rozwiązanie daje dwie płaszczyzny styczne osobliwe $z=\pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$; każda dotyka powierzchni wzdłuż koła $(x^2+y^2=1)$ i przecina powierzchnią jeszcze według drugiego koła (ale pojedyńczego), którego promień $=\frac{4}{3}$. Styczna do tego koła styczności jest dana przez $\lambda x+\mu y=0$ i $\nu=0$. Łatwo spostrzéc, że te wartości dopełniają warunku

$$\Sigma\frac{3!}{i!j!k!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\lambda^i\mu^j\nu^k=0,$$

pod jakim styczna do koła styczności przechodzi przez cztéry po sobie następujące punkty; gdyż ten warunek sprowadza się do

$$\frac{20}{3}(\lambda x+\mu y)(\lambda^2+\mu^2)-8(\lambda x+\mu y)^3=0.$$

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma »Bil. mat.-fiz.«,
Dr. Maryjan A. Baraniecki.

W. Zajączkowski

GIEOMETRYJA ANALITYCZNA