PODRĘCZNIK ALGEBRY

DLA UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH

GIMNAZYÓW I SZKÓŁ REALNYCH W GALICYI.

NAPISAŁ

MARYAN A. BARANIECKI,
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

KRAKÓW.
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM A. M. KOSTERKIEWICZA
1893.

Cena 2 zł. 25 ct.

Zacnemu a Kochanemu

Aleksandrowi Czajewiczowi

Maryan

PODRĘCZNIK ALGEBRY

DLA UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH

GIMNAZYÓW I SZKÓŁ REALNYCH W GALICYI.

NAPISAŁ

MARYAN A. BARANIECKI,

PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

KRAKÓW.

W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

POD ZARZĄDEM A. M. KOSTERKIEWICZA.

1893.

»Celui qui n'a pas appris à réfléchir, n'est pas instruit, ou il l'est mal, — ce qui est pire encore.«
(Kto się nie nauczył zastanawiać, nie jest wykształcony, albo — co gorsza — był źle kształcony.)

Condillac.

To godło, pod którem w roku 1776-ym Szymon Lhulier nadesłał do Komisyi Edukacyjnej program swoich znakomitych podręczników matematycznych, miałem ciągle na uwadze podczas pracy nad tą książką. W nauczaniu bowiem średniem matematyka, jako kurs praktyczny myślenia ścisłego, ma bardzo doniosłe znaczenie, gdyż kształci systematycznie rozwagę, zdolność kombinacyjną, a nadewszystko wnioskowanie gruntowne. Do tych celów dążąc, należy wybrać metodę nauki tak, aby umysł młody najodpowiedniejszą drogą, a w każdem stadyum zupełnie jasno, przyswajał sobie nowe pojęcia.

Dlatego stanowczą przewagę w tej książce dałem metodzie indukcyjnej i co do tego poszedłem, jak mi się zdaje, tak daleko, jak tylko można było. Mam tu na myśli wprowadzanie nowych pojęć, ich następstwo, wyprowadzanie prawideł lub twierdzeń. Najstaranniej zaś unikałem tworzenia sztucznych stopniowań przy otrzymywaniu prawideł, co jest właściwe w nauczaniu początkowem, ale nieodpowiednie w szkole średniej ogólnej.

Oczywiście dbałem o to, aby książka odpowiadała obecnemu stanowi nauki, t. j. aby wykład w niej był w zupełnej harmonii z tem, co wynika z obecnego traktowania odpowiednich problematów w nauczaniu wyższem specyalnem. Ze świadomością jednak starałem się nie potrącać mimochodem o te kwestye, których należycie jasno nie można wyłożyć w książce szkolnej, jeżeli cała jej treść ma być przedmiotem nauki. Również dbałem o to, aby w mej książce nie było eksperymentów przeszczepiania na grunt szkoły średniej tych pozornie prostych pojęć, które dopiero po jej ukończeniu przyswoić sobie rzeczywiście można, przy specyalnem dalszem uprawianiu matematyki, — i to jeszcze z zastrzeżeniem, że się odrzuci pewne nowinki, które, pomimo jednostronnej prostoty lub rzekomej dogodności, nie są dość gruntownie pomyślane.

Rozkład materyału w książce wynika z planu obecnie obowiązującego szkoły średnie w Austryi. Do tego planu łatwo się było zastosować, gdyż główna jego cecha (widoczna z porównania go z planem dawniejszym) polega na właściwym nacisku na stronę naukową przy zachowaniu słusznych wymagań dydaktycznych. Pod tym ostatnim względem korzystałem także ze spostrzeżeń, które zebrałem podczas kilkoletniego nauczania w gimnazyum.

Uwzględniłem również odpowiednie cenne uwagi, które mi poczynił, czytając cały rękopis tekstu tej książki, p. Jan Nep. Franke we Lwowie, za co mu słowa wdzięczności wypowiadam.

Wspomniane powyżej książki Lhulier'go, z rękopisu francuskiego przez Jędrzeja Gawrońskiego przetłomaczone i w ówczesnem Towarzystwie do ksiąg elementarnych szczegółowo roztrząśnione, stanowią epokę, od której datuje się rozwój naszego słownictwa matematycznego i odpowiednich zwrotów językowych. Zbiegło się to z rozpoczęciem w naszej literaturze poważniejszej pracy na polu nauk ścisłych, która dalej język nasz kształciła, po części modyfikując słownictwo Komisyi Edukacyjnej, po części zaś uzupełniając je i dalej rozwijając. Jak w wydawnictwie »Biblioteki matematyczno-fizycznej«, tak oczywiście i w tej książce starałem się nić tej tradycyi utrzymać najtroskliwiej. Tem się objaśnia, dlaczego w mej książce czytelnik, znający tę tradycyą, tak mało znajdzie terminów lub zwrotów nowych, a co do tych kilku, które mi koniecznie wprowadzić wypadło, to mam nadzieję, że one przyjmą się, podobnie jak przeze mnie wprowadzone: »liczba zespolona« (1879), przybliżenie »z niedomiarem« (1876) i t. d.

Rozumiejąc doniosłość zadań, nie żałowałem zachodu w ich opracowaniu. Bardzo łatwych zadań, których zaimprowizować nietrudno, dawałem albo niewiele, alboteż na niektóre kwestye nie dawałem wcale. Znajdują się także zadania nieco trudniejsze. Do zadań dołączyłem odpowiedzi. Jestem bowiem zdania, że odpowiedzi podane zachęcają uczniów mniej zdolnych do samodzielnego przerabiania zadań, a lepszych pobudzają do rozwiązywania zadań z własnej ochoty.

Robię tu wzmiankę o niepomieszczeniu między pewnikami tego, iż »całość jest większa od swojej części«, gdyż ten pewnik odnosi się tylko do wielkości bezwzględnych.

Kraków, 8 grudnia r. 1892.

Baraniecki.

SPIS RZECZY.

Część pierwsza.

Rozdział I. Wyrażenia algebraiczne całkowite.

1— 14. Wprowadzenie liczb ujemnych. . . . . Str. 1
15— 17. Wprowadzenie liter na oznaczenie liczb. 4
18— 40. Cztery działania na liczbach, oznaczonych przez litery. 5
41— 45. Znaki + lub — przed literami, oznaczającemi liczby. 14
45— 47. Spółczynnik. 16
47— 49. Wykładnik. Podnoszenie do potęgi. 17
50. Wyrażenia algebraiczne. 17
51— 58. Jednomiany i wielomiany. 18
59— 62. Równość. Tożsamość. Równanie. Nierówność. 20
63— 64. Wielkość. Pewniki. 22
65— 67. Dodawanie i odejmowanie jednomianów i wielomianów. 23
68— 70. Mnożenie jednomianów. 25
71— 79. Mnożenie wielomianów. 25
80— 82. Dzielenie jednomianów. 30
83— 89. Dzielenie wielomianów. 32

Rozdział II. Największy spólny dzielnik i najmniejsza spólna wielokrotność.

90—102. Największy spólny dzielnik i najmniejsza spólna wielokrotność liczb. . . 35
103—110. Największy spólny dzielnik jednomianów i wielomianów. 40
111—114. Najmniejsza spólna wielokrotność jednomianów i wielomianów. 44

Rozdział III. Wyrażenia algebraiczne ułamkowe.

115—117. Wyrażenie algebraiczne ułamkowe. 45
118—122. Mnożenie lub dzielenie licznika i mianownika przez tę samę liczbę. . . 45
123—128. Cztery działania na ułamkach. 47
129—130. Wartości osobliwe ułamka. 49
131—134. O różnych systematach pisania liczb. 50

Rozdział IV. Stosunki i proporcye.

135—137. Stosunki. 53
138—145. Proporcye. 54

Rozdział V. Wielkości proporcyonalne.

146—148. Wartości z sobą spółmierne i niespółmierne. 59
149—151. Wielkości proporcyonalne. 61

Rozdział VI. Równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą.

152—158. O równaniu wogóle. 64
159—161. Rozwiązanie równania stopnia 1-go. 68

162. Równanie ułamkowe, z którego dochodzimy do równania stopnia 1-go. Str. 69
163—166. Uwagi o równaniu stopnia 1-go. 69
167—171. Nierówności. Nierówność stopnia 1-go. 71

Rozdział VII. Równania stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

172—176. O równaniach z wielu niewiadomemi wogóle. 72
177—181. Układ n równań niejednorodnych z n niewiadomemi. 75
182—185. Układ n równań z m niewiadomemi. 81

Rozdział VII. Zadania stopnia 1-go. Roztrząsanie równań stopnia 1-go.

186—194. Zadania z jedną niewiadomą. 84
195—198. Zadania oznaczone z wielu niewiadomemi. 91

Rozdział IX. Wyznaczniki.

199—200. Wprowadzenie wyznaczników. 96
201—208. Własności i obliczanie wyznacznika. 97
209—212. Zastosowania do układu równań stopnia 1-go. 102

Zadania.

Zadania. 106
Odpowiedzi 121

Część druga.

Rozdział I. Podnoszenie do potęgi.

1— 8. Podnoszenie do potęgi wogóle. 127
9— 12. Kwadrat i sześcian wielomianu. 129
13. Ilorazy sumy lub różnicy jednakowych potęg przez sumę lub różnicę ich podstaw. 134
14— 61. Wykładniki ujemne. 136

Rozdział II. Wyciąganie pierwiastka.

17— 33. Wyciąganie pierwiastka wogóle. 138
34— 39. Wprowadzenie liczb niewymiernych pierwiastkowych 144
40— 43. Wyrażenie algebraiczne niewymierne. 148
44. Równanie niewymierne, z którego dochodzimy do równania stopnia 1-go 151
45— 50. Wyciąganie pierwiastka kwadratowego. 152
51— 56. Wyciąganie pierwiastka sześciennego. 159
57— 61. Wykładniki ułamkowe. 164
62— 70. Wprowadzenie liczb urojonych i liczb zespolonych. 165
71. O działaniach algebraicznych. 168

Rozdział III. Logarytmy.

72— 73. Wprowadzenie logarytmów. 169
74— 77. Własności ogólne logarytmów 170
78— 80. Własności logarytmów zwyczajnych. 172
81. Wykonywanie działań na logarytmach. 174
82— 83. Użycie tablic logarytmów. 175
84— 87. Wykonywanie rachunków przy pomocy logarytmów. Równanie wykładnicze 178

Rozdział IV. Równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą.

88— 92. Rozwiązanie równania stopnia 2-go. 179
93. Równanie ułamkowe, z którego dochodzimy do równania stopnia 2-go . 184
94. Równanie niewymierne, z którego dochodzimy do równania stopnia 2-go 183
95— 98. Uwagi ogólne o równaniu stopnia 2-go. 184
99—101. Własności pierwiastków równania stopnia 2-go. 185

102. Przekształcenie szczególnego wyrażenia niewymiernego. . . . . . Str. 187
103—104. Zadania stopnia 2-go z jedną niewiadomą. 188
105—107. Trójmian stopnia 2-go. 191
108—111. Maximum i minimum. 194
112. Nierówność stopnia 2-go. 196
113. Trygonometryczny kształt pierwiastków równania stopnia 2-go. 196

Rozdział V. Równania stopni wyższych, rozwiązalne zapomocą równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą.

114. Przypadki najprostsze. 197
115—119. Równanie dwumienne. 198
120—123. Równanie trójmienne. 199
124—126. Równanie wzajemne. 201
127. Szczególne równanie wykładnicze, rozwiązalne przy pomocy równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą. 203

Zadania.

Zadania. 204
Odpowiedzi 220

Część trzecia.

Rozdział I. Równania stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

1— 2. Równanie z wielu niewiadomemi. 227
3— 7. Układ dwu równań z dwiema niewiadomemi. 228
8. Układ trzech równań z trzema niewiadomemi i t. d. 232

Rozdział II. Ułamki ciągłe.

9. Wprowadzenie ułamków ciągłych. 233
10. Ułamki zbliżone. 235
11. Ułamek ciągły skończony. 236
12—16. Własności ułamków zbliżonych 237
17. Ułamek ciągły peryodyczny. 240

Rozdział III. Rozwiązania całkowite równań nieoznaczonych.

18—27. Zadanie Diofanta 241
28—33. Równanie Pitagorasa 246

Rozdział IV. Postępy. Odsetki składane.

34—39. Postęp arytmetyczny 249
40. Postęp arytmetyczny rzędu wyższego 251
41—48. Postęp geometryczny 252
49—52. Zastosowania do niektórych szeregów 255
53—56. Zastosowania do zadań na odsetki składane. 257

Rozdział V. Zestawienia. Obliczanie prawdopodobieństwa.

57—62. Zestawienia elementów różnych 260
63—65. Zestawienia elementów, pośród których są jednakowe 265
66—73. Zastosowania do zadań na obliczanie prawdopodobieństwa 267
74—78. Zabezpieczenia kapitałów i rent 270

Rozdział VI. Dwumian Newton'a.

79—81. Dwumian Newton'a 274
82—84. Zastosowania dwumianu Newton'a 276

Rozdział VII. Liczby zespolone. — Określenie algebry.

85—87. Przedstawienie geometryczne liczb zespolonych . . . . Str. 278
88—94. Działania na liczbach zespolonych 281
95—97. Określenie algebry 287

Zadania.

Zadania 290
Odpowiedzi 310

Przypiski.

I. O wielkościach proporcyonalnych 318
II. O znoszeniu niewymierności 319
III. O dwu równaniach stopnia 2-go z jedną niewiadomą, mających spólny pierwiastek . 320
IV. Uwagi ogólne o działaniach 320

CZĘŚĆ PIERWSZA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE CAŁKOWITE.

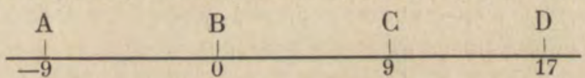
WPROWADZENIE LICZB UJEMNYCH.

1. Jedność i wszystkie liczby kolejno coraz o jedność większe,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots,$$

tworzą szereg liczb naturalnych (Reihe der natürlichen Zahlen). Kiedy do jednej z liczb tego szeregu dodajemy inną, albo też jednę z nich mnożymy przez inną, zawsze dochodzimy do liczby, do tegoż szeregu należącej. Nie zawsze jednak odejmując od jednej z liczb tego szeregu inną, albo też dzieląc jednę z nich przez inną, dojść możemy do liczby, do tegoż szeregu należącej.

2. Jeżeli na prostej mamy punkty A, B, C, D, i wiemy, że od punktu B



do D jest 17 pewnych jednostek, od punktów zaś A i C do punktu D jest odpowiednio 8 i 26 takichże jednostek, a chcemy się dowiedzieć, ile tych jednostek jest od punktu B do punktu C i od punktu A do punktu B, to wykonamy odejmowania

$$17-8=9, \qquad 26-17=9.$$

W obu razach wypadło nam 9 jednostek. Aby jednak określić położenia tych dwu punktów C i A względem punktu B, powiemy, iż są od B oddalone: pierwszy o 9 jednostek na prawo, drugi zaś o 9 jednostek w kierunku wprost przeciwnym, t. j. na lewo.

Gdybyśmy w drugiem z powyższych odejmowań chcieli liczby dane tak wypisać, aby one odpowiadały liczbom danym w pierwszem odejmowaniu, to mielibyśmy

$$17-26.$$

To odejmowanie możemy (podobnie jak np. $10-6=10-4-2$) napisać $17-17-9$, tak iż będziemy mieli

$$17-26=-9$$

Ten wypadek: -9 wskazuje, iż mamy 9 jednostek wziąć w przeciwnym kierunku niż 9 jednostek, wypadłe z pierwszego odejmowania.

Możemy teraz rozróżnić położenia punktów C i A względem punktu B, mówiąc, iż one są oddalone od B: pierwszy o 9 jednostek, drugi zaś o -9 (»mniej« 9) jednostek.

Podobnie oznaczyć moglibyśmy położenia innych punktów na tej prostej względem punktu B.

3. Jak odpowiednio oznaczyć na tej prostej położenie punktu B? Odległość punktu B od tegoż punktu B jest żadna, czyli jest zero, a więc na naszej prostej punkt B, od którego liczymy kierunki na prawo i na lewo, oznaczymy przez: 0.

Liczby, oznaczane w kierunku wprost przeciwnym względem kierunku obranego, nazywamy liczbami ujemnemi (negative Zahlen). W poprzedniem zadaniu kierunek od B na prawo był kierunkiem obranym, w którym liczyliśmy liczby tak, jak się je liczy w arytmetyce; a więc liczba -9 jest liczbą ujemną, a kierunek od B na lewo jest kierunkiem ujemnym (negative Richtung).

Dla przeciwstawienia nazwie: liczba ujemna, liczbę taką, jak 9 w pierwszem odejmowaniu, rachowaną w kierunku pierwotnie obranym, nazywamy liczbą dodatną (positive Z.), co dobitniej piszemy $+9$ (»więcej« 9), a ten kierunek nazywamy kierunkiem dodatnym.

A więc *liczba ujemna jestto liczba, rachowana od zera w kierunku wprost przeciwnym temu kierunkowi, który uważamy za kierunek dodatny.*

4. Przez wprowadzenie zera i liczb ujemnych osiągamy to, iż od każdej z liczb w szeregu liczb naturalnych odjąć możemy którąkolwiek liczbę tego szeregu.

5. W szeregu liczb naturalnych przed drugą i przed każdą dalszą liczbą stoi liczba o jedność mniejsza. Jeżeli wykonamy odejmowania

$$1-1=0,\quad 1-2=-1,\quad 1-3=-2,\quad 1-4=-3,\ldots,$$

to spostrzeżemy, że w tych odejmowaniach odjemne są jednakowe, a odjemniki coraz większe, każdy od poprzedniego o jedność; a więc reszty tych odejmowań są kolejno, każda od poprzedniej mniejsza o jedność; co się zaś tyczy reszty 0, to wprost wynika z pierwszego odejmowania, iż 0 jest od jedności mniejsze o jedność.

Jeżeli te reszty dopiszemy kolejno z lewej strony pierwszej liczby szeregu liczb naturalnych, to mieć będziemy

$$\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

gdzie każda liczba od bezpośrednio ją poprzedzającej jest większa o jedność, co także stosuje się do 0. A więc: gdy wyjdziemy z którejkolwiek z wypisanych liczb, to wmiarę posuwania się od niej w prawo, będziemy mieli liczby coraz większe. Pod tym względem 0 zachowuje się taksamo, jak jakakolwiek inna z tych liczb; możemy przeto powiedzieć, że *zero jest liczbą* [1]).

Widzimy zatem, że pojęcie »większy« jest związane z kierunkiem wzrastających liczb dodatnych; przeto *w wypisanym wyżej szeregu liczb: ujemnych,*

---

[1]) Należy odróżnić liczbę 0, zjawiającą się dopiero w algebrze, od cyfry 0, służącej przy pisaniu liczb do zajęcia pewnego miejsca, aby inne cyfry można było postawić na takiem z porządku miejscu, na jakiem one postawione być mają.

zera i dodatnych, ta z dwu którychkolwiek liczb jest większa, która w kierunku na prawo zajmuje miejsce dalsze.

6. W powyżej wypisanym szeregu liczb mamy dwie jedności: jedność dodatną i jedność ujemną.

Gdy w tymże szeregu weźmiemy dwie liczby jednakowo oddalone od 0 np. 4 i -4, to, podobnie jak pierwsza jest skupieniem czterech jedności dodatnych, druga -4 jest skupieniem czterech jedności ujemnych i dlatego jest liczbą całkowitą ujemną, podobnie jak liczba szeregu liczb naturalnych jest liczbą całkowitą dodatną.

Zauważmy, że np. $-7 = -4 - 3 = -3 - 2 - 2 =$ i t. d.

7. Weźmy jakąkolwiek liczbę całkowitą ujemną np. -5. Jeżeli od $+1$ odejmiemy (art. 5) dwie jedności dodatne, wskutek czego otrzymamy -1, i weźmiemy pięć takich ujemnych jedności, to mieć będziemy liczbę -5. Zamiast mówić »od więcej jedność odjąć dwie jedności dodatne, wskutek czego otrzymamy mniej jedność«, umówmy się, żeby mówić krócej »zamiast dodatnej jedności wziąć ujemną jedność«, albo jeszcze »mając $+1$, zmienić jej znak«. W tym razie będziemy mogli powiedzieć, że: aby z jedności dodatnej otrzymać -5, należy, wziąwszy $+1$, zmienić jej znak i takich liczb -1 wziąć pięć.

8. Gdy, wziąwszy z szeregu liczb naturalnych liczby 3 i 4, chcemy pierwszą z nich podzielić przez drugą, to należy 3 jedności rozłożyć na 4 równe części i wziąć jednę taką część, t. j. należy wziąć jednę czwartą trzech jedności. Jeżeli jednak, zamiast rozkładać 3 jedności na 4 równe części i brać jednę taką część, rozłożymy jedność na 4 równe części, to te części będą od poprzednich 3 razy mniejsze, a więc 3 takie części, t. j. trzy czwarte części jedności będą stanowiły tyleż, co poprzednio jedna czwarta część trzech jedności. A więc $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Podobnie np. $9 : 4 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Takie liczby jak $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ i t. d. nazywają się liczbami ułamkowemi (gebrochene Z.). Te liczby są rachowane od zera w tym samym kierunku, co liczby dodatne całkowite; przeto je nazywamy liczbami ułamkowemi dodatnemi.

9. Z powyższego wynika, że liczby ułamkowe dodatne powstają z jedności dodatnej wskutek rozłożenia jej na tyle równych części ile jest jedności w mianowniku, i wzięcia tylu takich części, ile jest jedności w liczniku.

10. Przez wprowadzenie liczb ułamkowych dodatnych osiągamy to, iż każdą z liczb szeregu liczb naturalnych podzielić możemy przez którąkolwiek liczbę tego szeregu.

11. Jeżeli chcemy np. od liczby 2 odjąć liczbę $6\frac{4}{5}$, to, ponieważ $2 - 6\frac{4}{5} = 2 - 2 - 4\frac{4}{5}$, jest $2 - 6\frac{4}{5} = -4\frac{4}{5}$, liczbie pośredniej między -5 i -4. Taką liczbę, jak otrzymana tu reszta, nazywamy liczbą ułamkową ujemną.

Zauważmy, że np. $-7\frac{3}{8} = -2 - 5\frac{3}{8} = -3\frac{1}{6} - 4\frac{5}{24} =$ i t. d.

Wskutek wprowadzenia liczb ułamkowych ujemnych mamy możność otrzymania zawsze wypadku z odejmowania od siebie dwu liczb dodatnych wrazie, kiedy jedna z nich, albo obie, są ułamkowe.

12. Gdy mamy liczbę ułamkową ujemną np. $-\frac{3}{5}$, to możemy przyjąć, iż ona w taki sposób powstała z jedności dodatnej: Rozłożyliśmy $+1$ na 5 równych części, a od otrzymanej liczby $+\frac{1}{5}$ odjęliśmy dwie takie liczby, wskutek czego doszliśmy do liczby $-\frac{1}{5}$ i takich liczb $-\frac{1}{5}$ wzięliśmy 3. Możemy więc (art. 7) tak powiedzieć: aby otrzymać $-\frac{3}{5}$ z jedności dodatnej, należy $+1$ rozłożyć na tyle równych części, ile jest jedności w mianowniku, a otrzymawszy liczbę $+\frac{1}{5}$, zmienić jej znak i wziąć tyle tak otrzymanych liczb $-\frac{1}{5}$, ile jest jedności w liczniku.

Łatwo objaśnić, że np. 4-tą częścią liczby -7 jest liczba $-\frac{7}{4}$, że 5-tą częścią liczby $-\frac{16}{7}$ jest liczba $-\frac{16}{35}$ i t. d.

13. W pojmowaniu liczb dodatnych i ujemnych tkwi zależność od dowolnie obranego zera i od kierunku, który dowolnie obraliśmy za dodatny (art. 3). A więc *pojęcia liczb dodatnych i ujemnych są pojęciami względnemi.*

Gdybyśmy jednak, mając np. liczby $+4\frac{5}{7}$ i $-4\frac{5}{7}$, umówili się, aby nie mieć względu na ich znaki, moglibyśmy powiedzieć, że one są równe sobie. Owóż, wartość liczby bez względu na to, czy ta liczba jest dodatna, czyteż ujemna, nazywa się w a r t o ś c i ą b e z w z g l ę d n ą l i c z b y (absoluter Werth d. Z.). A zatem liczby $4\frac{5}{7}$ i $-4\frac{5}{7}$ mają też samę wartość bezwzględną, a są przeciwnego znaku.

Oczywiście, że z dwu liczb dodatnych ta jest większa, której wartość bezwzględna jest większa, i że każda liczba dodatna jest większa od zera.

Z tego, cośmy powiedzieli w art. 5-ym o liczbach ujemnych całkowitych, wprost wypada, że np. $-5 < 0$, $-5 > -9$. Z tego zaś, cośmy powiedzieli w art. 11-ym o liczbach ujemnych ułamkowych, wynika, że względem każdej takiej liczby liczba 0 przypada w kierunku liczb wzrastających, z dwu zaś takich liczb ta przypada w kierunku liczb wzrastających, której wartość bezwzględna jest mniejsza. A więc ogólnie: *liczba ujemna jest mniejsza od zera; z dwu liczb ujemnych ta jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza.*

14. W arytmetyce mieliśmy do czynienia z liczbami całkowitemi dodatnemi i liczbami ułamkowemi dodatnemi, przyczem uwzględnialiśmy, iż te liczby mogły być nietylko oderwane, ale także mianowane.

Nauka, którą rozpoczęliśmy, nazywa się a l g e b r ą. Nie możemy dać jeszcze określenia algebry. Zaznaczymy tu tylko, że algebra obejmuje większy obszar liczb niż arytmetyka. Ponad liczby znane z arytmetyki, wprowadziliśmy już do naszej nauki liczby ujemne, tak całkowite jak i ułamkowe.

Zauważymy nadto, że chociażby w oddzielnych zadaniach, które rozwiązywać lub roztrząsać będziemy, występowały liczby mianowane, to jednak w rozumowaniu ściśle algebraicznem, związanem z takiem zadaniem, rozważać będziemy zawsze tylko liczby oderwane.

WPROWADZENIE LITER NA OZNACZENIE LICZB.

15. W algebrze wprowadzamy litery na oznaczenie liczb. Jakąkolwiek liczbę, dodatną lub ujemną, całkowitą lub ułamkową, możemy oznaczyć przez literę np. a, albo przez jakąkolwiek inną. Odwrotnie, litera np. a może wogóle oznaczać jakąkolwiek liczbę i dlatego mówimy: liczba a. Jeżeli przez literę chcemy rozumieć pewną jednę liczbę, to mówimy, że jej nadajemy wartość liczebną (numerischer Werth), lub krócej, że nadajemy jej wartość; tak pn. jeżeli przez a chcemy rozumieć liczbę $-\frac{3}{5}$, to mówimy, że nadajemy literze a wartość $-\frac{3}{5}$, czyli przyjmujemy, że $a = -\frac{3}{5}$.

Korzyść, z takiego uogólnienia wynikającą, okażemy na prostym przykładzie.

Zadanie I. Jaką liczbę trzeba dodać do 11, aby mieć liczbę trzy razy większą niż 6?

Ponieważ po dodaniu szukanej liczby do 11 otrzymać mamy $6 \times 3 = 18$, przeto szukana liczba jest 7. Odpowiedź: 7.

Zamiast liczb danych w zadaniu wprowadźmy litery, np. liczbę 11 nazwijmy a, liczbę zaś 6 nazwijmy b. Wówczas zadanie nasze możemy ogólniej tak wypowiedzieć:

Zadanie II. Jaką liczbę trzeba dodać do a, aby mieć liczbę 3 razy większą niż b?

Ponieważ po dodaniu szukanej liczby do a otrzymać mamy liczbę 3 razy większą niż b, t. j. liczbę $b.3$, przeto szukana liczba wypadnie z odejmowania $b.3 - a$. Odpowiedź: $b.3 - a$.

Odpowiedź na zadanie I nie wskazuje, jak owa liczba 7 powstała z liczb danych 11 i 6. Odpowiedź zaś na zadanie II wskazuje wyraźnie, iż szukaną liczbę otrzymamy, jeżeli liczbę a odejmiemy od 3 razy wziętej liczby b. Jakoż, stosując tę odpowiedź do liczb zadania I, mamy $6.3 - 11 = 7$.

Zauważmy, iż wprawdzie wprowadziliśmy powyżej litery a i b jako oznaczenia liczb danych w zadaniu I, jednak owe litery a i b mogą w zadaniu II oznaczać jakiekolwiek liczby. I tak: kiedy przyjmiemy, że $a = 8\frac{1}{2}$, $b = 15$, to będzie $b.3 - a = 45 - 8\frac{1}{2} = 36\frac{1}{2}$; jakoż $8\frac{1}{2} + 36\frac{1}{2} = 15.3$.

Widzimy więc, że, oznaczywszy liczby dane w zadaniu przez litery: 1) osiągamy to, iż wiemy, jak odpowiedź powstała z liczb danych w zadaniu, 2) jeżeli przez owe litery rozumieć będziemy różne liczby, to otrzymana odpowiedź jest rozwiązaniem ogólnem, t. j. nie odnosi się wyłącznie tylko do jakiegoś oddzielnego przypadku, jak w arytmetyce, lecz obejmuje odrazu wszystkie możliwe przypadki zadań jednego rodzaju.

16. Jeżeli mając np. liczbę a, jej wartość bezwzględną nazwiemy α, to w razie, kiedy a jest liczbą dodatną, będzie $a = +\alpha$, kiedy zaś a jest liczbą ujemną, będzie $a = -\alpha$.

17. Jeżeli o liczbie a wiemy, że ona jest ułamkowa, a jej wartość bezwzględna jest $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, to zawsze albo $a = +\alpha = +\frac{\lambda}{\mu}$ albo też $a = -\alpha = -\frac{\lambda}{\mu}$. Najczęściej robimy przypuszczenie, że bezwzględne wartości λ i μ są już całkowite, co, jak wiemy z arytmetyki, zawsze osiągnąć można.

CZTERY DZIAŁANIA NA LICZBACH, OZNACZONYCH PRZEZ LITERY.

Dodawanie. **18**. Wprowadziwszy w algebrze liczby ujemne, należy podać takie określenie dodawania, któreby uwzględniało składniki ujemne, a obejmowało w sobie, jako przypadek szczególny, dodawanie liczb dodatnych.

Szukana suma ma przedstawiać skupienie (agregat) jedności i części jedności, tak dodatnych, jak i ujemnych, zachodzących w składnikach.

Możemy przeto ogólnie tak określić dodawanie: *Dodawanie jestto działanie, w którem mając liczby dane, zwane składnikami, szukamy ich sumy, będącej skupieniem wszystkich jedności i części jedności, tak dodatnych, jak i ujemnych, zachodzących w składnikach.*

19. Gdy mamy do liczby a dodać liczbę b, to ich suma jest $a+b$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Jeżeli oba składniki są dodatne, $a=+\alpha$, $b=+\beta$, to suma $a+b$ czyli $(+\alpha)+(+\beta)$ jest skupieniem α dodatnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β dodatnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $+\alpha+\beta$. Mamy zatem

$$(+\alpha)+(+\beta)=+\alpha+\beta.$$

2). Jeżeli pierwszy składnik jest dodatny, $a=+\alpha$, zaś drugi ujemny, $b=-\beta$, to suma $(+\alpha)+(-\beta)$ jest skupieniem α dodatnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β ujemnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $+\alpha-\beta$. Mamy zatem

$$(+\alpha)+(-\beta)=+\alpha-\beta.$$

3). Jeżeli pierwszy składnik jest ujemny, $a=-\alpha$, zaś drugi dodatny, $b=+\beta$, to suma $(-\alpha)+(+\beta)$ jest skupieniem α ujemnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β dodatnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $-\alpha+\beta$. Mamy zatem

$$(-\alpha)+(+\beta)=-\alpha+\beta.$$

4). Jeżeli oba składniki są ujemne, $a=-\alpha$, $b=-\beta$, to suma $(-\alpha)+(-\beta)$ jest skupieniem α ujemnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β ujemnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $-\alpha-\beta$. Mamy zatem

$$(-\alpha)+(-\beta)=-\alpha-\beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia sumy dwu liczb, widzimy, że, *aby otrzymać sumę dwu liczb, należy do pierwszego składnika dopisać drugi z jego znakiem.*

20. Suma, w skład której mogą wchodzić składniki ujemne, nazywana bywa s u m ą a l g e b r a i c z n ą (algebraische Summe), a liczba, którą ona przedstawi, kiedy składnikom nadamy pewnę wartości, w a r t o ś c i ą l i c z e b n ą s u m y a l g e b r a i c z n e j. (numerischer Werth d. a. S.).

W 1-ym i 4-ym z rozważanych powyżej przypadków otrzymaliśmy jako sumę dwu liczb dodatnych lub dwu liczb ujemnych odpowiednio liczbę dodatną lub ujemną, której wartość bezwzględna jest sumą bezwzględnych wartości składników. A więc ogólnie *suma algebraiczna dwu liczb jednakowego znaku przedstawia liczbę takiego znaku jak dane, której bezwzględna wartość jest równa sumie bezwzględnych wartości liczb danych.* Np. $-4\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}=-7\frac{1}{6}$.

W przypadkach 2-im lub 3-im w razie, kiedy składniki mają tę samę wartość bezwzględną, $\beta=\alpha$, tak suma $+\alpha-\beta$, jak suma $-\alpha+\beta$, jest równa zeru. O takich dwu składnikach sumy mówimy, iż one »znoszą się«.

W razie, kiedy składnik dodatny ma większą wartość bezwzględną niż ujemny, możemy w przypadku 2-im przyjąć $\alpha = \gamma + \beta$, wskutek czego $+\alpha - \beta = + \gamma + \beta - \beta = + \gamma$, w przypadku zaś 3-im przyjąć $\beta = \alpha + \delta$, wskutek czego $-\alpha + \beta = -\alpha + \alpha + \delta = + \delta$.

W razie, kiedy składnik ujemny ma większą wartość bezwzględną, możemy w przypadku drugim przyjąć $\beta = \alpha + \delta$, a temsamem $-\beta = -\alpha - \delta$, wskutek czego $+\alpha - \beta = +\alpha - \alpha - \delta = -\delta$, w przypadku zaś 3-im przyjąć $\alpha = \gamma + \beta$, a temsamem $-\alpha = -\gamma - \beta$, wskutek czego $-\alpha + \beta = -\gamma - \beta + \beta = -\gamma$.

A więc *suma dwu liczb różnego znaku przedstawia liczbę o wartości bezwzględnej równej różnicy wartości bezwzględnych liczb danych, którą należy wziąć ze znakiem liczby danej o większej wartości bezwzględnej.* W szczególnym razie może ta suma być równa zeru.

21. Gdy weźmiemy dwie sumy:

$$a + b \text{ i } b + a$$

to, jeżeli oba składniki a i b są jednakowego znaku, obie te sumy według pierwszego prawidła art. poprzedzającego przedstawiają liczbę tego samego znaku, a wartości bezwzględne obu są sumą bezwzględnych wartości składników, która, jak wiemy z arytmetyki, nie zależy od porządku składników. Jeżeli zaś składniki są różnego znaku, to obie te sumy według drugiego prawidła art. poprzedzającego przedstawiają liczbę tego samego znaku o tej samej wartości bezwzględnej. W każdym więc przypadku dwie te sumy przedstawiają jednakową liczbę, czyli *suma dwu składników nie zależy od ich porządku.*

22. Jeżeli mamy wykonać dodawanie trzech lub więcej składników, to do sumy algebraicznej dwu pierwszych składników, która przedstawia jednę liczbę (art. 20), a więc za jeden składnik uważana być może, według prawidła art. 19-go dopiszemy trzeci z danych składników z jego znakiem. Do tak powstałej sumy algebraicznej, którą znowu za jeden składnik uważać możemy, dopiszemy czwarty z danych składników z jego znakiem, i t. d. A więc, *aby otrzymać sumę ilukolwiek liczb danych, należy do pierwszego składnika dopisać pozostałe, zachowując ich znaki.*

23. W sumie algebraicznej kilku liczb np. $a + b + c + d + e$, w której każda liczba może być czyto dodatna, czyteż ujemna, zmieńmy dowolnie porządek składników. Przypuśćmy, że po tej zmianie otrzymaliśmy sumę $c + b + a + e + d$. Tę sumę otrzymać mogliśmy z pierwotnej, naprzód przestawiając w niej dwa pierwsze składniki, następnie w tak otrzymanej sumie przestawiając drugi z trzecim i nakoniec w tak powstałej sumie, przestawiając dwa pierwsze z sobą i dwa ostatnie z sobą. W skutek każdego takiego przestawienia dwu składników nie zmieniła się wartość ich sumy (art. 21), a więc także nie zmieniła się liczba, którą przedstawia odpowiednia suma wszystkich pięciu składników. Jest więc

$$a + b + c + d + e = c + b + a + e + d.$$

Możemy więc powiedzieć ogólnie: *suma pewnej ilości składników nie zależy od ich porządku.*

24. Gdy mamy sumę algebraiczną trzech, lub więcej składników to, kiedy nie wszystkie są jednakowego znaku, możemy tak zmienić ich porządek, aby wszystkie dodatne były obok siebie, jakoteż wszystkie ujemne następowały po sobie. Oddzielnie obliczywszy sumę składników dodatnych i oddzielnie sumę składników ujemnych, możemy daną sumę algebraiczną zastąpić przez sumę algebraiczną dwu liczb różnego znaku, której wartość otrzymać umiemy (art. 20). A więc, *aby znaleźć wartość sumy algebraicznej pewnej ilości liczb, należy oddzielnie znaleźć sumę składników dodatnych, a oddzielnie sumę składników ujemnych i różnicę wartości bezwzględnych tych dwu liczb wziąć ze znakiem tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa.* W szczególnym przypadku wartością danej sumy algebraicznej może być liczba zero.

25. Na mocy art. 5-go i 13-go możemy powiedzieć, że, *gdy do jakiejkolwiek liczby dodajemy dodatną, to daną liczbę powiększamy,* zaś, *gdy do jakiejkolwiek liczby dodajemy ujemną, to daną liczbę zmniejszamy.*

Odejmowanie. **26.** Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu ze znanej sumy dwu składników (odjemnej) i ze znanego jednego z tych składników (odjemnika) znalezienie drugiego składnika (reszty albo różnicy). To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy liczby dane są dodatne, czyteż ujemne. Dlatego określenie odejmowania, podane w arytmetyce, utrzymuje się także w algebrze. Powiemy więc: *odejmowanie jestto działanie, w którem mając dwie liczby, odjemną i odjemnik, szukamy liczby, zwanej resztą albo różnicą, takiej, iżby suma jej i odjemnika przedstawiała odjemną.*

W arytmetyce przyjmowało się, iż odjemna nie jest mniejsza od odjemnika, w algebrze nie robimy żadnego pod tym względem zastrzeżenia (art. 4, 11).

27. Gdy mamy od liczby a odjąć liczbę b, to ich różnica jest $a - b$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Jeżeli $a = +\alpha$, $b = +\beta$, to różnica wynikająca z odejmowania $(+\alpha) - (+\beta)$ jest liczbą, do której dodając odjemnik $+\beta$ otrzymać mamy odjemną $+\alpha$. Taką liczbą będzie liczba złożona z dwu części: jednej, która się zniesie z odjemnikiem $+\beta$, a więc $-\beta$ (art. 20); drugiej, przedstawiającej odjemną $+\alpha$. Jest przeto nią liczba $-\beta + \alpha$ czyli (art. 21) liczba $+\alpha - \beta$. Jakoż, dodając do niej odjemnik $+\beta$, otrzymujemy $+\alpha - \beta + \beta = +\alpha$, odjemnej. Jest zatem $+\alpha - \beta$ szukaną resztą, tak iż

$$(+\alpha) - (+\beta) = +\alpha - \beta.$$

2). $a = +\alpha$, $b = -\beta$. Szukana różnica, którą otrzymamy z odejmowania $(+\alpha) - (-\beta)$, jest liczbą, do której dodając odjemnik $-\beta$ otrzymać mamy odjemną $+\alpha$. Taką liczbą będzie liczba złożona z dwu części: jednej $+\beta$, znoszącej się z odjemnikiem $-\beta$; drugiej przedstawiającej odjemną $+\alpha$. Jest nią przeto liczba $+\beta + \alpha$ czyli $+\alpha + \beta$. Jakoż, $+\alpha + \beta - \beta = +\alpha$, odjemnej. Jest zatem

$$(+\alpha) - (-\beta) = +\alpha + \beta.$$

3). $a = -\alpha$, $b = +\beta$. Rozumując podobnie, jak poprzednio, znajdziemy, iż

$$(-\alpha) - (+\beta) = +\alpha - \beta.$$

4). $a = -\alpha$, $b = -\beta$. Podobnie znajdziemy, iż

$$(-\alpha) - (-\beta) = -\alpha + \beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia różnicy dwu liczb, widzimy, że, *aby wykonać odejmowanie dwu liczb, należy do odjemnej przypisać odjemnik ze zmienionym znakiem.*

28. Ponieważ od danej liczby odjąć pewną liczbę jest to samo, co do danej liczby dodać liczbę o przeciwnym znaku (art. 22), przeto, według art. 25-go, *gdy od danej liczby odejmujemy liczbę dodatną, to daną liczbę zmniejszamy,* zaś *gdy od danej liczby odejmujemy liczbę ujemną, to daną liczbę powiększamy.*

Mnożenie. **29.** W arytmetyce tak się ogólnie określa mnożenie: mnożenie jestto działanie, w którem, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, szukamy liczby, zwanej iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności. W tem określeniu przez »powstawanie mnożnika z jedności« rozumiemy, iż mnożnik całkowity jest sumą jedności, zaś mnożnik ułamkowy powstaje z jedności w sposób określony w art. 9-ym.

W algebrze jednak mamy dwie jedności: dodatną i ujemną (art. 6); przeto w określeniu mnożenia należy wprowadzić wyrażenie »powstaje z jedności dodatnej«. Powiemy więc ogólnie: *mnożenie jestto działanie, w którem mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, szukamy liczby zwanej iloczynem, którą otrzymać możemy z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności dodatnej.* Powstawanie mnożnika ujemnego z jedności dodatnej pojmować należy zgodnie z tem, cośmy mówili w art. 7-ym i 12-ym.

Ponieważ w algebrze mamy do czynienia tylko z liczbami oderwanemi (art. 14), przeto o mnożnej i mnożniku możemy mówić zawsze jako o czynnikach iloczynu.

30. Gdy mamy liczbę a pomnożyć przez liczbę b, to ich iloczyn piszemy albo $a \times b$, albo $a.b$, alboteż ab. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β. Dla ogólności rozumowania przyjmiemy, że mnożnik b jest liczbą ułamkową, której wartość bezwzględną β wyrazimy w postaci ułamka $\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami całkowitemi (art. 17).

1). Liczbę dodatną pomnożyć przez dodatną; $a = +\alpha$, $b = +\beta = +\frac{\lambda}{\mu}$.

Mnożnik $+\frac{\lambda}{\mu}$ powstał z jedności dodatnej (art. 9) wskutek tego, żeśmy μ-tą część liczby $+1$, t.j. $+\frac{1}{\mu}$, wzięli jako składnik λ razy,

$$\text{mnożnik, } +\frac{\lambda}{\mu}, \ldots +1; \quad \mu\text{-ta część, } +\frac{1}{\mu}; \; +\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots (\lambda \text{ razy}).$$

Należy taksamo postąpić z mnożną $+\alpha$, aby otrzymać z niej iloczyn $(+\alpha).(+\beta)$. Należy więc μ-tą część mnożnej $+\alpha$, t. j. liczbę $\frac{+\alpha}{\mu}$, wziąć jako składnik λ razy,

$$\text{iloczyn} \ldots +\alpha; \quad \mu\text{-ta część, } +\frac{\alpha}{\mu}; \; +\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\ldots (\lambda \text{ razy}).$$

Ponieważ ostatnia suma jest $+\frac{\alpha.\lambda}{\mu}$, czyli $\alpha \times \frac{\lambda}{\mu}$, czyli $+\alpha.\beta$, przeto

$$(+\alpha).(+\beta) = +\alpha.\beta.$$

2). Liczbę dodatną pomnożyć przez ujemną; $a = +\alpha$, $b = -\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Mnożnik $-\frac{\lambda}{\mu}$ powstał z $+1$ w ten sposób (art. 12), iż wziąwszy μ-tą część liczby $+1$, t. j. liczbę $+\frac{1}{\mu}$, zmieniliśmy jej znak i liczbę $-\frac{1}{\mu}$ wzięliśmy jako składnik λ razy,

mnożnik, $-\frac{\lambda}{\mu} \ldots +1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{1}{\mu}$; $-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\ldots$ (λ razy).

Tak, jak tu z $+1$ otrzymaliśmy mnożnik $-.\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$, należy z mnożnej $+\alpha$ otrzymać iloczyn $(+\alpha).(-\beta)$. Weźmiemy więc mnożnej $+\alpha$ część μ-tą, a tak otrzymawszy liczbę $\frac{\alpha}{\mu}$, zmienimy jej znak i liczbę $-\frac{\alpha}{\mu}$ weźmiemy jako składnik λ razy,

iloczyn $\ldots +\alpha$; μ-ta część, $+\frac{\alpha}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{\alpha}{\mu}$; $-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\ldots$ (λ razy).

Otrzymaliśmy więc $-\frac{\alpha.\lambda}{\mu}$, czyli $-\alpha\times\frac{1}{\mu}$, czyli $-\alpha.\beta$; przeto

$$(+\alpha).(-\beta) = -\alpha.\beta.$$

3). Liczbę ujemną pomnożyć przez dodatną; $a = -\alpha$, $b = +\beta = +\frac{\lambda}{\mu}$.

Rozumując jak w przypadku 1-ym, mamy:

mnożnik, $+\frac{\lambda}{\mu}, \ldots +1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; $+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots$ (λ razy)

iloczyn $\ldots -\alpha$; μ-ta część, $-\frac{\alpha}{\mu}$; $-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\ldots$ (λ razy); $-\frac{\alpha.\lambda}{\mu} = -\alpha.\beta$;

$$(-\alpha).(+\beta) = -\alpha.\beta.$$

4). Liczbę ujemną pomnożyć przez ujemną; $a = -\alpha$, $b = -\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Rozumując jak w przypadku 2-im, mamy:

mnoż. $-\frac{\lambda}{\mu}, \ldots +1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{1}{\mu}$; $-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\ldots$ (λ razy)

iloczyn $\ldots -\alpha$; μ-ta część, $-\frac{\alpha}{\mu}$; zmienić znak, $+\frac{\alpha}{\mu}$; $+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\ldots$ (λ razy); $+\frac{\alpha.\lambda}{\mu} = +\alpha.\beta$;

$$(-\alpha).(-\beta) = +\alpha.\beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia iloczynu dwu liczb, widzimy, że *iloczyn dwu liczb ma wartość bezwzględną równą iloczynowi bezwzględnych wartości czynników i jest dodatny, kiedy one są jednakowego znaku, zaś ujemny, kiedy one są różnego znaku.*

31. Gdy mamy iloczyn trzech lub więcej liczb, np. liczb: a, b, c, d, e, to przez to rozumiemy, iż liczbę ab, otrzymaną z pomnożenia dwu pierwszych czynników, mnożymy przez trzeci czynnik c, tak powstałą liczbę abc przez czwarty d i t. d. Jeżeli więc mamy np. iloczyn $abcde$, a wartości bezwzględne jego czynników nazwiemy odpowiednio α, β, γ, δ, ε, i gdy jest np. $a = -\alpha$, $b = +\beta$, $c = -\gamma$, $d = -\delta$, $e = +\varepsilon$, to

$$(-\alpha).(+\beta).(-\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) = (-\alpha\beta).(-\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) = (+\alpha\beta\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) =$$
$$= (-\alpha\beta\gamma\delta).(+\varepsilon) = -\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.$$

Zauważmy, że przy wyznaczeniu znaku iloczynu, nie potrzeba zważać na czynniki dodatne, ani też na żadnę parę czynników ujemnych; możemy więc powiedzieć, że *iloczyn ma znak* $+$, *kiedy niema czynników ujemnych lub kiedy ich ilość jest parzysta, ma zaś znak* $-$, *kiedy ilość czynników ujemnych jest nieparzysta; bezwzględna zaś wartość iloczynu jest równa iloczynowi bezwzględnych wartości czynników.*

32. Z arytmetyki wiemy, że wartość iloczynu pewnej ilości czynników (dodatnych) nie zależy od ich porządku.

Jeżeli w iloczynie pewnej ilości czynników, pośród których są ujemne, zmienimy porządek czynników, to tak powstały iloczyn ma tę samę ilość czynników ujemnych, co pierwotny, a więc znak obu iloczynów będzie ten sam, bezwzględna zaś wartość każdego z tych iloczynów nie ulegnie zmianie. Możemy zatem powiedzieć ogólnie: *iloczyn pewnej ilości czynników nie zależy od ich porządku.*

Wskutek tego np. $a.b.c.d.e.f = b.d.a.f.e.c = (bd).a.f.e.c = f.e.c.a.(bd) = (fec).a.(bd) = (bd).a.(fec)$, co łatwo wysłowić.

33. W art. 30-ym nie mieliśmy na uwadze przypadku, kiedy czynnikiem iloczynu jest liczba zero (art. 5). Dlatego, ze względu na określenie mnożenia (art. 29), ten czynnik zero przyjmiemy raz jako mnożną, drugim zaś razem jako mnożnik.

Gdy mamy np. $(-3\frac{1}{2})\times 0$, to, ponieważ mnożnik $0 = +1 - 1$ (art. 6), iloczyn równa się $(-3\frac{1}{2}) + (+3\frac{1}{2})$, $-3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 0$. Jest więc $(-3\frac{1}{2})\times 0 = 0$.

Gdy zaś mamy $0\times(-3\frac{1}{2})$, to, wykonywając na mnożnej działania, które należało wykonać, aby z $+1$ otrzymać $-3\frac{1}{2}$ (art. 30), nie zmienilibyśmy mnożnej, tak iż $0\times(-3\frac{1}{2}) = 0$.

Wskutek tego także (art. 31) np. $(-5)\times(-4)\times 0\times(+5\frac{1}{2}) = 0$ i t. d.

A zatem *iloczyn pewnej ilości czynników, pośród których jest liczba 0, przedstawia liczbę 0.* Odwrotnie, jeżeli wiemy, iż iloczyn pewnej ilości czynników jest równy zeru, to nie mogą czynniki tego iloczynu być wszystkie od zera różne, gdyż w takim razie iloczyn ich byłby liczbą różną od zera; a więc, *jeżeli iloczyn pewnej ilości czynników jest równy zeru, to pośród nich jest czynnik równy zeru (przynajmniej jeden).*

Dzielenie. **34.** Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników, ma na celu ze znanego iloczynu dwu czynników (dzielnej) i znanego jednego z tych czynników (dzielnika) znalezienie drugiego czynnika (ilorazu). To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy liczby dane są dodatne, czyteż ujemne. Dlatego określenie dzielenia podane w arytmetyce, utrzymuje się także w algebrze.

Powiemy więc: *dzielenie jestto działanie, w którem mając dane dwie liczby, dzielną i dzielnik, szukamy liczby, zwanej ilorazem, takiej, iżby iloczyn ilorazu i dzielnika przedstawiał dzielną.*

35. Gdy mamy liczbę a podzielić przez liczbę b, to ich iloraz piszemy albo $a : b$, albotеż $\frac{a}{b}$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Liczbę dodatną podzielić przez dodatną; $a = +\alpha$, $b = +\beta$. Ponieważ dzielna jest iloczynem dzielnika i ilorazu, przeto: popierwsze, przy dzielnej dodatnej dzielnik i iloraz są jednakowego znaku (art. 30), a zatem przy dzielniku dodatnym iloraz jest dodatny; powtóre, otrzymamy bezwzględną wartość ilorazu, dzieląc α, bezwzględną wartość dzielnej, przez β, bezwzględną wartość dzielnika. Jest więc

$$(+\alpha):(+\beta) = +\frac{\alpha}{\beta}.$$

2). Liczbę dodatną podzielić przez ujemną; $a = +\alpha$, $b = -\beta$. Ponieważ dzielna jest dodatna, więc dzielnik i iloraz są jednakowego znaku; że zaś dzielnik jest ujemny, przeto iloraz jest również ujemny. Bezwzględna zaś wartość ilorazu jest $\frac{\alpha}{\beta}$. Mamy zatem

$$(+\alpha):(-\beta) = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

3). Liczbę ujemną podzielić przez dodatną; $a = -\alpha$, $b = +\beta$. Ponieważ dzielna jest ujemna, przeto (art. 30) dzielnik i iloraz są przeciwnego znaku; że zaś dzielnik jest dodatny, zatem iloraz jest liczbą ujemną. Mamy przeto

$$(-\alpha):(+\beta) = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

4). Liczbę ujemną podzielić przez ujemną; $a = -\alpha$, $b = -\beta$. Dzielna jest ujemna, a więc iloraz jest przeciwnego znaku niż dzielnik; że zaś dzielnik jest ujemny, zatem iloraz jest dodatny. Mamy przeto

$$(-\alpha):(-\beta) = +\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia ilorazu dwu liczb, widzimy, że *iloraz dwu liczb ma wartość bezwzględną, równą ilorazowi wartości bezwzględnych dzielnej i dzielnika, i jest dodatny, kiedy one są jednakowego znaku, zaś ujemny, kiedy one są różnego znaku.*

36. Przypuśćmy, że z podzielenia jednej liczby przez inną, z których każda mogła być czyto dodatna czyteż ujemna, otrzymaliśmy iloraz. Jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samę liczbę dodatną, to tak znak dzielnej jak i znak dzielnika (art. 30), a wskutek tego i znak ilorazu, pozostaną niezmienione; bezwzględne zaś wartości dzielnej i dzielnika zostaną pomnożone przez tę samę liczbę, a więc także bezwzględna wartość ilorazu nie ulegnie zmianie. Jeżeli zaś dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samę liczbę ujemną, to tak znak dzielnej jak i dzielnika zmienią się na przeciwne, a więc iloraz znaku swego nie zmieni, a jego wartość bezwzględna także nie ulegnie zmianie. Taksamo możnaby objaśnić, że iloraz się nie zmienia, tak co do znaku, jak i co do wartości bezwzględnej, jeżeli dzielną i dzielnik podzielimy jednocześnie przez tę samę liczbę, czyto dodatną, czyteż ujemną. Powiemy więc ogólnie: *gdy dzielną i dzielnik albo jednocześnie pomnożymy alboteż jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę, to iloraz pozostanie bez zmiany.*

37. Utrzymując znane z arytmetyki pojęcie odwrotności liczby, powiemy, iż dwie liczby są wtedy odwrotnościami, każda pozostałej, kiedy ich iloczyn jest równy $+1$; tak np. odwrotnością liczby $-\frac{2}{5}$ jest $-2\frac{1}{2}$ i nawzajem odwrotnością liczby $-2\frac{1}{2}$ jest $-\frac{2}{5}$. Wogóle odwrotnością liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$.

Prawidło na dzielenie jednej liczby przez drugą moglibyśmy krótko tak wysłowić (art. 35, 30): *chcąc jednę liczbę podzielić przez drugą, można pierwszą pomnożyć przez odwrotność drugiej.*

38. Należy jeszcze rozważyć przypadek, kiedy albo dzielna, albo dzielnik, albo też obie te liczby jednocześnie, są zerami.

Jeżeli mamy liczbę zero podzielić przez liczbę od zera różną, to, zważywszy, że dzielna jest iloczynem dzielnika i ilorazu, możemy powiedzieć, iż mamy iloczyn dwu czynników równy 0. Wtedy pośród tych czynników jest czynnik równy 0 (art. 33). Że zaś dzielnik jest od zera różny, przeto 0 jest ilorazem. A więc *iloraz z podzielenia zera przez liczbę różną od zera, jest równy zeru.*

Jeżeli mamy liczbę zero podzielić przez liczbę zero, to wtedy dzielna, iloczyn dzielnika i ilorazu, jest zerem, a jeden z jej czynników, dzielnik, jest także równy zeru. Jakikolwiekby więc był drugi czynnik, iloraz, zawsze iloczyn jego i dzielnika 0 wyda dzielną 0 (art. 33). A więc w tym razie iloraz może być jakąkolwiek liczbą, czyli liczba będąca tu ilorazem nie może być oznaczona, co zwykle tak wypowiadamy: iloraz jest liczbą nieoznaczoną (unbestimmte Z.). Zatem *iloraz z podzielenia liczby zero przez liczbę zero jest liczbą nieoznaczoną.*

Nakoniec, jeżeli mamy liczbę różną od zera podzielić przez liczbę zero, to mamy wówczas różny od zera iloczyn dwu czynników, z których jeden jest liczbą 0. Jakąkolwiek wzięlibyśmy liczbę jako drugi czynnik iloczynu, to zawsze po pomnożeniu jej przez 0 wypadłaby liczba 0, a tymczasem ma wypaść liczba różna od zera. Aby ten przypadek zrozumieć, weźmy przykład na dzielenie, np. $8:0{\cdot}2=40$. Jeżeli dzielnik weźmiemy 10 razy mniejszy, to iloraz wypadnie 10 razy większy, $8:0{\cdot}02=400$; podobnie $8:0{\cdot}002=4000$, i t. d. Widzimy więc, że, wmiarę jak dzielnik staje się mniejszym (przy tej samej wciąż dzielnej), iloraz odpowiednio coraz się zwiększa. Jeżeli dzielnik stanie się bardzo małą liczbą, to iloraz będzie liczbą bardzo wielką. Gdy tak dzielnik coraz pewną ilość razy zmniejszamy, to wprawdzie zbliżamy się do zera, ale doń nie dochodzimy, otrzymując jednocześnie w ilorazie coraz większe liczby. Owóż powiadamy, że iloraz z podzielenia liczby różnej od zera przez zero wypadnie większy od jakkolwiek wielkiej liczby. Ponieważ iloraz uważać zawsze chcemy za liczbę, przeto się mówi w tym razie, że iloraz będzie liczbą większą od jakkolwiek wielkiej liczby. Powiemy więc: *Iloraz z podzielenia liczby różnej od zera przez zero jest liczbą większą od jakkolwiek wielkiej liczby.* Zamiast mówić: liczba większa od jakkolwiek wielkiej liczby, mówić się zwykło przez skrócenie: liczba nieskończenie wielka (unendlich grosse Z.), a oznacza się ją znakiem: ∞.

Mając np. $8:(-0{\cdot}2)=-40$, zmniejszmy 10 razy wartość bezwzględną dzielnika; wówczas iloraz ujemny będzie miał wartość bezwzględną 10 razy większą, $8:(-0{\cdot}02)=-400$; podobnie $8:(-0{\cdot}002)=-4000$ i t. d. W tym przykładzie, wmiarę jak (przy tej samej wciąż dzielnej) wartość bezwzględna dzielnika, wciąż malejąc, staje się równą zeru, wartość bezwzględna ujemnego ilorazu, wciąż wzrastając, staje się większą od jakkolwiek wielkiej liczby. Mówimy wtedy, że iloraz staje się **liczbą nieskończenie wielką ujemną**; oznaczamy ją: $-\infty$. W przeciwstawieniu temu liczbę nieskończenie wielką, o której mówiliśmy w poprzednim przykładzie, nazywamy **liczbą nieskończenie wielką dodatną**, co wyraźnie zaznaczamy, pisząc: $+\infty$.

Liczba, która nie jest nieskończenie wielka, nazywa się **liczbą skończoną** (endliche Z.).

39. Utrzymując znane z arytmetyki pojęcie średniej arytmetycznej liczb danych, powiemy, iż **średnia arytmetyczna** (arithmetisches Mittel) jestto liczba, którą biorąc zamiast każdej z liczb danych, otrzymalibyśmy tę samę sumę, co z dodania liczb danych. Tak np. średnią arytmetyczną liczb: $5, -9, -2, 0, +2, +1$ jest liczba $-\frac{1}{2}$, gdyż suma sześciu składników $-\frac{1}{2}$ jest równa sumie $5-9-2+0+2+1$; średnia arytmetyczna liczb $+2, -3, +1$ jest 0; w pierwszym przykładzie $\frac{+5-9-2+0+2+1}{6}=-\frac{1}{2}$, w drugim $\frac{+2-3+1}{3}=\frac{0}{3}=0$. Zatem *średnia arytmetyczna liczb danych jest równa sumie liczb danych, podzielonej przez ich ilość.*

40. Gdy mamy liczby różne od zera, np. $-2, \frac{3}{2}, -5$, to średnia arytmetyczna ich odwrotności, t. j. średnia arytmetyczna liczb $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}$ jest $-\frac{1}{90}$; odwrotność zaś tej liczby, t. j. liczba -90, nazywa się **średnią harmoniczną** (harmonisches Mittel) liczb danych $-2, \frac{3}{2}, -5$. Powiemy więc: *średnia harmoniczna liczb danych jestto liczba, której odwrotność jest średnią arytmetyczną odwrotności liczb danych.*

ZNAKI + LUB − PRZED LITERAMI, OZNACZAJĄCEMI LICZBY.

41. Przed literą np. a, oznaczającą liczbę, może stać znak $+$, lub znak $-$, t. j. możemy mieć $+a$ lub $-a$.

Wartość bezwzględną liczby a nazwijmy α; może być albo $a=+\alpha$, albo też $a=-\alpha$. A więc $+a$ oznacza albo $+(+\alpha)$, albo $+(-\alpha)$, zaś $-a$ oznacza albo $-(+\alpha)$, albo $-(-\alpha)$.

Gdy mamy $+a$, to możemy liczbę a uważać za drugi składnik sumy, której pierwszym składnikiem jest liczba 0. Mamy więc (art. 19):

$$\text{albo} \quad +a=0+(+\alpha)=0+\alpha=+\alpha=a,$$
$$\text{albo} \quad +a=0+(-\alpha)=0-\alpha=-\alpha=a.$$

Gdy mamy $-a$, to możemy liczbę a uważać za odjemnik w różnicy, której odjemną jest liczba 0. Mamy więc (art. 27):

$$\text{albo} \quad -a=0-(+\alpha)=0-\alpha=-\alpha, \text{ gdy tymczasem } a=+\alpha,$$
$$\text{albo} \quad -a=0-(-\alpha)=0-\alpha=+\alpha, \text{ gdy tymczasem } a=-\alpha.$$

A zatem: $+a$ *jest toż samo, co* a, zaś $-a$ *oznacza liczbę przeciwnego znaku, niż* a. Jest więc $-a$ przy a dodatnem liczbą ujemną, zaś przy a ujemnem liczbą dodatną.

Dlatego o różnicy $a-b$ liczb a i b mówić możemy (art. 27, 19), iż ona jest sumą liczb a i $-b$.

42. Jakakolwiek jest liczba a, dodatna czy ujemna, po pomnożeniu jej przez -1, otrzymujemy liczbę różniącą się tylko znakiem (art. 30); a więc

$$a.(-1)=(-1).a=-a,$$

t. j. *mnożąc liczbę przez* -1 *zmieniamy jej znak.* Nawzajem liczbę $-a$ możemy uważać za iloczyn $(-1).a$ lub $a.(-1)$.

43. Wiemy, że, aby wykonać dodawanie dwu liczb, należy do pierwszego składnika przypisać drugi z jego znakiem (art. 19), aby zaś wykonać odejmowanie dwu liczb należy do odjemnej przypisać odjemnik ze zmienionym znakiem (art. 27). Te prawidła odnoszą się wprost do liczb przedstawionych ogólnie przez litery ze znakami. Kiedy zatem jedna z tych liczb jest $+a$ albo $-a$, a druga $+b$ albo $-b$, to:

$$(+a)+(+b)=+a+b,$$
$$(+a)+(-b)=+a-b,$$
$$(-a)+(+b)=-a+b,$$
$$(-a)+(-b)=-a-b,$$

jakoteż:

$$(+a)-(+b)=+a-b,$$
$$(+a)-(-b)=+a+b,$$
$$(-a)-(+b)=-a-b,$$
$$(-a)-(-b)=-a+b.$$

Ale prawideł, wyprowadzonych na mnożenie i dzielenie (art. 30, 35), nie możemy wprost odnieść do liczb: jednej $+a$ lub $-a$, a drugiej $+b$ lub $-b$, gdyż nie wiemy, jaka jest każda z tych liczb, dodatna czy ujemna.

Zważmy, że, podobnie jak $+a=a$ (art. 41), jest $ab=+ab$ i, podobnie jak $-a=(-1).a$ (art. 42), jest $(-1).ab=-ab$. Będzie zatem (art. 32):

$$(+a).(+b)=a.b=+ab,$$
$$(+a).(-b)=a.(-1).b=(-1).ab=-ab,$$
$$(-a).(+b)=(-1).a.b=(-1).ab=-ab,$$
$$(-a).(-b)=(-1).a.(-1).b=(-1).(-1).a.b=(+1).(+ab)=+ab.$$

A więc, *aby mieć iloczyn dwu liczb przedstawionych przez litery ze znakami* $+$ *lub* $-$, *przed iloczynem liczb, przedstawionych przez same litery, stawiamy znak* $+$ *lub* $-$ *stosownie do tego, czy znaki przed literami są jednakowe, czyteż różne.*

Korzystając z tych samych własności, co powyżej, oraz z tego, że, aby jednę liczbę podzielić przez drugą, można pierwszą pomnożyć przez odwrotność drugiej (art. 37), mamy:

$$(+a):(+b)=\frac{a}{b}=+\frac{a}{b},$$

$$(+a):(-b)=a.\left(-\frac{1}{b}\right)=a.(-1).\frac{1}{b}=(-1).\left(a\times\frac{1}{b}\right)=(-1).(a:b)=$$
$$=(-1).\frac{a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$(-a):(+b)=(-1).a\times\frac{1}{b}=(-1).\left(a\times\frac{1}{b}\right)=(-1).(a:b)=(-1).\frac{a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$(-a):(-b)=(-1).a.\left(-\frac{1}{b}\right)=(-1).a.(-1).\frac{1}{b}=(-1).(-1).\left(a\times\frac{1}{b}\right)=$$

$$=(+1).(a:b)=(+1).\left(+\frac{a}{b}\right)=+\frac{a}{b}.$$

A więc, *aby mieć iloraz dwu liczb przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, przed ilorazem liczb przedstawionych przez same litery stawiamy znak + lub — stosownie do tego, czy znaki przed literami są jednakowe czyteż różne.*

44. Gdy mamy iloczyn trzech lub więcej czynników (por. art. 31) przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, to stosując stopniowo tylkoco udowodnione prawidła na tworzenie iloczynu dwu takich czynników, łatwo okażemy, iż, *aby utworzyć iloczyn czynników, przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, należy przed iloczynem czynników, przedstawionych przez same litery, postawić znak —, jeżeli ilość znaków — w oddzielnych czynnikach była nieparzysta, w przeciwnym zaś razie znak +.* Np.

$$(+a).(-b).c.(-d).e.(-f)=-abcdef.$$

Nadal nie będziemy uwzględniali znaków + lub — przed literami w oddzielnych czynnikach iloczynu, lecz będziemy rozważali tylko iloczyn liczb, przedstawionych przez same litery, poprzedzony znakiem + lub —.

SPÓŁCZYNNIK.

45. Jeżeli w iloczynie kilku czynników np. $+abcdef$ przez e rozumieć chcemy pewną liczbę, np. 3, albo $\frac{4}{5}$, to w takim razie ten czynnik piszemy przed iloczynem pozostałych czynników (art. 32) i nazywamy go **spółczynnikiem** (Coefficient) iloczynu $+abcdf$; będziemy więc w pierwszym razie mieli $+3abcdf$, w drugim zaś $+\frac{4}{5}abcdf$. Gdybyśmy w tymże iloczynie $abcdef$ liczbie e nadali wartość -6 mielibyśmy $-6abcdf$; tu liczba dodatna 6 jest spółczynnikiem iloczynu $-abcdf$.

Takie iloczyny np. $+\frac{4}{5}abcdf$ lub $-6abcdf$ możemy uważać za iloczyny dwu czynników:

$$+\tfrac{4}{5}abcdf=+abcdf.\tfrac{4}{5},\qquad -6abcdf=-abcdf.6.$$

Możemy przeto powiedzieć: *spółczynnik jest dodatnym mnożnikiem tej litery lub tego iloczynu liter przedstawiających liczby, przy którym on się znajduje,* a w szczególnym przypadku (art. 29) *spółczynnik całkowity wskazuje, ile razy to, przy czem on stoi, ma być wzięte jako składnik.* Gdy nie ma wypisanego spółczynnika, to za spółczynnik możemy uważać 1, np. $-abc=$ $=-1.abc$.

Ponieważ np. $\dfrac{4abc}{5}=(abc.4)\times\frac{1}{5}=abc.4\times\frac{1}{5}=abc.\frac{4}{5}$, (art. 32), przeto zamiast $\dfrac{4abc}{5}$ możemy pisać $\frac{4}{5}abc$. Podobnie $-\dfrac{abc}{7}=-\frac{1}{7}abc$.

46. Niekiedy w iloczynie kilku liter niektóre mogą mieć szczególne znaczenie, inne niż liter pozostałych. W takim razie owe szczególne czynnikii pisze się zwykle na końcu iloczynu i wówczas iloczyn pozostałych czynników, choćby między niemi były litery, nazywamy spółczynnikiem. Tak np., jeżeli w iloczynie auv literom u i v przypiszemy szczególne znaczenie, odmienne od znaczenia, jakie ma litera a, to powiemy, że tu a jest spółczynnikiem iloczynu uv, choćby nawet a otrzymać miało wartość ujemną. Jeżeli podobnie pojmujemy te litery w iloczynie $2auv$, to tu $2a$ nazywamy spółczynnikiem iloczynu uv.

WYKŁADNIK. PODNOSZENIE DO POTĘGI.

47. Gdy mamy iloczyn jednakowych czynników, np. iloczyn czterech czynników a, $aaaa$, to nazywamy go 4-tą **potęgą** (Potenz) liczby a. Wogóle 2-gą, 3-cią, 4-tą, . . ., m-tą potęgą liczby nazywamy iloczyn odpowiednio dwu, trzech, czterech, . . ., m czynników, równych tej liczbie. Zamiast mówić druga i trzecia potęga liczby, mówi się często **kwadrat** (Quadrat) i **sześcian** (Cubus) liczby.

Zamiast pisać np. $aaaa$, piszemy powtarzający się czynnik a raz jeden, dopisując z prawej strony u góry liczbę, wskazującą, ile razy liczba a wzięta jest jako czynnik; zatem $aaaa = a^4$. Taką liczbę, jak tu 4, nazywamy **wykładnikiem potęgi** (Exponent), sam zaś czynnik, przy którym się znajduje wykładnik, nazywamy **podstawą potęgi** (Basis). A więc *wykładnik oznacza, ile razy liczba, przy której on stoi, ma być wzięta jako czynnik.*

Oczywiście, że $a^1 = a$, a więc pierwszą potęgą liczby jest taż liczba. Przy każdej przeto liczbie, nie mającej wykładnika, możemy sobie wystawić domyślny wykładnik 1.

Iloczyn $-5aaaabcc$ możemy napisać $-5a^4bc^2$.

48. Jeżeli wartość bezwzględną liczby a nazwiemy α, zaś m jest liczbą całkowitą i dodatną, to (art. 31) jest $(+\alpha)^m = +\alpha^m$, liczbie dodatnej.

Gdy przez p rozumieć będziemy liczbę całkowitą i dodatną, to, w razie m parzystego, możemy napisać $m = 2p$, i jest $(-\alpha)^{2p} = +\alpha^{2p}$, liczbie dodatnej.

Gdy przez p rozumieć będziemy liczbę całkowitą i dodatną, lub 0, to, w razie m nieparzystego, możemy przyjąć $m = 2p+1$, i jest $(-\alpha)^{2p+1} = -\alpha^{2p+1}$, liczbie ujemnej.

A więc: *potęga liczby dodatnej i parzysta potęga liczby ujemnej są liczbami dodatnemi,* zaś *nieparzysta potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną.*

49. Otrzymywanie m-tej potęgi liczby a nazywamy **podnoszeniem** a **do potęgi** m-tej (Potenziren, zur m-ten Potenz erheben). Powstaje więc nowe działanie: podnoszenie liczb do potęgi.

Mamy już przeto pięć działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi.

Czytając a^m, zamiast mówić: a podniesione do potęgi m-tej, mówimy krótko: a do m-tej. Podobnie a^4bc^2 przeczytamy: a do 4-tej, b, c do kwadratu.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE.

50. Wszelkie połączenie pewnej ilości liczb, z których przynajmniej jedna jest wyrażona przez literę, zapomocą znaków, oznaczających działania, wykonywane w algebrze, nazywamy wyrażeniem algebraicznem (algebraischer Ausdruck). Tak np.

$$+\tfrac{3}{4}a^3b^2c, \quad -\tfrac{3}{4}a^2bc^3-4a^6+7+\frac{b^5c}{4}, \quad -\frac{5a^2bc^3+7b^6}{2a^2b}-4a^5c+\frac{7a^2b^5}{9c}$$

są wyrażeniami algebraicznemi.

Pierwsze i drugie z wypisanych wyrażeń nazywamy wyrażeniami algebraicznemi całkowitemi, trzecie zaś, w którem w dzielniku znajduje się liczba, wyrażona przez literę, nazywamy wyrażeniem algebraicznem ułamkowem.

Wyrażenie algebraiczne jest całkowite wtedy, kiedy na liczbach, wyrażonych przez litery, mogą być wskazane do wykonania tylko dodawanie, odejmowanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi.

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznem, w którem mogą być wskazane do wykonania na liczbach, wyrażonych przez litery, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi, jest wskazane dzielenie, a w dzielniku znajduje się liczba, wyrażona przez literę, to nazywamy je ułamkowem.

Przez wyrażenie liczebne rozumieć należy połączenie liczb, pośród których niema liczby, wyrażonej przez literę, zapomocą znaków, wskazujących działania, mające się uskutecznić na tych liczbach.

JEDNOMIANY I WIELOMIANY.

51. Wyrażenie algebraiczne całkowite, w którem tylko na początku znajdować się może znak + lub —, nazywamy jednomianem (Monom); a więc *jednomian jest iloczynem, wziętym ze znakiem + lub —, spółczynnika i jednej lub więcej liczb, wyrażonych przez litery z wykładnikami.* Zwykle litery, znajdujące się w jednomianie, wypisujemy (wraz z ich wykładnikami) w takim porządku, w jakim one w alfabecie po sobie następują.

52. Wyrażenie algebraiczne całkowite, utworzone z dwu lub więcej jednomianów, nazywa się wielomianem (Polynom), a wtedy każdy z tych jednomianów nazywamy także wyrazem wielomianu (Glied d. P.); tak np. drugie z wyrażeń art. 50-go jest wielomianem. W tym wielomianie prócz jednomianów jest część + 7, do której nie wchodzi litera; uważamy ją także za wyraz wielomianu; ów zatem wielomian ma cztery wyrazy.

Jeżeli wielomian ma dwa wyrazy, to nazywamy go dwumianem (Binom), jeżeli trzy trójmianem (Trinom), i t. d.; wspomniany więc wielomian jest czworomianem.

Jeżeli pierwszy wyraz wielomianu ma znak +, to często ten znak opuszczamy. Wyraz wielomianu, mający lub mogący mieć znak +, nazywać będziemy wyrazem o znaku więcej, wyraz zaś, mający znak —, wyrazem o znaku mniej.

53. Jeżeli mamy jednomian $-5\,a^2\,b^3c$, to mamy tu przez litery a, b i c oznaczone liczby. Nadając literom a, b, c wartości np. $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{5}$, $c=\frac{5}{3}$, mieć będziemy $-5a^2b^3c=\frac{4}{5}$. Widzimy więc, że *jednomian przedstawia liczbę;* ta liczba zależy od tego, jakie wartości nadawać będziemy literom, wchodzącym w skład jednomianu.

Dwa jednomiany, różniące się tylko znakiem, przedstawiają liczby o tej samej wartości bezwzględnej, lecz przeciwnego znaku; suma zaś ich algebraiczna jest równa zeru i mówimy wtedy, że one »znoszą się« (art. 20).

54. Ponieważ wielomian składa się z jednomianów, a każdy jednomian przedstawia liczbę, przeto również *wielomian jest liczbą.*

Tę liczbę, którą przedstawia wyrażenie algebraiczne, kiedy literom nadaliśmy pewne wartości, nazywamy wartością liczebną wyrażenia algebraicznego (numerischer W. d. alg. A.), odpowiadającą wartościom, które nadaliśmy literom.

55. Ponieważ tak jednomian jak i wielomian jest liczbą, przeto możemy na nich wykonywać działania, wskazując je odpowiedniemi znakami.

Jeżeli mamy wykonać działania na wielomianach, to ujmujemy je w nawiasy; dzielenie jednak dwu wyrażeń, gdy jedno z nich lub oba są wielomianami, możemy także przedstawić w postaci ułamka.

56. Może się zdarzyć, że w wielomianie są wyrazy, w których litery z ich wykładnikami są wszystkie też same; np. w wielomianie

$$-4\,a^2b^3+2\,ab^4-5\,a^2b^3-4\,a^2b^3+7\,b^5+10\,a^2b^3$$

w wyrazach pierwszym, trzecim, czwartym i ostatnim znajdują się a^2 i b^3, a innej litery już niema. Takie wyrazy nazywamy wyrazami podobnemi (gleichartige G., gleichnamige G.).

Wyrazy podobne mają też same litery z ich wykładnikami; różnić się one mogą tylko spółczynnikami i znakami.

Jeżeli mamy np. wielomian

$$4a^3b^5-a^2b^6+\tfrac{3}{5}\,a^2b^6-a^5b^3+8a^2b^6-\tfrac{4}{3}\,a^2b^6+7ab^6$$

czyli $$-a^2b^6+\tfrac{3}{5}\,a^2b^6+8\,a^2b^6-\tfrac{4}{3}\,a^2b^6+4\,a^3b^5-a^5b^3+7\,ab^6$$

(art. 23), to w wyrazach, które są podobne, mamy liczbę a^2b^6, pomnożoną: w pierwszym przez liczbę -1, w drugim przez $+\frac{3}{5}$, w trzecim przez $+8$, w czwartym przez $-\frac{4}{3}$, czyli mamy liczbę a^2b^6, pomnożoną przez liczbę

$$-1+\tfrac{3}{5}+8-1\tfrac{1}{3}=+6\tfrac{4}{15}.$$

Jest więc $-a^2b^6+\frac{3}{5}\,a^2b^6+8\,a^2b^6-\frac{4}{3}\,a^2b^6=+6\frac{4}{15}\,a^2b^6$, tak iż dany wielomian możemy zastąpić przez czworomian

$$6\tfrac{4}{15}\,a^2b^6+4\,a^3b^5-a^5b^3+7ab^6.$$

Zamiast kilku wyrazów podobnych, znajdujących się w wielomianie pierwotnym, napisaliśmy tylko jeden wyraz. Takie postępowanie nazywamy redukcyą wyrazów podobnych (Reduction d. gl. G.) wielomianu. *Redukcya wyrazów podobnych jestto zastąpienie w wielomianie wyrazów podobnych do siebie przez jeden wyraz.*

Widzieliśmy, że, *aby wykonać redukcyą wyrazów podobnych, należy przed czynnikiem, utworzonym przez litery z wykładnikami, znajdującym się w każdym z tych wyrazów, napisać liczbę, którą przedstawia suma algebraiczna spółczynników, wziętych ze znakami wyrazów.*

57. Sumę wykładników nad literami jednomianu nazywamy stopniem jednomianu (Grad); tak np. w jednomianie $6a^3bc^2d$ suma wykładników jest $3+1+2+1=7$, ten jednomian jest więc 7-go stopnia.

Największy ze stopni oddzielnych wyrazów wielomianu jest stopniem wielomianu. Tak np. ostatni wielomian art. poprzedniego jest 8-go stopnia.

Niekiedy mówi się tylko o stopniu wielomianu względem pewnej jednej, albo niektórych, z jego liter. Tak np. wielomian wzmiankowany jest względem litery a stopnia 5-go.

Jeżeli wszystkie wyrazy wielomianu są jednakowego stopnia, to mówimy, że mamy wielomian jednorodny (homogenes P.); tak np. wielomian

$$4a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3 + 7b^4$$

jest wielomianem jednorodnym stopnia 4-go.

58. Jeżeli w wielomianie, w którym znajduje się jedna tylko litera, jest już wykonana redukcya wyrazów podobnych, to wykładniki nad tą literą w oddzielnych wyrazach są różne, np.

$$6a^6 - 5a^2 + 7a^5 - \tfrac{3}{4}a^7 + 8a + a^4 = -\tfrac{3}{4}a^7 + 6a^6 + 7a^5 + a^4 - 5a^2 + 8a.$$

Taki wielomian można (art. 23) uporządkować według liczb, będących wykładnikami litery, t. j. pisać wyrazy po sobie w takiej kolei, iżby owe wykładniki były albo coraz mniejsze (jak w naszym przykładzie), alboteż coraz większe. W pierwszym razie mówimy, iż porządkujemy wielomian podług malejących potęg (nach fallenden P.) litery, w drugim zaś podług rosnących potęg (nach steigenden P.) litery.

Jeżeli mamy w wielomianie dwie litery, to możemy wyrazy uporządkować według rosnących, alboteż według malejących potęg jednej z tych liter, którą nazwiemy literą główną (Ordnungsbuchstabe). Ogólnie mówiąc, mogą tu być dwa, alboteż więcej wyrazów, zawierających jednakowe potęgi litery głównej. Takie wyrazy piszemy zwykle po sobie, porządkując je w taki sam sposób według potęg drugiej litery.

Podobnie postępować możemy, kiedy do wyrazu wielomianu wchodzi więcej liter.

RÓWNOŚĆ. TOŻSAMOŚĆ. RÓWNANIE. NIERÓWNOŚĆ.

59. Gdy np. w wyrażeniach

$$(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2), \quad 8a^3 - b^3$$

nadamy jakąkolwiek, byle w obu tę samę, wartość literze a i również jakąkolwiek, byle w obu tę samę, wartość literze b, to każdym razem okaże się, iż te dwa wyrażenia mają tę samę wartość liczebną, czyli są one równe sobie przy wszelkich wartościach liczb, oznaczonych przez litery. Zaznaczamy to, pisząc

$$(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) = 8a^3 - b^3.$$

To zaznaczenie takiej własności tych dwu wyrażeń stanowi równość (Gleichheit).

Ogólnie powiemy: *zaznaczenie za pomocą znaku =, iż dwa wyrażenia, połączone tym znakiem, są sobie równe przy wszelkich wartościach liter, w ich skład wchodzących, stanowi równość.*

Gdy mamy np. równość

$$7 - a^2b^3 = 5 + 4a^2b^3 + 1:0{\cdot}5 - 5a^2b^3$$

i po znaku = wykonamy redukcyą wyrazów podobnych, jakoteż wskazane działania na liczbach, to będziemy mieli

$$7 - a^2 b^3 = 7 - a^2 b^3.$$

Taki szczególny przypadek równości nazywa się tożsamością, albo identycznością (Identität). *Gdy po obu stronach znaku = mamy jednakowe wyrażenia, to taką równość nazywamy tożsamością.*

60. Gdybyśmy mieli dwa wyrażenia, np. jedno $2a^2+6$, a drugie a^2+5a, i połączyli je znakiem =,

$$2a^2 + 6 = a^2 + 5a,$$

to litera a mogłaby tu mieć wartości tylko $a = 2$ i $a = 3$.

Podobnie np., jeżeli wyrażenia $2b+3c$ i $4-2c$ połączymy znakiem =,

$$2b + 3c = 4 - 2c,$$

to: przy $b = 1$, może być jedynie $c = \frac{2}{5}$; przy $c = -2$, może być jedynie $b = 7$; i t. d.

Mogą więc niekiedy dwa wyrażenia algebraiczne być połączone znakiem = przy warunku, iż nie wszystkim literom, w tych wyrażeniach znajdującym się, możemy nadawać dowolne wartości. Zaznaczenie tego zapomocą znaku = stanowi równanie (Gleichung).

Tak równości, jak i równania, wówczas, kiedy im przypisujemy szczególną doniosłość, nazywamy ogólnie wzorami, albo formułami (Formeln).

61. Jeżeli chcemy zaznaczyć, iż np. 7 jest większe od 5, to piszemy albo $7 > 5$, alboteż $5 < 7$.

Podobnie, jeżeli chcemy zaznaczyć, iż z dwu wyrażeń, np. a^2+b^2 i ab, pierwsze jest, przy wszelkich wartościach liter a i b, większe niż drugie, napiszemy albo $a^2 + b^2 > ab$, alboteż $ab < a^2 + b^2$.

Takie zaznaczenie, iż z liczebnych wartości dwu wyrażeń jedna jest większa niż druga, stanowi nierówność (Ungleichung).

Niekiedy zapomocą nierówności ograniczamy wartości, jakie nadawać możemy literom. Tak np. nierówność $a > 5$ oznacza, iż literze a możemy nadawać tylko wartości większe niż liczba 5. Jeżeli zaś chcemy zaznaczyć, że może być tylko albo $a > 5$, albo $a = 5$, to niekiedy piszemy to krótko $a \geqq 5$. Jeżeli mamy równocześnie dwie nierówności $a < 7$ i $a > -1$, to temsamem mamy tak ograniczone wartości a, iż tej literze możemy nadawać tylko wartości, przypadające między -1 i $+7$, co możemy także tak pisać: $-1 < a < 7$. Niekiedy dla oznaczenia, iż a może otrzymywać tylko wartości różne od liczby b, t. j. dla oznaczenia, iż może być albo $a < b$, alboteż $a > b$, piszemy krótko $a \gtrless b$.

62. W równości, w równaniu i w nierówności wyrażenie, znajdujące się przed znakiem =, albo >, albo <, nazywamy stroną lewą (erster, linker Theil), pozostałe zaś wyrażenie nazywamy stroną prawą (zweiter, rechter Th.). Oddzielne zaś składniki tak na stronie lewej, jak i na stronie prawej, nazywamy wyrazami tych stron, alboteż wyrazami odpowiednio równości, równania, lub nierówności.

WIELKOŚĆ. PEWNIKI.

63. Wszystko to, co pod jakimkolwiek względem mogłoby być mierzone, nazywa się wielkością (Grösse). Tak pojęte wielkości są przedmiotem badań w matematyce i jej zastosowaniach.

Ponieważ wielkość może być mierzona, przeto albo każda wielkość składa się z części, alboteż możemy sobie wyobrazić, iż ona jest z części złożona. Możemy także powiedzieć, iż wielkością jest każdy przedmiot, który może stawać się mniejszym, lub większym.

Oddzielny stan pewnej wielkości, oile go przez mierzenie oznaczyć można, nazywamy jej wartością. Wielkość zatem może, wogóle mówiąc, mieć różne wartości.

Każde wyrażenie algebraiczne, jako mogące otrzymywać różne wartości liczebne, zależne od wartości, jakie nadajemy literom, jest wielkością, a także każda oddzielna litera, w niem się znajdująca, jest wielkością.

Jakiekolwiek dane wyrażenie algebraiczne możemy oznaczyć jedną literą. Gdy tedy pewne wyrażenie algebraiczne nazwiemy np. a, to możemy powiedzieć: albo, że mamy liczbę a; albo, że mamy wyrażenie algebraiczne a; alboteż, że mamy wielkość a.

64. W matematyce opieramy się na pewnych prawdach zasadniczych, które uważamy za oczywiste, nie podlegające wątpliwości, i których słuszność uznajemy bez ich uzasadniania. Prawdy te zasadnicze nazywamy pewnikami, albo zgrecka aksiomatami. Takiemi pewnikami w algebrze są:

I. *Każda wielkość jest równa samej sobie;* np. $a = a$.

II. *Całość jest równa skupieniu wszystkich jej części;* np. gdy częściami pewnej całości są liczby: a, $-b$, $+7$, $-3c$, to ową całością jest wyrażenie algebraiczne $a - b + 7 - 3c$.

III. *Dwie wielkości, z których każda jest równa tej samej trzeciej, są sobie równe;* tak np. gdy $a = c$ i $b = c$, to $a = b$.

IV. *Wskutek wykonania takiego samego działania na dwu równych wielkościach, otrzymujemy wielkości równe.* Tak więc:

α. *Gdy do równych sobie wielkości dodamy wielkości sobie równe, otrzymamy sumy równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $a + c = b + d$.

β. *Gdy od równych sobie wielkości odejmiemy wielkości sobie równe, otrzymamy reszty równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $a - c = b - d$.

γ. *Gdy równe sobie wielkości pomnożymy przez wielkości sobie równe, otrzymamy iloczyny równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $ac = bd$.

δ. *Gdy równe sobie wielkości podzielimy przez wielkości sobie równe, otrzymamy ilorazy równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Zauważmy, że według γ., gdy wielkości sobie równe $a = b$ pomnożymy odpowiednio przez też wielkości $a = b$, to otrzymamy $a^2 = b^2$, a mnożąc te wielkości odpowiednio przez równe sobie wielkości $a = b$, otrzymamy $a^3 = b^3$, i t.d., tak iż, *podnosząc wielkości równe sobie do jednakowych potęg, otrzymujemy wielkości równe sobie.*

Dla czego, jeżeli $a = b$, to także $-a = -b$, jak również $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$?

V. *Jeżeli dwie wielkości są sobie równe, a jedna z nich jest większa albo mniejsza od trzeciej, to i druga z tych wielkości jest odpowiednio większa albo mniejsza od owej trzeciej;* np. $a = b$, $b > c$, to i $a > c$; jeżeliby zaś było $b < c$, to również byłoby $a < c$.

VI. *Jeżeli jedna wielkość jest większa od drugiej, zaś ta druga jest większa od trzeciej wielkości, to temwięcej pierwsza jest większa od trzeciej; i odwrotnie;* np. gdy $a > b$, zaś $b > c$, to temwięcej $a > c$; jeżeli zaś $a < b$, $b < c$, to temwięcej $a < c$.

W algebrze, podobnie jak w arytmetyce, korzystając w rozumowaniu z jakiegoś pewnika, zwykle tego nie zaznaczamy, uważając odpowiedni ustęp rozumowania za bezpośrednio przekonywający.

W różnych miejscach poprzedniego wykładu w rozumowaniach robiliśmy użytek z tego lub owego pewnika. Ale wypowiedzenie pewników podaliśmy dopiero teraz, kiedy już do wyrażeń algebraicznych można było odnieść pojęcie wielkości i pojęcie równości.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

65. Gdy czyto do jednomianu, czyteż do wielomianu mamy dodać jednomiany, to zauważywszy, że jednomian jest liczbą (art. 53), możemy zastosować wprost znane prawidło dodawania (art. 19, 43). Np.

$$(+4a^6b - \tfrac{5}{7}a^5bc) + (+7a^4bc^2) + (-9a^2b^2c^3) = +4a^6b - \tfrac{5}{7}a^5bc + 7a^4bc^2 - 9a^2b^2c^3.$$

Jeżeli czyto do jednomianu, czyteż do wielomianu, mamy dodać wielomian, to moglibyśmy powiedzieć, że mamy dodać kolejno (art. 54; 64, II; 22) wszystkie wyrazy owego wielomianu, będącego drugim składnikiem; a więc należy je dopisać do pierwszego składnika, nie zmieniając ich znaków. Np.

$$(2a - 3b + c) + (4d - 5e - 6f + 2g) = 2a - 3b + c + 4d - 5e - 6f + 2g.$$

Gdybyśmy mieli wykonać dodawanie kilku wielomianów lub jednomianów, to (art. 22), do pierwszego składnika dodawszy drugi, do otrzymanej stąd sumy dodalibyśmy w taki sam sposób trzeci składnik, i t. d.

A więc ogólnie, *aby wykonać dodawanie jednomianów i wielomianów, należy do pierwszego składnika dopisać wszystkie wyrazy następnych składników, zachowując znaki tych wyrazów.* Wielomian tak powstały niekiedy zawiera wyrazy podobne; w takim razie wykonywamy redukcyą wyrazów podobnych (art. 56).

66. Gdy mamy od jednomianu np. $5a^3b^2c$ odjąć jednomian $-2a^2bc^3$, to również (art. 53) mamy tu wykonać odejmowanie dwu liczb; a więc (art. 27, 43) jest

$$5a^3b^2c - (-2a^2bc^3) = 5a^3b^2c + 2a^2bc^3.$$

Weźmy na uwagę dwa wielomiany, których wyrazy różnią się tylko znakami, np.

$$4a^3b^2 - 2a^2b^3 + 5ab^4 - 7, \quad -4a^3b^2 + 2a^2b^3 - 5ab^4 + 7.$$

Każdy z tych wielomianów przedstawia liczbę (art. 54), odpowiednią wartościom liter a i b. Jeżeli te dwa wielomiany do siebie dodamy, to w tak powstałej sumie algebraicznej każde dwa wyrazy odpowiednie się znoszą (art. 53), tak iż wartością liczebną tej sumy algebraicznej jest 0. Wskutek tego drugi wielomian przedstawia zawsze liczbę o tej samej wartości bezwzględnej, co pierwszy, lecz przeciwnego znaku. A więc *liczba, którą przedstawia wielomian, zmienia swój znak, jeżeli zmienimy znak każdego wyrazu tego wielomianu.*

Gdy przeto mamy odjąć od wielomianu

$a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3$ wielomian $4a^3b^2 - 2a^2b^3 + 5ab^4 - 7a$,

to należy do liczby, którą przedstawia odjemna, dopisać liczbę, różniącą się tylko znakiem od tej, którą przedstawia odjemnik, a więc dopisać wielomian odjemnika po zmienieniu znaku każdego jego wyrazu; wskutek tego mieć będziemy:

$$a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3 - 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - 5ab^4 + 7a,$$

albo, po wykonaniu redukcyi wyrazów podobnych,

$$a^5 - 4a^4b + 2a^3b^2 - 5ab^4 + 7a.$$

Zatem ogólnie, *aby od jednomianu lub wielomianu odjąć jednomian lub wielomian, należy do odjemnej przypisać wyrazy odjemnika ze zmienionemi znakami.*

67. Tak przy dodawaniu, jak i przy odejmowaniu jednomianów, lub wielomianów, po postąpieniu według prawidła, w otrzymanem wyrażeniu wykonywamy, jeżeli można, redukcyą wyrazów podobnych. Atoli wykonywanie jej nie jest ani dodawaniem, aniteż odejmowaniem, lecz tylko prostszem przedstawieniem otrzymanego wielomianu, wskutek zastąpienia każdej grupy jego wyrazów podobnych przez jeden wyraz.

Jeżeli czyto w danych do dodania składnikach, czyteż w odjemnej i w odjemniku, dostrzegamy wyrazy podobne, to chcąc najprościej otrzymać wypadek, w którymby nie było wyrazów podobnych, tak piszemy (art. 23) w dodawaniu składniki w oddzielnych wierszach, a w odejmowaniu odjemnik pod odjemną, iżby wyrazy do siebie podobne znalazły się jedne pod drugiemi. Wówczas w dodawaniu pod składnikami, wykonawszy redukcyą wyrazów znajdujących się w tych samych pionowych rzędach, wprost wypisujemy wyrazy sumy żądanej. W odejmowaniu zaś pod znakami wyrazów odjemnika stawiamy znaki przeciwne i, z uwzględnieniem ich wykonawszy redukcyą, wprost wypisujemy wyrazy różnicy żądanej. Np.

1). Dodać do siebie wielomiany:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 5a^4b^2 & -\,3a^3b^3 & +\,\tfrac{1}{4}a^2b^4 & -\,2ab^5 & \\
 & & -\,4a^3b^3 & +\,7a^2b^4 & -\,4ab^5 & +\,8b^6 \\
7a^5b & -\,4a^4b^2 & +\,3a^3b^3 & -\,9a^2b^4 & +\,6ab^5 & \\
\hline
7a^5b & +\,a^4b^2 & -\,4a^3b^3 & -\,1\tfrac{3}{4}a^2b^4 & & +\,8b^6.
\end{array}$$

2). $(4a^5b^3 - 2a^4b^4 + 6a^3b^5 - 7a^2b^6) - (-2a^5b^3 + 6a^3b^5 - 5a^2b^6 - 6ab^7)$; będzie więc:

$$\begin{array}{rrrrr}
4a^5b^3 & -\,2a^4b^4 & +\,6a^3b^5 & -\,7a^2b^6 & \\
\mp\,2a^5b^3 & & \pm\,6a^3b^5 & \mp\,5a^2b^6 & \mp\,6ab^7 \\
\hline
6a^5b^3 & -\,2a^4b^4 & & -\,2a^2b^6 & +\,6ab^7.
\end{array}$$

MNOŻENIE JEDNOMIANÓW.

68. Gdy przy dodatnych i całkowitych m i n mamy znaleźć iloczyn $a^m \times a^n$, to z pomnożenia iloczynu m czynników a przez iloczyn n czynników a otrzymamy iloczyn $m+n$ czynników a, t. j. a^{m+n}. Jest więc

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Podobnie, przy dodatnych i całkowitych liczbach m, n, p, q, jest

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q}.$$

Zatem *iloczyn potęg tej samej podstawy jest potęgą tejże podstawy o wykładniku, równym sumie jej wykładników w oddzielnych czynnikach.*

69. Gdy mamy pomnożyć jednomian przez jednomian, np. $+\frac{3}{5}a^4b^3cd^5e$ przez $-2\frac{1}{7}a^3bef^3$, to (art. 32, 68):

$$(+\tfrac{3}{5}a^4b^3cd^5e)\times(-\tfrac{15}{7}a^3bef^3) = -\tfrac{3}{5}\times\tfrac{15}{7}\times a^4.a^3.b^3.b.c.d^5.e.e.f^3 =$$
$$= -\tfrac{9}{7}a^{4+3}b^{3+1}cd^5e^{1+1}f^3.$$

Podobnie otrzymalibyśmy iloczyn trzech lub więcej jednomianów.

Iloczyn dwu lub więcej jednomianów jest jednomianem, który ma znak —, jeżeli ilość danych jednomianów o znaku — jest nieparzysta, w innych zaś przypadkach ma znak +; w nim spółczynnik jest iloczynem spółczynników danych jednomianów, a każda z podstaw ma wykładnik, równy sumie wykładników tejże podstawy w danych jednomianach.

70. W szczególnym przypadku, kiedy mamy jednomian pomnożyć przez siebie, np. $(-3a^4b^nc).(-3a^4b^nc)$, czyli (art. 47) $(-3a^4b^nc)^2$, jest według art. 69-go:

$$(-3a^4b^nc)^2 = +3.3.a^{4+4}.b^{n+n}.c^{1+1} = +3^2a^{4.2}b^{n.2}c^{1.2},$$

t. j. *kwadrat jednomianu jest jednomianem o znaku +, w którym spółczynnik jest kwadratem spółczynnika danego jednomianu, a każda z podstaw danego jednomianu ma wykładnik pomnożony przez 2.*

MNOŻENIE WIELOMIANÓW.

71. Weźmy na uwagę mnożenie wielomianu przez jednomian. Dla uproszczenia rozumowania każdy wyraz wielomianu, jako wyrażający liczbę, oznaczmy przez literę. Ogólnie zatem wielomian mnożnej tak przedstawimy:

$$m+n+\ldots+s,$$

gdzie zapomocą kropek wskazujemy, iż wielomian może mieć jakąkolwiek ilość wyrazów. Jednomian zaś mnożnika oznaczmy przez literę a. Mamy przeto

$$(m+n+\ldots+s)\times a.$$

Przypuśćmy naprzód, że mnożnik a jest liczbą całkowitą. Jeżeli jego wartość bezwzględną nazwiemy α, to może być albo $a=+\alpha$, albo też $a=-\alpha$.

Niech $a=+\alpha$. Mamy więc

$$(m+n+\ldots+s)\times(+\alpha).$$

Według art. 29-go jest

$$\text{iloczyn} = m+n+\ldots+s+m+n+\ldots+s+\ldots+m+n+\ldots+s$$

(gdzie po stronie prawej wielomian mnożnej wzięliśmy α razy jako składnik), albo (art. 23)

iloczyn $= m + m + \ldots + m + n + n + \ldots + n + \ldots + s + s + \ldots + s$.

Tu sumę pierwszych α składników m możemy przedstawić zapomocą iloczynu $m.(+\alpha)$; czyniąc to samo z sumą następujących α składników n, i t. d., mieć będziemy

$$(m + n + \ldots + s) \times (+\alpha) = m.(+\alpha) + n.(+\alpha) + \ldots + s.(+\alpha),$$

czyli
$$(m + n + \ldots + s) \times a = m.a + n.a + \ldots + s.a.$$

Niech $a = -\alpha$. Mamy więc

$$(m + n + \ldots + s) \times (-\alpha).$$

Aby z mnożnej utworzyć iloczyn podobnie jak mnożnik powstał z $+1$, należy zmienić znak mnożnej, i liczbę (art. 66) $-m-n-\ldots-s$ wziąć α razy jako składnik. Rozumując zaś dalej taksamo, jak w poprzednim przypadku, mamy

iloczyn $= -m-n-\ldots-s-m-n-\ldots-s-\ldots-m-n-\ldots-s$

$= -m-m-\ldots-m-n-n-\ldots-n-\ldots-s-s-\ldots-s$

$= -m\alpha - n\alpha - \ldots - s\alpha$

$= m.(-\alpha) + n.(-\alpha) + \ldots + s.(-\alpha)$,

czyli
$$(m + n + \ldots + s) \times a = m.a + n.a + \ldots + s.a.$$

Dowiedliśmy tego, że, kiedy mnożnik jest liczbą całkowitą, należy każdy wyraz wielomianu pomnożyć przez mnożnik.

Oczywiście, że odwrotnie

$$m.a + n.a + \ldots + s.a = (m + n + \ldots + s).a,$$

t. j., gdy w każdym wyrazie wielomianu znajduje się ten sam czynnik całkowity (jak tu a), możemy go w oddzielnych wyrazach opuścić, a tak powstały wielomian przez ów czynnik pomnożyć.

Weźmy teraz na uwagę mnożnik ułamkowy. Jeżeli bezwzględna jego wartość jest $\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami całkowitemi, to może być albo $a = +\frac{\lambda}{\mu}$, albo też $a = -\frac{\lambda}{\mu}$ (art. 17).

Niech będzie $a = +\frac{\lambda}{\mu}$. Mamy więc

$$(m + n + \ldots + s) \times \left(+\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Wiemy już, że $(m + n + \ldots + s) \times (+\lambda) = m\lambda + n\lambda + \ldots + s\lambda$. Nie zmienimy czynnika λ, znajdującego się po obu stronach poprzedniej równości, jeżeli wszędzie zamiast niego weźmiemy iloczyn $\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu$; możemy więc napisać

$$(m + n + \ldots + s)\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu = m\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu + n\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu + \ldots + s\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu.$$

W każdym wyrazie wielomianu po prawej stronie tej równości mamy ten sam czynnik całkowity μ; a więc według tego, cośmy powyżej powiedzieli, jest

$$(m+n+\ldots+s)\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu=\left(m\frac{\lambda}{\mu}+n\frac{\lambda}{\mu}+\ldots+s\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\mu.$$

Jeżeli te równe sobie iloczyny podzielimy przez tę samę liczbę μ, to otrzymamy równe sobie ilorazy (art. 64, IV, δ); jest więc

$$(m+n+\ldots+s).\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)=m.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)+n.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)+\ldots+s.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a.$$

Niech będzie $a=-\frac{\lambda}{\mu}$. Mamy więc

$$(m+n+\ldots+s)\times\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Możemy przyjąć, iż $a=-\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-\lambda}{\mu}$ (art. 35). Wiemy, że

$$(m+n+\ldots+s)(-\lambda)=m(-\lambda)+n(-\lambda)+\ldots+s(-\lambda),$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\frac{-\lambda}{\mu}\cdot\mu=m\frac{-\lambda}{\mu}\cdot\mu+n\frac{-\lambda}{\mu}\cdot\mu+\ldots+s\frac{-\lambda}{\mu}\cdot\mu;$$

przeto $$(m+n+\ldots+s)\frac{-\lambda}{\mu}\cdot\mu=\left(m\frac{-\lambda}{\mu}+n\frac{-\lambda}{\mu}+\ldots+s\frac{-\lambda}{\mu}\right).\mu,$$

a więc $$(m+n+\ldots+s)\cdot\frac{-\lambda}{\mu}=m\cdot\frac{-\lambda}{\mu}+n\cdot\frac{-\lambda}{\mu}+\ldots+s\cdot\frac{-\lambda}{\mu},$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a.$$

Widzimy zatem, że we wszystkich możliwych przypadkach otrzymujemy ten sam wynik. Tak np.

$$(-3a^4b^2+\tfrac{2}{5}a^3b^3-7a^2b^4).(-5a^2b^2)=(-3a^4b^2)(-5a^2b^2)+(+\tfrac{2}{5}a^3b^3)(-5a^2b^2)+$$
$$+(-7a^2b^4)(-5a^2b^2)=15a^6b^4-2a^5b^5+35a^4b^6.$$

Gdybyśmy mieli jednomian pomnożyć przez wielomian, to, zważywszy, że tak jednomian mnożnej, jak i wielomian mnożnika, są liczbami, możemy (art. 32) to zadanie sprowadzić do poprzedniego; jest więc

$$a\times(m+n+\ldots+s)=(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a$$
$$=a.m+a.n+\ldots+a.s.$$

A zatem *iloczyn jednomianu i wielomianu otrzymujemy, biorąc sumę algebraiczną iloczynów każdego wyrazu wielomianu przez jednomian.*

72. Udowodniliśmy, że ogólnie $a(m+n+\ldots+s)=am+an+\ldots+as$. Z tego wynika, że, odwrotnie, mamy ogólnie

$$am+an+\ldots+as=a(m+n+\ldots+s),$$

t. j. *jeżeli w każdym wyrazie wielomianu znajduje się ten sam czynnik, to możemy go w oddzielnych wyrazach opuścić, a tak powstały wielomian pomnożyć przez ów czynnik.* Tak np.

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=+\tfrac{1}{5}a^3b^2c.(-3a^2b-\tfrac{1}{5}c^4+21ab^2c).$$

Takie postępowanie nazywa się w y ł ą c z a n i e m albo w y n o s z e n i e m p o z a n a w i a s c z y n n i k a s p ó l n e g o w y r a z ó w w i e l o m i a n u. Oczywiście jest wszystko jedno, czy ten spólny czynnik napiszemy przed nawiasem, czy po nim, czyteż niektóre jego czynniki przed nawiasem, a inne po nawiasie.

Jeżeli w powyższym trójmianie wyłączymy poza nawias tylko czynnik a^2b, to będziemy mieli

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=a^2b.(-\tfrac{3}{5}a^3b^2c-\tfrac{1}{25}abc^5+4\tfrac{1}{5}a^2b^3c^2).$$

Możemy w każdym wielomianie wyłączyć poza nawias liczbę -1 (która oczywiście jest czynnikiem jakiegokolwiek wyrazu); tak np. (art. 42)

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=(-1).(\tfrac{3}{5}a^5b^3c+\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5-4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2)=$$
$$=-(\tfrac{3}{5}a^5b^3c+\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5-4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2).$$

A zatem *możemy wielomian dany zastąpić przez wielomian, powstały z danego wskutek zmienienia znaku każdego jego wyrazu, ujmując ten wielomian w nawias i pisząc przed nawiasem znak* $-$. Nazywamy to wyłączaniem znaku — przed nawias.

73. Jeżeli mamy pomnożyć wielomian przez wielomian, to, oznaczając każdy wyraz w każdym z tych wielomianów przez literę, zadanie nasze ogólnie tak przedstawimy:

$$(a+b+\ldots+k).(m+n+\ldots+s).$$

Jeżeli liczbę, którą przedstawia jeden z tych wielomianów, np. wielomian mnożnej, nazwiemy jedną literą np. w, tak iż $a+b+\ldots+k=w$, to będziemy mieli (art. 71)

$$w(m+n+\ldots+s)=wm+wn+\ldots+ws.$$

W ostatniem wyrażeniu, zamiast w pisząc $a+b+\ldots+k$, mamy

$$(a+b+\ldots+k).m+(a+b+\ldots+k).n+\ldots+(a+b+\ldots+k).s.$$

Mamy tu sumę iloczynów wielomianu przez jednomian; a więc ostatecznie

$$\begin{aligned}(a+b+\ldots+k).(m+n+\ldots+s)= &\ am+bm+\ldots+km+\\ &+an+bn+\ldots+kn+\\ &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+as+bs+\ldots+ks.\end{aligned}$$

Widzimy z tego, że, *aby wielomian pomnożyć przez wielomian, należy wziąć sumę algebraiczną iloczynów każdego wyrazu mnożnej przez każdy wyraz mnożnika.* Np.

$$\begin{aligned}(2a^3bc^2+a^3c^3-a^2b^2c^2-3a^2bc^3).(-a^2-2ab+3b^2)= &-2a^5bc^2-a^5c^3+a^4b^2c^2+3a^4bc^3\\ &-4a^4b^2c^2-2a^4bc^3+2a^3b^3c^2+6a^3b^2c^3+\\ &+6a^3b^3c^2+3a^3b^2c^3-3a^2b^4c^2-9a^2b^3c^3.\end{aligned}$$

74. Zdarzyć się może, jak w przykładzie poprzedzającym, że w iloczynie otrzymujemy wyrazy podobne. Wówczas, chcąc redukcyą tych wyrazów najdogodniej uskutecznić, należy mnożną i mnożnik w razie, jeżeli one uporządkowane nie są, uporządkować według potęg, czyto rosnących, czyteż malejących, tej samej litery, lub tych samych liter (art. 58), a następnie wypisywać w oddzielnych poziomych wierszach częściowe iloczyny mnożnej przez oddzielne wyrazy mnożnika tak, iżby wyrazy do siebie podobne znalazły się w tym samym pionowym rzędzie. Pod tą zaś sumą algebraiczną iloczynów częściowych piszemy, wykonawszy redukcyą wyrazów podobnych, żądany iloczyn. W ten sposób postępując w zadaniu poprzedniem, mieć będziemy

$$
\begin{array}{r}
2a^3bc^2+a^3c^3-a^2b^2c^2-3a^2bc^3 \\
-a^2-2ab+3b^2 \\
\hline
-2a^5bc^2-a^5c^3+a^4b^2c^2+3a^4bc^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
-4a^4b^2c^2-2a^4bc^3+2a^3b^3c^2+6a^3b^2c^3 \qquad\qquad\qquad \\
+6a^3b^3c^2+3a^3b^2c^3-3a^2b^4c^2-9a^2b^3c^3 \\
\hline
-2a^5bc^2-a^5c^3-3a^4b^2c^2+a^4bc^3+8a^3b^3c^2+9a^3b^2c^3-3a^2b^4c^2-9a^2b^3c^3.
\end{array}
$$

Gdybyśmy mieli znaleźć iloczyn trzech lub więcej wielomianów, to, po otrzymaniu iloczynu dwu wielomianów, pomnożylibyśmy go przez trzeci, tak otrzymany iloczyn trzech wielomianów pomnożylibyśmy przez czwarty i t. d.

75. Jeżeli mnożymy wielomian o p wyrazach przez wielomian o q wyrazach i jeżeli nie otrzymujemy wyrazów podobnych, to wielomian iloczynu ma pq wyrazów.

Jeżeli wielomiany mnożnej i mnożnika są oba uporządkowane według potęg, czyto rosnących, czyteż malejących, tej samej litery, lub tych samych liter, to w częściowych iloczynach mnożnej przez oddzielne wyrazy mnożnika nie otrzymamy wyrazu podobnego ani do wyrazu, powstałego z pomnożenia pierwszego wyrazu mnożnej przez pierwszy wyraz mnożnika, aniteż do wyrazu, powstałego z pomnożenia ostatniego wyrazu mnożnej przez ostatni wyraz mnożnika (por. np. zadanie art. 74-go). Owe więc dwa wyrazy się nie zniosą.

Możemy przeto powiedzieć: *iloczyn wielomianu przez wielomian jest wielomianem, który ma wyrazów conajmniej dwa, a conajwięcej taką ilość, jaka wypadnie, gdy ilość wyrazów wielomianu mnożnej pomnożymy przez ilość wyrazów wielomianu mnożnika.*

76. Zgodnie z określeniem stopnia wielomianu (art. 37) możemy powiedzieć: *stopień iloczynu jest równy sumie stopni czynników.*

Jeżeli pomnożymy wielomian jednorodny przez jednomian, alboteż przez wielomian jednorodny, to wszystkie wyrazy iloczynu będą jednakowego stopnia, a więc *iloczyn wielomianu jednorodnego przez jednomian, albo przez wielomian jednorodny, jest także wielomianem jednorodnym.*

77. Czasem zdarzyć się może, iż, kiedy, wyłączywszy z kilku wyrazów danego wielomianu spólny czynnik poza nawias (art. 72), to samo robimy z kilku innemi wyrazami tego wielomianu, otrzymujemy znów to samo wyrażenie w nawiasie; w takim razie ów wielomian w nawiasie możemy znów uważać za spólny czynnik i taksamo wyłączyć go poza nawias. Np.

$$
\begin{aligned}
&7a^6b^2+2a^5b^3+6a^4b^4-6a^3b^5-18a^2b^6+4ab^7+12b^8= \\
&\qquad =7a^6b^2+a^4(2ab^3+6b^4)-3a^2b^2(2ab^3+6b^4)+2b^4(2ab^3+6b^4)= \\
&\qquad =7a^6b^2+(2ab^3+6b^4)(a^4-3a^2b^2+2b^4).
\end{aligned}
$$

78. Uskuteczniwszy mnożenie $(a+b)(a-b)$, otrzymamy, po wykonaniu redukcyi wyrazów podobnych,

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

t. j. *iloczyn sumy dwu wyrazów przez ich różnicę jest równy różnicy kwadratów tychże wyrazów.* Tak np. (art. 70)

$$(-3a^4b^5c+4a^3b^2c^5)(-3a^4b^5c-4a^3b^2c^5)=9a^8b^{10}c^2-16a^6b^4c^{10}.$$

79. Według art. 47-go $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$. Iloczyn $(a+b)(a+b)$ jest $a^2+2ab+b^2$; przeto

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

t. j. *kwadrat dwumianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi i kwadratu wyrazu drugiego.* Np.

$$(-3a^3b^2+4a^2b^3)^2=9a^6b^4-24a^5b^5+16a^4b^6.$$

DZIELENIE JEDNOMIANÓW.

80. Przy dodatnych i całkowitych m i n, oraz przy warunku $m>n$, podzielmy a^m przez a^n. Ponieważ dzielna a^m jest iloczynem (art. 34) dzielnika a^n i ilorazu, a z uwagi, że $n+(m-n)=m$, jest $a^n\times a^{m-n}=a^m$, czyli dzielna a^m jest iloczynem dzielnika a^n i liczby a^{m-n}, przeto ilorazem jest tu a^{m-n}. Jest zatem

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

A więc *iloraz potęg tej samej podstawy, kiedy jej wykładnik w dzielnej jest większy od wykładnika w dzielniku, jest potęgą tejże podstawy o wykładniku, równym różnicy między jej wykładnikami w dzielnej i w dzielniku.*

81. Zastrzegliśmy powyżej, że wykładnik podstawy a w dzielnej jest większy od jej wykładnika w dzielniku, $m>n$. Zdarzyć się jednak może, że mamy a^m podzielić przez tę samę, lub wyższą potęgę podstawy a.

Jeżeli $m=n$, to, od wykładnika w dzielnej odejmując wykładnik w dzielniku, otrzymujemy w ilorazie, jako wykładnik litery a, liczbę $m-m=0$, tak iż wtedy mieć będziemy

$$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0.$$

Lecz tu dzielna równa się dzielnikowi, a więc iloraz przedstawia liczbę $+1$; jest więc $a^0=1$, t. j. *potęga zero jakiejkolwiek liczby przedstawia liczbę* 1. Tak np. $a^3:a^3=a^0=1$.

Jeżeli $m<n$, to, dzieląc dzielną i dzielnik przez tę samę liczbę a^m, z uwagi, że $a^m:a^m=1$, zaś $a^n:a^m=a^{n-m}$, mamy (art. 36)

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}},$$

t. j. *iloraz z podzielenia pewnej potęgi podstawy przez wyższą jej potęgę jest ułamkiem, którego licznikiem jest* 1, *a mianownikiem potęga tej litery o wykładniku, równym różnicy między wykładnikiem tej litery w dzielniku a jej wykładnikiem w dzielnej.* Tak np. $a^3:a^7=\frac{1}{a^{7-3}}=\frac{1}{a^4}$.

Potęga 0 może być wprowadzona w wyrażenia algebraiczne jako przedstawienie (czyli symbol) czynnika 1. Tak np. możemy powiedzieć, że w każdym wyrazie wielomianu jednorodnego $4a^3 - 3a^2 b + 4a^2 c - 2ab^2 + 7abc$ znajdują się wszystkie trzy litery a, b, c, gdyż możemy go tak napisać:

$$4a^3 b^0 c^0 - 3a^2 b c^0 + 4a^2 b^0 c - 2ab^2 c^0 + 7abc.$$

82. Gdy mamy jednomian podzielić przez jednomian, to (art. 34) iloraz może być jednomianem (art. 69).

Gdy mamy np. $(\frac{8}{15} a^5 b^{3m+2} c^4 d) : (-\frac{2}{3} a^2 b^{m+1} c^4)$, to w ilorazie wypadnie (art. 34) wziąć znak — (art. 43); za spółczynnik taką liczbę, któraby pomnożona przez $\frac{2}{3}$ dała $\frac{8}{15}$, a więc liczbę $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$; potęga podstawy a ma być w ilorazie taka, iżby jej iloczyn przez a^2 był równy a^5, a więc (art. 80) a^{5-2}; podobnież będzie w ilorazie $b^{3m+2-(m+1)}$ i $c^4 : c^4 = c^0 = 1$; ponieważ w dzielniku niema wypisanej potęgi podstawy d, więc przyjmiemy, że w dzielniku jest czynnik $d^0 = 1$, tak iż w ilorazie będzie $d^{1-0} = d$. Jest więc

$$\frac{\frac{8}{15} a^5 b^{3m+2} c^4 d}{-\frac{2}{3} a^2 b^{m+1} c^4} = -\frac{4}{5} a^{5-2} b^{3m+2-(m+1)} c^{4-4} d^{1-0} = -\frac{4}{5} a^3 b^{2m+1} d.$$

A zatem, *gdy mamy podzielić jednomian przez jednomian, to w razie, kiedy wykładniki podstaw w dzielniku nie są większe od wykładników tychże podstaw w dzielnej, otrzymujemy jako iloraz jednomian. Ma on znak +, jeżeli dane jednomiany są jednakowego znaku, zaś znak —, jeżeli one są różnego znaku; spółczynnik jego jest ilorazem z podzielenia spółczynnika dzielnej przez spółczynnik dzielnika, a każda z podstaw ma w nim wykładnik, równy różnicy między jej wykładnikami w dzielnej i w dzielniku.* —

Weźmy teraz na uwagę dzielenie jednomianów w przypadku, kiedy w dzielniku jest potęga podstawy wyższa niż w dzielnej. Gdy mamy np. $(4a^5 b^4 ce^m f^2) : (-5a^2 bc^4 d^3 e^{3m+r})$, to, dzieląc tak dzielną jak i dzielnik przez tę samę liczbę (art. 36), mianowicie przez iloczyn niższych potęg liter, bez względu na to, czy one są w dzielniku, czyteż w dzielnej, t. j. przez $a^2 bce^m$, mieć będziemy:

$$\frac{4a^5 b^4 ce^m f^2}{-5a^2 bc^4 d^3 e^{3m+r}} = \frac{4a^5 b^4 cd^0 e^m f^2}{-5a^2 bc^4 d^3 e^{3m+r} f^0} = -\frac{4a^{5-2} b^{4-1} f^{2-0}}{5c^{4-1} d^{3-0} e^{(3m+r)-m}} =$$
$$= -\frac{4a^3 b^3 f^2}{5c^3 d^3 e^{2m+r}}.$$

W tem ostatniem wyrażeniu są w dzielniku litery, których niema w dzielnej, a więc otrzymany iloraz nie jest jednomianem (art. 51), lecz jest wyrażeniem ułamkowem (art. 50).

A zatem, *gdy w jednomianie dzielnika znajduje się wykładnik podstawy większy, niż jej wykładnik w jednomianie dzielnej, to iloraz jest ułamkiem o znaku + lub —, stosownie do tego, czy dane jednomiany są jednakowego, czyteż różnego znaku; w liczniku jego są te podstawy, których potęgi w dzielnej były większe, w mianowniku zaś te, których potęgi w dzielniku były większe, a wykładnik każdej z tych podstaw otrzymujemy, od większego odejmując mniejszy.* —

Kiedy, dzieląc jednomian przez jednomian, nie otrzymujemy w ilorazie jednomianu, to mówimy, że jednomian dzielnej jest niepodzielny przez jednomian dzielnika. —

Jeżeli z podzielenia jednomianu przez jednomian otrzymujemy jednomian, to stopień jednomianu ilorazu jest różnicą między stopniami jednomianów dzielnej i dzielnika.

DZIELENIE WIELOMIANÓW.

83. Gdy mamy wielomian podzielić przez jednomian, to wyrażenie, które otrzymamy w ilorazie, może być wielomianem (art. 71). W takim razie iloczyny wyrazów owego wielomianu przez dzielnik są wyrazami dzielnej. Aby więc w ilorazie wypadł wielomian, potrzeba, iżby każdy wyraz wielomianu dzielnej był podzielny przez jednomian dzielnika. Tak np.

$$\frac{6a^4b^3c^2-10a^4b^2c^3+12a^3b^5c}{-8a^2b^2}=-\frac{6a^4b^3c^2}{8a^2b^2}+\frac{10a^4b^2c^3}{8a^2b^2}-\frac{12a^3b^5c}{8a^2b^2}=$$
$$=-\tfrac{3}{4}a^2bc^2+1\tfrac{1}{4}a^2c^3-1\tfrac{1}{2}ab^3c.$$

Gdy dzielimy wielomian przez jednomian, to w przypadku, kiedy w dzielniku niema potęgi podstawy wyższej od jej potęg w wyrazach wielomianu dzielnej, otrzymujemy w ilorazie wielomian o tyluż wyrazach, co wielomian dzielnej, a jego wyrazy powstają z podzielenia każdego wyrazu dzielnej przez jednomian dzielnika. Stopień wielomianu ilorazu jest różnicą między stopniem wielomianu dzielnej a stopniem jednomianu dzielnika. —

Jeżeli w jednomianie dzielnika znajduje się potęga podstawy wyższa, niż potęga tejże podstawy w którymkolwiek wyrazie wielomianu dzielnej, to z dzielenia tego wyrazu dzielnej przez dzielnik, otrzymamy ułamek (art. 82), a temsamem iloraz będzie wyrażeniem ułamkowem (art. 50); np.

$$\frac{-10a^4b^5c^7+6a^4b^3c^2+12a^3b^5c+16a^3b^4c^2}{-8a^2b^5c^5}=1\tfrac{1}{4}a^2c^2-\frac{3a^2}{4b^2c^3}-\frac{3a}{2c^4}-\frac{2a}{bc^3}.$$

W tym przykładzie możemy iloraz prościej przedstawić, nie uskuteczniając oddzielnych dzieleń każdego z trzech ostatnich wyrazów dzielnej przez jednomian dzielnika, lecz ograniczając się do podzielenia sumy owych wyrazów i jednomianu dzielnika przez spólny czynnik $2a^2b^3c$,

$$\frac{-10a^4b^5c^7+6a^4b^3c^2+12a^3b^5c+16a^3b^4c^2}{-8a^2b^5c^5}=1\tfrac{1}{4}a^2c^2-\frac{3a^2c+6ab^2+8abc}{4b^2c^4}.$$

Gdy dzielimy wielomian przez jednomian, a w tym jednomianie jest potęga podstawy wyższa od jej potęgi w którymkolwiek z wyrazów wielomianu dzielnej, to iloraz jest wyrażeniem ułamkowem i wielomian dzielnej jest niepodzielny przez jednomian dzielnika.

84. Gdy mamy jednomian podzielić przez wielomian, to iloraz nie może być jednomianem, gdyż po pomnożeniu jednomianu ilorazu przez wielomian dzielnika otrzymalibyśmy wielomian (art. 71); nie może on także być wielomianem, gdyż mnożąc go przez wielomian dzielnika, otrzymalibyśmy wielomian, który nie mógłby mieć mniej niż dwa wyrazy (art. 75). Jest więc wyrażeniem ułamkowem.

Z tego wynika, że *jednomian jest niepodzielny przez wielomian.*

85. Podzielmy wielomian $4\frac{1}{2}a^4b^{15}-5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10}$ przez wielomian $9a^3b^9-6a^2b^8+12ab^7-30b^6$. Oba te wielomiany są uporządkowane według malejących potęg litery a.

Przypuśćmy, iż w ilorazie otrzymamy wielomian i że on będzie także uporządkowany według malejących potęg litery a. Z pomnożenia pierwszego wyrazu ilorazu przez pierwszy wyraz dzielnika otrzymamy pierwszy wyraz dzielnej, do którego niema wyrazu podobnego pośród innych wyrazów, otrzymanych z pomnożenia ilorazu przez dzielnik (art. 75). Z tej własności możemy skorzystać dla wyznaczenia pierwszego wyrazu ilorazu. Dzieląc mianowicie pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy jednomian, o którym napewno wiemy, iż będzie on pierwszym wyrazem ilorazu, uporządkowanego według malejących potęg litery a. Dzieląc więc $+\frac{9}{2}a^6b^{15}$ przez $+9a^3b^9$, otrzymamy $+\frac{1}{2}a^3b^6$, pierwszy wyraz ilorazu.

Chcąc wyraz drugi ilorazu otrzymać w sposób również prosty, zważmy, że dzielna jest sumą algebraiczną iloczynów wszystkich wyrazów dzielnika przez wszystkie wyrazy ilorazu, którego pierwszy wyraz jest już wiadomy. Jeżeli przez ten wyraz pomnożymy dzielnik i ten iloczyn odejmiemy od dzielnej,

$$\begin{array}{r}
\frac{9}{2}a^6b^{15} \qquad\qquad -5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10} \\
\pm\frac{9}{2}a^6b^{15}\mp3a^5b^{14}\pm6a^4b^{13}\mp15a^3b^{12} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
+3a^5b^{14}-11a^4b^{13}+10a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10},
\end{array}$$

to otrzymany w reszcie wielomian jest iloczynem dzielnika przez drugi i dalsze wyrazy ilorazu. Ta reszta jest uporządkowana również według malejących potęg litery a; pierwszy więc jej wyraz jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy z pozostałych (a więc właściwie przez drugi) wyraz ilorazu. Znajdziemy zatem ów drugi wyraz ilorazu, dzieląc pierwszy wyraz tej reszty przez pierwszy wyraz dzielnika; $(+3a^5b^{14}):(9a^3b^9)=+\frac{1}{3}a^2b^5$, drugiemu wyrazowi uporządkowanego ilorazu.

Aby w sposób podobnie prosty wyznaczyć trzeci wyraz ilorazu, pomnożymy dzielnik przez znaleziony drugi wyraz ilorazu i t. d. Otrzymawszy nakoniec jako resztę 0, wnosimy, iż dzielna jest iloczynem dzielnika przez trójmian $\frac{1}{2}a^3b^6+\frac{1}{3}a^2b^5-ab^4$; jest więc ten trójmian szukanym ilorazem.

Wykonywając takie dzielenie wielomianów, najczęściej wypisujemy je w ten sposób:

$$\begin{array}{r|l}
\frac{9}{2}a^6b^{15} \qquad\qquad -5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10} & 9a^3b^9-6a^2b^8+12ab^7-30b^6 \\
\cline{2-2}
\pm\frac{9}{2}a^6b^{15}\mp3a^5b^{14}\pm6a^4b^{13}\mp15a^3b^{12} \qquad\qquad\qquad\qquad & \frac{1}{2}a^3b^6+\frac{1}{3}a^2b^5-ab^4 \\
\cline{1-1}
3a^5b^{14}-11a^4b^{13}+10a^3b^{12}-22a^2b^{11} \qquad\quad & \\
\pm3a^5b^{14}\mp2a^4b^{13}\pm4a^3b^{12}\mp10a^2b^{11} \qquad\quad & \\
\cline{1-1}
-9a^4b^{13}+6a^3b^{12}-12a^2b^{11}+30ab^{10} & \\
\mp9a^4b^{13}\pm6a^3b^{12}\mp12a^2b^{11}\pm30ab^{10} & \\
\cline{1-1}
0. \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

Zwykle w każdej reszcie wypisujemy, jak powyżej, z wyrazów dzielnej tylko podobne do wyrazów wielomianu, który od tej reszty odjąć wypada.

Mieliśmy tu dzielną i dzielnik uporządkowane według malejących potęg litery a; mogliśmy jednak mieć je uporządkowane według rosnących potęg litery a, a wtedy iloraz wypadłby uporządkowany również według rosnących potęg a.

Powiemy więc ogólnie o przypadku, kiedy ilorazem z podzielenia wielomianu przez wielomian jest wyrażenie całkowite, iż, *aby wielomian podzielić* *przez wielomian, należy, uporządkowawszy je oba według tej samej zasady, podzielić pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika; przez tak otrzymany jednomian, który jest pierwszym wyrazem ilorazu, pomnożyć wielomian dzielnika, a otrzymany iloczyn odjąć od dzielnej; resztę z tego odejmowania uporządkować według zasady tej samej, co dane wielomiany, i pierwszy jej wyraz podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika; tak otrzymany jednomian będzie drugim wyrazem ilorazu; przezeń trzeba pomnożyć wielomian dzielnika, a iloczyn odjąć od poprzedniej reszty, i t. d.*

Stopień wielomianu ilorazu jest równy różnicy między stopniem wielomianów dzielnej i dzielnika (art. 76). Jeżeli wielomian dzielnej i wielomian dzielnika są jednorodne, to iloraz jest także wielomianem jednorodnym (art. 76).

Zauważmy, iż w powyższym przykładzie dzielenie uskutecznić mogliśmy tylko dzięki temu, że wielomiany dzielnej i dzielnika uporządkowaliśmy według tej samej zasady, jakoteż, że po każdem odejmowaniu porządkowaliśmy otrzymaną resztę według tej samej zasady, co tamte wielomiany. Gdybyśmy zaś chcieli wykonać dzielenie na nieuporządkowanych wielomianach, to naprzód nie wiedzielibyśmy, z pomnożenia którego wyrazu dzielnika przez który wyraz ilorazu mógł powstać pewien wyraz dzielnej; powtóre, nie wiedzielibyśmy, czy ów wyraz dzielnej przedstawia iloczyn jednego tylko wyrazu dzielnika przez jeden ilorazu, czyteż powstał z redukcyi kilku takich częściowych iloczynów, i t. d.

Jeżeli iloraz dwu wielomianów jest, ogólnie mówiąc, wyrażeniem całkowitem, to mówimy, iż dzielenie może być wykonane bez reszty, albo że dzielna jest podzielna przez dzielnik.

W przeciwnym razie mówimy, że wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika.

86. Gdy w dzielnej jest potęga podstawy niższa, niż w dzielniku, np.

$$(4a^4b^3 - 6a^2b^2 + 8b^5) : (2a^3b^3 + a^2b^4 - b^5),$$

to w iloczynie wyrażenia całkowitego przez ten dzielnik nie byłoby wyrazu, zawierającego b^2; jest zaś taki wyraz w dzielnej. A więc, jeżeli w wielomianie dzielnej jest potęga podstawy niższa, niż w wielomianie dzielnika, to pierwszy wielomian jest niepodzielny przez drugi, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem.

87. Jeżeli, po uporządkowaniu wielomianów dzielnej i dzielnika według tej samej zasady, okaże się, że czyto pierwszy wyraz dzielnej jest niepodzielny przez pierwszy wyraz dzielnika, czyteż ostatni wyraz dzielnej jest niepodzielny przez ostatni wyraz dzielnika, to wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika, co wynika wprost z art. 85-go, i iloraz jest wyrażeniem ułamkowem. Np. wielomian $4a^3b^2 - 6a^2b^3 - 8ab^4 + 9b^5$ nie jest podzielny ani przez dwumian $2ab^3 + 3b^4$, ani przez dwumian $2a^2b - 3ab^2$.

88. Przypuśćmy, że mamy wykonać dzielenie dwu wielomianów

$$(4a^7b - 12a^6b^2 + 19a^5b^3 - 16a^4b^4) : (2a^6 - 3a^5b + 4a^4b^2),$$

uporządkowanych według malejących potęg litery a. W dzielniku nie zachodzi potęga podstawy wyższa od jej potęgi w dzielnej; pierwszy wyraz dzielnej jest podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika, a ostatni dzielnej przez ostatni dzielnika. Gdyby tu iloraz był wielomianem, to jego ostatni wyraz zawierałby $a^{4-4}\,b^{4-2} = b^2$. Po otrzymaniu w ilorazie wyrazu, zawierającego b^2, i po odjęciu iloczynu tego wyrazu przez dzielnik,

$$\begin{array}{l|l} 4a^7b - 12a^6b^2 + 19a^5b^3 - 16a^4b^4 & 2a^6 - 3a^5b + 4a^4b^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \overline{2ab - 3b^2} \\ \hline \qquad 2a^5b^3 - 4a^4b^4, & \end{array}$$

mamy jeszcze resztę różną od zera. Jest więc pierwszy z danych wielomianów niepodzielny przez drugi, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem

$$2ab - 3b^2 + \frac{2a^5b^3 - 4a^4b^4}{2a^6 - 3a^5b + 4a^4b^2}.$$

89. Wykonajmy dzielenie

$$\begin{array}{l|l} 8a^5b - 24a^4b^2 + 38a^3b^3 - 32a^2b^4 & 2a^2 - 3ab + 4b^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \overline{4a^3b - 6a^2b^2} \\ \hline \qquad 4a^3b^3 - 8a^2b^4. & \end{array}$$

Widzimy, że wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem

$$4a^3b - 6a^2b^2 + \frac{4a^3b^3 - 8a^2b^4}{2a^2 - 3ab + 4b^2}.$$

Możemy tu jednak dzielenie dalej prowadzić, gdyż pierwszy wyraz reszty jest podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika,

$$\begin{array}{l|l} 4a^3b^3 - 8a^2b^4 & 2a^2 - 3ab + 4b^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \overline{2ab^3 - b^4} \\ \hline -11ab^5 + 4b^6. & \end{array}$$

Dalej już dzielenia prowadzić nie można, gdyż pierwszy wyraz ostatniej reszty jest niepodzielny przez pierwszy wyraz dzielnika. Iloraz więc możemy także tak przedstawić:

$$4a^3b - 6a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 - \frac{11ab^5 - 4b^6}{2a^2 - 3ab + 4b^2}.$$

Podobnie, jeżeli mamy podzielić jednomian przez wielomian (art. 84), możemy niekiedy wykonywać dzielenie; np.

$$\frac{a^5}{a^2 + a + 1} = a^3 - a^2 + 1 - \frac{a + 1}{a^2 + a + 1}.$$

ROZDZIAŁ DRUGI.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK I NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK I NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ LICZB.

90. Będziemy rozważali niektóre własności liczb całkowitych i dodatnych; takie tylko liczby będziemy rozumieli przez wprowadzane tu litery.

Gdy $a = bm$, to mówimy, że liczba a jest wielokrotnością liczby b (Multiplum, Vielfaches), albo że liczba b jest dzielnikiem liczby a (Theiler, Divisor, Mass), albo też że liczba a jest podzielna przez liczbę b.

Jeżeli liczba a jest taka, iż ją w jedyny tylko sposób można przedstawić jako iloczyn dwu liczb (całkowitych), mianowicie $a = a.1$, to nazywamy ją liczbą pierwszą (Primzahl). A więc liczba pierwsza jestto liczba podzielna tylko przez 1 i przez samę siebie. Liczbę zaś a taką, iż $a = bm$, gdzie b i m mogą być jednocześnie liczbami większemi od 1, nazywamy liczbą złożoną (zusammengesetzte Zahl). A więc liczba złożona jestto liczba podzielna przez liczbę większą od jedności a mniejszą od niej samej.

91. *Jeżeli liczba a jest wielokrotnością liczby b, zaś liczba b jest wielokrotnością liczby c, to także liczba a jest wielokrotnością liczby c;* albowiem, jeżeli $a = bm$, zaś $b = cn$, to $a = (c.n).m = c.(n.m)$, gdzie iloczyn $n.m$ jest liczbą całkowitą. Tę własność moglibyśmy tak wypowiedzieć: *dzielnik pewnej liczby jest także dzielnikiem wielokrotności tej liczby.*

92. Liczba, przez którą jest podzielna każda z liczb danych, nazywa się spólnym dzielnikiem liczb danych.

Największą ze wszystkich liczb, przez które jest podzielna jednocześnie każda z liczb danych, nazywamy największym spólnym dzielnikiem liczb danych (der grösste gemeinschaftliche Th.). Dla krótkości pisać będziemy: nsd.

Jeżeli dwie liczby mają tylko spólny dzielnik jedność, to nazywamy je dwiema liczbami pierwszemi względem siebie (zwei relative Primzahlen). Gdy mamy więcej niż dwie liczby, to może się zdarzyć, iż każde dwie z nich są pierwsze względem siebie, ale nie może być mowy o trzech lub więcej liczbach pierwszych względem siebie.

93. Przedstawienie liczby złożonej zapomocą iloczynu samych tylko liczb pierwszych nazywamy rozkładem liczby na czynniki pierwsze (Zerlegung in Primfactoren). Jeżeli np. w rozkładzie liczby a na czynniki pierwsze mamy p czynników równych liczbie f, q równych liczbie g i r równych liczbie h, to $a = f^p g^q h^r$.

Jeżeli

$$3150 = 2.3^2.5^2.7,\quad 18000 = 2^4.3^2.5^3,\quad 4950 = 2.3^2.5^2.11,$$

to, zważywszy, że spólne dzielniki liczb są albo oddzielnemi czynnikami, znajdującemi się jednocześnie we wszystkich ich rozkładach, alboteż iloczynami takich czynników, widzimy, że nsd-em liczb danych jest $2.3^2.5^2 = 450$. Podobnie nsd-em liczb

$$a = f^3 g^4 h^2 k,\quad b = f^4 g^5 h^2 i^3 k^2,\quad c = f^4 g^7 h^3 i^2 k^3,$$

gdzie f, g, h, i, k są liczbami pierwszemi, jest $f^3.g^4.h^2.k$. A zatem, *aby znaleźć największy spólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn oddzielnych czynników, spólnych wszystkim rozkładom, biorąc każdy z wykładnikiem najmniejszym z tych, które on ma w tych rozkładach.*

Zauważmy, że *największy spólny dzielnik kilku liczb jest wielokrotnością każdego spólnego dzielnika tych liczb.*

94. Jeżeli dwie liczby a i b mają nsd. δ i jest $a = \delta m$, $b = \delta n$, to, gdyby liczby m i n nie były pierwsze względem siebie, miałyby spólny dzielnik większy od jedności, np. f, tak iż byłoby $m = fp$, $n = fq$, zaś $a = \delta fp$, $b = \delta fq$. Liczby więc a i b miałyby spólny dzielnik δf, większy od ich nsd-a δ, co być nie może. Przeto *ilorazy z podzielenia każdej z dwu liczb przez ich największy spólny dzielnik są liczbami pierwszemi względem siebie.*

Nawzajem, *jeżeli ilorazy z podzielenia każdej z dwu liczb przez ich spólny dzielnik są liczbami pierwszemi względem siebie, to ten dzielnik jest najwięk-*

szym spólnym dzielnikiem owych dwu liczb. Inaczej bowiem te ilorazy niebyłyby liczbami pierwszemi względem siebie.

95. Jeżeli liczba a jest pierwsza względem każdej z liczb b i c, to pośród czynników pierwszych, na które się rozkłada iloczyn bc, niema czynnika rozkładu liczby a, tak iż liczba a jest pierwsza względem iloczynu bc. Podobnie można dowieść, że liczba a, pierwsza względem każdej z liczb b, c, d, jest pierwsza względem iloczynu bcd, i t. d. A zatem *liczba pierwsza względem każdej z kilku liczb danych jest także pierwsza względem iloczynu tychże liczb.*

96. Spólną wielokrotnością liczb danych nazywamy liczbę podzielną przez każdą z liczb danych. Każda więc z liczb danych jest dzielnikiem ich spólnej wielokrotności.

Najmniejszą spólną wielokrotnością liczb danych nazywamy najmniejszą z liczb, podzielnych jednocześnie przez każdą z liczb danych. Dla krótkości będziemy pisali nsw.

Jeżeli

$$7056 = 2^4.3^2.7^2, \quad 1620 = 2^2.3^4.5, \quad 119070 = 2.3^5.5.7^2,$$

to, ponieważ każda z liczb danych ma być dzielnikiem szukanej nsw-i, wszystkie czynniki pierwsze każdej z liczb danych znajdować się będą w rozkładzie liczby szukanej na czynniki pierwsze. W nim przeto czynników 2 będzie cztery, pięć czynników 3, czynnik 5 i dwa czynniki 7. Z czynników tak powstałego iloczynu $2^4.3^5.5.7^2 = 952560$ można utworzyć każdą z liczb danych, a więc on przedstawia spólną wielokrotność liczb danych. Przedstawia on mianowicie nsw. liczb danych, gdyż opuszczenie w nim choćby jednego któregokolwiek czynnika nie dozwoliłoby na utworzenie z pozostałych czynników jednej lub więcej z liczb danych. Podobnie nsw-ą liczb

$$a = f^3 g^4 h^2 k, \quad b = f^4 g^5 h^2 i^3, \quad c = f^4 g^7 h^3 i^2 k^3,$$

gdzie f, g, h, i, k są liczbami pierwszemi, jest liczba $f^4 g^7 h^3 i^3 k^3$. A więc, *aby znaleźć najmniejszą spólną wielokrotność kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn oddzielnych czynników, wchodzących do owych rozkładów, biorąc każdy z nich z wykładnikiem największym z tych, które ów czynnik ma w tych rozkładach.*

Najmniejsza spólna wielokrotność dwu liczb pierwszych względem siebie jest iloczynem tych liczb.

Najmniejsza spólna wielokrotność trzech lub więcej liczb, z których każde dwie są liczbami pierwszemi względem siebie, jest iloczynem tychże liczb.

97. Niech dwie liczby a i b mają spólny dzielnik d, t. j. niech $a = d.m$, $b = d.n$, i przypuśćmy, że $a > b$. Ponieważ

$$a + b = dm + dn = d(m + n), \qquad a - b = dm - dn = d(m - n)$$

(gdzie liczby $m + n$ i $m - n$ są całkowite), przeto *spólny dzielnik dwu liczb jest dzielnikiem tak ich sumy, jak ich różnicy.*

98. Przy poszukiwaniu nsd-a dwu liczb a i b — niech np. $a > b$ — mogą zdarzyć się dwa przypadki: albo a jest podzielne przez b, albo też a jest niepodzielne przez b.

W pierwszym przypadku $a = bm$. Wówczas liczba b, będąca dzielnikiem liczby a, jest zarazem największym dzielnikiem tejże liczby b, a więc nsd-em liczb a i b. Przeto *największym spólnym dzielnikiem dwu liczb w przypadku, kiedy większa z nich jest podzielna przez mniejszą, jest taż mniejsza liczba.*

W przypadku, kiedy a jest niepodzielne przez b, dzielmy a przez b; niech b w a mieści się f razy i niech pozostaje reszta r (mniejsza od b), tak iż

$$a = bf + r, \quad \text{skąd} \quad a - bf = r.$$

Każdy dzielnik liczby b jest dzielnikiem jej wielokrotności bf (art. 91), wskutek czego każdy spólny dzielnik liczb a i b jest jednocześnie spólnym dzielnikiem liczb a i bf. Każdy zaś spólny dzielnik liczb a i b, jako spólny dzielnik liczb a i bf, jest dzielnikiem liczby $a - bf = r$ (art. 97), a więc, jako dzielnik tak liczby b, jak i liczby r, jest spólnym dzielnikiem liczb b i r. — Nawzajem, każdy spólny dzielnik liczb b i r, jako spólny dzielnik liczb bf i r, jest dzielnikiem liczby $bf + r = a$ (art. 97), a więc, jako dzielnik tak liczby a, jak i liczby b, jest spólnym dzielnikiem liczb a i b. — Skoro każdy spólny dzielnik liczb a i b jest spólnym dzielnikiem liczb b i r i, nawzajem, każdy spólny dzielnik liczb b i r jest spólnym dzielnikiem liczb a i b, to wszystkie spólne dzielniki liczb a i b są teżsame, co liczb b i r, wskutek czego nsd. liczb a i b jest jednocześnie nsd-em liczb b i r i, nawzajem, nsd. liczb b i r jest jednocześnie nsd-em liczb a i b. A więc *największy spólny dzielnik dwu liczb jest jednocześnie największym spólnym dzielnikiem mniejszej z nich i reszty z podzielenia większej z nich przez mniejszą; jakoteż nawzajem.*

99. W przypadku zatem, kiedy a jest niepodzielne przez b, poszukiwanie nsd-a liczb a i b, który nazwijmy δ, sprowadza się do poszukiwania nsd-a liczb b i r. A ponieważ jest $r < b < a$, przeto pierwotne zadanie zastępuje się przez zadanie prostsze (gdyż odnoszące się do liczb mniejszych).

Może się zdarzyć, że liczba b jest podzielna przez r; w takim razie liczba r byłaby nsd-em liczb b i r, a temsamem nsd-em liczb a i b, czyli byłoby $\delta = r$.

Jeżeli b nie jest podzielne przez r, to niech $b = rg + s$, gdzie $s < r$. I znowu poszukiwanie nsd-a liczb b i r zastąpić można przez poszukiwanie nsd-a liczb r i s. I t. d.

Takie kolejne sprowadzanie poszukiwania nsd-a dwu liczb do poszukiwania nsd-a dwu liczb mniejszych może mieć miejsce tylko ograniczoną ilość razy, gdyż liczby całkowite $a, b, r, s, \ldots$ są coraz mniejsze, a więc w tym ciągu liczb będzie liczba ostatnia. Niech tą ostatnią liczbą będzie w, przedostatnią v, a poprzedzającą u, tak iż niech $u = vk + w$. Ponieważ zaś, dzieląc v przez w, nie otrzymujemy już reszty, więc v jest podzielne przez w i niech $v = wl$. Zestawmy razem wszystkie te dzielenia:

$$\begin{array}{l} a = b\,.\,f + r, \\ b = r\,.\,g + s, \\ r = s\,.\,h + t, \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;, \\ u = v\,.\,k + w, \\ v = w\,.\,l. \end{array}$$

Np.

$$\begin{array}{r|l} 630 & 135 \\ 540 & 4 \\ \hline 90 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 135 & 90 \\ 90 & 1 \\ \hline 45 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 45 \text{ nsd.} \\ 90 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 630 &= 135\,.\,4 + 90, \\ 135 &= 90\,.\,1 + 45, \\ 90 &= 45\,.\,2. \end{aligned}$$

Ponieważ w jest dzielnikiem liczby v, przeto w jest nsd-em liczb v i w. Jako zaś nsd. liczb v i w jest w, jak to wynika z przedostatniej równości, nsd-em liczb u i v. Taksamo rozumując kolejno przy pomocy każdej z poprzedzających równości, dochodzimy do tego, że liczba w jest nsd-em liczb a i b, tak iż $\delta = w$.

Jeżeli $w = 1$, to liczby a i b są pierwsze względem siebie.

Taki sposób poszukiwania nsd-a dwu liczb często nazywają sposobem poszukiwania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia.

Prawidło poszukiwania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia możemy tak wypowiedzieć: *aby znaleźć największy spólny dzielnik dwu liczb danych, dzielimy liczbę większą przez mniejszą; jeżeli z tego dzielenia zostaje reszta, dzielimy liczbę mniejszą przez tę resztę; jeżeliby znowu została reszta, podobnie przez nią dzielić będziemy resztę z poprzedniego dzielenia; i dalej tak postępujemy wciąż, dopóki nie dojdziemy do dzielenia, z którego już nie otrzymamy reszty; liczba, która jest dzielnikiem w ostatniem dzieleniu, jest największym spólnym dzielnikiem liczb danych.*

100. Gdy mamy znaleźć nsd. trzech liczb: a, b, c — nazwijmy go δ — to znajdźmy naprzód zapomocą kolejnego dzielenia nsd. dwu liczb np. a i b, i nazwijmy go β. Nsd. liczb a, b i c, jako spólny dzielnik liczb a i b, może być albo liczbą β, alboteż dzielnikiem liczby β (art. 93). A więc nsd. liczb a, b i c jest jednocześnie nsd-em liczb β i c. Możemy znowu zapomocą kolejnego dzielenia znaleźć nsd. liczb β i c, który będzie szukaną liczbą δ.

Podobnie moglibyśmy postępować przy poszukiwaniu nsd-a czterech lub więcej liczb.

101. Możemy także ze sposobu odnajdywania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia skorzystać w celu znalezienia nsw-i dwu lub więcej liczb.

Jeżeli mamy dwie liczby dane a i b, a ich nsd. jest δ, tak iż $a = \delta m$, $b = \delta n$, to, jak wiemy (art. 94), liczby m i n są pierwsze względem siebie. Ponieważ liczby a i b są dzielnikami szukanej nsw-i, przeto ona jest iloczynem $\delta . m . n$, gdyż ten iloczyn jest najmniejszą liczbą, podzielną jednocześnie przez $a = \delta m$ i $b = \delta n$. A więc *najmniejsza spólna wielokrotność dwu liczb jest iloczynem ich największego spólnego dzielnika przez ilorazy, otrzymane z podzielenia każdej z tych dwu liczb przez tenże dzielnik.*

W podobny sposób możemy znaleźć nsw. trzech liczb a, b i c. Gdy nsd. liczb a i b jest β i $a = \beta m$, $b = \beta n$, to $\beta mn = v$ jest nsw-ą liczb a i b. Podobnie, gdy nsd. liczb v i c jest γ i gdy $v = \gamma p$, $c = \gamma q$, jest $\gamma pq = w$ nsw-ą liczb v i c, która jednocześnie jest nsw-ą liczb a, b i c. — I t. d.

102. Nsd. dwu liczb a i b nazwijmy δ i niech $a = \delta m$, $b = \delta n$, gdzie (art. 94) m i n są liczbami pierwszemi względem siebie.

α. Weźmy iloczyny ap i bp. Jest $ap = \delta pm$, $bp = \delta pn$, a więc δp jest nsd-em liczb ap i bp. T. j. *gdy dwie liczby dane pomnożymy przez tę samę liczbę, to ich największy spólny dzielnik zostanie przez też liczbę pomnożony.*

β. Gdy p jest spólnym dzielnikiem liczb a i b, to przynajmniej jedna z dwu liczb m i n jest niepodzielna przez p (aniteż przez żaden z jej dzielników); przeto p jest dzielnikiem δ. A więc, *gdy dwie dane liczby podzielimy przez ich spólny dzielnik, to ich największy spólny dzielnik zostanie przez też samę liczbę podzielony.*

γ. Weźmy ap i b, gdy p jest liczbą pierwszą względem b. Jest $ap = \delta mp$ i liczba p, jako pierwsza względem $b = \delta n$, jest pierwsza względem jej dzielnika n, przeto (art. 95) iloczyn mp jest liczbą pierwszą względem n i (art. 94) nsd-em liczb ap i b jest δ. A więc, *jeżeli jednę z dwu liczb danych pomnożymy przez liczbę pierwszą względem pozostałej z nich, to największy spólny dzielnik iloczynu i pozostałej liczby będzie ten sam, co liczb danych.*

δ. Gdy p, dzielnik liczby a, jest liczbą pierwszą względem $b = \delta n$, to w iloczynie $\delta m = a$ nie może być δ podzielne przez p, tak iż $\frac{a}{p} = \delta \cdot \frac{m}{p}$. A więc, *jeżeli jednę z dwu liczb danych podzielimy przez liczbę pierwszą względem pozostałej z nich, to największy spólny dzielnik ilorazu i pozostałej liczby będzie ten sam, co liczb danych.*

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

103. Weźmiemy na uwagę wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, gdyż z takiemi tylko mamy do czynienia w zadaniach, w których potrzeba wyszukać największego spólnego dzielnika wyrażeń algebraicznych.

Spólnym dzielnikiem wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy takie wyrażenie algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, przez które dzieląc każde z danych wyrażeń, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia całkowite ze spółczynnikami całkowitemi; w szczególnym przypadku może ów spólny dzielnik być liczbą całkowitą. Np. wielomiany

$$6a^5 + 6a^4b + 6a^3b^2 - 6a^2b^3, \qquad 9a^4 - 9a^3b - 9a^2b^2 + 9ab^3$$

mają prócz 1 spólne dzielniki: 3, a, $3a$, $a+b$, $3a+3b$, a^2+ab, $3a^2+3ab$, $a-b$, $3a-3b$, a^2-ab, $3a^2-3ab$, a^2-b^2, $3a^2-3b^2$, a^3-ab^2, $3a^3-3ab^2$.

Największym spólnym dzielnikiem wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy taki ich spólny dzielnik, przez który dzieląc dane wyrażenia, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności. Tak np. poprzednie dwa wielomiany mają nsd. $3a^3 - 3ab^2$, gdyż ilorazy z podzielenia danych wielomianów przez ten dzielnik, $2a^2 + 2ab$ i $3a - 3b$, nie mają spólnego dzielnika prócz jedności.

Dwa wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności, nazywamy dwoma wyrażeniami algebraicznemi pierwszemi względem siebie.

104. Gdy mamy kilka jednomianów, np. $36a^5b^3c^7d^4e^2$, $-48a^6b^2c^5d^6e$, $-72a^8b^2d^5e^3$, to wprost zauważymy, że mają one następujące spólne czynniki: 12, a^5, b^2, d^4 i e, a więc nsd-em tych jednomianów jest jednomian $12a^5b^2d^4e$. Przeto *największy spólny dzielnik jednomianów jest iloczynem naj-*

większego spólnego dzielnika ich spółczynników przez każdą z podstaw, znajdujących się we wszystkich jednomianach, wziętą z wykładnikiem najmniejszym z tych, jakie ona ma w tych jednomianach. (Por. art. 93, a także art. 72).

Oczywiście, że *największy spólny dzielnik jednomianów i wielomianów jest największym spólnym dzielnikiem wszystkich jednomianów i oddzielnych wyrazów wszystkich wielomianów.*

105. Gdy mamy znaleźć nsd. dwu wielomianów, to z uwagi, że wogóle trudno jest oznaczyć, jakich prostszych wielomianów iloczynem może być każdy z danych wielomianów, a temsamem trudno wprost oznaczyć spólne ich czynniki, będące wielomianami, możemy tylko rzadko korzystać z rozkładu wielomianów na czynniki (art. 72, 77).

Tak np., gdy dostrzeżemy, że

$$12a^5+30a^4b+24a^3b^2+6a^2b^3=6a^2(a+b)(2a^2+3ab+b^2),$$
$$16a^4+8a^3b-16a^2b^2-8ab^3=8a(a-b)(2a^2+3ab+b^2),$$

to widocznie nsd-em tych wielomianów jest

$$2a(2a^2+3ab+b^2)=4a^3+6a^2b+2ab^2;$$

jakoż, ilorazy z podzielenia przezeń danych wielomianów, $3a^2+3ab$ i $4a-4b$, są pierwsze względem siebie.

Z tego jednak sposobu ogólnie przy wielomianach korzystać nie można. Dlatego zastosujemy do wielomianów sposób, wyłożony na liczbach w art. 99-ym.

Łatwo sprawdzić, wziąwszy jakiekolwiek dwa wielomiany, iż to, czegośmy dla liczb dowiedli w art. 94, 97 i 102-im, odnosi się także do wielomianów. Co się zaś tyczy samego postępowania, wyłożonego na liczbach w art. 98 i 99-ym, to niekiedy, jak to zaraz zobaczymy, przy stosowaniu go do wielomianów ulega ono niejakim zmianom.

106. Szukajmy nsd-a dwu wielomianów: a^2-4a+3, $4a^3-9a^2-15a+18$. Dzieląc drugi z nich przez pierwszy, otrzymamy w ilorazie $4a+7$ i resztę $a-3$; dzieląc zaś następnie a^2-4a+3 przez tę resztę $a-3$, otrzymamy w ilorazie $a-1$, a reszty nie będzie. Mamy tu więc:

$$4a^3-9a^2-15a+18=(a^2-4a+3)(4a+7)+a-3,$$
$$a^2-4a+3=(a-3)(a-1).$$

Jest zatem $a-3$ nsd-em danych wielomianów.

Tu w reszcie pierwszego dzielenia i w obu ilorazach otrzymywaliśmy wyrazy o spółczynnikach całkowitych, tak iż kolejne dzielenie mogło być wprost uskutecznione w ten sposób, jak w art. 99-ym.

107. z. 1). $\qquad 9a^2-3ab-2b^2$ i $120a-80b$.

Te wielomiany, czyli $(3a-2b)(3a+b)$ i $40(3a-2b)$, mają nsd. $3a-2b$. Gdybyśmy podzielili pierwszy przez drugi, to otrzymalibyśmy w ilorazie $\frac{3}{40}a+\frac{1}{40}b$; ułamkowe spółczynniki wskazują, iż nie można tu wprost dzielić jednego z wielomianów przez drugi. Według jednak art. 102 δ, możemy drugi z nich podzielić przez liczbę 40, spólny dzielnik jego wyrazów, która jest pierwsza względem pierwszego z tych wielomianów. Innemi słowy, ponieważ nsd. wielomianów danych jest ten sam, co nsd. wielomianów

$$9a^2-3ab-2b^2,\quad 3a-2b,$$

możemy dzielenie danych wielomianów zastąpić przez dzielenie wielomianów ostatnich. A skoro z tego dzielenia nie otrzymujemy reszty, przeto $3a-2b$ jest nsd-em danych wielomianów.

2). $$9a^2-3ab-2b^2 \quad \text{i} \quad 6a^3b-4a^2b^2.$$

Dzieląc czyto pierwszy z tych wielomianów przez drugi, czyteż drugi przez pierwszy, otrzymalibyśmy w ilorazie wyrażenie ułamkowe. Wyrazy jednak drugiego wielomianu mają czynnik spólny $2a^2b$, pierwszy względem pierwszego wielomianu. Podzieliwszy więc przezeń drugi wielomian (art. 102 δ), sprowadzimy zadanie do dzielenia wielomianów

$$9a^2-3ab-2b^2 \quad \text{i} \quad 3a-2b.$$

β. Gdyby wyrazy wielomianu dzielnej miały czynnik spólny, pierwszy względem dzielnika, to moglibyśmy wprawdzie wykonać wskazane dzielenie; uprości się jednak robota, kiedy przez ów czynnik dzielną podzielimy (art. 102 δ), co nie zmieni nsd-a tych wielomianów.

γ. Jeżeliby wszystkie wyrazy obu wielomianów miały spólny czynnik, to, gdybyśmy przezeń oba podzielili, ich nsd. zostałby również przez ten czynnik podzielony (art. 102, β). Zwykle, dla uproszczenia rachunku, przez czynnik, będący nsd-em wszystkich wyrazów obu wielomianów, dzielimy oba wielomiany, a po znalezieniu nsd-a tak uproszczonych wielomianów, mnożymy go przez ów czynnik; ten iloczyn będzie nsd-em wielomianów danych.

108. Przy szukaniu nsd-a wielomianów na inną jeszcze natrafiamy trudność pozorną. Gdy np. dane są wielomiany

$$45a^4-12a^3-24a^2+17a-6,\quad 9a^2-3a-2,$$

to, po podzieleniu pierwszego przez drugi, otrzymamy iloraz $5a^2+\frac{1}{3}a-\frac{13}{9}$ i resztę $\frac{40}{3}a-\frac{80}{9}$. Nie może więc być mowy o dzieleniu następnem dzielnika przez taką resztę. A więc należy dane wielomiany zastąpić przez inne, mające ten sam nsd. Zauważyć łatwo, że, mnożąc dzielną przez 9, a ten iloczyn dzieląc przez dzielnik, otrzymamy, tak w reszcie, jak w ilorazie, spółczynniki całkowite. Ta liczba 9 jest pierwsza względem dzielnika, a więc możemy przez nią pomnożyć dzielną (art. 102, γ). Atoli, ponieważ idzie nam o to, jakie otrzymujemy reszty, co do ilorazów zaś wystarcza nam pewność, że one są wyrażeniami ze spółczynnikami całkowitemi, przeto postępujemy nieco inaczej. Np. w powyższem zadaniu, z dzielenia pierwszego wyrazu dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika otrzymawszy wyraz $5a^2$, którego spółczynnik jest całkowity, wypisujemy go w ilorazie. Po odjęciu iloczynu tego wyrazu przez dzielnik otrzymujemy resztę częściową, której pierwszym wyrazem jest $3a^3$. Aby z podzielenia go przez pierwszy wyraz dzielnika, $9a^2$, wypadł wyraz o spółczynniku całkowitym, pomnóżmy owę pierwszą resztę częściową przez 3 (co odpowiadałoby pomnożeniu całej dzielnej i pierwszego wyrazu ilorazu przez 3). Pierwszy wyraz owej reszty tak pomnożonej, t. j. $9a^3$, podzieliwszy przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy odpowiedni wyraz w ilorazie $+a$, który piszemy po napisanym już pierwszym wyrazie ilorazu, oddzieliwszy go odeń przecinkiem (gdyż on właściwie powinien być dopisany nie do $5a^2$, lecz do $15a^2$). Aby podobnież następny wyraz w ilorazie wypadł o spółczynniku całkowitym, trzebaby całą dzielną jeszcze pomnożyć przez 3, zamiast czego mnożymy tylko drugą resztę częściową przez 3; pierwszy wyraz tak pomnożonej reszty, t. j. $-117a^2$, dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymawszy jako odpowiedni wyraz ilorazu -13, piszemy go po napisanym już drugim wyrazie ilorazu, oddzieliwszy go odeń przecinkiem. Po odjęciu iloczynu tego ostatniego już wyrazu ilorazu przez dzielnik, pozostaje z dzielenia reszta $120a-80$. A więc nsd. danych wielomianów jest nsd-em wielomianu dzielnika i wielomianu tej reszty. Całe to postępowanie tak się przedstawi:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
45a^4 & -12a^3 & -24a^2 & +17a & -6 & 9a^2-3a-2 \\
\pm 45a^4 & \mp 15a^3 & \mp 10a^2 & & & \overline{5a^2, +a, -13} \\
\hline
 & 3a^3 & -14a^2 & +17a & -6 & \\
 & 9a^3 & -42a^2 & +51a & -18 & \\
 & \pm 9a^3 & \mp 3a^2 & \mp 2a & & \\
\hline
 & & -39a^2 & +53a & -18 & \\
 & & -117a^2 & +159a & -54 & \\
 & & \mp 117a^2 & \pm 39a & \pm 26 & \\
\hline
 & & & 120a & -80 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
9a^2-3a-2 : 120a-80 \\
\begin{array}{rr|l}
9a^2-3a & -2 & 3a-2 \\
\pm 9a^2 \mp 6a & & \overline{3a+1} \\
\hline
3a & -2 & \\
\pm 3a & \mp 2 & \\
\hline
 & 0. &
\end{array}
\end{array}
$$

A więc tu

$$9(45a^4-12a^3-24a^2+17a-6)=(9a^2-3a-2)(5a^2\times 9+a\times 3-13)+120a-80,$$

$$9a^2-3a-2=[\tfrac{1}{40}(120a-80)](3a+1),$$

i nsd-em danych wielomianów jest

$$\tfrac{1}{40}(120a-80)=3a-2.$$

109. Widzimy więc, że, *przy szukaniu największego spólnego dzielnika dwu wielomianów zapomocą kolejnego dzielenia, należy podzielić oba dane wielomiany przez największy spólny dzielnik wszystkich wyrazów obu tych wielomianów; będzie on czynnikiem szukanego największego spólnego dzielnika wielomianów danych; szukając następnie największego spólnego dzielnika tak uproszczonych wielomianów, w każdem dzieleniu należy ten wielomian, który bierzemy za dzielnik, podzielić przez czynnik spólny jego wyrazów, pierwszy względem wielomianu pozostałego, jakoteż, w razie potrzeby, wielomian dzielnej lub częściowej reszty pomnożyć przez liczbę, pierwszą względem wielomianu dzielnika, taką, aby odpowiedni wyraz ilorazu wypadł ze spółczynnikiem całkowitym; nakoniec tak znaleziony największy spólny dzielnik należy pomnożyć przez wyłączony poprzednio spólny dzielnik wyrazów wielomianów danych.*

Jeżeli, stosując to postępowanie, dochodzimy do takiej reszty, która jest widocznie pierwsza względem odpowiadającego jej dzielnika, to dane dwa wielomiany są także pierwsze względem siebie.

110. Gdybyśmy mieli znaleźć nsd. trzech lub więcej wielomianów, to wypadłoby postąpić podobnie, jak w art. 100-ym.

NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

111. Weźmiemy na uwagę wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, gdyż z takiemi tylko mamy do czynienia w zadaniach, w których potrzeba wyszukać najmniejszej spólnej wielokrotności wyrażeń algebraicznych.

Spólną wielokrotnością wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy takie wyrażenie algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, które dzieląc przez każde z danych wyrażeń, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia całkowite ze spółczynnkami całkowitemi.

Najmniejszą spólną wielokrotnością wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy taką ich spólną wielokrotność, którą dzieląc przez dane wyrażenia, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności. Tak np. nsw-ą trzech wielomianów

$$6a^2b-6ab^2,\quad 8a^2-8b^2,\quad 4a^2b+8ab^2+4b^3=4b(a+b)(a+b),$$

jest $24ab(a-b)(a+b)(a+b)=24a^4b+24a^3b^2-24a^2b^3-24ab^4$,

gdyż ilorazy z podzielenia tego wyrażenia przez każde z danych, $4a^2+8ab+4b^2$, $3a^2b+3ab^2$, $6a^2-6ab$, nie mają prócz jedności spólnego dzielnika.

Ilorazy z podzielenia nsw-i dwu wyrażeń całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi przez te wyrażenia są pierwsze względem siebie.

112. Gdy mamy danych dwa lub więcej jednomianów np. $36a^5b^3c^7d^4e^2$, $-48a^6b^2c^5d^6e$, $-72a^8b^2d^5e^3$, to możemy wprost zauważyć, że nsw. tych jednomianów jest jednomianem, którego spółczynnik jest nsw-ą spółczynników danych jednomianów i w którym potęga podstawy a jest najwyższa z jej potęg w tych jednomianach, a więc a^8, i podobnież b^3, c^7, d^6, e^3, tak iż szukaną nsw-ą jest jednomian $144a^8b^3c^7d^6e^3$. Przeto *najmniejszą spólną wielokrotnością jednomianów jest iloczyn najmniejszej spólnej wielokrotności ich spółczynników przez każdą podstawę, znajdującą się w którymkolwiek z danych jednomianów, wziętą z największym z wykładników, jakie ona ma w tych jednomianach* (por. art. 96).

113. Gdy mamy znaleźć nsw. kilku wyrażeń w razie, kiedy dwa lub więcej z nich są wielomianami, to możemy tylko czasem korzystać z rozkładu danych wielomianów na czynniki. Tak np., gdy mamy

$$12a^5b^3+30a^4b^4+24a^3b^5+6a^2b^6=6a^2b^3(a+b)(2a^2+3ab+b^2),$$
$$32a^5+16a^4b-32a^3b^2-16a^2b^3=16a^2(a-b)(2a^2+3ab+b^2),$$

to nsw-ą tych wielomianów jest $48a^2b^3(a+b)(a-b)(2a^2+3ab+b^2)$ czyli

$$96a^6b^3+144a^5b^4-48a^4b^5-144a^3b^6-48a^2b^7.$$

Ten sposób możemy zawsze stosować w tym przypadku, kiedy jedno tylko z danych wyrażeń jest wielomianem; gdy np. mamy

$$32a^5b^3-32a^3b^5-16a^2b^6,\quad 24a^2b^7,\quad -12a^3b^4,\quad 8a^5,$$

to, po wyłączeniu z wyrazów wielomianu ich nsd-a $16a^2b^3$, znajdziemy, iż nsw-ą tych wyrażeń jest

$$48a^5b^7(2a^3-2ab^2-b^3)=96a^8b^7-96a^6b^9-48a^5b^{10}.$$

114. Ogólnie, gdy mamy znaleźć nsw. dwu lub więcej wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi, to wypadnie zastosować postępowanie, wskazane w art. 101-ym. Tak np.

1). Nsd. $36a^5b^3c^7d^4e^2$ i $-48a^6b^2c^5d^6e$ jest $12a^5b^2c^5d^4e$, przeto nsw. tych jednomianów jest $12a^5b^2c^5d^4e\times 3bc^2e\times 4ad^2=144a^6b^3c^7d^6e^2$.

2). Nsw. $32a^5b^3-32a^3b^5-16a^2b^6$ i $24a^2b^7$ jest

$$8a^2b^3\times 3b^4\times(4a^3-4ab^2-2b^3)=96a^5b^7-96a^3b^9-48a^2b^{10}.$$

3). Nsw. $a^3+2a^2b-ab^2-2b^3$, $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$ jest $a^4-5a^2b^2+4b^4$.

4). Nsw. $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$, $a^8+a^7b+ab^7+b^8$, a^3-b^3, $a^7+a^6b-ab^6-b^7$ i a^3+b^3 jest $a^{13}-a^7b^6+a^6b^7-b^{13}$.

ROZDZIAŁ TRZECI.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE UŁAMKOWE.

WYRAŻENIE ALGEBRAICZNE UŁAMKOWE.

115. Wyrażenie algebraiczne ułamkowe (art. 50) otrzymaliśmy z dzielenia dwu wyrażeń algebraicznych całkowitych w przypadku, kiedy dzielna była niepodzielna przez dzielnik (art. 81—84, 86—89).

Wyrażenie ułamkowe może być albo ułamkiem (art. 81, 82, 84), alboteż złożone z jednomianów i ułamków (art. 83, 88, 89). W ostatnim razie część wyrażenia ułamkowego, będącą sumą jednomianów, nazywamy jego c z ę ś c i ą c a ł k o w i t ą. Wogóle zaś każdy składnik wyrażenia ułamkowego nazywa się jego w y r a z e m.

116. Jeżeli w wyrażeniu ułamkowem nadajemy pewnym literom szczególne znaczenie, a owe litery nie znajdują się w dzielnikach, to mówimy, że ono jest względem tych liter całkowite; tak np. o wyrażeniu $\frac{ax^2}{b}+\frac{2bxy}{ac}-\frac{cy^2}{3a}$ mówimy, że ono jest całkowite względem x i y.

117. Mając jakikolwiek ułamek, licznik jego nazwijmy l, mianownik m, liczbę zaś, którą przedstawia ułamek, nazwijmy q; jest tedy $\frac{l}{m}=q$.

Ponieważ z podzielenia liczby l przez liczbę m otrzymujemy liczbę q, przeto $l=q.m$, co możemy tak wypowiedzieć: *licznik ułamka jest iloczynem liczby, którą ten ułamek przedstawia, przez mianownik ułamka.*

MNOŻENIE LUB DZIELENIE LICZNIKA I MIANOWNIKA PRZEZ TĘ SAMĘ LICZBĘ.

118. Jeżeli mamy $\frac{l}{m}=q$, skąd $l=q.m$, to mnożąc obie strony tej ostatniej równości przez liczbę s, różną od zera, będziemy mieli (art. 64, IV, γ)

$$ls=q.ms,\ \text{skąd}\ \frac{ls}{ms}=q.$$

Ponieważ zaś $q=\frac{l}{m}$, przeto

$$\frac{l}{m}=\frac{ls}{ms},$$

t. j. *ułamek nie zmieni swej wartości, jeżeli tak licznik jak i mianownik jego pomnożymy przez tę samę liczbę*. Np.

$$\frac{a-6}{a^2+6b}=\frac{(a-6)(a+6)}{(a^2+6b)(a+6)}=\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}.$$

Ta liczba $a+6$ ma być różna od zera, a więc nie może być $a=-6$. Jakoż, przy $a=-6$ dany ułamek $\frac{a-6}{a^2+6b}=-\frac{12}{36+6b}$, gdy tymczasem przy $a=-6$ $\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}=\frac{0}{0}$, co wskazywałoby, iż tego ułamka wartość jest nieoznaczona (art. 38).

Również, jeżeli, mając wyrażenie całkowite, które nazwijmy p, pomnożymy je, a otrzymany iloczyn podzielimy przez tę samę liczbę s, różną od zera, to nie zmienimy jego wartości, gdyż $p=\frac{p}{1}=\frac{ps}{s}$. Np. mieć będziemy $a-b=\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, pod warunkiem, iż b jest różne od $-a$.

119. Gdy mamy ułamek $\frac{l}{m}$ i tak licznik jego jak i mianownik podzielimy przez tę samę liczbę s, różną od zera, to będziemy mieli ułamek $\frac{l:s}{m:s}$, którego wartość nazwijmy q, tak iż $q=\frac{l:s}{m:s}$. Jeżeli licznik i mianownik tego ułamka pomnożymy przez liczbę s, to (art. 118) $q=\frac{(l:s).s}{(m:s).s}=\frac{l}{m}$. Widzimy więc, że

$$\frac{l}{m}=\frac{l:s}{m:s},$$

t. j. *ułamek nie zmieni swej wartości, jeżeli licznik i mianownik jego jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę.*

120. Gdy licznik i mianownik ułamka podzielimy przez ich spólny dzielnik, to dany ułamek zastąpimy przez prostszy. Jeżeli licznik i mianownik są pierwsze względem siebie (art. 103), to taki ułamek już przez prostszy zastąpiony być nie może i mówimy, że wówczas ułamek jest w najprostszej postaci, albo, że jest w postaci nieskracalnej. *Aby dany ułamek przedstawić w postaci nieskracalnej, trzeba jego licznik i mianownik podzielić przez ich największy spólny dzielnik.*

Zwykle tak ułamki dane, jak i ułamki, wynikające z rachunku, przedstawiamy w postaci nieskracalnej.

121. Zdarza się niekiedy, iż, nadając literom, znajdującym się w ułamku, pewne wartości, otrzymujemy $\frac{0}{0}$ nawet w tym razie, kiedy ów ułamek nie może przedstawiać dowolnej liczby, lecz ma wartość zupełnie oznaczoną. Wynikać to może z tego, iż jego licznik i mianownik mają czynnik spólny, który właśnie przy owych wartościach staje się równym zeru. Tak np. w ułamku

$\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}$ przyjmując $a=-6$, otrzymamy $\frac{0}{0}$ dlatego tylko, że licznik i mianownik tego ułamka mają spólny czynnik $a+6$ (art. 118), który przy tej wartości $a=-6$ staje się zerem. Ponieważ jednak dany tu ułamek jest zawsze równy ułamkowi $\frac{a-6}{a^2+6b}$, który przy $a=-6$ ma wartość $-\frac{12}{36+6b}=$ $=-\frac{2}{6+b}$, przeto także »istotną« wartością ułamka $\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}$ przy $a=-6$ jest $-\frac{2}{6+b}$. Widzimy więc, że, *jeżeli otrzymujemy* $\frac{0}{0}$ *jako wartość ułamka, to należy sprawdzić, czy ta wartość nieoznaczona nie jest tylko »pozorna«, t. j. czy licznik i mianownik ułamka nie mają spólnego czynnika, który stał się zerem.*

122. Gdy mamy kilka ułamków, np. $\frac{g}{h}, \frac{k}{l}, \frac{m}{n}$, to możemy licznik i mianownik każdego ułamka pomnożyć przez taką liczbę, aby mianowniki wszystkich ułamków stały się jednakowe. Ów spólny mianownik będzie spólną wielokrotnością mianowników h, l, n; najprościej jest wziąć ich najmniejszą spólną wielokrotność. Nazwijmy ją w i niech $w=h.r=l.s=n.t$; w takim razie

$$\frac{g}{h}=\frac{g.r}{h.r}=\frac{gr}{w},\quad \frac{k}{l}=\frac{k.s}{l.s}=\frac{ks}{w},\quad \frac{m}{n}=\frac{m.t}{n.t}=\frac{mt}{w}.$$

Sprowadziliśmy więc dane ułamki do postaci o tym samym mianowniku. *Aby dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika należy znaleźć najmniejszą spólną wielokrotność ich mianowników i przyjąć ją jako mianownik spólny wszystkich ułamków, za licznik zaś każdego oddzielnego ułamka wziąć iloczyn pierwotnego jego licznika i ilorazu z podzielenia spólnego mianownika przez mianownik pierwotny tego ułamka.*

CZTERY DZIAŁANIA NA UŁAMKACH.

123. Gdy mamy znaleźć sumę dwu lub więcej ułamków o jednakowych mianownikach, np. $\frac{f}{n}=p$, $\frac{g}{n}=q$, $\frac{h}{n}=r$, to idzie nam o znalezienie sumy $p+q+r$, wyrażonej przy pomocy liczników i mianownika danych ułamków. Ponieważ (art. 117) $f=pn$, $g=qn$, $h=rn$, przeto

$$f+g+h=pn+qn+rn, \text{ czyli } f+g+h=(p+q+r)\,n,$$

skąd $p+q+r=\frac{f+g+h}{n}$, czyli

$$\frac{f}{n}+\frac{g}{n}+\frac{h}{n}=\frac{f+g+h}{n}.$$

Gdybyśmy zaś mieli znaleźć sumę ułamków, nie mających spólnego mianownika, to, sprowadziwszy je do spólnego mianownika, wykonalibyśmy następnie dodawanie, jak powyżej.

A więc ogólnie, *aby dodać do siebie ułamki, należy, po sprowadzeniu ich do spólnego mianownika, sumę algebraiczną liczników wziąć za licznik ich sumy, a mianownik spólny za mianownik sumy.*

124. Gdy mamy wykonać odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach, np. od $\frac{f}{n}=p$ odjąć $\frac{g}{n}=q$, to idzie nam o wyrażenie różnicy $p-q$ przy pomocy liczników i mianownika danych ułamków. Ponieważ $f=pn$, $g=qn$, przeto

$$f-g=pn-qn, \text{ czyli } f-g=(p-q)\,n,$$

skąd $p-q=\frac{f-g}{n}$, czyli

$$\frac{f}{n}-\frac{g}{n}=\frac{f-g}{n}.$$

Jeżeliby zaś dane ułamki nie miały spólnego mianownika, to, sprowadziwszy je do spólnego mianownika, mielibyśmy takież samo, jak powyżej, zadanie do wykonania.

A więc ogólnie, *aby wykonać odejmowanie ułamków, należy, po sprowadzeniu ich do spólnego mianownika, różnicę liczników wziąć za licznik ich różnicy, a mianownik spólny za mianownik różnicy.*

125. Wyrażenie ułamkowe, złożone z części całkowitej i ułamka, możemy przedstawić w kształcie ułamka; np. $p+\frac{l}{m}=\frac{pm}{m}+\frac{l}{m}=\frac{mp+l}{m}$.

126. Jeżeli mamy wykonać mnożenie ułamków, np. $\frac{g}{h}=p$, $\frac{k}{l}=q$, $\frac{m}{n}=r$, to idzie nam o wyrażenie iloczynu $p.q.r$ przy pomocy liczników i mianowników danych ułamków. Ponieważ $g=ph$, $k=ql$, $m=rn$, przeto, mnożąc przez siebie te równości stronami odpowiedniemi, będziemy mieli

$$gkm=ph.ql.rn, \text{ czyli } gkm=pqr.hln,$$

skąd $p.q.r=\frac{gkm}{hln}$, czyli

$$\frac{g}{h}\cdot\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{gkm}{hln},$$

t. j. *aby wykonać mnożenie ułamków, należy iloczyn ich liczników wziąć za licznik iloczynu, a za jego mianownik iloczyn mianowników danych ułamków.*

Jeżeli mamy wykonać mnożenie takich ułamków, iż licznik jednego i mianownik innego mają spólny czynnik, to zwykle odrazu dzielimy je przez ów spólny czynnik, zamiast dzielić przezeń licznik i mianownik iloczynu (art. 120).

Jeżeli mamy znaleźć iloczyn wyrażenia całkowitego i ułamka, np. $a\cdot\frac{l}{m}$, to, zamiast a pisząc $\frac{a}{1}$, będziemy mieli $\frac{a}{1}\cdot\frac{l}{m}=\frac{al}{m}$, t. j. *iloczyn wyrażenia całkowitego i ułamka otrzymujemy, biorąc iloczyn wyrażenia całkowitego przez licznik ułamka za licznik iloczynu, a za jego mianownik biorąc mianownik ułamka.*

Gdyby jeden lub więcej z danych czynników były wyrażeniami, złożonemi z części całkowitej i ułamka, to, przedstawiwszy je (art. 125) w kształcie ułamka, sprowadzimy rzecz do mnożenia ułamków. Jednak możemy także postąpić inaczej; np.

$$\left(a+\frac{g}{h}\right)\left(b+\frac{k}{l}\right)=\frac{ah+g}{h}\cdot\frac{bl+k}{l}=\frac{abhl+bgl+ahk+gk}{hl}=ab+\frac{bg}{h}+\frac{ak}{l}+\frac{gk}{hl},$$

czyli $$\left(a+\frac{g}{h}\right)\left(b+\frac{k}{l}\right)=a.b+\frac{g}{h}\cdot b+a\cdot\frac{k}{l}+\frac{g}{h}\cdot\frac{k}{l},$$
co łatwo wypowiedzieć.

127. Gdy mamy np. ułamek $\frac{g}{h}=p$ podzielić przez ułamek $\frac{k}{l}=q$, to idzie nam o wyrażenie ilorazu $p:q$ przy pomocy liczników i mianowników danych ułamków. Ponieważ $g=ph$, $k=ql$, przeto, napisawszy te równości tak:
$$ph=g,\quad k=ql,$$
mnożąc je przez siebie stronami odpowiedniemi, będziemy mieli $phk=gql$, skąd, dzieląc obie strony tej równości przez tę samę liczbę hkq, otrzymamy $\frac{p}{q}=\frac{gl}{hk}$. Tu po stronie lewej $p:q=\frac{g}{h}:\frac{k}{l}$, zaś po prawej ułamek $\frac{gl}{hk}$ jest iloczynem $\frac{g}{h}\cdot\frac{l}{k}$. Mamy zatem
$$\frac{g}{h}:\frac{k}{l}=\frac{g}{h}\cdot\frac{l}{k},$$
t. j. *iloraz otrzymujemy, mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika.*

Gdyby jedno z danych wyrażeń było całkowite, to mielibyśmy:
$$a:\frac{l}{m}=\frac{a}{1}:\frac{l}{m}=\frac{a}{1}\cdot\frac{m}{l}=a\cdot\frac{m}{l},\quad \text{zaś}\quad \frac{l}{m}:a=\frac{l}{m}\cdot\frac{1}{a}.$$
Widzimy z tego, że także do tych przypadków odnosi się prawidło, powyżej ogólnie wypowiedziane.

Jeżeli czyto dzielna, czyto dzielnik, czyteż dzielna i dzielnik jednocześnie są wyrażeniami, złożonemi z części całkowitej i ułamka, to należy je przedstawić w postaci ułamka (art. 125), przez co rzecz sprowadzimy do jednego z powyższych przypadków.

128. Jeżeli dzielenie wyrażeń ułamkowych wskażemy, pisząc dzielną nad, a dzielnik pod kreską poziomą, to powstanie ułamek, który albo w liczniku, albo w mianowniku, alboteż jednocześnie w liczniku i w mianowniku ma ułamki. Takie wyrażenie ułamkowe możemy zawsze, mnożąc tak wyrażenie nad »główną« poziomą kreską, jak i wyrażenie pod nią, przez tę samę liczbę, doprowadzić do postaci, w której licznik i mianownik będą już wyrażeniami całkowitemi. Np.
$$\frac{a+\frac{g}{h}}{b+\frac{k}{l}}=\frac{ahl+gl}{bhl+hk}.$$

WARTOŚCI OSOBLIWE UŁAMKA.

129. Niech $\frac{l}{m}=q$. Wówczas, jak wiemy (art. 38), przy m różnem od zera, zaś $l=0$, jest także $q=0$. Przy l różnem od zera, zaś $m=0$, jest $q=\infty$, liczbie nieskończenie wielkiej. Gdy zaś jednocześnie $l=0$ i $m=0$, to $q=\frac{0}{0}$ w razie, jeżeli liczby l i m stały się równemi zeru nie wskutek tego tylko, iż miały czynnik spólny, który otrzymał wartość zero (art. 121).

Z równości

$$\frac{l}{m}=q, \qquad l=q.m, \qquad \frac{l}{q}=m,$$

przy l różnem od zera, zaś $m=0$, mamy

$$\frac{l}{0}=\infty, \qquad l=\infty\times 0, \qquad \frac{l}{\infty}=0.$$

Ostatnią równość tak wypowiadamy: *iloraz z podzielenia jakiejkolwiek liczby skończonej przez liczbę nieskończenie wielką jest zerem.*

Przedostatnia zaś równość wskazuje, iż, kiedy w iloczynie dwu czynników jednocześnie jeden czynnik staje się liczbą nieskończenie wielką, a pozostały staje się zerem, iloczyn może przedstawiać liczbę różną od zera. Ponieważ l może być dowolną liczbą, przeto ów iloczyn $\infty\times 0$ może przedstawiać jakąkolwiek liczbę, czyli ma toż samo znaczenie, co $\frac{0}{0}$ (art. 38). Wynika to także z równości $q.m=\dfrac{m}{\dfrac{1}{q}}$, z której wtedy, kiedy jednocześnie m staje się zerem, zaś q staje się liczbą nieskończenie wielką, a więc $\frac{1}{q}$ zerem, mamy $\infty\times 0=\frac{0}{0}$.

130. Kiedy w ułamkach

$$\frac{2a^2-5}{3a^3+5a}=\frac{2-\dfrac{5}{a^2}}{3a+\dfrac{5}{a}}, \qquad \frac{2a^2-5}{3a^2+5}=\frac{2-\dfrac{5}{a^2}}{3+\dfrac{5}{a^2}}, \qquad \frac{2a^3-5a}{3a^2+5}=\frac{2a-\dfrac{5}{a}}{3+\dfrac{5}{a^2}}$$

staje się a liczbą nieskończenie wielką, każdy z tych ułamków w pierwotnej postaci przedstawi się jako $\frac{\infty}{\infty}$, gdy tymczasem, jak to widać z drugich ich postaci, wartości tych ułamków stają się wówczas: pierwszego 0, drugiego $\frac{2}{3}$, trzeciego ∞.

O RÓŻNYCH SYSTEMATACH PISANIA LICZB.

131. Liczbę dziesiętną np. 2456·8907 możemy tak napisać:

$$2.10^3+4.10^2+5.10+6.10^0+8\cdot\frac{1}{10}+9\cdot\frac{1}{10^2}+0\cdot\frac{1}{10^3}+7\cdot\frac{1}{10^4}.$$

To wyrażenie jest szczególnym przypadkiem wyrażenia ułamkowego

$$a.n^l+b.n^{l-1}+\ldots+e.n^2+f.n+g.n^0+p\cdot\frac{1}{n}+q\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+u\cdot\frac{1}{n^{k-1}}+w\cdot\frac{1}{n^k},$$

w którem każda z liter oznacza liczbę dodatną i całkowitą. Gdy bowiem w tem ostatniem wyrażeniu przy $n=10$, $l=3$, $k=4$, t. j. w wyrażeniu

$$a.10^3+b.10^2+c.10+d.10^0+p\cdot\frac{1}{10}+q\cdot\frac{1}{10^2}+r\cdot\frac{1}{10^3}+s\cdot\frac{1}{10^4},$$

przyjmiemy jeszcze $a=2$, $b=4$, $c=5$, $d=6$, $p=8$, $q=9$, $r=0$, $s=7$, to otrzymamy naszę liczbę.

W powyższem ogólnem wyrażeniu ułamkowem mamy w każdym wyrazie potęgę liczby n; tę liczbę nazwiemy p o d s t a w ą (Grundzahl). Zauważmy, że, nadawszy podstawie n wartość 10, moglibyśmy każdej z liter $a, b, \ldots, f, g, p, q, \ldots, u, w$ nadawać którąkolwiek z wartości $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. A więc każda z tych liter może przedstawiać 0, albo też liczbę mniejszą od podstawy.

Przy takiem zastrzeżeniu co do wartości, jakie otrzymywać mogą litery $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$, moglibyśmy podstawie n nadać wartość inną niż 10.

Jeżeli np. $n=4$, to każda z liter $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$ może otrzymywać tylko wartości 0, 1, 2, 3. Wtedy szczególnym przypadkiem naszego ogólnego wyrażenia ułamkowego będzie np. liczba

$$2.4^5+0.4^4+1.4^3+2.4^2+1.4+3.4^0+2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4^2}+0\cdot\frac{1}{4^3}+3\cdot\frac{1}{4^4}\cdot$$

Gdybyśmy tę liczbę chcieli napisać według zasady podobnej do tej, którą stosujemy w systemacie dziesiątkowym, to wypadłoby na »pierwszem« miejscu (przed kropką) postawić cyfrę 3, która w tem wyrażeniu jest mnożona przez $n^0=4^0$, na »drugiem« cyfrę 1, która jest mnożona przez podstawę 4, na »trzeciem« cyfrę 2, która jest mnożona przez kwadrat podstawy 4, i t. d.; po kropce zaś należałoby postawić naprzód cyfrę 2, która jest mnożona przez odwrotność podstawy 4, obok niej cyfrę 1, mnożoną przez odwrotność kwadratu podstawy 4, i t. d. — Aby zaznaczyć, że nie należy tak wypisanej liczby uważać za napisaną w systemacie dziesiątkowym, ujmiemy ją np. w nawias i dodamy po nawiasie u dołu liczbę 4, oznaczającą podstawę,

$$[201213{\cdot}2103]_4\,.$$

O liczbie samej, znajdującej się w tym nawiasie, powiemy, iż jest napisana w systemacie czwórkowym.

Jeżeli np. $n=12$, to każda z liter $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$ w naszem ogólnem wyrażeniu ułamkowem otrzymywać może wartości $0, 1, 2, \ldots, 11$. Szczególnym wtedy przypadkiem naszego wyrażenia będzie np.

$$8.12^3+11.12^2+10.12+7.12^0+5\cdot\frac{1}{12}+11\cdot\frac{1}{12^2}+0\cdot\frac{1}{12^3}+6\cdot\frac{1}{12^4}\cdot$$

Gdybyśmy i tę liczbę chcieli napisać podobnie, jak liczbę w poprzednim przykładzie, to musielibyśmy obmyślić osobne znaki (cyfry) dla 10 i 11. Oznaczywszy np. 10 przez β, zaś 11 przez δ, będziemy mogli tę liczbę tak napisać: $[8\delta\beta7{\cdot}5\delta06]_{12}$. Mówimy, że ta ostatnia liczba jest napisana w systemacie dwunastkowym.

Nadając inne wartości podstawie n, moglibyśmy mieć systemat np. piątkowy, dwudziestkowy i t. d. pisania liczb. Gdybyśmy wzięli $n=2$, mielibyśmy systemat dwójkowy, zwany diadycznym; liczba, w tym systemacie napisana, miałaby tylko cyfry 0 i 1. Tak np. $[1011{\cdot}1101]_2=2^3+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}\cdot$

132. Rozważymy, jak, mając liczbę napisaną w pewnym systemacie, przedstawić ją w systemacie dziesiątkowym. Np. gdy mamy $[4523{\cdot}1513]_6$, to, z uwagi, że

$$[(4.6+5).6+2].6+3=1059, \quad \tfrac{1}{6}\left\{1+\tfrac{1}{6}\left[5+\tfrac{1}{6}\left(1+\tfrac{1}{6}\cdot3\right)\right]\right\}=\tfrac{5}{16}=0{\cdot}3125,$$

jest

$$[4523{\cdot}1513]_6=1059{\cdot}3125.$$

133. Rozważymy teraz zadanie odwrotne: jak liczbę, napisaną w systemacie dziesiątkowym, przedstawić w innym systemacie? Np. liczbę 1059·3125 przedstawmy w systemacie szóstkowym. Z liczby 1059 będzie w systemacie szóstkowym tyle jedności do zaznaczenia na miejscu »pierwszem«, ile ich zostanie po odjęciu wielokrotności podstawy 6; ponieważ $1059=176\times6+3$, więc na »pierwszem« miejscu będzie cyfra 3. Mamy tu 176 razy 6; to, co zostanie z tej ilości 176 szóstek po odjęciu od liczby 176 wielokrotności podstawy 6 (czyli od liczby 176.6 wielokrotności liczby 6^2), wypadnie postawić na miejscu »drugiem«; ponieważ $176=29.6+2$, przeto $176.6=29.6^2+2.6$ i na miejscu »drugiem« postawimy 2. Podobnież z tego, że $29=4.6+5$, wynika, że na »trzeciem« miejscu postawimy 5, zaś na »czwartem« 4. Mamy więc

$$1059=[(4.6+5).6+2].6+3=[4523]_6\,.$$

Co się zaś tyczy ułamka 0·3125, to wypadnie tak postąpić: $0{\cdot}3125=\frac{5}{16}$; po kropce ma stać cyfra, oznaczająca, ile w tym ułamku jest części $\frac{1}{6}$; wykonawszy dzielenie $\frac{5}{16}:\frac{1}{6}$, otrzymamy

$$\tfrac{5}{16}:\tfrac{1}{6}=\tfrac{15}{8}=1+\tfrac{7}{8},\qquad \text{a więc}\quad \tfrac{5}{16}=\tfrac{1}{6}\left(1+\tfrac{7}{8}\right).$$

Postępując podobnie dalej, mamy

$$\tfrac{7}{8}:\tfrac{1}{6}=\tfrac{21}{4}=5+\tfrac{1}{4},\qquad \text{a więc}\quad \tfrac{7}{8}=\tfrac{1}{6}\left(5+\tfrac{1}{4}\right);$$

$$\tfrac{1}{4}:\tfrac{1}{6}=\tfrac{3}{2}=1+\tfrac{1}{2},\qquad \text{a więc}\quad \tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{6}\left(1+\tfrac{1}{2}\right);$$

$$\tfrac{1}{2}:\tfrac{1}{6}=3,\qquad \text{a więc}\quad \tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{6}\cdot3.$$

Jest zatem

$$0{\cdot}3125=\tfrac{5}{16}=\tfrac{1}{6}\left\{1+\tfrac{1}{6}\left[5+\tfrac{1}{6}\left(1+\tfrac{1}{6}\cdot3\right)\right]\right\}=[0{\cdot}1513]_6\,.$$

Przeto

$$1059{\cdot}3125=[4523{\cdot}1513]_6\,.$$

134. Wykonywanie czterech działań na liczbach, napisanych w systemacie niedziesiątkowym, odbywa się analogicznie do wykonywania ich na liczbach, napisanych w systemacie dziesiątkowym. Wykonajmy cztery działania na liczbach, napisanych w systemacie np. czwórkowym, czego już nie będziemy tu wskazywali zapomocą nawiasów z oznaczeniem podstawy. Samo wykonywanie można wyrozumieć, przyglądając się następnym przykładom i wciąż pamiętając, że podstawą jest liczba 4.

$$\begin{array}{r} 203{\cdot}1231\\ 30{\cdot}321\\ 233{\cdot}3\\ 1{\cdot}2013\\ \hline 1201{\cdot}2120. \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 302{\cdot}12\\ -\,113{\cdot}20132\\ \hline 122{\cdot}31202. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 321{\cdot}23\times2{\cdot}301\\ \hline 32123\\ 223101\\ 130312\\ \hline 2133{\cdot}20223. \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{l} 2133{\cdot}20223:2{\cdot}301\\ \begin{array}{r|l} 2133202{\cdot}23 & 2301\\ \cline{2-2} 20103\phantom{{\cdot}23} & 321{\cdot}23\\ \cline{1-1} 12230\phantom{{\cdot}2} & \\ 11202\phantom{{\cdot}2} & \\ \cline{1-1} 10222 & \\ 2301 & \\ \cline{1-1} 13212 & \\ 11202 & \\ \cline{1-1} 20103 & \\ 20103 & \\ \cline{1-1} 0. & \end{array} \end{array}$$

Gdyby po uwzględnieniu wszystkich cyfr dzielnej zostawała reszta, a chcielibyśmy wyznaczyć dalsze cyfry ilorazu, to do owej reszty dopisalibyśmy 0 i t. d.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

STOSUNKI. PROPORCYE.

STOSUNKI.

135. Jeżeli iloraz otrzymany z podzielenia a przez b jest q, to wyrażenie tej liczby q przez liczby a i b nazywamy stosunkiem (Verhältnis) a do b. Powiemy więc: *stosunkiem dwu liczb nazywamy wyrażenie przez nie tej liczby, którą otrzymalibyśmy, dzieląc pierwszą z liczb danych przez drugą.*

Ponieważ ta liczba, którą stosunek wyraża, odpowiada ilorazowi, przeto zaznaczamy stosunek dwu liczb a i b, pisząc albo $a:b$, albo też $\frac{a}{b}$, a czytając w obu razach: »stosunek a do b«.

Liczby a i b nazywają się wyrazami stosunku, pierwsza poprzednikiem (Vorderglied), druga następnikiem (Hinterglied), liczba zaś q, którą ten stosunek wyraża, nazywa się wykładnikiem (Quotient) stosunku. Ponieważ poprzednik odpowiada dzielnej, następnik dzielnikowi, wykładnik zaś stosunku ilorazowi, przeto:

poprzednik = następnikowi × wykładnik,
następnik = poprzednikowi : wykładnik,
wykładnik = poprzednikowi : następnik,

a nadto: jeżeli poprzednik pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik zostanie przez tęż liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony; jeżeli następnik pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik zostanie odpowiednio podzielony lub pomnożony przez tęż liczbę; jeżeli oba wyrazy stosunku albo jednocześnie pomnożymy, albo też jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni.

Korzystając z tej ostatniej własności, możemy: w razie, kiedy jeden lub oba wyrazy stosunku są ułamkowe, zastąpić je przez całkowite; jeżeli wyrazy stosunku mają spólny dzielnik, przezeń je podzielić; zmienić znaki obu wyrazów stosunku.

136. Gdy mamy dwie liczby a i b, to, zależnie od tego, którą z nich przyjmujemy jako poprzednik, istnieć mogą dwa stosunki tych liczb: albo $a:b$, albo też $b:a$. Jeżeli wykładnik pierwszego stosunku nazwiemy q, $a:b=q$, to $b:a=\frac{1}{q}$, t. j. z dwu stosunków $a:b$ i $b:a$ każdy wyraża liczbę, która jest odwrotnością liczby, wyrażonej przez stosunek pozostały. Dlatego mówimy, że stosunek $b:a$ jest stosunkiem odwrotnym (reciprokes V.) względem stosunku $a:b$.

137. Weźmy kilka stosunków. Poprzedniki ich oznaczmy przez tę samę literę np. a, dając tej literze z prawej strony u dołu wskaźniki (Indices): 1, 2, 3, . . . , n, tak iż np.[1]) a_3 oznaczać będzie poprzednik 3-go stosunku,

[1]) Zamiast czytać: a ze wskaźnikiem trzy, czytamy krótko: a trzy; podobnie a_1 czytamy: a jeden i t. d.; zaś a', a'', a''', a^{IV}, a^{V},... czytać będziemy: a pierwsze, a drugie, a trzecie, a czwarte i t. d.

zaś a_n oznaczać będzie poprzednik n-go stosunku; podobnie następniki tych stosunków oznaczmy przez literę b z odpowiedniemi wskaźnikami. Będziemy więc mieli stosunki:

$$a_1 : b_1, \quad a_2 : b_2, \quad a_3 : b_3, \quad \ldots, \quad a_n : b_n.$$

Przypuśćmy, że wykładniki tych stosunków są tąż samą liczbą; nazwijmy ją q. Ponieważ stosunek jest wyrażeniem wykładnika, przeto stosunki, mające ten sam wykładnik, są równoznaczne, tak iż każdy z tych stosunków może być wzięty zamiast innego. Dlatego stosunki, mające ten sam wykładnik, nazywamy stosunkami równemi i możemy napisać

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n = q.$$

Ponieważ z tych równych stosunków mamy

$$a_1 = q \cdot b_1, \quad a_2 = q \cdot b_2, \quad a_3 = q \cdot b_3, \quad \ldots, \quad a_n = q \cdot b_n,$$

przeto
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = q \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$

skąd
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = q.$$

Jest więc
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \text{ i t. d.},$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników ilukolwiek równych stosunków do sumy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

Gdy $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = q$, to od pierwszej z równości:

$$a_1 = q \cdot b_1, \quad a_2 = q \cdot b_2$$

odjąwszy drugą stronami odpowiedniemi, mieć będziemy $a_1 - a_2 = q\,(b_1 - b_2)$,

skąd
$$\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = q, \quad \text{a więc} \quad \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

t. j. *stosunek różnicy poprzedników dwu równych stosunków do różnicy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

PROPORCYE.

138. Gdy wyraźnie zaznaczymy, że pewne dwa stosunki są równe, to mówimy, że mamy proporcyą (Proportion), a więc *proporcya jestto zaznaczona równość dwu stosunków.*

Gdy tedy mamy np. proporcyą

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad \text{czyli} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

to czytamy ją: »stosunek a_1 do b_1 jest równy stosunkowi a_2 do b_2«, albo też niekiedy krócej: »a_1 do b_1 równa się a_2 do b_2«. Proporcya ma cztery wyrazy: dwa poprzedniki a_1 i a_2 i dwa następniki b_1 i b_2. Wyrazy pierwszy i ostatni, a_1 i b_2, nazywają się wyrazami skrajnemi (äussere G.), zaś drugi i trzeci, b_1 i a_2, nazywają się wyrazami średniemi (mittlere G.). Wykładnik stosunków proporcyi można nazywać wykładnikiem proporcyi.

Wszystkie cztery liczby, stanowiące wyrazy proporcyi, nazywamy ogólnie czterema liczbami proporcyonalnemi. Gdy o pewnych czterech liczbach mówimy, że one są proporcyonalne, to rozumiemy przez to, iż stosunek dwu pierwszych z nich jest równy stosunkowi dwu pozostałych.

139. Gdy weźmiemy proporcyą

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

i wykładnik jej nazwiemy q, to $a_1 = q . b_1$, $a_2 = q . b_2$. Mnożąc obie strony pierwszej równości przez b_2, obie zaś strony drugiej przez b_1, mieć będziemy $a_1 b_2 = q b_1 b_2$, $b_1 a_2 = q b_1 b_2$, skąd

$$a_1 b_2 = b_1 a_2,$$

t. j. *iloczyn wyrazów skrajnych proporcyi jest równy iloczynowi jej wyrazów średnich.* Ta własność nazywa się główną własnością proporcyi.

Z ostatniej równości wynika

$$a_1 = \frac{b_1 a_2}{b_2}, \quad b_2 = \frac{b_1 a_2}{a_1}, \quad b_1 = \frac{a_1 b_2}{a_2}, \quad a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_1},$$

t. j. *wyraz skrajny proporcyi równa się iloczynowi średnich, podzielonemu przez pozostały skrajny,* zaś *wyraz średni proporcyi równa się iloczynowi skrajnych, podzielonemu przez pozostały średni.*

Na mocy tego możemy w przypadku, kiedy którykolwiek z wyrazów proporcyi jest niewiadomy, obliczyć go. Tak np. gdy mamy $x : 5 = 3 : (-2)$, to $x = \frac{5 . 3}{-2} = -7{\cdot}5$. Z tego wynika, że wogóle trzy wyrazy proporcyi, zajmujące oznaczone w niej miejsca, wyznaczają czwarty jej wyraz, czyli, że *do trzech liczb, zajmujących w proporcyi oznaczone miejsca, można znaleźć czwartą proporcyonalną.*

140. Widzieliśmy, że proporcya prowadzi do równości dwu iloczynów dwuczynnikowych. Nawzajem, gdy mamy dwa równe iloczyny dwuczynnikowe, np.

$$a \alpha = b \beta,$$

to, dzieląc obie strony tej równości przez iloczyn jednego czynnika pierwszego iloczynu i jednego czynnika drugiego iloczynu, np. przez αb, będziemy mieli

$$a : b = \beta : \alpha,$$

t. j. *z dwu równych iloczynów dwuczynnikowych można utworzyć proporcyą, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki pozostałego za wyrazy średnie.*

Kiedy $a = bc$, to np. $a : b = c : 1$; kiedy $abc = df$, to np. $ab : d = f : c$.

141. Z proporcyi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ mamy $a_1 b_2 = b_1 a_2$. Z tych dwu równych iloczynów można utworzyć proporcyą, biorąc czynniki pierwszego iloczynu jużto za wyrazy skrajne, jużteż za wyrazy średnie, a wtedy czynniki drugiego iloczynu będą odpowiednio albo wyrazami średniemi, alboteż skrajnemi. W każdym z tych dwu przypadków możemy z czynników iloczynu $a_1 b_2$ napisać naprzód albo czynnik a_1, alboteż czynnik b_2, a przytem w każdym z tych czterech już przypadków możemy z czynników drugiego iloczynu $b_1 a_2$ napisać naprzód albo czynnik b_1, alboteż czynnik a_2. Będziemy więc mieli:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2; \quad b_2 : b_1 = a_2 : a_1, \quad b_2 : a_2 = b_1 : a_1;$$
$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2, \quad a_2 : a_1 = b_2 : b_1; \quad b_1 : b_2 = a_1 : a_2, \quad a_2 : b_2 = a_1 : b_1.$$

Porównywając np. pierwszą z tych proporcyj z pozostałemi, widzimy, że jej wyrazy mogą być ośmiu sposobami ustawione w proporcyą. Można te proporcye otrzymać z jednej z nich, naprzemian to przestawiając wyrazy średnie, to zastępując oba stosunki przez odwrotne (art. 136).

142. Gdy mamy $a_1:b_1 = a_2:b_2$, to (art. 135)

$$a_1 m : b_1 m = a_2 : b_2, \quad \frac{a_1}{m} : \frac{b_1}{m} = a_2 : b_2, \quad a_1 : b_1 = a_2 m : b_2 m, \quad a_1 : b_1 = \frac{a_2}{m} : \frac{b_2}{m}.$$

Jeżelibyśmy w danej proporcyi przestawili wyrazy średnie (art. 141), a w otrzymanej proporcyi $a_1:a_2 = b_1:b_2$ pomnożyli np. oba wyrazy pierwszego stosunku przez m, a w tak powstałej proporcyi $a_1 m:a_2 m = b_1:b_2$ znów przestawili wyrazy średnie, to otrzymalibyśmy $a_1 m:b_1 = a_2 m:b_2$. Takim sposobem możemy okazać, że jest

$$a_1 m : b_1 = a_2 m : b_2, \quad \frac{a_1}{m} : b_1 = \frac{a_2}{m} : b_2, \quad a_1 : b_1 m = a_2 : b_2 m, \quad a_1 : \frac{b_1}{m} = a_2 : \frac{b_2}{m}.$$

A więc *w proporcyi możemy którykolwiek wyraz skrajny i którykolwiek wyraz średni albo jednocześnie pomnożyć, albo też jednocześnie podzielić przez tę samę liczbę.*

Z tego wynika, że *wszystkie wyrazy proporcyi możemy jednocześnie albo pomnożyć, albo też podzielić przez tę samę liczbę.*

Gdy mamy $15:(-20)=(-9):12$, to $(-15):(-20)=9:12$ i $15:20=9:12$. Wogóle proporcyą, w której zachodzą wyrazy ujemne, można zastąpić przez proporcyą o samych tylko wyrazach dodatnich.

143. Przekształcenia proporcyi. Gdy mamy proporcyą $a_1:b_1 = a_2:b_2$, której wykładnik jest q, to (art. 137)

$$(a_1+a_2):(b_1+b_2) = a_1:b_1 = a_2:b_2, \quad (a_1-a_2):(b_1-b_2) = a_1:b_1 = a_2:b_2,$$

co łącznie tak piszemy:

$$(a_1 \pm a_2):(b_1 \pm b_2) = a_1:b_1 = a_2:b_2,$$

rozumiejąc, że z podwójnych znaków bierzemy jednocześnie albo znaki górne, albo też dolne. Własność tę tak wypowiemy: *stosunek sumy lub różnicy poprzedników proporcyi do odpowiednio sumy lub różnicy jej następników jest równy stosunkowi któregokolwiek z jej poprzedników do odpowiedniego następnika.*

Zestawiając z sobą poprzednio wypisane równości stosunków, widzimy, że $(a_1+a_2):(b_1+b_2)=(a_1-a_2):(b_1-b_2)$, czyli, po przestawieniu wyrazów średnich,

$$(a_1+a_2):(a_1-a_2) = (b_1+b_2):(b_1-b_2),$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy jej następników do ich różnicy.*

Jeżeli w danej proporcyi $a_1:b_1 = a_2:b_2$ przestawimy wyrazy średnie i do tak otrzymanej proporcyi $a_1:a_2 = b_1:b_2$ zastosujemy wypowiedziane powyżej własności, to będziemy mieli

$$(a_1 \pm b_1):(a_2 \pm b_2) = a_1:a_2 = b_1:b_2, \quad (a_1+b_1):(a_1-b_1) = (a_2+b_2):(a_2-b_2).$$

Porównywając to z daną proporcyą, widzimy, że *stosunek sumy lub różnicy wyrazów pierwszego stosunku proporcyi do odpowiednio sumy lub różnicy wy-*

razów drugiego jej stosunku jest równy stosunkowi pierwszego poprzednika do drugiego, jakoteż stosunkowi pierwszego następnika do drugiego, a nadto *stosunek sumy wyrazów pierwszego stosunku proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy wyrazów drugiego jej stosunku do ich różnicy.*

Utworzenie z danej proporcyi którejkolwiek z proporcyj, tu wyprowadzonych, nazywa się przekształceniem proporcyi (Umformung d. P.).

144. Proporcye złożone. Jeżeli z dwu lub więcej proporcyj danych dochodzimy do nowej proporcyi, to tę ostatnią, ze względu na dane, nazywamy proporcyą złożoną (zusammengesetzte P.).

α. Gdy w dwu proporcyach jeden ze stosunków jest ten sam, np. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ i $a_3 : b_3 = a_1 : b_1$, to stosunki pozostałe, t. j. $a_2 : b_2$ i $a_3 : b_3$, jako mające ten sam wykładnik, są sobie równe, $a_2 : b_2 = a_3 : b_3$. A więc, *gdy dwie proporcye mają jeden stosunek spólny, to z pozostałych ich stosunków można utworzyć proporcyą.*

β. Gdy mamy $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ i $a_1 : \beta_1 = a_2 : \beta_2$, to, przestawiwszy wyrazy średnie, następnie zaś zastosowawszy własność α., mieć będziemy $b_1 : b_2 = \beta_1 : \beta_2$, t. j. *kiedy dwie proporcye mają odpowiednie poprzedniki jednakowe, to z ich następników można utworzyć proporcyą.* Podobnie okazać możemy, że, *kiedy dwie proporcye mają odpowiednie następniki jednakowe, to z ich poprzedników można utworzyć proporcyą.*

Jeżeli mamy kilka proporcyj z temiż samemi odpowiedniemi czyto poprzednikami, czyteż następnikami, np.

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad a_1 : c_1 = a_2 : c_2, \quad a_1 : d_1 = a_2 : d_2, \quad a_1 : e_1 = a_2 : e_2,$$

to:

$$\begin{array}{lll} b_1 : c_1 = b_2 : c_2, & b_1 : d_1 = b_2 : d_2, & b_1 : e_1 = b_2 : e_2, \\ & c_1 : d_1 = c_2 : d_2, & c_1 : e_1 = c_2 : e_2, \\ & & d_1 : e_1 = d_2 : e_2. \end{array}$$

Zwykle te proporcye łącznie przedstawiamy w taki sposób:

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 : e_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 : e_2,$$

rozumiejąc, że każde dwie liczby przed znakiem = oraz dwie liczby na odpowiednich miejscach po znaku = są czterema liczbami proporcyonalnemi (art. 138), co zwykle wyrażamy, mówiąc, że liczby a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 są proporcyonalne względem odpowiednich liczb a_2, b_2, c_2, d_2, e_2.

γ. Jeżeli mamy kilka proporcyj o tym samym wykładniku, który nazwijmy q, np.

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad \alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2, \quad \ldots, \quad A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$

to:

$$\begin{array}{ll} a_1 = q b_1, & a_2 = q b_2, \\ \alpha_1 = q \beta_1, & \alpha_2 = q \beta_2, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_1 = q B_1, & A_2 = q B_2; \end{array}$$

dodając do siebie stronami odpowiedniemi równości każdej z tych kolumn, otrzymamy

$$a_1 + \alpha_1 + \ldots + A_1 = q(b_1 + \beta_1 + \ldots + B_1), \quad a_2 + \alpha_2 + \ldots + A_2 = q(b_2 + \beta_2 + \ldots + B_2),$$

skąd $(a_1 + \alpha_1 + \ldots + A_1) : (b_1 + \beta_1 + \ldots + B_1) = q, \quad (a_2 + \alpha_2 + \ldots + A_2) : (b_2 + \beta_2 + \ldots + B_2) = q,$

a więc $(a_1 + \alpha_1 + \ldots + A_1) : (b_1 + \beta_1 + \ldots + B_1) = (a_2 + \alpha_2 + \ldots + A_2) : (b_2 + \beta_2 + \ldots + B_2),$

t. j. *dwie lub więcej proporcyj, mających ten sam wykładnik, można dodać do siebie wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ten sam, co każdej z danych proporcyj.

Gdy dwie proporcye $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, $\alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2$ mają ten sam wykładnik, to, rozumując podobnie, jak poprzednio, dojść możemy do proporcyi

$$(a_1-\alpha_1):(b_1-\beta_1)=(a_2-\alpha_2):(b_2-\beta_2),$$

t. j. *od jednej z dwu proporcyj, mających ten sam wykładnik, można pozostałą odjąć wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ten sam, co proporcyj danych.

δ. Gdy dane są proporcye (z jakiemikolwiek wykładnikami),

$$a_1:b_1=a_2:b_2,\quad \alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2,\ \ldots,\ A_1:B_1=A_2:B_2,$$

pierwsza z wykładnikiem q, druga ρ, ..., ostatnia Q, to:

$$\begin{array}{ll} a_1=qb_1, & a_2=qb_2, \\ \alpha_1=\rho\beta_1, & \alpha_2=\rho\beta_2, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_1=QB_1, & A_2=QB_2; \end{array}$$

mnożąc równości każdej kolumny przez siebie stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$a_1\alpha_1\ldots A_1=q\rho\ldots Q.b_1\beta_1\ldots B_1,\quad a_2\alpha_2\ldots A_2=q\rho\ldots Q.b_2\beta_2\ldots B_2,$$

skąd $(a_1\alpha_1\ldots A_1):(b_1\beta_1\ldots B_1)=q\rho\ldots Q,\quad (a_2\alpha_2\ldots A_2):(b_2\beta_2\ldots B_2)=q\rho\ldots Q,$

a więc $(a_1\alpha_1\ldots A_1):(b_1\beta_1\ldots B_1)=(a_2\alpha_2\ldots A_2):(b_2\beta_2\ldots B_2),$

t. j. *można dane proporcye pomnożyć przez siebie wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest iloczynem wykładników danych proporcyj.

Jeżelibyśmy nakoniec, mając dwie proporcye $a_1:b_1=a_2:b_2$, $\alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2$, pierwszą o wykładniku q, drugą o wykładniku ρ, utworzyli równości

$$\begin{array}{ll} a_1=qb_1, & a_2=qb_2, \\ \alpha_1=\rho\beta_1, & \alpha_2=\rho\beta_2 \end{array}$$

i pierwsze z nich podzielili przez drugie stronami odpowiedniemi, to otrzymalibyśmy

$$\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{qb_1}{\rho\beta_1},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{qb_2}{\rho\beta_2},$$

czyli

$$\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{q}{\rho}\cdot\frac{b_1}{\beta_1},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{q}{\rho}\cdot\frac{b_2}{\beta_2},$$

skąd

$$\frac{a_1}{\alpha_1}:\frac{b_1}{\beta_1}=\frac{q}{\rho},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}:\frac{b_2}{\beta_2}=\frac{q}{\rho},$$

a więc

$$\frac{a_1}{\alpha_1}:\frac{b_1}{\beta_1}=\frac{a_2}{\alpha_2}:\frac{b_2}{\beta_2},$$

t. j. *mając dwie proporcye, można jednę z nich podzielić przez pozostałą wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ilorazem wykładników proporcyj danych.

145. Średnia geometryczna dwu liczb. Jeżeli w proporcyi albo oba wyrazy średnie, alboteż oba wyrazy skrajne są tąż samą liczbą,

$$a:c=c:b,\quad \text{lub}\quad c:a=b:c,$$

to w obu razach na mocy głównej własności proporcyi jest

$$c^2=ab.$$

Tak przy c dodatnem jak i przy c ujemnem jest c^2 liczbą dodatną; więc iloczyn ab jest także liczbą dodatną, t. j. liczby a i b mogą być albo obie dodatne, alboteż obie ujemne. Gdyby obie były ujemne, to na mocy własności art. 142-go możemy je zastąpić przez dodatne o tej samej wartości bezwzględnej.

Dlatego zwykle rozważamy tylko przypadek, kiedy liczby a i b są obie dodatne.

Przy danych dwu liczbach a i b, liczbę c taką, iż $c^2 = ab$, nazywamy średnią geometryczną dwu liczb (geometrisches Mittel) a i b. A więc *średnia geometryczna dwu liczb jestto liczba, której kwadrat jest równy iloczynowi tych liczb.*

Gdy $c^2 = ab$ i gdy wartość bezwzględną liczby c nazwiemy γ, to tak $c = +\gamma$, jak i $c = -\gamma$ jest średnią geometryczną liczb a i b; np. $8:20 = 20:50$, jak również $8:-20 = -20:50$. Jednak z dwu wartości średniej geometrycznej zwykle rozważamy tylko jej wartość dodatną. Tak więc zwykle przez średnią geometryczną liczb np. $a = 8$, $b = 50$ rozumiemy tylko liczbę $c = +20$.

Proporcyą $a:c = c:b$, w której wyrazy średnie są sobie równe, nazywamy proporcyą ciągłą (stetige P.). Liczbę c nazywają także średnią proporcyonalną dwu liczb (mittlere Proportionale) a i b.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

WIELKOŚCI PROPORCYONALNE.

WARTOŚCI Z SOBĄ SPÓŁMIERNE I NIESPÓŁMIERNE.

146. Jak wiemy (art. 63), wielkość może mieć różne wartości. Wielkość pewną nazwijmy A, jakiekolwiek zaś dwie jej wartości A_1 i A_2. Np. jeżeli A jest wogóle długością odcinka linii prostej, to pewne oznaczone dwie wartości A_1 i A_2 tej wielkości będą określonemi odcinkami linii prostej.

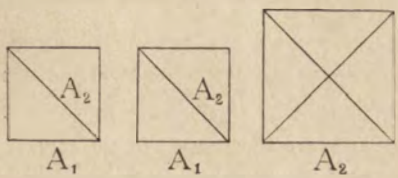
Gdy mamy dwie wartości tej samej wielkości, to możemy rozważać ich stosunek. Aby mieć pojęcie o ich stosunku, trzeba jednę z tych wartości wymierzyć wartością pozostałą, alboteż jej częścią (otrzymaną z rozłożenia tej wartości na części równe).

Jeżeli np. odcinek A_1 mieści się dokładnie p razy (przy p całkowitem) w odcinku A_2, to $A_2 = A_1 . p$ i możemy powiedzieć, że odcinek A_1 jest miarą (Mass) odcinka A_2. Wtedy stosunek $A_2 : A_1$ jest równy stosunkowi $p:1$, tak iż, jeżeli ogólnie wykładnik stosunku tych dwu odcinków $A_2 : A_1$ nazwiemy w, to ich stosunek będzie w tym razie wyrażał liczbę całkowitą $w = p$.

Jeżeli odcinek A_1 nie mieści się dokładnie w odcinku A_2, ale q-ta część (przy q całkowitem) odcinka A_1, t. j. odcinek $\frac{A_1}{q}$, mieści się dokładnie np. p razy w odcinku A_2, to wtedy $A_2 = \frac{A_1}{q} \cdot p$ i odcinek $\frac{A_1}{q}$, mieszczący się q razy w odcinku A_1, zaś p razy w odcinku A_2, jest spólną miarą odcinków A_1 i A_2. Wtedy stosunek $A_2 : A_1$ jest równy stosunkowi $p:q$, tak iż wyraża liczbę ułamkową $w = \frac{p}{q}$.

Wogóle, jeżeli dwie wartości A_1 i A_2 tej samej wielkości mają jakąkolwiek spólną miarę μ, t. j. gdy μ w każdej z nich mieści się całkowitą ilość razy, tak iż np. $A_1 = \mu . q$, $A_2 = \mu . p$, to wówczas stosunek $A_2 : A_1$, jako równy stosunkowi $p:q$, wyraża liczbę $w = \frac{p}{q}$, która jest całkowita lub ułamkowa, stosownie do tego, czy p jest podzielne, czyteż niepodzielne przez q.

147. Weźmy na uwagę dwa szczególne odcinki A_1 i A_2, mianowicie: niech A_1 będzie bokiem, zaś A_2 przekątną kwadratu. Wykładnik stosunku $A_2 : A_1$ tych odcinków nazwijmy w; będzie więc $A_2 = A_1 w$, t. j. odcinek A_2 jest w razy większy od odcinka A_1. Gdy narysujemy dwa takie kwadraty i wystawimy sobie, że je wzdłuż przekątnych przetniemy na połowy, to z tak otrzymanych czterech trójkątów możemy utworzyć kwadrat, którego bokiem będzie odcinek A_2. Skoro odcinek A_2 jest większy w razy od odcinka A_1, to kwadrat, wystawiony na odcinku A_2, ma pole w^2 razy większe od pola kwadratu, wystawionego na odcinku A_1, a więc stosunek pola kwadratu na A_2 do pola kwadratu na A_1 jest równy w^2. Z rysunku zaś jest rzeczą widoczną, że kwadrat o boku A_2 ma pole dwa razy większe, niż kwadrat o boku A_1. Zatem



$$w^2 = 2,$$

t. j. w jest liczbą, której kwadrat jest 2. Ta liczba w jest większa od 1, a mniejsza od 2 (gdyż $1^2 = 1 < 2$, zaś $2^2 = 4 > 2$), nie jest więc całkowita.

Przypuśćmy, że w jest liczbą ułamkową, $w = \frac{l}{m}$, gdzie przyjmujemy, że l i m są liczbami pierwszemi względem siebie. W takim razie byłoby $w^2 = \frac{l}{m} \cdot \frac{l}{m} = \frac{l.l}{m.m}$, czyli $2 = \frac{l.l}{m.m}$. Licznik tego ułamka rozkłada się tylko na takie czynniki pierwsze, na jakie rozkłada się liczba l, mianownik zaś rozkłada się tylko na takie czynniki pierwsze, na jakie rozkłada się liczba m, pierwsza względem l; a więc tu licznik i mianownik nie mają żadnego spólnego dzielnika, są liczbami pierwszemi względem siebie, wskutek czego licznik nie jest podzielny przez mianownik, czyli nie może być $\frac{l.l}{m.m} = 2$. A więc nie może być $w = \frac{l}{m}$, liczbie ułamkowej.

Ponieważ liczba w nie jest w tym przypadku ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, przeto, według tego, cośmy na końcu art. poprzedniego powiedzieli, odcinki A_1 i A_2 *nie mają spólnej miary*.

Jeżeli dwie wartości pewnej wielkości nie mają spólnej miary, to nazywamy je n i e s p ó ł m i e r n e m i (incommensurabel) z sobą; w przeciwstawieniu zaś, wartości, mające spólną miarę, nazywamy s p ó ł m i e r n e m i (commensurabel) z sobą.

Podobnie i dwie liczby mogą być z sobą spółmierne lub niespółmierne. Tak np. liczby całkowite i ułamkowe są z sobą spółmierne (np. liczby 5, $\frac{3}{14}$, $\frac{12}{35}$ mają spólną miarę $\frac{1}{70}$, albo $\frac{1}{140}$, albo $\frac{1}{210}$ i t. d.; największą ich spólną miarą jest $\frac{1}{70}$). Liczba zaś w, której kwadrat jest 2, nie będąca ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, jest niespółmierna z jednością.

148. Gdy mamy dwie wartości A_1 i A_2 niespółmierne, np. powyżej rozważane A_1, bok kwadratu, i A_2, jego przekątną, to o dokładnem wymierzeniu np. odcinka A_2 odcinkiem A_1, alboteż jego jakąś q-tą częścią, t. j. odcinkiem $\frac{A_1}{q}$, mowy być nie może. Jeżeli jednak okaże się, że taka część $\frac{A_1}{q}$ mieści się w odcinku A_2 np. p razy, ale już $p+1$ razy się nie mieści, to widocznie odcinek A_2 jest większy niż $\frac{A_1}{q} \times p$, czyli $A_1 \times \frac{p}{q}$, a mniejszy niż $\frac{A_1}{q} \times (p+1)$, czyli $A_1 \times \frac{p+1}{q}$. Wiemy zaś, że $A_2 = A_1 \times w$. Ponieważ tedy

$$A_2 > A_1 \times \frac{p}{q}, \quad A_2 = A_1 \times w, \quad A_2 < A_1 \times \frac{p+1}{q},$$

przeto

$$\frac{p}{q} < w < \frac{p+1}{q}.$$

A ponieważ różnica między $\frac{p+1}{q}$ i $\frac{p}{q}$ wynosi $\frac{1}{q}$, przeto każda z dwu różnic: $w - \frac{p}{q}$, $\frac{p+1}{q} - w$ jest mniejsza od liczby $\frac{1}{q}$. A więc, mając liczbę w, niespółmierną z jednością, możemy przy dowolnie obranej liczbie q (całkowitej) znaleźć takie dwa ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, iż każdy z nich różni się od tej liczby w mniej niż o $\frac{1}{q}$. Biorąc coraz większe q (i odpowiednie dobierając p), będziemy pewni, iż każdy z owych dwu ułamków jest coraz bliższy liczby w, a przyjmując q dostatecznie wielkie, możemy otrzymać dwa takie ułamki, tak bliskie liczby w, jak chcemy. Tak np., gdy w jest liczbą, której kwadrat jest 2, to liczba w jest zawarta między $\frac{2}{2}$ i $\frac{2+1}{2}$ (gdyż $1^2 < 2$, $(\frac{3}{2})^2 > 2$), między $\frac{4}{3}$ i $\frac{4+1}{3}$, między $\frac{5}{4}$ i $\frac{5+1}{4}$, między $\frac{7}{5}$ i $\frac{7+1}{5}$, i t. d., między $\frac{98}{70}$ i $\frac{98+1}{70}$, i t. d.

Chociaż więc przekątnej A_2 nie można dokładnie wymierzyć bokiem A_1, ani jego jakąkolwiek q-tą częścią, to jednak, wziąwszy tak wielkie q, aby odcinek $\frac{A_1}{q}$ był już dostatecznie mały, i oznaczywszy, że on się mieści w odcinku A_2 więcej niż p, a mniej niż $p+1$ razy, za wymiar odcinka A_2 przyjmujemy albo $A_1 \times \frac{p}{q}$, alboteż $A_1 \times \frac{p+1}{q}$, co nam daje pojęcie o wielkości odcinka A_2 takie, iż niedokładność jest mniejsza od $\frac{A_1}{q}$. Tak rozumiemy wymierzanie jednej z dwu wartości z sobą niespółmiernych zapomocą drugiej z tych wartości.

WIELKOŚCI PROPORCYONALNE.

149. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, iż stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej z tych wielkości jest równy stosunkowi odpowiadających wartości wielkości pozostałej, to mówimy, że mamy dwie wielkości proporcyonalne względem siebie, albo, że one się zmieniają w tym samym stosunku. Tak np. droga, przebieżona przez ciało, poruszające się ze stałą prędkością, jest proporcyonalna względem czasu, w którym ten ruch się odbywa.

Weźmy na uwagę dwie wielkości, które nazwijmy ogólnie A i B; niech A_1 i A_2 będą dwiema jakiemikolwiek wartościami wielkości A, zaś B_1 i B_2 niech będą odpowiadającemi wartościami wielkości B. Wielkości A i B są proporcyonalne względem siebie, kiedy $A_2 : A_1 = B_2 : B_1$.

Jeżeli wykładnik tych stosunków nazwiemy w, to mamy jednocześnie

$$A_2 = A_1 . w, \qquad B_2 = B_1 . w,$$

t. j. *kiedy dwie wielkości są proporcyonalne względem siebie, to, mnożąc którekolwiek odpowiadające sobie wartości tych wielkości przez tę samę liczbę, otrzymujemy inne ich wartości, również odpowiadające sobie.*

Gdy wartości A_1 i A_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością A, tak iż $A_1 = a_1$ takich jednostek, zaś $A_2 = a_2$ tychże jednostek, i wartości B_1 i B_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością B, tak iż $B_1 = b_1$ takich jednostek, zaś $B_2 = b_2$ tychże jednostek, to stosunek $A_2 : A_1$ możemy zastąpić stosunkiem liczb oderwanych $a_2 : a_1$, a stosunek $B_2 : B_1$ stosunkiem liczb oderwanych $b_2 : b_1$ i będziemy mieli $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$. Przestawiając w tej proporcyi wyrazy średnie, mamy $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$. Gdyby podobnie A_3 i B_3 były odpowiadającemi sobie wartościami wielkości A i B i w wartości A_3 było a_3 jednostek takich samych, jak poprzednio a_1 w A_1, zaś w wartości B_3 było b_3 jednostek takich samych, jak poprzednio b_1 w B_1, to mielibyśmy $a_3 : b_3 = a_2 : b_2 = a_1 : b_1$. I t. d.

A więc, *gdy dwie wielkości są proporcyonalne względem siebie, to stosunek liczb oderwanych, przez które wyrażają się ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.* Tak np. niech ciało biegnie z prędkością stałą i niech w 2 sekundy przebiega 60 metrów, to wartościom: 2 sekundy, 5 sekund, 7 sekund wielkości: czasu przebiegu odpowiadają wartości: 60 m, 150 m, 210 m wielkości: drogi przebieżonej — i $2 : 60 = 5 : 150 = 7 : 210$ [1]).

Jeżeli, umówiwszy się, jaką jednostką wymierzamy wartości A_1, A_2, A_3 i t. d., czyli wogóle wielkość A, i jaką jednostką wymierzamy wartości B_1, B_2, B_3 i t. d., czyli wogóle wielkość B, wykładnik stosunku $a_1 : b_1$ nazwiemy m, to będziemy mieli $a_1 = mb_1$, $a_2 = mb_2$, i t. d. Ogólnie piszemy zwykle

$$a = mb, \qquad \text{albo} \qquad \frac{a}{b} = m,$$

rozumiejąc przez a i b liczby oderwane, przez które wyrażają się, przy pomocy odpowiednich jednostek, którekolwiek dwie odpowiadające sobie wartości wielkości A i B.

Czem tu jest liczba m? Jeżeli w równości $a = mb$ przyjmiemy $b = 1$, t. j. jeżeli bierzemy wartość wielkości B równą jednostce, którą tę wielkość mierzymy, to wtedy $a = m$. Widzimy zatem, że m jest liczbą oderwaną, przez którą wyraża się wartość wielkości A, odpowiadająca wartości, równej jednostce, wielkości B.

---

[1]) Gdybyśmy te same drogi wyrazili w łokciach, przyjmując 1 łokieć $= 0{\cdot}6\, m$, to byłoby $2 : 100 = 5 : 250 = 7 : 350$. Widzimy więc, że ten stały stosunek zależy od tego, jakie wybieramy jednostki; pierwsze stosunki mają wykładnik $\frac{1}{30}$, drugie zaś stosunki, związane z temiż samemi wartościami rozważanych wielkości, mają wykładnik $\frac{1}{50}$.

150. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, iż stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej wielkości jest równy stosunkowi odwrotnemu (art. 136) dwu odpowiadających wartości wielkości pozostałej, to mówimy, że są takie dwie wielkości odwrotnie proporcyonalne względem siebie (verkehrt proportionirte G.), albo, że one zmieniają się w stosunku odwrotnym. Tak np. przeciąg czasu, w którym ciało, poruszające się ruchem jednostajnym, przebiega pewną drogę, jest odwrotnie proporcyonalny względem prędkości tego ruchu.

Gdy w zadaniu obok wielkości odwrotnie proporcyonalnych występują wielkości, któreśmy w art. poprzednim nazwali proporcyonalnemi, to zwykle te ostatnie nazywamy wtedy wprost proporcyonalnemi względem siebie (gerade p.) w przeciwstawieniu wielkościom odwrotnie proporcyonalnym.

Weźmy na uwagę dwie wielkości, jednę A, drugą B; niech A_1 i A_2 będą dwiema jakiemikolwiek wartościami wielkości A, zaś B_1 i B_2 dwiema odpowiadającemi wartościami wielkości B. Wielkości A i B są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, kiedy $A_2 : A_1 = B_1 : B_2$.

Jeżeli wykładnik tych stosunków nazwiemy w, to mamy jednocześnie

$$A_2 = A_1 w, \qquad B_2 = \frac{B_1}{w},$$

t. j. *kiedy dwie wielkości są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, to, mnożąc jakąkolwiek wartość jednej z tych wielkości przez pewną liczbę, odpowiadającą zaś wartość drugiej wielkości dzieląc przez tę samę liczbę, otrzymujemy inne ich wartości, również odpowiadające sobie.*

Jeżeli wartości A_1 i A_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością A, tak iż $A_1 = a_1$ takich jednostek, zaś $A_2 = a_2$ tychże jednostek, wartości zaś B_1 i B_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością B, tak iż $B_1 = b_1$ takich jednostek, zaś $B_2 = b_2$ tychże jednostek, to stosunki $A_2 : A_1$ i $B_1 : B_2$ możemy zastąpić stosunkami liczb oderwanych i będziemy mieli proporcyą $a_2 : a_1 = b_1 : b_2$, skąd na mocy głównej własności proporcyi mamy $a_2 b_2 = a_1 b_1$. Gdyby podobnie A_3 i B_3 były odpowiadającemi sobie wartościami wielkości A i B i w wartości A_3 było a_3 jednostek takich samych, jak poprzednio a_1 w A_1, zaś w wartości B_3 było b_3 jednostek takich samych, jak poprzednio b_1 w B_1, to byłoby $a_3 : a_2 = b_2 : b_3$, tak iż $a_3 b_3 = a_2 b_2 = a_1 b_1$. I t. d.

A więc, *gdy dwie wielkości są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, to iloczyn liczb oderwanych, przez które wyrażają się ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.*

Jeżeli tę liczbę stałą, którą przedstawia iloczyn liczb oderwanych, wyrażających wartości sobie odpowiadające rozważanych wielkości, nazwiemy m, to będziemy mieli $a_1 b_1 = m$, $a_2 b_2 = m$, $a_3 b_3 = m$ i t. d. Ogólnie piszemy zwykle

$$ab = m, \qquad \text{czyli} \quad a = \frac{m}{b},$$

rozumiejąc przez a i b liczby oderwane, przez które wyrażają się, przy pomocy odpowiednich jednostek, którekolwiek dwie odpowiadające sobie wartości wielkości A i B.

Czem tu jest liczba m? Jeżeli w równości $ab = m$ przyjmiemy, że $b = 1$, t. j. jeżeli bierzemy wartość wielkości B równą jednostce, którą tę wielkość mierzymy, to wtedy $a = m$. Widzimy zatem, że m jest liczbą oderwaną, przez którą się wyraża wartość wielkości A, odpowiadająca wartości, równej jednostce, wielkości B.

151. Niekiedy rozważamy wielkość A, zmieniającą się jednocześnie z dwiema wielkościami B i C w taki sposób, iż, kiedy wielkość C jest stała, to wielkość A jest wprost proporcyonalna względem wielkości B, kiedy zaś wielkość B się nie zmienia, to wielkości A i C są odwrotnie proporcyonalne względem siebie. Mówimy wtedy, że wielkość A jest wprost proporcyonalna względem wielkości B i odwrotnie proporcyonalna względem wielkości C. Niech

wartościom wielkości	B	C	odpowiada wartość wielkości	A
wyrażonym przez liczby	b	c	wyrażona przez liczbę	a
„ „ „	1	c	„ „ „	α
„ „ „	1	1	„ „ „	m.

Mamy: $a : \alpha = b : 1$, $\alpha : m = 1 : c$, skąd (art. 144, δ)

$$a : m = b : c,$$

a więc

$$\frac{ac}{b} = m, \quad \text{czyli} \quad a = m \cdot \frac{b}{c}.$$

Podobnie, gdyby wielkość A była wprost proporcyonalna względem każdej z wielkości B, C i D, a odwrotnie względem każdej z wielkości E i F, i gdybyśmy literom a, b, c, d, e, f, m nadali znaczenia, które według powyższego łatwo wyrozumieć można, to byłoby

$$\frac{aef}{bcd} = m, \quad \text{czyli} \quad a = m \cdot \frac{bcd}{ef}.$$

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

RÓWNANIE STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

O RÓWNANIU WOGÓLE.

152. Zwykle w równaniu (art. 60) używamy końcowych liter alfabetu x, y, ... do oznaczenia, iż one otrzymać mogą szczególne tylko wartości. Tak np. równania, któreśmy przytoczyli w art. 60-ym, pisze się zwykle tak: $2x^2 + 6 = x^2 + 5x$, $2x + 3y = 4 - 2y$. Podobnie, jeżeli np. napiszemy: $a^2x^2 - abx = acx - bc$, to rozumiemy, iż litery a, b i c przedstawiają tu pewne, ale dowolnie wybrane liczby, gdy tymczasem x może mieć tylko dwie wartości: albo $\frac{b}{a}$, alboteż $\frac{c}{a}$.

W tych równaniach liczby x i y, których szczególne wartości wyznaczyć należy, nazywamy liczbami niewiadomemi, albo krócej n i e w i a d o m e m i (Unbekannten). W pierwszych dwu równaniach pozostałe liczby są wymienione, a więc są wiadome; w ostatniem równaniu również litery a, b i c, które mogą mieć pewne dowolnie obrane wartości, nazywamy liczbami wiadomemi (bekannte Z.).

Równanie tak ogólnie określić możemy: *równaniem nazywamy zaznaczenie zapomocą znaku =, iż dwa wyrażenia algebraiczne są równe sobie przy pewnych tylko wartościach jednej alboteż więcej liter, w nie wchodzących.*

Samo się przez się rozumie, że mogą dwa wyrażenia, połączone znakiem = i zawierające litery x, y, . . . , nie tworzyć równania. Tak np.

$$(x-7)^2+14x=x^2+49, \quad (5x-y-4)(5x+y-4)+40x=25x^2-y^2+16$$

nie są równaniami, lecz równościami (art. 59), albowiem w pierwszej x może oznaczać jakąkolwiek liczbę, w drugiej zaś przy x, oznaczającem jakąkolwiek liczbę, może również y oznaczać liczbę jakąkolwiek.

153. Te wartości niewiadomych, przy których wyrażenia po obu stronach równania stają się sobie równemi, nazywamy pierwiastkami równania (Wurzeln d. G.).

Jeżeli w równaniu podstawimy jego pierwiastki, to otrzymujemy równość, która, po uskutecznieniu wskazanych działań, staje się tożsamością (art. 59). Tak np. podstawiwszy w równaniu

$$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

z dwu jego pierwiastków, $x=5$ i $x=\frac{5}{2}$, np. drugi, otrzymamy

$$\frac{4}{\frac{5}{2}-1}+\frac{1}{\frac{5}{2}-4}=\frac{3}{\frac{5}{2}-2}+\frac{2}{\frac{5}{2}-3}, \quad \text{czyli} \quad 2\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}=6-4, \quad \text{czyli} \quad 2=2.$$

Możemy więc powiedzieć, że *pierwiastkami równania nazywamy wartości niewiadomych, które, podstawione w równanie, zamieniają je na równość, przechodzącą po uskutecznieniu wskazanych działań na tożsamość.*

Postępowanie, prowadzące do wyznaczenia pierwiastków równania, nazywamy rozwiązywaniem równania (Auflösung d. G.). A więc *rozwiązać równanie jestto znaleźć jego pierwiastki.*

Często zamiast mówić: pierwiastek równania, lub: pierwiastki równania, mówi się: rozwiązanie równania (Lösung d. G.).

O liczbach, będących pierwiastkami równania, mówimy, że one »czynią zadość« (genügen) równaniu, albo, że one »sprawdzają« równanie. *Sprawdzić równanie jestto okazać, iż, po podstawieniu w nie otrzymanych pierwiastków, dochodzimy z niego do tożsamości.* (Sprawdzenie równania — Verification d. G.).

154. Jeżeli wszystkie pierwiastki jednego z dwu równań są jednocześnie pierwiastkami drugiego z nich i jeżeli, nawzajem, wszystkie pierwiastki drugiego są jednocześnie pierwiastkami pierwszego, to takie dwa równania nazywamy równaniami równoznacznemi z sobą (abhängige, äquivalente G.). Tak np. równania

$$5x+2=29-4x \quad \text{i} \quad 7x=24-x$$

są równoznaczne z sobą, gdyż każde z nich ma tylko pierwiastek $x=3$; podobnież równania

$$21x+9=9y+18 \quad \text{i} \quad 4x-y=2y-3x+3$$

są równoznaczne z sobą, gdyż każda para liczb, będąca rozwiązaniem jednego z tych równań, jest jednocześnie rozwiązaniem pozostałego równania.

155. Weźmy jakiekolwiek równanie, np.

$$5x+2=29-4x.$$

Gdy do obu stron dodamy tę samę liczbę, którą ogólnie nazwijmy M, to wyrażenia $5x+2+M$ i $29-4x+M$ przy tej samej, co poprzednio, wartości x również przedstawiają jednakową liczbę (art. 64, IV, α); a więc przy tejże wartości x jest

$$5x+2+M=29-4x+M,$$

t. j. pierwiastek równania danego jest także pierwiastkiem równania ostatniego. — Nawzajem, gdy od obu stron ostatniego równania odejmiemy tę samę liczbę M, to (art. 64, IV, β) wyrażenia $5x+2$ i $29-4x$ przedstawiają przy tejże samej, co poprzednio, wartości x jednakową liczbę; pierwiastek więc równania $5x+2+M=29-4x+M$ jest ten sam, co pierwiastek równania $5x+2=29-4x$. — Dwa więc te równania są równoznaczne z sobą (art. 154). Tegoż samego moglibyśmy dowieść, wziąwszy jakiekolwiek inne równanie. Powiemy więc ogólnie: *dodając algebraicznie do obu stron równania tę samę liczbę, otrzymujemy równanie równoznaczne z danem.*

Tak np. dodawszy do obu stron równania

$$5x+2=29-4x$$

po $-2+4x$, otrzymamy

$$5x+4x=29-2,$$

równanie równoznaczne z danem. Zestawiając to równanie z poprzedniem, widzimy, że *możemy wyrazy równania przenosić z którejkolwiek jego strony na pozostałą, zmieniając ich znaki.*

Gdybyśmy do obu stron równania $5x+2=29-4x$ dodali po $-29+4x$, to otrzymalibyśmy równanie, równoznaczne z danem,

$$5x+2-29+4x=0.$$

Widzimy więc, że *możemy wszystkie wyrazy równania sprowadzić na jednę jego stronę.* W takim razie na stronie pozostałej równania mamy liczbę 0.

156. Weźmy jakiekolwiek równanie, np.

$$15x+6=87-12x.$$

Gdy obie strony pomnożymy przez tę samę liczbę, różną od zera, którą ogólnie nazwijmy M, to wyrażenia $(15x+6)M$ i $(87-12x)M$ przy tejże samej, co poprzednio, wartości x przedstawiają jednakową liczbę (art. 64, IV, γ); a więc przy tejże wartości x jest

$$(15x+6)M=(87-12x)M,$$

t. j. pierwiastek równania danego jest także pierwiastkiem równania ostatniego. — Nawzajem, gdy obie strony ostatniego równania podzielimy przez tę samę liczbę M, to (art. 64, IV, δ) wyrażenia $15x+6$ i $87-12x$ przedstawiają przy tejże wartości x jednakową liczbę; pierwiastek więc równania $(15x+6)M=(87-12x)M$ jest ten sam, co równania $15x+6=87-12x$. — Dwa więc te równania są równoznaczne z sobą (art. 154). Tego samego moglibyśmy dowieść, wziąwszy jakiekolwiek inne równanie. Powiemy więc ogólnie: *mnożąc obie strony równania przez tę samę liczbę, różną od zera, otrzymujemy równanie równoznaczne z danem.*

Tak np. mnożąc obie strony równania

$$\frac{x}{8}-\frac{2-x}{6}=2x-\frac{3x-1}{2}$$

przez 24, najmniejszą spólną wielokrotność mianowników, otrzymujemy równanie

$3x-(2-x).4=48x-(3x-1).12$, czyli $3x-8+4x=48x-36x+12$,

równoznaczne z danem. Przenosząc zaś wyrazy z niewiadomą na lewą stronę, a pozostałe na prawą, i wykonywając redukcyą, otrzymamy równanie $-5x=20$, równoznaczne z danem (art. 155). Mnożąc nakoniec obie strony ostatniego równania przez $-\frac{1}{5}$ (czyli dzieląc je przez -5), dochodzimy do równania $x=-4$, które, będąc równoznaczne z danem, przedstawia zarazem rozwiązanie równania danego.

Gdy obie strony równania pomnożymy przez -1, to w otrzymanem równaniu, równoznacznem z danem, każdy wyraz będzie przeciwnego znaku, a więc *w równaniu możemy zmienić znaki wszystkich jego wyrazów.*

157. W obu art. poprzednich rozumieliśmy przez M liczbę skończoną (art. 38).

Dzieląc obie strony równania $4x-8=3x-6$ przez $x-2$, czyli mnożąc je przez $\frac{1}{x-2}$, otrzymalibyśmy $4=3$. Pochodzi to stąd, że w równaniu danem liczba x ma wartość 2, a więc mnożąc jego strony przez liczbę $\frac{1}{x-2}$, mnożylibyśmy je przez liczbę nieskończenie wielką.

Taksamo obu stron równania $2x^2-3x=0$, które ma dwa pierwiastki: $x=0$ i $x=\frac{3}{2}$, nie możemy podzielić przez x, czyli pomnożyć przez $\frac{1}{x}$, gdyż otrzymalibyśmy równanie $2x-3=0$, które ma jeden tylko pierwiastek $x=\frac{3}{2}$, a więc nie jest równoznaczne z poprzedniem. Albowiem liczba $\frac{1}{x}$, przez którą mnożyliśmy obie strony równania danego, może w tym razie stawać się nieskończenie wielką.

158. Gdy mamy równanie, którego obie strony są wyrażeniami całkowitemi względem niewiadomych (art. 116), to, po przeniesieniu albo wszystkich wyrazów na jednę stronę, albo też wyrazów zawierających niewiadome na jednę, pozostałych zaś na drugą stronę, wykonywamy redukcyą wyrazów podobnych. Jeżeli po uskutecznieniu tej redukcyi w równaniu zostaje tylko jedna niewiadoma, mówimy, iż mamy równanie z jedną niewiadomą, jeżeli dwie — równanie z dwiema niewiadomemi, jeżeli trzy — równanie z trzema niewiadomemi, i t. d., wogóle, jeżeli zostaje n niewiadomych, mówimy, że mamy równanie z n niewiadomemi.

Gdy mamy równanie, którego obie strony są wyrażeniami całkowitemi względem niewiadomych, i gdy niema już w niem wyrazów z niewiadomemi takich, któreby się z sobą znosić mogły, to największą z sum wykładników nad niewiadomemi w oddzielnych wyrazach (art. 57) nazywamy **stopniem równania** (Grad d. G.). Tak np. równanie $4x^3-5x=7$ jest równaniem stopnia 3-go, równanie $ax^4+bx^3y^3+cx^2y+d=0$ jest równaniem stopnia 6-go. Równania stopnia 1-go nazywają się także **równaniami liniowemi** (lineare G.). Równanie, w którem wszystkie wyrazy są tego samego stopnia względem niewiadomych, nazywa się **równaniem jednorodnem** (homogene G.); np. równanie $x^2-5xy+6y^2=0$ jest równaniem jednorodnem stopnia 2-go.

Jeżeli w równaniu znajduje się ułamek, w którego mianowniku jest niewiadoma, jak np. w równaniu, przytoczonem w art. 153-im, to nazywamy je **równaniem ułamkowem** (gebrochene G.).

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

159. Gdy mamy równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą, którą nazwijmy x, to w niem mogą być tylko wyrazy, zawierające x, i wyrazy, nie zawierające x. Jeżeli wszystkie wyrazy równania przeniesiemy na jednę, np. lewą, jego stronę i sumę algebraiczną czynników, przez które x jest mnożone, nazwiemy a, zaś sumę algebraiczną wyrazów, nie zawierających x, nazwiemy b, to każde równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą będzie kształtu

$$ax+b=0.$$

Dopóki każda z liter a i b może przedstawiać liczbę dowolną, kształt $ax+b=0$ nazywamy **kształtem ogólnym** (allgemeine Form) równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą. Jeżeli zaś jedna lub obie litery a i b nie mogą przedstawiać dowolnie obranych liczb, np. gdy mamy $2x-5=0$, albo $(c+1)x+(c^2+5)=0$, to wtedy o takich równaniach kształtu $ax+b=0$ mówimy, iż one są w **kształcie zwyczajnym** (gewöhnliche F.).

W równaniu $ax+b=0$ nazywamy a **spółczynnikiem niewiadomej** (art. 46), zaś b **wyrazem wiadomym** (bekanntes G.) równania. Równanie $ax+b=0$ możemy, jak wiemy (art. 81), napisać tak: $ax^1+bx^0=0$; dlatego a i b nazywamy ogólnie spółczynnikami potęg niewiadomej w równaniu, albo krócej **spółczynnikami równania**. Tak np. w równaniu $-2x+5=0$ liczba -2 jest spółczynnikiem niewiadomej, liczba $+5$ jest wyrazem wiadomym, obie zaś liczby -2 i $+5$ są spółczynnikami tego równania.

W szczególnym przypadku może być b liczbą 0, zaś a zerem być nie może, gdyż wówczas zniknąłby jedyny tu wyraz zawierający niewiadomą i nie byłoby równania. Jeżeli b jest różne od zera, to równanie $ax+b=0$ nazywa się **zupełnem** (vollständige G.). W razie, kiedy $b=0$, mielibyśmy równanie $ax=0$, które nazywa się **niezupełnem**.

160. Równanie niezupełne

$$ax=0$$

widocznie (art. 33) ma tylko pierwiastek

$$x=0.$$

161. Mając równanie zupełne

$$ax+b=0,$$

dodajmy do obu jego stron po $-b$ (art. 155); będziemy mieli $ax=-b$; dzieląc następnie obie strony przez a (art. 156), otrzymamy

$$x=\frac{-b}{a}.$$

Powiemy zatem: *pierwiastek równania stopnia 1-go równa się wyrazowi wiadomemu, wziętemu z takim znakiem, jaki on ma na stronie prawej, podzielonemu przez spółczynnik niewiadomej.* Np. pierwiastek równania $3x+5=0$ jest $x=-\frac{5}{3}$.

Rozwiązanie powyższe obejmuje w sobie, jako przypadek szczególny, rozwiązanie równania niezupełnego $ax=0$, albowiem wówczas jest $b=0$, wskutek czego (art. 38) $x=\frac{0}{a}=0$.

RÓWNANIE UŁAMKOWE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

162. 1). Mnożąc obie strony równania ułamkowego

$$\frac{4}{x-4}-\frac{4}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}$$

przez liczbę $(x-4)(x-3)(x-5)(x-1)$, dochodzimy do równania stopnia 1-go

$$4x-28=0, \qquad \text{skąd} \quad x=7.$$

Ponieważ przy wartości $x=7$ liczba $(x-4)(x-3)(x-5)(x-1)$ pozostaje różną od zera, przeto (art. 156) otrzymane równanie stopnia 1-go jest równoznaczne z danem równaniem ułamkowem, t. j. równanie dane ma także tylko pierwiastek $x=7$.

2). Znosząc mianownik w równaniu

$$5+\frac{3x-4}{x-4}=\frac{6x-16}{x-4},$$

doszlibyśmy do równania stopnia 1-go

$$2x-8=0, \qquad \text{skąd} \quad x=4.$$

Ten jedyny pierwiastek otrzymanego równania stopnia 1-go przywodzi do zera liczbę $x-4$, przez którą pomnożyliśmy dane równanie ułamkowe; po podstawieniu zaś go w owo równanie, otrzymujemy niektóre wyrazy nieskończenie wielkie, co wskazuje, iż przy tej wartości równość nie istnieje. — Zauważmy, że dane równanie możemy tak przedstawić:

$$5+\frac{12-3x}{x-4}=0, \qquad \text{czyli} \quad \frac{2x-8}{x-4}=0,$$

czyli $2=0$; dane zatem równanie ułamkowe jest niemożliwe.

UWAGI O RÓWNANIU STOPNIA PIERWSZEGO.

163. *Równanie stopnia 1-go ma tylko jeden pierwiastek.* Jakoż, przypuśćmy, że równanie $ax+b=0$, którego pierwiastek np. $x=\alpha$ już znaleźliśmy, ma jeszcze drugi pierwiastek $x=\beta$. W takim razie mielibyśmy równości:

$$a\alpha+b=0, \qquad a\beta+b=0.$$

Odejmując np. od drugiej pierwszą stronami odpowiedniemi, otrzymujemy $a(\beta-\alpha)=0$. Ponieważ a jest od zera różne (art. 159), przeto (art. 33) $\beta-\alpha=0$, czyli $\beta=\alpha$, t. j. ów drugi pierwiastek nie może być liczbą różną od pierwszego, który przeto jest jedynym pierwiastkiem naszego równania.

164. Dwa równania

$$a_1x+b_1=0, \qquad a_2x+b_2=0$$

są równoznaczne z sobą (art. 154), jeżeli jedyny pierwiastek pierwszego z tych równań jest tą samą liczbą, co jedyny pierwiastek równania drugiego, t. j. jeżeli $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$, czyli (art. 141) $a_1:a_2=b_1:b_2$. A więc, *równania stopnia 1-go, mające odpowiednie spółczynniki proporcyonalne względem siebie, są równoznaczne z sobą.*

165. Gdyby przy dwu różnych od siebie wartościach x np. $x=\alpha$ i $x=\beta$ było $ax+b=0$, t. j. gdyby było jednocześnie

$$a\alpha+b=0 \quad \text{i} \quad a\beta+b=0,$$

to, odjąwszy te równości stronami odpowiedniemi, otrzymalibyśmy $a(\alpha-\beta)=0$. Ponieważ tu przyjęliśmy, iż α jest od β różne, przeto $\alpha-\beta$ jest liczbą różną od zera; a więc z ostatniej równości wypada (art. 33), iż $a=0$. Wskutek tego z $ax+b=0$ otrzymujemy $b=0$. Wówczas nietylko przy tych dwu wartościach $x=\alpha$ i $x=\beta$, ale także przy jakichkolwiek innych wartościach x będzie $ax+b=0$, gdyż wskutek $a=0$ i $b=0$ zawsze będziemy mieli tożsamość $0=0$.

Przy wartościach $a=0$ i $b=0$ nie jest $ax+b=0$ równaniem, gdyż x może tu otrzymać jakąkolwiek wartość, a to jest sprzeczne z określeniem równania (art. 152); widzimy zatem, że właściwie w tym przypadku mamy tylko *tożsamość* $0=0$.

Jeżeli $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ przy więcej niż jednej wartości x, to wówczas jest $(a_1-a_2)x+b_1-b_2=0$ przy więcej niż jednej wartości x, a więc jest $a_1-a_2=0$ i $b_1-b_2=0$, czyli $a_1=a_2$ i $b_1=b_2$.

166. Z równania $ax+b=0$ mamy $x=-\frac{b}{a}$. Przy b różnem od zera, może a oznaczać wszelką liczbę dodatną lub ujemną, choćby co do wartości bezwzględnej bardzo małą. Oczywiście, że przy stałem b, wmiarę nadawania na a wartości, mających wartość bezwzględną coraz mniejszą, otrzymywać będziemy, jako odpowiadające wartości pierwiastka $x=-\frac{b}{a}$, liczby, których wartość bezwzględna będzie coraz większa (por. art. 38, 129). Jeżeli liczba a przechodzi np. od wartości ujemnych do dodatnych, to w tem przejściu może ona otrzymać wartość zero, której będzie odpowiadała nieskończenie wielka wartość pierwiastka równania.

Wówczas pierwszy wyraz równania staje się $0\times\infty$. Ponieważ $0\times\infty$ jest (art. 129) toż samo, co $\frac{0}{0}$ (a tu niema powodu, dlaczegoby ten pierwszy wyraz równania miał być mianowicie liczbą $-b$, nie zaś jakąkolwiek inną), przeto powiemy, że, kiedy, przy b różnem od zera, a staje się równem zeru, pierwiastek równania $ax+b=0$ staje się nieskończenie wielkim, chociaż właściwie wówczas już samo równanie *nie istnieje.*

Tak np., gdy mamy równanie $(3-c)x-7=0$, skąd $x=\frac{7}{3-c}$, to przy każdej wartości c, różnej od 3, wypada nam odpowiednia wartość pierwiastka tego równania, który staje się nieskończenie wielkim w razie, kiedy c otrzymuje wartość 3, choć wtedy samo równanie już istnieć przestaje.

NIERÓWNOŚCI. NIERÓWNOŚĆ STOPNIA PIERWSZEGO.

167. Gdy mamy nierówność (art. 61) $A>B$, to w razie, kiedy A jest liczbą dodatną, może być B albo liczbą dodatną o wartości bezwzględnej mniejszej od bezwzględnej wartości liczby A, albo liczbą zero, alboteż liczbą ujemną. W razie, kiedy A jest liczbą zero, jest B liczbą ujemną. W razie nakoniec, kiedy A jest liczbą ujemną, B jest liczbą ujemną o wartości bezwzględnej większej od bezwzględnej wartości liczby A. We wszystkich więc przypadkach jest $A-B>0$. — Nawzajem, kiedy $A-B>0$, to, jakiekolwiek możliwe tu wartości mają liczby A i B, jest $A>B$. — Nierówności więc

$$A>B \quad \text{i} \quad A-B>0$$

są r ó w n o z n a c z n e z sobą.

168. Gdy mamy $A>B$, czyli $A-B>0$, to zważmy, że jakąkolwiek jest liczba M, jest zawsze

$$A-B=A-B+M-M=A+M-B-M=(A+M)-(B+M).$$

Kiedy więc $A-B>0$, to także $(A+M)-(B+M)>0$, czyli $A+M>B+M$. Zatem *wskutek dodania tej samej liczby do obu stron nierówności, nie zmienia się kierunek znaku nierówności.*

Gdybyśmy mieli np. nierówność $6a-3>2a+7$, to, dodawszy do obu stron po $3-2a$, otrzymamy $6a-2a>3+7$, czyli $4a>10$. Widzimy więc, że *w nierówności możemy oddzielne wyrazy przenosić z jednej strony na drugą, zmieniając ich znaki.*

169. Mając $A>B$, czyli $A-B>0$, pomnóżmy tę liczbę dodatną $A-B$ przez M różne od zera. W razie M dodatnego mieć będziemy iloczyn dodatny, $(A-B)M>0$, a więc $AM-BM>0$, czyli $AM>BM$; w razie zaś M ujemnego będziemy mieli iloczyn ujemny, $(A-B)M<0$, a więc $AM-BM<0$, czyli $AM<BM$. Przeto: *wskutek pomnożenia obu stron nierówności przez tę samę liczbę dodatną nie zmienia się kierunek znaku nierówności*, zaś *wskutek pomnożenia obu stron nierówności przez tę samę liczbę ujemną zmienia się kierunek znaku nierówności.*

Gdy mamy np. nierówność $-a+b<-c+d$, to, po pomnożeniu obu jej stron przez -1, będzie $a-b>c-d$, t. j. *możemy zmienić znaki wszystkich wyrazów nierówności, zmieniając jednocześnie kierunek znaku nierówności.*

Kiedy przy $a>b$ jest $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, a kiedy jest $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$?

170. α. Weźmy dwie nierówności, $A>B$ i $C>D$. Według pierwszej nierówności $A-B>0$, według drugiej $C-D>0$; a że suma dwu liczb dodatnych jest również liczbą dodatną, zatem jest $A-B+C-D>0$, albo

$(A+C)-(B+D)>0$, czyli $A+C>B+D$. — Podobnie okazać możemy, że, gdy mamy wogóle m nierówności $A_1>B_1$, $A_2>B_2$, ..., $A_m>B_m$, to $A_1+A_2+\ldots+A_m>B_1+B_2+\ldots+B_m$, t. j. *gdy mamy dwie lub więcej nierówności, to suma liczb większych jest większa od sumy liczb mniejszych.*

β. Niech przy dodatnych liczbach B_1 i B_2 będzie $A_1>B_1$ i $A_2>B_2$. Mnożąc obie strony pierwszej nierówności przez A_2, drugiej przez B_1, otrzymamy $A_1A_2>B_1A_2$, $B_1A_2>B_1B_2$, a więc (art. 64, VI) jest $A_1A_2>B_1B_2$. Podobnie okazalibyśmy, że, gdy $A_1>B_1$, $A_2>B_2$, ..., $A_m>B_m$ i liczby B_1, B_2, ..., B_m są dodatne, to także $A_1A_2\ldots A_m>B_1B_2\ldots B_m$; a więc *gdy obie strony każdej z dwu lub więcej nierówności są dodatne, to iloczyn liczb większych jest większy od iloczynu liczb mniejszych.*

171. Gdy wyrażenie, w którem litera oznacza liczbę, ma być czyto większe, czyteż mniejsze od pewnej liczby danej, alboteż od innego wyrażenia, do którego taż litera wchodzi, to może nam iść o to, aby bliżej oznaczyć, przy jakich wartościach owej litery, uważanej za »niewiadomą«, ta nierówność istnieć może. W tem znaczeniu mówimy niekiedy: »rozwiązać« nierówność.

Jeżeli te wyrażenia są całkowite względem niewiadomej i jeżeli niewiadoma znajduje się w nich tylko w stopniu 1-ym, to mówimy, że mamy n i e r ó w n o ś ć   s t o p n i a   1-g o. Ogólnie wtedy być może $a_1x+b_1>a_2x+b_2$, czyli (art. 168) $(a_1-a_2)x+b_1-b_2>0$, alboteż, jeżeli wprowadzimy oznaczenia: $a_1-a_2=a$, zaś $b_1-b_2=b$,

$$ax+b>0.$$

Do tego kształtu każdą nierówność stopnia 1-go sprowadzić można. Z tej nierówności wynika (art. 168, 169), że, stosownie do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$, jest

$$\text{albo}\quad x>-\frac{b}{a},\qquad \text{albo}\quad x<-\frac{b}{a}.$$

Przy takich wartościach x istnieje nierówność $ax+b>0$. Zauważmy, że liczba $-\frac{b}{a}$, od której w pierwszym razie ma być x większe, w drugim zaś razie mniejsze, jest pierwiastkiem równania $ax+b=0$. Np. nierówności $4x-6>9x$, czyli $-5x-6>0$, czynią zadość wartości $x<-1\frac{1}{5}$.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO Z WIELU NIEWIADOMEMI.

O RÓWNANIACH Z WIELU NIEWIADOMEMI WOGÓLE.

172. Równanie np. $3x+7y=2$ może mieć *ilekolwiek* rozwiązań, ale one nie są *jakiekolwiek*, gdyż, po nadaniu pewnej wartości jednej z niewiadomych, pozostała może mieć tylko jedyną wartość (art. 163).

Podobnie, mając równanie $2x-3y+5z=5$, sprawdzić możemy, że, przy pewnych wartościach, nadanych dowolnie na dwie z niewiadomych, dla pozostałej niewiadomej jest możliwa jedyna tylko wartość. I t. d.

Widzimy więc, że równanie z wielu niewiadomemi ustala związek między wartościami, które niewiadomym nadawać można.

Z powodu dowolności w nadawaniu wartości wszystkim, prócz jednej, niewiadomym, równanie z wielu niewiadomemi nazywamy także **równaniem nieoznaczonem** (unbestimmte G.).

Gdy równanie zawiera niewiadome x, $y, \ldots$, u i gdy, po przeniesieniu wszystkich wyrazów, je zawierających, na jednę, np. na lewą, stronę, pozostałych zaś wyrazów na prawą stronę równania, sumy algebraiczne czynników, przez które są mnożone x, $y, \ldots$, u, nazwiemy odpowiednio a, $b, \ldots$, f, zaś sumę algebraiczną wyrazów, nie zawierających niewiadomych, nazwiemy g, to będziemy mieli

$$ax + by + \ldots + fu = g.$$

Ten kształt równania w razie, kiedy każda z liter a, $b, \ldots$, f, g może oznaczać dowolną liczbę, nazywamy **kształtem ogólnym** równania stopnia 1-go z wielu niewiadomemi, w przeciwnym zaś razie **kształtem zwyczajnym** takiego równania. Liczby a, $b, \ldots$, f nazywają się **spółczynnikami niewiadomych**, liczba g **wyrazem wiadomym** równania, ogólnie zaś wszystkie te liczby a, $b, \ldots$, f, g nazywają się **spółczynnikami równania**.

W przypadku, kiedy wyraz wiadomy jest zerem, t. j. kiedy $g=0$, mamy równanie

$$ax + by + \ldots + fu = 0.$$

Jest to odpowiednio kształt ogólny, lub zwyczajny równania jednorodnego (art. 158) stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

173. Gdy mamy np. dwa równania z trzema niewiadomemi,

$$3x + 7y - 3z = 11, \quad 5x - 2y - 9z = 3,$$

to może nam iść o te wartości niewiadomych x, y, z, które czynią zadość jednocześnie obu tym równaniom. Taką jest np. trójka wartości: $x = -4$, $y=2$, $z=-3$, albo trójka: $x=2\frac{30}{41}$, $y=\frac{34}{41}$, $z=1$, albo trójka: $x=1$, $y=1\frac{3}{23}$, $z=-\frac{2}{69}$, i t. d.

Gdy, mając dwa lub więcej równań, bierzemy na uwagę wyłącznie te wartości niewiadomych, które jednocześnie wszystkim tym równaniom czynią zadość, to mówimy krótko, iż rozważamy **równania jednoczesne** (simultane G.). A więc *dwa lub więcej równań nazywamy równaniami jednoczesnemi, kiedy ta sama niewiadoma ma otrzymywać we wszystkich tych równaniach jednakową wartość.*

Zamiast mówić: dwa równania jednoczesne, trzy równania jednoczesne i t. d. mówimy odpowiednio: **układ dwu równań**, **układ trzech równań** i t. d. (System d. G.).

Równania układu mają spólne pierwiastki, czyli spólne rozwiązanie, które nazywamy **pierwiastkami układu**, lub **rozwiązaniem układu**.

Aby, mając wypisane równania, zaznaczyć, iż je rozważamy jednocześnie, t. j. iż one tworzą układ, zwykle wypisujemy je jedno pod drugiem i z jednej strony zakreślamy je klamrą; np.

$$\begin{cases} 3x+7y-3z=11, \\ 5x-2y-9z=\ 3. \end{cases}$$

174. α. Gdy mamy dwa równania z temiż samemi niewiadomemi, to może się zdarzyć, iż te równania są równoznaczne z sobą (art. 154), a więc jedno którekolwiek z nich ustala ów związek między niewiadomemi, wyrażony przez te dwa równania, tak iż zamiast tych dwu równań dość jest uwzględnić jedno, którekolwiek z nich; pozostałe przeto równanie jest zbyteczne.

β. Gdy mamy np. dwa równania

$$9x-12y+15z=24, \qquad -15x+20y-25z=26,$$

to, mnożąc lewą stronę pierwszego z nich przez $-\frac{5}{3}$, otrzymamy lewą stronę drugiego; a więc, jeżeli przy pewnych wartościach niewiadomych x, y, z lewa strona równania pierwszego przedstawia liczbę 24, to przy tychże samych wartościach owych niewiadomych lewa strona równania drugiego przedstawiałaby liczbę $24.(-\frac{5}{3})=-40$. Lecz wartości niewiadomych x, y, z, czyniące zadość równaniu drugiemu, są takie, iż lewa jego strona przedstawia liczbę 26. Przeto nie mogą one czynić zadość równaniu pierwszemu, a zatem te dwa równania nie mają spólnego rozwiązania, czyli nie są jednoczesne. Takie dwa równania nazywamy sprzecznemi z sobą (widersprechende G.).

175. α. Gdy mamy np. równania

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=\ 11, \\ 3x+4y-5z=-\ 4, \\ 4x+3y-3z=-19, \end{cases}$$

to, kiedy np. od stron równania drugiego, pomnożonych przez 2, odejmiemy strony odpowiednie równania pierwszego, otrzymamy trzecie z danych równań; Jest więc jedno, którekolwiek, z tych równań prostem następstwem dwu pozostałych, tak iż jedno z tych trzech równań jest zbyteczne.

β. Z dwoma np. równaniami jednoczesnemi

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=\ 11, \\ 3x+4y-5z=-\ 4 \end{cases}$$

równanie

$$4x+3y-3z=12$$

jest sprzeczne. Albowiem, gdy od stron drugiego z tych równań, pomnożonych przez 2, odejmiemy strony odpowiednie równania pierwszego, to otrzymamy $4x+3y-3z=-19$. Nie może więc, przy tychże wartościach niewiadomych, być według równania trzeciego $4x+3y-3z=12$.

176. Gdyby pośród równań danych było równanie sprzeczne czyto z jednem, czyteż z kilkoma z pozostałych równań, to nie mogłoby być mowy o wartościach niewiadomych, czyniących jednocześnie zadość wszystkim równaniom danym, tak iż wtedy układ równań danych jest niemożebny. Tak np. niemożebny jest układ trzech równań, wypisanych w art. 175-ym pod β.

Gdy w układzie równań jest równanie albo równoznaczne z któremkolwiek z pozostałych, alboteż będące następstwem kilku z pozostałych równań t. j. wogóle równanie zbyteczne, to je opuszczamy. Tak np. zamiast układu trzech równań w art. 175-ym pod α. rozważać należy układ tylko dwu którychkolwiek z tych równań.

Wskutek tego zwykle równania układu są tak dobrane, iż między niemi niema równania ani zbytecznego, aniteż sprzecznego.

Wogóle może być układ n równań z m niewiadomemi, przyczem może być albo $n<m$, albo $n=m$, alboteż $n>m$.

Przypadek $n=m$ naprzód rozważać będziemy, i to w tym razie, kiedy nie wszystkie równania układu są jednorodne (art. 172), t. j. kiedy przynajmniej w jednem z nich wyraz wiadomy jest od zera różny.

Układ równań w razie, kiedy wszystkie równania są jednorodne, nazywamy układem równań jednorodnych; w innym zaś razie układem równań niejednorodnych.

Rozważymy więc naprzód układ równań niejednorodnych z tylu niewiadomemi, ile jest równań.

UKŁAD n RÓWNAŃ NIEJEDNORODNYCH Z n NIEWIADOMEMI.

177. Weźmy układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ \ 7y=-30. \end{cases}$$

Każde z tych równań jest równoznaczne (art. 155, 156) z odpowiedniem równaniem układu

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{14}(16+11x), \\ y=\frac{1}{7}(30+4x). \end{cases}$$

Kiedy przy pewnej wartości x, tej samej w obu równaniach, mamy (art. 173) z nich otrzymać tę samę wartość y, to, przy owej wartości x, wyrażenia po prawych stronach równań ostatnich są sobie równe. A więc x jest pierwiastkiem równania, otrzymanego ze zrównania owych wyrażeń, t. j. równania

$$-\frac{1}{14}(16+11x)=\frac{1}{7}(30+4x).$$

Gdy do tego równania dołączymy jedno którekolwiek z danych, np. pierwsze, to układowi

$$\begin{cases} 19x+76=\quad 0, \\ 11x+14y=-16 \end{cases}$$

czynią zadość też same wartości x i y, co danemu układowi równań. Dlatego mówimy, że jest on układem równoznacznym z układem danym. Z pierwszego równania z jedną tylko niewiadomą mamy wartość $x=-4$. Po podstawieniu jej w drugie równanie, mieć będziemy $14y-28=0$, skąd $y=2$. A więc dwa równania dane istnieją jednocześnie przy wartościach $x=-4$, $y=2$; są więc liczby: $x=-4$ i $y=2$ pierwiastkami układu danego, czyli para liczb: $x=-4$, $y=2$ jest jego rozwiązaniem.

Podobnie z układem trzech równań z trzema niewiadomemi np.

$$\begin{cases} 8x+\ \ 9y+11z=-25, \\ 3x+\ \ 5y-11z=\quad 9, \\ 4x+16y+11z=\quad 5 \end{cases} \qquad \text{układ} \qquad \begin{cases} z={}^{1}\,(-25-8x-9y), \\ z=\frac{1}{11}(-9+3x+5y), \\ z=\frac{1}{11}(5-4x-16y) \end{cases}$$

jest równoznaczny. Ponieważ przy pewnych wartościach x i y, tych samych we wszystkich trzech równaniach, mamy otrzymać tę samę wartość z, przeto przy owych szczególnych wartościach x i y wyrażenia po prawych stronach równań ostatnich są sobie równe. A więc owe wartości x i y są także pierwiastkami układu dwu równań, powstających ze zrównania jednego z tych wyrażeń z każdem z dwu pozostałych, np.

$$\begin{cases} \frac{1}{11}(-25-8x-9y)=\frac{1}{11}(-9+3x+5y), \\ \frac{1}{11}(-25-8x-9y)=\frac{1}{11}(5-4x-16y). \end{cases}$$

Gdy do tych równań jednoczesnych dołączymy jedno z poprzednich, np. pierwsze, to otrzymamy układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-7y=-30, \\ 8x+9y+11z=-25, \end{cases}$$

równoznaczny z poprzednim. Pierwsze dwa z tych trzech równań tworzą układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, który rozwiązując, otrzymamy $x=-4$, $y=2$. Przy tych wartościach x i y, z trzeciego równania, t. j. z równania $11z+11=0$, otrzymujemy $z=-1$. A zatem rozwiązaniem danego układu trzech równań jest trójka liczb: $x=-4$, $y=2$, $z=-1$.

Taksamo, mając układ czterech równań z czterema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 3x+7y+12z+3u=-9, \\ 15x+6y-3z-9u=-48, \\ 2x+4y+\frac{1}{3}z+u=0, \\ x+9y-z-3u=14, \end{cases}$$

znajdziemy z każdego wyrażenie tej samej niewiadomej, np. u, a zrównawszy jedno z tych wyrażeń (np. pierwsze) z każdem z pozostałych, otrzymamy trzy równania z niewiadomemi x, y, z. Do tych równań dołączając jedno z danych (np. pierwsze), otrzymamy układ

$$\begin{cases} 8x+9y+11z=-25, \\ 3x+5y-11z=9, \\ 4x+16y+11z=5, \\ 3x+7y+12z+3u=-9, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Oddzielnie rozwiążemy układ pierwszych trzech równań z trzema niewiadomemi; po podstawieniu zaś znalezionych wartości $x=-4$, $y=2$, $z=-1$ w pozostałe równanie, otrzymamy równanie $3u-1=0$, skąd $u=\frac{1}{3}$. A więc czwórka liczb: $x=-4$, $y=2$, $z=-1$, $u=\frac{1}{3}$ jest rozwiązaniem danego układu.

W takiż sposób moglibyśmy znaleźć rozwiązanie układu pięciu równań z pięciu niewiadomemi i t. d.

Rozwiązanie powyższego układu czterech równań z czterema niewiadomemi otrzymaliśmy z czterech równań, mających po jednej niewiadomej:

$$19x+76=0, \quad 14y-28=0, \quad 11z+11=0, \quad 3u-1=0.$$

Z tego wynika (art. 163), że *układ tylu równań niejednorodnych stopnia 1-go, ile jest niewiadomych, ma jedno tylko rozwiązanie.*

Powyżej wyłożone postępowanie polegało na zrównywaniu z sobą wyrażeń tej samej niewiadomej, otrzymanych z równań rozwiązywanego układu. Dlatego taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą zrównywania wyrażeń niewiadomej (Comparations-Methode).

W powyższem postępowaniu otrzymywaliśmy z pewnego układu równań inny układ, mający o jedno równanie mniej i o jednę niewiadomą mniej, niż układ poprzedni, co nazywa się rugowaniem (Elimination) owej niewiadomej.

178. Mając układ

$$\begin{cases} 6x+25y= & 26, \\ 4x-15y= & -46 \end{cases}$$

i chcąc wyrugować np. niewiadomą x, której spółczynniki są $+6$ i $+4$ (najmniejszą spólną wielokrotnością liczb 6 i 4 jest liczba 12), możemy pomnożyć obie strony pierwszego równania przez 2, drugiego zaś przez 3,

$$\begin{cases} 12x+50y= & 52, \\ 12x-45y= & -138, \end{cases}$$

a następnie te dwa równania odjąć od siebie stronami odpowiedniemi, co doprowadzi nas do równania $95y-190=0$ z jedną tylko niewiadomą y. W danym układzie spółczynniki niewiadomej, którą rugowaliśmy, były jednakowego znaku; dlatego po wyrównaniu tych spółczynników trzeba było równania od siebie *odjąć* stronami odpowiedniemi.

Gdybyśmy mieli np. układ

$$\begin{cases} 11x+14y= & -16, \\ 4x-\ 7y= & -30 \end{cases}$$

i chcieli wyrugować niewiadomą y, której spółczynniki $+14$ i -7 są różnego znaku, to, wyrównawszy je co do wartości bezwzględnej przez pomnożenie obu stron drugiego równania przez 2, równania układu

$$\begin{cases} 11x+14y= & -16, \\ 8x-14y= & -60 \end{cases}$$

do siebie *dodamy* stronami odpowiedniemi, wskutek czego otrzymamy równanie $19x+76=0$ z jedną tylko niewiadomą x. Dołączywszy do tego równania którekolwiek z danych równań, np. pierwsze, będziemy mieli układ

$$\begin{cases} 19x+76= & 0, \\ 11x+14y= & -16, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Z pierwszego równania ostatniego układu otrzymamy $x=-4$, co podstawiając w drugie z tych równań, znajdziemy $y=2$.

Mając np. układ

$$\begin{cases} 8x+\ 9y+11z= & -25, \\ 3x+\ 5y-11z= & 9, \\ 4x+16y+11z= & 5, \end{cases}$$

wyrugujmy powyższym sposobem np. niewiadomą z, raz z równań pierwszego i drugiego, drugim zaś razem z pierwszego i trzeciego. W tym przykładzie potrzeba tylko stronami odpowiedniemi pierwsze dwa równania dodać do siebie, zaś od pierwszego odjąć trzecie. Otrzymamy stąd: $11x+14y=-16$ i $4x-7y=-30$. Przeto dany układ równań możemy zastąpić przez układ np.

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \\ 8x+\ 9y+11z=-25, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Pierwotne zatem zadanie sprowadziliśmy do rozwiązania układu dwu równań z dwiema niewiadomemi, z którego otrzymujemy $x=-4$, $y=2$, i do rozwiązania następnie jednego równania z jedną niewiadomą, z którego $z=-1$.

Gdy mamy układ czterech równań z czterema niewiadomemi, to podobnie możemy go rozwiązać. W tym celu weźmiemy jedno równanie z każdem z trzech pozostałych równań; z każdego zaś z tych trzech układów po dwa równania wyrugujemy powyższym sposobem tę samę niewiadomą. Otrzymamy z każdej takiej pary równań jedno równanie z trzema pozostałemi niewiadomemi. A więc w ten sposób dojdziemy do układu trzech równań z trzema niewiadomemi, z którego wyznaczymy wartości owych trzech niewiadomych. Po podstawieniu ich w którekolwiek z pierwotnych równań, będziemy jeszcze mieli do rozwiązania jedno równanie z jedną niewiadomą.

Taką metodę rozwiazywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą wyrównywania spółczynników (M. der gleichen Coefficienten) alboteż zapomocą dodawania lub odejmowania równań.

179. Mając układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \end{cases}$$

możemy, otrzymawszy np. wyrażenie y z pierwszego z powyższych równań, $y=\frac{1}{14}(-16-11x)$, podstawić to wyrażenie niewiadomej y przez niewiadomą x w pozostałe z danych równań; wskutek tego podstawienia otrzymamy równanie $4x-7\cdot\frac{1}{14}(-16-11x)=-30$, czyli $19x+76=0$, z jedną tylko niewiadomą x. Dołączywszy do niego którekolwiek z danych równań, np. pierwsze, czyli powyższe wyrażenie y, mieć będziemy układ

$$\begin{cases} 19x+76=0, \\ y=\frac{1}{14}(-16-11x), \end{cases}$$

równoznaczny z układem danym. Z pierwszego z tych równań mamy $x=-4$, co podstawiwszy w drugie, otrzymamy $y=2$.

Mając układ

$$\begin{cases} 8x+\ 9y+11z=-25, \\ 3x+\ 5y-11z=\quad 9, \\ 4x+16y+11z=\quad 5, \end{cases}$$

podstawmy otrzymane np. z pierwszego z tych trzech równań wyrażenie $z=-\frac{1}{11}(25+8x+9y)$ w pozostałe równania; otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi x i y. Układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \\ z=-\frac{1}{11}(25+8x+9y) \end{cases}$$

jest równoznaczny z układem danym. Z układu pierwszych dwu z tych równań mamy $x=-4$, $y=2$, wskutek czego z pozostałego równania wypada $z=-1$.

Podobnie, gdy mamy układ czterech równań z czterema niewiadomemi np. x, y, z, u, to, wyraziwszy z jednego z tych równań jednę niewiadomą np. u przez pozostałe niewiadome x, y, z i podstawiwszy to wyrażenie zamiast u w trzech pozostałych równaniach, otrzymamy z nich układ trzech równań z trzema niewiadomemi x, y, z. Te trzy równania wraz z któremkolwiek z danych równań, lub z poprzednio otrzymanem wyrażeniem u, przedstawiają układ równoznaczny z układem danym. Z trzech pierwszych równań wyznaczymy wartości x, y i z, a następnie z czwartego wartość u.

Taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą podstawiania wyrażenia niewiadomej (Substitutions-Methode).

180. Mając układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-7y=-30, \end{cases}$$

pomnóżmy obie strony np. pierwszego równania przez liczbę różną od zera, którą później oznaczymy; nazwijmy ją p. Do tak powstałego równania dodajmy równanie pozostałe stronami odpowiedniemi; będziemy mieli równanie

$$(11p+4)x+7(2p-1)y=-2(8p+15).$$

Dołączywszy do niego którekolwiek z danych równań, mielibyśmy układ równoznaczny z danym. W wypisanem równaniu liczba p może być jakakolwiek, byle różna od zera. Niech ona będzie taka, iżby spółczynnik jednej z niewiadomych, np. y, był równy zeru, t. j. niech

$$2p-1=0, \quad \text{a więc} \quad p=\tfrac{1}{2}.$$

Przy tej wartości liczby p równanie powyżej utworzone staje się równaniem $\frac{19}{2}x=-38$, skąd $x=-4$. Dla znalezienia wartości y możemy otrzymaną wartość x podstawić w którekolwiek z danych równań, albotеż możemy w poprzedniem równaniu nadać liczbie p taką wartość, iżby

$$11p+4=0, \quad \text{a więc} \quad p=-\tfrac{4}{11};$$

wtedy z owego równania otrzymujemy równanie $-\frac{133}{11}y=-\frac{266}{11}$, skąd $y=2$.

W podobny sposób, gdy mamy układ

$$\begin{cases} 8x+9y+11z=-25, \\ 3x+5y-11z=9, \\ 4x+16y+11z=5 \end{cases}$$

i pomnożymy pierwsze równanie przez p, drugie przez p_1, a tak powstałe równania i równanie trzecie dodamy do siebie stronami odpowiedniemi, to dojdziemy do równania

$$(8p+3p_1+4)x+(9p+5p_1+16)y+11(p-p_1+1)z=-25p+9p_1+5,$$

które wraz z dwoma któremikolwiek z danych równań utworzyłoby układ równoznaczny z danym. W wypisanem równaniu liczby p i p_1 mogą mieć jakiekolwiek wartości różne od zera; dobierzmy je tak, iżby spółczynniki np. niewiadomych y i z stały się jednocześnie równemi zeru,

$$\begin{cases} 9p+5p_1+16=0, \\ p-p_1+1=0, \end{cases} \quad \text{a więc } p=-\tfrac{3}{2},\ p_1=-\tfrac{1}{2}.$$

Wtedy równanie poprzednie sprowadza się do równania $-\frac{19}{2}x=38$, skąd $x=-4$. Dla znalezienia wartości pozostałych niewiadomych moglibyśmy znalezioną wartość x podstawić w którekolwiek dwa z trzech równań danych. Możemy jednak postąpić inaczej. Mianowicie, tak dobrać pary wartości liczb p i p_1, iżby było

$$\begin{cases} 8p+3p_1+4=0, \\ p-p_1+1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8p+3p_1+4=0, \\ 9p+5p_1+16=0, \end{cases}$$

$$p=-\tfrac{7}{11},\quad p_1=\tfrac{4}{11}, \qquad p=\tfrac{28}{13},\quad p_1=\tfrac{-92}{13},$$

$$\tfrac{133}{11}y=\tfrac{266}{11}, \qquad \tfrac{1463}{13}z=-\tfrac{1463}{13},$$

$$y=2; \qquad z=-1.$$

Wprowadziliśmy tu czynniki p i p_1, których wartości liczebne dopiero później oznaczaliśmy, tak iż w chwili, kiedyśmy mnożyli obie strony odpowiednich równań, czynniki owe były nieoznaczone.

Podobnie rozwiązalibyśmy układ czterech równań z czterema niewiadomemi i t. d.

Taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą czynników nieoznaczonych (M. der unbestimmten Factoren). Tę metodę podał[1]) Bézout (wym. be-zù); dlatego nazywają ją także metodą Bézout.

Uwaga. Niekiedy zamiast którejkolwiek z powyższych czterech metod ogólnych stosujemy do szczególnego układu równań postępowanie, prędzej do rozwiązania owego układu prowadzące. (Zob. Zadania.)

181. α. Stosując którąkolwiek z wyłożonych powyżej metod, znajdziemy, iż rozwiązaniem układu dwu równań w kształcie ogólnym z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

są wartości:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \text{i} \quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Mają one nietylko spólny mianownik, ale nadto licznik wartości x utworzyć możemy z tego mianownika, pisząc w nim wyrazy wiadome c_1 i c_2 zamiast odpowiednich spółczynników a_1 i a_2 tej niewiadomej; licznik zaś wartości y możemy podobnie utworzyć z mianownika, pisząc w nim wyrazy wiadome c_1 i c_2 zamiast odpowiednich spółczynników b_1 i b_2 tej niewiadomej.

β. Podobnie znajdziemy, iż rozwiązaniem układu trzech równań w kształcie ogólnym z trzema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

[1]) W r. 1779.

są wartości:

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)-d_2(b_1c_3-b_3c_1)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

$$y=\frac{-d_1(a_2c_3-a_3c_2)+d_2(a_1c_3-a_3c_1)-d_3(a_1c_2-a_2c_1)}{-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+b_2(a_1c_3-a_3c_1)-b_3(a_1c_2-a_2c_1)},$$

$$z=\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)-d_2(a_1b_3-a_3b_1)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)}.$$

Mają one ten sam mianownik

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,$$

liczniki zaś ich powstają z tego mianownika wskutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej, której wartości szukamy, przez odpowiednie wyrazy wiadome równań danych.

UKŁAD n RÓWNAŃ Z m NIEWIADOMEMI.

182. Weźmy na uwagę n równań z m niewiadomemi w przypadku $n<m$, przyjmując, że między temi równaniami niema ani sprzecznych, aniteż zbytecznych.

Mamy niewiadomych o $m-n$ więcej niż równań. Zostawmy po jednej, np. po lewej, stronie równań wyrazy zawierające n niewiadomych którychkolwiek, ale tych samych we wszystkich równaniach; wyrazy zaś wiadome i wyrazy, zawierające $m-n$ pozostałych niewiadomych, przenieśmy na stronę prawą. Tak np., gdy mamy

$$\begin{cases}2x+3y-4z-3u=6,\\ x-2y+3z-2u=2,\end{cases}\quad \text{to np.}\quad \begin{cases}2x+3y=6+4z+3u,\\ x-2y=2-3z+2u,\end{cases}$$

skąd $\qquad x=\frac{1}{7}(18-z+12u),\qquad y=\frac{1}{7}(2+10z-u),$

i przy $z=1$, $u=2$ jest $x=5\frac{6}{7}$, $y=1\frac{3}{7}$, przy $z=-3$, $u=0$ jest $x=3$, $y=-4$ i t. d.

Wogóle w układzie n równań z m niewiadomemi, przy $n<m$, możemy $m-n$ niewiadomym nadawać dowolne wartości, a wówczas pozostałe niewiadome otrzymują po jednej tylko wartości (art. 177). Dlatego taki układ nazywamy układem $(m-n)$-krotnie nieoznaczonym [$(m-n)$-fach unbestimmt]. Np. powyżej wypisany układ jest dwukrotnie nieoznaczony. Jedno równanie z m niewiadomemi (art. 172) jest równaniem $(m-1)$-krotnie nieoznaczonem.

183. Przypadek $n=m$ rozważaliśmy już szczegółowo (art. 177—181), wyłączywszy jednak (art. 176) rozważanie układu n równań jednorodnych z n niewiadomemi, czem się teraz zajmiemy.

α. Niech

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=0,\\ a_2x+b_2y=0.\end{cases}$$

Z pierwszego np. równania $x=-\frac{b_1}{a_1}y$, co podstawiając w drugie, otrzymamy

$$\left(\frac{-a_2b_1}{a_1}+b_2\right)y=0,\qquad \text{czyli}\quad (a_1b_2-a_2b_1)y=0.$$

Jeżeli w tym iloczynie dwu czynników, równym zeru, czynnik $a_1 b_2 - a_2 b_1$ jest od zera różny, to jest $y=0$ (art. 160), a w takim razie z wyrażenia $x = \frac{-b_1}{a_1} y$ wynika, że także $x=0$. Dany układ ma wtedy rozwiązanie jedyne

$$x=0, \quad y=0.$$

Jeżeli zaś jest $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, to wtedy y może otrzymywać jakąkolwiek wartość, a wartość x, odpowiadająca wartości dowolnie na y nadanej, będzie wyznaczona z wyrażenia $x = -\frac{b_1}{a_1} y$. Możemy wprawdzie w tem wyrażeniu nadać na y wartość 0, a wtedy będzie także $x=0$; to jednak rozwiązanie nie będzie teraz jedyne, gdyż również rozwiązaniem, według tegoż wyrażenia, będzie każda para wartości x i y takich, iż

$$x : y = -b_1 : a_1.$$

Widzimy więc, że, jeżeli wartości niewiadomych mogą być różne od zera, to z jednego z dwu równań danych otrzymamy wyrażenie jednej niewiadomej przez drugą niewiadomą. Pozostałe zaś równanie niczego nam już nie dodaje do tego, co wynika z tamtego równania, czyli jest ono zbyteczne. Np.

1). $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 5x + 7y = 0; \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 4x - 6y = 0, \\ 10x - 15y = 0; \end{cases}$

$2 \times 7 - 5 \times 3 = -1$; $x=0$, $y=0$. $4 \times (-15) - 10 \times (-6) = 0$; $x : y = 3 : 2$.

β. Niech

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases}$$

Z dwu którychkolwiek, np. z dwu pierwszych równań

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = -c_1 z, \\ a_2 x + b_2 y = -c_2 z, \end{cases}$$

jest $$x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z, \quad y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z$$

(art. 181), co podstawiając w pozostałe z danych równań, otrzymamy

$$\left[a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)\right] z = 0.$$

Gdyby tu spółczynnik niewiadomej z był różny od zera, to byłoby $z=0$, a wtedy z poprzednich wyrażeń na x i y wynikałoby, że także $x=0$ i $y=0$, tak iż dany układ miałby jedyne rozwiązanie

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Jeżeli zaś ten spółczynnik niewiadomej z jest równy zeru, to wtedy z może otrzymywać jakąkolwiek wartość. Jeżeli więc wszystkie trzy niewiadome nie mają jednocześnie otrzymywać jedynie wartości równych zeru, to, wyraziwszy z dwu równań dwie niewiadome przez trzecią niewiadomą, nie otrzymujemy z pozostałego równania wartości określonej dla tej trzeciej niewiadomej, tak iż ona pozostaje liczbą dowolną. Owo zatem pozostałe równanie niczego nam nie dodaje do tego, cośmy otrzymali z tamtych dwu równań, czyli jest ono zbyteczne. Jest tedy (art. 144, β)

$$x : y : z = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : -(a_1 c_2 - a_2 c_1) : (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Np. 1). $\begin{cases} 2x+3y-3z=0, \\ 4x+5y+z=0, \\ 9x-y-3z=0, \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 2x+3y+8z=0, \\ 5x-6y-34z=0, \\ x-3y-14z=0, \end{cases}$

$x=0,\ y=0,\ z=0.$ $x:y:z=2:-4:1.$

184. Zastanowimy się nad przypadkiem, kiedy $n>m$, t. j. kiedy mamy układ, w którym jest więcej równań niż niewiadomych.

Gdy mamy układ dwu równań z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{cases}$$

to np. z pierwszego mamy $x=-\frac{b_1}{a_1}$, co podstawiwszy w równanie pozostałe, mieć będziemy $-\frac{a_2b_1}{a_1}+b_2=0$, czyli

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

Ta równość wynika także z warunku $a_1:a_2=b_1:b_2$, pod którym jedno z tych równań jest równoznaczne z pozostałem (art. 164); innemi słowy, wyraża ona, iż jedno z danych równań jest zbyteczne.

Gdybyśmy mieli układ trzech równań z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0, \end{cases}$$

to, aby one mogły istnieć jednocześnie, potrzeba, iżby np.

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \quad \text{i} \quad a_1b_3-a_3b_1=0.$$

Gdy idzie o wyznaczenie rozwiązania tych równań, to jedno którekolwiek z nich wystarcza.

Gdybyśmy mieli układ trzech równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3, \end{cases}$$

to np. z dwu pierwszych z tych równań mamy

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

co podstawiwszy w pozostałe równanie, otrzymamy

$$-a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_1c_2-a_2c_1)-c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

Jest to oczywiście warunek, aby te równania jednocześnie istnieć mogły. Gdy ten warunek jest spełniony, jedno z danych równań jest zbyteczne. — I t. d.

185. Zdarzyć się może, iż pośród n równań niejednorodnych z n niewiadomemi, które rozwiązujemy jako równania jednoczesne, istnieje równanie zbyteczne lub sprzeczne. Np.

α. 1). $\begin{cases} 91x+63y=217, \\ 65x+45y=155; \end{cases}$

rozwiązując ten układ np. metodą Bézout, dochodzimy do równania

$$(91p+65)x+(63p+45)y=217p+155.$$

Kładąc $91p+65=0$, mamy $p=-\frac{5}{7}$, co podstawiwszy w równanie poprzednie, dojdziemy do tożsamości $0=0$. Wskazuje nam ona, iż drugie z danych równań powstaje z pierwszego wskutek pomnożenia obu jego stron przez liczbę $\frac{5}{7}$. Jedno więc z danych równań jest zbyteczne (art. 174, α). Z któregokolwiek z tych równań wynika tylko wyrażenie jednej z niewiadomych przez pozostałą, np. $x=\frac{1}{13}(31-9y)$.

2).
$$\begin{cases} 2x-3y+4z=7, \\ 3x-2y+z=8, \\ 11x-9y+7z=31; \end{cases}$$

wyrugujmy np. z, odejmując równanie pierwsze stronami odpowiedniemi od każdego z dwu pozostałych równań; otrzymamy równania

$$\begin{cases} 10x-5y=25, \\ 30x-15y=75, \end{cases}$$

które widocznie są równoznaczne z sobą, co nam wskazuje, że pośród równań danych jest równanie zbyteczne. Jakoż, gdy do równania pierwszego dodamy stronami odpowiedniemi drugie po pomnożeniu obu jego stron przez 3, otrzymamy równanie trzecie (art. 175, α). Z tego więc układu równań otrzymać możemy tylko wyrażenia dwu niewiadomych przez niewiadomą pozostałą, np. $y=2x-5$, $z=x-2$.

β. $2x-3y+4z=7$, $3x-2y+z=8$, $11x-9y+7z=30$.

Postępując np. podobnie, jak w poprzednim przykładzie, dojdziemy do równań

$$10x-5y=25, \quad 30x-15y=71,$$

z których wynikałoby, że $4=0$. A więc z dwu tych równań jedno jest sprzeczne z pozostałem; zatem także pośród równań danych jest równanie sprzeczne z pozostałemi (art. 175, β) i niema takich wartości x, y, z, przy którychby układ równań danych był możliwy.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

ZADANIA STOPNIA PIERWSZEGO. ROZTRZĄSANIE RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

ZADANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

186. Jeżeli dane zadanie jest tego rodzaju, iż można odpowiedź na nie znaleźć przy pomocy rozwiązania odpowiednio dobranego równania, alboteż odpowiednio dobranych równań stopnia 1-go, to nazywamy je *zadaniem stopnia 1-go* albo *zagadnieniem stopnia 1-go*.

Rozważać będziemy naprzód zadania, które rozwiązać można przy pomocy jednego równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą.

Zadanie. Ojciec ma lat 40, a syn 10; po ilu latach ojciec będzie miał trzy razy tyle lat, co syn?

Szukaną ilość lat, po których upływie ojciec będzie miał 3 razy tyle lat, co syn, nazwijmy x. Po x latach ojciec będzie miał lat $40+x$, syn zaś będzie miał lat $10+x$; a że wówczas ilość lat ojca będzie 3 razy większa od ilości lat syna, przeto możemy ją także tak wyrazić $(10+x).3$. Mamy tedy dwa wyrażenia tejże samej ilości lat ojca; a więc

$$40+x=(10+x).3, \quad \text{skąd} \quad x=5.$$

Rzeczywiście po 5-u latach ojciec będzie miał 45 lat, a syn 15 lat i $45=15\times 3$.

Naprzód ilość lat, o których wyznaczenie idzie, nazwaliśmy x. Następnie zauważyliśmy, że, jeżeli x jest liczbą, której szukamy, to, raz dodawszy ją do 40, a drugim razem, po dodaniu jej do 10, powstałą stąd sumę pomnożywszy przez 3, otrzymamy każdym razem tę samę liczbę. Połączywszy te dwa wyrażenia tejże samej liczby znakiem =, doszliśmy do równania, odpowiadającego zadaniu, czyli, innemi słowy, »ułożyliśmy zadanie w równanie«. Rozwiązawszy to równanie, sprawdziliśmy, że znaleziona wartość niewiadomej prowadzi do odpowiedzi na postawione zadanie.

W takiż sposób postępować należy przy innych zadaniach. A mianowicie:

Po wniknięciu uważnem w treść zadania, określamy, jakiej liczby szukamy, i tę oznaczamy przez jednę z końcowych liter alfabetu. Następnie zaś zgodnie z warunkami zadania wskazujemy, jakie działania należy na tej liczbie i na liczbach danych wykonać, przyczem postępujemy tak, jak postępowalibyśmy przy sprawdzaniu, że owa liczba, jeszcze nieznana, istotnie czyni zadość warunkom zadania, t. j. że pewne wyrażenie, do którego ta liczba wchodzi, przedstawia liczbę tę samę, co inne wyrażenie. Z połączenia tych dwu wyrażeń jednej liczby znakiem = otrzymujemy równanie. Ułożywszy w ten sposób zadanie w równanie, rozwiązujemy to równanie, a następnie na samem zadaniu sprawdzamy, czy z otrzymanego rozwiązania równania wynika istotnie odpowiedź na postawione pytanie.

Nie można podać zgóry szczegółowszych wskazówek, jak postępować należy przy układaniu zadania w równanie; zależy to bowiem od bardzo rozmaitych warunków, jakie się w różnych zadaniach zdarzyć mogą. —

Dla przykładu jedno zadanie trudniejsze ułożymy w równanie.

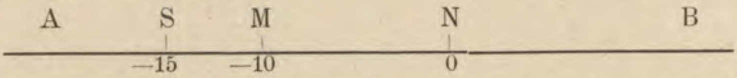
Zadanie. Zbiornik napełniony wodą ma dwa kurki, A i B, różnej wielkości. Otwarto kurek A, przez który wypłynęła 4-ta część wody, zawartej w zbiorniku. Następnie otwarto jeszcze kurek B i reszta wody wypłynęła przez te oba kurki w ciągu czasu o 5 kwadransów dłuższego, niż potrzeba było, aby przez kurek A wypłynęła 4-ta część wody ze zbiornika. Gdyby zaś od początku były otwarte oba kurki, to zbiornik byłby opróżniony o kwadrans prędzej. W ciągu ilu godzin opróżniłby się zbiornik, gdyby był otwarty tylko kurek A?

Ilość godzin, o którą się pytamy, nazwijmy x. Przez sam tylko kurek A wypływa $\frac{1}{4}$ wody w ciągu godzin $\frac{1}{4}x$. Reszta, t. j. pozostałe $\frac{3}{4}$ zawartości zbiornika, wypływa przez oba kurki w ciągu godzin $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}(x+5)$; cała więc zawartość zbiornika wypłynęłaby przez oba kurki w ciągu godzin $\frac{1}{4}(x+5)\times\frac{4}{3}$, czyli $\frac{1}{3}(x+5)$. Ta zaś ilość godzin jest o $\frac{1}{4}$ godziny mniejsza od czasu, użytego na opróżnienie zbiornika sposobem poprzednim, t. j. od godzin $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}(x+5)$, czyli od godzin $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$. Mamy więc równanie

$$\frac{1}{3}(x+5)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}, \quad \text{skąd} \quad x=4.$$

A więc kurek A może opróżnić zbiornik w ciągu 4 godzin. Jakoż, po opróżnieniu $\frac{1}{4}$ zbiornika przez kurek A w ciągu jednej godziny, reszta wypłynęła przez oba kurki podczas godzin $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ godziny, tak iż cały zbiornik przez oba kurki, otwarte jednocześnie, opróżniłby się w godzin $\frac{9}{4}\times\frac{4}{3}$. t. j. w 3 godziny. Ten zaś przeciąg czasu jest od sumy 1 g. $+\frac{9}{4}$ g. $=3\frac{1}{4}$ g. istotnie krótszy o $\frac{1}{4}$ godziny.

187. Zadanie. Dwa ciała poruszają się z jednostajną prędkością po linii w kierunku od A ku B i w pewnej chwili jedno znajduje się w punkcie M, drugie zaś w punkcie N, położonym względem M w kierunku ku B o $10\,m$; pierwsze z nich przebiega $1\,m$, drugie zaś $3\,m$ na sekundę. Oznaczyć miejsce spotkania się tych dwu ciał.



Gdy odległość od punktu N do punktu spotkania się ciał, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwiemy x, to dojdziemy do równania

$$10+x=\tfrac{1}{3}x, \qquad \text{skąd} \quad x=-15.$$

Otrzymana tu wartość ujemna liczby x wskazuje, iż odległość należy wziąć w kierunku wprost przeciwnym kierunkowi od N ku B. Znalezionej więc liczbie $x=-15$ odpowiada odległość liczona od punktu N w kierunku ujemnym, a więc ku A, tak iż miejscem spotkania się ciał jest punkt S. Jakoż, pierwsze ciało przebiegło od S do M drogę $5\,m$ w 5-u sekundach; drugie zaś ciało o 5 sekund wcześniej, niż znalazło się w punkcie N, było przed tym punktem o $3\,m\times5=15\,m$, t. j. było w tymże punkcie S.

188. Z każdego z powyższych zadań dochodziliśmy do równania, którego pierwiastek dawał szukaną odpowiedź na zadanie. Nie zawsze jednak tak bywa.

Zadanie. Znaleźć taką liczbę dwucyfrową, aby ilość dziesiątków była o 6 większa od ilości jedności, zaś 3 razy wzięta ilość dziesiątków była o 1 większa od 4 razy wziętej ilości jedności.

Jeżeli ilość dziesiątków nazwiemy x, to

$$3x=4(x-6)+1, \qquad \text{skąd} \quad x=23.$$

Według tego rozwiązania liczba dwucyfrowa miałaby dziesiątków 23, co być nie może. Chociaż więc nasze równanie, rozważane niezależnie od zadania, ma rozwiązanie $x=23$, to jednak to rozwiązanie wskazuje, iż zadanie jest niemożliwe. —

Objaśnić, dlaczego następujące zadania są niemożliwe:

1). Dziesięć osób zrobiło składkę; każdy mężczyzna dał 6 zł., a każda kobieta 3 zł.; zebrano 46 zł. Ilu mężczyzn wzięło udział w tej składce?

2). Bilet wstępu do muzeum kosztuje 30 ct. Za biletami płatnemi było w niem w piątek o 27 osób więcej niż we czwartek, w sobotę było tyle, co we czwartek i w piątek razem, a w niedzielę było 9 razy tyle osób, co we czwartek, w piątek i w sobotę razem. Przez te dni cztery zebrano razem za bilety wstępu 138 zł. Ile było osób za biletami we czwartek?

3). Kupiono gruszek o 19 więcej niż jabłek; za gruszkę płacono po 5 ct., a za jabłko po 2 ct.; razem zapłacono 88 ct. Ile kupiono gruszek?

4). Jan ma teraz 49 lat, Józef zaś 40 lat. Kiedy oni będą w takim wieku, iż, do ilości lat, którą każdy z nich będzie miał w owym czasie, dodawszy ilość lat, którą każdy z nich ma teraz, otrzymamy sumy, których stosunek jest 3:2?

189. Zadanie. Jan ma teraz a lat, Józef zaś b lat. Kiedy oni będą w takim wieku, iż, do ilości lat, którą każdy z nich będzie miał w owym czasie, dodawszy ilość lat, którą każdy z nich ma teraz, otrzymamy sumy, których stosunek jest $3:2$?

Jeżeli to nastąpi po upływie x lat, to wówczas Jan będzie miał lat $a+x$, Józef zaś $b+x$, tak iż $(2a+x):(2b+x)=3:2$, czyli

$$2(2a+x)=3(2b+x), \qquad \text{skąd} \quad x=4a-6b.$$

Z zadania jest widoczne, że liczby a i b mogą mieć tylko wartości dodatne. I wtedy jednak zadanie niezawsze jest możliwe, (jak np. zad. ostatnie w art. 188-ym, w którem $a=49$, $b=40$). Należy więc zbadać, przy jakich wartościach a i b zadanie jest możliwe.

Gdyby Jan był młodszy od Józefa, t. j. gdyby było $a<b$, to wtedy byłoby (art. 169) $4a<4b$, a więc (art. 168) $4a-6b<-2b$, t. j. $x<-2b$. A zatem, w tym razie stosunek, podany w zadaniu, przypadałby na więcej niż b lat przed urodzeniem się Józefa, co jest niemożliwe.

Gdyby Jan był rówieśnikiem Józefa, t. j. gdyby było $a=b$, to byłoby $6a=6b$, czyli $4a-6b=-2a$, t. j. $x=-2a$. A więc stosunek, wskazany w zadaniu, przypadałby na a lat przed urodzeniem się Jana i Józefa, co być nie może.

Gdyby nakoniec Jan był starszy od Józefa, t. j. gdyby było $a>b$, to mielibyśmy $4a>4b$, albo $4a-6b>-2b$, t. j. $x>-2b$. Ponieważ jednak $x>-2b$ tak wtedy, kiedy $-2b<x<-b$, lub $x=-b$, jak i wtedy, kiedy $x>-b$, przeto z nierówności $x>-2b$ stanowczego wniosku co do możliwości zadania wyciągnąć nie można. — Aby zadanie było możliwe, potrzeba, iżby było $x>-b$, czyli, iżby było $4a-6b>-b$.

Rozwiązując tę nierówność (art. 171) np. względem a, znajdziemy $a>\frac{5}{4}b$. A więc to zadanie jest możliwe w razie, jeżeli Jan jest starszy od Józefa więcej niż o $\frac{1}{4}$ tej ilości lat, jaką Józef ma teraz.

Zauważmy tu jeszcze, że w razie, kiedy $a>\frac{3}{2}b$, będzie $4a-6b>0$, t. j. $x>0$; a zatem stosunek, wskazany w zadaniu, mieć będzie miejsce w przyszłości. W razie zaś, kiedy $\frac{5}{4}b<a<\frac{3}{2}b$, jest $-b<x<0$; a zatem stosunek, wskazany w zadaniu, miał miejsce dawniej, t. j. przed chwilą obecną. Nakoniec, jeżeli $a=\frac{3}{2}b$, jest $x=0$; a zatem stosunek ów ma miejsce teraz. W tym ostatnim przypadku równanie nasze staje się równaniem $2(3b+x)=3(2b+x)$, czyli $2x=3x$, któremu czyni zadość wartość $x=0$.

190. We wszystkich rozważanych zadaniach widzieliśmy, że równanie, w które ułożyliśmy dane zadanie, ma zawsze rozwiązanie. Ale niezawsze, otrzymawszy rozwiązanie równania, dochodzimy z tego rozwiązania do odpowiedzi na dane zadanie. Niekiedy bowiem z natury zadania wynikają pewne warunki dla szukanej odpowiedzi, które nie zostały uwzględnione w równaniu, wskutek ogólnego oznaczenia niewiadomej przez literę.

Dlatego zawsze, po otrzymaniu rozwiązania, należy zbadać, czy z niego wynika odpowiedź na zadanie, a jeżeli odpowiedź nie wynika, należy wyjaśnić, dlaczego zadanie jest niemożliwe.

Jeżeli liczby dane w zadaniu są wyrażone przy pomocy liter, to wartość niewiadomej jest wyrażeniem algebraicznem. Ponieważ zaś zdarzyć się może, że zadanie jest tylko wtedy możliwe, kiedy litery owe zadość czynią pewnym warunkom, przeto w takim razie należy zbadać, jak trzeba ograniczyć wartości owych liter, aby zadanie było możliwe.

Prócz tego, jeżeli się zdarzy, że rozwiązanie równania, gdy do niego wchodzą litery, przy pewnych wartościach liter otrzymuje wartości osobliwe, jak ∞ lub $\frac{0}{0}$, to należy w każdym z takich przypadków rozważyć szczegółowo, jakiem staje się samo zadanie i jaką będzie miało odpowiedź.

Badanie, dlaczego niekiedy rozwiązanie równania nie przedstawia odpowiedzi na zadanie, oznaczenie, jakim warunkom zadość czynić mają wartości liter, znajdujących się w rozwiązaniu równania, aby zadanie było możliwe, oraz zwrócenie uwagi na osobliwe wartości tego rozwiązania — wszystko to stanowi roztrząsanie rozwiązania równania, lub, jak mówimy krócej, **roztrząsanie równania** (Discussion d. G.).

191. Zastanowimy się nad warunkami, pod jakiemi rozwiązanie równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą przedstawiać może pewne wartości. Równanie to weźmiemy w najdogodniejszej do takiego rozważania postaci, mianowicie

$$ax+b=cx+d, \qquad \text{skąd} \quad x=\frac{d-b}{a-c}.$$

A). Rozważymy naprzód rozwiązanie w razie, kiedy mianownik jest od zera różny, t. j. kiedy $a \gtrless c$.

I). Jeżeli licznik nie jest równy zeru, $b \gtrless d$, to może być albo $x>0$, albo-też $x<0$.

Mianowicie:

1). tak w przypadku $a>c$, $b<d$, jak i w przypadku $a<c$, $b>d$, jest $x>0$.

2). tak w przypadku $a>c$, $b>d$, jak i w przypadku $a<c$, $b<d$, jest $x<0$.

II). Jeżeli licznik jest równy zeru, $b=d$, to $x=0$ i równanie dane przechodzi na równanie $ax+b=cx+b$, czyli $(a-c)x=0$, które (art. 160) może mieć tylko pierwiastek $x=0$.

B). Rozważymy teraz rozwiązanie w razie, kiedy mianownik jest równy zeru, t. j. kiedy $a=c$.

I). Jeżeli licznik jest także równy zeru, $b=d$, to $x=\frac{0}{0}$, co jest wskazówką, iż x mogłoby być jakąkolwiek liczbą. Równanie dane stawałoby się wówczas tożsamością $ax+b=ax+b$, jakąkolwiekby x było liczbą. I w tym więc przypadku nie może być mowy (por. art. 165) o równaniu, a więc temsamem i o jego pierwiastku, lecz tylko o tem, czem się staje wyrażenie, będące wogóle pierwiastkiem równania danego, wtedy, kiedy w tem wyrażeniu przyjmiemy jednocześnie $a=c$ i $b=d$.

II). Jeżeli licznik nie jest równy zeru, $b \gtrless d$, to $x=\infty$, t. j. x staje się liczbą większą od jakkolwiek wielkiej. Wówczas równanie dane przechodzi na $ax+b=ax+d$; lecz, oczywiście, w razie $b \gtrless d$ nie może być $ax+b=ax+d$ przy żadnej wartości x. W rozważanym więc przypadku przestaje istnieć dane równanie (por. art. 166). Przeto $x=\infty$ nie jest już pierwiastkiem równania danego i oznacza tu tylko, że wyrażenie, będące wogóle pierwiastkiem równania danego, staje się liczbą większą od jakkolwiek wielkiej, gdy w owem wyrażeniu przyjmiemy $a=c$ przy $b \gtrless d$.

192. Zastanawiając się nad tem, czem się staje wyrażenie $x=\frac{d-b}{a-c}$ w razie, kiedy $a=c$ i $b=d$, rozróżnić należy dwa przypadki: albo wartości d i b nie zależą od wartości nadawanych na a i c, albo też od nich zależą. — W pierwszym przypadku rzeczywiście owo wyrażenie staje się $\frac{0}{0}$, t. j. może przedstawiać jakąkolwiek liczbę. — W drugim przypadku $\frac{0}{0}$ tylko pozornie może oznaczać liczbę nieoznaczoną. Np. gdy $d=am$ i $b=cm$, to, jeżeli w wyrażeniu $x=\frac{d-b}{a-c}$, czyli $x=\frac{am-cm}{a-c}$, przyjmiemy $a=c$, stanie się ono $\frac{0}{0}$. Lecz przy wszelkich wartościach a i c jest ono równe liczbie m, tak iż w tym przypadku istotną wartością rozważanego wyrażenia x jest $x=m$ (art. 129, 121).

193. Zadanie. Po pewnej linii w kierunku od A ku B jadą dwaj gońcy, pierwszy z prędkością v_1, drugi zaś z prędkością v_2 kilometrów na godzinę; w pewnej chwili pierwszy przejechał przez punkt M, a o h godzin później drugi przejechał przez punkt N, położony poza punktem M w kierunku ku B, a odległy od M o d kilometrów. Oznaczyć punkt spotkania się tych gońców.

A M N S B

0

Odległość punktu spotkania się od N, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwijmy x. Przypuśćmy, że gońcy spotkali się w punkcie S.

Pierwszy goniec jedzie v_1 kilometrów na godzinę, a więc od chwili, kiedy był w punkcie M, do chwili spotkania się jego w S z drugim gońcem, przejedzie on $d+x$ kilometrów w ciągu $\frac{d+x}{v_1}$ godziny. Ponieważ on przejeżdżał przez punkt M o h godzin wcześniej, niż drugi goniec przez punkt N, przeto powyższa ilość godzin jest o h godzin większa od ilości godzin, podczas których goniec drugi jedzie od N do S. Że zaś ten drugi goniec jedzie na godzinę v_2 kilometrów, więc drogę od N do S, t. j. x kilometrów, przejedzie w ciągu $\frac{x}{v_2}$ godziny. Jest więc

$$\frac{d+x}{v_1}=h+\frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd} \quad x=\frac{v_2(hv_1-d)}{v_2-v_1}.$$

O tyle więc kilometrów od punktu N, liczonych w kierunku ku B, znajduje się punkt spotkania się tych dwu gońców.

Tu według zadania litery v_1 i v_2 mogą oznaczać tylko liczby dodatne litery zaś h i d nie mogą oznaczać liczb ujemnych.

α. Rozważymy naprzód przypadek, kiedy jednocześnie obie liczby h i d, są od zera różne.[1]).

A). Mianownik od zera różny, $v_2 \gtrless v_1$.

I). Kiedy $hv_1 \gtrless d$, to może być albo $x>0$, alboteż $x<0$.

Mianowicie:

1). Gdy albo jednocześnie $v_2>v_1$ i $hv_1>d$, alboteż jednocześnie $v_2<v_1$ i $hv_1<d$, to $x>0$. — W pierwszym razie $hv_1>d$; przeto w chwili, kiedy drugi goniec przejeżdża przez punkt M, pierwszy jest już za N, t. j. pierwszy goniec jest przed drugim. Że zaś $v_2>v_1$, pierwszy goniec jedzie wolniej niż drugi, przeto pierwszego gońca dogoni drugi w jakimś punkcie za N. — Jak podobnie w drugim razie objaśnić odpowiedź dodatną?

2). Gdy albo jednocześnie $v_2>v_1$ i $hv_1<d$, alboteż jednocześnie $v_2<v_1$ i $hv_1>d$, to $x<0$. — Jakoż w pierwszym razie, ponieważ $hv_1<d$, przeto w chwili,

[1]) W liczniku wyrażenia x mamy różnicę hv_1-d. W niej odjemną jest iloczyn hv_1, liczba oderwana, która tu, z uwagi, że odjemnik d odpowiada kilometrom, również kilometrom odpowiada, mianowicie $v_1.h$ kilometrom, t. j. tej ilości kilometrów, którą pierwszy goniec przejechał w h godzin.

kiedy drugi goniec jest w N, pierwszy jest przed tym punktem. A że $v_2 > v_1$, pierwszy goniec jedzie wolniej niż drugi, zatem już dalej oddalenie gońców od siebie będzie się wciąż powiększało. Ale przed tą chwilą, kiedy drugi przejeżdżał przez N, oddalenie ich od siebie bywało mniejsze, tak iż punkt ich spotkania się mógł przypaść przed tym punktem N. — Jak podobnie w drugim razie objaśnić odpowiedź ujemną?

II). Kiedy $hv_1 = d$, to $x=0$. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem $h + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_2}$, czyli $(v_2 - v_1)x = 0$, które ma tylko pierwiastek $x=0$. — Ponieważ $hv_1 = d$, więc w chwili, kiedy drugi goniec znajduje się w punkcie N, pierwszy dojechał do tegoż punktu. Że zaś $v_2 \gtrless v_1$, t. j. gońcy jadą z różną prędkością, więc w tym tylko punkcie N znajdują się jednocześnie. Jest więc punkt N punktem spotkania się gońców.

B). Mianownik równy zeru, $v_2 = v_1$.

I). Kiedy wówczas $hv_1 = d$, to $x = \frac{0}{0}$. Równanie pierwotne przechodzi wtedy na tożsamość $h + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_1}$, a więc równanie istnieć przestaje. — Rozważając w tym razie samo zadanie, widzimy, że, ponieważ $hv_1 = d$, przeto w chwili, kiedy drugi goniec jest w punkcie N, pierwszy znajduje się w tymże punkcie. Że zaś $v_2 = v_1$, t. j. gońcy jadą z jednakową prędkością, zatem wciąż będą razem jechali, tak iż każdy punkt będzie punktem ich spotkania się, t. j. x może być jakąkolwiek liczbą.

II). Kiedy wówczas $hv_1 \gtrless d$, to $x=\infty$. Równanie pierwotne przechodzi wtedy na $\frac{d}{v_1} + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_1}$, co przy $hv_1 \gtrless d$ istnieć nie może. — Rozważając w tym razie wprost samo zadanie, widzimy, że, ponieważ $hv_1 \gtrless d$, przeto w chwili, kiedy drugi goniec jest w N, pierwszy znajduje się przed N, alboteż za N. Że zaś $v_2 = v_1$, t. j. gońcy jadą z tą samą prędkością, zatem ich oddalenie od siebie wciąż pozostaje toż samo i, jakkolwiek daleko jechać będą, nie spotkają się z sobą. A więc jakkolwiek wielka wartość x nie odpowie punktowi spotkania się gońców z sobą. Innemi słowy, wartość x, odpowiadająca punktowi spotkania się gońców, jest większa od jakkolwiek wielkiej.

β. Jeżeli $h=0$, to w chwili, kiedy drugi goniec przejeżdża przez punkt N, pierwszy przejeżdża przez punkt M. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem

$$\frac{d+x}{v_1} = \frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd } x = \frac{dv_2}{v_1 - v_2}.$$

Przy $d \gtrless 0$, odpowiednio do tego, czy $v_1 > v_2$, czy $v_1 < v_2$, czyteż $v_1 = v_2$, jest $x > 0$, $x < 0$, $x=\infty$. Przy $d=0$ w razie, kiedy $v_1 \gtrless v_2$, jest $x=0$. Nakoniec, kiedy jednocześnie $d=0$ i $v_1 = v_2$, jest $x = \frac{0}{0}$.

γ. Jeżeli $d=0$, to punkt M przypada w punkcie N, t. j. pierwszy goniec o h godzin później przejeżdża przez punkt N niż drugi. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem

$$\frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd } x = \frac{h v_1 v_2}{v_2 - v_1}.$$

Przy $h > 0$, odpowiednio do tego, czy $v_2 > v_1$, czy $v_2 < v_1$, czyteż $v_2 = v_1$, jest $x > 0$, $x < 0$,

$x=\infty$. Przy $h=0$, w razie $v_2 \gtrless v_1$, jest $x=0$. Przypadek, kiedy jednocześnie $h=0$ i $v_2=v_1$ rozważaliśmy już pod β.

194. Jeżeli w przypadku α. powyższego zadania o gońcach przyjmiemy np. $d=hv_2$, to rozwiązanie rozważanego równania przejdzie na $x=\frac{hv_2(v_1-v_2)}{v_2-v_1}=-hv_2$. Zdawałoby się (art. 192), że także w przypadku $v_2=v_1$ wartość ta $x=-hv_2=-hv_1$ będzie prowadziła wprost do odpowiedzi na zadanie, t. j. iż wówczas spotkanie się gońców przypadnie jedynie w punkcie M. Ponieważ równanie $\frac{hv_2+x}{v_1}=h+\frac{x}{v_2}$ sprowadza się wtedy do tożsamości $h+\frac{x}{v_1}=h+\frac{x}{v_1}$, t. j. równanie nie istnieje, przeto trzeba wprost z zadania wnieść, czy w tym przypadku szczególnym z wartości $x=-hv_2$ wynika odpowiedź. O h godzin przedtem, nim drugi goniec przejechał przez punkt N, był on w punkcie przed N, odległym od N o $hv_2=hv_1$ kilometrów, t. j. w punkcie M, przez który wówczas przejeżdżał pierwszy goniec. Byli więc w tym punkcie razem. Że zaś jadą z jednakową prędkością, przeto każdy punkt ich drogi jest ich punktem spotkania się. A więc w przypadku rozważanym z istotnej wartości wyrażenia x, równej $-hv_2$, nie wynika odpowiedź na zadanie.

ZADANIA OZNACZONE Z WIELU NIEWIADOMEMI.

195. Widzieliśmy w art. 182-im, że, gdy mamy w układzie mniej równań niż niewiadomych, to pewna ilość niewiadomych może otrzymywać wartości dowolne; układ taki nazwaliśmy nieoznaczonym. Jeżeli zaś układ równań, między któremi niema równania zbytecznego, aniteż sprzecznego, ma tyle niewiadomych, ile jest równań, to jest on oznaczony i, rozwiązawszy go, otrzymujemy jedyną wartość każdej niewiadomej (art. 177).

Jeżeli zadanie jest tego rodzaju, iż można znaleźć na nie odpowiedź przy pomocy rozwiązania takiego właśnie układu równań stopnia 1-go, to nazywamy je zadaniem oznaczonem stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

Niektóre z zadań, rozwiązywanych przy pomocy jednego równania z jedną niewiadomą, mogą być także rozwiązane jako zadania z wielu niewiadomemi. Tak np., rozwiązując zadanie, podane na początku art. 188-go, moglibyśmy oznaczyć jeszcze ilość jedności przez y, a wtedy zadanie owo moglibyśmy ułożyć w dwa równania:

$$\begin{cases} x-\ \ y=6, \\ 3x-4y=1, \end{cases} \qquad \text{skąd} \quad x=23,\ \ y=17.$$

196. Zadanie I. Po pewnej linii w kierunku od A ku B jadą dwaj gońcy, pierwszy z prędkością 14 *km*, drugi z prędkością 11 *km* na godzinę; w pewnej chwili pierwszy przejechał przez punkt M, a o 4 godziny później drugi przejechał przez punkt N, położony poza punktem M w kierunku ku B, a odległy od M o 50 *km*. Oznaczyć punkt i chwilę spotkania się tych gońców.

Jeżeli odległość punktu spotkania się gońców od punktu N, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwiemy x, ilość zaś godzin, które upłynęły od chwili, kiedy pierwszy goniec przejechał przez punkt M, do chwili spotkania się jego z drugim gońcem, nazwiemy y, to w y godzin pierwszy goniec przejedzie $14y$ kilometrów, drugi zaś w ciągu $y-4$ godzin przejedzie $11(y-4)$ kilometrów. Z zadania wynika, że pierwszy w y godzin przejechał od punktu M $50+x$ kilometrów, a drugi w godzin $y-4$ przejechał od punktu N x kilometrów. Mamy więc

$$\begin{cases} 14y=50+x, \\ 11(y-4)=x, \end{cases} \text{czyli} \quad \begin{cases} x-14y=-50, \\ x-11y=-44, \end{cases} \quad \text{skąd} \quad x=-22,\ y=2.$$

Gońcy zatem spotkali się z sobą o dwie godziny później, niż pierwszy przejechał przez punkt M, w punkcie, znajdującym się przed punktem N o 22 *km.*

Zadanie II. W zadaniu I zamiast: »o 4 godziny później«, niech będzie: »o 7 godzin później«.

Rozumując podobnie, jak poprzednio, dojdziemy do równań

$$\begin{cases} x-14y=-50, \\ x-11y=-77, \end{cases} \quad \text{skąd} \quad x=-176,\ y=-9,$$

co wskazuje, że gońcy spotkali się przed punktem N, wcześniej, niż pierwszy przejechał przez punkt M, a więc jeszcze przed punktem M.

Zadanie III. Ktoś kupuje 3 gatunki towaru w paczkach jednakowej wagi; raz kupił po paczce każdego gatunku i zapłacił 4 zł., drugim razem kupił 3 paczki pierwszego gatunku, 2 drugiego i 1 trzeciego i zapłacił 12 zł., trzecim razem kupił 2 paczki pierwszego gatunku, 3 drugiego i 4 trzeciego i zapłacił 13 zł. Ile kosztuje paczka każdego gatunku?

Nazwawszy cenę paczki pierwszego gatunku x zł., drugiego y zł., trzeciego z zł., dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} x+y+z&=4, \\ 3x+2y+z&=12, \\ 2x+3y+4z&=13. \end{aligned}$$

Rugując z tych równań niewiadomą z, dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} 2x+y&=8, \\ 2x+y&=3, \end{aligned}$$

z których wynika, że także poprzednie trzy równania są sprzeczne z sobą (art. 185). Zadanie więc jest niemożliwe.

Zadanie IV. W zadaniu III zamiast: »zapłacił 4 zł.«, niech będzie: »zapłacił 5 zł.«

Podobnie, jak w poprzedniem zadaniu, dojdziemy do równań

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ 3x+2y+z=12, \\ 2x+3y+4z=13. \end{cases}$$

Rugując z tych równań niewiadomą z, otrzymujemy równania

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ 2x+y=7, \end{cases}$$

a więc właściwie jedno tylko równanie z dwiema niewiadomemi. Jedna zatem niewiadoma pozostaje nieoznaczoną (art. 185). Zadanie więc jest nieoznaczone.

Z dwu którychkolwiek z równań danych, np. z dwu pierwszych, wyraziwszy (por. art. 182) np. niewiadome x i y przez pozostałą z, mieć będziemy $x=2+z$, $y=3-2z$, tak iż przy dowolnie branych wartościach z, otrzymywać będziemy odpowiadające wartości x i y. Każda taka trójka wartości będzie jednem z możliwych nieskończenie wielu rozwiązań układu równań, w które ułożyliśmy nasze zadanie, lecz tylko wtedy będzie prowadziła do odpowiedzi na zadanie, kiedy wszystkie trzy wartości niewiadomych są liczbami dodatnemi. —

Zastanawianie się nad związkiem (por. art. 190) rozwiązania układu równań z odpowiedzią na zadanie, które do owego układu doprowadziło, stanowi roztrząsanie rozwiązania układu równań, albo, jak mówimy krócej, roztrząsanie równań.

197. Zastanowimy się nad warunkami, pod jakiemi rozwiązanie układu dwu równań z dwiema niewiadomemi przedstawiać może pewne wartości. Jak wiemy (art. 181), rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

jest
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

A). Mianownik od zera różny, $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$.

I). Jeżeli żaden z liczników nie jest równy zeru, to wartości x i y mogą być:

1). albo obie dodatne,

2). albo x ujemne przy y dodatnem,

3). albo x dodatne przy y ujemnem,

4). alboteż obie ujemne.

Łatwo postawić warunki dla każdego z tych przypadków. Tak np. ostatni przypadek mieć będzie miejsce w razie, kiedy albo jednocześnie

$$a_1 b_2 > a_2 b_1, \quad c_1 b_2 < c_2 b_1 \quad \text{i} \quad a_1 c_2 < a_2 c_1,$$

alboteż jednocześnie

$$a_1 b_2 < a_2 b_1, \quad c_1 b_2 > c_2 b_1 \quad \text{i} \quad a_1 c_2 > a_2 c_1.$$

II). Jeżeli oba liczniki nie są jednocześnie od zera różne, to:

1). Gdy jeden z liczników jest równy zeru, może być:

a). Albo $c_1 b_2 = c_2 b_1$ i $a_1 c_2 \gtrless a_2 c_1$. Wtedy z uwagi, że tu $\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}$, jest

$$\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1\left(a_1 \frac{c_2}{c_1} - a_2\right)}{b_1\left(a_1 \frac{b_2}{b_1} - a_2\right)} = \frac{c_1}{b_1};$$

a więc

$$x = 0, \quad y = \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}.$$

b). Albo też $c_1 b_2 \gtrless c_2 b_1$ i $a_1 c_2 = a_2 c_1$. Wtedy

$$x = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}, \quad y = 0.$$

2). Gdy oba liczniki są równe zeru, $c_1 b_2 = c_2 b_1$ i $a_1 c_2 = a_2 c_1$, to możnaby rozróżnić dwa przypadki:

a). Kiedy iloczyny, stanowiące strony tych równości, są od zera różne, to $c_1 : c_2 = b_1 : b_2$, $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$, skąd wynika $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, czyli $a_1 b_2 = a_2 b_1$, co się sprzeciwia nierówności $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$. Ten więc przypadek jest niemożliwy.

b). Kiedy iloczyny, stanowiące strony jednej z powyższych równości, są równe zeru, to w tym przypadku, ze względu na nierówność $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$, jest jednocześnie $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$, a więc także strony równości pozostałej są równe zeru. Jest więc wtedy $x = 0$ i $y = 0$, a równania dane przechodzą na równania jednorodne (por. art. 183, α)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0, \\ a_2 x + b_2 y = 0. \end{cases}$$

B). Mianownik równy zeru, $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

I). Jeżeli $c_1 b_2 = c_2 b_1$, to z tej równości mamy $c_1 : c_2 = b_1 : b_2$; z poprzedniej zaś mamy $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; a więc jest także $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$, czyli $a_1 c_2 = a_2 c_1$. Wówczas jest $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$. Z tego, że tu $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$, wprost wynika, że w tym przypadku równania dane są równoznaczne z sobą, t. j. mamy tu właściwie jedno tylko równanie. Otrzymanych wyrażeń $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ nie należy zatem rozumieć tak, iżby przy każdej dowolnie wziętej wartości x mogło również y oznaczać jakąkolwiek liczbę. Wyrażają one tylko, iż jednej (którejkolwiek) z niewiadomych możemy nadać wartość dowolną. Wtedy każdym razem odpowiadającą wartość pozostałej niewiadomej, jedyną (art. 172, 163), otrzymamy z któregokolwiek z równań danych.

II). Jeżeli $c_1 b_2 \gtrless c_2 b_1$, to nie może być $a_1 c_2 = a_2 c_1$, gdyż z tego wynikałoby (podobnie jak poprzednio), iż $c_1 b_2 = c_2 b_1$. A więc jest także $a_1 c_2 \gtrless a_2 c_1$. Jest zatem $x = \infty$, $y = \infty$, a więc niema w tym przypadku takich wartości x i y, któreby jednocześnie dwu danym równaniom czyniły zadość, czyli dany układ równań nie istnieje. Jakoż, równania dane przechodzą wtedy na równania

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \qquad a_1 x + b_1 y = \frac{b_1}{b_2} c_2,$$

które w tym razie są widocznie sprzeczne z sobą.

198. Zadanie. W zadaniu art. 193-go zamiast: »oznaczyć punkt spotkania się tych gońców«, niech będzie: »oznaczyć punkt i chwilę spotkania się tych gońców«.

Wprowadzając oznaczenia, jak w zadaniu I art. 196-go, i podobnie rozumując, dojdziemy do układu równań

$$\begin{cases} x - v_1 y = -d, \\ x - v_2 y = -h v_2, \end{cases}$$

skąd $$x = \frac{v_2 (h v_1 - d)}{v_2 - v_1}, \qquad y = \frac{h v_2 - d}{v_2 - v_1}.$$

A). Mianownik od zera różny, $v_2 \gtrless v_1$.

I). 1). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad h v_1 > d \quad \text{i} \quad h v_2 > d,$$

alboteż jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad h v_1 < d \quad \text{i} \quad h v_2 < d,$$

to $x > 0$, $y > 0$. Gońcy spotykają się z sobą po chwili, w której pierwszy przejechał przez M ($y > 0$), i za N ($x > 0$).

2). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

alboteż jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

to $x < 0$, $y > 0$. Gońcy spotykają się po chwili, w której pierwszy wyjechał z M, ale przed N, t. j. między M i N.

3). Nie może być ani jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

aniteż jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

gdyż każdym razem trzecia nierówność jest sprzeczna z dwiema pierwszemi. Nie może więc być $x > 0$ przy $y < 0$. Rzeczywiście, nie mogą gońcy spotkać się za punktem N, a przed chwilą, w której pierwszy przejechał przez punkt M.

4). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

alboteż jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

to $x < 0$, $y < 0$. Gońcy spotykają się z sobą przed N i przed chwilą, w której pierwszy przejechał przez punkt M, t. j. przed M.

II). 1). *a*). Kiedy $hv_1 = d$, to $y = \frac{h(v_2 - v_1)}{v_2 - v_1} = h$; w tym więc razie jest $x = 0$, $y = h$. Gońcy spotykają się w N o h godzin później, niż pierwszy przejechał przez M.

b). Kiedy $hv_2 = d$, to $x = -hv_2$, $y = 0$. Gońcy spotykają się przed N w chwili, kiedy pierwszy przejeżdża przez M, t. j. w M.

2). Jednocześnie może być $hv_1 = d$ i $hv_2 = d$ tylko wtedy, kiedy $d = 0$ i $h = 0$. Wówczas jest $x = 0$, $y = 0$, pierwotny zaś układ równań przechodzi w tym przypadku na

$$\begin{cases} x - v_1 y = 0, \\ x - v_2 y = 0. \end{cases}$$

Pierwszy goniec przejeżdża przez M w chwili, w której ($h = 0$) drugi goniec jest także ($d = 0$) w M, a ponieważ jadą z różną prędkością, przeto M jest jedynym punktem ich spotkania się z sobą.

B). Mianownik równy zeru, $v_2 = v_1$.

I). Kiedy $hv_1 = d$, to także $hv_2 = d$, i nawzajem. W tym więc razie jest $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$, dwa zaś równania układu pierwotnego stają się jednem równaniem. Pierwszy goniec w h godzin po przejechaniu przez M znajdzie się w N, gdzie w owej chwili znajduje się także drugi goniec; a że obaj jadą z jednakową prędkością, więc wciąż będą jechali z sobą razem. I możemy powiedzieć, że spotykają się z sobą albo w każdym punkcie w chwili, odpowiadającej temu punktowi, alboteż w każdej chwili w punkcie, jej odpowiadającym. Tak np. przy $x = 3d$ może być tylko $y = 4h$.

II). Kiedy $hv_1 \gtrless d$, to także odpowiednio $hv_2 \gtrless d$, i $x = \infty$, $y = \infty$, równania zaś układu pierwotnego przechodzą na równania

$$x - v_1 y = -d, \qquad x - v_1 y = -hv_1,$$

sprzeczne z sobą. Gońcy nie spotkają się z sobą i zadanie jest niemożliwe. Do tego samego doszlibyśmy, rozważając w tym razie wprost samo zadanie.

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

WYZNACZNIKI.

WPROWADZENIE WYZNACZNIKÓW.

199. Rozwiązanie układu równań (art. 181, α)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

jest
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Spólny mianownik tych pierwiastków, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, utworzony z liczb

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \end{matrix}$$

napiszmy:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix},$$

tak iż

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie po prawej stronie tej tożsamości, które często przez D oznaczać będziemy, nazywamy **wyznacznikiem** (Determinante) **stopnia** 2-go czterech **elementów** a_1, b_1, a_2, b_2. Elementy w »symbolu« wyznacznika są ustawione w dwa pionowe rzędy, które **kolumnami** (Verticalreihen) nazywać będziemy, i w dwa poziome rzędy, które nazywać będziemy **wierszami** (Horizontalreihen). Wyznacznik ten ma dwa **wyrazy**, jeden $a_1 b_2$, drugi $-a_2 b_1$, które są stopnia 2-go względem elementów (art. 57). Do każdego wyrazu wchodzi po jednym elemencie z każdego wiersza i z każdej kolumny; jeden z tych wyrazów jest o znaku $+$, drugi o znaku $-$.

Aby zaraz mieć zastosowanie, zważmy, że taksamo mamy

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}, \qquad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Możemy więc napisać:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Wyznacznik, będący tu spólnym mianownikiem, nazwaliśmy D. Jeżeli wyznacznik, powstający z D wskutek zastąpienia elementów pierwszej kolumny przez odpowiednie wyrazy wiadome równań, nazwiemy D_1, a wyznacznik, powstający z D wskutek zastąpienia w nim elementów drugiej kolumny przez odpowiednie wyrazy wiadome równań, nazwiemy D_2, to możemy napisać

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}.$$

Np. gdy mamy

$$\begin{cases} 11x + 14y = -16, \\ 4x - 7y = -30, \end{cases}$$

to $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-16, & 14\\ -30, & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}11, & 14\\ 4, & -7\end{vmatrix}}=\dfrac{(-16).(-7)-(-30).14}{11.(-7)-4.14}=\dfrac{532}{-133}=-4,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix}11, & -16\\ 4. & -30\end{vmatrix}}{-133}=\dfrac{-266}{-133}=2.$

200. Spólny mianownik pierwiastków układu równań (art. 181, β)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

jest $\quad a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$

czyli $\quad a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1),$

albo $\quad a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$

Umówmy się, aby przez symbol

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

rozumieć sumę algebraiczną trzech iloczynów, które otrzymujemy, mnożąc kolejno każdy z elementów pierwszej kolumny przez wyznacznik stopnia 2-go, powstały wskutek opuszczenia w powyższym symbolu tej kolumny i tego wiersza, do którego ów element należy, przyczem jednak przed pierwszym z tych iloczynów stawiamy znak $+$, przed drugim znak $-$, przed trzecim zaś znak $+$. W takim razie mamy

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lewą stronę tej tożsamości nazywamy *wyznacznikiem stopnia 3-go* dziewięciu elementów, wypisanych w jego symbolu. Wyznacznik ten ma sześć wyrazów stopnia 3-go względem jego elementów; do każdego wyrazu wchodzi po jednym elemencie z każdego wiersza i z każdej kolumny; trzy z tych wyrazów są o znaku $+$, trzy zaś o znaku $-$. Wyznacznik ten oznaczać zwykle będziemy przez literę Δ.

Podobnie może być wyznacznik stopnia 4-go, stopnia 5-go i t. d.

WŁASNOŚCI I OBLICZANIE WYZNACZNIKA.

201. Powyżej rozważany sześciomian

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

moglibyśmy tak przedstawić:

$$-b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) - b_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1) =$$
$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix},$$

albo:

$$c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$
$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ponieważ ów sześciomian jest przedstawiony przez wyznacznik, poprzednio nazwany Δ, przeto prawe strony powyższych tożsamości są również wyrażeniami tego wyznacznika Δ. Tak każde z tych dwu wyrażeń, jak i wyrażenie, wyprowadzone w art. poprzedzającym, nazywamy rozkładem wyznacznika według elementów kolumny. Ostatnie np. wyrażenie jest rozkładem według elementów trzeciej kolumny.

W każdym z tych rozkładów każdy składnik jest iloczynem elementu przez wyznacznik stopnia 2-go, powstający z danego wyznacznika wskutek opuszczenia w nim wiersza i kolumny, do których ów element należy, przyczem jednak przed niektóremi z tych iloczynów mamy znak $+$, przed innemi $-$. Co do tego, z jakim znakiem brać należy ów iloczyn, łatwo zauważyć, że składnik, w którym czynnikiem jest element a_1, ma znak $+$, a gdy od tego elementu przechodzimy, czyto w kierunku poziomym, czyteż w pionowym, do innych, to znaki odpowiednich składników idą po sobie naprzemian. Tak np., aby oznaczyć, z jakim znakiem należy wziąć składnik odpowiadający elementowi b_3, zauważymy, iż odpowiednie znaki będą się tak zmieniały:

$$a_1\ +; \quad b_1\ -; \quad b_2\ +; \quad b_3\ -.$$

Zwykle dla krótkości wyznacznik stopnia 2-go, przez który w takich rozkładach mamy mnożyć odpowiedni element danego wyznacznika, wraz z właściwym temu składnikowi znakiem, oznaczamy jedną literą. W ten sposób nazwiemy

$$+\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = A_1, \quad -\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = B_1, \ldots, \quad -\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} = B_3, \quad +\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = C_3,$$

tak iż np.

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1, \quad -b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = b_1 B_1, \quad \text{i t. d.}$$

Powyższe więc rozkłady wyznacznika Δ według elementów jego kolumn możemy odpowiednio tak napisać:

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3, \quad \Delta = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3, \quad \Delta = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3.$$

Każdą taką liczbę $A_1, B_1, C_1, A_2, \ldots$, (t. j. odpowiedni wyznacznik stopnia 2-go wraz z właściwym znakiem) nazywać będziemy liczbą dołączoną do elementu (Coefficient des Elementes, Adjuncte d. E., adjungirte Determinante) odpowiednio a_1, b_1, c_1, $a_2, \ldots$ wyznacznika Δ.

Powyżej w naszym sześciomianie braliśmy poza nawiasy elementy kolumny albo pierwszej, albo drugiej, alboteż trzeciej. Również jednak moglibyśmy brać w nim poza nawiasy elementy któregokolwiek wiersza, tak iż ów sześciomian, czyli nasz wyznacznik Δ, moglibyśmy także tak rozłożyć:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) =$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix},$$

i t. p., t. j.

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, \quad \Delta = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2, \quad \Delta = a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3.$$

Są to rozkłady naszego wyznacznika według elementów odpowiednio pierwszego, drugiego, trzeciego wiersza.

Jeżeli podobnie przez liczby, dołączone do elementów wyznacznika stopnia 2-go

$$D=\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix},$$

rozumieć będziemy czynniki, przez które odpowiednie elementy w tym wyznaczniku są mnożone, i jeżeli nazwiemy je odpowiednio A_1, B_1, A_2, B_2, to

$$A_1=b_2,\quad B_1=-a_2,\quad A_2=-b_1,\quad B_2=a_1,$$

tak iż $D=a_1A_1+a_2A_2=b_1B_1+b_2B_2=a_1A_1+b_1B_1=a_2A_2+b_2B_2$.

202. Weźmy dwa wyznaczniki stopnia 2-go, tem się od siebie różniące, iż wiersze jednego są odpowiedniemi kolumnami drugiego,

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}.$$

Oba te wyznaczniki przedstawiają ten sam dwumian $a_1b_2-a_2b_1$, a więc są sobie równe.

Weźmy podobnie dwa takie wyznaczniki stopnia 3-go:

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{vmatrix}.$$

Zauważmy, że liczby, dołączone do tego samego elementu w tych dwu wyznacznikach, np. do elementu a_2,

$$-\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix},\qquad -\begin{vmatrix} b_1, b_3 \\ c_1, c_3 \end{vmatrix},$$

różnią się tem tylko, iż wiersze jednego z tych dwu wyznaczników stopnia 2-go są kolumnami w pozostałym; są zatem tą samą liczbą — mianowicie są tu liczbą A_2. Jeżeli więc pierwszy z powyższych dwu wyznaczników stopnia 3-go rozłożymy według elementów np. pierwszej kolumny, drugi zaś według elementów pierwszego wiersza, to w obu razach będziemy mieli tę samę liczbę $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$; a więc dwa owe wyznaczniki są sobie równe.

A zatem *wyznacznik nie zmienia się, jeżeli jego wiersze przyjmiemy za odpowiednie kolumny, lub nawzajem.*

Dlatego, jeżeli dowiedziemy jakiej własności wyznacznika, odnoszącej się np. do jego wierszy, to możemy tę własność wprost odnieść do jego kolumn; i nawzajem. Z tego powodu używa się często wyrażenia ogólnego: rzędy równoległe (parallele Reihen) wyznacznika.

203. Mając wyznacznik D stopnia 2-go, przestawmy w nim kolumny i ten nowy wyznacznik nazwijmy D', np.

$$D=\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,\qquad D'=\begin{vmatrix} b_1, a_1 \\ b_2, a_2 \end{vmatrix}=a_2b_1-a_1b_2.$$

Jest więc $$D'=-D,$$

t. j. wskutek tego przestawienia wyznacznik zmienił znak.

Jeżeli podobnie w wyznaczniku Δ stopnia 3-go przestawimy z sobą np. pierwszy i trzeci wiersz i powstały tak wyznacznik Δ', jak również dany, rozłożymy według elementów nieporuszonego — a więc drugiego — wiersza, to

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = - a_2 \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_3, b_3, c_3 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_1, b_1, c_1 \end{vmatrix} = - a_2 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_3, c_3 \\ a_1, c_1 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_3, b_3 \\ a_1, b_1 \end{vmatrix}.$$

W tych dwu rozkładach liczby, dołączone do tego samego elementu, różnią się tylko znakiem, tak iż

$$\Delta' = - \Delta.$$

A więc *wyznacznik zmienia znak, jeżeli w nim dwa rzędy równoległe z sobą przestawimy.* —

Gdy mamy wyznacznik, w którym odpowiednie elementy dwu rzędów równoległych są sobie równe, np.

$$\begin{vmatrix} \alpha, \beta, \beta \\ \gamma, \delta, \delta \\ \varepsilon, \zeta, \zeta \end{vmatrix} = W,$$

to według poprzedniego, gdybyśmy przestawili drugą kolumnę z trzecią i tak powstały wyznacznik nazwali W', byłoby $W = - W'$. Że zaś wskutek tego przestawienia żadna zmiana nie zaszła, przeto jednocześnie jest $W = W'$. Dodając te dwie równości: $W = - W'$, $W = W'$ stronami odpowiedniemi, otrzymamy $W = 0$, a więc, *jeżeli w wyznaczniku dwa rzędy równoległe są jednakowe, to wyznacznik jest równy zeru.*

204. W art. 201-ym widzieliśmy, że suma iloczynów elementów jakiegokolwiek rzędu przez liczby dołączone do tychże elementów przedstawia dany wyznacznik. Utwórzmy sumę iloczynów elementów któregokolwiek rzędu przez liczby dołączone do odpowiednich elementów rzędu równoległego, np. sumę iloczynów elementów drugiej kolumny wyznacznika Δ przez liczby, dołączone do odpowiednich elementów trzeciej jego kolumny,

$$b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3.$$

Ta suma tem się różni od sumy $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 = \Delta$, iż w wyznaczniku Δ zamiast elementów c_1, c_2, c_3, są wzięte odpowiednio elementy b_1, b_2, b_3, a więc owa suma przedstawia wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, b_1 \\ a_2, b_2, b_2 \\ a_3, b_3, b_3 \end{vmatrix},$$

który, według drugiej części art. poprzedzającego, jest równy zeru.

Zatem między dziewięciu elementami wyznacznika Δ i dziewięciu liczbami, do nich dołączonemi, istnieją związki:

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0, \quad b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \quad c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0,$$
$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0, \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0, \quad c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0,$$

oraz (art. 201):

$$a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0, \quad a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = 0, \quad a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 = 0,$$
$$a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 = 0, \quad a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 = 0, \quad a_3 A_2 + b_3 B_2 + c_3 C_2 = 0.$$

Podobnie między czterema elementami wyznacznika D i czterema liczbami, do nich dołączonemi (art. 201), istnieją związki:

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 = 0, \quad b_1 A_1 + b_2 A_2 = 0,$$

oraz:

$$a_1 A_2 + b_1 B_2 = 0, \quad a_2 A_1 + b_2 B_1 = 0.$$

Widzimy więc, że *suma iloczynów elementów pewnego rzędu wyznacznika przez liczby, dołączone do odpowiednich elementów rzędu równoległego, jest równa zeru.*

205. Weźmy wyznacznik np. stopnia 3-go i wszystkie elementy np. drugiego wiersza pomnóżmy przez tę samę liczbę np. ρ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2\rho, & b_2\rho, & c_2\rho \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \Delta''.$$

Rozkładając oba te wyznaczniki według elementów drugiego wiersza, będziemy mieli $\Delta = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$, $\Delta'' = \rho\,(a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2)$, a więc $\Delta'' = \rho\Delta$, t. j. *mnożąc wszystkie elementy jednego rzędu wyznacznika przez tę samę liczbę, mnożymy temsamem wyznacznik przez też liczbę.* —

Z własności tej możemy korzystać, aby uprościć wyznacznik, jużto znosząc mianowniki w oddzielnych elementach, jużteż wyłączając spólny czynnik elementu rzędu poza symbol.

Np. $$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}, & -1\frac{1}{20}, & -\frac{3}{20} \\ 1\frac{1}{6}, & -\frac{7}{12}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 12, & -21, & -3 \\ 1\frac{1}{6}, & -\frac{7}{12}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{12}\cdot\begin{vmatrix} 12, & -21, & -3 \\ 14, & -7, & 6 \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{240}\cdot 3\,.\,7\,.\begin{vmatrix} 4, & -1, & -1 \\ 14, & -1, & 6 \\ -1, & 4, & 9 \end{vmatrix} = \frac{7}{80}(-1)\begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix}.$$

Podobnie w końcowym ustępie art. 199-go przed obliczeniem wyznaczników stopnia 2-go można było wyłączyć przed symbol wyznacznika: w mianowniku z elementów drugiej kolumny czynnik 7; w pierwszym liczniku z elementów pierwszej kolumny czynnik —2, z elementów drugiej czynnik 7, a nadto z elementów pierwszego wiersza czynnik 2; nakoniec w drugim liczniku z elementów drugiej kolumny czynnik —2.

206. Weźmy wyznacznik, w którym elementy jednego rzędu są wszystkie proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego, np.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}, \quad \text{gdzie } c_1 : a_1 = c_2 : a_2 = c_3 : a_3.$$

Spólny wykładnik tych stosunków nazwawszy q, będziemy mieli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_1 q \\ a_2, & b_2, & a_2 q \\ a_3, & b_3, & a_3 q \end{vmatrix} = q\cdot\begin{vmatrix} a_1, b_1, a_1 \\ a_2, b_2, a_2 \\ a_3, b_3, a_3 \end{vmatrix} = q\,.\,0 = 0$$

(art. 203), t. j. *wyznacznik, w którym elementy pewnego rzędu są proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego, jest równy zeru.*

Np. $$\begin{vmatrix} 10, & -8 \\ 15, & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

207. Mając wyznacznik, dodajmy do elementów któregokolwiek jego rzędu elementy rzędu równoległego, pomnożone przez jakąkolwiek tę samę liczbę; np. do elementów trzeciej kolumny wyznacznika Δ dodajmy elementy drugiej jego kolumny, pomnożone przez ρ. Będziemy mieli (art. 204)

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1+b_1\rho \\ a_2, & b_2, & c_2+b_2\rho \\ a_3, & b_3, & c_3+b_3\rho \end{vmatrix} = (c_1+b_1\rho)C_1+(c_2+b_2\rho)C_2+(c_3+b_3\rho)C_3 =$$

$$= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+\rho(b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3) = \Delta+\rho.0 = \Delta.$$

A więc *wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do wszystkich elementów pewnego rzędu dodajemy odpowiednie elementy rzędu równoległego, pomnożone przez tę samę liczbę.*

208. Z własności tej korzystać możemy przy obliczaniu wyznacznika, dążąc do tego, aby wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego rzędu stały się równemi zeru (art. 201).

Tak np., obliczając wyznacznik otrzymany w art. 205-ym, możemy do elementów pierwszej kolumny dodać odpowiednie elementy drugiej, pomnożone przez -4, do elementów zaś trzeciej dodać odpowiednie elementy drugiej:

$$\begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 10, & 1, & 7 \\ 15, & -4, & 5 \end{vmatrix} = -1.\begin{vmatrix} 10, & 7 \\ 15, & 5 \end{vmatrix} = -5.\begin{vmatrix} 2, & 7 \\ 3, & 5 \end{vmatrix} = (-5).(-11) = 55.$$

Gdybyśmy, mając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 4, & 8, & 7 \\ 6, & 2, & 5 \\ -10, & 11, & 8 \end{vmatrix},$$

chcieli go tak przekształcić, iżby elementy drugi i trzeci pierwszej kolumny były zerami, to moglibyśmy tak np. postąpić: elementy wiersza drugiego i wiersza trzeciego pomnożyć przez 2 (wskutek czego przed wyznacznikiem postawilibyśmy czynnik $\frac{1}{4}$); następnie od elementów drugiego wiersza odjąć odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez 3; nakoniec do elementów trzeciego wiersza dodać odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez 5.

ZASTOSOWANIA DO UKŁADU RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

209. Opierając się na udowodnionych powyżej własnościach wyznacznika, możemy wprost z układu równań stopnia 1-go dojść do wyrażeń jego pierwiastków.

Weźmy układ trzech równań niejednorodnych z trzema niewiadomemi, oraz wyznacznik, którego elementami są spółczynniki niewiadomych w tych równaniach;

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pomnóżmy przez y elementy drugiej kolumny wyznacznika Δ i do tych iloczynów dodajmy odpowiednie elementy pierwszej kolumny, pomnożone przez x, oraz trzeciej, pomnożone przez z. Będziemy mieli (art. 205, 207):

$$\Delta.y = \begin{vmatrix} a_1, & b_1y+a_1x+c_1z, & c_1 \\ a_2, & b_2y+a_2x+c_2z, & c_2 \\ a_3, & b_3y+a_3x+c_3z, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tu zamiast elementów drugiej kolumny możemy na mocy równań danych napisać odpowiednio d_1, d_2, d_3, tak iż

$$\Delta . y = \begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik po stronie prawej nazwawszy Δ_2, mamy $\Delta . y = \Delta_2$. Taksamo, nazwawszy

$$\begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix} = \Delta_3,$$

znajdziemy $\Delta . x = \Delta_1$, $\Delta . z = \Delta_3$. Mamy więc

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Stosując takie postępowanie do układu

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix},$$

dojdziemy do podobnych wyrażeń niewiadomych x i y (por. art. 199).

Tę metodę dochodzenia do wyrażeń niewiadomych podał[1]) Baltzer.

Widzimy, że, *jeżeli mamy układ równań niejednorodnych z tylu niewiadomemi, ile jest równań, to wartością każdej niewiadomej jest ułamek, którego mianownikiem jest wyznacznik, utworzony ze spółczynników niewiadomych, licznikiem zaś wyznacznik, powstający z mianownika wskutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej przez odpowiednie wyrazy wiadome równań.*

Takie wyrażenia pierwiastków układu równań pierwszy podał[2]) Cramer.

Np. $$\begin{cases} 8x + 9y + 11z = -25, \\ 3x + 5y - 11z = 9, \\ 4x + 16y + 11z = 5, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 8, & 9, & 11 \\ 3, & 5, & -11 \\ 4, & 16, & 11 \end{vmatrix} = 11.7.19,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -25, & 9, & 11 \\ 9, & 5, & -11 \\ 5, & 16, & 11 \end{vmatrix} = 11.7.2^2.(-19), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8, & -25, & 11 \\ 3, & 9, & -11 \\ 4, & 5, & 11 \end{vmatrix} = 11.2.133, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8, & 9, & -25 \\ 3, & 5, & 9 \\ 4, & 16, & 5 \end{vmatrix} = -7.209.$$

$$x = \frac{-11.7.2^2.19}{11.7.19} = -4, \quad y = \frac{11.2.133}{11.7.19} = 2, \quad z = \frac{-7.209}{11.7.19} = -1.$$

210. Możemy inaczej wyprowadzić pierwiastki układu równań, otrzymane w art. poprzedzającym. Aby, mając ów układ trzech równań, znaleźć wartość x, pomnóżmy obie strony pierwszego równania przez A_1, drugiego przez A_2, trzeciego przez A_3, i tak pomnożone równania dodajmy do siebie stronami odpowiedniemi. Otrzymamy

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) x + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3) y + (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3) z = \\ = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3.$$

Tu spółczynniki niewiadomych y i z są równe zeru (art. 204), spółczynnik zaś x jest Δ (art. 201); jest więc

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{\Delta}.$$

Podobnie, mnożąc równania dane odpowiednio, raz przez B_1, B_2, B_3, drugim zaś razem przez C_1, C_2, C_3, znajdziemy

[1]) W r. 1857. [2]) W r. 1750.

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\Delta}, \quad z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\Delta}.$$

Liczniki są widocznie wyrażeniami wyznaczników odpowiednio Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Tę metodę dochodzenia do wyrażeń niewiadomych podał[1] Cauchy (wym. koszì).

211. Biorąc ten sam układ równań, co na początku art. 209-go, mamy

$$\Delta . x = \Delta_1, \quad \Delta . y = \Delta_2, \quad \Delta . z = \Delta_3.$$

Jeżeliby w tych równaniach wszystkie wyrazy wiadome były równe zeru: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, t. j. jeżelibyśmy mieli układ trzech równań jednorodnych z trzema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0, \end{cases}$$

to wtedy byłoby $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ i

$$\Delta . x = 0, \quad \Delta . y = 0, \quad \Delta . z = 0.$$

W przypadku, kiedy wyznacznik Δ jest od zera różny, wynikałoby z tych równości, iż jednocześnie

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

t. j. temu układowi równań czyniłyby zadość jedynie wartości zero wszystkich niewiadomych (por. art. 183).

Weźmy teraz na uwagę przypadek, kiedy wyznacznik Δ jest równy zeru. Gdyby wtedy równości $\Delta . x = 0$, $\Delta . y = 0$, $\Delta . z = 0$ można było rozważać niezależnie od danego układu równań, to każdej z nich mogłaby czynić zadość jakakolwiek wartość odpowiedniej niewiadomej. Te jednak równości nie mogą być w taki sposób rozważane, gdyż wynikają z danego układu równań. Z dwu zaś którychkolwiek równań tego układu, np. z równań pierwszego i trzeciego, po podzieleniu obu stron każdego z nich przez tę samę niewiadomą np. z, t. j. z równań

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{x}{z} + b_1 \dfrac{y}{z} = -c_1, \\[2ex] a_3 \dfrac{x}{z} + b_3 \dfrac{y}{z} = -c_3 \end{cases}$$

wynika

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1, b_1 \\ -c_3, b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{C_2}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1, -c_1 \\ a_3, -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix}} = \frac{B_2}{C_2}.$$

Przeto (art. 144, β)

$$x : y : z = A_2 : B_2 : C_2.$$

Gdybyśmy podobnie wzięli inne dwa z danych równań, t. j. raz drugie i trzecie, drugim razem pierwsze i drugie, znaleźlibyśmy

$$x : y : z = A_1 : B_1 : C_1 \quad \text{i} \quad x : y : z = A_3 : B_3 : C_3.$$

Wskazuje nam to, że w tym przypadku jednej tylko (którejkolwiek) z niewiadomych x, y, z nadać możemy wartość dowolną (por. art. 183).

---

[1]) W r. 1812.

Widzimy więc, że *układowi tylu równań jednorodnych, ile jest niewiadomych, w razie, jeżeli wyznacznik, utworzony ze spółczynników niewiadomych, jest od zera różny, czynią zadość jedynie wartości zero wszystkich niewiadomych; jeżeli zaś ów wyznacznik jest równy zeru, to wartości niewiadomych są proporcyonalne względem liczb dołączonych w tym wyznaczniku do elementów, będących spółczynnikami tychże niewiadomych w którémkolwiek z równań danych.*

Np. 1). $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 4x+5y=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 5 \end{vmatrix} = -2, \qquad x=0, \quad y=0.$

2). $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 4x+6y=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad x:y = 6:-4 = -3:2.$

3). $\begin{cases} 4x+\ \ y-\ \ z=0, \\ 14x+\ \ y+6z=0, \\ -x-4y+9z=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix} = 55, \qquad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

4). $\begin{cases} 2x+\ \ 4y-3z=0, \\ 3x+17y+\ \ z=0, \\ \ \ x+\ \ \ \ y-2z=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2, & 4, & -3 \\ 3, & 17, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$$x:y:z = \begin{vmatrix} 4, & -3 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2, & -3 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & 4 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = -5:1:-2.$$

212. Przy pomocy własności wyznaczników możemy to, cośmy wyprowadzili w art. 184-ym, inaczej udowodnić.

Gdy mamy

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

to, dodając do elementów kolumny drugiej odpowiednie elementy kolumny pierwszej pomnożone przez x (art. 207), mieć będziemy na mocy równań danych

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1, & a_1x+b_1 \\ a_2, & a_2x+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & 0 \\ a_2, & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{t. j.}\quad \mathrm{D}=0,$$

a ta równość jest warunkiem jednoczesności dwu równań danych.

Taksamo znajdziemy, iż warunkami jednoczesności równań

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0 \end{cases} \qquad \text{są równości np.} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie, gdy mamy

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & -c_1 \\ a_2, & b_2, & -c_2 \\ a_3, & b_3, & -c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

to, w wyznaczniku Δ dodając do elementów kolumny trzeciej odpowiednie elementy kolumny pierwszej, pomnożone przez x, i drugiej, pomnożone przez y, otrzymamy na mocy równań danych w trzeciej kolumnie elementy 0, tak iż jest $\Delta = 0$. A więc warunkiem jednoczesności tych trzech równań jest równość zeru wyznacznika Δ.

ZADANIA.

(Art. 2 i 3). **1.** Jan i Piotr wsiedli w Rzeszowie na pociąg kolei żelaznej i, przejechawszy nim 87 *km*, wysiedli w Przemyślu; stąd Jan pojechał do Jarosławia, odległego o 35 *km*, Piotr zaś do Tarnowa, odległego o 167 *km*. Oznaczyć położenie Jarosławia i Tarnowa względem Rzeszowa.

2. Od roku [1] urodzenia się Jana Brożka, profesora Akademii krakowskiej, znakomitego na ów czas matematyka, upłynęło lat 171 do urodzenia się Jana Śniadeckiego, słynnego profesora matematyki i astronoma tejże Akademii, 16 zaś lat przed Śniadeckim urodził się Jędrzej Gawroński, biskup krakowski, wielce zasłużony twórca języka matematycznego polskiego, a 283 lat przed Śniadeckim urodził się Mikołaj Kopernik. Odnieść lata urodzenia się Gawrońskiego i Kopernika do roku urodzenia się Brożka, jako epoki.

3. Na skali termometrycznej Celsius'a 0^0 odpowiada $+32^0$ na skali Fahrenheit'a, a każde 5^0 skali Celsius'a odpowiada 9^0 skali Fahrenheit'a. Obliczyć: α) ile stopni wskazuje termometr Fahrenheit'a, kiedy na termometrze Celsius'a jest: $+10^0$, -5^0, -15^0, -25^0; β) ile stopni wskazuje termometr Celsius'a, kiedy na termometrze Fahrenheit'a jest: $+41^0$, $+14^0$, -22^0.

(Art. 19, 27, 30 i 35). **4.** Powtórzyć rozumowanie na liczbach, których wartości bezwzględne są: raz $\alpha=3$, $\beta=4$; drugim zaś razem $\alpha=7\frac{1}{2}$, $\beta=1\frac{1}{3}$.

(Art. 39). **5.** W ciągu tygodnia obserwowano termometr o godzinie 8-ej rano, o 1-ej po południu i o 6-ej wieczorem i w kolejnych dniach zanotowano stopni: $-7{\cdot}6$, $+2{\cdot}7$, $-3{\cdot}5$; $-10{\cdot}4$, $-3{\cdot}7$, -9; $-17{\cdot}3$, $-10{\cdot}6$, -12; $-0{\cdot}2$, $+2{\cdot}6$, $-2{\cdot}4$; $+4{\cdot}6$, $+10{\cdot}4$, $+8{\cdot}1$; $+1{\cdot}1$, $+2{\cdot}5$, $-7{\cdot}8$; $-16{\cdot}7$, $-3{\cdot}6$, $-11{\cdot}2$. Jaka z tych obserwacyj wynika średnia temperatura tygodnia i jakiemi trzema sposobami można ją obliczyć?

(Art. 40). **6.** Znaleźć średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb: α) 2 i 8; β) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$; γ) -2 i 8; δ) $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$; ε) 2 i -8; ζ) $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{8}$; η) -2 i -8; ϑ) $-\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{8}$. **7.** Znaleźć średnią harmoniczną liczb: α) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ i 5; β) $\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{4}$ i $\frac{2}{5}$; γ) -4, $-\frac{3}{2}$ i 1; δ) 3, 1, $\frac{2}{3}$, -1 i $\frac{5}{6}$. **8.** Znaleźć różnicę między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb: α) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ i 2; β) $\frac{1}{2}$, -2 i $-\frac{3}{4}$; γ) 16, -6, -5 i -3.

(Art. 45). **9.** Napisać bez spółczynników: α) $-5a$; β) $4abc$; γ) $-5a^2bc$; δ) $3ab^2-2a^2b$; ε) $-3a^2b^2+4ab^3-2b^4$.

(Art. 47). **10.** Napisać bez wykładników: α) a^3b^2; β) $-2a^2bc^3$; γ) $-8a^3b^2cd^4$. **11.** Napisać bez spółczynników i wykładników: α) $-5a^2bc^5$; β) $3a^4b^5$; γ) $(-1)^{2p+1}.4a^3b^5cd^2$; δ) $4ab^3-3b^4$; ε) $-ab^5+(-1)^{2p}\,a^3b^3$.

(Art. 54). **12.** $3ab+5ac-5bc$ przy: α) $a=8$, $b=-5$, $c=-3$; β) $a=7$, $b=-5$, $c=2$; γ) $a=-3\frac{1}{2}$, $b=-5$, $c=-3$. **13.** $5a^2-3ab+2c^2+4cd$ przy $a=10$, $b=1$, $c=2$, $d=3$. **14.** $10x+7y-2{\cdot}75$ przy $x=0{\cdot}15$, $y=0{\cdot}6$. **15.** $2a^3b^2c+0{\cdot}9d-4e$ przy $a=0{\cdot}01$, $b=5$, $c=1800$, $d=8{\cdot}9$, $e=1{\cdot}7165$. **16.** $a^{n+2}+ma^{n+1}b+mab^{n+1}+b^{n+2}$ przy: α) $m=3$, $a=0{\cdot}7$, $b=0{\cdot}3$, $n=1$; β) $m=3$, $a=11$, $b=-7$, $n=3$; γ) $m=3$, $a=17$, $b=-7$, $n=1$. **17.** $(-1)^{n+2}.m.a^{n+2}+(-1)^{n+1}.m.a^{n+1}-(-1)^{n+1}.a^{n+1}$ przy: α) $a=2$, $m=3$, $n=1$; β) $a=3$, $m=2$, $n=2$. **18.** $3x^{3m}-2x^2y^m-3x^my^2$ przy: α) $m=2$, $x=2$, $y=3$; β) $m=3$, $x=0{\cdot}1$, $y=0{\cdot}2$. **19.** $0{\cdot}7a^4+1{\cdot}9a^3b-11{\cdot}3ab^3+13{\cdot}3a^2b^2$ przy: α) $a=2$, $b=3$; β) $a=1{\cdot}1$, $b=2{\cdot}3$. **20.** $100x^my^n+3x^{m+2}y^{n+2}-x^{m+n}y^{2n}+153y^n$ przy α) $m=2$, $n=3$, $x=3$, $y=2$; β) $m=1$, $n=2$, $x=4$, $y=1$.

---

[1]) 1585.

(Art. 55). Wskazać działania: **21.** Od b odjąć c, a tę różnicę odjąć od a. **22.** Od t odjąć x i przez tę różnicę podzielić sumę liczb r i s. **23.** α) Od z odjąć u i przez tę różnicę pomnożyć sumę liczb x i y; β) od z odjąć u, tę różnicę pomnożyć przez y, a otrzymany iloczyn dodać do x; γ) y pomnożyć przez z, iloczyn ten dodać do x, a od otrzymanej sumy odjąć u; δ) do x dodać y, sumę tę pomnożyć przez z, a od otrzymanego iloczynu odjąć u. **24.** Podzielić b przez c; iloraz ten pomnożyć przez sumę, której pierwszym składnikiem jest iloczyn liczb c i a, drugim d; to wyrażenie odjąć od różnicy, którą otrzymamy, odejmując a od b. **25.** Pomnożyć a przez c, zaś b przez d; pierwszy z tych iloczynów odjąć od drugiego; tę różnicę pomnożyć przez iloraz, który otrzymamy, dzieląc 1 przez c; całe tak otrzymane wyrażenie odjąć od a; tę różnicę pomnożyć przez iloraz z podzielenia b przez d; otrzymany iloczyn odjąć od ilorazu z podzielenia przez b iloczynu liczb a i c.

Wypowiedzieć, jakie działania we właściwej kolei mają być wykonane w następujących wyrażeniach: **26.** $a-x.(y+a)$. **27.** $(x+y).(z-u)+x+y(z-u)+(x+y)z-u$. **28.** $x[a-y(b+z)]$. **29.** $\{50-[35-(10-x):x]x\}x$. **30.** $\frac{ac}{b}-\frac{b}{d}\left[a-\frac{1}{c}(bd-ac)\right]$.

(Art. 56). **31.** $5a^2b^2c-2a^3b^2-3a^3b^2-4a^2b^2c+6a^3b^2$. **32.** $11a^7b^2c^3+13{\cdot}46\,ab^5c^2d^3-$ $-6{\cdot}41\,bcd^5-1{\cdot}91\,a^7b^2c^3+3{\cdot}41\,bcd^5-2{\cdot}26\,ab^5c^2d^3+0{\cdot}83\,a^7b^2c^3-1{\cdot}2\,ab^5c^2d^3-0{\cdot}02\,a^7b^2c^3$. **33.** $\frac{4}{5}a^2b+2\frac{2}{3}ab^2-\frac{a^2b^2}{7}+5ab^2+\frac{a^2b}{5}-7\frac{2}{3}ab^2+2\frac{1}{7}a^2b^2$. **34.** Uważając litery m, n, p, r, s, za spółczynniki (art. 46), wykonać redukcyą wyrazów podobnych w wielomianie: $mx^2+pxy-nx^2+ry^2-sxy-nx^2-ny^2+sxy-ry^2+rxy-my^2+x^2-xy-y^2$.

(Art. 58). **35.** $az^5+cz^3+ez+bz^4+dz^2+f$ uporządkować według malejących potęg z. **36.** $x^4-xy^3-x^3y+x^2y^2+y^4$ według rosnących potęg x. **37.** $a^2b+2ab^2+a^2b^2+2ab^3+b^3+b^4+a^2+b^2+2ab$ według malejących potęg litery głównej a i malejących potęg b. **38.** $x^2y^3z+xy^4z^2-x^3y^2z+x^4yz$ α) według malejących potęg x; β) według malejących potęg y. **39.** $7a^3b+12a^2b^2+10ab^3+4a^4+8a^3b^2+15a^2b+b$ według malejących potęg litery głównej a i malejących potęg b. **40.** $9x^3y^3z^2-4xy^4z^3+8x^2y^2z^4-5x^4yz^3+4y^4z^4+7xyz^6+4x^4y^3z-x^2y^6z$ według malejących potęg litery głównej x i malejących potęg y.

(Art. 67). **41.** $(5a+2b+17c)+(9a-7b-8c)+(-13a+5b-8c)$.
42. $(9a-7b-8c)-(-13a+5b-8c)$. **43.** $(5a+2b+17c)+(9a-7b-8c)-(-13a+5b-8c)$.
44. $(5a^4b+3a^2b^2c-7ab)+(-6a^4b+2a^2b^2c+17ab)+(-9a^4b+8a^2b^2c+10ab)$.
45. $(5a^4b+3a^2b^2c-7ab)+(-6a^4b+2a^2b^2c+17ab)-(-9a^4b+8a^2b^2c+10ab)$.
46. $(\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2+1\frac{1}{5}ab)+(\frac{1}{4}a^2b-1\frac{1}{6}ab^2-\frac{8}{15}ab)-(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{3}ab)$.
47. $(\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2+1\frac{1}{5}ab)-(\frac{1}{4}a^2b-1\frac{1}{6}ab^2-\frac{8}{15}ab)-(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+\frac{2}{3}ab)$.
48. $a-(b-c-d)-(e+f)+a-[b-(c-d-e+f)]-\{a-[b-(c-d-e)+f]\}$.
49. $a-\{b-[c-(d-e)+f]\}-(a-\{b-[c-(d-e)]+f\})+a-(b-\{c-[d-(e+f)]\})$.
50. $4a^5b^2c^3-\{3a^5b^5-12a^5b^2c^3-[-2a^3b^2c^5-(7a^5b^5+15a^5b^2c^3-17a^3b^2c^5)]-(3a^5b^2c^3+2a^3b^2c^5)\}-$ $-(7a^3b^2c^5-6a^5b^2c^3-11a^5b^5)$.
51. $6a+\{4a-[8b-(2a+4b)-22b]-7b\}-\{7b+[9a-(3b+4a)+8b]+6a\}$.
52. $a+(b+c+d)-[c-(b+d)]-[b-(c-d)]-[b-(d-c)]-[-(b-c)+d]$.
53. Co trzeba dodać do $5a-[7b+3a-(2a+b)]$, aby otrzymać $4a-[14b+(2a-7b)-3a]$?
54. Jeżeli $a=3x-2y+5z$, $b=7x-8y+5z$, $c=9x-5y+3z$, $d=11x-3y-4z$, to:
α) $a+b-(c-a+d)=?$; β) $a+b-c-(c+d)-c=?$; γ) $b-\{c-[a-(b+d)]\}$?
55. Czemu się równa $a-(b-c)$, jeżeli $b=7a-(8d+3e)$, $c=2a-(8d-3e)$?

(Art. 68). **56.** W wielomianie $2a^5-3a^4b+7a^3b^2-ab^4+3b^5$ przyjąć $b=a$ i wykonać redukcyą. **57.** W wielomianie $3a^2b^3cd^2e^5-2a^2b^3cd^3e^4+4a^3bcd^4e^4+2d^5e^8-5a^3b^2c^3d^4e$ przyjąć $c=a$, $d=b$, $e=a$.

(Art. 69). **58.** $(-bc^4de).(0{\cdot}02\,ab^3cd^7)$. **59.** $(-a^5bc^4).(7abc)$.
60. $(-5a^mb^pcd).(-8a^nb^pc^md)$. **61.** $(-a^2b^mc^3d).(4a^mbc^{2m}d^{m+1})$. **62.** $(-1)^ma^2b^3c^5.(-1)^ma^4b^5c$.

63. $(-1)^m a^n c^{2p} d^2 . (-1)^{m+1} a^{3p} c^2 d^{4n}$. **64.** $(-1)^m a^p b^3 c^{2r} . (-a^{2r} b^{3n} c^{2r})$. **65.** $(-3 a^m b^2 c^{2p}) \times$ $\times (-1)^p a^7 b^{2p} c^4$. **66.** $(-4 a^5 b^3 c f^2) . (\frac{5}{12} a^2 c^5 d e^4) . (-9 a b c e^3 f^2) . (0{\cdot}3 a^4 b c^3 d^5) . (16 a^7 b c^4) . (a^3 b c^4 d e)$.
67. $(-a^5 b^m c^n d) \times (a^m b^{m+2} c^{2n+3} d^3 e) \times \left[(-1)^{m+1} a^{2m} b^{3m} c^{m+n+1} d^{r+5}\right] \times (-4 a b^{2m} c^5 d^{3r+1}) \times$ $\times \left[(-1)^{m+3} a^{2m} b^3 c^3 d^{3r}\right]$.

(Art. 70). **68.** $(-\frac{3}{5} a^m b^{3n} c^{5p})^2$. **69.** $(0{\cdot}2 a^{m+1} b^{2n+p} c^{mn+3p+2})^2$. **70.** W czworomianie $3 a^2 b^4 c^2 d^2 - a^2 b^{10} c^2 d + 5 a b^{16} c d^2 - 2 a^2 b^2 d$ przyjąć: α) $a = 2 b^2 e^3 f$, $c = -3 b^2 e^2 f^2$, $d = b e f^4$; β) $a = -5 p^3 q^3$, $c = 2 p q^5$, $d = -p^4 q^2$.

(Art. 71). **71.** $(15 a^2 b^5 - 2{\cdot}1 a^3 b^4 - 4{\cdot}5 a^4 b^3 + 0{\cdot}04 a^6 b) . (-7{\cdot}5 a^3 b^2)$.
72. $(15 a^m b^5 - 12 a^{m+1} b^4 + 3 a^{m+2} b^3 + 24 a^{m+3} b^2 - 6 a^{m+4} b + 9 a^{m+5}) . (-\frac{2}{3} a^5 b^{n+1})$.
73. $(17 a^{p+6} b^{q+3} - 23 a^{p+4} b^{q+5} - 8 a^{p+3} b^{q+6} + 2 a^p b^{q+9}) . (4 a^{p+1} b^{p+3})$.
74. $(-\frac{2}{3} a^{2p+1} b^{p+q+3} + \frac{3}{4} a^{2p+2} b^{p+q+2} - \frac{1}{6} a^{p+3} b^{p+q}) . (-12 a^{p+q+3} b^{3p+2})$.
75. $(-\frac{3}{4} a^{2p+1} b^{p+3q}) . (16 a^{3p+2q} b^{q+1} - 8 a^{2p+2q} b^{p+q+1} + 20 a^{p+3q} b^{2p+1})$.

(Art. 72). **76.** W zadaniu 40-em, po uporządkowaniu wielomianu, z wyrazów, zawierających jednakowe potęgi x, wyłączyć je poza nawiasy. **77.** Uporządkować wielomian $3ab^2c + 3b^4 - 2ab^3 - 3abc^2 + 2a^2bc + 4a^2c^2$ według malejących potęg litery głównej c i według malejących potęg litery a, a z wyrazów, zawierających tę samę potęgę c, wyłączyć ją poza nawias. **78.** Mając wielomian $12a^5b^5 - 18a^4b^5 + 12a^4b^4 - 12a^3b^6 + 8a^3b^5 + 6a^2b^7 - 4a^2b^6$, tak wyłączyć poza nawias z niektórych jego wyrazów $4a^2b^3$, z pozostałych zaś $-6a^2b^4$, iżby wielomiany w nawiasach były 3-go stopnia.

(Art. 74). **79.** $(3a^2 + 5ab - 7b^2) . (a^2 - 2ab + 3b^2)$.
80. $(16a^4 b^8 + 24a^6 b^6 c + 36a^8 b^4 c^2 + 54a^{10} b^2 c^3 + 81a^{12} c^4) . (2ab^2 - 3a^3 c)$.
81. $(a^3 - 2a^2 b + ab^2 - 4b^3) . (4a^3 + 3a^2 b - 2ab^2 + b^3)$.
82. $(4a^2 b^4 c^3 - a b^2 c^6 - \frac{3}{4} c^9 + 8a^3 b^6) . (-2ab^2 c^3 + 4a^2 b^4 + 1\frac{1}{2} c^6)$.
83. $(\frac{3}{2} a^n c^n + 4a^{2n} + 2c^{2n}) . (6a^{2n} + 3c^{2n} - 2\frac{1}{4} a^n c^n)$.
84. $(a^4 x^{3n+12} - 0{\cdot}2 a^2 x^{2n+7} + 10 x^{n+2}) . (0{\cdot}15 a^2 x^{2n+5} + 7{\cdot}5 x^n)$.
85. $(x^4 y^{n+2} + 2 x^2 y^{2n+9} + 4 y^{3n+16}) . (x^7 y^n - 4 x^3 y^{3n+14} + 8 x y^{4n+21})$.
86. $(\frac{1}{2} x^{4n+3} - 2 x^{3n+2} + 4 x^{2n+1} - 4 x^n) . (\frac{1}{4} x^{4n+3} + x^{3n+2} + 2 x^n)$.
87. $(x^{6p+12} + x^{5p+10} y^{2q+3} - x^{3p+6} y^{6q+9} + x^{p+2} y^{10q+15} + y^{12q+18}) . (y^{4q+6} + x^{2p+4} - x^{p+2} y^{2q+3})$.
88. $(x+a) . (x+b) . (x+c) . (x+d)$. **89.** $(x-a) . (x-b) . (x-c) . (x-d)$.
90. $(a^3 + b^3 - c^3 + 3abc) . (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) . (a + b + c)$.
91. $(a^{2n} - a^2 z^2) . \left[2a^{n+1} z - (a^n + az) . (a^n + az)\right]$.
92. $(x^2 + 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 + xy^3 + 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 - 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 - xy^3 + 0{\cdot}5 y^6)$.
93. $(x^4 - 2x^2y^2 - 4y^4) . (x^3 - 2xy^2 + 2y^3) . (x^2 + 2xy + 2y^2)$.
94. $(81 a^4 - 5{\cdot}4 a^3 b + 0{\cdot}36 a^2 b^2 - 0{\cdot}024 a b^3 + 0{\cdot}0016 b^4) \times (3a - 0{\cdot}2 b) \times (3a + 0{\cdot}2 b) \times$ $\times (81 a^4 + 5{\cdot}4 a^3 b + 0{\cdot}36 a^2 b^2 + 0{\cdot}024 a b^3 + 0{\cdot}0016 b^4)$.
95. $(ab + ac + bc) . (ab + ac - bc) . (ab - ac + bc) . (-ab + ac + bc)$.
96. $\left[(2a + b) x^3 + (a^2 - ab) x^2 - a^3 x\right] . \left[(2a + b) x^2 - (a^2 - ab) x - a^3\right]$.
97. $(x^2 + 1) . (x^4 + 1) . (x^4 - x^2 + 1) . (x^8 - x^4 + 1) - (x^6 + 1) . (x^{12} + 1)$.
98. $(a^{12p+18} - a^{6p+9} b^{3q+12} + b^{6q+24}) \times (a^{8p+12} + a^{6p+9} b^{q+4} + a^{2p+3} b^{3q+12} + b^{4q+16}) \times$ $\times (a^{4p+6} - a^{2p+3} b^{q+4} + b^{2q+8})$.

(Art. 79). **99.** $m = (a+b)^2$, $n = (a-b)^2$; utworzyć wyrażenia: α) $m+n$; β) $m-n$; γ) mn; δ) na podstawie art. 78-go, $m^2 - n^2$. **100.** $(2a - 3b)^2 . (3a - 2b)^2 - 36 . (a-b)^2 . \left[(a+b)^2 - 4ab\right]$.
101. $(2a^2b - cd^2) . (2a^2b + cd^2) . (4a^4b^2 + c^2d^4) . (16a^8b^4 + c^4d^8) . (256a^{16}b^8 + c^8d^{16}) - (256a^{16}b^8 - c^8d^{16})^2$.
102. $(2a^2b - 3cd^2)^2 . (2ab^2 + 3c^2d)^2 - (2a^2b + 3cd^2)^2 . (2ab^2 - 3c^2d)^2$.

(Art. 82). **103.** α) $\dfrac{7{\cdot}2 a^7 b^3 c^2}{-0{\cdot}9 a^4 b c^2}$; β) $\dfrac{10 a^8 b^4 c^5 d^2 e}{49 a^5 b^4 c^2 d e}$; γ) $\dfrac{(-1)^{2m+1} a^{5n} b^{4n+5} c^r}{(-1)^{2p} a^{2n} b^{n+3} c^r}$.

104. α) $\dfrac{9 a^5 b^{m+2} c^{2m+4}}{36 a^7 b^{m+1} c^{m+3}}$; β) $\dfrac{-5 a b^m c^{3n}}{-7 a^4 b^{2m+3} c^{5n+4}}$; γ) $\dfrac{13 a^{2m+3} b^{3n+4} c^{5p+r} d^{p+2r}}{-17 a^{3m+4} b^{4n+5} c^{6p+2q} d^{2p+r}}$.

(Art. 83). **105.** $\dfrac{\frac{3}{5} a^3 x^6 - 6 a^2 x^4 + a^2 b^2 x^2}{\frac{3}{4} a^2 x^2}$. **106.** $\dfrac{6 a^5 x^3 - 20 a^4 x^4 + a^3 x^5}{-8 a^2 x^3}$.

107. $\dfrac{6 x^{p+1} y^{p+3} + 3 x^p y^{p+2} - 15 x^p y^p}{3 x^p y^{p+2}}$.

(Art. 85). **108.** $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc):(5a + 2b)$.
109. $(45a^4c + 90a^4d - 32b^2c^2 - 128b^2cd - 128b^2d^2):(6c + 12d)$.
110. $(30a^2c^3 - 15b^3c^3 - 42a^2d^2 + 21b^3d^2):(5c^3 - 7d^2)$.
111. $(a^{4m} - b^{8p}):(a^m - b^{2p})$. **112.** $(a^{14} + 1):(a^2 + 1)$.
113. $(12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz):(4x - 9y - 8z)$.
114. $(-5x^2 + 3xy + 8xz + 2y^2 - yz - 3z^2):(5x + 2y - 3z)$.
115. $(20x^4 - 51x^3 - 12x^2 + 32x):(4x^2 - 7x - 8)$. **116.** $(21y^4 - 78y^3 - 17y^2 + 58y + 16):(7y^2 - 5y - 2)$.
117. $(0{\cdot}49a^6 + 2{\cdot}1a^6x^5 + 1{\cdot}5a^5bx^7 + 0{\cdot}25a^4b^2x^4):(0{\cdot}7a^3 + 3a^3x^5 - 0{\cdot}5a^2bx^2)$.
118. $(x^{11}y^6 + 2x^9y^{15} + 32xy^{51}):(x^4y^4 + 2x^2y^{13} + 4y^{22})$.
119. $(24a^{4n} + 27\tfrac{3}{8}a^{2n}c^{2n} + 6c^{4n}):(6a^{2n} - 2\tfrac{1}{4}a^nc^n + 3c^{2n})$.
120. $(a^6 + a^5b - a^4b^2 + a^2b^4 - ab^5 - b^6):(a^4 + a^3b + ab^3 + b^4)$.
121. $(\tfrac{5}{2}z^5 + \tfrac{11}{3}z^4 + \tfrac{49}{12}z^3 + 3z^2 + \tfrac{31}{20}z + \tfrac{3}{5}):(\tfrac{1}{2}z^3 + \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{4}z + \tfrac{1}{5})$. **122.** $(x^6 - y^6):(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$.
123. $(32a^5b^{10} + 5a^2b^4c^9 - \tfrac{9}{8}c^{15}):(8a^3b^6 + 4a^2b^4c^3 - ab^2c^6 - \tfrac{3}{4}c^9)$.
124. $(x^{8p+16} + x^{4p+8}y^{8q+12} + y^{16q+24}):(x^{6p+12} + x^{5p+10}y^{2q+3} - x^{3p+6}y^{6q+9} + x^{p+2}y^{10q+15} + y^{12q+18})$.
125. $\{[(x^{18} - 1):(x^6 - x^3 + 1)]:(x^6 + 1)\}:(x^3 - 1)$.
126. $\{[(x^{20} - 1):(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)]:(x^{10} + 1)\}:(x^5 - 1)$.
127. $[(x^3 + 1)(x^3 - 2)^2 + 3(x^3 - 1)(x^3 + 1)]:(x^6 - x^3 + 1)$.

(Art. 88). **128.** $(a^8 + b^8):(a^2 + b^2)$. **129.** $(20x^4 - 51x^3 - 9x^2 + 32x):(4x^2 - 7x - 8)$.
130. $[(a + b)x^5 + (a^2 + b^2)x^4 + (a^3 + b^3)x^3 + (a^4 - b^4)x^2 + (a^5 + b^5)x]:(a + b)$.

(Art. 89). **131.** $16a^4:(2a - b)$. **132.** $4a^8:(a^5 + 2a^4 + 4)$.

(Art. 104). **133.** $24a^5b^{n+4}c^2d^3$, $-18a^3b^{n+7}c^{n+2}d^2$, $-36a^6b^{n+8}d^4$, $30a^{13}b^{n+7}cd$.
134. $21a^{2m+5}b^{3p}c^{5n+7}d^{p+7} - 12a^{m+6}c^{2n+9}d^{2p+8} - 3a^{3m+9}b^7c^{n+6}d^{3p+9}$, $9a^{m+5}c^{n+8}d^{7p+7}$, $-15a^{4m+6}b^{3n}c^{3n+6}d^{p+7}$, $-18a^{2m+7}c^{n+6}d^{p+7}$.

(Art. 105). **135.** $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $3a^2 + ab - 4b^2$, $a^3 - b^3$.
136. $4a^3 - 3ab^2 - b^3$, $12a^4 + 12a^3b + 3a^2b^2 - 6ab^3$, $(4a^2 - b^2)^2$.
137. $27a^6 + 8b^9$, $243a^{10} + 32b^{15}$, $9a^4 - 4b^6$, $3a^4 + 2a^2b^3 + 3a^2b + 2b^4$.
138. $6a^3 + 5a^2b - 16ab^2 - 15b^3$, $30a^4 - 65a^3b - 20a^2b^2 + 75ab^3$, $4a^2b(3a - 5b)(a + b)$.
139. $(2ab + 3ac + 2b^2 + 3bc)(c - d)$, $(a^2 - b^2)(c - d)^2$, $2a^2c^2 + 4abc^2 - 2a^2d^2 - 4abd^2 + 2b^2c^2 - 2b^2d^2$.
140. $(4a^{n+2}b^3 + 2a^4b^{n+2} + 2a^{n+2}b^4 + b^{n+3}a^3)(a^4 - 4b^4)$, $5ab^2.(6a^5 - 24a^3b^2 + 24ab^4).(4a^{2n}b^2 - a^2b^{2n})$.

(Art. 109). **141.** $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4$, $3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16$.
142. $3ax^4 + 3a^2x^3 - 6a^3x^2 - 3a^4x - 6a^5$, $4ax^3 + 2a^2x^2 - 8a^3x + 8a^4$.
143. $a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3$, $2a^2bx^2y - ab^2xy^2 - b^3y^3$.
144. $x^3 - (4a + b)x^2 + (3a^2 + 4ab)x - 3a^2b$, $x^3 - (a + b)x^2 - (30a^2 - ab)x + 30a^2b$.
145. $x^7 - 9x^6 + 31x^5 - 51x^4 + 40x^3 - 12x^2$, $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 35x^2 + 64x - 28$.
146. $6a^3 - 30a^2 + 9a + 60$, $3a^2 - 8a - 16$. **147.** $30a^3 - 20a^2 + 15a - 10$, $15a^2 - 7a - 2$.
148. $3ab^4 + 3a^2b^3 - 6a^3b^2 - 3a^4b - 6a^5$, $4ab^3 + 2a^2b^2 - 8a^3b + 8a^4$.
149. $18a^4b^5c^6 - 84a^5b^7c^5 + 102a^6b^9c^4 - 36a^7b^{11}c^3$, $24a^2b^2c^5 - 76a^3b^4c^4 - 32a^4b^6c^3 + 192a^5b^8c^2 - 96a^6b^{10}c$.
150. $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 + ab + a + b$. **151.** $4x^3 - 9x^2 - 17x + 18$, $x^2 - 4x + 3$.
152. $3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$, $x^2 + 2x + 3$.
153. $2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$, $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

(Art. 110). **154.** $30a^2x^4 - 5a^3x^3 + 5a^5x$, $9ax^3 - a^3x + 2a^4$, $3ax^3 - 5a^2x^2 + 3a^3x - a^4$.
155. $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$, $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
156. $x^2 + 5x + 4$, $x^2 + 2x - 8$, $x^2 + 7x + 12$.
157. $(y^2 + y)x^4 - 2(y^2 + y)x^3 + 2x^2y + 2(y^2 - y)x - y^2 + y$, $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

(Art. 112). **158.** $3a^{n+1}b^{5m}c^4$, $9a^{2n}b^{m+4}c^3$, $-5a^6b^{2m+1}c^{4p}$, $a^{p+3}b^{n+2}c^{3p}$.

(Art. 113). **159.** $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.
160. $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 2$, $a^2x^2 - a^2$.
161. $a^3 + a^2b + 4ab^2 + 4b^3$, $a^3 - a^2b + 4ab^2 - 4b^3$, $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$, $a^4 - 16b^4$.
162. $27a^3 + 18a^2b - 12ab^2 - 8b^3$, $27a^3 - 18a^2b - 12ab^2 + 8b^3$, $1215a^4 - 1080a^2b^2 + 240b^4$, $90a^2 - 40b^2$.

(Art. 114). **163.** $4a^3 - 24a^2 + 44a - 24$, $a^2 - 4a + 3$, $a^2 + a - 2$. **164.** Znaleźć nsw. wielomianów w zadaniu: α) 150-em, β) 146-em, γ) 147-em, δ) 156-em, ε) 155-em.

(Art. 120). **165.** $\frac{a^2-b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$. **166.** $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$. **167.** $\frac{32a^{10}b^5+243c^{15}}{8a^6b^3+27c^9}$.

168. $\frac{8a^3b^6c^3+27a^3b^3c^6}{32a^5b^{10}c^5+72a^5b^8c^7+108a^5b^7c^8+243a^5b^5c^{10}}$. **169.** $\frac{2x^4-4x^3y+4x^2y^2-2xy^3}{x^6-y^6}$.

170. Za licznik wziąć pierwszy, a za mianownik drugi z wielomianów w zadaniu: α) 150-em, β) 146-em, γ) 147-em, δ) 145-em.

(Art. 121). **171.** $\frac{a^3+b^3}{a^5+b^5}$ przy $b=-a$ i przy $b=a$.

172. $\frac{a^3-3ab^2-2b^3}{3a^3-8a^2b+\frac{13}{3}ab^2-\frac{2}{3}b^3}$ przy $a=2b$. **173.** $\frac{2a^4+a^3-9a^2-13a-5}{2a^4+7a^3-6a^2-44a-40}$ przy $a=\frac{5}{2}$.

174. $\frac{4a^2-20a+25}{2a^4+7a^3-6a^2-44a-40}$ przy $a=\frac{5}{2}$. **175.** $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}$ przy $a=b$.

176. $\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{12x^3+16x^2+7x+1}$ przy: α) $x=-\frac{1}{3}$; β) $x=-\frac{1}{2}$. **177.** $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$ przy $a=1$.

178. $\frac{a^4-3a^3b^2-2a^2b^4+12ab^6-8b^8}{a^4+a^3b^2-6a^2b^4-4ab^6+8b^8}$ przy: α) $a=b^2$; β) $a=2b^2$; γ) $a=-2b^2$.

(Art. 123 — 125). **179.** $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

180. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$.

181. $\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}$. **182.** $\frac{x(x+1)(x+2)}{3}-\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

183. $\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}-\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

184. $\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

185. $\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{b^4}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{c^4}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$.

186. W zadaniu 179-em przyjąć $c=b$.

(Art. 126). **187.** $\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$.

188. $\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)$.

189. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$.

190. $\frac{x^4-16x^2}{15x^2-15}\times\frac{12x-12}{x^4\left[x+\frac{3(x+2)}{x}\right]}$. **191.** $\frac{3ax}{4by}\times\frac{a^2-x^2}{c^2-x^2}\times\frac{bc+bx}{a^2+ax}\times\frac{c-x}{a-x}$.

192. $\frac{1-y^2}{x+x^2}\times\frac{ax^2+a^2x+a^3}{a^2}\times\frac{1-x^2}{1+y}\times\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)$.

193. Gdy $m=\frac{x-y}{x+y}$, $p=\frac{y-z}{y+z}$, $q=\frac{z-u}{z+u}$, $r=\frac{u-v}{u+v}$, $s=\frac{v-w}{v+w}$, $t=\frac{w-x}{w+x}$, to:
α) $(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)=?$; β) $(1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t)=?$

(Art. 127 i 128). **194.** $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right):\left(\frac{ad}{c^2}-\frac{b}{c}+\frac{d}{e}-\frac{bc}{ae}+\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right)$.

195. $\left[\left(\frac{c}{a+b}-\frac{c}{a+2b}\right):\left(\frac{c}{a+2b}-\frac{c}{a+3b}\right)\right]\times\frac{c}{a+3b}$.

196. $\left(\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}:\frac{a^3b+ab^3+2a^2b^2}{a^4-b^4}\right)\left(\frac{a^4-a-3a^3+3a^2}{a^3b-b^4}:\frac{a^4+a^2-2a^3}{a^2b^2+ab^3+b^4}\right)$.

197. W jednem naczyniu jest a litrów wody, w drugiem zaś b litrów wina. Z obu naczyń odlano po c litrów; odlane wino wlano do pierwszego naczynia, wodę zaś do drugiego. Po zamieszaniu, z każdego naczynia odlano znowu po c litrów mieszaniny. Odlaną z pierwszego naczynia wlano do drugiego, odlaną zaś z drugiego naczynia wlano do pierwszego. Jaki otrzymamy iloraz, dzieląc ilość litrów samego wina w mieszaninie w pierwszem naczyniu przez ich ilość w naczyniu drugiem?

198. $\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-\dfrac{ab-a^2}{1+ab}}$. 199. $\dfrac{x-\dfrac{xz(1-y)}{z+x^2y}}{1+\dfrac{x^2(1-y)}{z+x^2y}}$. 200. $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$.

201. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}-1\right)}{\left(\dfrac{a-b}{a+b}+1\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)}$. 202. $\dfrac{\dfrac{a+2b}{ab^4}-\dfrac{2a+b}{a^4b}}{\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}}$.

203. $\dfrac{\dfrac{2a+b}{a+b}+\dfrac{2b-a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}:\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}\right)$. 204. $6+\dfrac{1-\dfrac{x+2+\dfrac{x+3}{x+4}}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}$.

205. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right].(a^6-x^6)}{(a^3x-ax^3)^2.[(a+x)^2-ax].[(a-x)^2+ax]}\times\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$.

(Art. 146, 149 i 150). **206.** Dwa ciała biegną ruchem jednostajnym; jedno przebiega m_1 metrów w ciągu s_1 sekund, drugie zaś m_2 metrów w ciągu s_2 sekund. Jaki jest stosunek prędkości ruchu tych ciał?

207. Siła odśrodkowa jest odwrotnie proporcyonalna względem kwadratu czasu obrotu. Jeżeli natężenie siły ciężkości na równiku nazwiemy g, to natężenie siły odśrodkowej na równiku jest $\frac{1}{289}g$. Jakim byłby stosunek natężeń siły ciężkości i siły odśrodkowej na równiku, gdyby ziemia obracała się 17 razy prędzej?

208. Przyjmując, że stosunek odległości słońca i księżyca od ziemi jest $a:1$, że stosunek masy słońca do masy ziemi jest $s:1$ i że stosunek masy ziemi do masy księżyca jest $1:k$, oraz wiedząc, że przyciąganie jest wprost proporcyonalne względem masy, zaś odwrotnie proporcyonalne względem kwadratu odległości, wyrazić stosunek przyciągania księżyca przez słońce do przyciągania księżyca przez ziemię α) podczas zaćmienia księżyca, β) podczas zaćmienia słońca.

209. Dlaczego o więcej lub mniej rozwiniętej linii brzegów jakiegoś lądu nie można dawać pojęcia przy pomocy stosunku długości linii brzegów tego lądu do jego powierzchni? Wyjaśnić, biorąc za przykład wyspę Madagaskar, której długość brzegów wynosi 4000 *km*, zaś powierzchnia blisko 600 000 km^2, przyczem przyjąć za jednostkę zamiast *km* raz *m*, drugim zaś razem myriametr.

210. Jeżeli przy tej samej temperaturze ilość stopni na termometrach Celsius'a i Fahrenheit'a (zad. 3) nazwiemy odpowiednio C i F, to wielkości C i F nie są proporcyonalne względem siebie. Jak utworzyć z F wielkość proporcyonalną względem C?

211. Jeżeli w miejscu, w którem natężenie siły ciężkości jest g, długość wahadła, wyrażoną w odpowiednich jednostkach, nazwiemy l, zaś czas jego wahnięcia, wyrażony w sekundach, nazwiemy t, to $t^2=\pi^2\cdot\dfrac{l}{g}$. W dwu miejscach, w których natężenia siły ciężkości są g_1 i g_2, długości wahadeł sekundowych są odpowiednio l_1 i l_2. Jaki zachodzi związek między liczbami g_1, g_2, l_1 i l_2?

212. Dwa kapitały k i k_1, przy tej samej stopie procentu, po upływie lat odpowiednio t i t_1 stały się wskutek dołączenia odsetek kapitałami odpowiednio K i K_1. Z tych danych utworzyć dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości proporcyonalnych.

213. Objętości gazu pod tem samem ciśnieniem są proporcyonalne względem temperatur, liczonych od -273^0 C. Pod tem samem ciśnieniem gaz ma objętość v przy t^0 C., zaś objętość v_1 przy $t_1{}^0$ C. Z tych danych utworzyć proporcyą.

214. Dwa ogniska znajdują się od siebie w odległości d, a stosunek mocy ich światła jest $a:b$. Na prostej, je łączącej, w odległości c od pierwszego ogniska znajduje się punkt jednakowo przez te ogniska oświetlony. Natężenie światła w jakimś punkcie jest wprost proporcyonalne względem mocy źródła światła, zaś odwrotnie proporcyonalne względem kwadratu jego odległości. Z tych danych utworzyć proporcyą.

215. Jakiemu warunkowi czynić mają zadość w zadaniu 212-em liczby k, k_1, K i K_1, ażeby było $t:t_1=k_1:k$?

216. Z dwu gatunków towaru, po cenie a_1 i a_2 (za jednostkę), utworzono mieszaninę po cenie a (pośredniej między a_1 i a_2), biorąc b_1 jednostek pierwszego gatunku i b_2 drugiego. Z tych liczb utworzyć dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości odwrotnie proporcyonalnych.

(Art. 151). **217.** Przednie i tylne koła wozu mają obwody odpowiednio k_1 i k_2 dm. Tylne koło obróciło się r razy; ile obrotów na tejże drodze zrobiło przednie koło?

218. Koło zębate, mające z_1 zębów, w ciągu m_1 minut obraca się r razy i wprowadza w ruch drugie koło zębate, mające z_2 zębów. Ile razy obróci się to drugie koło w ciągu m_2 minut?

219. Objętość gazu przy stałej temperaturze jest odwrotnie proporcyonalna względem ciśnienia. Pod ciśnieniem 1-ej atmosfery $1g$ powietrza przy 0^0C. zajmuje 773·3 cm^3. Ile waży 1·1 l powietrza, pozostającego przy 0^0C. pod ciśnieniem 70·3 atmosfery?

220. Mamy 3 cm^3 powietrza przy 0^0C.; jaką one będą miały objętość pod tem samem ciśnieniem (zad. 213) przy 182^0C.?

(Art. 160 i 161). **221.** $3(5x+2)+4(5x+2)=28$. **222.** $2x-(9+8x)=7+(3x-5)$.

223. $2(x+7)+3(x+7)-4(x+7)=15$. **224.** $5(2x-11)-17x=3(3-9x)+16$.

225. $x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)=550$. **226.** $12x+11(10-2x)=9x+8(7-x)+54$.

227. $2(x-1)+3(x-2)-4(x-3)-5(x-4)=0$. **228.** $2x+3(x+4)+4(x+5)+5(x+6)=160$.

229. $(2x+3)^2-(2x-3)^2=0$. **230.** $(3x+2)^2+(3x-4)^2+16(x-3)=2(9x^2-16)+4$.

231. $(6x-1)^2+(8x-3)^2=(10x-7)^2$. **232.** $(2x+1)^2-3x=(2x-1)^2+10$.

233. $(4x+1)^2+(3x+2)^2-(5x+4)^2=-11$. **234.** $(2x+7)^2-(x+5)(2x+3)+1=(x+3)(2x+5)$.

235. $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2=(x-1)(x+3)+x(x+4)+(x+1)(x+5)$.

236. $(2x+3)^2(2x+5)-(x+\frac{23}{9})(3x+5)^2+(x+2)(x+3)^2+\frac{1}{9}=0$.

237. $(2x+3)^2(3x+4)+(3x+2)^2(4x+3)+(x+1)^2(x+5)-(7x+9)^2(x+1)+10(2x+5)^2+x^2-91=0$.

238. $(x+2)^2(3x+4)^2-(2x+3)^2(2x+5)(x+1)-x^2(x+4)^2+17(x-1)^2-27x^2-30=0$.

239. $(12x^2+5)^2-4x^2(6x+1)^2+6x(2x+3)^2-8(x+2)^2(x+3)-(2x+5)^2(2x+23)+8(5x^3+\frac{29}{4})=0$.

240. $(2ax+3b)^2-(3cx+2b)^2=5b^2+(4a^2-9c^2)x^2$.

241. $c^2(ax+d)^2+d^2(bx+c)^2=a^2(cx+b)^2+b^2(dx+a)^2$.

242. $(ax+b)^2+(2bx+d)(ax-1)=(a+b)^2x^2-(b^2x^2-1)$.

243. $[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2$.

244. $(0{\cdot}8x-2{\cdot}8)(0{\cdot}3x+4{\cdot}4)=(0{\cdot}04x+0{\cdot}21)(6x-22)$. **245.** $\frac{3x+5}{5}+\frac{9-4x}{9}=\frac{5x+6}{3}$.

246. $7x-\frac{2x-3}{14}=9-\frac{5x+7}{21}$. **247.** $\frac{2+3x}{4}-\frac{5-6x}{7}=\frac{15+24x}{28}$.

248. $3x-\frac{2x-7}{3}=\frac{6x+8}{19}-\frac{3x-87}{6}$. **249.** $\frac{7x+9}{8}-\frac{9x-13}{4}=\frac{3x+1}{7}-\frac{249-9x}{14}$.

250. $\frac{6x+7}{9}-\frac{3x-5}{4}=\frac{9x+5}{14}+\frac{10x+7}{18}$. **251.** $6x-\frac{3x+4}{9}-\frac{4-8x}{3}=\frac{x-2}{3}+\frac{6x+1}{9}$.

252. $\frac{11x-13}{25}+\frac{19x+3}{7}-\frac{5x-25\frac{1}{3}}{4}=28\frac{1}{7}-\frac{17x+4}{21}$.

253. $13\frac{1}{2}-\frac{5+4x}{6}+\frac{5x+29}{8}=256-\frac{7x-43}{12}-\frac{3x-12}{9}-12x$.

254. $\frac{31+4x}{3}-\frac{3x+47}{8}-\frac{3x-19}{16}=47\frac{3}{4}-\frac{10x-16}{11}-\frac{5x+20}{7}$.

255. $4x+\frac{1}{10}-\frac{3x-13}{16}-\frac{7x+12}{9}=-(33-7x)-\frac{5x+9}{10}-\frac{11x-17}{8}$.

256. $\frac{2x-3}{15}-\frac{4x-9}{20}=\frac{8x-27}{30}-\frac{16x-81}{24}-\frac{9}{40}$. **257.** $\frac{\frac{3x}{2}-4}{6}-\frac{4x-7}{9}+x=\frac{8-\frac{x+3\frac{2}{3}}{2}}{3}$.

258. $\dfrac{x-1\frac{25}{26}}{2}+\dfrac{11+6x}{13}-1=x-\dfrac{5x-\dfrac{10-3x}{4}}{39}$. 259. $\dfrac{a^2x}{b-c}-dc=bx-ac$.

260. $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{a}{3}\right)-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{a}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{a}{5}\right)=0$. 261. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}=\dfrac{a}{a+b}$.

262. $\dfrac{2x+7b}{2a+b}-1=\dfrac{x+a}{2a-b}$. 263. $\dfrac{3abc}{a+b}+\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\dfrac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\dfrac{bx}{a}$.

264. $\dfrac{3bx}{2a^2}-\dfrac{x-b}{a+b}=\dfrac{bx-a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{x}{4a}$. 265. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{c}+\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{x-(a+b+c)}{abc}$.

266. $\dfrac{a(1-bx)}{c}+\dfrac{b(1+ax)}{c}+\dfrac{c(1-bx)}{a}+\dfrac{c(1+ax)}{b}=\dfrac{(a+b)c}{ab}$.

267. $\dfrac{x(a+1)}{b}+\dfrac{x(b+1)}{a}+\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a(x-1)}{b}-\dfrac{b(x-1)}{a}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$.

268. $1-\dfrac{a(x-b)}{c}-\dfrac{c(x-a)}{b}+\dfrac{b(c-x)}{a}=-\dfrac{c(x-b)}{a}+\dfrac{b(a-x)}{c}-\dfrac{a(x-c)}{b}$.

269. $\dfrac{a-bx^p}{c}+\dfrac{bx^p-c}{a}+\dfrac{bx^p+a}{c}=\dfrac{bx^p+c}{a}-\dfrac{ax-b}{c}$.

270. α) Znaleźć średnią harmoniczną liczb a i b. β) Rozwiązać proporcyą $a:\dfrac{a+b}{2}=x:b$, a po wstawieniu wartości x wypowiedzieć tę proporcyą. (Grecy nazywali ją doskonałą.)

271. Znaleźć średnią harmoniczną liczb a, b i c.

(Art. 162). 272. $\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{2}{11-x}=\dfrac{3}{x-1}$. 273. $\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{7-x}=\dfrac{8}{x-1}$.

274. $1-\dfrac{2}{3x}+4-\dfrac{5}{6x}=7-\dfrac{8}{9x}+10-\dfrac{11}{12x}$. 275. $\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-5}$.

276. $\dfrac{4}{1+x}-\dfrac{3}{3+x}=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{2-x}$. 277. $\dfrac{4}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}$.

278. $\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{1}{x-4}$. 279. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{9}{x-3}+\dfrac{6}{x-5}=\dfrac{1}{x-7}$.

280. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{7(x-3)}-\dfrac{11}{7(x+4)}$. 281. $\dfrac{5x}{x-3}+\dfrac{7+4x}{4x-7}=1-\dfrac{6-5x}{x-3}$.

282. $\dfrac{x-9}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-2}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x-8}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-4}-\dfrac{x-8}{x-2}$.

283. $\dfrac{6-5x}{15}-\dfrac{7-2x^2}{14(x-1)}=\dfrac{3x+1}{21}-\dfrac{10x-11}{30}+\dfrac{1}{105}$.

284. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$.

285. $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{4x}{(x+1)(x+4)}-\dfrac{5}{(x+2)(x+3)(x+4)}=0$.

286. $\dfrac{5}{\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{6x}}+\dfrac{31}{\dfrac{4}{3x}+\dfrac{5}{4x}}+x=6$. 287. $\dfrac{2}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{3x}}+\dfrac{3}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2x}}=\dfrac{8}{21}-x$.

288. $\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)=1$. 289. $\dfrac{ax}{x+c}+\dfrac{b^2x}{a(x+c)}=b$.

290. $\dfrac{m-q}{x-n}+\dfrac{n-p}{x-q}=\dfrac{m-q}{x-p}+\dfrac{n-p}{x-m}$.

291. $\dfrac{a}{x-m}+\dfrac{b}{x-n}+\dfrac{c}{x-p}=\dfrac{a}{x-n}+\dfrac{b}{x-p}+\dfrac{c}{x-m}$.

292. $\dfrac{n}{a^2+ax}-\dfrac{1}{ax+nx}=\dfrac{n-1}{nx+a(a+n+x)}$.

293. $\dfrac{a}{nx-2n^2}+\dfrac{n}{ax+2an-a^2n}=\dfrac{4a+n^2}{x^2-anx+2an^2-4n^2}$.

294. $\dfrac{a^2+c^2+2x^2}{ac-ax-cx+x^2}+\dfrac{2(a+x)}{a-x}+\dfrac{2(c+x)}{c-x}+\dfrac{a-x}{c-x}+\dfrac{c-x}{a-x}=0$.

295. $\dfrac{3x+7a}{a^2x^2+a^3(2x+a)}+\dfrac{4x+5a}{a^3x+x^4}=\dfrac{a^2-2ax+3x^2}{a^4x-a^3x^2+a^2x^3}+\dfrac{16\,ax}{(a+x)^2(a^3+x^3)}$.

296. $\dfrac{x+1}{a^3-x^3}-\dfrac{1}{ax^2-x^3}+\dfrac{a}{x^4+ax^3+a^2x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

297. $\dfrac{an}{a-x}+\dfrac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\dfrac{ax}{n+x}+\dfrac{nx^2}{x^2-a^2}$.

(Art. 165). **298.** $\dfrac{x+10}{2}+\dfrac{2(x+20)}{3}+\dfrac{5(x-34)}{6}=2(x-5)$.

(Art. 166). **299.** $\dfrac{x-10}{3}+\dfrac{5(x-84)}{12}=\dfrac{3(x+1)}{4}-32\tfrac{1}{2}$.

(Art. 168, 169 i 170). **300.** Okazać, że przy a różnem od b jest: α) $a^2+b^2>2ab$; β) $(a+b)^2>4ab$. **301.** Okazać, że, jeżeli wartość bezwzględna liczby a jest różna od 1, jest albo $a+\dfrac{1}{a}>2$, albo też $a+\dfrac{1}{a}<-2$. **302.** Zbadać, kiedy średnia harmoniczna dwu liczb a i b jest większa od ich średniej arytmetycznej, a kiedy od niej mniejsza. **303.** Okazać, że przy a różnem od 1 jest $3(1+a^2+a^4)>1+2(a+a^2)+(a+a^2)^2$. **304.** Okazać, że przy x różnem od y jest $x^4+y^4-xy^3-x^3y>0$. **305.** Okazać, że przy dodatnych x i y, różnych od siebie, jest $x^5+y^5-xy^4-x^4y>0$. **306.** Okazać, że, jeżeli $l^2+m^2+n^2=1$, oraz $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, to $l\lambda+m\mu+n\nu<1$. **307.** Okazać, że w ogóle, jeżeli liczby a, b i c nie są wszystkie równe sobie, jest $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$. **308.** Okazać, że przy $s_1=a+b$, $s_2=b+c$, $s_3=c+a$ jest $(s_1-c)^2+(s_2-a)^2+(s_3-b)^2>ab+ac+bc$.

(Art. 171). **309.** $x+9>\dfrac{x+15}{2}$. **310.** $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x+2}{7}>-5$.

311. $\dfrac{2-x}{3}+\dfrac{7-x}{4}>3$. **312.** $\dfrac{2-x}{5}-\dfrac{1+3x}{4}<7$. **313.** $\dfrac{3x+5}{5}+\dfrac{9-4x}{9}>\dfrac{5x+6}{3}$.

314. $\dfrac{2x-3}{15}-\dfrac{4x-9}{20}>\dfrac{8x-27}{20}-\dfrac{16x-81}{24}-\dfrac{9}{40}$. **315.** $\dfrac{x}{a}<\dfrac{x-b}{c}$.

(Art. 177, 178, 179 i 180). **316.** $\begin{cases} x+2y=5, \\ 5x+4y=13. \end{cases}$ **317.** $\begin{cases} 3x+10y=12, \\ 12x-5y=3. \end{cases}$

318. $\begin{cases} 6x+y=6, \\ 4x+3y=11. \end{cases}$ **319.** $\begin{cases} 12x+15y=8, \\ 16x+9y=7. \end{cases}$ **320.** $\begin{cases} 2{\cdot}475=1{\cdot}5\,x+0{\cdot}75\,y, \\ 4x-2{\cdot}5\,y=3. \end{cases}$

321. $\begin{cases} (x-3)(x-5)-x^2=15+y. \\ (2x+3)(x-3)+3y=2x^2+18. \end{cases}$ **322.** $\begin{cases} (x+1)(y+1)=xy+\frac{7}{4}, \\ x-y=-\frac{3}{2}. \end{cases}$

323. $\begin{cases} (x-2y)^2+(2x-y)^2-4(x-y)^2-(x+2y)(x+1)-(y-2x)(y+1)+2=0, \\ (2x-3y)(3x-2y)-6(x-y)^2+(x+1)(y+1)=3. \end{cases}$

324. $\begin{cases} (10y+12x-14)(y+\frac{3}{2}x+2)-(2y-3x+4)(5y-6x+7)=54xy+12, \\ (15y-4x)^2-(6x-10y)^2-(1+11y)^2+(4x-3)^2=(3-2y)^2-4x^2+4x-67. \end{cases}$

325. $\begin{cases} \dfrac{7x-5y+13}{4}+x=2y-\dfrac{3x+2y-16}{3}, \\ \dfrac{5x+8y}{6}-\dfrac{8x+3y-12}{5}=\dfrac{4y-2x-3}{3}. \end{cases}$ **326.** $\begin{cases} \dfrac{7+8y}{10}-\dfrac{3y-6x}{2y-8}=4-\dfrac{9-4y}{5}, \\ \dfrac{6x+9}{4}=3\tfrac{1}{4}+\dfrac{3x+4}{2}-\dfrac{3x+5y}{4x-6}. \end{cases}$

327. $\begin{cases} \dfrac{4x^2+2xy+288-6y^2}{2x+13-2y}=2x+3y-131, \\ 5x-4y=22. \end{cases}$ **328.** $\begin{cases} (3y+2)(4x+1)=(6x-1)(2y+3), \\ \dfrac{30y}{10y+1}-3=\dfrac{10y-35x+1}{50y^2-65y-7}. \end{cases}$

329. $\begin{cases} \dfrac{48+11x}{4y+2}=\dfrac{16y^2+12xy-8y+5x+28}{4y-2}-(4y+3x), \\ 2y+4=\dfrac{8y^2-18x^2+108}{4y+6x+3}+3x. \end{cases}$ **330.** $\begin{cases} x+ay=b, \\ ax-by=c. \end{cases}$

331. $\begin{cases} (a^2-b^2)(5x+3y)=2ab(4a-b), \\ a^2y-\dfrac{ab^2c}{a+b}+(a+b+c)bx=b^2y+ab(a+2b). \end{cases}$ **332.** $\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{x-y+1}=a, \\ \dfrac{y-x+1}{x-y+1}=ab. \end{cases}$

333. $\begin{cases} 3x+2y+4z=19, \\ 2x+5y+3z=21, \\ 3x-\ y+\ z=\ 4. \end{cases}$ **334.** $\begin{cases} x+2y+\ z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-\ z=8. \end{cases}$ **335.** $\begin{cases} 4x-\ 6y+\ 3z=2, \\ 5x-12y+\ 9z=2, \\ 6x-18y+30z=7. \end{cases}$

336. $\begin{cases} 3{\cdot}4x-1{\cdot}2y=-8{\cdot}16, \\ 5{\cdot}6x+1{\cdot}2z+13{\cdot}44=0, \\ 5{\cdot}6y=38{\cdot}08+3{\cdot}4z. \end{cases}$ **337.** $\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y+\frac{1}{9}z=143, \\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{9}y+\frac{1}{5}z=143, \\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{7}z=143. \end{cases}$

338. $\begin{cases} \dfrac{3x+5y-8z}{2}+\dfrac{7z-2x-3y}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3z-5y+1}{4}-\dfrac{1-y}{3}, \\ \dfrac{3x+y-2z}{3}-\dfrac{4y+5z+6}{5}-\dfrac{8x+7y+9}{8}=\dfrac{11x+10z+2}{13}-\dfrac{146}{13}, \\ \dfrac{10y-9z}{4}-\dfrac{8z-7x}{5}=\dfrac{6x-5y}{13}+\dfrac{y+z-x}{3}-2. \end{cases}$

339. $\begin{cases} \dfrac{x+2y-4}{12}+\dfrac{3z-6x+1}{13}=\dfrac{5y-1}{39}, \\ \dfrac{3y-2z+5}{5}-\dfrac{7x+4y-5z}{7}-\dfrac{3z-9x+6}{6}=\dfrac{12}{35}, \\ 3x+\dfrac{y}{9}-z-\dfrac{7}{3}=0. \end{cases}$

340. $\begin{cases} \dfrac{2x+y-z}{2}-\dfrac{x+3y-z}{7}+\dfrac{2x+5y-2z+3}{6}=0, \\ \dfrac{3(x+2y-z+3)}{5}-\dfrac{4x+y-2z+3}{6}-\dfrac{9+x-z}{7}=0, \\ \dfrac{2x+3y-3z+24}{13}-\dfrac{9+4z-6x-11y}{11}+\dfrac{x+y-z+6}{9}=0. \end{cases}$

341. $\begin{cases} 3y(3x+2z)-(2x+3)(6x+y+4)-(y+5)(2x-9y+6z+2)=52+5xy-12x^2+9y^2, \\ (x+y)(x+z)+(y+z)(y+1)-(x+z)(y+x+3)-(x+y+z)y=1-xy, \\ (x+2y)^2-(x-2y)^2-8x(y+5)+z=-41. \end{cases}$

342. $\begin{cases} a^3+a^2x+ay+z=0, \\ b^3+b^2x+by+z=0, \\ c^3+\ c^2x+\ cy+z=0. \end{cases}$

343. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0, \\ abx-acy+bcz=1. \end{cases}$ **344.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{b-c}+\dfrac{z}{c+a}=2c, \\ \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{b-c}+\dfrac{z}{c-a}=2a, \\ \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{b-c}-\dfrac{z}{c+a}=2a-2c. \end{cases}$

345. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{xy}-\dfrac{x+2}{xz}-\dfrac{z-y+4}{yz}=0, \\ \dfrac{y+4}{x}-\dfrac{y+3}{z}+\dfrac{y(x-z)+2x-7}{xz}=0, \\ (x+y)^2+(z+1)^2-(x+z)^2-(y-1)^2+x(z-y+1)+2(2-3z)=0. \end{cases}$

346. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y+1}-\dfrac{x+3}{y+2}=\dfrac{2x+y+z-7}{y^2+3y+2}, \\ \dfrac{z+1}{x+y-2}-\dfrac{z+2}{x+y+1}=\dfrac{7}{(x+y-2)(x+y+1)}, \\ (x+y)^2+(z+2)^2-(x+y+z+3)(x+y+z+1)+6x+5y+z(2x+2y+1)=9. \end{cases}$

347. $\begin{cases} \dfrac{ax+b}{by+a}-\dfrac{bx+a}{ay+b}=\dfrac{(a^2-b^2)xy+z+b^2}{aby^2+(a^2+b^2)y+ab}, \\ \dfrac{p(x+q)}{z}-\dfrac{p(x+q)}{z+p}=\dfrac{x+y+z}{z^2+pz}, \\ x+y+z=b^2. \end{cases}$ **348.** α) $\begin{cases} x-2y-4u=-19, \\ 6y-7z+8u=23, \\ 9x-10y-8z+10u=5, \\ -13x+10y+15z-10u=12; \end{cases}$

348. β) $\begin{cases} 2x-\ 3y+\ 4z-\ 5u=-12, \\ -\ 7x+\ 8y-\ 9z+10u=\ 22, \\ 12x-13y-14z+15u=\ 4, \\ -17x+18y+19z-20u=-\ 4. \end{cases}$ **349.** $\begin{cases} x+y+z+t=2(a+b+c), \\ 2x+2y-3z-t=2(a+3b-2c), \\ x+2y+3z+4t=2(a+2b+3c), \\ x-y+z+t=4c. \end{cases}$

350. $$\begin{cases} 10x - 2y - 2z - 4t = 6, \\ (x+y)^2 - (x+t)^2 - (y+z)^2 + (z+t)^2 - 2(x-z)(y-t) - 2(x+2y-z-2t) = -2, \\ (x-y)(z-t+2) + (x-t)(y-z) - (x-z)(y-t) - x + 3y + z + t = 8, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 - (x+y)^2 - (z+t)^2 + t(2z+t) + 2xy = 44. \end{cases}$$

(Uwaga w art. 180-ym). **351.** $$\begin{cases} y + 2x = 4, \\ z + 3y = 9, \\ u + 4z = 16, \\ v + 5u = 25, \\ x + y + z + u + v = 15. \end{cases}$$ **352.** $$\begin{cases} x + y + z = a, \\ y + z + u = b, \\ z + u + x = c, \\ u + x + y = d. \end{cases}$$

353. $$\begin{cases} (1-x)(2-y) = z, \\ (3-x)(3-y) = z, \\ (2-x)(1-y) = z. \end{cases}$$ **354.** $$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y = 4, \\ x + y = 3. \end{cases}$$ **355.** α) $$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{6}{2y} = 5, \\ \frac{8}{x} - \frac{6}{2y} = 3; \end{cases}$$

355. β) $$\begin{cases} \frac{8}{x-7} + \frac{9}{y-5} = 7, \\ \frac{5}{x-7} + \frac{3}{2y-10} = 3. \end{cases}$$ **356.** $$\begin{cases} \frac{10}{2x+3y-29} + \frac{9}{7x-8y+24} = 8, \\ \frac{2x+3y-29}{2} = \frac{7x-2y}{3} - 2y + 8. \end{cases}$$

357. $$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = c. \end{cases}$$ **358.** $$\begin{cases} \frac{12}{2y+3x} - \frac{15}{2(3y+4z)} = 1, \\ \frac{30}{3y+4z} + \frac{37}{5x+9z} = 3, \\ \frac{222}{5x+9z} - \frac{8}{2y+3x} = 5. \end{cases}$$ **359.** $$\begin{cases} 3x - \frac{4}{5}y + \frac{1}{z} = 7\tfrac{3}{5}, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{z} = 10\tfrac{1}{6}, \\ \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{4}{z} = 19\tfrac{1}{10}. \end{cases}$$

360. $$\begin{cases} 3xy + 4yz + 5xz = 50xyz, \\ 4xy + 5yz + 6xz = 62xyz, \\ \tfrac{5}{2}xy + 3yz + \tfrac{9}{2}xz = 42xyz. \end{cases}$$ **361.** $$\begin{cases} ax - by = ac - bd, \\ ey - az = de - af, \\ gx + hy + kz = l + cg + dh + fk. \end{cases}$$

(Art. 183). **362.** $$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$$ **363.** $$\begin{cases} 0{\cdot}08x - 0{\cdot}1y = 0, \\ 0{\cdot}24x - 0{\cdot}3y = 0. \end{cases}$$

364. $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y + 6z = 0, \\ 7x + 8y + 9z = 0. \end{cases}$$ **365.** $$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ y + 3z = 0, \\ 7x + 10y + 2z = 0. \end{cases}$$ **366.** $$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

367. $$\begin{cases} x + 3y + 2z + 3v = 0, \\ 4x + 5z + 6v = 0, \\ 7x + y + 8z + 9v = 0, \\ 4x + y + 5z + 6v = 0. \end{cases}$$ **368.** $$\begin{cases} ax + (a-d)y + (a+d)z = 0, \\ bx + (b-e)y + (b+e)z = 0, \\ cx + (c-f)y + (c+f)z = 0. \end{cases}$$

(Art. 184). **369.** $$\begin{cases} x + y = 2a, \\ x - y = 3 - a, \\ 8x - 6y = 21 - 5a. \end{cases}$$ **370.** $$\begin{cases} x + y = 2a, \\ x - y = 2b, \\ 4x - 3y = 5b + 3. \end{cases}$$ **371.** $$\begin{cases} x + y = 2a, \\ x - y = 2b, \\ 4x - 3y = 5b + 3, \\ 3x + 2y = 2a - 1. \end{cases}$$

(Art. 186, 187 i 188). **372.** Co należy odjąć od każdej z liczb 13, 4, 6, 18, aby otrzymane różnice tworzyły proporcyą?

373. Podzielić liczbę 10 na dwie części takie, iżby pięciokrotnie wzięta część pierwsza była o 2 większa od trzykrotnie wziętej pozostałej.

374. Jaką liczbę trzeba dodać tak do licznika, jak i do mianownika ułamka $\frac{l}{m}$, aby otrzymać ułamek $\frac{l_1}{m_1}$?

375. Stosunek dwu liczb dwucyfrowych, napisanych przy pomocy pewnych dwu tylko cyfr, jest 2:9, a suma tych liczb jest 99. Jakie są te liczby?

376. Jaka liczba sześciocyfrowa, w której cyfra jedności jest 2, ma tę własność, iż po przesunięciu owej cyfry na ostatnie miejsce (w lewo) otrzymujemy liczbę 3 razy mniejszą?

377. Jaką liczbę trzeba dodać do każdej z liczb a, b, c, d, aby powstałe sumy przedstawiały cztery liczby proporcyonalne?

378. Dziecko mówi: mój ojciec jest o 39 lat starszy ode mnie, a o 11 lat od matki; razem zaś wszyscy troje mamy 100 lat. Ile lat ma dziecko, matka i ojciec?

379. α) Greczynka błagała Jowisza, by podwoił ilość jej pieniędzy. Stało się zadość jej prośbie, za co wdzięczna Greczynka złożyła w ofierze Jowiszowi 1 drachmę. Zaniosła do niego powtórnie tęż prośbę i znowu Jowiszowi za podwojenie jej pieniędzy złożyła 1 drachmę. Obliczywszy pozostałe jej pieniądze, znalazła, iż miała 3 razy więcej, niż przed zanoszeniem próśb do Jowisza. Ile pieniędzy miała początkowo? β) Innym razem taż Greczynka przyrzekła Jowiszowi składać naprzód po 8 drachm z prośbą, by podwajał pozostałe jej pieniądze. Kiedy czwartym razem złożyła taką ofiarę, nic jej już nie zostało pieniędzy. Ile pieniędzy miała początkowo?

380. Przy budowie domu jest zajętych 30 murarzy i pomocników murarskich. Pierwsi biorą dziennie po 1·60 zł., drudzy zaś po 1 zł. Gdyby murarze brali dziennie o 10 ct. mniej, to kwota, należna wówczas murarzom, byłaby równa tej, którą otrzymują ich pomocnicy. Ilu jest murarzy, a ilu pomocników?

381. Dwie rodziny kupiły spólnie 200 *kg* cukru, z których na pierwszą przypadło 113 *kg*. Ta rodzina zużywa 3·5 *kg*, druga zaś 2·2 *kg* tygodniowo. Po ilu tygodniach te rodziny będą miały równe zapasy cukru?

382. W dwu składach było razem 260 m^3 drzewa. Z pierwszego składu wzięto piątą część drzewa, z drugiego zaś połowę; pozostała w obu składach jednakowa ilość drzewa. Ile go było pierwotnie w każdym z tych dwu składów?

383. Mamy 32 *kg* wody morskiej, zawierającej 1·6 *kg* soli. Ile należy dolać wody słodkiej, aby 32 *kg* mieszaniny zawierało 200 *g* soli?

384. Stary Indus przed śmiercią rozporządził, aby trzej jego synowie rozdzielili między siebie stado koni: najstarszy weźmie połowę, średni trzecią część, a najmłodszy dziewiątą część stada. Synowie po śmierci ojca nie mogli dokładnie wykonać jego woli, gdyż ilość koni w stadzie nie dawała się we wskazany sposób na części podzielić. Przyjaciel zmarłego wytłomaczył synom, że ich ojciec, wydając to rozporządzenie, musiał mieć na myśli dawny, już zapomniany, zwyczaj, iż na stosie wraz ze zmarłym płonął koń jego, widocznie zaś nie wiedział, iż podczas jego choroby jeden koń zdechł w stadzie. Ile było koni w stadzie w chwili śmierci nieboszczyka?

385. Hieron, tyran Syrakuz, kazał złotnikowi z 20 funtów złota zrobić dla posągu koronę. Otrzymawszy ją, powziął podejrzenie, iż złotnik część złota zastąpił przez srebro. Zażądał przeto od uczonego Archimedesa, aby to sprawdził, nie psując pięknego dzieła sztuki złotniczej. Archimedes, zauważywszy w kąpieli, że ciało zanurzone w wodzie staje się lżejszem, rozwiązał to zadanie, stwierdziwszy, że w wodzie złoto traci $\frac{1}{19·75}$, srebro zaś $\frac{1}{10·5}$ swego ciężaru, a korona owa zanurzona w wodę ważyła $18\frac{3}{4}$ funta. Ile srebra dał złotnik zamiast złota?

386. Z dwu wodotrysków woda spada do tego samego zbiornika. Gdyby był puszczony pierwszy tylko wodotrysk, napełniłby zbiornik w h_1 godzinach; gdyby zaś był puszczony sam drugi wodotrysk, napełniłby ten zbiornik w h_2 godzinach. W ilu godzinach napełni się zbiornik, jeżeli oba wodotryski będą puszczone jednocześnie?

387. Dwa naczynia mają objętości v i v_1; pierwsze jest napełnione mieszaniną wody i wina w stosunku $m:n$, drugie zaś w stosunku $m_1:n_1$. Jaką (tę samę) ilość jednostek objętości trzeba odlać z każdego naczynia, iżby po wlaniu w naczynie pierwsze tego, co zostało odlane z drugiego, i nawzajem, były w naczyniach jednakowe mieszaniny wody i wina?

388. Ojciec rozdzielił majątek między dzieci na równe części. Dział każdego dziecka jest taki, iż można go przedstawić albo jako sumę a zł. i szóstej części tego, co zostanie, gdy od całego majątku odejmiemy a zł., albo też jako sumę $2a$ zł. i szóstej części tego, co zostanie, gdy od całego majątku odejmiemy jeden dział i $2a$ zł. Jaki był cały majątek?

389. W bractwie wnosi A corocznie wkładkę, ustanowioną dla członków, od lat 50-u, B wnosi ją od lat 27-u, C od 24-ch, D od 19-u, a E od 16-u lat. Jeżeli te osoby wnosić będą takież wkładki jeszcze przez pewną ilość lat, to α) kiedy suma wkładek,

złożonych przez A, wyniesie połowę tego, co włożą B, C, D i E razem? β) kiedy to, co wniósł A, było równe temu, co wnieśli B, C, D i E razem?

390. Na jak długo należy oddać kapitał na $p\,\%$, aby odsetki wyniosły n-tą część kapitału?

391. Odsetki od pewnego kapitału, oddanego na $3\,\%$, w ciągu 10-u lat wynoszą 2 razy tyle, co odsetki od 6000 *zł.*, oddanych na $4\,\%$, w ciągu lat 3-ch. Jaki jest ów kapitał?

392. Kapitał 6000 *zł.* oddano na $3\,\%$, kapitał zaś 5500 *zł.* na $4\,\%$. Po ilu latach te kapitały wraz z odsetkami utworzą sumy równe?

393. Dyskonto wekslu, obliczone sposobem teoretycznym, za 5 miesięcy po $6\,\%$ wynosi 400 *zł.* Na jaką sumę jest wystawiony ten weksel?

394. Dłużnik ma zapłacić wierzycielowi dziś 1000 *zł.*, po $2\frac{1}{2}$ mies. 700 *zł.*, po 3-ch mies. 800 *zł.*, po $3\frac{1}{2}$ mies. 400 *zł.*, po $5\frac{1}{3}$ mies. 600 *zł.* Jaki jest „średni termin" tych wypłat?

395. Ktoś umieścił swój kapitał na $4\,\%$, a po roku dodał do tego kapitału tyle, ileby wyniosły procenty od niego za lat 12, i wskutek tego miał w następnym roku dochodu o 768 *zł.* więcej, niż w poprzednim. Jaki był kapitał pierwotny?

396. Ktoś, mając 36000 *zł.*, kupił willę i trzecią część pozostałych pieniędzy umieścił na $4\,\%$, a resztę na $5\,\%$. Pieniądze te przynoszą mu rocznie 1176 *zł.* Ile kosztuje willa?

397. Ile trzeba dolać wody słodkiej do 40 *kg* morskiej wody, zawierającej $3\frac{1}{2}\,\%$ soli, aby mieszanina miała tylko $1\frac{1}{2}\,\%$ soli?

398. Kiedy wskazówki zegara, godzinna i minutowa, zejdą się z sobą po raz pierwszy po godzinie dwunastej?

399. W zegarze pewnym wskazówka sekundowa obraca się (jednostajnie) około tej samej osi, co godzinna i minutowa. Kiedy po raz pierwszy po godzinie 12-ej wskazówka sekundowa zajmie położenie dwusiecznej kąta między wskazówkami godzinną i minutową?

400. Dwie stacye drogi żelaznej A i B są od siebie oddalone o 137 *km*. Centnar metryczny pewnego towaru w A kosztuje 4·25 *zł.*, w B zaś 4·75 *zł.* Koszt dostawy wynosi 0·09 *zł.* od tonny i kilometra. W jakiem miejscu drogi między A i B możnaby ów towar równie dobrze sprowadzać z A, jak z B?

401. Lis, ścigany przez charta, jest przed nim o 60 swoich skoków. Robi ich 3 w tym czasie, w którym chart robi 2 skoki, ale chart w 3-ch skokach przebiega tę drogę, co lis w 7-u. Ile skoków chart potrzebuje uczynić, aby dosięgnąć lisa?

402. A i B, oddaleni o 154 *km*, jadą naprzeciwko siebie; A przejeżdża 7 *km* w tym czasie, w którym B 4 *km*. Znaleźć odległość punktu ich spotkania się od miejsca, z którego wyjechał A.

403. Z A o 9-ej godzinie rano wyjeżdża pociąg ku B, jadący 20 *km* na godzinę; o 5-ej godz. po południu wyjeżdża pociąg z B ku A i jedzie 30 *km* na godzinę. Od A do B jest 350 *km*. Gdzie się te pociągi spotkają?

404. A, jadąc pocztą z prędkością 10 *km* na godzinę, przejeżdżał w południe przez pewną stacyą. O 2-ej po południu z tejże stacyi wyjechał B pocztowemi końmi, goniąc A, i jedzie po 40 *km* w ciągu 3-ch godzin. W jakiej odległości od tej stacyi dogoni on A?

405. Ktoś, idąc z A do B, przechodzi a *km* na godzinę, a wracając z B do A b *km* na godzinę. Szedł tam i napowrót c godzin. Jaka jest odległość od A do B?

406. Wioślarz utrzymuje, że, taksamo robiąc wiosłami, 3 razy wolniej płynie w górę pewnej rzeki, niż w dół, a na stawie przepływa kilometr w 6-u minutach. Jak szybki jest bieg wody w tej rzece?

407. Pociąg A, jadący z prędkością v, ruszył później, niż pociąg B, jadący z prędkością v_1, o tyle, iżby pociągi te jednocześnie przybyły do oznaczonego miejsca. Pociąg jednak B, po przebyciu $\frac{3}{4}$ zamierzonej drogi, zwolnił swój bieg, jadąc dalej z 2 razy mniejszą prędkością, wskutek czego pociągi te spotkały się z sobą o a *km* bliżej. Znaleźć długość drogi, którą te pociągi miały przebyć.

408. Na torze wyścigowym jeźdźcy A i B jechali 6 minut. A jechał wciąż z tą samą prędkością, B zaś w 6-ej minucie przejechał o 60 stóp więcej, niż w każdej z poprzednich. W końcu 4-ej minuty A wyprzedzał B o $\frac{1}{40}$ długości toru; jednak B stanął pierwszy u mety, pozostawiając A za sobą o 6 stóp. Jaka była długość toru wyścigowego?

409. Trzy ciała poruszają się po linii prostej w tym samym kierunku z prędkościami odpowiednio v_1, v_2 i v_3 na minutę. W pewnym momencie są one poza punktem O w odległościach od tego punktu odpowiednio d_1, d_2 i d_3, przy $d_1 < d_2 < d_3$. Po ilu minutach odległość ciała pierwszego od O wyniesie $\frac{3}{5}$ spółczesnej odległości dwu pozostałych ciał od siebie?

410. Na okręgu koła znajdują się dwa punkty A i B, a mniejszy łuk między niemi ma 2 *m*. W pewnym momencie przechodzi przez A ciało w kierunku ku B, poruszające się po okręgu koła z prędkością v_1 *m* na sekundę. O 2 sekundy α) wcześniej, β) później przechodzi przez punkt B w tym samym kierunku ciało, poruszające się po tymże okręgu koła z prędkością v_2 *m* na sekundę. W ile sekund po przejściu przez punkt A pierwsze ciało spotka się z drugiem?

411. Średnica dzieli dany kąt wpisany w koło w stosunku 3:7, a odpowiedni łuk na dwie części, których różnica stanowi $\frac{1}{24}$ okręgu koła. Ile stopni ma dany kąt?

412. Trójkąt o bokach a, b i c jest opisany na kole. Znaleźć odcinki boku a między punktem jego styczności do koła, a punktami końcowemi tego boku?

413. Przedłużenia nierównoległych boków b i d trapezu, którego podstawy są a i c, z podstawą c tworzą trójkąt. Jakie są pozostałe boki tego trójkąta?

414. W trójkącie, którego boki są a, b i c, poprowadzona jest równoległa do c taka, iż odcinek jej między bokami a i b jest równy odcinkowi boku a, zawartemu między punktami przecięcia się z nim tej prostej i boku c. Jak wielki jest ów odcinek?

415. Dane są trzy odcinki linii prostej a, b i c, z których $a > b$. Jaka jest wysokość trójkąta, mającego podstawę a, w którym na równoległej do podstawy, oddalonej od niej o c, pozostałe boki trójkąta oddzielają odcinek równy b?

416. W trójkącie, którego podstawą jest a, jeden zaś z pozostałych boków b, odcinek prostej, równoległej do podstawy, ograniczony bokami pozostałemi, jest l. Znaleźć odcinki boku b: α) między a i l; β) między l i wierzchołkiem trójkąta. Zestawić z sobą wyrażenia tych dwu odcinków w przypadkach: $l < a$, $l = a$ i $l > a$.

417. Jaki jest bok kwadratu, równoważnego z prostokątem, którego podstawa jest o $2a$ większa, wysokość zaś o a mniejsza od boku owego kwadratu?

418. Dane jest koło o promieniu r i punkt M na płaszczyźnie tego koła, leżący wewnątrz koła, lub zewnątrz niego, oddalony od jego środka o a. Z punktu M poprowadzona jest sieczna, a jej odcinek między M a bliższym na niej punktem koła jest b. Znaleźć długość odcinka tej siecznej, będącego cięciwą koła.

419. Boki prostokąta są 25·73 *m* i 12·81 *m*. Większy jest podzielony na dwa odcinki tak, iż różnica kwadratów, wystawionych na tych odcinkach, jest równoważna z danym prostokątem. Jakie są te odcinki?

420. Mając trójkąt różnoboczny ABC, poprowadźmy dwusieczną kąta C i dwusieczną kąta doń przyległego. Te dwusieczne przecinają podstawę AB $= c$ w punktach odpowiednio D i E. Pozostałe boki trójkąta są BC $= a$ i AC $= b$. Znaleźć wielkość odcinka DE.

421. Na linii prostej następują po sobie punkty A, B, C i D i jest AB $= a$, BC $= b$ i CD $= c$. Znaleźć między punktami B i C taki punkt X, iżby AX . BX = XC . XD.

422. Dwa koła na płaszczyźnie, przecinające się z sobą, mają promienie R i r, a odległość środków tych kół jest d. Oznaczyć: α) punkt przecięcia się z sobą dwu spólnych stycznych do tych kół; β) odległość spólnej cięciwy od środka koła większego.

423. Mając dany prostopadłościan, którego krawędzi są a, b i c, znaleźć krawędź sześcianu takiego, iżby stosunek powierzchni tych dwu brył był równy stosunkowi ich objętości.

424. Mamy stożek kołowy prosty, którego wysokość jest h, tworząca zaś t. Na tworzącej tak oznaczyć punkt przecięcia się jej z tworzącą walca kołowego prostego, którego oś jest wysokością stożka, iżby powierzchnie boczne stożka i walca były sobie równe.

425. Znaleźć liczbę taką, iż, dodawszy do niej 10 i wziąwszy połowę tej sumy, a do tak otrzymanej liczby dodawszy $\frac{2}{3}$ tejże liczby powiększonej o 20, a prócz tego $\frac{5}{6}$ tejże liczby zmniejszonej o 34, otrzymamy liczbę, która jest dwa razy większa od nadmiaru liczby szukanej ponad 5.

426. Znaleźć liczbę taką, iżby $\frac{1}{3}$ tej liczby, powiększona o 75, oraz $\frac{5}{12}$ tej liczby, zmniejszone o 35, dały sumę równą $\frac{3}{4}$ tej liczby, powiększonym o 49.

427. Robotnik pracował w lecie przez dni 13; za szkody, które poczynił, potrącono mu 21 *zł.* z należnej za pracę jego zapłaty. Tenże sam robotnik za 18 dni pracy w zimie, zarabiając o $\frac{1}{2}$ *zł.* mniej za dzień pracy, niż w lecie, i za gorliwość pobrawszy naddatku 10 *zł.*, otrzymał tę samę kwotę, co za pracę w lecie. Po ile otrzymywał za dzień pracy w lecie?

428. Kolej żelazna bierze 0·10 *zł.* za przewóz pewnego towaru od tonny i kilometra, a prócz tego należy się opłata wagonowa 3·75 *zł.* od 2 tonn. O jaką odległość można przewieźć 50 tonn tego towaru za 92 *zł.*

(Art. 192). **429**. Dwa prostokąty, z których jeden ma podstawę a, drugi zaś b, mają jednakowy obwód i są z sobą równoważne. Jakie są wysokości tych prostokątów? Rozważyć odpowiedź w przypadku $b=a$.

430. Mając trójkąt prostokątny, znaleźć na przeciwprostokątnej c taki punkt, iżby suma prostopadłych, spuszczonych z owego punktu na przyprostokątne a i b, była równa liczbie danej k. Rozważyć odpowiedź w przypadku, kiedy dany trójkąt jest równoramienny.

(Art. 193). **431**. Nadać liczbom v_1, v_2, d i h układy wartości, odpowiadające różnym przypadkom, rozważanym w art. 193-im.

(Art. 195 i 196). **432**. Ułożyć zadania 375-e, 378-e, 380-e, 382-e, 385-e, 396-e, 400-e, 401-e, 403-e, 411-e, 419-e, 424-e, 429-e i 430-e w równania o wielu niewiadomych.

433. Suma dwu liczb jest s, różnica ich r; jakie są te liczby? Wysłowić wypadki.

434. Stosunek dwu liczb jest q, a ich α) suma, β) różnica jest p. Jakie są te liczby?

435. Liczba składa się z trzech cyfr, których suma jest 13, a cyfra jedności jest 3 razy większa, niż cyfra setek; dodawszy do tej liczby 396, otrzymamy odwrotnie napisaną liczbę szukaną. Jaka to jest liczba?

436. Suma cyfr roku, w którym Guttenberg druk wynalazł, jest 14; cyfra jedności jest dwa razy większa od cyfry dziesiątków; dodając do cyfry tysięcy cyfrę dziesiątków, otrzymalibyśmy cyfrę setek; odejmując nakoniec cyfrę jedności od sumy pozostałych cyfr, otrzymalibyśmy 2. W którym roku Guttenberg druk wynalazł?

437. Mając alfabet łaciński, nazwijmy jego litery kolejno 1, 2, 3 i t. d. Z pięciu liter składa się wyraz taki, iż liczby, odpowiadające jego literom, posiadają następujące własności: suma wszystkich jest równa 21; suma liczb na miejscach parzystych jest większa od sumy liczb na miejscach nieparzystych o 5; suma trzeciej i czwartej jest równa drugiej; suma czwartej i piątej jest równa trzeciej; nakoniec różnica czwartej i pierwszej jest równa podwojonej piątej. Jaki to jest wyraz?

438. Znaleźć dwie liczby, których suma, różnica i iloczyn są proporcyonalne względem s, d i p.

439. Mamy cztery wyrażenia: $a+b$, $ap+bq$, ap^2+bq^2 i ap^3+bq^3 takie, iż trzecie lub czwarte powstaje z dwu wyrażeń bezpośrednio poprzedzających wskutek pomnożenia pierwszego z nich przez x, a drugiego przez y, i dodania tych dwu iloczynów. Jakie są te liczby x i y?

440. Mamy sześć wyrażeń: $a+b+c$, $ap+bq+cr$, $ap^2+bq^2+cr^2$, $ap^3+bq^3+cr^3$, $ap^4+bq^4+cr^4$ i $ap^5+bq^5+cr^5$. Mnożąc trzy kolejne z nich, pierwsze przez x, drugie przez y, a trzecie przez z, i dodając iloczyny, otrzymujemy następne z tych wyrażeń. Jakie są te liczby x, y i z?

441. 17 kosiarzy i 10 zgrabiających pokosy zarobili pewnego dnia razem 10 *zł.* 50 ct. Drugiego dnia było 10 kosiarzy i 17 zgrabiających pokosy i otrzymali razem 8 *zł.* 40 ct. Ile płacono dziennie kosiarzowi a ile zgrabiającemu?

442. Dwie osoby mają solidarnie zapłacić 870 *zł.*, a żadna nie ma tyle pieniędzy, by całą tę kwotę zapłacić. Pierwsza mówi do drugiej: jeżeli mi dodasz $\frac{2}{3}$ twoich pieniędzy, zapłacę całą kwotę. Druga odpowiada: ja zapłacę całą kwotę, ale mi dodaj $\frac{3}{4}$ twoich pieniędzy. Ile pieniędzy ma każda z tych osób?

443. Ojciec życzy sobie w testamencie, aby jego trzej synowie podzielili majątek między siebie w następujący sposób: najstarszy ma otrzymać o 3000 *zł*. mniej, niż połowa całego majątku; średni o 2400 *zł*. mniej, niż trzecia część majątku; najmłodszy zaś o 1800 *zł*. mniej, niż czwarta część majątku. Jaki jest całkowity majątek i ile każdy z synów ma otrzymać?

444. Testament wuja orzeka, że każdy siostrzeniec otrzyma 12000 *zł*., każda zaś siostrzenica 9000 *zł*. W taki sposób została rozdzielona cała suma 120000 *zł*. Jeżeliby przeciwnie każda siostrzenica otrzymała 12000 *zł*., każdy zaś siostrzeniec 9000 *zł*., to pozostałoby jeszcze 9000 *zł*. Ilu było siostrzeńców, a ile siostrzenic?

445. Woźnica zgodził się przewieźć wazony porcelanowe różnej wielkości, umówiwszy się, iż za każdy wazon, który stłucze, zapłaci tyle, ile byłby dostał za dostawienie go w całości. Dano mu naprzód 2 małe wazony, 4 średnie i 9 wielkich; stłukł średnie a inne oddał w dobrym stanie, za co otrzymał 28 *zł*. Dano mu następnie 7 małych, 3 średnie i 5 wielkich wazonów; tym razem oddaje małe wazony i średnie w dobrym stanie, ale tłucze wielkie i otrzymuje tylko 3 *zł*. Nakoniec dano mu 9 małych, 10 średnich i 11 wielkich wazonów; dostawił wszystkie w całości i otrzymał 92 *zł*. Za ile się zgodził dostawić jeden wazon każdej wielkości?

446. Trzy gromady robotników sypią pośpiesznie oddzielnie wały. Prócz należnej im zapłaty, mają dostać za pośpiech w robocie jako naddatek 901 *zł*., i mianowicie: wszyscy robotnicy, należący do tej gromady, która najpierw swój wał usypie, otrzymają po 1 *zł*., a pozostała kwota zostanie równo rozdzielona między robotników dwu innych gromad. Gdyby pierwsza gromada naprzód ukończyła swą robotę, to każdy z robotników, nie należących do tej gromady, otrzymałby po $\frac{1}{2}$ *zł*. Gdyby naprzód ukończyła robotę druga gromada, to na każdego z pozostałych robotników wypadałoby po $\frac{1}{3}$ *zł*. Gdyby zaś trzecia gromada wyprzedziła inne, to robotnicy owych dwu innych gromad dostaliby po $\frac{1}{4}$ *zł*. Ilu było robotników w każdej gromadzie?

447. Trzej gracze A, B i C położyli przed sobą pieniądze i umówili się, że po każdej partyi przegrywający zapłaci każdemu z pozostałych graczy tyle, ile przed tym graczem jest pieniędzy. Grali trzy partye i pierwszą przegrał A, drugą B, trzecią zaś C. Kiedy grę skończyli, okazało się, iż przed każdym jest 16 *zł*. Ile każdy wystawił pieniędzy, rozpoczynając grę?

448. 5040 hektarów lasów ma być rozdzielone między trzy gminy A, B i C według ilości mieszkańców, ale z uwzględnieniem tego, iż gmina A ma nadto wyjątkowe prawo do $\frac{1}{10}$ tego, co dostaną gminy B i C. Stosunek ilości mieszkańców gmin A i B jest 7:1, zaś gmin B i C jest 5:8. Ile lasu każda gmina dostanie?

449. Gdyby z trzech robotników A, B i C pracowali dwaj A i B, to wykończyliby robotę w a dni; gdyby pracowali A i C, ukończyliby ją w b dni; robotnicy zaś B i C ukończyliby ją w c dni. Obliczyć, ile dni potrzebowałby każdy z tych robotników, aby sam ukończył pracę, oraz, ile dni potrzebowaliby w tym celu pracować wszyscy razem.

450. Zbiornik o objętości v w ciągu czasu t napełnia się przez n kurków jednakowych, oraz wskutek deszczu, jednostajnie padającego na obszarze s otworu zbiornika. Inny zbiornik o objętości v' w ciągu czasu t' napełnia się przez n' kurków takich samych, jak w pierwszym zbiorniku, oraz wskutek takiegoż deszczu, padającego na obszarze s' otworu tego zbiornika. Oznaczyć, ile w ciągu jednostki czasu wlewa się wody przez każdy kurek i ile w ciągu jednostki czasu spada deszczu na każdą jednostkę powierzchni.

451. Mamy dwojakie złoto, jedno próby 0·820, drugie 0·950. Utworzyć z nich 117 g złota próby 0·870.

452. Znając ciężary gatunkowe d_1 i d_2 dwu ciał i ciężar gatunkowy D ich mieszaniny, znaleźć, ile *kg* każdego ciała trzeba wziąć, aby utworzyć P *kg* owej mieszaniny.

453. Złotnik ma dwa stopy złota z miedzią. W jednym na a_1 *kg* złota przypada b_1 *kg* miedzi, w drugim zaś na a_2 *kg* złota b_2 *kg* miedzi. Ile *kg* trzeba wziąć z każdego stopu, aby otrzymać stop zawierający α *kg* złota i β *kg* miedzi?

454. Kapitalista posiada obligi bankowe 5%-owe, listy zastawne 4%-owe i losy państwowe 3%-owe; od tych papierów ma dochodu rocznie 6800 *zł*. Gdyby tak z obligów bankowych jak i z losów państwowych pobierał 4%, dochód jego byłby mniejszy o 400 *zł*. Z obligów bankowych ma rocznie o 2400 *zł*. więcej dochodu, niż z losów państwowych. Na jaką sumę ma obligów bankowych, na jaką listów zastawnych i na jaką losów państwowych?

455. Ktoś ma trojakie papiery procentowe, które nazwijmy A, B i C. Papierów B jest na sumę o 1000 *zł*. większą, niż papierów A, a papierów C na sumę o 1500 *zł*. większą, niż papierów A. Lecz papiery B, przynosząc o 1% więcej, niż papiery A, dają odsetek o 80 *zł*. więcej; papiery zaś C, przynosząc o 2% więcej, niż A, dają odsetek o 150 *zł*. więcej. Jakie są kapitały i stopy procentu?

456. Kapitał wraz z odsetkami za 8 miesięcy przedstawia kwotę 5952 *zł*. Tenże kapitał wraz z odsetkami za 17 miesięcy przedstawia kwotę 6168 *zł*. Oznaczyć kapitał i stopę procentu.

457. Dwaj chłopcy A i B stanęli do wyścigu pieszego na torze, mającym 1475 *m* długości. Pierwszym razem B zaczynał bieg, stanąwszy o 25 *m* przed A; jednak A dobiegł do mety o 42 sekundy wcześniej, niż B. Drugim razem B ruszył o 1 minutę 15 sekund wcześniej niż A, i dobiegł do mety, wyprzedziwszy A o 25 *m*. Przyjmując, iż w obu razach biegli jednakowo prędko, znaleźć, ile czasu potrzebuje każdy z nich na przebieżenie całego toru.

458. Dwaj podróżni A i B z pewnego miasta udali się do innego miasta, odległego o 1029 *km*, A pieszo, B końmi. B jest w drodze o 28 dni krócej, niż A; na to, aby A przeszedł 126 *km* i aby następnie B przejechał 392 *km*, potrzeba 14 dni. Ile *km* dziennie szedł A, a ile B jechał?

459. Pociąg kolei żelaznej w godzinę po wyruszeniu ze stacyi doznał uszkodzenia, wskutek czego zatrzymał się przez godzinę, a dalej jechał z prędkością, która stanowiła $\frac{3}{5}$ prędkości poprzedniej. Spóźnił się na następną stacyą o 3 godziny. Gdyby owo uszkodzenie nastąpiło o 50 *km* dalej, to spóźniłby się tylko o 1 g. 40 min. Oznaczyć odległość stacyj i prędkość początkową.

460. Dwa ciała biegną po kole z punktów, między któremi krótszy łuk ma 150 *cm*. Gdy biegną po mniejszym łuku, to spotykają się po 10-u sekundach; gdy zaś biegną po większym łuku, to spotykają się po 14-u sekundach. Pierwsze ciało obiegłoby całe koło w tym czasie, w którym drugie przebiega 90 *cm*. Znaleźć długość okręgu koła i prędkość ruchu tych dwu ciał.

461. Obwód jednego z dwu trójkątów podobnych stanowi $1\frac{1}{2}$ obwodu drugiego, a boki jego są odpowiednio o 3 *cm*, 4 *cm* i 5 *cm* dłuższe od boków drugiego. Jakie są boki pierwszego trójkąta?

462. W kole dwie cięciwy o długości 26 *cm* i 30 *cm* przecinają się tak, iż suma mniejszych ich odcinków jest 14 *cm*. Jakie są te mniejsze ich odcinki?

463. Z punktu zewnątrz koła są poprowadzone dwie sieczne; stosunek ich zewnętrznych odcinków jest $1:1\frac{2}{3}$; odpowiednie zaś ich odcinki będące cięciwami są 24 *cm* i 8 *cm*. Jakie są sumy obu odcinków każdej z owych siecznych?

464. Jedna przekątna trapezu dzieli drugą w stosunku $4:5$, a odcinek, łączący środki boków nierównoległych, ma 10 *cm*. Jakie są podstawy tego trapezu?

465. Dany jest trójkąt o bokach a, b i c. Z każdego z wierzchołków, jako środka, zakreślone są koła tak, iż każde z tych kół jest styczne do dwu kół pozostałych. Znaleźć promienie tych kół.

466. Różnica promieni dwu kół spółśrodkowych jest 5 *cm*; cięciwa zaś większego koła, styczna do koła mniejszego, ma długości 25 *cm*. Jakie są promienie tych kół?

467. Jeżeli przedłużę jeden bok prostokąta o 7 *cm*, drugi zaś skrócę o 3 *cm*, to jego pole powiększy się o 49 cm^2. Jeżeli, przeciwnie, pierwszy skrócę o 11 *cm*, a drugi przedłużę o 2 *cm*, to pole zmniejszy się o 189 cm^2. Jakie są te boki?

468. Mamy czworokąt, opisany na kole; do jednego z boków dodając kolejno każdy z pozostałych, otrzymujemy odpowiednio 34 *cm*, 37 *cm* i 33 *cm*. Jakie są boki tego czworokąta?

469. Dwa trójkąty prostokątne nakładamy na siebie tak, iż krótsza przyprostokątna jednego przypada na dłuższej drugiego i nawzajem, a te przyprostokątne w jednym trójkącie są a i b, w drugim zaś b' i a'. Z punktu przecięcia się przeciwprostokątnych z sobą spuszczamy prostopadłe na przyprostokątne. Znaleźć długości tych prostopadłych.

470. Znaleźć dwie liczby takie, iżby trzecia część pierwszej liczby była o 5 mniejsza od połowy liczby drugiej, potrojona zaś połowa drugiej liczby była o 5 większa od liczby pierwszej.

ODPOWIEDZI.

5. -4^0. **6.** α) 5, $\frac{16}{5}$; β) $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{5}$; γ) 3, $-\frac{16}{3}$; δ) $-\frac{5}{16}$, $\frac{1}{3}$; ε) -3, $\frac{16}{3}$; ζ) $\frac{3}{16}$, $-\frac{1}{3}$; η) -5, $-\frac{16}{5}$; ϑ) $-\frac{5}{16}$, $-\frac{1}{5}$. **7.** α) $\frac{30}{31}$; β) $\frac{70}{73}$; γ) 36; δ) $1\frac{41}{109}$. **8.** α) $\frac{213}{560}$; β) $-18\frac{3}{4}$; γ) $6\frac{79}{162}$. **12.** α) -315; β) 15; γ) 30. **13.** 502. **14.** 2·95. **15.** 1·234. **16.** α) 1; β) -83984; γ) 1000. **17.** α) -16; β) 135. **18.** α) 12; β) $-0{\cdot}000\,279\,997$. **19.** α) $-74{\cdot}6$; β) $-59{\cdot}2625$. **20.** α) 648; β) 681. **41.** $a+c$. **42.** $22a-12b$. **43.** $27a-10b+17c$. **44.** $-10a^4b+13a^2b^2c+20ab$. **45.** $8a^4b-3a^2b^2c$. **46.** 0. **47.** $\frac{1}{2}a^2b-2\frac{1}{3}ab^2+1\frac{1}{15}ab$. **48.** $a-b+c+d-e-f$. **49.** $a-b+c-d+e+3f$. **50.** $a^5b^5+10a^5b^2c^3+10a^3b^2c^5$. **51.** $a-b$. **52.** $a+b-c+d$. **53.** $a-b$. **54.** α) $-7x-4y+16z$; β) $-28x+8y+5z$; γ) $-17x+6y+6z$. **55.** $-4a+6e$. **56.** $8a^5$. **57.** $9a^8b^5-7a^7b^6$. **66.** $72a^{22}b^7c^{18}d^7e^8f^4$. **67.** $4a^{5m+6}b^{7m+5}c^{m+4n+12}d^{7r+10}$. **70.** α) $108b^{14}e^{12}f^{14}-36b^{19}e^{11}f^{10}-30b^{22}e^7f^{11}-8b^7e^7f^6$; β) $300b^4p^{16}q^{20}+100b^{10}p^{12}q^{18}-$ $-50b^{16}p^{12}q^{12}+50b^2p^{10}q^8$. **79.** $3a^4-a^3b-8a^2b^2+29ab^3-21b^4$. **80.** $32a^5b^{10}-243a^{15}c^5$. **81.** $4a^6-5a^5b-4a^4b^2-8a^3b^3-16a^2b^4+9ab^5-4b^6$. **82.** $32a^5b^{10}+5a^2b^4c^9-\frac{9}{8}c^{15}$. **83.** $24a^{4n}+20\frac{5}{8}a^{2n}c^{2n}+6c^{4n}$. **84.** $0{\cdot}15a^6x^{5n+17}+6{\cdot}47a^4x^{4n+12}+75x^{2n+2}$. **85.** $x^{11}y^{2n+2}+2x^9y^{3n+9}+32xy^{7n+37}$. **86.** $\frac{1}{8}x^{8n+6}-x^{6n+4}+4x^{5n+3}-8x^{4n+2}+8x^{3n+1}-8x^{2n}$. **87.** $x^{8p+16}+x^{4p+8}y^{8q+12}+y^{16q+24}$. **88 i 89.** Z wyrazów, zawierających jednakowe potęgi x, wyłączyć je poza nawias. **90.** $a^6+b^6-c^6+6abc^4+2a^3b^3-9a^2b^2c^2$. **91.** $a^4z^4-a^{4n}$. **92.** $x^8-0{\cdot}0625y^{24}$. **93.** $x^9+2x^8y-2x^7y^2-6x^6y^3-4x^5y^4-16y^9$. **94.** (Pierwszy czynnik przez trzeci, drugi przez czwarty.) $59049a^{10}-0{\cdot}000\,000\,1024b^{10}$. **95.** $2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)-a^4b^4-a^4c^4-b^4c^4$. **96.** $(4a^2+4ab+b^2)x^5-(5a^2+b^3)a^2x^3+a^6x$. **97.** 0. **98.** $a^{24p+36}+a^{16p+27}b^{3q+12}+a^{6p+9}b^{9q+36}+b^{12q+48}$. **100.** $-ab(12a^2-25ab+12b^2)$. **101.** $512a^{16}b^8c^8d^{16}-2c^{16}d^{32}$. **102.** $96a^5b^4c^2d-96a^4b^5cd^2-216a^2bc^5d^4+216ab^2c^4d^5$. **104.** α) $\frac{bc^{m+1}}{4a^2}$. **108.** $7a+2b-3c$. **109.** $\frac{15}{2}a^4-\frac{16}{3}b^2c-\frac{32}{3}b^2d$. **110.** $6a^2-3b^3$. **111.** $a^{3m}+a^{2m}b^{2p}+a^mb^{4p}+b^{6p}$. **112.** $a^{12}-a^{10}+a^8-a^6+a^4-a^2+1$. **113.** $3x-6y$. **114.** $-x+y+z$. **115.** $5x^2-4x$. **116.** $3y^2-9y-8$. **117.** $0{\cdot}7a^3+0{\cdot}5a^2bx^2$. **118.** $x^7y^2-4x^3y^{20}+8xy^{29}$. **119.** $4a^{2n}+\frac{3}{2}a^nc^n+2c^{2n}$. **120.** a^2-b^2. **121.** $5z^2+4z+3$. **122.** $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$. **123.** $4a^2b^4-2ab^2c^3+1\frac{1}{2}c^6$. **124.** $x^{2p+4}-x^{p+2}y^{2q+3}+y^{4q+6}$. **125.** x^6+x^3+1. **126.** $x+1$. **127.** x^3+1. **128.** $a^6-a^4b^2+a^2b^4-b^6+\frac{2b^8}{a^2+b^2}$. **129.** $5x^2-4x+\frac{3x^2}{4x^2-7x-8}$. **130.** $x^5+(a-b)x^4+(a^2-ab+b^2)x^3+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)x^2+$ $+(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)x+\frac{2b^2x^4}{a+b}$. **131.** $8a^3+4a^2b+2ab^2+b^3+\frac{b^4}{2a-b}$. **133.** $4a^3-8a^2+16a-32+\frac{64a^4-16a^3+32a^2-64a+128}{a^5+2a^4+4}$. **141.** x^2-3x-4. **142.** $a(x+2a)$. **143.** $ax-by$. **144.** $x-b$. **145.** x^2-3x+2. **146.** $a-4$. **147.** $3a-2$. **148.** $a(b+2a)$. **149.** $2a^2b^2(3c-2ab^2)$. **150.** $a+b$. **151.** Pierwsze względem siebie $[(x+3):24]$. **152.** Pierwsze względem siebie $[(17x+28):699]$. **153.** Pierwsze względem siebie $[(10x+7):2537]$. **154.** $3ax^2-2a^2x+a^3$. **155.** x^2-2x+1. **156.** $x+4$. **157.** x^2-2x+1. **163.** $4a^4-16a^3+4a^2+64a-48$. **164.** α) $a^3+2a^2b+a^2+ab^2+2ab+b^2$, β) $18a^4-$ $-66a^3-93a^2+216a+240$, γ) $150a^4-70a^3+55a^2-35a-10$, δ) $x^4+6x^3+3x^2-26x-24$, ε) $x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1$. **167.** $4a^4b^2-\frac{27c^3(2a^2b-3c^3)}{4a^4b^2-6a^2bc^3+9c^6}$. **168.** $\frac{1}{a^2b^2c^2(4b^2+9c^2)}$. **169.** $\frac{2x}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}$. **170.** β) $2a-\frac{14}{3}+\frac{11}{9a+12}$; γ) $2+\frac{3}{5a+1}$; δ) x^2-12x+ $+80-\frac{348x^2+1048x-1120}{x^3-6x^2+11x-14}$. **171.** $\frac{1}{a^2}$. **172.** $\frac{27}{25}$. **173.** $\frac{345}{729}$. **174.** 0. **175.** 0. **176.** α) 0; β) ∞. **177.** $\frac{1}{1-x^2}$. **178.** α) $-\frac{1}{3}$; β) 0; γ) ∞. **179.** 0. **180.** $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$. **181.** $\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}$. **182.** $\frac{1}{2}x(x+1)$. **183.** x^2+y^2+ $+z^2-a^2-b^2$. **184.** 1. **185.** 1. **186.** $a+2b$. **187.** $\frac{1}{p^2q^2}$. **188.** $2(a+b+c)$. **189.** 4. **190.** $\frac{4(x^2-16)}{5(x^4+4x^3+9x^2+6x)}$. **191.** $\frac{3x}{4y}$. **192.** $\frac{x^4-x^4y+a^2x^2-a^2x^2y+a^4-a^4y}{a^3x}$. **193.** α) i β) $\frac{64xyzuvw}{(x+y)(y+z)(z+u)(u+v)(v+w)(w+x)}$. **194.** $\frac{ac^2e}{b(ade+ace-c^2d)}$. **195.** $\frac{c}{a+b}$. **196.** $1-\frac{1}{a}$. **197.** $\frac{c(2ab-ac-bc)}{ab^2-c(2ab-ac-bc)}$. **198.** b. **199.** xy. **200.** a. **201.** $\frac{1}{a^2}$. **202.** $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$. **203.** $\frac{(a+b)b^2}{a^2+b^2}$. **204.** 7. **205.** $\frac{(a-x)^2}{a^4x^4}$. **221.** $\frac{3}{5}$. **222.** $-\frac{11}{9}$. **223.** 8. **224.** -4. **225.** 100. **226.** 0. **227.** 6. **228.** 7. **229.** 0. **230.** 0. **231.** $\frac{39}{80}$. **232.** 2. **233.** 0. **234.** -5. **235.** $\frac{1}{2}$. **236.** -3. **237.** -1. **238.** -2. **239.** -1. **240.** 0. **241.** $-\frac{ab+cd}{ac+bd}$. **242.** $\frac{d+1-b^2}{2ab+ad-2b}$. **243.** $\frac{1}{4a(a+b)}$. **244.** $\frac{27}{23}$. **245.** 0. **246.** $\frac{355}{298}$. **247.** $1\frac{33}{35}$. **248.** 5. **249.** 9. **250.** 1. **251.** $\frac{1}{6}$. **252.** 8. **253.** 19. **254.** 17. **255.** 1·5. **256.** 6. **257.** 2. **258.** 11. **259.** $\frac{c(d-a)(b-c)}{a^2-b^2+bc}$. **260.** $\frac{8a}{25}$. **261.** $\frac{a^2(b-a)}{b(a+b)}$. **262.** $3a-2b$. **263.** $\frac{ab}{a+b}$. **264.** $\frac{4a^2(a^2+ab-b^2)}{3a^3-6a^2b+ab^2+6b^3}$. **265.** $\frac{a^2c+ab^2+bc^2-a-b-c}{ac+bc+ab-1}$. **266.** $\frac{ab}{c^2(b-a)}$. **267.** $-\frac{(a-b)^2}{a+b}$. **268.** $\frac{abc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$. **269.** $\frac{2c^2+ab}{a^2}-2$. **271.** $\frac{3abc}{ab+ac+bc}$. **272.** 7. **273.** 5. **274.** $\frac{11}{432}$. **275.** 7. **276.** $\frac{1}{3}$. **277.** 0. **278.** 5. **279.** 9. **280.** 7. **281.** $2\frac{4}{19}$. **282.** 8. **283.** 4. **284.** $\frac{7}{8}$. **285.** -5. **286.** 6. **287.** $\frac{1}{6}$. **288.** $a+b$. **289.** $\frac{abc}{a^2-ab+b^2}$. **290.** $\frac{np-mq}{n+p-m-q}$. **291.** $\frac{mp(a-b)+mn(b-c)+np(c-a)}{n(b-a)+p(c-b)+m(a-c)}$. **292.** $\frac{a^2}{n^2}$. **293.** $(a+2)n$. **294.** $a+c$. **295.** $-\frac{1}{5}$. **296.** $\frac{1}{2}a^2$. **297.** $\frac{n^2}{a}$. **302.** Zależy to od znaku sumy $a+b$. **307.** Por. zad. 300. **309.** $x>-3$. **310.** $x>-5\frac{23}{25}$. **311.** $x<-1$. **312.** $x>-5\frac{13}{19}$. **313.** $x<0$. **314.** $x>6$. **315.** Jeżeli a i c są jednakowego znaku, to przy $a>c$ jest $x>\frac{ab}{a-c}$, zaś przy $a<c$ jest $x<\frac{ab}{a-c}$; jeżeli a i c różnego znaku, to odwrotnie. **316.** $x=1$, $y=2$. **317.** $x=\frac{2}{3}$, $y=1$. **318.** $x=\frac{1}{2}$, $y=3$. **319.** $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$. **320.** $x=1{\cdot}25$, $y=0{\cdot}8$. **321.** $x=-1$, $y=8$. **322.** $x=\frac{1}{2}$, $y=2$. **323.** $x=1$, $y=1$. **324.** $x=2$, $y=1$. **325.** $x=4$, $y=5$. **326.** $x=7$, $y=9$. **327.** $x=26$, $y=27$. **328.** $x=3$, $y=5$. **329.** $x=2$, $y=3$. **330.** $x=\frac{b^2+ac}{a^2+b}$, $y=\frac{ab-c}{a^2+b}$. **331.** $x=\frac{ab}{a+b}$, $y=\frac{ab}{a-b}$. **332.** $x=\frac{a+1}{ab+1}$, $y=\frac{a(b+1)}{ab+1}$. **333.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **334.** $x=y=z=1$. **335.** $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$. **336.** $x=-1{\cdot}2$, $y=3{\cdot}4$, $z=-5{\cdot}6$. **337.** $x=y=z=315$. **338.** $x=3$, $y=1$, $z=2$. **339.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **340.** $x=6$, $y=3$, $z=15$. **341.** $x=1$, $y=2$, $z=-1$. **342.** $x=-(a+b+c)$, $y=ab+ac+bc$, $z=-abc$. **343.** $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$. **344.** $x=a^2-b^2$, $y=b^2-c^2$, $z=c^2-a^2$. **345.** $x=1$, $y=1$, $z=2$. **346.** $x=2$, $y=2$, $z=2$.

347. $x=\frac{b^2}{p^2}-q$, $y=a^2+b^2+q-\frac{b^2}{p^2}$, $z=-a^2$. **348.** α) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$; β) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$. **349.** $x=a+b+c$, $y=a+b-c$, $z=a-b+c$, $t=-a+b+c$. **350.** $x=2$, $y=2$, $z=3$, $t=1$. **351.** $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$, $v=5$. **352.** Dodawszy równania stronami odpowiedniemi, od równania otrzymanego odejmiemy każde z danych po pomnożeniu jego stron przez 3; $x=\frac{a+c+d-2b}{3}$ i t. d. **353.** $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{7}{3}$, $z=\frac{4}{9}$. **354.** $x=\frac{7}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. **355.** α) Nie możemy znieść mianowników, gdyż $2xy$ staje się zerem dla wartości $x=y=0$, będących pierwiastkami równań otrzymanych. Przyjmując $\frac{1}{x}=\xi$, $\frac{1}{y}=\eta$, znajdziemy $x=2$, $y=3$. β) $x=9$, $y=8$. **356.** $x=5$, $y=7$. **357.** $x=\frac{2}{a-b+c}$ i t. d. **358.** $x=2$, $y=1$, $z=3$. **359.** $x=2$, $y=3$, $z=\frac{1}{4}$. **360.** Szukając pierwiastków, różnych od zera, znajdziemy $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{3}$. **361.** $x=c+\frac{bl}{bg+ah+ek}$ i t. d. **362.** $x=0$, $y=0$. **363.** $x:y=5:4$. **364.** $x:y:z=1:(-2):1$. **365.** $x:y:z=4:(-3):1$. **366.** $x:y:z=2:0:(-1)$. **367.** $x:y:z:v=1:0:(-2):1$. **368.** $x:y:z=2:(-1):(-1)$. **369.** Jedno równanie zbyteczne; $x=\frac{a+3}{2}$, $y=\frac{3(a-1)}{2}$. **370.** Pod warunkiem, iż $b=\frac{3-a}{2}$; $x=\frac{a+3}{2}$, $y=\frac{3(a-1)}{2}$. **371.** Pod warunkiem, iż $\begin{cases}a+2b=3,\\3a+b=-1;\end{cases}$ $x=1$, $y=-3$. **372.** 10. **373.** 4, 6. **374.** $\frac{l_1m-lm_1}{m_1-l_1}$. **375.** 18, 81. **376.** 857142. **377.** $\frac{bc-ad}{a+d-b-c}$. **378.** 11, 39, 50. **379.** α) 3 drachmy; β) 15 drachm. **380.** 12, 18. **381.** Po 20-u. **382.** 100 m^3 i 160 m^3. **383.** 224 *kg*. **384.** 17. **385.** $5\frac{95}{296}$ funta. **386.** $\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$. **387.** $\frac{vv_1}{v+v_2}$. **388.** $25a$ zł. **389.** α) Po 7-u latach; β) przed 12-u laty. **390.** $\frac{100}{p.n}$. **391.** 4800 zł. **392.** Po latach $12\frac{1}{2}$. **393.** Na 16400 zł. **394.** $2\frac{1}{2}$ mies. **395.** 40000 zł. **396.** 10800 zł. **397.** $53\frac{1}{3}$ *kg*. **398.** O $5\frac{5}{11}$ minuty na drugą. **399.** O 1 min. i $\frac{789}{1427}$ sek. na pierwszą. **400.** O $96\frac{5}{18}$ *km* od A. **401.** 72. **402.** 98 *km*. **403.** O 236 *km* od A. **404.** O 80 *km*. **405.** $\frac{abc}{a+b}$. **406.** 5 *km* na godzinę. **407.** $6a-\frac{3av_1}{v}$. **408.** 15840 stóp. **409.** Po $\frac{5d_1-3d_3+3d_2}{3v_3-3v_2-5v_1}$ min., lub po $\frac{5d_1+3d_3-3d_2}{-3v_3+3v_2-5v_1}$ min. **410.** α) $\frac{2(1+v_2)}{v_1-v_2}$; β) $\frac{2(1-v_2)}{v_1-v_2}$. **411.** $18^0 45'$. **412.** $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$. **413.** $\frac{cd}{a-c}$, $\frac{bc}{a-c}$. **414.** $\frac{ac}{a+c}$. **415.** $\frac{ac}{a-b}$. **416.** α) $b-\frac{bl}{a}$, β) $\frac{bl}{a}$. **417.** $2a$. **418.** Gdy punkt M wewnątrz koła, to $\frac{r^2+b^2-a^2}{b}$; gdy zaś zewnątrz, to $\frac{a^2-r^2-b^2}{b}$. **419.** Jeden 19·27 *m*, drugi 6·46 *m*. **420.** $\frac{2abc}{a^2-b^2}$ przy $a>b$, zaś $\frac{2abc}{b^2-a^2}$ przy $a<b$. **421.** Jest od A oddalony o $\frac{(a+b)(a+b+c)}{a+2b+c}$. **422.** α) Odległość tego punktu od środka koła mniejszego jest $\frac{dr}{R-r}$; β) $\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$. **423.** $\frac{3abc}{ab+ac+bc}$. **424.** Odległość tego punktu od wierzchołka stożka jest $\frac{t^2}{2h}$. **425.** Każda liczba. **426.** Takiej liczby niema. **427.** Zadanie niemożliwe. **428.** Zadanie niemożliwe. **429.** Za niewiadomą wziąć połowę obwodu. **430.** W odległości $\frac{c(k-a)}{b-a}$ od wierzchołka, w którym przecinają się boki c i a. Gdy $b=a$, a $k\gtrless a$, zadanie niemożliwe; gdy $k=b=a$, to każdy punkt prostej c. **433.** Odjemna jest równa i t. d. **434.** α) $\frac{pq}{q+1}$, $\frac{p}{q+1}$; β) $\frac{pq}{q-1}$, $\frac{p}{q-1}$. **435.** 256. **436.** 1436. **437.** Bieda. **438.** $\frac{2p}{s-d}$, $\frac{2p}{s+d}$.

439. $x=-pq$, $y=p+q$. **440.** $x=pqr$, $y=-pq-pr-qr$, $z=p+q+r$. **441.** 50 ct., 20 ct. **442.** Pierwsza 580 zł., druga 435 zł. **443.** 86400 zł.; 40200 zł., 26400 zł., 19800 zł. **444.** 7 siostrzeńców, 4 siostrzenice. **445.** 2 zł. za mały, 3 zł. za średni, 4 zł. za wielki. **446.** 265, 583, 689. **447.** A wystawił 26 zł., B 14 zł., C 8 zł. **448.** $(x-\frac{1}{20}y-\frac{1}{20}z):\frac{21}{20}y:\frac{21}{20}z=35:5:8$; A dostanie 3740 *ha*, B 500 *ha*, C 800 *ha*. **449.** A $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$, B $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, C $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$; wszyscy razem $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$. **450.** $\frac{s't'v-stv'}{tt'(ns'-n's)}$, $\frac{ntv'-n't'v}{tt'(ns'-n's)}$. **451.** Z pierwszego złota 72 *g*, z drugiego zaś 45 *g*. **452.** $\frac{P(d_2-D)}{d_2-d_1}$ *kg*, $\frac{P(D-d_1)}{d_2-d_1}$ *kg*. **453.** $\frac{(a_1+b_1)(\alpha b_2-a_2\beta)}{a_1b_2-a_2b_1}$ *kg*, $\frac{(a_2+b_2)(a_1\beta-b_1\alpha)}{a_1b_2-a_2b_1}$ *kg*. **454.** Na 60000 zł., 80000 zł. i 20000 zł. **455.** A 3000 zł. po 4%. **456.** 5760 zł., 5%. **457.** A 15 min. 44 sek., B 16 min. 43 sek. **458.** 21 *km*, 49 *km*. **459.** Odległość 100 *km*, prędkość 25 *km* na godzinę. **460.** 360 *cm*; 12 *cm* i 3 *cm* na sekundę. **461.** 9 *cm*, 12 *cm* i 15 *cm*. **462.** 8 *cm* i 6 *cm*. **463.** 30 *cm* i 18 *cm*. **464.** $8\frac{8}{9}$ *cm* i $11\frac{1}{9}$ *cm*. **465.** $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$. **466.** $18\frac{1}{8}$ *cm*, $13\frac{1}{8}$ *cm*. **467.** 21 *cm*, 19 *cm*. **468.** 15 *cm*, 19 *cm*, 22 *cm*, 18 *cm*. **469.** $\frac{a(a'b'-bb')}{aa'-bb'}$, $\frac{b(a'b'-aa')}{bb'-aa'}$. **470.** Takich liczb niema.

CZĘŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

PODNOSZENIE DO POTĘGI.

PODNOSZENIE DO POTĘGI WOGÓLE.

1. W części I (art. 47—49) wprowadziliśmy już działanie: podnoszenie do potęgi i określiliśmy, jakiego znaku jest potęga liczby dodatnej i liczby ujemnej. Widzieliśmy nadto, że (art. 68)

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

i że w przypadku $m > n$ (art. 80)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \tag{2}$$

Wprowadziliśmy tu na oznaczenie wzorów liczby ujęte w nawiasy (niekiedy w tymże celu używa się liter w nawiasach), co nam ułatwi powoływanie się później na te wzory.

2. Przy m całkowitem i dodatnem podnieśmy do potęgi m-tej liczbę, którą przedstawia iloczyn dwu lub więcej czynników, np. iloczyn $abcde$.

$$(abcde)^m = a.b.c.d.e\ .\ a.b.c.d.e\ .\ a.b.c.d.e\ldots \quad (m \text{ razy}),$$

albo $(abcde)^m = a.a.a.\ldots b.b.b.\ldots c.c.c.\ldots d.d.d.\ldots e.e.e\ldots$.

Po prawej stronie zamiast iloczynu m czynników a pisząc a^m, i t. d., mamy

$$(abcde)^m = a^m b^m c^m d^m e^m.$$

Taksamo możemy okazać, że wogóle, gdy mamy podnieść do potęgi iloczyn n czynników, które nazwijmy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, to

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^m = a_1^m a_2^m a_3^m \ldots a_n^m, \tag{3}$$

t. j. *potęga iloczynu jest równa iloczynowi takich samych potęg oddzielnych czynników.*

3. Przypuśćmy, że w równości (3) wszystkie n liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są tą samą liczbą i nazwijmy ją a, t. j. niech $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$. Wtedy po lewej stronie powyższej równości mieć będziemy $(a^n)^m$, po prawej zaś $a^m a^m a^m \ldots a^m = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{m.n}$; przeto

$$(a^n)^m = a^{mn}, \tag{4}$$

t. j. *aby potęgę podnieść do pewnej potęgi, należy podstawę danej potęgi wziąć z wykładnikiem, równym iloczynowi obu wykładników.*

Ponieważ $(a^n)^m = a^{mn}$, $(a^m)^n = a^{nm}$, zaś $mn = nm$, przeto $(a^n)^m = (a^m)^n$, tak iż

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Taksamo można okazać, że np.

$$a^{mnp} = (a^{mn})^p = [(a^m)^n]^p = (a^{mp})^n = \text{ i t. d.}$$

Gdy mamy iloczyn $a^f b^g c^h$ podnieść do potęgi m-tej, to według wzorów (3) i (4) mamy

$$(a^f b^g c^h)^m = (a^f)^m \,.\, (b^g)^m \,.\, (c^h)^m = a^{fm} b^{gm} c^{hm},$$

t. j. *aby iloczyn dwu lub więcej potęg podnieść do pewnej potęgi, należy przez wykładnik tej potęgi pomnożyć wykładnik każdego z czynników iloczynu.*

4. Jeżeli mamy ułamek $\frac{a}{b}$ podnieść do potęgi m-tej, to

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots = \frac{a.a.a\dots}{b.b.b\dots} = \frac{a^m}{b^m},$$

a więc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \tag{5}$$

t. j. *aby ułamek podnieść do potęgi, należy tak jego licznik, jak i mianownik podnieść do tejże potęgi.*

Wzory (1), (2), (3), (4) i (5) są wzorami zasadniczemi w nauce o podnoszeniu do potęgi.

5. Wiemy (I, art. 144, δ), iż możemy, mając m jakichkolwiek proporcyj

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad \alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2, \quad \dots, \quad A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$

utworzyć proporcyą złożoną $(a_1 \alpha_1 \dots A_1) : (b_1 \beta_1 \dots B_1) = (a_2 \alpha_2 \dots A_2) : (b_2 \beta_2 \dots B_2)$. Tę własność zastosujmy do przypadku, kiedy wszystkie dane proporcye są tą samą proporcyą np. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$; będziemy mieli

$$a_1^m : b_1^m = a_2^m : b_2^m.$$

Jeżeli $\frac{a_1}{b_1} = q$, to według wzoru (5)

$$q^m = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^m = \frac{a_1^m}{b_1^m},$$

a ta liczba jest wykładnikiem ostatniej proporcyi. Powiemy więc: *wszystkie wyrazy proporcyi można podnieść do jednakowej potęgi.* Wykładnik tak powstałej proporcyi jest takąż samą potęgą wykładnika danej proporcyi.

6. Wiemy, że kiedy $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2, \dots, a_m > b_m$ i liczby $b_1, b_2, \dots, b_m$ są dodatne, to (I, art. 170, β) jest $a_1 a_2 \dots a_m > b_1 b_2 \dots b_m$: Z tego wynika, że w przypadku, kiedy $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$, $b_1 = b_2 = \dots = b_m = b$,

$$\text{przy } a > b \text{ i } b > 0 \text{ jest } a^m > b^m;$$

a zatem, *jeżeli obie strony nierówności są dodatne, to możemy je podnieść do tej samej potęgi, nie zmieniając kierunku znaku nierówności.*

7. Widzieliśmy (I, art. 64, IV), iż możemy obie strony równości podnieść do tej samej potęgi.

Gdy jednak obie strony równania podnosimy do tej samej potęgi, to należy zachować pewną ostrożność. Np., jeżeli obie strony równania $2x = 6$ podniesiemy do kwadratu, to otrzymamy równanie $4x^2 = 36$. Równanie pierwotne ma jeden tylko pierwiastek $x=3$, równaniu zaś ostatniemu zadość czyni tak wartość $x=3$, jak i wartość $x=-3$. Widzimy zatem, że niewszystkie pierwiastki równania ostatniego są jednocześnie pierwiastkami równania pierwotnego, a więc te dwa równania nie są równoznaczne z sobą. Gdy zatem obie strony równania danego podnosimy do pewnej potęgi, to tak powstałe równanie może mieć pierwiastki, które nie są pierwiastkami równania danego.

8. Podnoszenie jednomianu do potęgi. Stosując wzory (3), (4) i (5) do podnoszenia jednomianu do potęgi, mamy np.

$$\left(\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^m = \frac{3^m}{4^m} a^{3m} b^{hm},$$

$$\left(-\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^{2p} = \frac{3^{2p}}{4^{2p}} a^{6p} b^{2hp}, \quad \left(-\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^{2p+1} = -\frac{3^{2p+1}}{4^{2p+1}} a^{6p+3} b^{2hp+h},$$

t. j. *m-ta potęga jednomianu jest jednomianem, który ma znak — w przypadku, kiedy dany jednomian ma znak — a m jest liczbą nieparzystą, zaś znak + w innych przypadkach, i w którym spółczynnik jest m-tą potęgą spółczynnika danego jednomianu, a każda z podstaw danego jednomianu ma wykładnik pomnożony przez m.*

Gdy mamy wielomian podnieść do potęgi m-tej, to należy utworzyć iloczyn m wielomianów, równych danemu wielomianowi. To zadanie ogólne rozważymy później; tu zaś zajmiemy się tylko podnoszeniem wielomianu do kwadratu i do sześcianu.

KWADRAT I SZEŚCIAN WIELOMIANU.

9. Wiemy, że

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1}$$

t. j. *kwadrat dwumianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi i kwadratu wyrazu drugiego.*

Podobnie, jak to prawidło, moglibyśmy prawidło na podnoszenie trójmianu do kwadratu wyprowadzić wprost, mnożąc dany trójmian przez siebie. Możemy jednak, mając $(a+b+c)^2$, nazwać $a+b=p$ i znaleźć $(p+c)^2$ według wzoru (1),

$$(p+c)^2 = p^2 + 2pc + c^2.$$

W tej równości zamiast p pisząc dwumian $a+b$ i następnie stosując wzór (1), mamy

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2. \tag{2}$$

A więc *kwadrat trójmianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi, kwadratu wyrazu drugiego, podwojonego iloczynu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci i kwadratu wyrazu trzeciego.* Gdybyśmy wykonali mnożenie, które jeszcze pozostało wskazanem po prawej stronie wzoru (2), mielibyśmy

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2,$$

co moglibyśmy tak przeczytać: kwadrat trójmianu jest sumą algebraiczną kwadratów każdego jego wyrazu i podwojonych iloczynów każdej pary jego wyrazów.

Podobnie znajdziemy

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2, \qquad (3)$$

którytο wzór łatwo można wypowiedzieć.

Przypuśćmy, żeśmy, podobnie dalej postępując, podnieśli już do kwadratu wielomian, mający k wyrazów, $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k$, i otrzymali

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+\ldots+2(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})a_k+a_k^2. \quad (4)$$

Jeżeli zaś chcemy znaleźć kwadrat wielomianu, mającego $k+1$ wyrazów, $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}$, to, oznaczywszy sumę pierwszych k wyrazów tego wielomianu przez w, sprowadzimy zadanie do szukania kwadratu dwumianu, $(w+a_{k+1})^2$, a w rozwinięciu według wzoru (1) wstawiając zamiast w wielomian, przez tę literę oznaczony, mieć będziemy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2=(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2+2(a_1+a_2+\ldots+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}^2.$$

Gdybyśmy tu po stronie prawej zamiast $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2$ wprowadzili wyrażenie tego kwadratu według wzoru (4), to przekonalibyśmy się, że kwadrat wielomianu o $k+1$ wyrazach taksamo się tworzy, jak poprzedni kwadrat wielomianu o k wyrazach. Zatem, jeżeli ów sposób tworzenia kwadratu stosuje się do wielomianu o k wyrazach, to stosuje się on także do wielomianu o $k+1$ wyrazach. Widzieliśmy zaś wprost, że on stosuje się do tworzenia kwadratu dwumianu. Stosować się więc będzie do tworzenia kwadratu trójmianu (cośmy wprawdzie bezpośrednio wyprowadzili), a wskutek tego do tworzenia kwadratu czworomianu, i t. d., czyli do tworzenia kwadratu wielomianu o jakiejkolwiek ilości wyrazów. Przeto *kwadrat wielomianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi, kwadratu wyrazu drugiego, podwojonego iloczynu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci, i t. d., podwojonego iloczynu sumy wszystkich wyrazów, prócz ostatniego, przez ostatni i kwadratu wyrazu ostatniego.*

Taki sposób dowodzenia ogólnego, polegający na tem, iż z przypuszczenia, że pewne prawo odnosi się, jak tu, do k wyrazów, dochodzimy do tego, że odnosić się ono także będzie do $k+1$ wyrazów, oraz na sprawdzeniu, że ono się odnosi do oznaczonej ilości wyrazów (jak tu — do dwu), nazywa się »dowodzeniem zapomocą indukcyi«.

10. Wzory powyższe możemy zastosować do podnoszenia liczb do kwadratu. Gdy mamy np. 377^2, to według wzoru (2) mamy

$$377^2=(300+70+7)^2=300^2+2.300.70+70^2+2.370.7+7^2.$$

Obliczając składniki, dostrzeżemy, że pierwszy będzie się kończył czterema zerami, drugi trzema, trzeci dwoma, czwarty zaś jednem zerem. Tych zer, jako zawsze zjawiających się, nie wypisujemy (podobnie, jak w mnożeniu i w dzieleniu) przy dodawaniu składników. Aby jednak oznaczyć miejsce, pod którem ma być postawiona pierwsza z prawej strony cyfra (nie licząc owych zer) następnego składnika, piszemy zamiast pierwszego z opuszczonych zer kropkę.

$$\begin{array}{r|l}
3^2 & 9. \\
2.3.7 & 42. \\
7^2 & 49. \\
2.37.7 & 518. \\
7^2 & 49 \\
\hline
 & 142129.
\end{array}$$

Podobnie np. według wzoru (3) $4558^2 = (4000 + 500 + 50 + 8)^2$

$$\begin{array}{r|l}
4^2 & 16. \\
2.4.5 & 40. \\
5^2 & 25. \\
2.45.5 & 450. \\
5^2 & 25. \\
2.455.8 & 7280. \\
8^2 & 64 \\
\hline
 & 20775364.
\end{array}$$

W drugim, czwartym i szóstym składniku wypisaliśmy po jednem zerze, gdyż owe zera były przypadkowe, mianowicie powstały tylko wskutek tego, że jeden z czynników po lewej stronie kreski pionowej był parzysty, inny zaś był wielokrotnością 5-u.

Gdyby w liczbie, podnoszonej do kwadratu, były zera, to każdej cyfrze 0 w danej liczbie odpowiadają w kwadracie tej liczby dwa składniki równe zeru, tak iż o dwa miejsca dalej należy pisać ostatnią cyfrę następnego składnika kwadratu, t. j. należy dalsze dwie kropki postawić. Np. 201002^2

$$\begin{array}{r|l}
2^2 & 4\,.\,.\,. \\
2.20.1 & 40. \\
1^2 & 1\,.\,.\,.\,.\,. \\
2.20100.2 & 80400. \\
2^2 & 4 \\
\hline
 & 40401804004.
\end{array}$$

Zwykle, nabywszy wprawy, nie wypisujemy iloczynów, powyżej zaznaczonych z lewej strony kreski pionowej, a więc także nie prowadzimy owej kreski. —

Wiemy, że, mnożąc liczbę całkowitą m-cyfrową przez liczbę całkowitą n-cyfrową, otrzymujemy w iloczynie liczbę, mającą cyfr albo $m+n$, albo też $m+n-1$. Z tego wprost wynika, *że kwadrat liczby m-cyfrowej ma cyfr albo* $2m$, *albo też* $2m-1$. —

Gdy mamy $\left(\frac{377}{4558}\right)^2$, to, jak wiemy (art. 4),

$$\left(\frac{377}{4558}\right)^2 = \frac{377^2}{4558^2} = \frac{142129}{20775364}.$$

Gdy liczbę dziesiętną skończoną, t. j. o skończonej ilości cyfr dziesiętnych, mamy podnieść do kwadratu, to, ponieważ w iloczynie dwu liczb dziesiętnych oddzielamy na dziesiętne tyle cyfr, ile ich było w mnożnej i mnożniku, przeto *liczbę dziesiętną skończoną podnosi się do kwadratu tak, jak liczbę całkowitą, a w otrzymanej stąd liczbie oddziela się z prawej strony dwa razy tyle cyfr na dziesiętne, ile ich było w danej liczbie.* Np.

$$4{\cdot}558^2 = 20{\cdot}775364;\quad 0{\cdot}003^2 = 0{\cdot}000009;\quad 0{\cdot}00377^2 = 0{\cdot}0000142129.$$

Gdybyśmy nakoniec mieli podnieść do kwadratu liczbę dziesiętną, której ułamek jest peryodyczny, to należy tę liczbę wyrazić jako ułamek zwyczajny i podnieść go do kwadratu, a otrzymany wypadek można przedstawić znowu jako liczbę dziesiętną. Np.

$$4{\cdot}47\dot{2}^2 = (4\tfrac{17}{36})^2 = (\tfrac{161}{36})^2 = \tfrac{25921}{1296} = 20{\cdot}0007\dot{7}1604938\dot{2}\,.$$

11. Gdy mamy $(a+b)^3$, to

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b),$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \tag{5}$$

t. j. *sześcian dwumianu jest sumą algebraiczną sześcianu wyrazu pierwszego, potrojonego iloczynu kwadratu wyrazu pierwszego przez drugi, potrojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez kwadrat drugiego i sześcianu wyrazu drugiego.* Tak np.

$$(\tfrac{2}{3}a^5b^2 - 5a^3b^4)^3 = \tfrac{8}{27}a^{15}b^6 - \tfrac{20}{3}a^{13}b^8 + 50a^{11}b^{10} - 125a^9b^{12}.$$

Gdy mamy $(a+b+c)^3$, to, kładąc $a+b=p$, mielibyśmy $(p+c)^3$; w rozwinięciu zaś według (5) wstawiając $a+b$ zamiast p i wykonywając $(a+b)^3$, otrzymamy

$$(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3. \tag{6}$$

W tym wzorze mamy jeszcze przy pomocy dwu nawiasów wskazane do wykonania działania; z temi jednak nawiasami formuła powyższa jest dogodniejsza tak dla spamiętania, jak i dla tworzenia części składowych sześcianu trójmianu. Utworzywszy już według powyższego wzoru części składowe sześcianu trójmianu, możemy następnie wykonać wskazane działania, t. j. znieść nawiasy.

Przypuśćmy, że w podobny sposób jest utworzony sześcian wielomianu o k wyrazach,

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k)^3 &= a_1^3+3a_1^2a_2+3a_1a_2^2+a_2^3+3(a_1+a_2)^2a_3+\ldots\\ &+3(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2a_k+3(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})a_k^2+a_k^3,\end{aligned} \tag{7}$$

i że chcemy wielomian $a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}$, mający $k+1$ wyrazów, podnieść do sześcianu. Jeżeli w tym wielomianie sumę pierwszych k jego wyrazów nazwiemy w, to według (5)

$$(w+a_{k+1})^3 = w^3+3w^2a_{k+1}+3wa_{k+1}^2+a_{k+1}^3,$$

a pisząc tu zamiast w oznaczony przez tę literę wielomian o k wyrazach, mamy

$$(a_1+\ldots+a_k+a_{k+1})^3 = (a_1+\ldots+a_k)^3+3(a_1+\ldots+a_k)^2a_{k+1}+3(a_1+\ldots+a_k)a_{k+1}^2+a_{k+1}^3.$$

Wstawiając tu zamiast pierwszego składnika po stronie prawej jego wyrażenie (7), przekonamy się, że sześcian wielomianu o $k+1$ wyrazach taksamo się tworzy, jak poprzedni sześcian wielomianu o k wyrazach. Zatem, jeżeli taki sposób tworzenia sześcianu stosuje się do wielomianu o k wyrazach, to stosuje się on także do wielomianu o $k+1$ wyrazach. Widzieliśmy zaś wprost, że on stosuje się do tworzenia sześcianu dwumianu. Stosować się więc będzie do tworzenia sześcianu trójmianu, jakoteż wogóle do tworzenia sześcianu wielomianu o jakiejkolwiek ilości wyrazów. A zatem *sześcian wielomianu jest sumą algebraiczną sześcianu wyrazu pierwszego, potrojonego iloczynu kwadratu wyrazu pierwszego przez drugi, potrojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez kwadrat drugiego, sześcianu wyrazu drugiego, potrojonego iloczynu kwadratu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci, i t. d., potrojonego iloczynu kwadratu sumy wszystkich wyrazów, prócz ostatniego, przez ostatni, potrojonego iloczynu sumy tychże wyrazów przez kwadrat ostatniego i sześcianu wyrazu ostatniego.*

12. Te wzory możemy zastosować do podnoszenia liczb do sześcianu. Tak np. według wzoru (6) jest

$$377^3=(300+70+7)^3=$$
$$=300^3+3.300^2.70+3.300.70^2+70^3+3.370^2.7+3.370.7^2+7^3.$$

Obliczając składniki, znajdziemy, że pierwszy kończyć się będzie na 6 zer, drugi na 5, trzeci na 4, i t. d. Tych zer, jako zawsze znajdujących się, nie wypisujemy przy dodawaniu tych składników, ale dla dogodności piszemy w składnikach zamiast pierwszego z opuszczonych zer kropkę. Mamy więc

3^3	27.
$3.3^2.7$	189.
$3.3.7^2$	441.
7^3	343.
$3.37^2.7$	28749.
$3.37.7^2$	5439.
7^3	343
	53582633.

Gdy w danej liczbie jest 0, to w sześcianie odpowiadają mu trzy składniki równe zeru, tak iż o trzy miejsca dalej należy pisać pierwszą cyfrę następnego składnika. Gdy np. mamy 25004^3, to

2^3	8.
$3.2^2.5$	60.
$3.2.5^2$	150.
5^3	125......
$3.2500^2.4$	75000000.
$3.2500.4^2$	120000.
4^3	64
	15632501200064.

Zwykle nie wypisujemy iloczynów, zaznaczonych powyżej z lewej strony kreski pionowej, aniteż owej kreski. —

Sześcian liczby m-cyfrowej ma cyfr albo $3m$, *albo* $3m-1$, *alboteż* $3m-2$.

Objaśniając podobnie, jak przy podnoszeniu do kwadratu, mieć będziemy

$$\left(\frac{8}{11}\right)^3 = \frac{8^3}{11^3} = \frac{512}{1331}; \qquad 3{\cdot}77^3 = 53{\cdot}582633;$$

$$0{\cdot}0377^3 = 0{\cdot}000053582633; \qquad 2{\cdot}\dot{6}^3 = \frac{512}{27} = 18{\cdot}\dot{9}6\dot{2}.$$

Sześcian liczby dziesiętnej skończonej ma cyfr dziesiętnych trzy razy więcej, niż ich było w liczbie podnoszonej do sześcianu.

ILORAZY SUMY LUB RÓŻNICY JEDNAKOWYCH POTĘG PRZEZ SUMĘ LUB RÓŻNICĘ ICH PODSTAW.

13. Zajmiemy się szczególnie ważnym przypadkiem dzielenia, mianowicie dzieleniem dwumianu $a^m + b^m$, lub dwumianu $a^m - b^m$ przez dwumian $a + b$, lub dwumian $a - b$.

α. Podzielmy $a^m - b^m$ przez $a - b$. To dzielenie tak się przedstawi:

$$\begin{array}{l|l}
a^m - b^m & a - b \\
\pm a^m \mp a^{m-1}b & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots \\
\hline
\quad a^{m-1}b - b^m & \\
\quad \ldots\ldots &
\end{array}$$

W ilorazie otrzymujemy wielomian $(m-1)$-go stopnia, którego wyrazy mają znaki $+$, spółczynniki 1, wykładniki podstawy a coraz o 1 mniejsze, wykładniki zaś podstawy b coraz o 1 większe. Jeżeli dwumian dzielnej jest podzielny przez dwumian dzielnika, to ostatni wyraz wielomianu ilorazu będzie $+b^{m-1}$. Jakoż, wypisując wyrazy ilorazu według wypowiedzianego prawa, dojdziemy do wyrazu $+b^{m-1}$,

$$\begin{array}{l|l}
a^m - b^m & a - b \\
\ldots\ldots & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1} \\
\ldots\ldots & \\
\hline
\quad + ab^{m-1} - b^m & \\
\quad \pm ab^{m-1} \mp b^m & \\
\hline
\qquad 0, &
\end{array}$$

tak iż $$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

A więc *różnica jednakowych potęg jest podzielna przez różnicę ich podstaw.* Np.

$$\frac{81a^{12}b^{20} - 16a^8b^4c^{16}}{3a^3b^5 - 2a^2bc^4} = \frac{(3a^3b^5)^4 - (2a^2bc^4)^4}{3a^3b^5 - 2a^2bc^4} =$$
$$= 27a^9b^{15} + 18a^8b^{11}c^4 + 12a^7b^7c^8 + 8a^6b^3c^{12}.$$

β. Podzielmy $a^m + b^m$ przez $a - b$,

$$\begin{array}{l|l}
a^m + b^m & a - b \\
\ldots\ldots & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1} \\
\ldots\ldots & \\
\hline
\quad + ab^{m-1} + b^m & \\
\quad \pm ab^{m-1} \mp b^m & \\
\hline
\qquad + 2b^m &
\end{array}$$

Ponieważ tu z pomnożenia wyrazu $+b^{m-1}$ w ilorazie przez wyraz $-b$ dzielnika otrzymujemy $-b^m$, a po zmianie znaku $+b^m$, wyraz taki sam, jak ostatni wyraz dzielnej, przeto nie zniesie się on z tym wyrazem dzielnej i mieć będziemy resztę $+2b^m$. Iloraz jest tu wyrażeniem ułamkowem,

$$\frac{a^m+b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}+\frac{2b^m}{a-b}.$$

Widzimy więc, że *suma jednakowych potęg jest niepodzielna przez różnicę ich podstaw.*

γ. Podzielmy a^m+b^m przez $a+b$,

$$\begin{array}{l|l} a^m+b^m & a+b \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b-\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Wyrazy otrzymywane tu w ilorazie są podobne do otrzymywanych w przypadkach poprzednich, ale ich znaki następują po sobie naprzemian od znaku $+$ wyrazu pierwszego. Jakiego znaku będzie wyraz w ilorazie, zawierający b^{m-1}? Będzie on znaku $+$, jeżeli zajmuje w ilorazie miejsce nieparzyste, będzie zaś miał znak $-$, jeżeli w ilorazie zajmuje miejsce parzyste. Wyraz, zawierający b^{m-1}, zajmuje w ilorazie miejsce m-te od początku. A więc będzie ów wyraz znaku $+$, lub $-$, zależnie od tego, czy liczba m jest nieparzysta, czyteż parzysta. Jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to możemy przyjąć $m=2p+1$; jeżeli zaś m jest liczbą parzystą, to możemy przyjąć $m=2p$. Będziemy więc mieli: przy m nieparzystem

$$\frac{a^{2p+1}+b^{2p+1}}{a+b}=a^{2p}-a^{2p-1}b+a^{2p-2}b^2-\ldots-ab^{2p-1}+b^{2p},$$

przy m zaś parzystem

$$\frac{a^{2p}+b^{2p}}{a+b}=a^{2p-1}-a^{2p-2}b+a^{2p-3}b^2-\ldots+ab^{2p-2}-b^{2p-1}+\frac{2b^{2p}}{a+b}.$$

Widzimy więc, że *suma jednakowych nieparzystych potęg jest podzielna przez sumę ich podstaw,* zaś *suma jednakowych parzystych potęg jest niepodzielna przez sumę ich podstaw.*

δ. Podzielmy nakoniec a^m-b^m przez $a+b$,

$$\begin{array}{l|l} a^m-b^m & a+b \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Wyraz ilorazu, zawierający b^{m-1}, znajduje się na miejscu m-tem, a więc będzie miał znak $+$ w razie $m=2p+1$, zaś znak $-$ w razie $m=2p$. W pierwszym razie, wykonywając ostatnie odejmowanie, zmienimy znak iloczynu $(+b^{m-1}).(+b)=+b^m$, a powstały wskutek tego wyraz $-b^m$ nie zniesie się z ostatnim wyrazem dzielnej $-b^m$, tak iż będzie

$$\frac{a^{2p+1}-b^{2p+1}}{a+b}=a^{2p}-a^{2p-1}b+a^{2p-2}b^2-\ldots-ab^{2p-1}+b^{2p}-\frac{2b^{2p+1}}{a+b}.$$

W drugim zaś razie, wykonywając ostatnie odejmowanie, zmienimy znak iloczynu $(-b^{m-1}).(+b)=-b^m$, a powstały wskutek tego wyraz $+b^m$ zniesie się z ostatnim wyrazem dzielnej $-b^m$; będzie zatem

$$\frac{a^{2p}-b^{2p}}{a+b}=a^{2p-1}-a^{2p-2}b+a^{2p-3}b^2-\ldots+ab^{2p-2}-b^{2p-1}.$$

Widzimy więc, że *różnica jednakowych nieparzystych potęg jest niepodzielna przez sumę ich podstaw,* zaś *różnica jednakowych parzystych potęg jest podzielna przez sumę ich podstaw.* —

Nie potrzeba szczegółowo pamiętać wszystkich tych własności ilorazu sumy lub różnicy jednakowych potęg przez sumę lub różnicę ich podstaw. Iloraz ów możemy wprost wypisywać, bacząc tylko na dwie rzeczy: popierwsze na to, że wszystkie wyrazy należy brać ze znakiem $+$, kiedy w dzielniku jest różnica podstaw, ze znakami zaś naprzemian $+$ i $-$, kiedy w dzielniku jest suma podstaw; powtóre na to, czy iloczyn tego wyrazu (już wypisanego) w ilorazie, który mógłby być wyrazem ostatnim, przez drugi wyraz dzielnika, ma ten sam znak, co drugi wyraz dzielnej (w takim razie dzielna jest podzielna przez dzielnik), czyteż ma znak przeciwny (wtedy dzielna jest niepodzielna przez dzielnik).

WYKŁADNIKI UJEMNE.

14. Gdybyśmy wzór (2) art. 1-go wprost odnieśli także do przypadku $m<n$, to liczba $m-n$ byłaby ujemna i moglibyśmy ją tak napisać: $m-n=-(n-m)$, gdzie już liczba w nawiasie jest dodatna. Wtedy

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{-(n-m)}.$$

Jeżeli różnicę dodatną $n-m$ nazwiemy r, $n-m=r$, to ten ostatni wzór możemy tak napisać:

$$\frac{a^m}{a^{m+r}}=a^{-r}. \tag{1}$$

Wiemy jednak (I, art. 81), że

$$\frac{a^m}{a^{m+r}}=\frac{1}{a^r}. \tag{2}$$

Co do tego, jak pojmować we wzorze (1) potęgę ujemną liczby a, to wprawdzie z określenia potęgi wynika, iż jej wykładnik jest liczbą całkowitą i dodatną, ale ze wzorów (1) i (2) wypada, iż

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}. \tag{3}$$

A więc *ujemna potęga liczby jest symbolem odwrotności takiejże dodatnej potęgi tejże liczby.* Tak np. $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$; rzeczywiście, jeżeli przyjmiemy, że liczba -3 jest różnicą np. liczb 5 i 8, to według wzorów (1) i (2)

$$\frac{a^5}{a^8}=a^{5-8}=a^{-3} \quad \text{i także} \quad \frac{a^5}{a^8}=\frac{1}{a^{8-5}}=\frac{1}{a^3}.$$

Ponieważ w razie, kiedy $m=n$, ze wzoru (2) art. 1-go mamy $a^0=1$ (por. I, art. 81), a teraz okazaliśmy, iż w owym wzorze może być $m<n$, przeto widzimy, że we wzorze (2) art. 1-go każda z liczb m i n może mieć jakąkolwiek wartość całkowitą.

15. Wprowadziwszy w ten sposób wykładniki ujemne całkowite, należy zbadać, czy wzory zasadnicze (art. 4), wyprowadzone dla wykładników dodatnych, stosować się będą także do wykładników ujemnych.

1). Gdy mamy $a^m . a^n$, to należy teraz rozważyć przypadki, kiedy jedna z liczb m i n, lub obie są ujemne.

α). Niech $m>0$, $n<0$ i $n=-\nu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^m . a^{-\nu} = a^m \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{a^m}{a^\nu} = a^{m-\nu} = a^{m+(-\nu)} = a^{m+n}.$$

β). Niech $m<0$, $n>0$ i $m=-\mu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^{-\mu} . a^n = \frac{1}{a^\mu} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^\mu} = a^{n-\mu} = a^{n+(-\mu)} = a^{n+m}.$$

γ). Niech nakoniec $m<0$, $n<0$ i $m=-\mu$, $n=-\nu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^{-\mu} . a^{-\nu} = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu . a^\nu} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}} = a^{-(\mu+\nu)} = a^{-\mu-\nu} = a^{(-\mu)+(-\nu)} = a^{m+n}.$$

2). Gdy mamy $a^m : a^n$, to należy rozważyć podobne przypadki.

α). $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{-\nu}} = a^m : \frac{1}{a^\nu} = a^m \cdot \frac{a^\nu}{1} = a^{m+\nu} = a^{m-(-\nu)} = a^{m-n}.$$

β). $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-\mu}}{a^n} = \frac{1}{a^\mu} : a^n = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{\mu+n}} = a^{-(\mu+n)} = a^{-\mu-n} = a^{m-n}.$$

γ). $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-\mu}}{a^{-\nu}} = \frac{1}{a^\mu} : \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{a^\nu}{1} = \frac{a^\nu}{a^\mu} = a^{\nu-\mu} = a^{(-\mu)-(-\nu)} = a^{m-n}.$$

3). Gdy $m<0$ i $m=-\mu$, to

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^m = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{-\mu} = \frac{1}{(a_1 a_2 \ldots a_n)^\mu} = \frac{1}{a_1^\mu a_2^\mu \ldots a_n^\mu} = \frac{1}{a_1^\mu} \cdot \frac{1}{a_2^\mu} \cdots \frac{1}{a_n^\mu} =$$
$$= a_1^{-\mu} a_2^{-\mu} \ldots a_n^{-\mu} = a_1^m a_2^m \ldots a_n^m.$$

4). Gdy mamy $(a^n)^m$, to należy rozważyć podobne, jak poprzednio pod 1) i 2), trzy przypadki.

α). $$(a^n)^m = (a^{-\nu})^m = \left(\frac{1}{a^\nu}\right)^m = \frac{1}{(a^\nu)^m} = \frac{1}{a^{\nu m}} = a^{-\nu m} = a^{(-\nu)m} = a^{nm}.$$

β). $$(a^n)^m = (a^n)^{-\mu} = \frac{1}{(a^n)^\mu} = \frac{1}{a^{n\mu}} = a^{-n\mu} = a^{n(-\mu)} = a^{nm}.$$

γ). $$(a^n)^m = (a^{-\nu})^{-\mu} = \left(\frac{1}{a^\nu}\right)^{-\mu} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^\nu}\right)^\mu} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\nu\mu}}} = a^{\nu\mu} = a^{(-\nu)(-\mu)} = a^{nm}.$$

5). Gdy mamy $\left(\frac{a}{b}\right)^m$, to, kiedy $m<0$ i $m=-\mu$, jest

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\mu} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^\mu} = \frac{1}{\frac{a^\mu}{b^\mu}} = \frac{b^\mu}{a^\mu} = \frac{1}{a^\mu} : \frac{1}{b^\mu} = \frac{a^{-\mu}}{b^{-\mu}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Widzimy zatem, że wzory zasadnicze (1) i (2) art. 1-go, (3) i (4) art. 2-go i (5) art. 4-go stosują się także do przypadku wykładników ujemnych i całkowitych.

16. Wykładników ujemnych używamy przeważnie z tego względu, że przy ich pomocy możemy unikać ułamkowych kształtów formuł matematycznych, co, osobliwie w druku, często jest dogodne. Tak np. zamiast pisać

$\frac{a^2}{5b^3}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a^2+b^2}{(a^3-b^3)^m}$, możemy napisać odpowiednio $\frac{1}{5}a^2b^{-3}$, $a(b+c)^{-1}$, $(a^2+b^2)(a^3-b^3)^{-m}$.

Przy pomocy wykładników ujemnych i wykładnika 0 możemy określać stopień ułamków algebraicznych. Tak np. stopnie powyżej wypisanych ułamków są odpowiednio: $2-3=-1$, $1-1=0$, $2-3m$.

ROZDZIAŁ DRUGI.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA WOGÓLE.

17. Niech

$$a^m=b; \tag{1}$$

przyjmijmy, że wykładnik m jest liczbą całkowitą i większą od 1. Gdyby dane były: wykładnik m i potęga b, a szukana była podstawa a, to wtedy mielibyśmy zadanie odwrotne względem podnoszenia do potęgi. Owa szukana liczba, jak tu a, nazywa się pierwiastkiem stopnia m-tego (Wurzel m-ten Grades) z liczby b; działanie zaś, prowadzące do znalezienia liczby, której m-ta potęga jest równa liczbie danej, nazywa się wyciąganiem pierwiastka stopnia m-tego (Radicieren, Wurzelausziehung) z liczby danej. A więc:

Pierwiastkiem stopnia m-tego z liczby danej jest liczba, której m-ta potęga jest równa liczbie danej. Tak np. pierwiastkiem stopnia 5-go z liczby -32 jest liczba -2, gdyż $(-2)^5=-32$.

Wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia z liczby danej jestto znaleźć liczbę, której m-ta potęga jest równa liczbie danej.

Na oznaczenie pierwiastka używa się osobnego znaku, który powstał z litery r, początkowej wyrazu »radix«; po tym znaku pod przeciągniętą kreską pisze się liczbę, z której należy wyciągnąć pierwiastek, w rozwartości zaś owego znaku umieszcza się liczbę, wskazującą, jakiego stopnia pierwiastek ma być wyciągnięty; nazywamy tę liczbę wykładnikiem pierwiastka (Wurzelexponent, Wurzelindex). Tak np. według (1) jest

$$\sqrt[m]{b}=a.$$

W przypadku, kiedy wykładnik pierwiastka jest 2, opuszczamy go, tak iż zamiast pisać $\sqrt[2]{36}$ piszemy wprost $\sqrt{36}$.

$\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{b}$, ..., $\sqrt[n]{b}$ czytać należy odpowiednio: pierwiastek kwadratowy (lub pierwiastek stopnia 2-go), pierwiastek sześcienny (lub pierwiastek stopnia 3-go), pierwiastek stopnia 4-go, ..., pierwiastek stopnia n-tego z liczby b.

18. Widzieliśmy, że, podnosząc liczbę do potęgi nieparzystej, otrzymujemy liczbę takiegoż, jak dana, znaku, np. $(+2)^5=32$, $(-2)^5=-32$; wskutek tego $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[5]{-32}=-2$, a więc $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}$. Zatem *pierwiastek* *nieparzystego stopnia z liczby ujemnej może być wyrażony przez wzięty ze znakiem — pierwiastek tegoż samego stopnia z liczby dodatnej o tej samej, co dana, wartości bezwzględnej.* Dlatego możemy naprzód ograniczyć się do rozważania pierwiastków nieparzystego stopnia tylko z liczb dodatnych.

Widzieliśmy także, że, podnosząc liczbę, czyto dodatną, czyteż ujemną, do potęgi parzystej, otrzymujemy liczbę dodatną, naprzykład $(+3)^4=+81$, $(-3)^4=+81$; wskutek tego $\sqrt[4]{81}=3$ i także $\sqrt[4]{81}=-3$, t. j. *pierwiastek stopnia parzystego z liczby dodatnej jest nietylko liczbą dodatną, ale także liczbą ujemną o tej samej, co tamta, wartości bezwzględnej.* Z tego nadto wynika, że pierwiastka stopnia parzystego z liczby ujemnej brać na uwagę teraz jeszcze nie możemy, gdyż nie jest on ani liczbą ujemną, ani zerem, ani też liczbą dodatną. —

Dodatne pierwiastki stopnia czyto parzystego, czyteż nieparzystego, z liczb dodatnych nazywają się pierwiastkami arytmetycznemi. Gdy więc rozważamy pierwiastki arytmetyczne, to $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt{36}=6$ i t. d.

Jeżeli zaś np. wprowadzamy oba, dodatny i ujemny, pierwiastki kwadratowe z liczby dodatnej, to mówimy o nich, że są to pierwiastki algebraiczne kwadratowe z owej liczby; tak np. $+6$ i -6 są pierwiastkami algebraicznemi kwadratowemi z liczby 36.

W tym rozdziale, ilekroć wyraźnie nie wspomnimy o pierwiastkach algebraicznych, rozumieć będziemy, iż mamy na uwadze tylko pierwiastki arytmetyczne.

19. Uwzględniając same tylko pierwiastki arytmetyczne, możemy pewnik (I, art. 64, IV) »wskutek wykonania takiego samego działania na dwu równych wielkościach, otrzymujemy wielkości równe« odnieść także do przypadku, kiedy wykonywanem działaniem jest wyciąganie pierwiastka pewnego stopnia (całkowitego i dodatnego). Do tego więc, cośmy w art. 64-ym części I o tym pewniku powiedzieli, możemy dodać :

ε. *Z równych sobie wielkości wyciągając pierwiastki arytmetyczne jednakowego stopnia, otrzymujemy wielkości równe sobie.*

20. Jeżeli, przy m całkowitem i dodatnem, z liczby a^m mamy wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, $\sqrt[m]{a^m}$, to mamy znaleźć liczbę, której m-ta potęga jest a^m. Oczywiście tą liczbą jest a, a więc

$$\sqrt[m]{a^m}=a. \tag{2}$$

Również, jeżeli mamy $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$, to należy $\sqrt[m]{a}$, t. j. *owę liczbę,* której m-ta potęga jest a, właśnie do m-tej podnieść potęgi. Otrzymamy oczywiście liczbę a, t. j.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a. \tag{3}$$

Z równości (2) i (3) wynika, że dwa działania: *podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka tegoż samego stopnia, wykonane w dowolnym po sobie porządku, wzajemnie się znoszą.*

21. Niech z dwu liczb dodatnych a i b będzie $a > b$. Wówczas, przy m całkowitem i dodatnem, jest także

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.$$

Gdyby bowiem było $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$, to, po podniesieniu obu stron tej równości do potęgi m-tej, mielibyśmy, według wzoru (3), $a = b$, co się sprzeciwia założeniu. Gdyby zaś być miało $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$, to, po podniesieniu obu stron tej nierówności do potęgi m-tej, mielibyśmy (art. 6) $a < b$, co się sprzeciwia założeniu. Może zatem być tylko $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. A więc, *jeżeli obie strony nierówności są dodatne, to możemy, nie zmieniając kierunku znaku nierówności, wyciągnąć z obu jej stron pierwiastek tego samego stopnia.*

22. Własności (3) art. 2-go odpowiada własność: *pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków takiegoż stopnia z oddzielnych czynników,*

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n}. \tag{4}$$

Aby dowieść, iż ta równość ma miejsce, t. j., iż prawa strona tej równości przedstawia istotnie pierwiastek m-tego stopnia z iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$, należy okazać, iż jej m-ta potęga jest liczbą $a_1 a_2 \ldots a_n$. Jakoż, według wzoru (3) art. 2-go i według wzoru (3) art. 20-go, mamy

$$\left(\sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a_1}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{a_2}\right)^m \ldots \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^m = a_1 a_2 \ldots a_n;$$

prawa więc strona równości (4) przedstawia istotnie $\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Tak np.

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{8.8.27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2.2.3 = 12;$$

$$\sqrt[3]{3375 a^6 b^3} = \sqrt[3]{125.27.(a^2)^3.b^3} = 15 a^2 b.$$

23. Z ogólnego wzoru (4) wiele szczególnych własności wyprowadzić będziemy mogli.

Napisawszy równość (4) tak:

$$\sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{5}$$

widzimy, że *iloczyn pierwiastków z jednakowemi wykładnikami jest równy pierwiastkowi z tymże wykładnikiem z iloczynu liczb, znajdujących się pod znakami pierwiastka w oddzielnych czynnikach.* Np.

$$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12.18} = \sqrt[3]{8.27} = 6;$$

$$\sqrt[5]{324 a^3 b} \cdot \sqrt[5]{24 a^7 b^4} = \sqrt[5]{32.243 (a^2)^5 b^5} = 6 a^2 b.$$

24. Jeżeli we wzorze (4) jest $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a^m$, to po lewej stronie mieć będziemy $\sqrt[m]{a^{mn}}$, po prawej zaś będzie n czynników $\sqrt[m]{a^m} = a$, a więc po prawej będzie a^n, tak iż mamy $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n = a^{\frac{mn}{m}}$, lub, nazwawszy $mn = p$,

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}, \tag{6}$$

gdzie p jest wielokrotnością liczby m. A więc, *jeżeli wykładnik potęgi pod znakiem pierwiastka jest wielokrotnością wykładnika pierwiastka, to można* *wyciągnąć pierwiastek, dzieląc wykładnik owej potęgi przez wykładnik pierwiastka.* Np. $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3$.

25. Według (4) i (6) mamy

$$\sqrt[m]{a^{mn+p}} = \sqrt[m]{a^{mn}a^p} = \sqrt[m]{a^{mn}}\sqrt[m]{a^p} = a^n\sqrt[m]{a^p}.$$

Taką liczbę, jak tu a^n, przez którą ma być pomnożony pierwiastek, nazywamy spółczynnikiem pierwiastka. Taksamo

$$\sqrt[m]{a^{mn+p}b^{mr+q}c^s} = \sqrt[m]{a^{mn}b^{mr}}\sqrt[m]{a^pb^qc^s} = a^nb^r\sqrt[m]{a^pb^qc^s}.$$

Można z czynnika pod pierwiastkiem, będącego potęgą, której wykładnik jest wielokrotnością wykładnika pierwiastka, wyciągnąć pierwiastek i wziąć go za spółczynnik pierwiastka z pozostałego czynnika.

Odwrotnie, według (2) i (5)

$$a^nb^r\sqrt[m]{a^pb^qc^s} = \sqrt[m]{(a^nb^r)^m}\sqrt[m]{a^pb^qc^s} = \sqrt[m]{a^{mn}b^{mr}}\sqrt[m]{a^pb^qc^s} = \sqrt[m]{a^{mn+p}b^{mr+q}c^s},$$

t. j. *można spółczynnik pierwiastka wnieść pod znak pierwiastka jako czynnik, po podniesieniu go do potęgi wskazanej przez wykładnik pierwiastka.*

26. Jeżeli z obu stron równości $a = \frac{a}{b}\cdot b$ wyciągniemy pierwiastek m-tego stopnia, to mieć będziemy według (4) $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}\cdot b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[m]{b}$, skąd

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad \text{i} \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \tag{7}$$

t. j. *iloraz pierwiastków jednakowego stopnia jest równy pierwiastkowi tegoż stopnia z ilorazu liczb, znajdujących się pod znakami pierwiastków,* oraz *pierwiastek z ułamka jest równy ilorazowi pierwiastków tegoż samego stopnia, wyciągniętych oddzielnie z licznika i mianownika.*

27. Jeżeli we wzorze (5) jest $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, to mamy

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}, \tag{8}$$

t. j. *aby pierwiastek podnieść do potęgi, należy liczbę pod znakiem pierwiastka podnieść do tejże potęgi.* Będzie więc także

$$\left(\sqrt[m]{a^q}\right)^n = \sqrt[m]{(a^q)^n} = \sqrt[m]{a^{nq}}. \tag{9}$$

28. Według wzorów (2) i (9) mamy $\sqrt[mn]{a^{mn}} = a$, $\left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n = \sqrt[mn]{a^{mn}}$; przeto także jest $a = \left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n$. Wyciągając zaś z obu stron tej równości pierwiastek stopnia n-tego, mamy $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, czyli, po zastosowaniu wzoru (8), $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^m$. Wyciągnąwszy z obu stron ostatniej równości pierwiastek stopnia m-tego, mamy

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{10}$$

A zatem, *ażeby z pierwiastka z danej liczby wyciągnąć pierwiastek, można z danej* *liczby wyciągnąć pierwiastek, którego wykładnik jest równy iloczynowi wykładników obu pierwiastków.*

Taksamo $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Jest więc także $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Podobnie

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[mnp]{a} = \sqrt[mn]{\sqrt[p]{a}} = \text{i t. d.}$$

29. Według wzorów (2), (9) i (10)

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a^{np}}} = \sqrt[mp]{a^{np}},$$

tak iż $$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} \quad \text{i} \quad \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}, \tag{11}$$

t. j. *wykładnik pierwiastka i wykładnik liczby pod znakiem pierwiastka można albo pomnożyć, alboteż podzielić przez tę samę liczbę.*

Własność tę możemy zastosować w przypadku, kiedy mamy iloczyn lub iloraz pierwiastków z różnemi wykładnikami. Np., gdy najmniejszą spólną wielokrotnością liczb m i p jest w, tak iż $w = mr = ps$, to

$$\sqrt[m]{a^n} . \sqrt[p]{b^q} = \sqrt[mr]{a^{nr}} \sqrt[ps]{b^{qs}} = \sqrt[w]{a^{nr} b^{qs}}; \qquad \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{b^q}} = \frac{\sqrt[mr]{a^{nr}}}{\sqrt[ps]{b^{qs}}} = \sqrt[w]{\frac{a^{nr}}{b^{qs}}}.$$

30. Gdy mamy proporcyą $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, a jej wykładnik jest q, to, wyciągając pierwiastek m-tego stopnia z obu stron równości $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, mieć będziemy $\sqrt[m]{\frac{a_1}{b_1}} = \sqrt[m]{\frac{a_2}{b_2}}$, czyli według (7)

$$\sqrt[m]{a_1} : \sqrt[m]{b_1} = \sqrt[m]{a_2} : \sqrt[m]{b_2};$$

wykładnik tej proporcyi jest $\frac{\sqrt[m]{a_1}}{\sqrt[m]{b_1}} = \sqrt[m]{\frac{a_1}{b_1}} = \sqrt[m]{q}$. A więc *ze wszystkich wyrazów proporcyi można wyciągnąć pierwiastek jednakowego stopnia.* Wykładnik tak powstałej proporcyi jest pierwiastkiem tegoż samego stopnia z wykładnika danej proporcyi.

Robiąc użytek z tej własności, z własności art. 5-go, jakoteż z własności, dowiedzionej w części I w art. 143-im, mamy

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}; \quad \frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m}; \quad \frac{a_1^m + a_2^m}{b_1^m + b_2^m} = \frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m}; \quad \frac{\sqrt[m]{a_1^m + a_2^m}}{\sqrt[m]{b_1^m + b_2^m}} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Taksamo, gdy mamy trzy lub więcej równych stosunków

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{to} \quad \frac{\sqrt[m]{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}}{\sqrt[m]{b_1^m + b_2^m + \ldots + b_n^m}} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

31. Określiliśmy średnią geometryczną dwu liczb danych, jako liczbę, której kwadrat równa się iloczynowi liczb danych. Jeżeli średnia geometryczna liczb a i b jest liczbą c, to $c^2=ab$, skąd $c=\sqrt{ab}$. A zatem *średnia geometryczna dwu liczb jest pierwiastkiem kwadratowym z ich iloczynu.*

Zważmy, że, przy $a \gtrless b$, jest $(a-b)^2>0$, albo, po dodaniu do obu stron tej nierówności po $4ab$, jest $(a+b)^2>4ab$. Wyciągnąwszy zaś z obu stron pierwiastek kwadratowy (art. 21), a następnie podzieliwszy je przez 2, otrzymamy

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},$$

t. j. *średnia geometryczna dwu liczb jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.*

32. Wyciąganie pierwiastka z jednomianu. Według wzorów (4), (6) i według art. 25-go, mamy np.

$$\sqrt[m]{2^{2m}a^{mn}b^m}=\sqrt[m]{2^{2m}}\sqrt[m]{a^{mn}}\sqrt[m]{b^m}=4a^nb,$$

$$\sqrt[m]{(4^{2m+1}.5)a^{mn}b^{3m+p}c^r}=\sqrt[m]{4^{2m}a^{mn}b^{3m}.20b^pc^r}=16a^nb^3\sqrt[m]{20b^pc^r}.$$

A więc, jeżeli w jednomianie, z którego mamy wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, spółczynnik jest m-tą potęgą liczby całkowitej lub ułamkowej, zaś wykładniki każdej litery są wielokrotnościami liczby m, to wyciągamy pierwiastek m-tego stopnia ze spółczynnika, każdy zaś z wykładników liter dzielimy przez m; ogólnie zaś, *aby z jednomianu wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, należy oddzielić czynnik spółczynnika, będący m-tą potęgą liczby całkowitej lub ułamkowej, oraz potęgi podstaw o wykładnikach podzielnych przez m, i z tego iloczynu wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, który należy wziąć za spółczynnik pierwiastka m-tego stopnia z iloczynu pozostałych czynników danego jednomianu.*

33. Redukcya pierwiastków podobnych. Nie mówiliśmy jeszcze ani o dodawaniu, aniteż o odejmowaniu pierwiastków. Zważmy, że, gdy mamy dwa pierwiastki, choćby jednakowego stopnia, z różnych liczb, np. $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$, to ani suma ich $\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}$, aniteż ich różnica $\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}$ prościej wyrażona być nie może. Toż samo wypadłoby powiedzieć np. o sumie lub różnicy $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$, jakoteż o sumie lub różnicy $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[n]{a}$. A więc w takich razach dodawanie lub odejmowanie pierwiastków pozostanie tylko wskazanem zapomocą znaku $+$ lub $-$.

Może jednak zajść uproszczenie sumy lub różnicy pierwiastków w razie, kiedy jednocześnie wykładniki pierwiastków są równe i ta sama jest liczba pod znakiem pierwiastka; takie pierwiastki wraz z ich spółczynnikami, które mogą być jednakowe lub różne, są nazywane p i e r w i a s t k a m i p o d o b n e m i. Gdy bowiem mamy np.

$$a\sqrt[m]{d}+b\sqrt[m]{d}-c\sqrt[m]{d}+\sqrt[m]{d},$$

to, ponieważ $\sqrt[m]{d}$ jest jakąś liczbą — nazwijmy ją l — a liczby a, b, c, 1, są spółczynnikami liczby l, owo wyrażenie możemy przedstawić: $(a+b-c+1)l$, czyli

$$(a+b-c+1)\sqrt[m]{d}\,.$$

Mówimy wtedy, żeśmy wykonali redukcyą pierwiastków podobnych. Tak np.

$$4a^2\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{ab^2}-4ab\sqrt[3]{a^2b}+b^2\sqrt[3]{a^2b}-5\sqrt[3]{ab^2}=(2a-b)^2\sqrt[3]{a^2b}-7\sqrt[3]{ab^2}\,.$$

WPROWADZENIE LICZB NIEWYMIERNYCH PIERWIASTKOWYCH.

34. Gdy liczbę całkowitą podnosimy do potęgi całkowitej i dodatnej, otrzymujemy liczbę całkowitą. Wyciągając jednak z liczby całkowitej pierwiastek, niezawsze otrzymujemy liczbę całkowitą. Tak np. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, ale $\sqrt{6}$ nie jest liczbą całkowitą.

Niech, przy dodatnych i całkowitych a i n, $\sqrt[n]{a}$ nie będzie liczbą całkowitą. Przypuśćmy, że on jest pewną liczbą ułamkową; możemy ją wziąć w postaci nieskracalnej, która niech będzie $\frac{l}{m}$. Jeżeli $\sqrt[n]{a}=\frac{l}{m}$, to, po podniesieniu obu stron tej równości do potęgi n-tej, otrzymalibyśmy $a=\frac{l^n}{m^n}$. Zważmy, że l^n rozkłada się na takie tylko czynniki pierwsze, na jakie się rozkłada liczba l, zaś m^n na takie tylko, na jakie się rozkłada liczba m; a gdy liczby l i m są pierwsze względem siebie, to liczby l^n i m^n są również pierwsze względem siebie. Licznik przeto ułamka $\frac{l^n}{m^n}$ nie jest przez mianownik podzielny, tak iż po prawej stronie ostatniej równości mamy liczbę ułamkową, t. j. albo ułamek właściwy, albo też całkowitą z ułamkiem, gdy tymczasem po lewej stronie mamy liczbę całkowitą. Nie może więc liczba a być równa liczbie $\frac{l^n}{m^n}$, a przeto także $\sqrt[n]{a}$ nie może być równy liczbie ułamkowej $\frac{l}{m}$. A zatem, *gdy pierwiastek pewnego stopnia z liczby całkowitej nie jest liczbą całkowitą, to nie jest on także liczbą ułamkową.*

Przypuśćmy, że mamy $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie liczby dodatne i całkowite a i b są już pierwsze względem siebie. Ten pierwiastek nie jest liczbą całkowitą (gdyż n-ta potęga liczby całkowitej liczbą $\frac{a}{b}$ być nie może). Jeżeli on jest liczbą ułamkową, której postać nieskracalną nazwijmy $\frac{l}{m}$, to z równości $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{l}{m}$ wynika równość $\frac{a}{b}=\frac{l^n}{m^n}$. Podobnie, jak poprzednio, wniesiemy, iż liczby l^n i m^n są pierwsze względem siebie. Ponieważ zaś dwa ułamki sobie równe mają tę samę postać nieskracalną, przeto powyższa równość może mieć miejsce w takim tylko razie, kiedy jednocześnie $a=l^n$ i $b=m^n$, t. j. kiedy obie liczby a i b są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych. W innych zaś razach $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ nie może być równy liczbie ułamkowej. A więc *pierwiastek n-tego stopnia z liczby ułamkowej, w razie, kiedy licznik* *i mianownik jej postaci nieskracalnej są potęgami n-temi liczb całkowitych, jest liczbą ułamkową,* zaś *pierwiastek n-tego stopnia z liczby ułamkowej, w razie, kiedy licznik i mianownik jej postaci nieskracalnej nie są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych, nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową.*

35. Każda liczba całkowita, jako jedność lub skupienie jedności, może być wymierzona jednością; każda zaś liczba ułamkowa, jako jedna, alboteż skupienie większej ilości części, powstałych wskutek rozłożenia jedności na części równe, ma z jednością spólną miarę. Np. liczba $\frac{a}{b}$ ma z jednością spólną miarę: liczbę $\frac{1}{b}$. Dlatego każda liczba całkowita i każda liczba ułamkowa jest liczbą spółmierną z jednością. Zamiast mówić: liczba spółmierna z jednością, mówi się krócej: liczba wymierna (rationale Z.). Nawzajem, jeżeli pewna liczba ma z jednością spólną miarę, która w owej liczbie mieści się a razy, zaś w jedności b razy, to owa liczba jest skupieniem a b-tych części jedności, czyli jest liczbą $\frac{a}{b}$; kiedy a jest podzielne przez b, jest liczbą całkowitą, w przeciwnym razie jest liczbą ułamkową.

Ponieważ: α) $\sqrt[n]{a}$, przy a dodatnem i całkowitem, w razie, kiedy nie jest liczbą całkowitą, nie jest także liczbą ułamkową, β) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ w razie, kiedy, przy a i b dodatnych i całkowitych, ułamek $\frac{a}{b}$ jest w postaci nieskracalnej, zaś a i b nie są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych, nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, — przeto wówczas $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ są liczbami niespółmiernemi z jednością, albo, jak mówimy krócej, są liczbami niewymiernemi (irrationale Z.).

Z liczbami niewymiernemi spotykamy się niejednokrotnie w geometryi. Tak np. stosunek przekątnej kwadratu do jego boku $(\sqrt{2})$ jest liczbą niewymierną; stosunek wysokości trójkąta równobocznego do jego boku $(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ jest liczbą niewymierną; stosunek pól trójkąta równobocznego i kwadratu, wpisanych w koło, $(\frac{3}{8}\sqrt{3})$ jest liczbą niewymierną; stosunek promieni dwu kul, z których jedna ma objętość dwa razy większą niż druga, $(\sqrt[3]{2})$ jest liczbą niewymierną; i t. d.

Także stosunek okręgu koła do jego średnicy jest liczbą niewymierną[1]), ale ta liczba nie może być wyrażona zapomocą pierwiastków jakichkolwiek stopni z liczb całkowitych lub ułamkowych; jest to więc innego rodzaju liczba niewymierna, niż te, które tu rozważamy. Dlategoto liczby niewymierne, które można wyrazić przy pomocy pewnej ilości pierwiastków z liczb całkowitych lub ułamkowych, nazywamy liczbami niewymiernemi pierwiastkowemi. Liczby zaś niewymierne takie, jak np. stosunek okręgu koła

---

[1]) Wogóle liczba dziesiętna, której część mniejsza od 1 jest tak zwanym ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieperyodycznym, jest liczbą niewymierną.

do jego średnicy, których nie można wyrazić przy pomocy pewnej ilości pierwiastków z liczb całkowitych lub ułamkowych, nazywamy **liczbami transcendentalnemi** (transcendente Z.), albo **liczbami przestępnemi**.

36. Na prostej obierzmy dowolnie punkt 0, od którego np. w prawo będziemy oznaczali punkty, odpowiadające liczbom dodatnym, w przeciwnym zaś kierunku punkty, odpowiadające liczbom ujemnym. Przyjąwszy długość pewnego odcinka za jednostkę, oznaczmy punkty, odpowiadające liczbom całkowitym: $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3 i t. d. Oznaczmy następnie punkty, odpowiadające liczbom ułamkowym: $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+1\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $+2\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{2}, \ldots$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $+1\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{3}, \ldots$, $+\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$, $+1\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{4}, \ldots$ i t. d. Wyobraźmy sobie, że na tej prostej mamy już oznaczone punkty, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i ułamkowym. Te punkty będą na prostej przypadały bardzo blisko siebie; ale czy one tworzą ciąg nieprzerwany? Weźmy na uwagę np. odcinek między punktami $+3$ i $+4$. Ponieważ np. każda z liczb: $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{\frac{19}{2}}$, $\sqrt[3]{30}$ jest pośrednia między 3 i 4, a nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, przeto na naszym odcinku nie były oznaczone punkty, odpowiadające tym liczbom niewymiernym. Możemy więc powiedzieć ogólnie, że punkty na prostej, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i wszystkim liczbom ułamkowym, nie tworzą ciągu nieprzerwanego.

Wyobraźmy sobie, że na prostej mamy oznaczone punkty, nietylko odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i ułamkowym, ale także odpowiadające wszystkim liczbom niewymiernym pierwiastkowym. Czy one tworzą ciąg nieprzerwany? Znamy liczbę przestępną π, wyrażającą stosunek okręgu koła do jego średnicy. Punkt, odpowiadający tej liczbie, przypadnie na odcinku między punktami $+3$ i $+4$, albo, bliżej jego położenie oznaczając, między punktami $+3$ i $+3\frac{1}{7}$, lub jeszcze między punktami $+3{\cdot}141$ i $+3{\cdot}142$ i t. d.; nie przypadnie zaś on w żadnym punkcie, odpowiadającym czyto liczbie ułamkowej, czyteż liczbie niewymiernej pierwiastkowej. Podobnie rzecz się ma z liczbą np. $\frac{5}{4}\pi$. Możemy więc powiedzieć ogólnie, że punkty na prostej, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym, wszystkim liczbom ułamkowym i wszystkim liczbom niewymiernym pierwiastkowym, nie tworzą ciągu nieprzerwanego.

37. Niech przy całkowitem i dodatnem a będzie $\sqrt[n]{a}$ liczbą niewymierną. Weźmy jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatną q i utwórzmy iloczyn aq^n. Ten iloczyn, będący liczbą całkowitą, nie jest n-tą potęgą liczby całkowitej[1]). Nie jest więc równy żadnej z liczb

$$1,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n, \ldots,\ p^n,\ (p+1)^n, \ldots,$$

ale jest liczbą pośrednią między dwiema z tych liczb, np. między p^n i $(p+1)^n$, t. j. $p^n < aq^n < (p+1)^n$. Po podzieleniu stron tych nierówności przez liczbę dodatną q^n, mamy

$$\frac{p^n}{q^n} < a < \frac{(p+1)^n}{q^n},$$

wskutek czego (art. 21) także

$$\sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{\frac{(p+1)^n}{q^n}}, \qquad \text{czyli} \quad \frac{p}{q} < \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{q}.$$

Ponieważ liczby $\frac{p+1}{q}$ i $\frac{p}{q}$ różnią się od siebie o $\frac{1}{q}$, przeto każda z dwu różnic:

---

[1]) Gdyż jeżeliby było $aq^n = r^n$, przy r całkowitem, to mielibyśmy $a = \frac{r^n}{q^n}$ i byłby $\sqrt[n]{a} = \frac{r}{q}$, liczbie wymiernej.

$\sqrt[n]{a} - \frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q} - \sqrt[n]{a}$ jest mniejsza od liczby $\frac{1}{q}$. Widzimy więc, że możemy zawsze znaleźć dwa ułamki o spólnym mianowniku, a o licznikach, różniących się o 1, między któremito ułamkami przypada $\sqrt[n]{a}$, tak iż wartość bezwzględna różnicy między $\sqrt[n]{a}$ a każdym z tych ułamków jest mniejsza od odwrotności ich mianownika. Ów spólny mianownik q jest liczbą dowolną, choćby bardzo wielką. Im większa jest liczba q, tem mniejsza jest liczba $\frac{1}{q}$. Przy dostatecznie wielkiem q, może być liczba $\frac{1}{q}$ dowolnie mała. Wskutek tego, przy odpowiedniem p, ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, będące przybliżeniami, pierwszy z niedomiarem, drugi z nadmiarem, liczby niewymiernej $\sqrt[n]{a}$, mogą być dowolnie bliskie tej liczby.

Niech, przy dodatnych i całkowitych a i b, pierwszych względem siebie, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ będzie liczbą niewymierną. Tę liczbę możemy inaczej przedstawić: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a.b^{n-1}}{b.b^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Ponieważ ta liczba jest niewymierna, przeto w ostatniej jej postaci, której mianownik jest liczbą całkowitą, licznik, będący pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby całkowitej, jest także liczbą niewymierną. Chociaż więc wartość licznika $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ dokładnie wyznaczona być nie może, to jednak możemy mieć dwie wartości przybliżone tej liczby, np. $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, pierwszą z niedomiarem, drugą z nadmiarem, od których wartość $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ różni się mniej, niż o $\frac{1}{q}$. Jest więc $\frac{p}{q} < \sqrt[n]{ab^{n-1}} < \frac{p+1}{q}$, skąd, ponieważ b jest dodatne,

$$\frac{p}{bq} < \sqrt[n]{\frac{a}{b}} < \frac{p+1}{bq}$$

i wartość liczby niewymiernej $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ będzie się różniła od każdej z liczb $\frac{p}{bq}$ i $\frac{p+1}{bq}$ mniej, niż o $\frac{1}{bq} < \frac{1}{q}$, a ta liczba może być dowolnie mała przy odpowiednio wielkiem q.

A zatem, *chociaż wartość liczby niewymiernej dokładnie wyznaczona być nie może, to jednak możemy mieć wartość tej liczby przybliżoną, czyto z niedomiarem, czyteż z nadmiarem, dowolnie mało od owej liczby się różniącą.*

38. Ponieważ liczbę niewymierną możemy zastąpić przez liczbę ułamkową, dowolnie mało od niej się różniącą, przeto wykonanie jakiegoś działania na liczbach niewymiernych może być pojmowane, jako wykonanie takiegoż działania na odpowiednich ułamkach, dostatecznie mało różniących się od danych liczb niewymiernych.

Tak np. rozumieć będziemy, iż mnożeniu liczby niewymiernej przez liczbę niewymierną odpowiada mnożenie ułamka, bardzo bliskiego jednej z danych liczb niewymiernych, przez ułamek, bardzo bliski drugiej z tych liczb. Samo zaś wykonywanie tego mnożenia oprzeć możemy na dowiedzionych własnościach pierwiastków.

Np. $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{27}\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{108}$; ten iloczyn jest liczbą niewymierną, która może być zastąpiona przez ułamek tak jej bliski, jak chcemy. Weźmy jednak taki przykład: $\sqrt{3}\sqrt[3]{12}\sqrt[6]{12}=\sqrt[6]{3^3.3^2.2^4.3.2^2}=6$; tu iloczyn jest liczbą wymierną, chociaż każdego z jego czynników można znaleźć tylko wartość przybliżoną.

Podobnie np. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$, zaś $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$.

39. W części I wprowadzając litery na oznaczenie liczb, mieliśmy na uwadze liczby całkowite i ułamkowe, tak dodatne jak i ujemne. W algebrze może litera oznaczać jakąkolwiek z liczb, z któremi w tej nauce mamy do czynienia. Ponieważ obecnie wprowadziliśmy liczby niewymierne, przeto odtąd przyjmować będziemy ogólnie, że litera może także oznaczać liczbę niewymierną czyto dodatną, czyteż ujemną. Tak np. gdy w pewnem wyrażeniu algebraicznem znajdzie się litera a, co do której nie robimy zastrzeżenia, iż może ona przyjmować tylko wartości wymierne, należy rozumieć, iż możemy jej nadawać także wartości niewymierne, np. $a=\sqrt[4]{12}$, $a=\sqrt[3]{5}$ i t. d.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE NIEWYMIERNE.

40. Chociaż litera może oznaczać liczbę niewymierną, to jednak wyrażenie algebraiczne, nie zawierające pierwiastka, pod którego znakiem byłaby litera, jest »względem liter« wyrażeniem czyto całkowitem, czyteż ułamkowem.

41. Rozumiejąc przez a jakąkolwiek możliwą wartość tej litery, należy $\sqrt[n]{a}$ uważać wogóle za liczbę niewymierną, która jednak przy pewnych szczególnych wartościach (np. $1, 2^n, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n}{3^n}, \ldots$), nadawanych literze a, może stać się wymierną.

Gdy w wyrażeniu algebraicznem (po dokonaniu uproszczeń) pod znakiem pierwiastka znajduje się liczba przedstawiona przez literę, to nazywamy je *wyrażeniem algebraicznem niewymiernem*; takiemi są np. wyrażenia:

$$2a^2+3ab\sqrt[3]{ab^2},\qquad \frac{2a}{\sqrt{a+\sqrt{b}}},\qquad 4a^2b-\frac{\sqrt[4]{3ab^3}}{a+b}.$$

Powiemy więc: *jeżeli w wyrażeniu algebraicznem, w którem mogą być wskazane do wykonania na liczbach, wyrażonych przez litery, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi, jest wskazane wyciąganie pierwiastka, pod którego znakiem znajduje się liczba, przedstawiona przez literę, to wyrażenie takie nazywamy niewymiernem.*

W przeciwstawieniu temu wyrażenia algebraiczne całkowite i ułamkowe nazywają się wyrażeniami algebraicznemi wymiernemi. Tak np. wyrażenia

$$3a+2b\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad 4a+\frac{b}{\sqrt{2}}, \qquad 4a^2b-\frac{\sqrt{3}}{2b}$$

są wyrażeniami algebraicznemi wymiernemi, pierwsze dwa całkowitemi, ostatnie ułamkowem.

Wyrażenia więc algebraiczne dzielą się na wymierne i niewymierne, a pierwsze z nich dzielą się na całkowite i ułamkowe. Uwidocznia to następujący schemat:

$$\text{wyrażenia algebraiczne}\begin{cases}\text{wymierne}\begin{cases}\text{całkowite}\\ \text{ułamkowe}\end{cases}\\ \text{niewymierne}\end{cases}$$

Wyrażenia liczebne mogą być również niewymierne pierwiastkowe, lub wymierne, a te ostatnie mogą być całkowite lub ułamkowe. Tak np. wyrażenia: $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$, $2+\frac{3}{\sqrt{3}}$ są wyrażeniami liczebnemi niewymiernemi pierwiastkowemi. Liczebne zaś wyrażenia $5+2\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\pi\sqrt{3}$, gdzie π oznacza stosunek okręgu koła do jego średnicy, są także wyrażeniami liczebnemi niewymiernemi, ale niepierwiastkowemi, gdyż w każdem z nich znajduje się liczba przestępna π.

42. Chociaż wyrażenie niewymierne nie jest ani całkowite, aniteż ułamkowe, to jednak, jeżeli pierwiastek znajduje się w dzielniku, mówić się zwykło, że mamy »w mianowniku« pierwiastek, jakgdyby się szczególną uwagę zwracało na pozorny kształt ułamkowy takiego wyrażenia niewymiernego. Tak np. mówi się, że w mianowniku wyrażenia $\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$ znajduje się pierwiastek.

Jeżeli w wyrażeniu niewymiernem, mającem kształt ułamka, chcemy usunąć z mianownika pierwiastek, to mówimy, że chcemy znieść niewymierność w mianowniku (den Nenner rational machen). Np. mnożąc licznik i mianownik powyższego pozornego ułamka przez $\sqrt{c}$, mieć będziemy

$$\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{c}}{(\sqrt{c})^2}=\frac{a\sqrt{c}-\sqrt{bc}}{c}.$$

Osobliwie, kiedy mamy liczebne wyrażenia, zniesienie niewymierności w mianowniku bywa pożądane. Np.

$$\frac{8}{\sqrt{27}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{27}\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Z dwu postaci: $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ i $\frac{8}{\sqrt{27}}$ naszej liczby pierwsza jest dogodniejsza. Gdy bowiem mamy $\frac{8\sqrt{3}}{9}$, to wiemy, iż jedność została rozłożoną na 9 równych części i że ilość takich części ($8\sqrt{3}$ czyli $\sqrt{192}$) mamy wziąć z pewnem przybliżeniem. Wyznaczywszy np. ułamek, różniący się od $\sqrt{192}$ mniej, niż o $\frac{1}{10^3}$, będziemy mieli wartość naszej liczby, różniącą się od istotnej mniej niż o $\frac{1}{9.10^3}$, a więc także mniej niż o $\frac{1}{10^3}$. Gdy zaś mamy $\frac{8}{\sqrt{27}}$, to, naprzód, nie możemy powiedzieć, jakich mianowicie części jedności mamy tu wziąć 8, a powtóre, jeżeli wyznaczymy $\frac{1}{\sqrt{27}}$ z przybliżeniem np. na $\frac{1}{10^3}$, to, biorąc takich liczb 8, możemy mieć przybliżenie liczby $\frac{8}{\sqrt{27}}$, różniące się od niej mniej niż o $\frac{8}{10^3} > \frac{1}{10^3}$.

Dlatego staramy się, osobliwie w ostatecznym wypadku rachunku, znieść niewymierność w mianowniku. Np.

1). $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{ac}}{bc}$.

2). $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{cd^2}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{c^2d}}{b\sqrt[3]{c^3d^3}} = \frac{\sqrt[6]{a^3c^4d^2}}{bcd}$.

3). $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$.

4). $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}][(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]} =$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

5). $\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{15}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} =$

$$= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+2\sqrt{2})(1-3\sqrt{3})}{3(1+3\sqrt{3})(1-3\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{15}+8\sqrt{5}+7\sqrt{6}-11\sqrt{2}}{78}.$$

43. Jeżeli mamy równanie takie, iż w niem, po przeniesieniu wszystkich wyrazów, zawierających niewiadome, na jednę stronę i uskutecznieniu redukcyi, pozostaje wyraz, w którym pod znakiem pierwiastka znajduje się niewiadoma, to równanie takie nazywamy *równaniem niewymiernem*. W przeciwstawieniu temu równanie, w którem, po wykonaniu redukcyi, niema wyrazu, zawierającego niewiadomą pod znakiem pierwiastka, nazywamy *równaniem wymiernem*.

Równanie niewymierne staramy się doprowadzić do równania wymiernego, podnosząc obie strony do odpowiedniej jednakowej potęgi, przyczem co do pierwiastków początkowego równania niewymiernego pamiętać należy o tem, cośmy powiedzieli w art. 7-ym. Np. obie strony równania niewymiernego

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x}=2$$

podnosząc do kwadratu, dojdziemy do równania

$$4x - x^2 = 0,$$

które ma dwa pierwiastki $x = 0$ i $x = 4$. Pierwszy z nich sprawdza dane równanie niewymierne, a więc jest jego pierwiastkiem; podstawiając zaś w owo równanie wartość $x = 4$, otrzymalibyśmy $-2 = 2$, co być nie może. A więc, chociaż otrzymane równanie ma dwa pierwiastki, to jednak tylko jeden z nich jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego.

RÓWNANIE NIEWYMIERNE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

44. 1). $$\sqrt{x+15} + \sqrt{x-24} - \sqrt{x-13} = \sqrt{x}. \qquad (\alpha)$$

Gdybyśmy obie strony podnieśli do kwadratu, otrzymalibyśmy po lewej, oprócz wyrazów wymiernych, także trzy pierwiastki; tymczasem, jeżeli przeniesiemy jeden z wyrazów na stronę prawą,

$$\sqrt{x+15} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x} + \sqrt{x-13},$$

po podniesieniu obu stron do kwadratu mieć będziemy równanie, w którem będą tylko dwa pierwiastki,

$$2x - 9 + 2\sqrt{(x+15)(x-24)} = 2x - 13 + 2\sqrt{x(x-13)},$$

czyli $$\sqrt{(x+15)(x-24)} - \sqrt{x(x-13)} = -2.$$

Następnie: $$2x^2 - 22x - 360 - 2\sqrt{x(x-13)(x+15)(x-24)} = 4,$$

$$\sqrt{x(x-13)(x+15)(x-24)} = x^2 - 11x - 182,$$

$$x(x-13)(x+15)(x-24) = (x^2 - 11x - 182)^2,$$

$$676x = 33124, \qquad \text{skąd} \quad x = 49.$$

Ta wartość x jest istotnie pierwiastkiem równania (α), albowiem po podstawieniu jej otrzymujemy równość $8 + 5 - 6 = 7$.

2). $$\frac{a}{\sqrt{a+x}} - \sqrt{a+x} = \sqrt{2a+x}. \qquad (\beta)$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu, mieć będziemy

$$\frac{a^2}{a+x} - 3a = 0; \qquad (\gamma)$$

mnożąc obie strony tego równania przez $a + x$, dochodzimy do równania

$$3ax + 2a^2 = 0, \qquad \text{skąd} \quad x = -\tfrac{2}{3}a.$$

Ponieważ przy tej wartości x liczba $a + x$ jest od zera różna, przeto (I, art. 156) $x = -\frac{2}{3}a$ jest pierwiastkiem równania (γ). Ta wartość jest także pierwiastkiem równania (β), gdyż po jej podstawieniu mamy równość $3\sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{1}{3}a} = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

3). Weźmy na uwagę dwa równania:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+2}, \qquad \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+2}. \qquad (\delta)$$

Podnosząc strony tych równań do kwadratu, otrzymamy odpowiednio:

$$-\sqrt{(x+5)(x+3)} = x, \qquad \sqrt{(x+5)(x+3)} = x,$$

a następnie w obu razach

$$8x + 15 = 0, \qquad \text{skąd} \quad x = -1\tfrac{7}{8}.$$

Podstawiając tę wartość w równania (δ), otrzymamy odpowiednio:

$$\tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

Widzimy więc, że pierwsze z równań (δ) ma pierwiastek $x=-1\frac{7}{8}$, drugie zaś z tych równań nie ma pierwiastka, a więc jest niemożliwe.

4). $$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2}, \tag{ε}$$

$$(1-a)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+2\sqrt{1-a^2}+(1+a)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=4\sqrt{1-a^2},$$

$$(1-a)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+(1+a)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt{1-a^2},$$

$$(1-a)^2\frac{1+x}{1-x}+2(1-a^2)+(1+a)^2\frac{1-x}{1+x}=4(1-a^2). \tag{ζ}$$

Pomnóżmy obie strony równania (ζ) przez $1-x^2$; otrzymamy równanie

$$x^2-2ax+a^2=0, \qquad \text{czyli} \quad (x-a)^2=0,$$

co jest możliwe tylko wtedy, kiedy

$$x-a=0, \qquad \text{skąd} \quad x=a.$$

Ta wartość $x=a$ nie przywodzi liczby $1-x^2$ do zera pod warunkiem, że nie jest ani $a=1$, aniteż $a=-1$. Zawsze jednak liczba $x=a$ jest pierwiastkiem równania (ζ). Wstawiając ją w równanie (ε), otrzymamy równość $\sqrt[4]{1-a^2}+\sqrt[4]{1-a^2}=2\sqrt[4]{1-a^2}$, która wskazuje, że wartość $x=a$ jest pierwiastkiem równania (ε).

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA KWADRATOWEGO.

45. Z tego, cośmy mówili w art. 32-im, wynika, że, wyciągając pierwiastek kwadratowy z jednomianu, mieć możemy dwa przypadki: albo wykładniki wszystkich liter są parzyste, — wtedy otrzymujemy jednomian; albo też w danym jednomianie jest wykładnik litery nieparzysty, — wtedy pierwiastek jest wyrażeniem niewymiernem. Np.

$$\sqrt{16a^4b^{2n+6}}=4a^2b^{n+3}; \qquad \sqrt{8a^4b^{2n+6}}=2\sqrt{2}\,a^2b^{n+3};$$

$$\sqrt{9a^{2m+1}b^{3n+5}c^4}=3a^mb^{n+2}c^2\sqrt{ab^{n+1}};$$

w dwu pierwszych przykładach mamy pod znakiem pierwiastka kwadrat jednomianu, w ostatnim zaś wyrażenie, które nie jest kwadratem jednomianu.

Wiemy (art. 9), że

$$(a_1+a_2+\ldots)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+2a_1a_3+2a_2a_3+a_3^2+\ldots \tag{1}$$

Przypuśćmy, że wielomian $a_1+a_2+a_3+\ldots$ jest uporządkowany np. według malejących potęg litery głównej i że ona wchodzi do wyrazu a_1 z wykładnikiem m, do wyrazu a_2 z wykładnikiem $m-1$, i t. d. W kwadracie tego wielomianu największy wykładnik litery głównej będzie $2m$ i on się znajdzie tylko w wyrazie a_1^2; wykładnik $2m-1$ nad literą główną znaleźć się może tylko w wyrazie $2a_1a_2$; wykładnik $2m-2$ nad literą główną znaleźć się może w dwu wyrazach: a_2^2 i $2a_1a_3$, tak iż w kwadracie tego wielomianu mogła być uskuteczniona redukcya owych dwu wyrazów; podobnie mogła być uskuteczniona redukcya innych dwu lub więcej dalszych wyrazów po prawej stronie równości (1), ale ani przedostatni, aniteż ostatni wyraz tego wyrażenia redukcyi nie ulegną. Zauważmy jeszcze, że wielomian po prawej stronie równości (1) możemy tak napisać:

$$a_1^2 + (2a_1 + a_2)a_2 + (2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3 + \dots \qquad (2)$$

Zaznaczywszy to, przystąpmy do wyciągania pierwiastka kwadratowego z wielomianu. Np.

$$\sqrt{25a^6b^2 - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8}\,.$$

Wielomian pod pierwiastkiem jest uporządkowany według malejących potęg litery a. Ponieważ

$$25a^6b^2 = a_1^2, \qquad \text{przeto} \quad a_1 = \sqrt{25a^6b^2} = 5a^3b,$$

t. j., *wyciągając z pierwszego wyrazu danego wielomianu pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy pierwszy wyraz szukanego pierwiastka.* Odjąwszy jego kwadrat od danego wielomianu,

$$\begin{array}{r} 25a^6b^2 - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8 \\ \pm 25a^6b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8\,, \end{array}$$

otrzymamy resztę, której pierwszym wyrazem jest $-30a^5b^3$. Ponieważ

$$-30a^5b^3 = 2a_1a_2 = 10a^3b\,.\,a_2, \qquad \text{przeto} \quad a_2 = (-30a^5b^3):(10a^3b),$$

t. j. *aby znaleźć drugi wyraz pierwiastka, należy drugi wyraz wielomianu danego podzielić przez podwojony znaleziony już pierwszy wyraz pierwiastka.* Otrzymamy z tego dzielenia $a_2 = -3a^2b^2$. Mając już a_1 i a_2, utwórzmy drugą część wyrażenia (2),

$$(2a_1 + a_2)a_2 = -30a^5b^3 + 9a^4b^4.$$

Odejmując ten dwumian od powyższej reszty,

$$\begin{array}{r} -30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8 \\ \mp 30a^5b^3 \pm 9a^4b^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline 40a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8, \end{array}$$

otrzymamy nową resztę, której pierwszy wyraz jest $40a^4b^4$. Reszta ta przedstawia wyrazy

$$2a_1a_3 + 2a_2a_3 + a_3^2 + 2a_1a_4 + \dots;$$

w niej najwyższy wykładnik litery głównej a jest tylko w jednym wyrazie $2a_1a_3$. Ponieważ tedy

$$40a^4b^4 = 2a_1a_3, \qquad \text{przeto} \quad a_3 = (40a^4b^4):(10a^3b) = 4ab^3,$$

t. j. *dzieląc pierwszy wyraz drugiej reszty przez podwojony pierwszy wyraz pierwiastka, otrzymujemy trzeci wyraz pierwiastka.* Mając więc już wyrazy a_1, a_2 i a_3, utworzymy trzecią część wyrażenia (2), $(2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3$, i odejmiemy ją od ostatniej reszty. I t. d.

Jeżeli w oddzielnych resztach nie będziemy wypisywali wszystkich wyrazów, lecz tylko te, do których podobne będziemy mieli w następnych odjemnikach, to całe nasze postępowanie tak przedstawić możemy:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{25a^6b^2-30a^5b^3+49a^4b^4-4a^3b^5+4a^2b^6+16ab^7+4b^8} & = 5a^3b-3a^2b^2+4ab^3+2b^4 \\
\pm 25a^6b^2 & \\
\quad -30a^5b^3+49a^4b^4 & (10a^3b-3a^2b^2).(-3a^2b^2) \\
\quad \mp 30a^5b^3 \pm 9a^4b^4 & \\
\qquad 40a^4b^4-4a^3b^5+4a^2b^6 & (10a^3b-6a^2b^2+4ab^3).4ab^3 \\
\qquad \pm 40a^4b^4 \mp 24a^3b^5 \pm 16a^2b^6 & \\
\qquad\quad 20a^3b^5-12a^2b^6+16ab^7+4b^8 & (10a^3b-6a^2b^2+8ab^3+2b^4).2b^4 \\
\qquad\quad \pm 20a^3b^5 \mp 12a^2b^6 \pm 16ab^7 \pm 4b^8 & \\
\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

Reszta 0 wskazuje, iż otrzymany czworomian jest pierwiastkiem kwadratowym z danego wielomianu.

Taksamo postępowalibyśmy, gdybyśmy mieli wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu niejednorodnego, w którego wszystkich wyrazach, lub we wszystkich prócz w jednym, byłaby tażsama litera.

Ale, jeżeliby należało wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu, w którym w różnych wyrazach różne zachodzą litery, to o uporządkowaniu takiego wielomianu podług potęg jednej litery mowy być nie może. W takim razie należy jeden z tych wyrazów, które są kwadratami jednomianów, mianowicie ten, który zawiera najwyższą potęgę jednej z liter, obrać za pierwszy, jeżeli przez podwojony pierwiastek z tego wyrazu jest podzielnych dostatecznie wiele wyrazów danego wielomianu. W każdej zaś reszcie należy brać za pierwszy wyraz taki, który jest podzielny przez podwojony pierwszy wyraz pierwiastka, przyczem znów zważać należy na to, czy dość dogodny otrzymujemy wyraz następny pierwiastka; i t. d. Np.

$$\sqrt{4a^2b^2d^2+4a^2b^4+a^2d^4-8ab^3cd^2-16ab^5c-8ab^3c-4abcd^2+16b^6c^2+16b^4c^2+4b^2c^2}.$$

Tu kwadratami jednomianów są trzy pierwsze i trzy ostatnie wyrazy. Pierwszego wyrazu nie możemy przyjąć jako kwadrat pierwszego wyrazu pierwiastka, gdyż przez $2abd$ są z innych wyrazów danego wielomianu podzielne tylko dwa, a wielomian, jako mający 10 wyrazów, nie może być kwadratem trójmianu; zatem za pierwszy wyraz danego wielomianu możemy z wyrazów, do których wchodzi a, wziąć albo $4a^2b^4$, alboteż a^2d^4. Gdy przyjmiemy jako wyraz pierwszy $4a^2b^4$, to

$$\begin{array}{l}
\sqrt{4a^2b^4+4a^2b^2d^2+a^2d^4-\ldots} = 2ab^2+ad^2-4b^3c-2bc \\
\pm 4a^2b^4 \\
\quad 4a^2b^2d^2+a^2d^4 \\
\quad \pm 4a^2b^2d^2 \pm a^2d^4 \\
\qquad -16ab^5c-8ab^3cd^2+16b^6c^2 \\
\qquad \mp 16ab^5c \mp 8ab^3cd^2 \pm 16b^6c^2 \\
\qquad\quad -8ab^3c-4abcd^2+16b^4c^2+4b^2c^2 \\
\qquad\quad \mp 8ab^3c \mp 4abcd^2 \pm 16b^4c^2 \pm 4b^2c^2 \\
\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

(W drugiej reszcie nie można było za pierwszy wyraz przyjąć wyrazu $-8ab^3d^2$, gdyż w danym wielomianie niema wyrazu $(-2bd^2)^2$; dlatego za pierwszy wyraz tej reszty przyjąć wypadło wyraz $-16ab^5c$).

46. Wiemy, że kwadrat jednomianu jest jednomianem, kwadrat dwumianu jest trójmianem, w kwadracie zaś wielomianu, mającego trzy lub więcej wyrazów, tak pierwsze dwa wyrazy, jak i dwa ostatnie redukcyi nie ulegają. Niema więc przypadku, aby wyrażenie algebraiczne, podniesione do kwadratu, dawało dwumian. Innemi słowy, *pierwiastek kwadratowy z dwumianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

Jeżeli wielomian, z którego mamy wyciągnąć pierwiastek, jest już uporządkowany i *jeżeli albo pierwszy wyraz nie jest kwadratem jednomianu, albo drugi wyraz nie jest podzielny przez podwojony pierwiastek z wyrazu pierwszego, albo ostatni wyraz nie jest kwadratem jednomianu, alboteż przedostatni nie jest podzielny przez podwojony pierwiastek z wyrazu ostatniego, to pierwiastek kwadratowy z danego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

W tylkoco wyliczonych przypadkach zgóry wnieść możemy, iż pierwiastek z danego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem. W wielu jednak przypadkach, dopiero uskuteczniając wyciąganie pierwiastka, przekonywamy się, że dany wielomian nie jest kwadratem wielomianu, czyli, że pierwiastek kwadratowy z niego jest wyrażeniem niewymiernem. Tak np.

$$\sqrt{a^2+2ab+2b^2+2ac+8bc+4c^2}, \quad a+b+c$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b^2+6bc+3c^2;$$

widzimy tedy, że dany pierwiastek jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem. — Jeżeli wielomian dany nazwiemy n, sumę wyrazów otrzymanych przy wyciąganiu pierwiastka nazwiemy α, a resztę pozostałą nazwiemy r, to $n=\alpha^2+r$, tak iż $n-r=\alpha^2$, t. j. $\sqrt{n-r}$ jest wyrażeniem wymiernem.

47. Wiemy (art. 10), że, podnosząc do kwadratu liczbę całkowitą m-cyfrową, otrzymujemy liczbę, mającą cyfr albo $2m$, albo $2m-1$. Jeżeli więc pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej jest liczbą całkowitą i w liczbie pod znakiem pierwiastka jest cyfr $2m$, lub $2m-1$, to pierwiastek będzie liczbą m-cyfrową.

Gdy np. chcemy znaleźć $\sqrt{142129}$, to zauważymy naprzód, że pierwiastek z tej liczby całkowitej, jako 6-ocyfrowej, będzie miał część całkowitą 3-cyfrową, t. j. złożoną z setek, dziesiątków i jedności. Aby znaleźć setki pierwiastka, zważmy, że kwadrat setek ma na końcu 4 zera, a więc kwadrat cyfry setek jest zawarty w liczbie 14. Niewiększy od 14-u, a najbliższy 14-u kwadrat liczby jednocyfrowej jest 9, jego zaś pierwiastek jest 3; a więc w pierwiastku są 3 setki. Odjąwszy kwadrat setek od naszej liczby, otrzymamy resztę 52129, w której się mieszczą pozostałe składniki kwadratu. Podwojony iloczyn setek przez dziesiątki ma na końcu 3 zera, kwadrat zaś dziesiątków ma na końcu 2 zera. Uwzględniając te dwa składniki w celu odnalezienia dziesiątków pierwiastka, oddzielmy w naszej reszcie ostatnie dwie cyfry, którym w obu wspomnianych składnikach odpowiadają zera. Zamiast więc mówić: w 52129-u mieści się podwojony iloczyn 300-u przez dziesiątki i kwadrat dziesiątków, powiemy: w liczbie 521 mieści się podwojony iloczyn 30-u przez cyfrę dziesiątków i kwadrat cyfry dziesiątków. Dla wyznaczenia cyfry dziesiątków biorąc na uwagę pierwszy z wymienionych dwu składników, zamiast dzielić 521 przez 2.30, możemy dzielić tylko 52 przez 2.3, co zaznaczamy, oddzielając w naszej reszcie 521 cyfrę 1 znaczkiem, 52,1. W 52-u 6 mieści się 8 razy. Jeżeli 8 nie jest zbyt wiele, to od liczby 521 nie jest większa suma

$$2.30.8+8^2, \quad \text{czyli} \quad (2.30+8).8=(60+8).8=68.8=544.$$

Ta liczba jednak jest większa od 521, a więc 8 dziesiątków jest zbyt wiele. Próbujmy zatem wziąć 7 dziesiątków;

$$2.30.7+7^2, \quad \text{czyli} \quad 67.7=469.$$

Ta liczba 469 już nie jest większa od liczby 521, a więc możemy przyjąć, iż w pierwiastku mamy 7 dziesiątków. Zwykle tak robimy, iż podwoiwszy pierwszą cyfrę 3, piszemy na boku owe 6 i, po znalezieniu drugiej cyfry pierwiastka, piszemy tę znalezioną cyfrę 7 w pierwiastku obok poprzedniej cyfry, oraz przypisujemy 7 do napisanej na boku liczby 6 i uskuteczniamy mnożenie tej liczby 67 przez cyfrę 7 pierwiastka. Odjąwszy 469 od 521, otrzymamy 52; do tej liczby dopisujemy następujące jeszcze dwie cyfry, poprzednio oddzielone. W reszcie tedy 5229 mieści się podwojony iloczyn setek i dziesiątków naszej liczby przez szukane jedności, oraz kwadrat jedności. Dla oznaczenia cyfry jedności biorąc na uwagę pierwszy z tych dwu składników, zamiast mówić: w liczbie 5229 mieści się podwojony iloczyn 370-u przez cyfrę jedności, możemy, oddzieliwszy znowu ostatnią cyfrę reszty, powiedzieć: w liczbie 522 mieści się podwojony iloczyn 37-u przez cyfrę jedności. W 522-u $2\times 37=74$ mieści się 7 razy. Piszemy więc w pierwiastku na następnem miejscu 7 i do liczby 74 dopisujemy tę cyfrę 7, a następnie mnożymy tak powstałą liczbę 747 przez cyfrę 7 pierwiastka, gdyż

$$2.370.7+7^2=(2.370+7).7=747.7.$$

Po odjęciu tej liczby 5229 od ostatniej reszty otrzymujemy 0, a więc pierwiastkiem kwadratowym z danej liczby jest liczba 377.

Nie wypisując w oddzielnych resztach tych cyfr, pod któremi zawsze wypadają zera, możemy całe to działanie tak przedstawić:

```
√14|21|29 = 377            podobnie  √4|04|01|80|40|04 = 201002
 9                                    4
 52,1        67                       4                 4
 469                                  40,1              401
   522,9     747                      401
   5229                                     8,0         402
     0;                                     804,0       4020
                                            80400,4     402002
                                            804004
                                                 0.
```

Wiemy, że podnosząc do kwadratu liczbę dziesiętną, otrzymujemy liczbę dziesiętną, mającą dwa razy więcej cyfr dziesiętnych (art. 10). Jeżeli więc pierwiastek kwadratowy z liczby dziesiętnej skończonej jest również liczbą dziesiętną skończoną, to ma ona dwa razy mniej cyfr dziesiętnych, niż liczba pod znakiem pierwiastka. Jakoż np.

$$\sqrt{404{\cdot}01804004} = \sqrt{40401804004 \times \frac{1}{10^8}} = 201002 \times \frac{1}{10^4} = 20{\cdot}1002.$$

Mogliśmy wprost w pierwiastku po tej cyfrze, która wypadła po uwzględnieniu ostatniej z dwucyfrowych grup całkowitej części liczby danej, postawić znak, oddzielający w nim cyfry dziesiętne.

48. Zauważmy, że kwadrat liczby całkowitej kończy się na taką cyfrę, na jaką się kończy kwadrat jedności tej liczby. Jeżeli zaś wypiszemy kwadraty liczb jednocyfrowych, to dostrzeżemy, że one się kończą na cyfry 1, 4, 5, 6, 9. Nadto: jeżeli liczba dana, mająca dwie lub więcej cyfr, kończy się na 5, to dwie ostatnie cyfry jej kwadratu przedstawiają liczbę 25; kwadrat liczby zakończonej na zera ma na końcu parzystą ilość zer, a przed niemi jednę z cyfr 1, 4, 5, 6, 9; kwadrat zaś liczby dziesiętnej skończonej ma parzystą ilość cyfr dziesiętnych. A więc, jeżeli liczba, z której mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, α) ma nieparzystą ilość cyfr dziesiętnych, β) kończy się na cyfry 2, 3, 7, 8, albo, kończąc się na 5, ma przedostatnią cyfrę inną niż 2, γ) kończy się na nieparzystą ilość zer, lub, kończąc się na parzystą ilość zer, ma przed zerami cyfrę 2, 3, 7, 8, alboteż cyfrę 5 z poprzedzającą cyfrą inną niż 2, to w tych razach zgóry wiemy, że pierwiastek kwadratowy z tej liczby jest liczbą niewymierną.

Niech pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej lub dziesiętnej nie będzie liczbą wymierną. Np. $\sqrt{185}$

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{1|85} = 13{\cdot}601\ldots & \\
\underline{1} & \\
\ \ 8,5 & 23 \\
\ \ \underline{69} & \\
\ \ 16 & \\
\ \ 160,0 & 266 \\
\ \ \underline{1596} & \\
\qquad 4 & \\
\qquad 40,0 & 272 \\
\qquad 4000,0 & 27201 \\
\qquad \underline{27201} & \\
\qquad 12799 &
\end{array}$$

Ta liczba niewymierna jest większa od 13 a mniejsza od 14. Jeżeli idzie o wyznaczenie części dziesiątych pierwiastka, to, zważywszy, że 16 jedności jest toż samo, co 1600 setnych, możemy do 16-u dopisać dwa zera i działanie dalej prowadzić, postawiwszy w pierwiastku po 13 znak, oddzielający cyfry dziesiętne. Znajdziemy, że ta liczba jest większa od 13·6 a mniejsza od 13·7. Podobnie dalej moglibyśmy szukać np. części setnych i tysiącznych pierwiastka, kolejno przypisując do otrzymywanych reszt po dwa zera. Znajdziemy, że ta liczba niewymierna jest większa od 13·60 a mniejsza od 13·61, większa od 13·601 a mniejsza od 13·602. A zatem tej liczby niewymiernej wartościami przybliżonemi na 1, na 0·1, na 0·01, na 0·001 z niedomiarem są wartości 13, 13·6, 13·60, 13·601, z nadmiarem zaś 14, 13·7, 13·61, 13·602. Oczywiście, prowadząc takie postępowanie dalej, moglibyśmy oznaczyć przybliżenia na 0·0001, i t. d. (W pierwiastku, jako przedstawiającym liczbę niewymierną, ułamek dziesiętny jest nieskończony nieperyodyczny).

Podobnie, gdy mamy np. $\sqrt{0{\cdot}00144}$, to, ponieważ w liczbie danej mamy 5 cyfr dziesiętnych, dopiszemy na końcu 0, aby mieć parzystą ich ilość.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{0{\cdot}00|14|40} = 0{\cdot}037\ldots & \\
\quad 9 & \\
\hline
\quad 54{,}0 & 67 \\
\quad 469 & \\
\hline
\quad\ \ 71 &
\end{array}
$$

Pierwiastek zatem z naszej liczby jest zawarty między 0·037 a 0·038 i moglibyśmy, przypisując tak do ostatniej, jak i do dalszych reszt po dwa zera, wyznaczyć dalsze cyfry dziesiętne pierwiastka.

Jeżeli więc mamy z liczby całkowitej lub dziesiętnej wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 0·1, 0·01 i t. d., to, w danej liczbie uwzględniwszy dwa razy tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia, możemy nie zważać na znak, oddzielający cyfry dziesiętne, i z niej, jak z liczby całkowitej, wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 1, a w otrzymanym pierwiastku oddzielić tyle cyfr na dziesiętne, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia.

49. Gdy, mając liczbę całkowitą N, wyznaczamy $\sqrt{N}$ z przybliżeniem na 1, to, otrzymawszy zwykłym sposobem więcej niż połowę cyfr początkowych pierwiastka, możemy pozostałe otrzymać przy pomocy zwykłego dzielenia.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n+1$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć początkowych jego $n+1$ cyfr. Niech one, po dopisaniu do nich n zer, przedstawiają liczbę a i niech ξ będzie pozostałą częścią pierwiastka, tak iż $(a+\xi)^2 = N$. Jest więc $N - a^2 = 2a\xi + \xi^2$. Lecz $N - a^2$ przedstawia resztę, pozostałą po wyznaczeniu $(n+1)$-szej cyfry pierwiastka; tę resztę nazwijmy r. A zatem $r = 2a\xi + \xi^2$, skąd $\xi = \frac{r}{2a} - \frac{\xi^2}{2a}$. Ponieważ całkowita część liczby ξ ma n cyfr, przeto całkowita część liczby ξ^2 ma najwięcej $2n$ cyfr, zaś $2a$ ma najmniej $2n+1$ cyfr, zatem $\frac{\xi^2}{2a} < 1$ i ξ jest wartością ilorazu $\frac{r}{2a}$, przybliżoną na 1.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć jego początkowych $n+1$ cyfr. Wprowadzając podobne oznaczenia i podobnie rozumując, przekonamy się, iż dalsze cyfry pierwiastka przedstawiają liczbę, która jest przybliżoną na 1 wartością ilorazu $\frac{r}{2a}$.

Np. $\sqrt{1|52|97|74|50} = 123\ldots$; $\quad \frac{1687450}{2 \times 12300} = 68{\cdot}5\ldots$

$$
\begin{array}{ll}
\ldots\ldots & \\
\hline
\quad 168 & 12300 + 68 = 12368.
\end{array}
$$

50. Pierwiastek kwadratowy z ułamka zwyczajnego jest, jak wiemy (art. 35), wtedy tylko liczbą wymierną, kiedy jednocześnie licznik i mianownik jego postaci nieskracalnej są kwadratami liczb całkowitych; wówczas stosujemy drugi z wzorów (7) art. 26-go. Np.

$$\sqrt{\tfrac{404018040004}{142129}} = \tfrac{201002}{377} = 533\tfrac{61}{377}; \quad \sqrt{0{\cdot}07\dot{1}} = \sqrt{\tfrac{16}{225}} = \tfrac{4}{15} = 0{\cdot}2\dot{6}.$$

Jeżeli pierwiastek z ułamka zwyczajnego jest liczbą niewymierną, to wartość przybliżoną pierwiastka wyrażamy albo w postaci liczby dziesiętnej, alboteż w postaci ułamka zwyczajnego. Jeżeli chcemy ją otrzymać jako liczbę dziesiętną, to należy dany ułamek wyrazić jako dziesiętny i z tak otrzymanej liczby dziesiętnej wyciągać pierwiastek kwadratowy w sposób objaśniony w art. 48-ym. Tak np., aby mieć $\sqrt{2\frac{2}{3}}$ z przybliżeniem na $0{\cdot}001$, weźmiemy $\sqrt{2{\cdot}66|66|66}$, a więc $1{\cdot}632$; ta wartość jest przybliżeniem z niedomiarem, zaś $1{\cdot}633$ z nadmiarem.

Jeżeli wogóle $\sqrt{a}$ jest liczbą niewymierną, a chcemy mieć jej wartość przybliżoną na $\dfrac{1}{q}$, gdzie q jest liczbą całkowitą, to, ponieważ $\sqrt{a} = \dfrac{\sqrt{aq^2}}{q}$, przeto, wyciągnąwszy w liczniku pierwiastek z przybliżeniem na 1, mieć będziemy wartość liczby $\sqrt{a}$ przybliżoną na $\dfrac{1}{q}$. Np. szukając wartości, przybliżonych na $\frac{1}{8}$, liczb $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\frac{3}{4}}$, $\sqrt{1\frac{5}{6}}$, będziemy mieli:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{128}}{8},\ \ \frac{11}{8}; \quad \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{176}}{8},\ \ \frac{13}{8}; \quad \sqrt{\frac{11}{6}} = \frac{\sqrt{\frac{11}{3} \times 32}}{8} = \frac{\sqrt{117{\cdot}\dot{3}}}{8},\ \ \frac{10}{8};$$

a więc wartości tych liczb, przybliżone na $\frac{1}{8}$ z niedomiarem, są odpowiednio: $1\frac{3}{8}$, $1\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{4}$, z nadmiarem zaś odpowiednio: $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{3}{8}$.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA SZEŚCIENNEGO.

51. Jeżeli mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z jednomianu, a w nim wszystkie wykładniki liter są podzielne przez 3, to, według art. 32-go, otrzymamy w pierwiastku także jednomian. Np.

$$\sqrt[3]{64a^6b^{3m}c^{3n+9}d^3} = 4a^2b^mc^{n+3}d; \quad \sqrt[3]{16a^6b^{3m}c^{3n+9}d^3} = 2\sqrt[3]{2}\,a^2b^mc^{n+3}d.$$

Jeżeli zaś nie wszystkie wykładniki liter w danym jednomianie są podzielne przez 3, to otrzymamy wyrażenie niewymierne. Np.

$$\sqrt[3]{27a^5b^{3m+1}c^{4n+8}d^{p+9}} = 3ab^mc^{n+2}d^3\sqrt[3]{a^2bc^{n+2}d^p}.$$

Podobnie, jak przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego z wielomianu, możemy objaśnić, iż, aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z wielomianu, należy, po uporządkowaniu go np. według malejących potęg litery, wziętej za główną, oprzeć postępowanie na wzorze (7), który wyprowadziliśmy w art. 11-ym. Np.

$$\sqrt[3]{8a^6-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6}.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek sześcienny z wyrazu pierwszego, przyjmiemy go jako a_1, t. j. jako pierwszy wyraz pierwiastka, $a_1 = 2a^2$. Odjąwszy jego sześcian od wielomianu pod pierwiastkiem, zauważymy, że w reszcie

$$-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6$$

pierwszy wyraz jest potrojonym iloczynem kwadratu pierwszego wyrazu pierwiastka przez niewiadomy drugi jego wyraz. Aby więc znaleźć ów drugi wyraz, wykonamy dzielenie $(-36a^5b):[3(2a^2)^2] = -3ab = a_2$. Utworzywszy następnie sumę $3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3$, odejmiemy ją od otrzymanej poprzednio reszty:

$$\begin{array}{r} -36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6 \\ \mp 36a^5b \pm 54a^4b^2 \mp 27a^3b^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 12a^4b^2 - 36a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6. \end{array}$$

Pierwszy wyraz tej reszty przedstawia wyraz $3a_1^2a^3$ wspomnianego wzoru; aby więc znaleźć wyraz a_3, uskutecznimy dzielenie $12a^4b^2 : 12a^4 = b^2$. Przy pomocy tego wyrazu utworzymy sumę t. j. $3(a_1 + a_2)^2a_3 + 3(a_1 + a_2)a_3^2 + a_3^3$

$$3(4a^4 - 12a^3b + 9a^2b^2)b^2 + 3(2a^2 - 3ab)b^4 + b^6,$$

i odejmiemy ją od poprzedniej reszty. Wszystkie wyrazy się znoszą, a więc dany wielomian jest sześcianem trójmianu $2a^2 - 3ab + b^2$.

Całe to postępowanie tak przedstawimy:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{8a^6 - 36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6} = 2a^2 - 3ab + b^2. & \\ \pm 8a^6 & \\ \hline \quad -36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 & [12a^4 + 3(2a^2)(-3ab) + 9a^2b^2](-3ab) \\ \quad \mp 36a^5b \pm 54a^4b^2 \mp 27a^3b^3 & \\ \hline \qquad\qquad 12a^4b^2 - 36a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6 & [3(2a^2 - 3ab)^2 + 3(2a^2 - 3ab)b^2 + b^4]b^2 \\ \qquad\qquad \pm 12a^4b^2 \mp 36a^3b^3 \pm 33a^2b^4 \mp 9ab^5 \pm b^6 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0. & \end{array}$$

52. Ponieważ, podnosząc do sześcianu wielomian, nie otrzymujemy ani dwumianu, aniteż trójmianu, przeto *pierwiastek sześcienny tak z dwumianu, jak i z trójmianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

Gdy wielomian pod znakiem pierwiastka sześciennego jest uporządkowany, to łatwo wnieść możemy, że, *kiedy czyto pierwszy, czyteż ostatni wyraz wielomianu nie jest sześcianem jednomianu, albo drugi jego wyraz nie jest podzielny przez potrojony kwadrat pierwiastka z pierwszego wyrazu, alboteż przedostatni nie jest podzielny przez potrojony kwadrat pierwiastka z ostatniego wyrazu, to pierwiastek sześcienny z tego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

W innych razach może się to okazać dopiero podczas uskuteczniania wyciągania pierwiastka.

53. Jeżeli pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej jest liczbą całkowitą i pod znakiem pierwiastka jest cyfr $3m$, albo $3m - 1$, alboteż $3m - 2$, to pierwiastek będzie liczbą m-cyfrową (art. 12).

Np. $\sqrt[3]{53582633}$, jako pierwiastek sześcienny z liczby 8-ocyfrowej, będzie liczbą 3-cyfrową t. j. złożoną z setek, dziesiątków i jedności. Ponieważ sześcian setek ma na końcu 6 zer, a więc sześcian cyfry setek jest zawarty w liczbie 53. Niewiększy od 53, a najbliższy 53 sześcian liczby jednocyfrowej jest 27, pierwiastek zaś z niego jest 3; a więc w pierwiastku są 3 setki. Odjąwszy sześcian setek od naszej liczby, otrzymamy resztę 26582633, w której mieszczą się pozostałe składniki sześcianu. Potrojony iloczyn kwadratu setek przez dziesiątki ma na końcu 5 zer, potrojony iloczyn setek przez kwadrat dziesiątków ma na końcu 4 zera, sześcian zaś dziesiątków ma na końcu 3 zera. Uwzględniając te 3 składniki w celu odnalezienia dziesiątków pierwiastka, oddzielmy w naszej reszcie ostatnie 3 cyfry, którym we wszystkich trzech wspomnianych składnikach odpowiadają zera. Zamiast więc mówić: w liczbie 26582633 mieści się potrojony iloczyn liczby 300^2 przez dziesiątki potrojony iloczyn 300-u przez kwadrat dziesiątków, oraz sześcian dziesiątków, powiemy: w 26582 mieści się potrojony iloczyn 30^2 przez cyfrę dziesiątków, potrojony iloczyn 30-u przez kwadrat cyfry dziesiątków, oraz sześcian cyfry dziesiątków. Dla wyznaczenia cyfry dziesiątków biorąc na uwagę pierwszy z wymienionych trzech składników, zamiast dzielić 26582 przez 3.30^2, możemy dzielić 265 przez 3.3^2, co zaznaczamy, oddzielając w naszej reszcie 26582 ostatnie dwie cyfry (82). W 265-u $3.3^2 = 27$ mieści się 9 razy; jeżeli ta cyfra nie jest zbyt wielka, to od 26582-u nie jest większe

$$3.30^2.9 + 3.30.9^2 + 9^3 = (2700 + 810 + 81).9 = 3591.9 = 32319.$$

Widzimy więc, że 9 dziesiątków jest zbyt wiele. Próbujmy wziąć 8 dziesiątków;

$$3.30^2.8 + 3.30.8^2 + 8^3 = (2700 + 720 + 64).8 = 3484.8 = 27872.$$

Ta liczba jest jeszcze zbyt wielka. Próbujmy więc wziąć 7 dziesiątków;

$$3.30^2.7 + 3.30.7^2 + 7^3 = (2700 + 630 + 49)7 = 3379.7 = 23653.$$

Ta liczba 23653 już nie jest większa od 26582, a więc w pierwiastku mamy 7 dziesiątków, które też w nim piszemy obok 3-ch setek. Po odjęciu 23653 od 26582 otrzymamy 2929, a ponieważ po liczbie 23653 następowały 3 zera, przeto do 2929 dopisujemy trzy cyfry, poprzednio oddzielone. W reszcie zatem 2929633 mieści się potrojony iloczyn kwadratu sumy setek i dziesiątków przez jedności, potrojony iloczyn sumy setek i dziesiątków przez kwadrat jedności, oraz sześcian jedności. Dla oznaczenia cyfry jedności biorąc na uwagę pierwszy z tych składników, zamiast mówić: w liczbie 2929633 mieści się iloczyn liczby 3.370^2 przez jedności, możemy, oddzieliwszy znowu dwie ostatnie cyfry reszty, powiedzieć: w liczbie 29296 mieści się iloczyn liczby 3.37^2 przez jedności. W 29296-u 4107 mieści się 7 razy. Piszemy więc w pierwiastku obok liczby 37 cyfrę 7. Utworzywszy sumę

$$3.370^2.7 + 3.370.7^2 + 7^3 = (410700 + 7770 + 49).7 = 418519.7 = 2929633$$

i odjąwszy ją od ostatniej reszty, otrzymujemy 0. A więc pierwiastkiem sześciennym z danej liczby jest liczba 377. Nie wypisując w resztach tych cyfr, pod któremi wypadają zera, tak to działanie przedstawimy:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{53|582|633} = 377 & \\
27 & \\
\hline
265.82 & (2700 + 730 + 49).7 = 3379.7 \\
23653 & \\
\hline
29296.33 & (410700 + 7770 + 49).7 = 418519.7 \\
2929633 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

Jeżeli mamy np. $\sqrt[3]{0{\cdot}000001728}$, to w pierwiastku będziemy mieli 3 cyfry dziesiętne. Ponieważ $\sqrt[3]{1728} = 12$, przeto $\sqrt[3]{0{\cdot}000001728} = 0{\cdot}012$.

54. W sześcianie liczby zakończonej na zera ilość końcowych zer jest podzielna przez 3; sześcian liczby dziesiętnej ma trzy razy więcej cyfr dziesiętnych, niż ich było w liczbie danej (art. 12). A więc, jeżeli liczba, z której mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, α) kończy się na zera, a ich ilość nie jest podzielna przez 3, β) jest liczbą dziesiętną skończoną, w której ilość cyfr dziesiętnych nie jest podzielna przez 3, to w tych razach zgóry wiemy, że ów pierwiastek jest liczbą niewymierną.

Niech pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej lub dziesiętnej będzie liczbą niewymierną. Np. $\sqrt[3]{10}$ jest liczbą niewymierną większą od 2, a mniejszą od 3. Może nam iść o to, aby znaleźć wartość tej liczby przybliżoną np. na 0·01.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{10} = 2{\cdot}15\ldots & \\
\underline{8} & \\
2 & \\
20{,}00 & (1200 + 60 + 1).1 \\
\underline{1261} & \\
739 & \\
7390{,}00 & (132300 + 3150 + 25).5 \\
\underline{677375} & \\
{\cdot}61625 &
\end{array}
$$

Pozostałe jako pierwsza reszta 2 jedności wyrazimy jako 2000 tysiącznych i znajdziemy, że w pierwiastku jest 1 dziesiąta, a pozostałe w reszcie 739 tysiącznych wyrazimy w częściach milionowych i znajdziemy, że w pierwiastku jest 5 setnych. Liczby więc $\sqrt[3]{10}$ wartości przybliżone na 0·01 są: z niedomiarem 2·15, z nadmiarem 2·16.

Podobnie $\sqrt[3]{0{\cdot}08} = \sqrt[3]{0{\cdot}080}$ jest liczbą niewymierną, której przybliżeniami na 0·1 są: z niedomiarem 0·4, z nadmiarem 0·5. Do reszty 16 (tysiącznych) dopisawszy 3 zera, moglibyśmy wyznaczyć setne części, i t. d.

Widzimy więc, że, jeżeli mamy z liczby całkowitej lub dziesiętnej wyciągnąć pierwiastek sześcienny z przybliżeniem na 0·1, 0·01 i t. d., to w danej liczbie, uwzględniwszy trzy razy tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia, możemy nie zważać na znak, oddzielający cyfry dziesiętne, i z niej, jak z liczby całkowitej, wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 1, a w otrzymanym pierwiastku oddzielić tyle cyfr, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia.

55. Gdy, mając liczbę całkowitą N, wyznaczamy $\sqrt[3]{N}$ z przybliżeniem na 1, to, otrzymawszy zwykłym sposobem więcej niż połowę początkowych cyfr pierwiastka, możemy pozostałe otrzymać przy pomocy zwykłego dzielenia.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n + 1$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć początkowych jego $n + 1$ cyfr. Niech one po dopisaniu n zer przedstawiają liczbę a

i niech ξ będzie pozostałą częścią pierwiastka, tak iż $(a+\xi)^3 = N$. Jest więc $N - a^3 = 3a^2\xi + 3a\xi^2 + \xi^3$. Lecz $N - a^3$ przedstawia resztę, pozostałą po wyznaczeniu $(n+1)$-szej cyfry pierwiastka; tę resztę nazwijmy r. A zatem mamy $r = 3a^2\xi + 3a\xi^2 + \xi^3$, skąd $\xi = \frac{r}{3a^2} - \left(\frac{\xi^2}{a} + \frac{\xi^3}{3a^2}\right) = \frac{r}{3a^2} - \frac{\xi^2 + (\xi^3 : 3a)}{a}$. W liczniku ostatniego ułamka całkowita część liczby ξ^2 ma najwięcej $2n$ cyfr, całkowita zaś część ilorazu $\xi^3 : 3a$ ma najwięcej $3n - (2n+1) = n - 1$ cyfr; a więc całkowita część całego licznika nie może być tu[1]) liczbą więcej niż $2n$-cyfrową. Mianownik zaś ma $2n+1$ cyfr. A więc rozważany ułamek jest mniejszy od 1 i ξ jest wartością ilorazu $\frac{r}{3a^2}$ przybliżoną na 1.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć jego $n+1$ cyfr początkowych. Wprowadzając podobne oznaczenia i podobnie rozumując, przekonamy się, że dalsze cyfry pierwiastka przedstawiają liczbę, która jest przybliżoną na 1 wartością ilorazu $\frac{r}{3a^2}$.

Np. $\sqrt[3]{1|891|901|100|056} = 123\ldots$; $\frac{31034100056}{3 \times 12300^2} = 68{\cdot}3\ldots$
$\ldots\ldots$
$3\ 1\ 0\ 3\ 4$ $\qquad 12300 + 68 = 12368$.

56. Pierwiastek sześcienny z ułamka zwyczajnego jest wtedy tylko liczbą wymierną, kiedy jednocześnie licznik i mianownik jego postaci nieskracalnej są sześcianami liczb całkowitych, a wówczas stosujemy drugi z wzorów (7) art. 26-go. Np.

$$\sqrt[3]{5\frac{13}{343}} = \sqrt[3]{\frac{1728}{343}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7};\quad \sqrt[3]{0{\cdot}101\dot{6}2\dot{9}} = \sqrt[3]{\tfrac{343}{3375}} = \frac{7}{15} = 0{\cdot}4\dot{6}.$$

Jeżeli chcemy wartość przybliżoną niewymiernego pierwiastka sześciennego z ułamka zwyczajnego wyrazić jako liczbę dziesiętną, to należy dany ułamek wyrazić jako dziesiętny i z tak otrzymanej liczby wyciągnąć pierwiastek z żądanem przybliżeniem. Np., aby mieć $\sqrt[3]{2\frac{5}{6}}$ z przybliżeniem na 0·01, znajdziemy $\sqrt[3]{2{\cdot}833333}$, a więc 1·41; ta wartość jest przybliżeniem z niedomiarem, zaś 1·42 z nadmiarem.

Jeżeli wogóle $\sqrt[3]{a}$ jest liczbą niewymierną, a chcemy mieć jego wartość przybliżoną na $\frac{1}{q}$, gdzie q jest liczbą całkowitą, to, ponieważ $\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{aq^3}}{q}$, przeto, wyciągnąwszy w liczniku pierwiastek z przybliżeniem na 1, mieć będziemy wartość liczby $\sqrt[3]{a}$ z przybliżeniem na $\frac{1}{q}$. Np. wartości przybliżone na $\frac{1}{12}$ liczb $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{\frac{11}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{17}{5}}$, znajdziemy:

$$\sqrt[3]{5} = \frac{\sqrt[3]{8640}}{12},\ \frac{20}{12};\quad \sqrt[3]{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt[3]{4752}}{12},\ \frac{16}{12};\quad \sqrt[3]{\frac{17}{5}} = \frac{\sqrt[3]{5875{\cdot}2}}{12},\ \frac{18}{12};$$

przybliżenia więc tych liczb na $\frac{1}{12}$ z niedomiarem są odpowiednio: $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, z nadmiarem zaś odpowiednio: $1\frac{3}{4}$, $1\frac{5}{12}$, $1\frac{7}{12}$.

---

[1]) Mogłaby w najniedogodniejszych warunkach suma dwu liczb, z których jedna ma $2n$, druga zaś $n-1$ cyfr, dać liczbę, mającą $2n+1$ cyfr. Lecz w takim razie wypaśćby mogła tylko liczba, której pierwsza cyfra jest 1, a następnych $n+1$ cyfr jest zerami. Ale i ten przypuszczalny najniekorzystniejszy przypadek mógłby mieć wpływ na dalsze rozumowanie jedynie wtedy, kiedyby liczba a miała pierwszą cyfrę 1, po którejby następowało $2n$ zer.

WYKŁADNIKI UŁAMKOWE.

57. Według wzoru (6) art. 24-go jest

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p} \tag{1}$$

pod warunkiem, iż p jest podzielne przez m. Ten wzór będziemy mogli uogólnić dla jakichkolwiek całkowitych liczb m i p, jeżeli w razie p niepodzielnego przez m umówimy się, aby $a^{\frac{p}{m}}$ było symbolem liczby $\sqrt[m]{a^p}$.

Jeżeliby ułamek $\frac{p}{m}$ był liczbą ujemną, to, bezwzględne wartości jego licznika i mianownika nazwawszy odpowiednio π i μ, mamy $\frac{p}{m} = -\frac{\pi}{\mu}$. Stosując do tego także przypadku umowę, uczynioną w art. 14-ym, i zważając, że zawsze możemy przyjąć $-\frac{\pi}{\mu} = \frac{-\pi}{\mu}$, mieć będziemy

$$a^{\frac{p}{m}} = a^{-\frac{\pi}{\mu}} = \frac{1}{a^{\frac{\pi}{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt[\mu]{a^{\pi}}} = \sqrt[\mu]{\frac{1}{a^{\pi}}} = \sqrt[\mu]{a^{-\pi}} = \sqrt[m]{a^p}\,.$$

Widzimy więc, że według wzoru (1), przy jakichkolwiek całkowitych m i p, *potęga ułamkowa liczby jest symbolem pierwiastka, którego wykładnik jest równy dodatnemu mianownikowi ułamka, z potęgi podstawy o wykładniku równym licznikowi tego ułamka.* W szczególnym przypadku jest np.

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}\,, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}}\,.$$

58. Wprowadzając wykładniki ułamkowe, należy zbadać, czy wzory zasadnicze (1) i (2) art. 1-go, (3) i (4) art. 2-go i (5) art. 4-go stosować się będą także do wykładników ułamkowych.

$$1).\ a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{np}} \cdot \sqrt[mn]{a^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}};$$

$$2).\ \frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}}}{\sqrt[mn]{a^{mq}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}} = \sqrt[mn]{a^{np-mq}} = a^{\frac{np-mq}{mn}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}};$$

$$3).\ (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^p} = \sqrt[m]{a_1^p a_2^p \ldots a_n^p} = \sqrt[m]{a_1^p} \ldots \sqrt[m]{a_n^p} = a_1^{\frac{p}{m}} a_2^{\frac{p}{m}} \ldots a_n^{\frac{p}{m}};$$

$$4).\ \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{pq}}} = \sqrt[mn]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{mn}} = a^{\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}};$$

$$5).\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}\,.$$

Kiedy w przypadkach 1-ym, 2-im lub 4-ym jeden tylko z dwu wykładników jest ułamkowy, to możemy wprost przyjąć w powyższych wyrażeniach ogólnych czyto $m = 1$, czyteż $n = 1$.

Widzimy więc, że we wspomnianych wzorach zasadniczych wykładniki mogą być tak dodatne jak i ujemne, tak całkowite jak i ułamkowe.

59. Pojęcie wykładnika, początkowo wprowadzone jako liczby dodatnej i całkowitej, uogólniliśmy tak, iż za wykładnik możemy już wziąć liczbę czyto całkowitą czyteż ułamkową, czyto dodatną czyteż ujemną — wogóle wymierną. Możemy jednak rozciągnąć jeszcze to pojęcie na przypadek wykładnika niewymiernego.

Jeżeli h jest liczbą niewymierną, to, tak w razie h dodatnego, jak i w razie h ujemnego, możemy, przy dowolnem dodatnem q, znaleźć dwa ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, między któremi przypada [1]) wartość h. Gdy tedy, przy $a>0$, mamy a^h, to, wybrawszy takie dodatne i całkowite q, przy którem $\frac{1}{q}$ nie jest większe od stopnia żądanego przybliżenia liczby niewymiernej h, znajdujemy taką całkowitą liczbę p, iżby $\frac{p}{q}<h<\frac{p+1}{q}$ i zamiast potęgi a^h wprowadzamy do rachunku albo potęgę $a^{\frac{p}{q}}$, alboteż $a^{\frac{p+1}{q}}$.

60. Jeżeli podstawa a jest większa od 1, to, według art. 6-go i 21-go, z nierówności $a>1$ wynika, że przy s dodatnem, czyto całkowitem czyteż ułamkowem, jest $a^s>1$. Przy s zaś ujemnem, czyto całkowitem czyteż ułamkowem, gdy np. $s=-\sigma$, z nierówności $a>1$ wynika $a^\sigma>1$, a więc $1>\frac{1}{a^\sigma}$, czyli $1>a^{-\sigma}$, albo $a^s<1$.

Podobnie, w razie, kiedy liczba dodatna a jest mniejsza od 1, mamy przy dodatnem s także $a^s<1$, przy ujemnem zaś s jest $a^s>1$.

Powiemy więc: *potęga dodatna, czyto całkowita, czyteż ułamkowa, podstawy dodatnej jest liczbą większą lub mniejszą od jedności, zależnie od tego, czy podstawa jest większa, czyteż mniejsza od* 1; *potęga ujemna, czyto całkowita czyteż ułamkowa, podstawy dodatnej jest liczbą mniejszą lub większą od jedności zależnie od tego, czy podstawa jest większa, czyteż mniejsza od* 1.

61. Niech będzie $s>t$ i $s=t+r$ (a więc $r>0$). Przy $a>0$, rozważmy równość $a^s=a^t.a^r$. Jeżeli $a>1$, to $a^r>1$ i $a^s>a^t$; jeżeli zaś $a<1$, to $a^r<1$ i $a^s<a^t$. A zatem: *kiedy wykładnik podstawy większej od jedności wzrasta, to potęga również wzrasta; kiedy wykładnik podstawy dodatnej mniejszej od jedności wzrasta, to potęga maleje.*

WPROWADZENIE LICZB UROJONYCH I LICZB ZESPOLONYCH.

62. Gdy bierzemy na uwagę oba, t. j. jeden ze znakiem $+$, drugi ze znakiem $-$, pierwiastki kwadratowe z liczby danej (art. 18), to mówimy, że mamy pierwiastki algebraiczne kwadratowe, i piszemy np. $\sqrt{81}=\pm 9$. Taksamo $\sqrt{+1}=\pm 1$, t. j. *pierwiastki algebraiczne kwadratowe z* $+1$ *są* $+1$ *i* -1. Podobnie napisalibyśmy $\sqrt{162}=\pm 9\sqrt{2}$. Z tego wynika, że znak $\sqrt{}$ dwojako bywa pojmowany: raz, jak np. po lewej stronie ostatniej równości, jako oznaczenie któregokolwiek pierwiastka algebraicznego; drugim razem, jak po

---

[1]) Np. $\frac{1732}{1000}<\sqrt{3}<\frac{1732+1}{1000}$, zaś $\frac{-1733}{1000}<-\sqrt{3}<\frac{-1733+1}{1000}$;
$\frac{3769}{1000}<\frac{6}{5}\pi<\frac{3769+1}{1000}$, zaś $\frac{-3770}{1000}<-\frac{6}{5}\pi<\frac{-3770+1}{1000}$.

stronie prawej tejże równości, jako oznaczenie jednego tylko pierwiastka. Podobnie mieć będziemy $\sqrt{a^2}=\pm a$, $\sqrt{a^5}=\pm a^2\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\pm(a-b)$.

Z tego wprost widzimy, że z równości $a^2=b^2$ wynika jedna z dwu równości: albo $a=b$, alboteż $a=-b$. Gdy podobnie mamy np. $(x-a)^2=b^2$, to z tego wynika albo $x-a=+b$, albo też $x-a=-b$.

63. Niekiedy wypada oznaczyć, iż pewna liczba może otrzymymać tylko wartości dodatne, lub tylko wartości ujemne, a może być niedogodne wprowadzenie zastrzeżenia odpowiednio $a>0$, lub $a<0$, gdyż w *samym* wzorze takich nierówności zaznaczać nie można. Dlatego często, aby oznaczyć pewną liczbę, która może otrzymywać jedynie wartości dodatne, nazywamy ją np. a^2. Należy jednak pamiętać, że w takim razie a^2 oznaczać ma liczbę dodatną, jakąkolwiek zresztą, t. j., iż a^2 nietylko może nie być ani kwadratem liczby całkowitej, aniteż kwadratem liczby ułamkowej, ale nawet może otrzymywać wartości niewymierne (art. 39). Odpowiednio, aby oznaczyć, iż pewna liczba może mieć tylko wartości ujemne, nazywamy ją np. $-a^2$.

64. Ponieważ, podnosząc liczbę, czyto dodatną czyteż ujemną, do kwadratu, otrzymujemy liczbę dodatną, przeto pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej nie jest liczbą ani dodatną, aniteż ujemną.

Gdy mamy $\sqrt{a-b}$, to, dopóki $b<a$, przedstawia $\sqrt{a-b}$ liczbę dodatną i ujemną, bądźto wymierną, bądźteż niewymierną. Przy $b=a$ jest $\sqrt{a-b}=0$. Jeżeli nie będziemy wprowadzali ograniczenia wartości b, to przy $b>a$ przedstawia $\sqrt{a-b}$ nowego rodzaju liczbę, ani dodatną, ani zero, aniteż ujemną, którą nazywamy l i c z b ą u r o j o n ą (imaginäre Z.). Jeżeli więc ujemną różnicę $a-b$ nazwiemy (art. 63) np. $-c^2$, to $\sqrt{-c^2}$ jest liczbą urojoną. W przeciwstawieniu temu liczby dodatne, zero i ujemne nazywamy l i c z b a m i r z e c z y w i s t e m i (reelle, reale Z.).

Liczby urojone wprowadzamy do rachunku z jedynem zastrzeżeniem, iż

$$(\sqrt{-c^2})^2=-c^2, \tag{1}$$

a pozatem wszystkie prawidła na wykonywanie działań na liczbach rzeczywistych stosujemy także do liczb urojonych. Aby zrozumieć znaczenie tego zastrzeżenia, zauważmy, że, zgodnie z niem mieć będziemy np.

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=(\sqrt{-3})^2\times\sqrt{4}=-3\times 2=-6;$$

nie jest zaś iloczyn $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}$, czyli $\sqrt{(-3)\times(-12)}$ równy $\sqrt{+36}=+6$.

Stosując tedy do liczby urojonej $\sqrt{-c^2}$ wzór (4) art. 22-go, mamy

$$\sqrt{-c^2}=\sqrt{c^2\times(-1)}=\sqrt{c^2}\times\sqrt{-1}; \tag{2}$$

tak np. $\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$. Widzimy więc, że *liczba urojona może być przedstawiona jako iloczyn czynnika rzeczywistego przez* $\sqrt{-1}$. Wskutek tego różne liczby urojone są iloczynami tejsamej liczby urojonej $\sqrt{-1}$ przez odpowiednie liczby rzeczywiste, tak iż, wprowadzając do nauki liczby urojone, właściwie *wprowadzamy jednę tylko nową liczbę* $\sqrt{-1}$.

Zastrzeżenie zatem (1), według (2), wychodzi na zastrzeżenie w prostszej formie, iż

$$(\sqrt{-1})^2=-1. \tag{3}$$

A więc np. $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{12}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3\times12}\times(\sqrt{-1})=-6$.

Ta liczba szczególna $\sqrt{-1}$, którą określa równość (3), jest całkiem odrębna od liczby $+1$, z której powstają dodatne lub ujemne liczby całkowite, ułamkowe i niewymierne, a więc jest liczbą całkiem odrębną od wszystkich liczb dodatnych i ujemnych. Toż samo możemy powiedzieć o każdej liczbie urojonej, jako określonej przez równość (1), sprowadzającą się do równości (3).

Uwzględniając oba pierwiastki (art. 62), mamy $\sqrt{c^2}=\pm c$, przeto, według (2), jest

$$\sqrt{-c^2}=\pm c\sqrt{-1}. \tag{4}$$

Gdy tedy mamy $+c\sqrt{-1}$, lub $-c\sqrt{-1}$, to liczby odpowiednio $+c$ i $-c$ nazywamy s p ó ł c z y n n i k a m i l i c z b y $\sqrt{-1}$. Podobnie np., gdy mamy $-\sqrt{-1}$, jest -1 spółczynnikiem liczby $\sqrt{-1}$, a przez skrócenie tylko mówimy: mniej $\sqrt{-1}$.

Liczbę $\sqrt{-1}$ często oznaczamy literą i, początkową wyrazu (numerus) imaginarius. A więc równości (4) i (3) możemy napisać odpowiednio $\sqrt{-c^2}=\pm ci$, oraz

$$i^2=-1. \tag{5}$$

65. Ponieważ $(+i)^2=-1$, oraz $(-i)^2=(-i).(-i)=+i^2=-1$, przeto $+i$ oraz $-i$ są liczbami, których kwadrat jest -1, t. j. *pierwiastki algebraiczne kwadratowe z* -1 *są* $+i$ *oraz* $-i$.

Dlatego równość (4) t. j. $\sqrt{-c^2}=\pm ci$ przedstawia pierwiastki algebraiczne kwadratowe z liczby $-c^2$; podobnie np. pierwiastki algebraiczne kwadratowe z liczby -3 są $i\sqrt{3}$ oraz $-i\sqrt{3}$. Również, gdy mamy np. $(x-a)^2=-b^2$, to albo $x-a=bi$, albotеż $x-a=-bi$.

66. Rozważymy potęgi liczby $\sqrt{-1}$. Według (5) mieć będziemy

$$i^3=i^2.i=(-1).i=-i, \qquad i^4=i^2.i^2=(-1).(-1)=+1,$$
$$i^5=i^4.i=(+1).i=+i, \qquad i^6=i^4.i^2=(+1).(-1)=-1,$$
$$i^7=i^4.i^3=(+1).(-i)=-i, \qquad \text{i t. d.},$$

zaś $i^{-1}=(+1).i^{-1}=i^4.i^{-1}=i^3=-i$, $\quad i^{-2}=i^4.i^{-2}=i^2=-1$, i t. d.

Wogóle, przy jakiemkolwiek całkowitem p, lub $p=0$, jest

$$i^{4p}=+1, \quad i^{4p+1}=+i, \quad i^{4p+2}=-1, \quad i^{4p+3}=-i.$$

67. Ponieważ liczba urojona nie jest ani dodatna, aniteż ujemna, pojęcie zaś większej z dwu liczb jest zależne od kierunku, w którym po sobie liczby rzeczywiste przypadają, przeto nie może być mowy, ani o tem, czy pewna liczba urojona jest większa lub mniejsza od jakiejś liczby rzeczywistej, aniteż o tem, która z dwu liczb urojonych jest większa. O dwu zaś liczbach urojonych $+c\sqrt{-1}$ i $-c\sqrt{-1}$, w których spółczynniki $+c$ i $-c$ liczby $\sqrt{-1}$ różnią się tylko znakiem, mówimy krótko, iż te liczby urojone »różnią się od siebie tylko znakiem«.

68. Weźmy dwie liczby, jednę rzeczywistą a, drugą urojoną bi. Tworząc iloczyn lub ilorazy tych liczb, mieć będziemy

$$a.bi=(ab)i, \qquad \frac{a}{bi}=a.(bi)^{-1}=(ab^{-1}).i^3=-\frac{a}{b}\,i, \qquad \frac{bi}{a}=\frac{b}{a}\,i,$$

t. j. otrzymujemy każdym razem liczbę urojoną. Gdy jednak utworzymy sumę lub różnice owych liczb,

$$a+bi,\quad a-bi,\quad bi-a,$$

to otrzymujemy liczby, które nie są ani rzeczywiste, aniteż urojone, — nazywamy je **liczbami zespolonemi** (complexe Z.) z dwu części, mianowicie z **części rzeczywistej** (w pierwszych dwu $+a$, w trzeciej $-a$) i z **części urojonej** (w pierwszej i trzeciej $+bi$, w drugiej $-bi$). Zwykle piszemy naprzód część rzeczywistą liczby zespolonej, a po niej jej część urojoną; dlatego trzecią z powyższych liczb piszemy zazwyczaj tak: $-a+bi$. W części urojonej mamy, jak wiemy (art. 64), spółczynnik (liczby) i; w pierwszej i trzeciej z wypisanych liczb jest nim $+b$, w drugiej $-b$.

Oczywiście, że o porównywaniu wielkości liczb zespolonych czyto z sobą, czyto z liczbami rzeczywistemi, czyteż z liczbami urojonemi mowy być nie może. Część rzeczywista liczby zespolonej może być dodatna lub ujemna, spółczynnik i w liczbie zespolonej może być dodatny lub ujemny, ale liczba zespolona nie jest ani dodatna, aniteż ujemna.

Gdy mamy liczbę zespoloną $a+bi$, to bezwzględnie wzięta wartość $\sqrt{a^2+b^2}$ t. j. pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów części rzeczywistej i spółczynnika i, nazywa się **modułem** (Modul) tej liczby.

69. Jeżeli dwie liczby zespolone mają tę samę część rzeczywistą, zaś ich części urojone różnią się tylko znakiem (art. 67), to nazywamy je **liczbami zespolonemi sprzężonemi z sobą** (conjugirte c. Z.). Takiemi są więc liczby $a+bi$ i $a-bi$. Moduły tych liczb są $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$, t. j. liczby zespolone sprzężone mają ten sam moduł.

Gdy dwie liczby zespolone sprzężone $a+bi$ i $a-bi$ do siebie dodamy, to otrzymamy liczbę rzeczywistą $2a$, a więc *suma liczb zespolonych sprzężonych jest rzeczywista.*

Utwórzmy iloczyn dwu liczb zespolonych sprzężonych $(a+bi).(a-bi) = (a)^2-(bi)^2 = a^2+b^2$.

A więc *iloczyn liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, równą kwadratowi modułu każdej z tych liczb.*

70. Liczbę urojoną lub zespoloną możemy oznaczać jedną literą. Tak np., gdy mamy, jak w art. 65-ym, $x-a=bi$, to $x=a+bi$.

Zwykle jednak, kiedy liczby wiadome, w rachunku oznaczane literami początkowemi alfabetu mogą otrzymywać wartości bądźto urojone, bądźteż zespolone, wyraźnie to zaznaczamy. Jeżeli owego zaznaczenia wyraźnie zrobionego niema, to przez owe litery rozumiemy zwykle tylko liczby rzeczywiste.

O DZIAŁANIACH ALGEBRAICZNYCH.

71. W tym rozdziale do pięciu znanych poprzednio działań przybyło nowe szóste: wyciąganie pierwiastka. Te sześć działań nazywamy **działaniami algebraicznemi** (alg. Operationen). Pierwsze cztery z tych działań, t. j. dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, w razie, kiedy są wykonywane na liczbach dodatnych, wymiernych, przy zastrzeżeniu nadto, iż w odejmowaniu odjemnik nie jest większy od odjemnej, nazywane są także działaniami arytmetycznemi.

Wszelkie działanie rachunkowe, wykonywane w matematyce, które nie jest działaniem algebraicznem, nazywa się działaniem transcendentalnem, czyli działaniem przestępnem (transcendente O.). —

Widzieliśmy, że odejmowanie jest działaniem odwrotnem dodawaniu, że dzielenie jest działaniem odwrotnem mnożeniu oraz, że wyciąganie pierwiastka jest działaniem odwrotnem podnoszeniu do potęgi. Dlatego z sześciu działań algebraicznych trzy, t. j. odejmowanie, dzielenie i wyciąganie pierwiastka, nazywają się ogólnie działaniami odwrotnemi. Odpowiedniej nazwie łacińskiej: »Operationes inversae« przeciwstawieniem jest nazwa: »Operationes directae«. Najlepiej ją oddamy, nazywając dodawanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi ogólnie działaniami wprost (idącemi).

Każde z działań odwrotnych wprowadza, jak widzieliśmy, pojęcie nowych liczb: odejmowanie wprowadza liczby ujemne, dzielenie wprowadza liczby ułamkowe, wyciąganie pierwiastka wprowadza liczby niewymierne pierwiastkowe i liczby urojone.

Najprostsze działania, t. j. dodawanie i odwrotne mu odejmowanie, nazywamy działaniami pierwszego rzędu (O. der ersten Stufe), mnożenie i dzielenie nazywamy działaniami drugiego rzędu; nakoniec podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka nazywamy działaniami trzeciego rzędu.

ROZDZIAŁ TRZECI.

LOGARYTMY.

WPROWADZENIE LOGARYTMÓW.

72. Gdy $a^m = b$, to nie tylko przy danych a i m można szukać b (podnoszenie do potęgi), lub przy danych b i m szukać a (wyciąganie pierwiastka), ale także przy danych a i b szukać m. Istnieje więc drugie działanie, odwrotne podnoszeniu do potęgi, działanie przestępne: oznaczenie wykładnika potęgi, do której podnieść należy daną podstawę, aby otrzymać daną liczbę. Tę szukaną liczbę, t. j. wykładnik danej podstawy, odpowiadający danej liczbie, nazywamy logarytmem (Logarithmus) liczby danej przy danej podstawie. Tak np. logarytmem liczby 8 przy podstawie 2 jest liczba 3, gdyż $2^3 = 8$; logarytmem liczby $\frac{1}{81}$ przy podstawie 3 jest liczba -4, gdyż $3^{-4} = \frac{1}{81}$; logarytmem liczby $\frac{1}{3}$ przy podstawie 9 jest liczba $-\frac{1}{2}$, gdyż $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Gdy $a^m = b$, to piszemy $m = \log_a b$. Równości

$$a^m = b \quad \text{i} \quad m = \log_a b \tag{1}$$

są tąż samą równością, w dwu odmiennych wypisaną kształtach.

Gdy liczba m jest niewiadoma, to równania

$$a^x = b \quad \text{i} \quad \log_a b = x$$

są tem samem równaniem, w dwu różnych przedstawionem kształtach. To równanie, dla którego rozwiązania należy wykonać działanie przestępne na liczbach wiadomych, należy do równań ogólnie nazywanych równaniami przestępnemi; nazywane zaś ono bywa **równaniem wykładniczem** (Exponentialgleichung).

73. Gdy do rachunku wprowadzamy logarytmy, to przyjmujemy, że je wszystkie bierzemy przy tej samej podstawie, tak iż w odpowiednich równościach (1) a ma tę samę wartość, zaś b otrzymuje różne wartości, którym odpowiadają wartości m. Zwykle w takim razie w drugim kształcie równości (1) opuszczamy wskaźnik a.

Według (1), gdy $b=a$, jest $m=1$, gdy zaś $b=1$, jest $m=0$, t. j. przy jakiejbądź podstawie *logarytm podstawy jest jednością*, zaś *logarytm jedności jest* 0.

Za podstawę a nie możemy przyjąć liczby ujemnej; gdyby bowiem było np. $a=-3$, to nie byłoby takiej liczby m, czyto dodatnej, czyteż ujemnej, przy którejby np. $(-3)^m=27$. Nadto, liczba a nie może być równa jedności, gdyż wszelka potęga jedności jest także jednością. Dlatego *przyjmujemy, że podstawa jest liczbą dodatną różną od* 1.

Przy a dodatnem, jakakolwiek jest liczba m, dodatna czy ujemna, wymierna czy niewymierna, zawsze w równości (1) liczba b jest dodatna. Z tego więc wynika, że *rozważamy tylko logarytmy liczb dodatnych*. Zwykle *przyjmujemy* $a>1$, wtedy *logarytmy liczb większych od* 1 *są dodatne*, zaś *logarytmy liczb mniejszych od* 1 *są ujemne* (art. 60) i *większemu logarytmowi odpowiada większa liczba* (art. 61), z czego wynika, że, nawzajem, *większej liczbie odpowiada większy logarytm*. Przy takiej podstawie logarytmem liczby 0 jest $-\infty$.

WŁASNOŚCI OGÓLNE LOGARYTMÓW.

74. Gdy mamy $a^m=b$, $a^\mu=\beta$, to $a^{m-\mu}=\dfrac{b}{\beta}$. Jeżeli $\mu=m$, a więc $m-\mu=0$, to $\dfrac{b}{\beta}=1$, czyli $\beta=b$; nawzajem, jeżeli $\beta=b$, to $a^{m-\mu}=1$, a więc $m-\mu=0$, czyli $\mu=m$. Możemy to, z uwagi że $m=\log b$, $\mu=\log\beta$, tak wypowiedzieć: *przy tej samej podstawie równym logarytmom odpowiadają liczby równe i liczbom równym odpowiadają logarytmy równe.*

75. Gdy mamy

$$a^{m_1}=b_1,\ \text{czyli}\ m_1=\log b_1;\quad a^{m_2}=b_2,\ \text{czyli}\ m_2=\log b_2, \tag{1}$$

to $b_1 b_2=a^{m_1+m_2}$, $\dfrac{b_1}{b_2}=a^{m_1-m_2}$, czyli $m_1+m_2=\log(b_1b_2)$, $m_1-m_2=\log\dfrac{b_1}{b_2}$, albo według (1)

$$\log(b_1b_2)=\log b_1+\log b_2,\qquad \log\frac{b_1}{b_2}=\log b_1-\log b_2.$$

Taksamo okażemy, że gdy $a^{m_1}=b_1$, $a^{m_2}=b_2,\ldots,a^{m_n}=b_n$, to

$$\log(b_1b_2\ldots b_n)=\log b_1+\log b_2+\ldots+\log b_n.$$

A więc *logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników,* zaś *logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika.*

Gdy mamy $a^m = b$, czyli $m = \log b$, to

$$b^k = a^{km}, \text{ czyli } \log(b^k) = km, \quad \sqrt[k]{b} = a^{\frac{m}{k}}, \text{ czyli } \log\sqrt[k]{b} = \frac{m}{k},$$

albo
$$\log(b^k) = k\log b, \quad \log\sqrt[k]{b} = \frac{\log b}{k},$$

t. j. *logarytm potęgi liczby równa się logarytmowi liczby, pomnożonemu przez wykładnik potęgi*, zaś *logarytm pierwiastka z liczby równa się logarytmowi tej liczby, podzielonemu przez wykładnik pierwiastka.*

Widzimy więc, że gdy na liczbach mamy wykonać: mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęgi, wyciąganie pierwiastka, to tym działaniom odpowiadają na logarytmach owych liczb działania odpowiednie niższego rzędu: dodawanie, odejmowanie, mnożenie dzielenie. Na tem polega korzyść z użycia logarytmów w rachunku.

76. Ogół logarytmów rozmaitych liczb dodatnych, wziętych przy tej samej podstawie a, nazywamy układem logarytmów (logarithmisches System) o podstawie a.

Gdy mamy dwa układy logarytmów, jeden o podstawie a, drugi zaś o podstawie α (jest zatem $\alpha \gtrless a$), to w nich logarytmy jakiejkolwiek tejsamej liczby dodatnej, którą nazwijmy b, są określone równościami

$$a^m = b, \text{ czyli } m = \log_a b; \qquad \alpha^\mu = b, \text{ czyli } \mu = \log_\alpha b.$$

Nie może być $\mu = m$, gdyż z pierwszych kształtów tych równości wynika $a = b^{\frac{1}{m}}$ $\alpha = b^{\frac{1}{\mu}}$; a więc byłoby $a = \alpha$; przeto liczby $\log_a b$ i $\log_\alpha b$ są od siebie różne.

Aby znaleźć związek, zachodzący między temi dwiema liczbami, weźmy logarytmy obu stron równości np. $\alpha^\mu = b$ przy podstawie a; będziemy mieli

$$\log_a(\alpha^\mu) = \log_a b, \quad \text{albo} \quad \mu \log_a \alpha = \log_a b, \quad \text{czyli} \quad \log_\alpha b \times \log_a \alpha = \log_a b,$$

skąd
$$\log_\alpha b = \log_a b \times \frac{1}{\log_a \alpha}.$$

Według tego wzoru, aby z logarytmu jakiejkolwiek liczby b przy podstawie a przejść do jej logarytmu przy podstawie α, należy pierwszy logarytm pomnożyć przez liczbę $\frac{1}{\log_a \alpha}$, niezależną od liczby b. Jeżeli podstawę a nazwiemy »dawną«, podstawę zaś α »nową«, to będziemy mogli powiedzieć: *logarytm liczby przy nowej podstawie jest równy logarytmowi tejże liczby przy podstawie dawnej, pomnożonemu przez odwrotność logarytmu nowej podstawy, wziętemu przy podstawie dawnej.* Ten czynnik $\frac{1}{\log_a \alpha}$ nazywa się modułem układu logarytmów nowego względem dawnego.

77. Za podstawę układu logarytmów w badaniach teoretycznych przyjmuje się szczególną liczbę przestępną; jest ona sumą nieskończenie wielu coraz zmniejszających się składników

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1).n} + \cdots,$$

które następują po sobie według prawa, iż w trzecim i w każdym następnym przybywa w mianowniku czynnik będący liczbą następującą w szeregu liczb naturalnych. Liczbę, którą ta suma przedstawia, oznacza się zwykle literą e; można ją wyliczyć tylko z przybliżeniem i np. jest z przybliżeniem na $\frac{1}{10^{10}}$ (z niedomiarem) $e = 2{\cdot}7182818284$.

Układ logarytmów o podstawie e nazywa się układem logarytmów[1]) naturalnych. (natürliches l. S.).

Przy wykonywaniu różnych rachunków zapomocą logarytmów, przyjmuje się za ich podstawę liczbę 10. Układ logarytmów o podstawie 10 nazywa się układem logarytmów[2]) zwyczajnych (gewöhnliches l. S.). O tych tylko logarytmach dalej tu mówić będziemy; przeto nie będziemy pisali wskaźnika 10, odpowiadającego podstawie.

Zestawienie liczb z ich logarytmami nazywamy tablicami logarytmów (Logarithmentafeln). Zwykle w tablicach logarytmów zwyczajnych są podane logarytmy szeregu naturalnego liczb od 1 do 10000, albo od 1 do 100000 lub do 108000, z przybliżeniem w pierwszym razie na $\frac{1}{10^4}$ lub $\frac{1}{10^5}$, w drugim zaś razie na $\frac{1}{10^6}$ lub na $\frac{1}{10^7}$, czyli odpowiednio z 4-ma lub 5-u, albo z 6-u lub 7-u cyframi dziesiętnemi. Nazywamy je odpowiednio tablicami 4-ocyfrowemi, . . ., 7-ocyfrowemi. Zasady rachunku przy pomocy logarytmów są niezależne od tego, ilocyfrowych tablic używamy. Będziemy tu używali tablic 5-ocyfrowych.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW ZWYCZAJNYCH.

78. Logarytm zwyczajny liczby jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść 10, aby otrzymać owę liczbę.

Przypuśćmy, że logarytm liczby wymiernej b jest liczbą wymierną $\frac{l}{m}$, tak iż $10^{\frac{l}{m}} = b$. — Jeżeli ułamek $\frac{l}{m}$ jest liczbą dodatną, to możemy przyjąć, że l i m są liczbami dodatnemi i całkowitemi. Z wypisanej równości wynika $10^l = b^m$, czyli $2^l . 5^l = b^m$. Ponieważ liczba b^m jest iloczynem l czynników 2 i l czynników 5, i b jest liczbą wymierną, przeto sama liczba b może być tylko iloczynem $\frac{l}{m}$ czynników 2 i $\frac{l}{m}$ czynników 5, z czego wprost wynika, że $\frac{l}{m}$ może być tylko liczbą całkowitą, t. j. b jest w tym razie całkowitą

[1]) Napier (wym. neper), który pierwszy powziął pomysł rachunku przy pomocy logarytmów (on także utworzył termin „logarytm", liczba stosunkowa), tej właśnie liczby e użył za podstawę układu logarytmów w swem dziele (wydanem w r. 1614).

[2]) Tę liczbę pierwszy przyjął za podstawę Briggs w swych tablicach (wydanych w r. 1624). Modułem układu logarytmów zwyczajnych, względem układu logarytmów naturalnych, oznaczanym zwykle przez M, jest z przybliżeniem na $\frac{1}{10^6}$ liczba $M = 0{\cdot}434294$, a więc modułem układu logarytmów naturalnych względem układu logarytmów zwyczajnych, z takiemże przybliżeniem jest liczba $\frac{1}{M}$. Tak np.

$$\log_e 100 = \log_{10} 100 \times \frac{1}{M} = 2 \times 2{\cdot}302585 = 4{\cdot}605170.$$

i dodatną potęgą liczby 10. — Jeżeliby zaś ułamek $\frac{l}{m}$ był liczbą ujemną i np. $\frac{l}{m} = -\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami dodatnemi i całkowitemi, to z równości $10^{-\frac{\lambda}{\mu}} = b$ wynika $10^{-\lambda} = b^{\mu}$, czyli $\frac{1}{2^{\lambda} \cdot 5^{\lambda}} = b^{\mu}$. Ponieważ liczba b^{μ} jest iloczynem λ czynników $\frac{1}{2}$ i λ czynników $\frac{1}{5}$ i b jest liczbą wymierną, przeto liczba $\frac{\lambda}{\mu}$ może być tylko liczbą całkowitą, t. j. b jest w tym przypadku odwrotnością całkowitej dodatnej potęgi liczby 10.

Z liczb zatem wymiernych jedynie liczby, które są całkowitemi potęgami liczby 10, lub liczby $\frac{1}{10}$, mają logarytmy zwyczajne wymierne i mianowicie są niemi liczby całkowite. Wszystkie zaś logarytmy zwyczajne innych liczb całkowitych i ułamkowych są niewymierne.

79. Weźmy z tablic np. $\log 7708 = 3{\cdot}88694$. Całkowitą część logarytmu (jak tu 3) nazywamy c e c h ą l o g a r y t m u (Charakteristik, Kennziffer d. L.), jego zaś część ułamkową (jak tu $0{\cdot}88694$) nazywamy m a n t y s ą l o g a r y t m u. (Mantisse d. L.).

Ponieważ $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ i t. d., przeto (według tego, cośmy mówili w art. 73): logarytmy liczb większych od 1, a mniejszych od 10-u, mają cechę 0; logarytmy liczb niemniejszych od 10, a mniejszych od 100-u, mają cechę 1; logarytmy liczb niemniejszych od 100-u, a mniejszych od 1000-a, mają cechę 2; i t. d. Innemi słowy, *cecha logarytmu liczby, niemniejszej od* 1, *ma o 1-ę mniej jedności, niż jest cyfr w całkowitej części tej liczby.* Dlatego w wielu tablicach nie podaje się cech, lecz tylko same mantysy.

Gdybyśmy wzięli liczbę 10 razy większą od 7708, to mielibyśmy

$$\log 77080 = \log(7708 \times 10) = \log 7708 + \log 10 = 3{\cdot}88694 + 1 = 4{\cdot}88694.$$

Podobnie

$$\log 770{\cdot}8 = \log \frac{7708}{10} = \log 7708 - \log 10 = 3{\cdot}88694 - 1 = 2{\cdot}88694.$$

Oczywiście, że, gdybyśmy wzięli liczbę 100 razy większą, lub 100 razy mniejszą, to mantysa również by się nie zmieniła, cecha zaś odpowiednio powiększyłaby się, lub zmniejszyła o 2, i t. d.

Powiemy więc ogólnie: *liczby, których cyfry od pierwszej znaczącej do ostatniej znaczącej przedstawiają tę samę liczbę, mają tę samę mantysę.*

80. Gdy $\log 7708 = 3{\cdot}88694$, to $\log 0{\cdot}7708 = 0{\cdot}88694 - 1$. Moglibyśmy to odejmowanie wykonać, odejmując oddzielne cyfry mantysy od 9, tylko ostatnią jej cyfrę znaczącą od 10, czyli, jak się mówi, biorąc jej »dopełnienie arytmetyczne« do 1. Otrzymalibyśmy $\log 0{\cdot}7708 = -0{\cdot}11306$, liczbę ujemną, jako logarytm liczby mniejszej od 1.

Zwykle unikamy wprowadzania do rachunku logarytmów, którychby mantysy były ujemne. Dlatego zamiast wykonywać powyższe odejmowanie, pozostawiamy $\log 0{\cdot}7708 = 0{\cdot}88694 - 1$, tylko krócej to wyrażenie piszemy. Mianowicie, znak —, stać mający przed 1, piszemy nad tą cyfrą i stawiamy ją wraz z tym znakiem przed mantysą dodatną, jako cechę ujemną. Jest więc $\log 0{\cdot}7708 = \bar{1}{\cdot}88694$.

Podobnie $\log 0{\cdot}0007708 = -3{\cdot}11306$ możemy napisać albo $0{\cdot}88694-4$, alboteż $\bar{4}{\cdot}88694$.

Powiemy więc ogólnie: *cecha ujemna logarytmu liczby dziesiętnej mniejszej od 1 ma tyle jedności, ile jest początkowych zer w danej liczbie, wraz z zerem na miejscu części całkowitej, jego zaś mantysa dodatna jest ta sama, co mantysa logarytmu liczby, powstałej wskutek opuszczenia znaku, oddzielającego cyfry dziesiętne.*

WYKONYWANIE DZIAŁAŃ NA LOGARYTMACH.

81. Przypuśćmy, że mamy znaleźć logarytmy takich liczb:

$$abc,\ abc^{-1},\ a^d,\ (abc^{-1})^d,\ \sqrt[d]{a},\ \sqrt[d]{abc^{-1}},$$

wiedząc, że np. $\log a = 0{\cdot}49929$, $\log b = 0{\cdot}00338$, $\log c = 2{\cdot}21340$, $d = 6$.

Aby znaleźć $\log(abc)$, pod $\log a$ podpiszemy wprost $\log b$ i $\log c$ i wykonamy dodawanie,

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}49929 \\ 0{\cdot}00338 \\ 2{\cdot}21340 \\ \hline \log abc = 2{\cdot}71607. \end{array}$$

Aby znaleźć $\log \dfrac{ab}{c}$, należałoby do $\log a$ dodać $\log b$, a od tej sumy odjąć $\log c$. Chcąc jednak uniknąć tych dwu różnych działań, zamiast $-\log c = -2{\cdot}21340 = -2-0{\cdot}21340$, napiszemy $-\log c = -3+(1-0{\cdot}21340) = -3+0{\cdot}78660 = \bar{3}{\cdot}78660$. A więc, napisawszy $\log a$ i $\log b$, następnie napiszemy $-\log c$ w taki sposób: do cechy $\log c$ dodamy 1 i weźmiemy $\bar{3}$, mając zaś przed oczyma w tablicach mantysę $\log c$, weźmiemy jej dopełnienie arytmetyczne do jedności. Wypadnie zatem mantysy wszystkie do siebie dodać, a za cechę wziąć sumę algebraiczną cech (w tym przypadku należy uwzględnić $+1$, otrzymaną z dodania dziesiętnych części mantys),

$$\begin{array}{r} 0.49929 \\ 0{\cdot}00338 \\ \bar{3}{\cdot}78660 \\ \hline \log \dfrac{ab}{c} = \bar{2}{\cdot}28927. \end{array}$$

Aby znaleźć $\log(a^6)$, należy przez 6 pomnożyć $\log a$. Patrząc się zatem na $\log a$ w tablicach, odrazu wypiszemy

$$\log a^6 = 2{\cdot}99574.$$

Podobnie, aby znaleźć $\log\left(\dfrac{ab}{c}\right)^6$, otrzymawszy naprzód, jak powyżej, $\log \dfrac{ab}{c}$, pomnożymy $\bar{2}{\cdot}28927$ przez 6. W tym razie mamy przez 6 pomnożyć $0{\cdot}28927-2$, a więc, kiedy z pomnożenia dziesiątych otrzymamy $+1$, to wraz z $-2\times 6 = -12$ mieć będziemy cechę -11

$$\log\left(\frac{ab}{c}\right)^6 = \overline{11}{\cdot}73562.$$

Aby znaleźć $\log\sqrt[6]{a}$, patrząc się na $\log a$ w tablicach, wypiszemy iloraz z podzielenia go przez 6.

$$\log\sqrt[6]{a} = 0\cdot08322.$$

Podobnie, aby znaleźć $\log\sqrt[6]{\frac{ab}{c}}$, otrzymawszy naprzód $\log\frac{ab}{c}$, dzielimy go przez 6. Zamiast jednak przez 6 dzielić $-2+0\cdot28927$, z uwagi, że cechę mamy otrzymać całkowitą, przez 6 dzielimy $-6+4\cdot28927$; otrzymamy więc

$$\log\sqrt[6]{\frac{ab}{c}} = \bar{1}\cdot71488.$$

Zauważmy jeszcze, że, gdybyśmy mieli znaleźć $\log\frac{ab}{c}$, np. w razie, kiedy $\log a = 0\cdot49929$, $\log b = 1\cdot0038$, $\log c = \bar{3}\cdot21340$, to, pod $\log a$ podpisawszy $\log b$, należałoby następnie podpisać $-\log c = -(-3+0\cdot21340) = +3-0\cdot21340$. Zamiast tego, podpiszemy $+2+(1-0\cdot21340) = 2\cdot78660$, t. j., mając odejmować logarytm z cechą ujemną, a dodatną mantysą, dodajemy logarytm, którego mantysa jest dopełnieniem arytmetycznem poprzedniej do 1, cecha zaś jest dodatna i ma o 1 mniej jedności.

UŻYCIE TABLIC LOGARYTMÓW.

82 W dwu razach zachodzi potrzeba użycia tablic logarytmów, mianowicie: kiedy, mając daną liczbę, szukamy jej logarytmu; alboteż kiedy mając dany logarytm, szukamy liczby, której on odpowiada.

α. Mając daną liczbę, umiemy odrazu napisać cechę jej logarytmu (art. 79, 80); szukamy więc w tablicach tylko jego mantysy. Możemy przeto przy poszukiwaniu mantysy daną liczbę uważać za całkowitą (art. 79), t. j. nie zważać na znak, oddzielający w niej cyfry dziesiętne.

Jeżeli liczba nie ma więcej, niż 4 cyfry, to mantysę jej logarytmu wprost znajdziemy w tablicach.

Jeżeli liczba ma więcej, niż 4 cyfry, np. gdy mamy $20\cdot5694$, to mantysa logarytmu tej liczby, czyli mantysa $\log 205694$, nie znajduje się w tablicach. Wiemy jednak, że ona jest większa, niż mantysa logarytmu liczby 2056, mniejsza zaś, niż mantysa logarytmu liczby 2057 (art. 73), które obie są w tablicach:

$$\log 2056 = 3\cdot31302,$$
$$\log 2057 = 3\cdot31323.$$

Różnica tych logarytmów wynosi $0\cdot00021$. Różnicę logarytmów dwu sąsiednich w tablicach liczb nazywamy *różnicą tablicową*, odpowiadającą mniejszej z tych liczb; wypowiadamy ją, jakby liczbę całkowitą, rozumiejąc, że mamy na myśli części, oznaczane na ostatniem miejscu, zachowywanem w mantysach, t. j. części stotysiączne. Tak więc zamiast w tym przypadku mówić, iż różnica tablicowa, odpowiadająca liczbie 2056, jest $0\cdot00021$, powiemy, iż jest ona 21.

Przypatrując się uważnie tej części naszych tablic, w której są podane logarytmy liczb 4-ocyfrowych, dostrzeżemy, że w początku[1]) różnica tablicowa wynosi 43, następnie zaś stale się zmniejsza, w końcu zaś tablic wynosi ona 5, a nawet 4. Zauważymy także, że każda z tych różnic od 43 do 4 powtarza się dość długo. Taksamo nasza różnica 21 odpowiada dłuższemu szeregowi liczb. Mając więc na uwadze 5-ocyfrowe mantysy, rozumujemy w taki sposób: jeżeli przy powiększaniu się liczb o 1, logarytmy w tym obszarze stale powiększają się o 21, to powiększanie się liczby jest proporcyonalne względem powiększania się logarytmu. Jeżeli więc oznaczymy różnicę $\log 2056{\cdot}94 - \log 2056 = \delta$, to

$$\delta : 21 = 0{\cdot}94 : 1, \quad \text{skąd} \quad \delta = 19{\cdot}74,$$

a więc przyjmiemy $\delta = 20$ i $\log 2056{\cdot}94 = 3{\cdot}31302 + 0{\cdot}00020 = 3{\cdot}31322$. A zatem szukany $\log 20{\cdot}5694 = 1{\cdot}31322$.

Moglibyśmy tu więc wyznaczyć mantysę 6-ocyfrowej liczby. Gdybyśmy mieli 7-ocyfrową liczbę np. 2056·947, to już nasze tablice nie dozwalałyby na uwzględnienie w mantysie ostatniej cyfry tej liczby, albowiem największa nawet różnica tablicowa 43 jest już taka, że choćby owa 7-a cyfra była 9, to z proporcyi $\delta : 43 = 0{\cdot}009 : 1$ wynika $\delta \doteq 0{\cdot}387$, a więc $\delta < 0{\cdot}5$, t. j. nie ma wpływu na 5-tą cyfrę w mantysie. Gdybyśmy zaś mieli liczbę więcej niż 4-ocyfrową i jej logarytm wypadałoby wyznaczyć przy pomocy końcowej części naszych tablic, w której różnica tablicowa wynosi 4 lub 5, to nie moglibyśmy uwzględnić nawet 6-ej cyfry. Albowiem z proporcyi $\delta : 5 = 0{\cdot}09 : 1$ wynika $\delta = 0{\cdot}45 < 0{\cdot}5$. A zatem przy pomocy naszych tablic ponad 4 początkowe cyfry możemy, przy odszukiwaniu logarytmów, uwzględniać dalsze dwie cyfry, przy posiłkowaniu się jednak końcową częścią tablic tylko dalszą jednę cyfrę. Gdy więc w danej liczbie jest więcej cyfr, to, biorąc mantysę, należy na nie nie zważać, lecz, kiedy pierwsza z nich jest 5 lub większa, wypada poprzednią powiększyć o 1.

β. Mając dany logarytm liczby nieznanej, zważamy naprzód na jego mantysę, gdyż cecha jego wyznacza nam tylko miejsce znaku, oddzielającego część całkowitą liczby.

Zauważywszy początkowe dwie lub trzy cyfry mantysy, szukamy mantys, mających takie same owe cyfry. Następnie zaś, pośród owych mantys szukamy takiej, którejby dalsze cyfry także były takie same, jak w mantysie danego logarytmu. Jeżeli taką mantysę znajdziemy, to wprost bierzemy liczbę jej odpowiadającą, w której, zgodnie z cechą danego logarytmu, stawiamy znak, oddzielający część całkowitą.

Jeżeliby zaś nie było w tablicach mantysy, której wszystkie cyfry byłyby takie same, jak w mantysie danego logarytmu, to z dwu mantys w tablicach, między któremi przypada mantysa danego logarytmu, bierzemy mniejszą i zaznaczamy liczbę, której ona odpowiada. Np., gdy mamy dany logarytm $\bar{2}{\cdot}31321$, to mantysa 0·31321 przypada między mantysami 0·31302

[1]) Różnice $\log 1002 - \log 1001$ i $\log 1005 - \log 1004$, z których każda jest 44, powstały wskutek przybliżenia z nadmiarem $\log 1002$ i $\log 1005$ (por. tablice 7-ocyfrowe).

i 0·31323; bierzemy więc mantysę 0·31302, która jest logarytmem liczby 2·056. Ponieważ różnica tablicowa mantysy, odpowiadającej tej liczbie, wynosi 21, różnica zaś między wziętą mantysą a mantysą danego logarytmu wynosi 19, przeto, jeżeli różnicę między liczbą, której logarytm jest 0·31321, a liczbą 2·056 nazwiemy $\frac{d}{10^3}$, to, podobnie rozumując, jak poprzednio, dojdziemy do proporcyi

$$d:1 = 19:21, \quad \text{skąd} \quad d = 0{\cdot}904\ldots.$$

Ponieważ jednak wiemy, iż na 5-ocyfrowe mantysy tylko najwięcej 6 początkowych cyfr liczby wpływ mieć może, przeto wniesiemy, iż 0·31321 jest logarytmem liczby 2·05690. Wskutek tego $\bar{2}{\cdot}31321 = \log 0{\cdot}0205690$. Pamiętać jednak należy, że, gdyby mantysa danego logarytmu przypadała w końcowej części naszych tablic, to moglibyśmy wyznaczyć tylko 5 początkowych cyfr liczby.

Wyznaczenie większej ilości cyfr, niż dozwala przybliżenie, z jakiem logarytmy są podane w tablicach, jest błędem rachunkowym.

83. Rozważymy jeszcze, jak przy pomocy tablic 7-ocyfrowych znaleźć logarytm liczby danej, lub znaleźć liczbę, odpowiadającą danemu logarytmowi.

α. Gdy mamy znaleźć log 20·569435, to, napisawszy cechę 1, szukamy w tablicach mantysy logarytmu liczby, utworzonej przez 5 pierwszych cyfr liczby danej, t. j. mantysy liczby 20569, i tę przypisujemy do cechy; będziemy więc mieli 1·3132132. Odpowiednia tablica różnicowa jest 211. Mamy w tablicach na tejże stronie na boku dodatkową tabliczkę, nad którą jest wypisana liczba 211. Tabliczka ta obejmuje obliczone już 0·1, 0·2, ..., 0·9 części tej liczby 211 (tak zwane: partes proportionales), wypisane jednak obok cyfr: 1, 2, ..., 9. Ponieważ w danej liczbie mamy na 6-em miejscu cyfrę 4, na 7-em cyfrę 3, na 8-em cyfrę 5, przeto przedstawiają te cyfry odpowiednio 0·4, 0·03, 0·005 tych części liczby danej, które są przedstawione przez 5-tą jej cyfrę. Wskutek tego odpowiadają im według owej tabliczki takie części tablicowej różnicy: 84·4 (tę wprost znajdujemy w tabliczce obok 4), 6·3 (tę otrzymujemy, zmniejszając 10 razy liczbę w tabliczce obok 3 i opuszczając setne), 1·1 (tę otrzymujemy, zmniejszając 100 razy liczbę w tabliczce obok 5 i opuszczając setne). Obliczając logarytm liczby danej na boku, zaznaczamy całe to postępowanie w ten sposób:

$$\begin{array}{rr}
20{\cdot}569 & 1{\cdot}3132132 \\
4 & 84{\cdot}4 \\
3 & 6{\cdot}3 \\
5 & \underline{1{\cdot}1} \\
 & 1{\cdot}3132224
\end{array};$$

a więc log 20·569435 = 1·3132224.

Gdyby w danej liczbie była jeszcze 9-ta cyfra, to tablice 7-ocyfrowe nie dozwoliłyby na uwzględnienie owej cyfry w mantysie. Gdyby zaś należało znaleźć logarytm liczby przy pomocy końcowej części tych tablic, to nawet nie możnaby uwzględnić w mantysie wpływu 8-ej cyfry liczby. A więc przy pomocy 7-ocyfrowych tablic można, prócz początkowych 5-u cyfr, uwzględnić dalszych 3, ale przy posiłkowaniu się końcową częścią tych tablic tylko 2.

β. Szukajmy liczby, której logarytm jest 1·3132224. Po znalezieniu w tablicach, iż mantysa tego logarytmu przypada między mantysami 0·3132132 i 0·3132343, oznaczamy zaraz, że 0·3132132 = log 2·0569, że odpowiadająca różnica tablicowa jest 211, oraz, że różnica między mantysą daną, a mantysą tylko co wypisaną jest 92. Przy pomocy tabliczki odnoszącej się do liczby 211, postępujemy w sposób, który łatwo można już wyrozumieć z następującego obliczenia (zwykle na boku wykonywanego):

92	
84·4	4
7·6	
6·3	3
1·3	
1·3	6
	436 ;

a więc $1\cdot3132224 = \log(20\cdot569 + 0\cdot000436) = \log 20\cdot569436$.

WYKONYWANIE RACHUNKÓW PRZY POMOCY LOGARYTMÓW.

84. Gdy chcemy obliczyć

$$x = \frac{\sqrt[7]{(372\cdot4073 - \pi)^3}\,.\,\sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6258\cdot96)^2}},$$

to dla znalezienia $\log x$, należy do $\frac{3}{7}\log(372\cdot4073 - \pi) = \frac{3}{7}\log 369\cdot2657$ dodać $\frac{1}{5}\log 2629$ oraz $-\frac{2}{3}\log 6\cdot258\cdot96$. Z tych składników drugi możemy wprost wyznaczyć, dzieląc logarytm, który znajdziemy w tablicach, przez 5; składniki zaś pierwszy i trzeci należy uprzednio obliczyć.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}l}
\log 369\cdot2 &=& 2\cdot56726 & \delta : 12 = 0\cdot66 : 1 \\
&& 8 & \delta = 7\cdot92 \\
\log 369\cdot266 &=& 2\cdot56734 & \\
3\log 369\cdot266 &=& 7\cdot70202 & \\
\frac{3}{7}\log 369\cdot266 &=& 1\cdot10029 & \\
\log 6258 &=& 3\cdot79644 & \delta : 6 = 0\cdot96 : 1 \\
&& 6 & \delta = 5\cdot76 \\
\log 6258\cdot96 &=& 3\cdot79650 & \\
2\log 6258\cdot96 &=& 7\cdot59300 & \\
\frac{2}{3}\log 6258\cdot96 &=& 2\cdot53100 & \\
\frac{3}{7}\log 369\cdot2657 &=& 1\cdot10029 & \\
\frac{1}{5}\log 2629 &=& 0\cdot68396 & \\
-\frac{2}{3}\log 6258\cdot96 &=& \overline{3}\cdot46900 & \\
\log x &=& \overline{1}\cdot25325 & \\
\log 0\cdot1791 &=& \overline{1}\cdot25310 & d : 1 = 15 : 24 \\
x &=& 0\cdot179163 & d = 0\cdot625.
\end{array}$$

85. Gdybyśmy mieli obliczyć np. $x = -\sqrt[3]{(6258\cdot962)^2}$, to znaleźlibyśmy naprzód $\log(-x) = 2\cdot53100$, z czego wnieślibyśmy, iż $-x = 339\cdot623$. A więc, $x = -339\cdot623$.

86. Wykonywając rachunek przy pomocy logarytmów, należy się starać o to, aby w nim jak najmniejszą ilość razy potrzeba było z otrzymanego logarytmu przechodzić do liczb.

Np. obliczając $\sqrt{a^2 - b^2}$, wypadałoby, po znalezieniu $\log a^2$, z tablic odszukać a^2, po znalezieniu $\log b^2$, odszukać z tablic b^2, następnie po odjęciu b^2 od a^2 po znalezieniu $\log\sqrt{a^2 - b^2}$, odszukać z tablic $\sqrt{a^2 - b^2}$; czyli trzebaby 3 razy ze znalezionego logarytmu odszukiwać w tablicach liczbę.

Jeżeli jednak dane wyrażenie przedstawimy tak: $\sqrt{(a+b)(a-b)}$, łatwo wyrachujemy liczby $a+b$ i $a-b$, a następnie po obliczeniu $[\log(a+b)+\log(a-b)]\frac{1}{2}$ raz tylko z tak znalezionego logarytmu odszukamy w tablicach liczbę.

Podobnie np., jeżelibyśmy objętość stożka ściętego chcieli przy pomocy logarytmów obliczyć wprost z formuły $\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$, to należałoby 4 razy ze znalezionego logarytmu odszukiwać w tablicach liczbę. Przekształciwszy jednak tę formułę w taki sposób: $\frac{\pi h}{3}\left[(R+r)^2-Rr\right]$, możemy uprzednio znaleźć $\sqrt{Rr}=a$ oraz liczby $R+r+a$ i $R+r-a$, a następnie obliczyć $\log\left[\frac{\pi h}{3}(R+r+\sqrt{Rr})(R+r-\sqrt{Rr})\right]$. W ten sposób tylko dwa razy ze znalezionego logarytmu wypadnie w tablicach odszukiwać liczby.

W rachunkach, wykonywanych przy pomocy logarytmów, pominięcie podobnego przekształcenia uważane bywa za błąd rachunkowy.

87. Równanie wykładnicze. Gdy weźmiemy logarytmy obu stron równań wykładniczych (art. 72)

$$a^x=b, \qquad \sqrt[x]{\alpha}=\beta,$$

t. j.

$$x\log a=\log b, \qquad \frac{1}{x}\log\alpha=\log\beta,$$

to znajdziemy

$$x=\frac{\log b}{\log a}, \qquad x=\frac{\log\alpha}{\log\beta}.$$

Możemy tu zastosować logarytmy do obliczenia wartości tych ułamków, t. j. po znalezieniu odpowiednio

$$\log x=\log(\log b)-\log(\log a), \quad \log x=\log(\log\alpha)-\log(\log\beta),$$

obliczyć odpowiednią wartość x.

Gdybyśmy mieli $a^{m^x}=b$, to $m^x\log a=\log b$, zaś

$$x\log m+\log(\log a)=\log(\log b), \quad \text{skąd } x=\frac{\log(\log b)-\log(\log a)}{\log m}.$$

Po znalezieniu tu liczby, którą przedstawia różnica w liczniku, możemy do obliczenia wartości tego ułamka zastosować logarytmy.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

RÓWNANIE STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

ROZWIĄZANIA RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

88. Gdy mamy równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, którą nazwijmy x, to w niem mogą być tylko wyrazy zawierające x^2, wyrazy zawierające x^1 i wyrazy nie zawierające x. Jeżeli wszystkie wyrazy przeniesiemy na jednę np. lewą stronę równania i sumę algebraiczną czynników, przez które x^2 jest mnożone, nazwiemy a, sumę algebraiczną czynników, przez

które x^1 jest mnożone nazwiemy b, sumę zaś algebraiczną wyrazów, nie zawierających x, nazwiemy c, to każde równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą będzie kształtu

$$ax^2+bx+c=0. \quad (1)$$

Dopóki każda z liter a, b i c może przedstawiać liczbę dowolną, kształt ten nazywamy kształtem ogólnym równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą. Jeżeli zaś choćby jedna z nich nie może przedstawiać dowolnie obranej liczby, np. gdy mamy $ax^2+bx+(a-b)=0$, to wtedy o takich równaniach kształtu (1) mówimy, iż one są w kształcie zwyczajnym.

W równaniu (1) nazywamy a spółczynnikiem drugiej potęgi niewiadomej, b spółczynnikiem pierwszej potęgi niewiadomej, zaś c wyrazem wiadomym równania. Ponieważ równanie (1) możemy napisać $ax^2+bx^1+cx^0=0$, przeto a, b i c nazywamy ogólnie spółczynnikami równania.

W równaniu stopnia 2-go (1) każda z liczb b i c może być równa zeru, a zaś zerem być nie może, gdyż wówczas nie byłoby ono równaniem stopnia 2-go. Jeżeli tak b jak i c są różne od zera, to równanie (1) jest równaniem zupełnem; jeżeli zaś $c=0$, lub jeżeli $b=0$, lub nakoniec jeżeli $b=c=0$, to mamy równania niezupełne, odpowiednio:

$$ax^2+bx=0,\ ax^2+c=0,\ ax^2=0.$$

89. α. Gdy $ax^2+bx=0$, czyli $x(ax+b)=0$, to iloczyn po stronie lewej może być równy zeru tylko wtedy, kiedy albo $x=0$, alboteż $ax+b=0$; w ostatnim razie jest $x=\frac{-b}{a}$. A więc równaniu $ax^2+bx=0$ czyni zadość tak wartość $x=0$, jak i wartość $x=\frac{-b}{a}$. Widzimy więc, że to równanie ma dwa rozwiązania; nazwijmy je x_1 i x_2. Zestawiając równanie i pierwiastki, mamy

$$ax^2+bx=0;\qquad x_1=0,\quad x_2=\frac{-b}{a}. \quad (2)$$

β. Gdy $ax^2+c=0$, czyli $x^2-\left(\frac{-c}{a}\right)=0$, to, uważając liczbę $\frac{-c}{a}$ jako kwadrat liczby $\sqrt{\frac{-c}{a}}$, mieć będziemy po lewej stronie różnicę kwadratów, tak iż równanie możemy napisać $\left(x-\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)=0$. A więc albo $x-\sqrt{\frac{-c}{a}}=0$, skąd $x=+\sqrt{\frac{-c}{a}}$, alboteż $x+\sqrt{\frac{-c}{a}}=0$, skąd $x=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Równanie więc nasze ma dwa pierwiastki; nazwijmy je x_1 i x_2. Zestawiając równanie i pierwiastki, mamy

$$ax^2+c=0;\qquad x_1=+\sqrt{\frac{-c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}. \quad (3)$$

Np. gdy mamy $4x^2-9=0$, to $x_1=+\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$; gdy mamy $4x^2+9=0$, to $x_1=+\frac{3}{2}i$, $x_2=-\frac{3}{2}i$.

Pierwiastki zatem równania $ax^2+c=0$ różnią się od siebie tylko znakiem. Są one rzeczywiste wtedy, kiedy liczby a i c nie są jednakowego znaku.

γ. Równanie niezupełne $ax^2=0$ jest szczególnym przypadkiem równania (2), jeżeli w niem $b=0$, alboteż szczególnym przypadkiem równania (3), jeżeli w niem $c=0$. W obu razach z wyrażeń odpowiednio (2) i (3) pierwiastków tych równań otrzymujemy $x_1=0$ i $x_2=0$. Chociaż więc równaniu $ax^2=0$ czyni jedynie zadość wartość $x=0$, to jednak mówimy, albo, że ono ma dwa pierwiastki równe sobie $x_1=x_2=0$, alboteż, że ono ma pierwiastek podwójny, $x_1=x_2=0$. Jest więc

$$ax^2=0; \quad x_1=0, \quad x_2=0 \tag{4}$$

90. Mając równanie zupełne $ax^2+bx+c=0$, pomnóżmy obie jego strony przez $4a$; mieć będziemy $4a^2x^2+4abx+4ac=0$. Pierwsze dwa wyrazy po stronie lewej są dwoma wyrazami kwadratu dwumianu $2ax+b$, gdyż $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$. Zatem $4a^2x^2+4abx=(2ax+b)^2-b^2$; pisząc to w naszem równaniu, będziemy mieli

$$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0. \tag{5}$$

Postępując podobnie jak w art. poprzednim pod β., możemy to równanie napisać

$$\left(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}\right)=0;$$

albo więc pierwszy czynnik równa się 0, a w takim razie $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, alboteż drugi czynnik równa się 0, a w takim razie $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Ma więc nasze równanie dwa rozwiązania; nazwijmy je x_1 i x_2. Jest więc

$$ax^2+bx+c=; \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{6}$$

Niekiedy te dwa pierwiastki piszemy łącznie w taki sposób:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{7}$$

rozumiejąc, że z dwu znaków przed pierwiastkiem kwadratowym jeden odpowiada jednemu, drugi zaś pozostałemu pierwiastkowi naszego równania. Ze wzorów (6) przy $c=0$ wprost wypadają wzory (2), przy $b=0$ wzory (3), zaś przy $b=0$ i $c=0$ wzory (4).

91. We wzorach (6), tak w x_1, jak i w x_2, mamy pod znakiem pierwiastka kwadratowego wyrażenie b^2-4ac. Ponieważ a, b i c mogą być jakiekolwiek, przeto albo $b^2-4ac>0$, albo $b^2-4ac=0$, alboteż $b^2-4ac<0$.

Przy $b^2-4ac>0$ jest $\sqrt{b^2-4ac}$ liczbą rzeczywistą, wskutek czego tak x_1 jak i x_2 mają wartości rzeczywiste, różne od siebie. — Wówczas po stronie lewej równania (5) mamy w drugim nawiasie liczbę dodatną, którą mamy odjąć od $(2ax+b)^2$; przy x rzeczywistem ów kwadrat jest także liczbą dodatną.

Przy $b^2-4ac=0$ jest $\sqrt{b^2-4ac}=0$, wskutek czego $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$, t. j. równanie (1) ma podwójny pierwiastek rzeczywisty. — Wówczas według (5) równanie (1) może być sprowadzone do kształtu $(2ax+b)^2=0$, t. j. w tym razie lewą stronę równania (1) można przedstawić jako kwadrat dwumianu. Otrzymać to możemy wprost, kładąc w (1) $c=\frac{b^2}{4a}$.

Nakoniec przy $b^2-4ac<0$ jest $\sqrt{b^2-4ac}$ liczbą urojoną, wskutek czego tak x_1 jak i x_2 są liczbami zespolonemi. — Wówczas po lewej stronie równania (5) mamy w drugim nawiasie liczbę ujemną, a więc $-(b^2-4ac)$ jest liczbą dodatną, którą mamy dodać do $(2ax+b)^2$. Przy x rzeczywistem ów kwadrat byłby także liczbą dodatną, a suma dwu liczb dodatnych nie może być równa zeru. Tylko więc dlatego, że w tym razie x nie jest liczbą rzeczywistą, ten kwadrat nie jest liczbą dodatną i równość (5) zachodzić może. — Tak w x_1 jak i w x_2 zamiast $\sqrt{b^2-4ac}$ pisząc $\sqrt{-(4ac-b^2)}$ czyli $i\sqrt{4ac-b^2}$, mamy

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i,\quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i.$$

Widzimy więc, że te pierwiastki przedstawiają parę liczb zespolonych sprzężonych z sobą. W przypadku $b=0$, oba pierwiastki są urojone i różnią się od siebie tylko znakiem.

Według wzoru ogólnego (7), o pierwiastkach równania (1) powiemy: *pierwiastek równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą jest równy sumie algebraicznej spółczynnika pierwszej potęgi niewiadomej, wziętego ze znakiem zmienionym, i poprzedzonego znakiem + lub — pierwiastka kwadratowego z różnicy między kwadratem tegoż spółczynnika, a poczwórnym iloczynem spółczynnika drugiej potęgi niewiadomej i wyrazu wiadomego, podzielonej przez podwojony spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.* Np.

$$3x^2-9x+\tfrac{14}{3}=0,\ x=\tfrac{1}{2.3}(9\pm\sqrt{81-4.3.\tfrac{14}{3}})=\tfrac{1}{6}(9\pm5), x_1=\tfrac{7}{3},\ x_2=\tfrac{2}{3};$$

$$3x^2-9x+5=0,\quad x_1=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{21},\quad x_2=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{6}\sqrt{21};$$

$$3x^2-9x+7=0,\quad x_1=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}i\sqrt{3},\quad x_2=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{6}i\sqrt{3}.$$

Jeżeli w równaniu (1) spółczynnik b jest podzielny przez 2, to w (7) kładąc $b=2b'$, będziemy mieli $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{4b'^2-4ac}=2\sqrt{b'^2-ac}$, tak iż

$$ax^2+2b'x+c=0,\quad x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

Np. $\quad 9x^2+18x+4=0,\qquad x=\tfrac{1}{9}(-9\pm\sqrt{81-36})=-1\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{5};$

$$2x^2-2\sqrt{3}x+1=0,\ x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{3-2.1}),\ x_1=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm1).$$

92. Ogólne równanie (1) często upraszczamy, dzieląc obie jego strony przez a, i dochodzimy do tego, iż spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej jest jednością. W równaniu $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ kładąc $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ będziemy mieli równanie w kształcie

$$x^2+px+q=0. \tag{8}$$

Pierwiastki jego moglibyśmy wprost wyprowadzić ze wzoru (7), albo dzieląc licznik i mianownik ułamka przez a i wprowadzając powyższe oznaczenia, alboteż, kładąc w nim $a=1$ i pisząc p zamiast b, zaś q zamiast c. Wyprowadzimy tu jednak owe wyrażenia pierwiastków w sposób podobny do użytego w art. 90-ym.

Pierwsze dwa wyrazy po stronie lewej równania (8) są takie same, jak dwa wyrazy kwadratu dwumianu $x+\frac{p}{2}$, gdyż $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$. Zatem $x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$. Pisząc to w równaniu (8), będziemy mieli $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0$, czyli $\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0$,

tak iż
$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \tag{9}$$

t. j. *pierwiastek równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, w którem spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej jest jednością, jest równy połowie spółczynnika pierwszej potęgi niewiadomej, wziętego ze znakiem zmienionym i poprzedzonemu znakiem + lub — pierwiastkowi kwadratowemu z różnicy między kwadratem połowy tegoż spółczynnika a wyrazem wiadomym.*

Jeżeli $\frac{p^2}{4}-q>0$, oba pierwiastki są rzeczywiste i od siebie różne. Jeżeli $\frac{p^2}{4}-q=0$, pierwiastki są rzeczywiste i równe sobie, czyli równanie (8) ma pierwiastek rzeczywisty podwójny $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$. Jeżeli nakoniec $\frac{p^2}{4}-q<0$, to wówczas mamy $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\sqrt{-\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, $x_1=-\frac{p}{2}+i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, $x_2=-\frac{p}{2}-i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, t. j. pierwiastki równania są zespolone i z sobą sprzężone; w przypadku $p=0$ oba pierwiastki są urojone i różnią się od siebie tylko znakiem.

RÓWNANIE UŁAMKOWE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

93. 1). $\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}$.

Mnożąc obie strony przez liczbę $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, dochodzimy do równania
$$2x^2-15x+25=0;\quad x_1=5,\quad x_2=\tfrac{5}{2}.$$
Ponieważ ani wartość $x=5$, aniteż wartość $x=\frac{5}{2}$ nie przywodzi do zera liczby $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, przeto otrzymane równanie stopnia 2-go jest równoznaczne z równaniem danem. A zatem równanie dane ma pierwiastki $x_1=5$, $x_2=\frac{5}{2}$.

2). $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-4x+3}=0$.

Po pomnożeniu obu stron przez liczbę $(x^2-4x+3)=(x-1)(x-3)$, otrzymamy
$$x^2-3x+2=0;\quad x_1=2,\quad x_2=1.$$
Pierwszy pierwiastek, który nie przywodzi do zera liczby $(x-1)(x-3)$ zadość czyni równaniu danemu. Ponieważ zaś drugi pierwiastek przywodzi do

zera liczbę $(x-1)(x-3)$, przeto trzeba sprawdzić, czy on jest także pierwiastkiem równania danego. Sprawdzenie bezpośrednie jest niemożliwe, gdyż oba wyrazy stają się nieskończenie wielkiemi. Zważmy jednak, że

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}.$$

Równanie zaś $\frac{x-2}{x-3}=0$ ma jedyny pierwiastek $x=2$, a więc także równanie dane ma jedyny pierwiastek $x=2$ i nie jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

3). $\frac{a+2}{x-a}+\frac{a-2}{x-6}=\frac{3}{2}$. (α)

Po pomnożeniu obu stron przez liczbę $2(x-a)(x-6)$ otrzymamy

$$3x^2-(7a+18)x+2a^2+26a+24=0; \quad x_1=2(a+1), \; x_2=\tfrac{1}{3}a+4. \quad (\beta)$$

Otrzymane równanie stopnia 2-go jest równoznaczne z równaniem danem, jeżeli liczba $(x-a)(x-6)$ jest od zera różna, a więc pod warunkiem, iż nie jest ani $x-a=0$, aniteż $x-6=0$. Ponieważ zaś w wyrażeniach (β) pierwiastków znajduje się litera a, przeto ona nie może mieć takich wartości, przy którychby było

$$2(a+1)=a, \quad 2(a+1)=6, \quad \tfrac{1}{3}a+4=a, \quad \tfrac{1}{3}a+4=6,$$

t. j. nie może być ani $a=-2$, ani $a=+2$, aniteż $a=6$. Jakoż, przy tych wartościach równania (α) i (β) przechodzą odpowiednio na

$$-\frac{4}{x-6}=\frac{3}{2}, \; (x=\tfrac{10}{3}); \quad 3x^2-4x-20=0, \; (x_1=-2, \; x_2=\tfrac{10}{3});$$

$$\frac{4}{x-2}=\frac{3}{2}, \; (x=\tfrac{14}{3}); \quad 3x^2-32x+84=0, \; (x_1=6, \quad x_2=\tfrac{14}{3});$$

$$\frac{4}{x-6}=\frac{1}{2}, \; (x=14); \quad x^2-20x+84=0, \; (x_1=14, \quad x_2=6).$$

RÓWNANIE NIEWYMIERNE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

94. 1). $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}$.

Po podniesieniu dwukrotnie do kwadratu otrzymamy

$$x^2-5x+6=0; \quad x_1=2, \quad x_2=3.$$

Obie wartości $x=2$ i $x=3$ są rozwiązaniami danego równania niewymiernego, które przeto jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

2). $\sqrt{x+5}+\sqrt{2(x+4)}=7$.

Po dwukrotnem podniesieniu do kwadratu otrzymamy

$$x^2-288x+1136=0; \quad x_1=284, \quad x_2=4.$$

Z tych dwu pierwiastków otrzymanego równania stopnia 1-go pierwszy nie czyni zadość równaniu danemu, gdyż po podstawieniu otrzymalibyśmy $41=7$. Jedynie więc wartość $x=4$ jest rozwiązaniem danego równania niewymiernego, które przeto nie jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

3). $-\sqrt{x+5}+\sqrt{2(x+4)}=7$; $x^2-288x+1136=0$; $x_1=284$, $x_2=4$. Równanie dane ma tylko pierwiastek $x=284$.

4). $\sqrt{x+5}-\sqrt{2(x+4)}=7$; $x^2-288x+1136=0$; $x_1=284$, $x_2=4$. Ani $x=284$, aniteż $x=4$ nie czyni zadość równaniu danemu, które przeto jest niemożliwe.

5). $\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{24}{\sqrt[3]{x+1}}-11=0$, czyli $\sqrt[3]{(x+1)^2}-11\sqrt[3]{x+1}+24=0$,

gdyż $x=-1$ nie jest pierwiastkiem równania danego. Kładąc $\sqrt[3]{x+1}=y$, rozwiążemy równanie

$$y^2-11y+24=0;\quad y_1=3,\ y_2=8.$$

Jest więc albo $\sqrt[3]{x+1}=3$, czyli $x+1=27$, skąd $x_1=26$, alboteż $\sqrt[3]{x+1}=8$, czyli $x+1=512$, skąd $x_2=511$.

UWAGI OGÓLNE O RÓWNANIU STOPNIA DRUGIEGO.

95. *Równanie stopnia 2-go ma tylko dwa pierwiastki.* Niech x_1 będzie jednym pierwiastkiem równania $ax^2+bx+c=0$. Po podstawieniu go, otrzymujemy równość $ax_1^2+bx_1+c=0$, która po wykonaniu działań po stronie lewej stanie się tożsamością. Gdy od równania danego odejmiemy tę równość stronami odpowiedniemi, otrzymamy równanie

$$a(x^2-x_1^2)+b(x-x_1)=0,\qquad \text{czyli}\quad (x-x_1)(ax+ax_1+b)=0,$$

równoznaczne z równaniem danem. Albo więc $x-x_1=0$, skąd $x=x_1$, jednemu pierwiastkowi równania, alboteż $ax+ax_1+b=0$. To ostatnie równanie, jako stopnia 1-go, może mieć, jak wiemy, jeden tylko pierwiastek. A zatem równanie dane prócz x_1 ma tylko jeden pierwiastek, czyli razem ma ich tylko 2. W przypadku szczególnym, kiedy równanie $ax+ax_1+b=0$ ma pierwiastek $x=x_1$, równanie dane ma dwa pierwiastki równe sobie, czyli, jak mówimy, ma pierwiastek podwójny.

96. Niech dwa równania

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0,\quad a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

będą równoznaczne z sobą. Wtedy pierwiastki jednego są też same, co pierwiastki drugiego. Pomnóżmy obie strony pierwszego przez a_2, obie zaś strony drugiego przez a_1; równania

$$a_1a_2x^2+a_2b_1x+a_2c_1=0,\quad a_1a_2x^2+a_1b_2x+a_1c_2=0$$

są równoznaczne z sobą. Gdy od drugiego równania odejmiemy pierwsze stronami odpowiedniemi, otrzymamy równanie

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(a_1c_2-a_2c_1)=0$$

równoznaczne z każdem z poprzednich, a więc także z każdem z danych. Ma przeto to ostatnie równanie też same dwa pierwiastki, co każde z danych. Jest zaś ono równaniem stopnia 1-go, a więc tak spółczynnik x, jak i wyraz wiadomy są równe zeru, t. j.

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,\quad \text{skąd}\quad a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2.$$

A zatem *dwa równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą równoznaczne z sobą mają odpowiednie spółczynniki proporcyonalne.*

97. Gdyby przy trzech wartościach x np. x_1, x_2, x_3, z których każde dwie są od siebie różne, było $ax^2+bx+c=0$, t. j.

$$ax_1^2+bx_1+c=0, \quad ax_2^2+bx_2+c=0, \quad ax_3^2+bx_3+c=0, \tag{1}$$

to, odjąwszy np. od pierwszej równości każdą z dwu pozostałych, otrzymamy

$$(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0, \quad (x_1-x_3)(ax_1+ax_3+b)=0,$$

Ponieważ nie jest ani $x_1-x_2=0$, aniteż $x_1-x_3=0$, przeto

$$ax_1+ax_2+b=0, \quad ax_1+ax_3+b=0. \tag{2}$$

Odejmując zaś te równości od siebie stronami odpowiedniemi, mieć będziemy

$$a(x_2-x_3)=0.$$

Ponieważ nie jest $x_2-x_3=0$, przeto jest $a=0$. Wskutek tego z równości (2) wynika $b=0$, a w następstwie tego z równości (1) wynika $c=0$. A zatem: jeżeli jest $ax^2+bx+c=0$ przy więcej, niż dwu, wartościach x, to wtedy $a=0$, $b=0$ i $c=0$.

Przy wartościach $a=0$, $b=0$ i $c=0$ nie jest $ax^2+bx+c=0$ równaniem, gdyż x mogłoby tu otrzymać jakąkolwiek wartość, a to jest sprzeczne z określeniem równania; właściwie jest wtedy tożsamość $0=0$.

Jeżelibyśmy mieli $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$ przy więcej niż dwu wartościach x, to byłoby to możliwe tylko w takim razie, kiedyby jednocześnie $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, gdyż poprzednią równość możemy napisać w postaci $(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2)=0$.

98. Ponieważ w równaniu $ax^2+bx+c=0$ może a oznaczać wszelką liczbę dodatną lub ujemną, choćby co do wartości bezwzględnej bardzo małą, przeto, jeżeli liczba a przechodzi np. od wartości ujemnych do dodatnych, to w tem przejściu może otrzymać wartość 0. Wówczas przestaje istnieć równanie stopnia 2-go i jeżeli b jest od zera różne, mamy równanie stopnia 1-go $bx+c=0$. Jednocześnie zaś wyrażenia pierwiastków (6) art. 90-go danego równania stają się: $x_1=\frac{0}{0}$, $x_2=\infty$. Zważmy jednak, że ogólnie

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

po podzieleniu licznika i mianownika przez spólny czynnik $2a$. W tem dopiero wyrażeniu ogólnem pierwiastka x_1 przyjmując $a=0$, otrzymujemy $x_1=-\frac{c}{b}$, z czego widzimy, iż poprzednio otrzymana wartość nieoznaczona tego pierwiastka była pozorna. Jakoż, rzeczywiście, ponieważ równanie nasze przeszło na równanie $bx+c=0$, to wartość $x_1=-\frac{c}{b}$ zadość mu czyni.

Widzimy więc, że *kiedy w równaniu $ax^2+bx+c=0$ spółczynnik a przechodzi przez wartość 0, a spółczynnik b jest od zera różny, to jeden z dwu pierwiastków tego równania jest pierwiastkiem równania stopnia 1-go $bx+c=0$, na które dane równanie wówczas przechodzi, wyrażenie zaś drugiego pierwiastka otrzymuje wartość nieskończenie wielką.*

Jeżeli jednocześnie spółczynniki a i b stają się równemi zeru, c zaś jest od zera różne, to równanie $ax^2+bx+c=0$ istnieć przestaje, wyrażenia zaś obu pierwiastków otrzymują wtedy wartości nieskończenie wielkie.

WŁASNOŚCI PIERWIASTKÓW RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

99. Gdy równanie $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki x_1 i x_2, to

$$ax_1^2+bx_1+c=0, \quad ax_2^2+bx_2+c=0. \tag{1}$$

α. Po odjęciu tych równości od siebie stronami odpowiedniemi mieć będziemy $a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0$, czyli $(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0$. Ta równość istnieje zawsze. Niezawsze zaś jest $x_1=x_2$. Przeto zawsze mamy $a(x_1+x_2)+b=0$, skąd

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \text{ albo } x_1+x_2=-p, \tag{2}$$

jeżeli uwzględnimy oznaczenia art. 92-go. A zatem *suma pierwiastków równania stopnia 2-go jest równa spółczynnikowi pierwszej potęgi niewiadomej, wziętemu ze zmienionym znakiem, podzielonemu przez spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.*

β. Wyrażenie $b=-a(x_1+x_2)$, wynikające z (2), podstawmy w którąkolwiek z równości (1); otrzymamy po redukcyi $-ax_1x_2+c=0$, skąd

$$x_1x_2=\frac{c}{a}, \text{ albo } x_1x_2=q, \tag{3}$$

jeżeli uwzględnimy oznaczenia art. 92-go. A zatem *iloczyn pierwiastków równania stopnia 2-go jest równy wyrazowi wiadomemu, podzielonemu przez spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.*

Wyrażenia (2) i (3) moglibyśmy otrzymać wprost, czyto z wyrażeń (6) art. 90-go, czyteż z wyrażeń (9) art. 92-go pierwiastków równania, biorąc odpowiednio ich sumę lub iloczyn.

100. W równaniu $ax^2+bx+c=0$ przyjmijmy, iż spółczynnik $a>0$ (w przeciwnym bowiem razie zmienilibyśmy znaki wszystkich wyrazów). Przy $c<0$ oba pierwiastki są rzeczywiste; przy $c>0$ są rzeczywiste, jeżeli $b^2>4ac$ (art. 91). Chcąc tu rozważać *tylko pierwiastki rzeczywiste*, wyłączymy, w razie $c>0$, przypadek, kiedy jest $b^2<4ac$.

Z własności (3) wynika, że: kiedy $c>0$, oba pierwiastki są jednakowego znaku; kiedy $c<0$, pierwiastki są różnego znaku.

Zestawiając z sobą własności (2) i (3), łatwo wniesiemy, iż: kiedy przy $c>0$ jest $b<0$, oba pierwiastki są dodatne; kiedy przy $c>0$ jest $b>0$, oba pierwiastki są ujemne; kiedy przy $c<0$ jest $b<0$, pierwiastek dodatny ma większą wartość bezwzględną; kiedy nakoniec przy $c<0$ jest $b>0$, pierwiastek ujemny ma większą wartość bezwzględną.

101. Zadanie. Mając sumę dwu liczb i ich iloczyn, znaleźć te liczby.

Nieznane liczby nazwijmy x_1 i x_2, znane ich sumę i iloczyn nazwijmy odpowiednio s i t, t. j.

$$x_1+x_2=s, \quad x_1x_2=t.$$

Jeżeli szukane liczby x_1 i x_2 uważać będziemy za pierwiastki równania stopnia 2-go $x^2+px+q=0$, to $-p=x_1+x_2=s$, $q=x_1x_2=t$, tak iż owo równanie jest

$$x^2-sx+t=0, \quad \text{skąd} \quad x_1=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}s^2-t}, \quad x_2=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}s^2-t}.$$

Np. $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=2$; $x^2+4x+2=0$; $x_1=-2+\sqrt{2}$, $x_2=-2-\sqrt{2}$.

Gdybyśmy wyrażenie $x_2=s_1-x_1$ podstawili w $x_1x_2=t$, to otrzymalibyśmy $x_1(s-x_1)=t$, czyli $x_1^2-sx_1+t=0$, t. j. powyżej rozwiązane równanie, którego jednym pierwiastkiem jest x_1, drugim zaś x_2.

PRZEKSZTAŁCENIE SZCZEGÓLNEGO WYRAŻENIA NIEWYMIERNEGO.

102. Weźmiemy na uwagę szczególne wyrażenie niewymierne, mianowicie

$$\sqrt{c\pm\sqrt{d}}.$$

Przyjmiemy naprzód, że litery c i d oznaczają liczby wymierne, a $\sqrt{d}$ jest liczbą niewymierną. Rozważymy, kiedy takie wyrażenie może być przedstawione jako suma algebraiczna dwu liczb $\sqrt{x_1}$ i $\sqrt{x_2}$, gdzie x_1 i x_2 są liczbami wymiernemi.

Przyjmijmy, $\sqrt{c+\sqrt{d}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$. Po podniesieniu obu stron równości do kwadratu, mieć będziemy

$$c-x_1-x_2+\sqrt{d}=2\sqrt{x_1x_2}; \tag{1}$$

podnosząc powtórnie do kwadratu, otrzymamy

$$(c-x_1-x_2)^2+2(c-x_1-x_2)\sqrt{d}+d=4x_1x_2.$$

W tej równości mamy po stronie prawej liczbę wymierną, a więc strona lewa także jest liczbą wymierną. Że zaś z założenia $\sqrt{d}$ jest liczbą niewymierną, przeto jest to możliwe tylko wtedy, kiedy $c-x_1-x_2=0$, skąd mamy

$$x_1+x_2=c. \tag{2}$$

Uwzględniając (2), otrzymujemy z (1) $\sqrt{d}=2\sqrt{x_1x_2}$, skąd

$$x_1x_2=\frac{1}{4}d. \tag{3}$$

Według (2) i (3) x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2-cx+\frac{d}{4}=0$, t. j.

$$x_1=\frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2-d}), \quad x_2=\frac{1}{2}(c-\sqrt{c^2-d}). \tag{4}$$

Kładąc podobnie $\sqrt{c-\sqrt{d}}=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$, dojdziemy do wyrażeń (4).

Ogólnie zatem jest

$$\sqrt{c\pm\sqrt{d}}=\sqrt{\frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2-d})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(c-\sqrt{c^2-d})}, \tag{5}$$

gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie a dolne sobie.

Jeżeli we wzorze (5) liczby c i d są wymierne, oraz $\sqrt{c^2-d}$ jest liczbą wymierną, to po prawej stronie mamy pod każdym z dwu pierwiastków kwadratowych ogólniejszych liczbę wymierną i wtedy wzór (5) służy do przekształcenia pierwiastka kwadratowego z wyrażenia, złożonego z liczby wymiernej i niewymiernego pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej na sumę algebraiczną dwu pierwiastków kwadratowych z liczb wymiernych. Tak np. mamy:

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + \sqrt{5} = 0; \quad x = \sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{3} \pm \left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

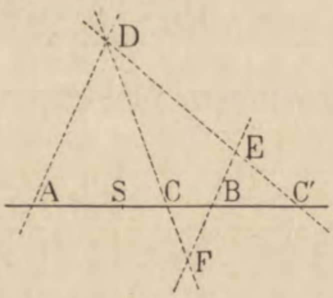
$$x^2 - 2\sqrt[4]{27}\,x + \sqrt{15} = 0; \quad x = \sqrt[4]{27} \pm \sqrt[4]{3}\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt[4]{27} \pm \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Gdybyśmy ogólniej przyjęli tylko, iż liczby c, d i $c^2 - d$ są dodatne, to, podnosząc do kwadratu obie strony wzoru (5), które wówczas przedstawiają wyrażenia rzeczywiste, dojdziemy (po wykonaniu uproszczeń po stronie prawej) do tożsamości. Przeto także, na mocy tego, cośmy powiedzieli w art. 64-ym, wzór (5) stosować możemy również w przypadku, kiedy strony tej równości nie są wyrażeniami rzeczywistemi. A zatem wzór (5) jest ogólny, t. j przy wszelkich wartościach liczb c i d stosować go można.

ZADANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

103. Jeżeli na zadanie można znaleźć odpowiedź, rozwiązując równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, to zadanie nazywa się zadaniem stopnia 2-go z jedną niewiadomą. Rozwiążemy dla przykładu kilka takich zadań.

Zadanie. Na prostej znajdują się dwa ogniska w punktach A i B, których odległość jest d. Ilość światła, padającego na punkt, oddalony o jednostkę od ogniska, jest odpowiednio a i b. Znaleźć na owej prostej punkty jednakowo oświetlone przez oba ogniska.



Odległość od punktu A do punktu równo oświetlonego przez oba ogniska, dodatną np. w kierunku od A ku B, nazwijmy x. Przypuśćmy, że punkt C jest równo oświetlony przez oba ogniska; wtedy $AC = x$, zaś $BC = x - d$. Ponieważ ilość światła, padającego na punkt, jest odwrotnie proporcyonalna względem kwadratu jego odległości od źródła światła, przeto na punkt C, oddalony od A o x jednostek, pada z ogniska A światła $\frac{a}{x^2}$, z ogniska zaś B, od którego jest oddalony o $x - d$ jednostek, pada światła $\frac{b}{(x-d)^2}$. Że zaś punkt C jest jednakowo przez oba ogniska oświetlony, zatem

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}, \tag{α}$$

czyli $(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0$; $x_1 = \frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}d$, $x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d$. (β)
Otrzymane dwie wartości rzeczywiste niewiadomej wskazują, iż na prostej AB istnieją dwa punkty jednakowo oświetlone.

Jeżeli $a > b$, to mianowniki wyrażeń x_1 i x_2 są dodatne. Ułamek $\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b} > 1$, przeto $x_1 > d$ i jeden punkt jednakowo oświetlony znajduje się poza odcinkiem AB z prawej strony punktu B, np. w punkcie C′. Ułamek $\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jest mniejszy od 1, a większy od $\frac{1}{2}$; przeto $\frac{1}{2}d < x_2 < d$, t. j. drugi punkt jednakowo oświetlony przypada wewnątrz odcinka AB bliżej punktu B niż punktu A, np. w punkcie C.

Zauważmy, iż według równania (α) jest

$$\frac{x}{(x-d)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Jeżeli z punktów A i B poprowadzimy proste, do siebie równoległe, i na nich od punktów A i B oddzielimy w tym samym kierunku odcinki AD i BE, których stosunek jest równy stosunkowi $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, od punktu zaś B oddzielimy w kierunku przeciwnym odcinek $BE = BF$, to punkty przecięcia się prostych DE i DF z prostą AB będą szukanemi punktami C′ i C.

Jeżeli $a < b$, to mianowniki wyrażeń x_1 i x_2 są ujemne, ale tylko wartość x_1 jest ujemna, wartość zaś x_2 pozostaje dodatną. Ponieważ $x_1 < 0$, przeto w tym razie punkt C′ przypadnie poza odcinkiem AB z lewej jego strony. Zaś $x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}d < \frac{1}{2}d$, t. j. punkt C przypada w tym razie wewnątrz odcinka AB bliżej punktu A, niż punktu B.

Jeżeli nakoniec $a=b$, to równanie (β) sprowadza się do równania stopnia 1-go

$$2x - d = 0; \qquad (\gamma)$$

wyrażenia zaś pierwiastków równania (β) stają się: $x_1 = \frac{2ad}{0} = \infty$, $x_2 = \frac{0}{0}$ (por. art. 98). Jednak wogóle $x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}d$; w tem wyrażeniu przyjmując $a = b$, mieć będziemy $x_2 = \frac{1}{2}d$, t. j. punkt C znajdzie się w punkcie S, środku odcinka AB. Ten pierwiastek zadość czyni równaniu (γ). Wartość zaś $x_1 = \infty$ nie jest już pierwiastkiem równania (γ). Należy więc wprost z zadania wnieść, czy ona daje na nie odpowiedź. Gdy $a = b$, t. j. kiedy ogniska świecą z jednakową siłą, to na prostej zewnątrz odcinka AB niema punktu jednakowo oświetlonego. Ponieważ przy $a \gtrless b$ wartość x_2 odpowiadała punktowi C′, który w miarę, jak różnica liczb a i b się zmniejsza, coraz się oddala, przeto przy $a = b$ wartość $x_2 = \infty$ wskazuje, iż odległość punktu C′ od A będzie większa od jakkolwiek wielkiej. Jakoż, wtedy prosta DE jest równoległa do prostej AB.

104. Zadanie I. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dłuższa od jednej z przyprostokątnych o $9m$, a od pozostałej o $2m$; znaleźć długości boków tego trójkąta.

Gdy długość przeciwprostokątnej jest x metrów, to

$$(x-9)^2+(x-2)^2=x^2; \quad x_1=17, \quad x_2=5.$$

Drugi pierwiastek nie prowadzi do odpowiedzi na zadanie, a więc długości boków szukanego trójkąta prostokątnego mogą być tylko $17m$, $8m$, $15m$.

Zadanie II. Jaka jest suma kwadratów dwu liczb, których suma jest 6, a iloczyn 10?

Jeżeli liczby, których sumy kwadratów szukamy, nazwiemy x_1 i x_2, to (art. 101) z warunków $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=10$, dochodzimy do równania

$$x^2-6x+10=0; \quad x_1=3+i, \quad x_2=3-i.$$

Ponieważ $x_1^2=8+6i$, $x_2^2=8-6i$, przeto $x_1^2+x_2^2=16$. Odpowiedź: 16.

Zadanie III. Jaka jest suma pól kwadratów, wystawionych na dwu bokach sąsiednich prostokąta, którego obwód jest 12 jednostek długości, pole zaś 10 odpowiednich jednostek kwadratowych?

Jeżeli długości dwu sąsiednich boków prostokąta nazwiemy x_1 i x_2, to dojdziemy do takiegoż równania, jak w zadaniu II, i znajdziemy $x_1=3+i$, $x_2=3-i$. Z tego już wnosimy, że prostokąt, któryby odpowiadał warunkom zadania, jest niemożliwy.

TRÓJMIAN STOPNIA DRUGIEGO.

105. Weźmy na uwagę trójmian

$$ax^2+bx+c. \tag{1}$$

Niech w nim liczby a, b i c mają pewne dowolnie obrane wartości. Co do x zaś nie robimy takiego zastrzeżenia, t. j. przypuszczamy, że x może przybierać różne wartości i dlatego uważamy w tym trójmianie x za liczbę zmienną (veränderliche Z.); ze zmianą wartości x zmieniać się będzie wartość trójmianu. W przeciwstawieniu liczbie zmiennej, liczbę, która w ciągu rachunku wartości swej nie zmienia, nazywamy liczbą stałą (Constante). Tak więc w trójmianie (1) liczby a, b i c są stałe. Względem zmiennej x trójmian (1) jest stopnia 2-go; dlatego krótko nazywamy go trójmianem stopnia 2-go.

Trójmian (1) możemy tak przekształcić:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right). \tag{2}$$

Po stronie prawej tej równości, liczby $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ możemy inaczej wyrazić. Wartości zmiennej x, przy których trójmian (1) jest równy zeru, t. j. pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$, nazwijmy x_1 i x_2; liczby x_1 i x_2, jako wyrażające się przez liczby stałe a, b i c, są także liczbami stałemi. Według wzorów (2) i (3) art. 99-go $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a}=x_1x_2$. Podstawiając te wyrażenia liczb $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ w prawą stronę równości (2), mieć będziemy $ax^2+bx+c=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]$, albo

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{3}$$

t. j. *trójmian stopnia 2-go można przedstawić jako iloczyn spółczynnika drugiej potęgi zmiennej przez iloczyn dwu czynników stopnia 1-go, z których każdy jest różnicą między zmienną a jednym z pierwiastków równania, powstałego z przyrównania danego trójmianu do zera.*

Zważmy, że wzór (3) można tak inaczej wyprowadzić. Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, to dzieląc trójmian (1) przez różnicę $x-x_1$, otrzymamy

$$\frac{ax^2+bx+c}{x-x_1}=ax+ax_1+b+\frac{ax_1^2+bx_1+c}{x-x_1},$$

albo, z uwagi, że licznik ułamka po stronie prawej jest zerem i że według wzoru (2) art. 99-go $ax_1+b=-ax_2$,

$$\frac{ax^2+bx+c}{x-x_1}=a(x-x_2),$$

skąd wynika równość

$$(ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Np., gdy mamy trójmian $-x^2+2x+3$, to ponieważ rozwiązując równanie $x^2-2x-3=0$ otrzymamy $x_1=-1$, $x_2=+3$, jest według (3) przy każdej wartości x

$$-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3).$$

106. Przyjmijmy, że w równości (3) zmienna x otrzymuje różne, ale tylko rzeczywiste wartości.

Zważmy, że liczby stałe x_1 i x_2, jako wyrażające się przez dowolnie obrane liczby a, b i c, mogą być (art. 91) albo rzeczywiste, albo zespolone, alboteż urojone.

Jeżeli liczby x_1 i x_2 są rzeczywiste i różne od siebie i jeżeli np. $x_1<x_2$, to dla każdej wartości x mniejszej od x_1 obie różnice $x-x_1$ i $x-x_2$ są ujemne, ich iloczyn jest dodatny i trójmian ma wartość o takim znaku, jakiego znaku jest spółczynnik a. Podobnie, dla każdej wartości $x>x_2$ obie te różnice są dodatne i wartość trójmianu jest o takim znaku, jakiego znaku jest spółczynnik a. Dla wartości zaś x, pośrednich między x_1 i x_2, różnica $x-x_1$ jest dodatna, różnica $x-x_2$ jest ujemna, ich iloczyn jest ujemny i wartość trójmianu jest o znaku przeciwnym znakowi spółczynnika a. Np. trójmian $-x^2+2x+3$ dla wartości $x=-2<-1$ ma wartość takiego znaku jak spółczynnik -1, t. j. ujemną (-5), dla wartości $x=0$ pośredniej między -1 i $+3$ ma wartość dodatną $(+3)$, dla wartości $x=+4>+3$, ma wartość ujemną (-5).

Jeżeli liczby x_1 i x_2 są rzeczywiste i równe sobie, to $x-x_2=x-x_1$ i równość (3) możemy tak napisać

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

i tak przy wartości $x<x_1$, jak i przy wartości $x>x_1$, wartość trójmianu jest o takim znaku, jakiego znaku jest a. Np. $2x^2-2x+\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2})^2$; ten trójmian tak przy wartościach $x<+\frac{1}{2}$, jak i przy wartościach $x>+\frac{1}{2}$, otrzymuje wartości dodatne.

Jeżeli liczby x_1 i x_2 nie są rzeczywiste $(b^2<4ac)$, to, gdy są one zespolone i z sobą sprzężone (art. 91), kładąc $x_1=\alpha+\beta i$, będziemy mieli $x_2=\alpha-\beta i$. Wówczas różnice $x-x_1=x-\alpha-\beta i$, $x_2=x-\alpha+\beta i$ są również zespolone i z sobą sprzężone, a ich iloczyn jest liczbą rzeczywistą dodatną (art. 69),

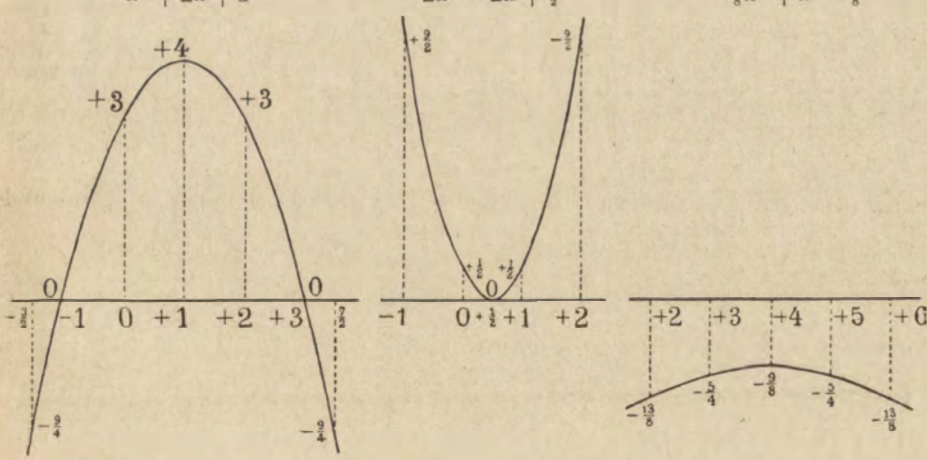
$$(x-x_1)(x-x_2)=(x-\alpha)^2+\beta^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$

tak iż wartość trójmianu jest o takim znaku, jaki ma a. Np. wartości trójmianu $-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{25}{8}=-\frac{1}{8}[(x-4)^2+9]$ przy wszelkich wartościach x są dodatne. W przypadku $b=0$ i $ac>0$ liczby x_1 i x_2 będą liczbami urojonemi, różniącemi się od siebie tylko znakiem, różnice $x-x_1$ i $x-x_2$ będą zespolone sprzężone, a ich iloczyn $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+\frac{c}{a}$, liczbie dodatnej.

Powiemy więc: *trójmian stopnia 2-go przy rzeczywistej wartości zmiennej otrzymuje wartość o takim znaku, jaki ma spółczynnik drugiej potęgi zmiennej, prócz przypadku, kiedy pierwiastki równania, powstałego z przyrównania danego trójmianu do zera, są rzeczywiste i od siebie różne i kiedy wartość zmiennej jest pośrednia między temi pierwiastkami, a wtedy odpowiednia wartość trójmianu ma znak przeciwny temu, jaki ma spółczynnik drugiej potęgi zmiennej.*

107. Jeżeli na prostej, np. poziomej, oznaczymy wartości rzeczywiste zmiennej x, obrawszy pewien jej punkt za 0 i dowolną długość za jednostkę, a na prostopadłych, w różnych punktach wystawionych, oznaczać będziemy punkty, których odległości od owej prostej przedstawią odpowiednie wartości trójmianu (1), i jeżeli umówimy się, aby wartości dodatne trójmianu oznaczać nad prostą poziomą, ujemne zaś pod nią, to każdy trójmian stopnia 2-go będzie przedstawiony przez krzywą, rozciągającą się w obie strony do nieskończoności.

$-x^2+2x+3$ $\qquad$ $2x^2-2x+\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{25}{8}$



Równanie, powstałe z przyrównania pierwszego trójmianu do zera, ma pierwiastki $x_1=-1$ i $x_2=+3$, rzeczywiste i od siebie różne; w odpowiednich punktach krzywa przecina prostą, na której oznaczyliśmy wartości x. Równanie, powstałe z przyrównania drugiego trójmianu do zera, ma pierwiastek rzeczywisty podwójny $x=+\frac{1}{2}$; w odpowiednim punkcie owa prosta jest styczna do krzywej. Równanie, powstałe z przyrównania trzeciego trójmianu do zera, nie ma pierwiastków rzeczywistych i dlatego krzywa nie spotyka owej prostej.

MAXIMUM I MINIMUM.

108. Przypatrując się pierwszemu z rysunków w art. 107-ym, przedstawiającemu trójmian $-x^2+2x+3$, dostrzeżemy, że wartości $x=+1$ odpowiada wartość trójmianu $+4$, większa od sąsiednich po obu stronach jego wartości. Taką szczególną wartość, większą od sąsiednich po obu jej stronach, nazywamy maximum, albo największością. Przypatrując się zaś drugiemu rysunkowi, przedstawiającemu trójmian $2x^2-2x+\frac{1}{2}$, dostrzeżemy, że wartości $x=+\frac{1}{2}$ odpowiada wartość 0 trójmianu, mniejsza od sąsiednich po obu stronach jego wartości. Taką szczególną wartość, mniejszą od sąsiednich po obu jej stronach, nazywamy minimum, albo najmniejszością.

Weźmy ogólne wyrażenie trójmianu i wartości, które on otrzymuje odpowiednio do wartości nadawanych zmiennej x, nazwijmy t,

$$ax^2+bx+c=t. \tag{1}$$

Z równania (1) mamy

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4at-4ac+b^2}}{2a}. \tag{2}$$

Rozważamy tylko wartości rzeczywiste x; przeto $4at \geqslant 4ac-b^2$. Stosownie więc do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$, jest odpowiednio

$$t\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a} \quad \text{lub} \quad t\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{3}$$

Pierwszy ze związków (3) wskazuje, że, przy $a>0$, z wartości t, odpowiadających rzeczywistym wartościom x, najmniejsza jest wartość $t=\frac{4ac-b^2}{4a}$, odpowiadająca według (2) jedynej wówczas wartości $x=-\frac{b}{2a}$. Ponieważ dla sąsiednich po obu stronach wartości x istnieją wartości t, jak to wprost wynika z (1), przeto owa wartość t przedstawia minimum. Z drugiego ze związków (3) taksamo wniesiemy, że, przy $a<0$, wartość $t=\frac{4ac-b^2}{4a}$, odpowiadająca jedynej wówczas wartości $x=-\frac{b}{2a}$, przedstawia maximum.

A więc: *trójmian stopnia 2-go ax^2+bx+c ma jedno minimum, lub jedno maximum, stosownie do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$; jest ono $\frac{4ac-b^2}{4a}$ i odpowiada wartości $x=-\frac{b}{2a}$.*

109. Zadanie. Daną liczbę l podzielić tak na dwie części, iżby ich iloczyn był maximum lub minimum.

Jeżeli jednę część nazwiemy x, to druga będzie $l-x$, a ich iloczyn $x(l-x)$ będzie otrzymywał rozmaite wartości zależnie od wartości x. Ponieważ $x(l-x)=-x^2+lx$ i spółczynnik x jest ujemny, przeto ten iloczyn może przedstawiać maximum, nie może zaś przedstawiać minimum. Owo maximum odpowiada wartości $x = \frac{l}{2}$ i jest równe $\frac{l^2}{4}$. Przeto *iloczyn czynników zmiennych, których suma jest stała, jest wtedy maximum, kiedy te czynniki są równe sobie.*

Do powyższego zadania sprowadza się wiele zadań, w których idzie o znalezienie maximum lub minimum. Np.

Zadanie. W dany kwadrat wpisać kwadrat o polu najmniejszem.

Niech dany kwadrat będzie ABCD. Na bokach AB, BC, CD i DA, lub ich przedłużeniach, oznaczmy punkty odpowiednio E, F, G i H, jednakowo położone względem punktów odpowiednio A, B, C i D. Łatwo okazać, że czworobok EFGH jest kwadratem i że trójkąty AEH, BFE, CGF i DHG są sobie równe. Gdyby pole któregokolwiek z tych trójkątów przedstawiało maximum, to pole kwadratu EFGH przedstawiałoby minimum, i nawzajem. Jeżeli bok danego kwadratu nazwiemy a, odcinek zaś AE nazwiemy x, to odcinek $AH = a - x$, a pole trójkąta AEH jest $\frac{1}{2} x(a-x)$. Byłoby ono maximum lub minimum, kiedyby iloczyn $x(a-x)$ przedstawiał odpowiednio maximum lub minimum. Z poprzedniego zadania wiemy, że ten iloczyn przedstawia maximum przy $x = \frac{1}{2} a$. A więc nie istnieje kwadrat EFGH, którego pole byłoby maximum. Pole zatem kwadratu EFGH jest minimum, kiedy jego wierzchołki przypadają w środkach boków kwadratu ABCD.

110. Zadanie. Daną liczbę dodatną l podzielić na n części dodatnych tak, iżby ich iloczyn był maximum.

Nazwawszy te części $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mamy pod warunkiem, iż

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = l, \tag{α}$$

tak wyznaczyć te części, aby iloczyn $x_1 x_2 \ldots x_n$ był maximum.

Ponieważ każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest mniejsza od l, przeto ich iloczyn jest mniejszy od l^n, t. j. iloczyn $x_1 x_2 \ldots x_n$ nie może rosnąć nieograniczenie; innemi słowy zadanie jest możliwe.

Przypuśćmy, że w tym iloczynie którekolwiek dwa czynniki nie są równe sobie, np. $x_1 \gtrless x_2$. W takim razie, wziąwszy ich sumę $x_1 + x_2$, możemy według pierwszego zadania art. 109-go utworzyć iloczyn

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{x_1 + x_2}{2} > x_1 x_2.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez tę samę liczbę $x_3 x_4 \ldots x_n$, otrzymamy

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{x_1 \times x_2}{2} \times x_3 x_4 \ldots x_n > x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_n .$$

Łatwo więc wniesiemy, że iloczyn $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ jest maximum wtedy, kiedy wszystkie jego czynniki są równe sobie. A zatem, zgodnie z warunkiem (α)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{l}{n}.$$

Przeto *iloczyn n dodatnych czynników zmiennych, których suma jest stała, jest wtedy maximum, kiedy te czynniki są równe sobie.*

111. Zadanie. Daną liczbę dodatną l podzielić na n części dodatnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, iżby, przy całkowitych i dodatnych liczbach $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, iloczyn $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu$ był maximum.

Oczywiście, kiedy ten iloczyn jest maximum, jednocześnie także iloczyn

$$\frac{x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu}{\alpha^\alpha \beta^\beta \ldots \nu^\nu}, \text{ czyli } \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{x_2}{\beta}\right)^\beta \ldots \left(\frac{x_n}{\nu}\right)^\nu$$

jest maximum. Ponieważ suma czynników iloczynu ostatniego, t. j.

$$\alpha\frac{x_1}{\alpha}+\beta\frac{x_2}{\beta}+\ .\ .\ .\ +\nu\frac{x_n}{\nu}=l$$

pozostaje stałą, zatem według art. 110-go ten iloczyn, a więc także iloczyn pierwotny jest maximum wtedy, kiedy

$$\frac{x_1}{\alpha}=\frac{x_2}{\beta}=\ .\ .\ .\ =\frac{x_n}{\nu}=\frac{l}{\alpha+\beta+\ .\ .\ .\ +\nu},\quad \text{czyli}\quad x_1:x_2:\ .\ .\ .:x_n=\alpha:\beta:\ .\ .\ .:\nu.$$

Przeto *iloczyn czynników dodatnych, których suma jest stałą, podniesionych do potęg całkowitych i dodatnych, wtedy jest maximum, kiedy te czynniki są proporcyonalne względem ich wykładników.*

NIERÓWNOŚĆ STOPNIA DRUGIEGO.

112. Ogólny kształt nierówności stopnia 2-go jest

$$ax^2+bx+c>0,\quad \text{lub}\quad ax^2+bx+c<0. \qquad (1)$$

Przyjmiemy, że $a>0$. Gdyby bowiem było $a<0$ i np. $a'=-a$, to, mnożąc obie strony każdej z nierówności $a'x^2+b'x+c'<0$ i $a'x^2+b'x+c'>0$ przez -1 i nazywając $-b'=b$ i $-c'=c$, otrzymalibyśmy z nich odpowiednie nierówności (1).

Rozważamy w nierównościach (1) tylko rzeczywiste wartości x.

Jeżeli pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$ nie są rzeczywiste i od siebie różne, to z tego, cośmy mówili w art. 106-ym, wynika, że druga z nierówności (1) jest niemożliwa, a pierwsza ma wtedy miejsce dla każdej rzeczywistej wartości x, tak iż ta pierwsza nierówność jest wówczas równoznaczna z zastrzeżeniem: x ma wartość rzeczywistą. Tylko w razie, kiedy równanie $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastek podwójny, do tej jedynej wartości x nie stosuje się pierwsza z nierówności (1). Jeżeli zaś pierwiastki owego równania — nazwijmy je x_1 i x_2 — są rzeczywiste i od siebie różne, to, według tego, cośmy mówili w art. 106-ym, pierwsza nierówność ma miejsce dla wartości x mniejszych od mniejszej lub większych od większej z liczb x_1 i x_2, druga zaś dla wartości pośrednich między liczbami x_1 i x_2. Gdy więc np. $x_1<x_2$, to pierwsza z nierówności (1) jest równoznaczna z dwiema nierównościami: $x<x_1$ lub $x>x_2$; druga zaś jest wtedy równoznaczna z nierównościami: $x_1<x<x_2$.

Np. każda z nierówności $x^2+6x+11<0$, $x^2+6x+9<0$ jest niemożliwa; każda z nierówności $x^2+6x+11>0$, $x^2-6x+9>0$ jest równoznaczna z zastrzeżeniem rzeczywistego x, przyczem jednak nierówności $x^2+6x+9>0$ nie czyni zadość wartość $x=-3$; nierówność $x^2+6x+8>0$ ma miejsce przy $x<-4$ i przy $x>-2$; nierówność $x^2+6x+8<0$ ma miejsce przy wartościach x, które zadość czynią warunkowi $-4<x<-2$.

TRYGONOMETRYCZNY KSZTAŁT PIERWIASTKÓW RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

113. Weźmy równanie w kształcie

$$x^2+px+q=0.$$

α). $\frac{1}{4}p^2-q>0$. Przy $q>0$, kładąc $p=-2\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}$ (skąd mamy związek $\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{q}}{p}$ dla określenia kąta φ), otrzymamy

$$x=\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}\pm\sqrt{q\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)}=\frac{\sqrt{q}\,(1\pm\cos\varphi)}{\sin\varphi};\ x_1=\sqrt{q}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi,\ x_2=\sqrt{q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Przy $q<0$, kładąc $p=-2\dfrac{\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}\varphi}$ $\left(\text{skąd } \operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{2\sqrt{-q}}{p}\right)$, otrzymamy

$$x=\frac{\sqrt{-q}\,(\cos\varphi\pm1)}{\sin\varphi};\ x_1=\sqrt{-q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi,\quad x_2=-\sqrt{-q}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

β). $\frac{1}{4}p^2-q<0$. Kładąc $p=-2\sqrt{q}\cos\varphi$ $\left(\text{skąd } \cos\varphi=\dfrac{-p}{2\sqrt{q}}\right)$, otrzymamy

$$x=\sqrt{q}\cos\varphi\pm\sqrt{q\,(\cos^2\varphi-1)};\ x_1=\sqrt{q}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ x_2=\sqrt{q}\,(\cos\varphi-i\sin\varphi).$$

ROZDZIAŁ PIĄTY.

RÓWNANIA STOPNI WYŻSZYCH, ROZWIĄZALNE ZAPOMOCĄ RÓWNANIĄ STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

PRZYPADKI NAJPROSTSZE.

114. Podobnie, jak równaniu $ax^2+bx=0$ czyni zadość wartość $x=0$ i wartość będąca pierwiastkiem równania stopnia 1-go $ax+b=0$, tak równaniu $ax^3+bx^2+cx=0$, czyli $x(ax^2+bx+c)=0$, czynią zadość wartości: $x=0$ i dwa pierwiastki równania stopnia 2-go $ax^2+bx+c=0$, równaniu $ax^4+bx^3+cx^2=0$, czyli $x^2(ax^2+bx+c)=0$, czynią zadość wartości: $x=0$, która jest pierwiastkiem podwójnym, i dwa pierwiastki równania stopnia 2-go $ax^2+bx+c=0$, i t. d. —

Równanie $x^4+2ax^3+a^2x^2-b^2=0$ czyli $(x^2+ax+b)(x^2+ax-b)=0$ ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+ax+b=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2+ax-b=0$.

Równanie $x^4+(2a-b^2)x^2+a^2=0$, które możemy tak przedstawić: $(x^2+a)^2-b^2x^2=0$, ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+bx+a=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2-bx+a=0$.

Równanie $x^4+2ax^3+(a^2-b^2)x^2-2bcx-c^2$, które możemy tak przedstawić: $(x^2+ax)^2-(bx+c)^2=0$, ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+(a+b)x+c=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2+(a-b)x-c=0$. —

Jeżeli, mając równanie

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{1}$$

dostrzeżemy, iż czyni mu zadość wartość $x=\alpha$, tak iż

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0, \tag{2}$$

to równanie (1) możemy zastąpić przez równoznaczne z niem, powstałe wskutek odjęcia równości (2) od równania (1) stronami odpowiedniemi,

$$a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)=0,$$

czyli

$$(x-\alpha)\left[ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c\right]=0.$$

Albo więc $x-\alpha=0$, albo też $ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c=0$, tak iż pierwiastkami równania (1) są: wartość $x=\alpha$ i pierwiastki równania

$$ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

Np. zauważywszy, że równaniu $x^3-x^2-15x-9=0$ czyni zadość wartość $x=-3$, możemy je tak przedstawić: $(x+3)(x^2-4x-3)=0$; a więc

$$x_1=-3,\ x_2=2+\sqrt{7},\ x_3=2-\sqrt{7}.$$

RÓWNANIA DWUMIENNE.

115. Jeżeli równanie daje się sprowadzić do kształtu

$$ay^m=b,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą i dodatną, to nazywamy je równaniem dwumiennem (binomische, reine G.).

Podzieliwszy obie strony tego równania przez a i kładąc $\frac{b}{a}=c$, sprowadzamy równanie dwumienne do kształtu

$$y^m=c. \tag{1}$$

Jeżeli wartość bezwzględną c nazwiemy γ, tak iż albo $c=+\gamma$, alboteż $c=-\gamma$, to równanie (1) jest jednem z dwu równań $y^m=\pm\gamma$, czyli jednem z dwu równań

$$y^m\mp\gamma=0. \tag{2}$$

Pierwiastek arytmetyczny m-tego stopnia z liczby γ nazwawszy d i kładąc w (2) $y=dx$, mieć będziemy, z uwagi, że $d^m=\gamma$,

$$x^m\mp1=0. \tag{3}$$

Jeżeli znajdziemy pierwiastki równania (3), to, mnożąc je przez liczbę dodatną d, otrzymamy pierwiastki równania (2), czyli równania (1). Zadanie więc polega na znalezieniu pierwiastków równania (3).

Przy $m=2$ widzieliśmy już (art. 62, 65), iż:

$$x^2-1=0,\ x_1=+1,\ x_2=-1;\quad x^2+1=0,\ x_1=+i,\ x_2=-i.$$

116. Lewą stronę równania $x^3-1=0$, możemy uważać za różnicę sześcianów liczb x i $+1$; a więc (art. 13, α) mamy $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Albo więc pierwszy, alboteż drugi czynnik jest równy zeru; nazwawszy w pierwszym razie pierwiastek x_1, pierwiastki zaś w drugim razie x_2 i x_3, mamy

$$x^3-1=0;\ x_1=+1,\ x_2=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Są to pierwiastki sześcienne algebraiczne z $+1$. Łatwo sprawdzić, że $x_2^2=x_3$, $x_3^2=x_2$, a oczywiście $x_2^3=x_3^3=x_1^3=+1$.

Gdy w równaniu $x^3+1=0$ przyjmiemy $x=-\xi$, to dojdziemy do równania $\xi^3-1=0$; pierwiastki więc ostatniego równania, pomnożone przez -1, dadzą pierwiastki równania $x^3+1=0$. A zatem

$$x^3+1=0;\quad x_1=-1,\quad x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\quad x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Są to pierwiastki sześcienne algebraiczne z -1, i znowu $x_2^2=x_3$, $x_3^2=x_2$.

Np. algebraiczne $\sqrt[3]{64}$ są: $4,\ -2+2i\sqrt{3},\ -2-2i\sqrt{3}$; algebraiczne $\sqrt[3]{-64}$ są: $-4,\ 2-2i\sqrt{3},\ 2+2i\sqrt{3}$.

Zauważmy, że tu, wyciągając pierwiastki z liczb rzeczywistych, po raz pierwszy otrzymujemy liczby zespolone. To więc, cośmy powiedzieli o działaniach odwrotnych w art. 71-ym, możemy teraz uzupełnić, zaznaczając, iż wyciąganie pierwiastka wprowadza nie tylko liczby rzeczywiste niewymierne pierwiastkowe i liczby urojone, ale także liczby zespolone.

117. Lewą stronę równania $x^4-1=0$ możemy uważać za różnicę kwadratów, tak iż mamy $(x^2-1)(x^2+1)=0$. Z przyrównania oddzielnych czynników do zera, otrzymamy równania, których pierwiastki już wypisaliśmy w art. 115-ym. A więc

$$x^4-1=0;\quad x_1=+1,\quad x_2=-1,\quad x_3=+i,\quad x_4=-i.$$

Są to pierwiastki stopnia 4-go algebraiczne z $+1$.

Do lewej strony równania $x^4+1=0$ dodajmy $2x^2-2x^2$; będziemy mieli $(x^2+1)^2-2x^2=0$, czyli $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0$. Rozwiązawszy równania, powstałe z przyrównania czynników do zera, znajdziemy pierwiastki równania

$$x^4+1=0;\quad x_1=\frac{\sqrt{2}\,(-1+i)}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{2}\,(-1-i)}{2},\quad x_3=\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{2},$$

$$x_4=\frac{\sqrt{2}\,(1-i)}{2}.$$

Są to pierwiastki stopnia 4-go algebraiczne z -1.

118. Równanie $x^6-1=0$, czyli $(x^3-1)(x^3+1)=0$ ma pierwiastki, będące pierwiastkami równań $x^3-1=0$ i $x^3+1=0$ wypisanemi już powyżej w art. 116-ym, które więc razem uważane, przedstawiają pierwiastki stopnia 6-go algebraiczne z $+1$.

Gdy w równaniu $x^6+1=0$ przyjmiemy $x=\xi i$, to, ponieważ $i^6=i^2=-1$, równanie przejdzie na $\xi^6-1=0$, tak iż z pierwiastków równania $x^6-1=0$, mnożąc je przez i, otrzymamy pierwiastki stopnia 6-go algebraiczne z -1.

$$x^6+1=0,\quad x_1=i,\quad x_2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2},\quad x_3=\frac{\sqrt{3}-i}{2},\quad x_4=-i,\quad x_5=\frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

$$x_6=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

119. Równanie $x^8-1=0$ możemy napisać w kszałcie $(x^4-1)(x^4+1)=0$. Przeto pierwiastkami stopnia 8-go algebraicznemi z $+1$ są wszystkie pierwiastki, wypisane w art. 117-ym.

Równanie $x^{12}-1=0$, możemy napisać w kształcie $(x^6-1)(x^6+1)=0$. Przeto pierwiastkami stopnia 12-go algebraicznemi z $+1$ są pierwiastki, wypisane w art. 116-ym i 118-ym.

RÓWNANIA TRÓJMIENNE.

120. Jeżeli równanie daje się sprowadzić do kształtu

$$ax^{2m}+bx^m+c=0, \tag{1}$$

gdzie m jest liczbą całkowitą i dodatną, to nazywamy je równaniem trójmiennem (trinomische G.).

Jeżeli nazwiemy $x^m=y$, to równanie (1) możemy tak napisać:

$$ay^2+by+c=0.$$

Gdy znajdziemy pierwiastki tego równania, nazwijmy te pierwiastki y_1 i y_2, dla znalezienia pierwiastków równania (1) wypadnie rozwiązać dwa równania dwumienne

$$x^m=y \text{ i } x^m=y_2.$$

Np.
$$x^6-7x^3-8=0;$$
$$y^2-7y-8=0,\quad y_1=+8,\quad y_2=-1;$$
$$x^3=+8,\quad x_1=+2,\quad x_2=-1+i\sqrt{3},\quad x_3=-1-i\sqrt{3};$$
$$x^3=-1,\quad x_4=-1,\quad x_5=\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3}),\quad x_6=\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

121. W przypadku, kiedy $m=2$, równanie (1) staje się równaniem

$$ax^4+bx^2+c=0. \tag{2}$$

W tem równaniu mamy kwadrat niewiadomej, oraz kwadrat kwadratu niewiadomej; dlatego równanie (2) nazywa się równaniem dwukwadratowem (biquadratische G.). Rozwiązując je względem x^2, znajdujemy

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \text{skąd}\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Np. $x^4-12{\cdot}49x^2+23{\cdot}04=0$, $x=\pm\sqrt{6{\cdot}245\pm3{\cdot}995}$, $x_1=+3{\cdot}2$, $x_2=-3{\cdot}2$, $x_3=+1{\cdot}5$, $x_4=-1{\cdot}5$.

$$x^4-3x^2+4=0,\quad x=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right); \text{ (por. art. 102).}$$

122. Przy pomocy równań trójmiennych można rozwiązać niektóre z równań dwumiennych.

Równanie $x^8+1=0$ możemy zastąpić przez równanie $(x^4+1)^2-2x^4=0$, czyli $(x^4+x^2\sqrt{2}+1)(x^4-x^2\sqrt{2}+1)=0$, skąd otrzymujemy pierwiastki stopnia 8-go algebraiczne z -1 (możnaby je przekształcić; por. art. 102)

$$\pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\quad \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}}.$$

Podobnie równanie dwumienne $x^{12}+1=0$, możemy zastąpić przez równanie $(x^6+x^3\sqrt{2}+1)(x^6-x^3\sqrt{2}+1)=0$. Kładąc (art. 116) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=\alpha$ możemy pierwiastki stopnia 12-go algebraiczne z -1 tak przedstawić:

$$\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},$$
$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}}.$$

Moglibyśmy tą drogą dojść do rozwiązań równań $x^{16}\pm1=0$, $x^{24}\pm1=0$, i t. d., wogóle równań (3) art. 115-go przy $m=2^q$, lub $m=3.2^q$.

123. Uogólniając równanie trójmienne, weźmy równanie

$$a(\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma)^{2m}+b(\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma)^m+c=0.$$

Przyjmijmy $(\alpha x^{2p}+\beta^p+\gamma)^m=y$. Po znalezieniu pierwiastków y_1 i y_2 równania $ay^2+by+c=0$, a następnie wszystkich algebraicznych $\sqrt[m]{y_1}$ i wszystkich algebraicznych $\sqrt[m]{y_2}$, wypadnie rozwiązać $2m$ równań trójmiennych

$$\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma=\sqrt[m]{y_1}\quad \text{i}\quad \alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma=\sqrt[m]{y_2}.$$

Np.
$$(x^2-6x-5)^4-5(x^2-6x-5)^2+4=0;$$
$$y^2-5y+4=0, \quad y_1=4, \quad y_2=1;$$
$$x^2-6x-5=2, \; x_1=7, \; x_2=-1; \; x^2-6x-5=-2, \; x_3=3+2\sqrt{3}, \; x_4=3-2\sqrt{3};$$
$$x^2-6x-5=1, \; x_5=3+\sqrt{15}, \; x_6=3-\sqrt{15}; \; x^2-6x-5=-1, \; x_7=3+\sqrt{13}, \; x_8=3-\sqrt{13}$$

RÓWNANIA WZAJEMNE.

124. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania są takiemi liczbami, iż, wypisawszy ich odwrotności, otrzymujemy te same liczby, które tylko w innym po sobie porządku następować mogą, to równanie nazywamy *równaniem wzajemnem* (reciproke G.). Z tego określenia wynika, że, jeżeli pewna wartość niewiadomej czyni takiemu równaniu zadość, to czyni mu również zadość odwrotność owej wartości.

Aby wykryć kształty ogólne takich równań, weźmy równanie jakiegokolwiek stopnia — naprzód stopnia nieparzystego. Np.
$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0. \tag{1}$$
Jeżeli temu równaniu czyni zadość pewna wartość x, to według określenia czyni mu również zadość odpowiednia liczba $\frac{1}{x}$. A więc możemy w tem równaniu zamiast x napisać $\frac{1}{x}$. Czyniąc to i mnożąc następnie obie strony równania przez x^5 (jest x od zera różne, gdyż nie może być $x=\infty$), mieć będziemy
$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5=0.$$
Aby w tem równaniu spółczynnik najwyższej potęgi niewiadomej był $+1$, jak w równaniu (1), podzielmy obie strony przez a_5; pisząc nadto wyrazy w porządku odwrotnym, będziemy mieli
$$x^5+\frac{a_4}{a_5}x^4+\frac{a_3}{a_5}x^3+\frac{a_2}{a_5}x^2+\frac{a_1}{a_5}x+\frac{1}{a_5}=0. \tag{2}$$
Przypuszczając, że równanie (1) jest wzajemne, przekształciliśmy je na równanie (2); w tem więc przypuszczeniu równania (1) i (2) nie tylko są równoznaczne z sobą, ale są tem samem równaniem, gdyż spółczynniki najwyższych potęg niewiadomej są sobie równe. Są przeto równe sobie w tych równaniach spółczynniki każdej innej potęgi niewiadomej, t. j. mamy
$$\frac{a_4}{a_5}=a_1, \quad \frac{a_3}{a_5}=a_2, \quad \frac{a_2}{a_5}=a_3, \quad \frac{a_1}{a_5}=a_4, \quad \frac{1}{a_5}=a_5.$$
Z ostatniego związku wypada $a_5^2=1$, a więc albo $a_5=1$, alboteż $a_5=-1$. Jest więc w równaniu (1) albo $a_5=+1$, $a_4=a_1$, $a_3=a_2$, alboteż $a_5=-1$, $a_4=-a_1$, $a_3=-a_2$. Przyjmijmy $a_1=p$, $a_2=q$; wówczas równanie (1) jest wzajemne w przypadku, gdy jest ono jednego z dwu kształtów
$$x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0, \quad x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0. \tag{3}$$
Taksamo rozumując w przypadku równania stopnia parzystego, dojdziemy do podobnych wyników, lecz w razie, kiedy wyraz wiadomy jest -1, spółczynnik wyrazu środkowego jest równy zeru; tak więc równania wzajemne stopnia np. 6-go są kształtu
$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0, \quad x^6+px^5+qx^4-qx^2-px-1=0. \tag{4}$$

Równania dwumienne (3) art. 115-go są szczególnym przypadkiem równań wzajemnych.

125. Równania wzajemne stopnia 2-go są

$$x^2+px+1=0;\ x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-1}=\frac{1}{x_2},\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-1}=\frac{1}{x_1};$$

$$x^2-1=0,\quad x_1=+1=\frac{1}{x_1},\ x_2=-1=\frac{1}{x_2}. \tag{5}$$

Równania wzajemne stopnia 3-go są

$$x^3+px^2+px+1=0,\quad x^3+px^2-px-1=0. \tag{6}$$

Pierwsze możemy napisać

$$x^3+1+px(x+1)=0,\ \text{czyli (art. } 13\gamma)\ (x+1)[x^2+(p-1)x+1]=0;$$

albo więc $x+1=0$, skąd jeden pierwiastek jest -1, albotеż $x^2+(p-1)x+1=0$. To zaś równanie jest kształtu pierwszego z równań (5). Drugie z równań (6) możemy napisać

$$(x-1)[x^2+(p+1)x+1]=0,$$

t. j. sprowadzić je do równania $x-1=0$ i równania $x^2+(p+1)x+1=0$ takiego kształtu, jak pierwsze z równań (5).

Równania wzajemne stopnia 4-go są

$$x^4+px^3+qx^2+px+1=0,\quad x^4+px^3-px-1=0. \tag{7}$$

Podzieliwszy obie strony pierwszego z tych równań przez x^2, możemy je napisać w kształcie $x^2+\frac{1}{x^2}+p\left(x+\frac{1}{x}\right)+q=0$. Kładąc $x+\frac{1}{x}=z$, wskutek czego $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, zastąpimy poprzednie równanie przez równanie

$$z^2+pz+q-2=0,$$

którego pierwiastki nazwijmy z_1 i z_2. Następnie zaś w równaniu $x+\frac{1}{x}=z$, czyli w równaniu $x^2-zx+1=0$, kładąc zamiast z kolejno z_1 i z_2 i rozwiązując odpowiednie dwa równania wzajemne stopnia 2-go, kształtu pierwszego z równań (5), znajdziemy rozwiązania pierwszego z równań (7). — Drugie z równań (7) możemy przedstawić w kształcie

$$(x^2-1)[x^2+px+1]=0,$$

tak iż jego pierwiastkami są pierwiastki obu równań (5).

Z równań wzajemnych (3), stopnia 5-go, pierwsze możemy tak przedstawić

$$x^5+1+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0,$$

czyli $\quad (x+1)[x^4+(p-1)x^3+(q-p+1)x^2+(p-1)x+1]=0;$

sprowadza się więc ono do równania $x+1=0$ i do równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7). — Drugie zaś z równań (3) możemy przedstawić w kształcie

$$x^5-1+px(x^3-1)+qx^2(x-1)=0,$$

czyli $\quad (x-1)[x^4+(p+1)x^3+(p-q+1)x^2+(p+1)x+1]=0;$

sprowadza się więc ono znowu do równania $x-1=0$ i równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7).

Z równań wzajemnych (4) stopnia 6-go możemy tu rozwiązać drugie, przedstawiając je w kształcie

$$x^6-1+px(x^4-1)+qx^2(x^2-1)=0,$$

czyli $$(x^2-1)[x^4+px^3+(q+1)x^2+px+1]=0,$$

gdyż ono sprowadza się do równania $x^2-1=0$ i równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7).

126. Równanie dwumienne $x^5-1=0$ sprowadza się do dwu równań, jednego $x-1=0$, skąd $x=1$, drugiego $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7), a którego pierwiastki są $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$, gdzie przy każdym z dwu znaków przed ostatnim składnikiem należy w liczniku pod pierwiastkiem wziąć każdy z dwu znaków. Te więc 4 liczby i poprzednia $+1$ są pierwiastkami stopnia 5-go algebraicznemi z $+1$.

Teraz możemy rozwiązać równania:

$$x^5+1=0,\ (x=-\xi);\ x^{10}-1=0,\ x^{10}+1=0,\ (x=\xi i);\ x^{20}-1=0;\ x^{20}+1=0,$$

czyli $$(x^{10}+1)^2-2x^{10}=0;\ \text{i t. d.};$$

wogóle równania (3) art. 115-go przy $m=5.2^q$.

Równaniu $x^{15}-1=0$, czyli (art. 13α) równaniu $(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)=0$ czynią zadość pierwiastki stopnia 5-go z $+1$, oraz ich iloczyny przez każdą z liczb $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$, czyli są niemi iloczyny pierwiastków stopnia 5-go z $+1$ przez pierwiastki stopnia 3-go z -1.

Możemy także rozwiązać równania

$$x^{15}+1=0,\ (x=-\xi);\ x^{30}-1=0;\ x^{30}+1=0,\ (x=\xi i);\ x^{60}+1=0,$$

czyli $$(x^{30}+1)^2-2x^{30}=0;\ \text{i t. d.};$$

wogóle równanie (3) art. 115-go przy $m=3.5.2^q$.

SZCZEGÓLNE RÓWNANIE WYKŁADNICZE, ROZWIĄZALNE PRZY POMOCY RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

127. Gdy mamy równanie wykładnicze kształtu

$$a^{2x}+pa^x+q=0,$$

to, kładąc $a^x=y$, po znalezieniu pierwiastków y_1 i y_2 równania $y^2+py+q=0$, wypadnie rozwiązać równania $a^x=y_1$ i $a^x=y_2$ (art. 87). Ponieważ w tych równaniach a jest liczbą dodatną, przeto istnieją rozwiązania rzeczywiste tylko w razie, kiedy y_1 i y_2 są liczbami dodatnemi.

Np. $$5^{2x}-2.5^x-8=0;$$

a więc albo $5^x=4$, skąd $x=\frac{\log 4}{\log 5}=0{\cdot}86135$, alboteż $5^x=-2$, a to równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego.

Podobnie gdybyśmy mieli równanie

$$2\sqrt[2x]{5}-\sqrt[x]{5}+8=0,\qquad \text{czyli}\qquad 5^{\frac{1}{x}}-2.5^{\frac{1}{2x}}-8=0,$$

to znajdziemy $5^{\frac{1}{2x}}=4$, lub $5^{\frac{1}{2x}}=-2$. Z pierwszego równania mamy $x=\frac{\frac{1}{2}\log 5}{\log 4}=0{\cdot}58048.$

ZADANIA.

(Art. 9). **1.** $(x+2y-3z)^2$. **2.** $\left[a^{m+1}(3+4a^{m+2}+5a^{2m+4}+6a^{3m+6})\right]^2$.

3. $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2$.

4. α) $(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$; β) $4\left[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab\right]^2+\left[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\right]^2$.

5. $$\frac{1}{1-\left\{\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right\}^2}\times\frac{(1+ab)\left[1+ab+(a+b)x\right]-(a+b)\left[a+b+(1+ab)x\right]}{\left[1+ab+(a+b)x\right]^2}.$$

6. α) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-cp+dq-bs)^2+(as-dp+br-cq)^2$;
β) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$.

7. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

8. Okazać, że, jeżeli $a+b+c+d=\mathrm{A}$, $a+b-c-d=\mathrm{B}$, $a-b+c-d=\mathrm{C}$, $a-b-c+d=\mathrm{D}$, to: α) $(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$; β) w razie, kiedy $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, jest $\mathrm{AB}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=\mathrm{CD}(\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)$.

9. Okazać, że, jeżeli $\mathrm{A}=br+cq+ap$, $\mathrm{B}=cr+aq+bp$, $\mathrm{C}=ar+bq+cp$, to $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{AB}-\mathrm{AC}-\mathrm{BC}=(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qs)$.

10. Jeżeli w trójmianie $ax^2+2bxy+cy^2$ przyjmiemy $x=\alpha\xi+\beta\eta$, $y=\gamma\xi+\delta\eta$ i w otrzymanem wyrażeniu spółczynniki ξ^2, $\xi\eta$, η^2 nazwiemy odpowiednio A, 2B, C, to jaki jest wykładnik stosunku $(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2):(ac-b^2)$?

11. $(a+b+3x)^2+(a-b+4x)^2-(b-a+5x)^2=5a^2+2b^2-2ab$.

12. $$\begin{cases}(x+y+2)^2-(2x+2y+1)^2+3(x+y)^2+2x+y-6=0\\(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2-5(x+y)^2+2(x+1)(y+2)-24=0\end{cases}$$

(Art. 10). **13.** 789^2. **14.** 1357^2. **15.** 12345^2. **16.** 27943^2. **17.** 20304^2. **18.** 30009^2. **19.** 58876^2. **20.** 9^8. **21.** 11^8. **22.** 7^{16}. **23.** Wypisać odrazu kwadraty liczb: 11, 111, …, 111111111. **24.** $0{\cdot}0123^2$. **25.** $0{\cdot}0523^2$. **26.** $10{\cdot}01^2$. **27.** $1{\cdot}331^2$. **28.** $\left(\frac{24}{25}\right)^2$. **29.** $1-\left(\frac{2}{3}\right)^8$. **30.** $\left(\frac{34}{111}\right)^2$.

(Art. 11). **31.** $(7ab-3bc)^3$. **32.** $(\frac{2}{3}a^2b-\frac{3}{4}ab^2)^3$. **33.** $(7a^2b^3c-3ab^2c^3)^3$. **34.** $(2a^2-3ab+5b^2)^3$. **35.** $(5x^2-7xy-9y^2)^3$. **36.** $(a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3)^3$. **37.** $(\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y+\frac{1}{7}z)^3$. **38.** Okazać, że, jeżeli $\mathrm{B}=b^2+bc+c^2$ i $\mathrm{C}=b^2c+bc^2$, to $4\mathrm{B}^3-27\mathrm{C}^2=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2$ i $4\mathrm{B}^3-27\mathrm{C}^2>0$. **39.** Przy założeniach tych samych, co w zad. 9-em, okazać, że $\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3+\mathrm{C}^3-3\mathrm{ABC}=(a^3+b^3+c^3-3abc)(p^3+q^3+r^3-3pqr)$.

(Art. 12). **40.** 24^3. **41.** 44^3. **42.** 96^3. **43.** 112^3. **44.** 308^3. **45.** 1357^3. **46.** 2061^3. **47.** 11111^3. **48.** 3^{12}. **49.** 12^6. **50.** 2^{27}. **51.** 11^9. **52.** $2{\cdot}06^3$. **53.** $2{\cdot}007^3$. **54.** α) $\left(\frac{17}{27}\right)^3$; β) $\left(7\frac{124}{125}\right)^3$.

(Art. 13). **55.** α) $\frac{a^{14}-b^{14}}{a^2-b^2}$; β) $\frac{a^{14}+b^{14}}{a^2-b^2}$; γ) $\frac{a^{14}-b^{14}}{a^2+b^2}$; δ) $\frac{a^{14}+b^{14}}{a^2+b^2}$. **56.** α) $\frac{1-a^6}{1-a}$; β) $\frac{1+a^6}{1-a}$; γ) $\frac{1-a^6}{1+a}$; δ) $\frac{1+a^6}{1+a}$. **57.** α) $\frac{243a^{10}x^{15}-32b^5y^{20}}{3a^2x^3-2by^4}$; β) $\frac{243a^{10}x^{15}+32b^5y^{20}}{3a^2x^3-2by^4}$; γ) $\frac{243a^{10}x^{15}-32b^5y^{20}}{3a^2x^3+2by^4}$; δ) $\frac{243a^{10}x^1+32b^5y^{20}}{3a^2x^3+2by^4}$. **58.** α) $\frac{64a^{12}b^{24}-1}{2a^2b^4-1}$; β) $\frac{64a^{12}b^{24}+1}{2a^2b^4-1}$; γ) $\frac{64a^{12}b^{24}-1}{2a^2b^4+1}$; δ) $\frac{64a^{12}b^{24}+1}{2a^2b^4+1}$.

59. Licznik i mianownik wyrażenia $\frac{7x^8-8x^7+1}{x^2-2x+1}$ rozłożyć na czynniki i wypisać odrazu składowe części ilorazu.

(Art. 15 i 16). **60.** $\left(\frac{2}{3}a^{-3}bx^{-3}y^2\right)^{-3}$. **61.** $\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^{-2}\frac{1}{(a+b)^{-3}}\cdot(a-b)^{-3}$.

62. $(1+a)^{-7}\cdot(1-a)^{-7}\cdot\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{-6}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{-13}$. **63.** $(a^2+2b)^{-2}$. **64.** $(a^2-\frac{1}{2}a^{-2})^2$.

65. $(3a+\frac{1}{3}a^{-1})^3$. **66.** $\frac{a^{-3p+2n}b^{5p}}{c^{-3q}}\cdot\frac{a^{-2n}b^{-3p+n}}{c^{5q+3}}$.

(Art. 20). **67.** $\sqrt{14400}=\sqrt{(2^3.3.5)^2}$. **68.** $\sqrt{7.(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10)}$.

69. $\sqrt{4a^6b^8c^{10}}=\sqrt{(2a^3b^4c^5)^2}$. **70.** $\sqrt[3]{843908625}$. **71.** $\sqrt[5]{248832}$. **72.** $\sqrt[7]{128a^{14}b^{7p}c^{21}}$.

(Art. 22). **73.** Inaczej rozwiązać zadania od 67-go do 72-go.

(Art. 23). **74.** $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}$. **75.** $\sqrt{3ab^3c^5d^7}\cdot\sqrt{12a^3bc^7d^3}$.

76. $\sqrt[5]{8a^3b^7c^{12}}\cdot\sqrt[5]{16a^4b^3d^{11}}\cdot\sqrt[5]{8a^3c^8d^4}$. **77.** $\sqrt[3]{3(a^2+2ab+b^2)}\cdot\sqrt[3]{4(a^2-2ab+b^2)}\cdot\sqrt[3]{18(a^2-b^2)}$.

(Art. 24). **78.** Inaczej rozwiązać zadania od 67-go do 72, od 73-go do 77-go.

79. $\sqrt[4]{256a^8b^{4m+4}c^{8m-12}}$. **80.** $\sqrt[3]{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$.

(Art. 25). **81.** $\sqrt{12a^3b^2c^5}$. **82.** $\sqrt[3]{32a^7b^{3p+1}c^{4q+2}}$. **83.** $\sqrt[3]{59719680}$.

84. $\sqrt[4]{3a^5b-24a^4b^2+72a^3b^3-96a^2b^4+48ab^5}$. **85.** $\sqrt[3]{85{\cdot}034928}$. **86.** $\sqrt{0{\cdot}432}$.

(Art. 26). **87.** $\frac{\sqrt{a^5b^2c^3d}}{\sqrt{ab^2c^9d^{11}}}$. **88.** $\frac{\sqrt[3]{32a^3b^4c}}{\sqrt[3]{4a^6b^2}}$. **89.** $\frac{\sqrt[3]{191102976}}{\sqrt[3]{37933056}}$.

(Art. 28 i 29). **90.** $\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^{12}}}$. **91.** $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{16}b^{10}c^{30}}}$. **92.** $\sqrt{\sqrt[3]{500094}}$.

93. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{15552000}}$. **94.** $\sqrt[5]{\sqrt{53128406016}}$. **95.** $\sqrt[4]{20736\sqrt[3]{4586471424}}$.

96. $\sqrt[5]{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[5]{4\sqrt[4]{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt[5]{4\sqrt[4]{6}}\cdot\sqrt[5]{4}$. **97.** $\frac{3a}{5b}\sqrt[5]{\frac{m^2}{a-x}}\frac{4b}{5a}\sqrt{\frac{a-x}{2m^3}}$.

98. $\sqrt[3]{\frac{a}{b.c}}\cdot\sqrt{a^3b^5c}\cdot\sqrt[6]{ab^{11}c^5}$. **99.** $\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{b^2c}\cdot\sqrt[4]{a^2b^5c^7}$.

100. $\sqrt{a^3b^5cd^7}\cdot\sqrt[5]{abc^7d^2}\cdot\sqrt[10]{a^{13}b^3cd^{11}}$. **101.** $\frac{\sqrt{a^3b^9}}{\sqrt[3]{a^4b^{13}}}$. **102.** $\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[5]{a^4b}}$. **103.** $\frac{\sqrt[5]{a^3b^{2p}}}{\sqrt[7]{a^4b^{3p}}}$.

104. $\frac{\sqrt{a^{7n}c^5}}{\sqrt[3]{a^{11n}c^7}}$. **105.** $\frac{\sqrt[5]{b^3c^{2x}}}{\sqrt[3]{b^2c^x}}$. **106.** $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[7]{a^4b^3}}\cdot\frac{\sqrt{a^7c^5}}{\sqrt[3]{a^{11}c^7}}\cdot\frac{\sqrt[5]{b^3c^2}}{\sqrt[3]{b^2c}}\cdot\sqrt[210]{\frac{c^{21}}{a^{41}b^{50}}}$.

107. $\sqrt[3]{972}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt[6]{497664}$. **108.** $\frac{\sqrt[9]{253125}}{\sqrt[11]{3796875}}$.

(Art. 30). **109.** $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$ **110.** $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\ x^3+y^3+z^3=1.\end{cases}$ **111.** $8:x^3=125:27$.

(Art. 31). **112.** $3:x=x:9$. **113.** $a^3:x=y:b^3$, gdy $y:x=b:a$. **114.** Gdy średnie arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną liczb dodatnych a i b nazwiemy odpowiednio

s_a, s_g i s_h, to α) okazać, że $s_a : s_g = s_g : s_h$; β) okazać, że w razie, kiedy a różne od b, jest $s_a > s_g > s_h$, nie korzystając z podanego w art. 31-ym dowodzenia, iż $s_a > s_g$.

115. Jak wielki jest bok kwadratu równoważnego z prostokątem, którego podstawa jest 150 m, a wysokość 24 m?

116. Z punktu prowadzimy styczną i sieczną do koła. Odcinki siecznej od tego punktu liczone są: 12 cm i 27 cm. Jak wielki jest odcinek stycznej między owym punktem, a punktem styczności?

117. Znaleźć objętość stożka ściętego, którego wysokość jest 8 m, a promienie podstaw 1·5 m i $\frac{3}{4}$ m.

(Art. 37). **118.** Dla α) $\sqrt{5}$, β) $\sqrt[3]{2}$, γ) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ znaleźć od każdej mniejsze i większe liczby ułamkowe o mianownikach jednakowych, mianowicie: 6, 7, 10, a licznikach różniących się o jedność.

(Art. 38). **119.** $\sqrt{120}+\sqrt{270}+\sqrt{2430}$. **120.** $\sqrt{4a^2b^2c}+\sqrt{8a^2bc^2}+\sqrt{12ab^2c^2}$.

121. $3\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a^3-a^2b}+3a\sqrt{a-b}$. **122.** $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$.

123. $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-(a-5b)\sqrt{ab}$. **124.** $\frac{a}{mc}\sqrt{m^3nc^2}-\frac{b}{np}\sqrt{4mn^3p^2}+\frac{c}{pq}\sqrt{9mnp^2q^2}$.

125. $3\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-5\sqrt{bc}-(4\sqrt{bc}-3\sqrt{ab}-6\sqrt{ac})-(4\sqrt{ac}-9\sqrt{bc}+\sqrt{ab})$.

126. $2{\cdot}8\sqrt[3]{10}+6\sqrt[3]{0{\cdot}01}+\sqrt[3]{2-\frac{48}{25}}+2\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$. **127.** $6\sqrt[6]{27}-4\sqrt{6}+6\sqrt{75}-28\sqrt{3}$.

128. $3\sqrt{6-2x}-\left(\sqrt{24-8x-\sqrt{1-\frac{x}{3}}}\right)-\left(\sqrt{6-2x-8\sqrt{\frac{1}{6}-\frac{x}{18}}}\right)$. **129.** $(a+\sqrt{b})^2$.

130. $(a-\sqrt{b})^3$. **131.** $(3-\sqrt{5})^2$. **132.** $(3-\sqrt{5})^3$. **133.** $(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{ab})^2$.

134. $(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7})$. **135.** $(3-\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$.

136. $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{15})$. **137.** $(3-\sqrt{5}+\sqrt{7})^3$.

138. $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$. **139.** $(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})$.

140. $(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3})$. **141.** $\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

142. $a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\cdot\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]$.

143. $(p^2+q^2)(p+q)(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})(\sqrt[8]{p}+\sqrt[8]{q})(\sqrt[16]{p}+\sqrt[16]{q})(\sqrt[16]{p}-\sqrt[16]{q})$.

144. $\left[\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)^2-\sqrt[6]{xy}\right]\cdot\left[\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)^2+\sqrt[6]{xy}\right].\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)$.

145. $(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{3})$.

146. $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(c\sqrt{x}+d\sqrt{y})+(a\sqrt{x}-b\sqrt{y})(c\sqrt{x}-d\sqrt{y})$.

147. $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\,\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\,\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$. **148.** $(3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[6]{\frac{1}{2}})(3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[6]{32})$

149. $\sqrt[3]{a+b+2\sqrt{ab}}\,\sqrt[3]{a+b-2\sqrt{ab}}\,\sqrt[3]{a-b}$. **150.** $(2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{2}+5\sqrt[6]{2}).6\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

151. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})$.

152. Sprawdzić, że, jeżeli $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=a$, to $a^3+3a-4=0$.

153. $(42-35\sqrt{3}-18\sqrt{5}+15\sqrt{15}):(6-5\sqrt{3})$. **154.** $(\sqrt{ax}+x\sqrt{a}-2\sqrt{3x}-2\sqrt{3}):(\sqrt{x}-2\sqrt{\frac{3}{a}})$.

155. $(a+b):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$. **156.** $(a\sqrt[4]{a}-b\sqrt[4]{b}):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$.

157. $(\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[6]{a^4}+\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}+1):(\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}+1)$.

158. $\left(8\sqrt[15]{a^2}-\frac{10}{\sqrt[6]{a^4b^5}}-12\sqrt[20]{a^{16}b^{15}}+\frac{15}{\sqrt[12]{b}}\right):\left(4\sqrt[5]{a^4}-\frac{5}{\sqrt[6]{b^5}}\right)$.

159. $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1+x}}$. 160. $\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x^2+1-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}$.

161. $\dfrac{1}{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}+\dfrac{1}{\sqrt2+\sqrt3-\sqrt5}+\dfrac{1}{\sqrt2+\sqrt5-\sqrt3}+\dfrac{1}{\sqrt3+\sqrt5-\sqrt2}$.

162. $\dfrac{1}{a+\sqrt{a-\sqrt a}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a-\sqrt a}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a+\sqrt a}}+\dfrac{1}{a+\sqrt{a+\sqrt a}}$.

163. $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}-\sqrt{a+c}}+$

$+\dfrac{1}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}-\sqrt{a+b}}$.

164. Znaleźć pole trójkąta, którego boki są $4\,m$, $5\,m$ i $6\,m$.

165. Znaleźć promień koła wpisanego w trójkąt, którego boki są a, b, c.

166. W kwadrat o boku a wpisanych jest 5 kół równych tak, iż z czterech kół, każde jest styczne do dwu boków kwadratu i do piątego koła środkowego. Jaki jest promień tych kół?

167. Mając trójkąt prostokątny, z punktów końcowych przeciwprostokątnej wystawiamy do niej prostopadłe aż do przecięcia się z przedłużeniami przeciwległych przyprostokątnych, których wymiary są $3\,cm$ i $4\,cm$, a te dwa punkty przecięcia łączymy z sobą linią prostą. Jaki jest obwód tak powstałego trapezu?

(Art. 42). 168. $\dfrac{2}{3\sqrt7}$. 169. $\dfrac{2}{3\sqrt2}-\dfrac{2}{\sqrt3}$. 170. $\dfrac{3\sqrt{15}}{3\sqrt5+5\sqrt3}$.

171. $\dfrac{66\sqrt3}{2+\sqrt3-\sqrt5}$. 172. $\dfrac{4+2\sqrt{30}}{\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7}$. 173. $\dfrac{8+2\sqrt{42}}{\sqrt7+\sqrt6-\sqrt5}$.

174. $\dfrac{3\sqrt5+\sqrt{15}-3-\sqrt3}{(5-\sqrt5)(1+\sqrt3)}$. 175. $\dfrac{242}{3\sqrt[4]{3}+1}$. 176. $\dfrac{a-1}{a-\sqrt[4]{b}}$.

177. $\dfrac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt[3]{3b}}$. 178. $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$. 179. $\dfrac{c}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

180. $\dfrac{2+\sqrt6}{2\sqrt2+2\sqrt3-2-\sqrt6}$. 181. $\dfrac{7\sqrt2-\sqrt{10}}{\sqrt{15}+\sqrt5-\sqrt3+1}$.

182. $\dfrac{\sqrt6-\sqrt5-\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt6+\sqrt5-\sqrt3-\sqrt2}$. 183. $\dfrac{1}{1+\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5+\sqrt6}$.

(Art. 44). 184. $\sqrt{5+x}=5-\sqrt{x}$. 185. $7=\sqrt{x+4}$. 186. $3=\sqrt{x+5}$.

187. $x+\sqrt{x^2+3}=3$. 188. $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$. 189. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=b$.

190. $\sqrt{x+4ab}=2a+\sqrt{x}$. 191. $\sqrt{4x^2-7x-6}=9-2x$.

192. $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$. 193. $\dfrac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}-\dfrac{\sqrt{ax}-b}{c}=c$.

194. $3x-5=\sqrt{9x^2-10x-55}$. 195. $\sqrt{7+x}=3-\sqrt{x}$. 196. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$.

197. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\dfrac{24}{\sqrt{x+3}}$. 198. $\sqrt[3]{a^3x^3+3a^2bx(x+1)+c^3}=ax+b$.

199. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+6)=(3+\sqrt{x})^2$. 200. $(5\sqrt{x}+7)(12\sqrt{x}+9)=$ $=6(10\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+2)$. 201. $3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+25)=(5+3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)$.

202. $\sqrt{2x+11}+\sqrt{2x-5}=8$. 203. $\sqrt{2+3\sqrt{x}}+\sqrt{2-3\sqrt{x}}=2$.

204. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$. 205. $\sqrt{4a+x}+\sqrt{x}=2\sqrt{b+x}$.

206. $\sqrt{4x-9}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$. 207. $\sqrt{5-\sqrt{x}}=-2\sqrt{3-\sqrt{x}}+\sqrt{7-\sqrt{x}}$.

208. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4+\sqrt{8x^2+10x+42}}$.

209. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{1+4\sqrt{x^2-3x-4}}$. **210.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=$
$=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-5x+6}}$ **211.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+5+2\sqrt{x^2+16}}$.

212. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x+9+2\sqrt{2x^2-6}}$. **213.** $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=$
$=\sqrt{5x+21+2\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x^2+8x}}$. **214.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=$
$=\sqrt{5x+8+2\sqrt{x^2+9x+14}+2\sqrt{x^2+6x-7}}$. **215.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$.

216. $\sqrt{7+x}-\sqrt{x}=3$. **217.** $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=4$.

218. $\begin{cases}\sqrt{y}=\frac{5}{3}\sqrt{y-x},\\ \sqrt{y-x}=\frac{3}{2}\sqrt{20-x}.\end{cases}$ **219.** $\begin{cases}2x-\sqrt{y}=5,\\ (4x-7)(x-3)=y.\end{cases}$ **220.** $\begin{cases}5\sqrt{x}+3\sqrt{y}=8,\\ 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=7.\end{cases}$

221. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{2}{\sqrt{y-3}}=0.\end{cases}$ **222.** $\begin{cases}x+y-\sqrt{x^2+2x\left(y+\frac{1}{2}\right)+y^2+y-3}=0,\\ x^2-y^2-\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+x-y-1}=0.\end{cases}$

223. $\begin{cases}\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}=84,\\ \sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}=14.\end{cases}$ **224.** $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+y^2+2xy+6x-y}=5,\\ 2x-y+\sqrt{4x^2-4xy+y^2+5x+3y}=4.\end{cases}$

225. $\begin{cases}x+2y+2-\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy}=0,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{x+y+3+2\sqrt{15+xy}}.\end{cases}$

226. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}-\sqrt{3x+\sqrt{x^2-y}-1}=0,\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+y+6+\sqrt{xy+x+5y+5}+\sqrt{xy+11}}=0.\end{cases}$

227. $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}-\sqrt[4]{4xy-12x-8y+24}=0,\\ \sqrt{x+y-5}+\sqrt{x-y+1}-\sqrt{2x-4+2\sqrt{x^2-3x+4y-y^2-1}}=0.\end{cases}$

228. $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+2xy+y^2+x+y-3}=0,\\ x^2-y^2-\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+x-y-1}=0.\end{cases}$

(Art. 45). **229.** $\sqrt{4a^6+12a^5b-11a^4b^2-22a^3b^3+37a^2b^4-20ab^5+4b^6}-$
$-\sqrt{9a^4b^2-12a^3b^3+34a^2b^4-20ab^5+25b^6}$.

230. $\sqrt{16a^6b^4-56a^5b^5+9a^4b^6+86a^3b^7-3a^2b^8-20ab^9+4b^{10}}$.

231. $\sqrt{\frac{9}{4}a^6b^4c^6-a^5b^5c^5+3\frac{1}{9}a^4b^6c^4-\frac{2}{3}a^3b^7c^3+a^2b^8c^2}$.

232. $\sqrt[4]{16a^4b^4-96a^3b^5+216a^2b^6-216ab^7+81b^8}$.

233. $\sqrt[4]{a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8}$.

234. Okązać, że $32a^2b^2(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^4+8ab(a^2+b^2)\sqrt{16a^2b^2(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^4}=(a+b)^8$.

(Art. 47). **235.** $\sqrt{4761}$. **236.** $\sqrt{55225}$. **237.** $\sqrt{218089}$. **238.** $\sqrt{1809025}$.

239. $\sqrt{20151121}$. **240.** $\sqrt{53348416}$. **241.** $\sqrt{694059025}$. **242.** $\sqrt{3466383376}$.

243. $\sqrt{13233281296}$. **244.** $\sqrt{35104993820913289}$. **245.** $\sqrt{1{\cdot}5129}$. **246.** $\sqrt{16{\cdot}4836}$.

247. $\sqrt{1{\cdot}700416}$. **248.** $\sqrt{0{\cdot}42276004}$. **249.** $\sqrt{0{\cdot}000010272025}$. **250.** $\sqrt[4]{531441}$.

251. $\sqrt[4]{4304{\cdot}6721}$. **252.** $\sqrt[8]{42{\cdot}94967296}$.

(Art. 48. 50). **253.** $\sqrt{10}$ z przybliżeniem na 0·01. **254.** $\sqrt{15}$ z prz. na 0·001.

255. $\sqrt{3{\cdot}6}$ z prz. na 0·0001. **256.** $\sqrt{0{\cdot}9}$ z prz. na 0·0001. **257.** $\sqrt{0{\cdot}95}$ z prz. na 0·00001.

258. $\sqrt{0{\cdot}63}$ z prz. na 0·00001. **259.** $\sqrt{12{\cdot}4}$ z prz. na 0·00001. **260.** $\sqrt{0{\cdot}0079}$ z prz.

na 0·000001. **261.** $\sqrt{15}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **262.** $\sqrt{3\frac{1}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **263.** $\sqrt{124\frac{7}{15}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **264.** $\sqrt{201\frac{4}{5}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **265.** $\sqrt{47}$ z prz. na $\frac{1}{35}$. **266.** $\sqrt{7\frac{8}{15}}$ z prz. na $\frac{1}{35}$. **267.** $\sqrt{10\frac{10}{49}}$. z prz. na $\frac{1}{35}$. **268.** $\sqrt{102\frac{3}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{35}$.

(Art. 51). **269.** $\sqrt[3]{27a^6b^9 - 54a^4b^6cd^4 + 36a^2b^3c^2d^8 - 8c^3d^{12}}$.

270. $\sqrt[3]{a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1}$.

271. $\sqrt[3]{8a^6 - 36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6}$.

272. $\sqrt[3]{8a^6 + 48a^5b + 60a^4b^2 - 80a^3b^3 - 90a^2b^4 + 108ab^5 - 27b^6}$.

273. $\sqrt[3]{8a^6 - 36a^5b + 112a^4b^2 - 171a^3b^3 + 204a^2b^4 - 144ab^5 + 64b^6}$.

274. $\sqrt[3]{a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 75a^6b^3 + 72a^5b^4 - 9a^4b^5 - 69a^3b^6 - 18a^2b^7 + 36ab^8 - 8b^9}$.

275. $\sqrt[3]{(a^{15} - 3a^{10} + 3a^5 - 1):(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)}$.

(Art. 53). **276.** $\sqrt[3]{175616}$. **277.** $\sqrt[3]{274625}$. **278.** $\sqrt[3]{571787}$. **279.** $\sqrt[3]{1404928}$.

280. $\sqrt[3]{1030301}$. **281.** $\sqrt[3]{64481201}$. **282.** $\sqrt[3]{87528384}$. **283.** $\sqrt[3]{426957777}$.

284. $\sqrt[3]{517781627}$. **285.** $\sqrt[3]{741217625}$. **286.** $\sqrt[3]{2498846293}$. **287.** $\sqrt[3]{8754552981}$.

288. $\sqrt[3]{27081081027}$. **289.** $\sqrt[3]{1371700960631}$. **290.** $\sqrt[3]{8123025301208}$. **291.** $\sqrt[3]{46·656}$.

292. $\sqrt[3]{0·884736}$. **293.** $\sqrt[3]{0·340068392}$. **294.** $\sqrt[3]{6·372783864}$. **295.** $\sqrt[3]{38·443359375}$.

296. $\sqrt[3]{0·000003814697265625}$. **297.** $\sqrt[3]{1119130·473102767}$. **298.** $\sqrt[6]{735091890625}$.

299. $\sqrt[9]{8662995818654939}$.

(Art. 54, 56). **300.** $\sqrt[3]{3250}$ z prz. na 1. **301.** $\sqrt[3]{2}$ z prz. na 0·01. **302.** $\sqrt[3]{17}$ z prz. na 0·01.

303. $\sqrt[3]{0·029}$ z prz. na 0·001. **304.** $\sqrt[3]{0·087}$ z prz. na 0·0001. **305.** $\sqrt[3]{37}$ z prz. na 0·0001.

306. $\sqrt[3]{0·009}$ z prz. na 0·00001. **307.** $\sqrt[3]{93}$ z prz. na 0·000001. **308.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ z prz. na $\frac{1}{9}$.

309. $\sqrt[3]{9}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **310.** $\sqrt[3]{85\frac{3}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **311.** $\sqrt[3]{20\frac{5}{6}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$.

312. $\sqrt[3]{9\frac{2}{7}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **313.** $\sqrt[3]{73}$ z prz. na $\frac{1}{21}$. **314.** $\sqrt[3]{25\frac{1}{3}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$.

315. $\sqrt[3]{12\frac{1}{7}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$. **316.** $\sqrt[3]{2\frac{3}{5}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$.

(Art. 58). **317.** $\left(a + b + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

318. $\left(2a^{\frac{1}{2}} - 6^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)$.

319. $\left(a^{\frac{3}{2}} - 2ab^{-\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{-1} - b^{-\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$.

320. $\left(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{3}} + + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{6}}\right)$.

321. $\left(8a^{\frac{3}{2}} - 12ab^{\frac{1}{2}} + 18a^{\frac{1}{2}}b - 27b^{\frac{3}{2}}\right):\left(2a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}\right)$. **322.** $\left(243a - 1024b\right):\left(3a^{\frac{1}{5}} - 4b^{\frac{1}{5}}\right)$.

323. $\left(a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}}b^{-1} + ab^{-\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^{-2} + b^{-\frac{5}{2}}\right):\left(a^{\frac{3}{2}} - ab^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{-1} - b^{-\frac{3}{2}}\right)$.

324. $\left(2ab^{-1} - 5a^{\frac{4}{5}}b^{-\frac{2}{3}} + 7a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{3}} - 5a^{\frac{2}{5}} + 2a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}\right):\left(a^{\frac{3}{5}}b^{-1} - a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

325. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{8}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}} : \dfrac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}} + a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{4}}}$. **326.** $\left(a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 6a_{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}} + 4b + 12b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}} + 9c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

327. $\left(a^{2\frac{1}{4}} - 3a^{2\frac{1}{6}} + 3a^{2\frac{1}{12}} - a^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

328. $\left(a - 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{3}}b - b^{\frac{3}{2}} + 3a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} - 6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}} + 3bc^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}c^{1\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{2}}c^{1\frac{1}{3}} + c^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

(Art. 68, 69). **329**. Jeżeli $a=2+3i$, $b=1-i$, $c=2-3i$, $d=1+i$, to α) $a+b+c+d=?$ β) $a+b-c-d=?$ γ) $ac+bd=?$ $ad+bc=?$ δ) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=?$ ε) $a^2+b^2+c^2+d^2=?$ ξ) $a^3+b^3+c^3+d^3=?$

330. Jeżeli $a'=x_1+y_1 i$, $a''=x_1-y_1 i$, $b'=x_2+y_2 i$, $b''=x_2-y_2 i$, to jaką liczbę przedstawia wyrażenie $a'a''+b'b''$?

331. Gdy $a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, znaleźć α) a^2, b^2, a^3, b^3 β) $a+b$, ab, γ) $a+a^2+a^3$, $b+b^2+b^3$.

332. Gdy $a=x+iy$, $b=\xi+i\eta$, znaleźć α) $a+b$, $a-b$, ab, $a:b$, β) a^2+b^2, a^2-b^2.

333. Gdy $a=2+3i$, $b=4+5i$ znaleźć $(a^4-b^4):(a-b)$.

334. Okazać przy pomocy liczb zespolonych sprzężonych, iż iloczyn dwu liczb, z których każda jest sumą dwu kwadratów, jest także sumą dwu kwadratów.

(Art. 82). **335**. Znaleźć α) $\log 5{\cdot}5854$, $\log 35346$, $\log 30{\cdot}678$, $\log 0{\cdot}578748$, $\log 0{\cdot}0354767$, $\log 0{\cdot}0076587$. β) $\log x=0{\cdot}68946$, $\log x=0{\cdot}30303$, $\log x=2{\cdot}09777$, $\log x=\overline{1}{\cdot}00453$, $\log x=\overline{3}{\cdot}46867$, $\log x=\overline{4}{\cdot}79946$.

(Art. 85, 86, 87). **336**. $\sqrt[5]{17}$. **337**. $\sqrt[6]{28}$. **338**. $x^{\frac{7}{6}}=334$, czyli $x=\sqrt[7]{324^6}$.

339. $\sqrt[12]{9{\cdot}02}$. **340**. $\sqrt[12]{14{\cdot}56}$. **341**. $\sqrt[12]{0{\cdot}002}$. **342**. $\frac{2{\cdot}3876^3}{3{\cdot}2874^2}$.

343. $\frac{1{\cdot}2875^2 .\ 0{\cdot}98764^{13}}{0{\cdot}028746^5 .\ 5{\cdot}2478^6}$. **344**. $\left(\frac{130}{153}\right)^7$. **345**. $\frac{0{\cdot}0073964}{0{\cdot}00005846}$. **346**. $\left(\frac{20}{21}\right)^{11} : \frac{9^{20}}{7^{25}}$.

347. $\frac{2{\cdot}75876 .\ 9{\cdot}9875}{98{\cdot}764}$. **348**. $\frac{2^{27} .\ 3^{25}}{7^{10} .\ 11^{10}}$. **349**. $\frac{3^{3^3} .\ 2^{2^{2^2}}}{7^{4^2}}$. **350**. $\frac{0{\cdot}6987 .\ 7854{\cdot}3}{46{\cdot}395 .\ 0{\cdot}08476}$.

351. $\frac{11^5 .\ 13^7 .\ 17^9}{23^6 .\ 29^8}$. **352**. $\left(\frac{3390 .\ 4{\cdot}3401}{13814{\cdot}4}\right)^{11}$. **353**. $\frac{7754^2 .\ 0{\cdot}29953^4}{432569 .\ 0{\cdot}4578}$.

354. $\frac{49876 .\ 0{\cdot}037542 .\ 68{\cdot}7075}{7{\cdot}8165 .\ 578{\cdot}93 .\ 28{\cdot}4299}$. **355**. $12^3\sqrt[5]{37}$. **356**. $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{17}\right)^5\left(\frac{1}{20}\right)^9}$.

357. $\left(\frac{1402}{3999}\right)^{-3\frac{1}{5}}$. **358**. $\frac{178460^3\sqrt[4]{238465}}{26436^4}$. **359**. $\frac{(0{\cdot}234)^4\sqrt[5]{0{\cdot}2}}{12^3 .\sqrt[6]{0{\cdot}161}}$.

360. $\frac{654321^3\sqrt[12]{49365200}}{276{\cdot}54^7\sqrt[11]{67853}}$. **361**. $\sqrt[9]{\frac{8}{7}\sqrt[6]{54325}}$. **362**. $\frac{11{\cdot}11^{2{\cdot}2} .\ 3{\cdot}33^{-4{\cdot}4}}{\sqrt[55]{6666}}$.

363. $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{5\sqrt{5}}}$. **364**. $\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2}:\sqrt{10}}$. **365**. $\sqrt[3]{10\sqrt[3]{10\sqrt[3]{10}}}$. **366**. $\sqrt[7]{2\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}$.

367. $\frac{\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}$. **368**. $\frac{\sqrt[7]{7\sqrt[7]{7\sqrt[7]{7}}}}{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$. **369**. $\sqrt[7]{\frac{297\sqrt[3]{0{\cdot}05}}{0{\cdot}68\sqrt[5]{0{\cdot}1}}}$.

370. $\sqrt[11]{\frac{63{\cdot}49\sqrt[3]{7\frac{3}{8}}}{6\frac{3}{4}\sqrt{0{\cdot}729}}}$. **371**. $\sqrt[10]{59052-\sqrt[11]{2049{\cdot}1}}$. **372**. $\sqrt[13]{2{\cdot}459^{6{\cdot}5}+8{\cdot}74^{2{\cdot}3}}$.

373. $19^{\sqrt{7}}$. **374**. $2{\cdot}71828^{4{\cdot}60517}$. **375**. $5^{\sqrt{3}} .\ 3^{\sqrt{5}}$. **376**. $\sqrt[\sqrt{6}]{2^{\sqrt{3}} .\ 3^{\sqrt{2}}}$.

377. $2^7 .\sqrt[5]{0{\cdot}3256}-31x\sqrt[4]{5\sqrt{2}}=0$. **378**. $3^{11} .\sqrt[7]{2{\cdot}35\sqrt{0{\cdot}89^3}}+x\sqrt[7]{5^3\sqrt{7^{13}}}=0$.

379. $\log(x^3) + \log(y^2) = 4{\cdot}39947$,
$\log x \quad - \log y \quad = 0{\cdot}05799$.

380. Jaki jest promień kuli o powierzchni 1 m^2?

381. Jaki jest promień kuli o objętości 1 m^3?

382. Ile stopni, minut i sekund ma łuk koła równy promieniowi?

383. Objętość walca, którego wysokość równa się średnicy podstawy, jest 3 m^3; obliczyć powierzchnią tego walca.

384. Znaleźć ciężar kuli srebrnej o promieniu 0·4832 *cm*, jeżeli ciężar właściwy srebra jest 10·47.

385. Ze wzoru $t = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, obliczyć długość l wahadła sekundowego ($t = 1$) w miejscowości, w której przyspieszenie ciężkości $g = 9{\cdot}8088$.

386. Miary do ciał płynnych robią kształtu walcowego o wysokości dwa razy większej od średnicy dna, zaś do ciał sypkich kształtu walcowego o wysokości równej średnicy dna. Jaka jest wysokość litra i hektolitra α) do ciał płynnych, β) do ciał sypkich?

387. Wyrazić powierzchnią ziemi w myriametrach kwadratowych, objętość zaś jej w myriametrach sześciennych, przyjmując, że ziemia ma kształt kuli i że ćwierć południka ziemskiego ma 10^7 *m*.

388. W koło, którego pole jest 10 m^2, jest wpisany trójkąt równoboczny. Jak wielki jest jego bok?

389. Objętość czaszy kulistej o wysokości 0·4 *m* jest 0·9 m^3. Jaki jest promień tej kuli?

390. $x = \sqrt[3]{(a^2 - b^2)^2}$, gdy $\log a = 2{\cdot}87655$, $\log b = 2{\cdot}79287$.

391. Promienie trzech kół są takie, iż można z nich utworzyć trójkąt prostokątny. Okrąg największego koła jest 7·02346 *m*, okrąg innego jest 2·34567 *m*. Jaki jest promień pozostałego koła?

392. Trzy boki trójkąta są 5·68608 *m*, 4·9243 *m* i 2·84304 *m*. Jakie jest pole tego trójkąta?

393. Objętość walca, którego wysokość równa się średnicy, jest 402·123 cm^3. Jak wielką jest powierzchnia wpisanego ostrosłupa sześciokątnego foremnego?

394. Znaleźć objętość stożka ściętego, gdy liczby wyrażające w metrach jego wysokość i promienie podstaw są takie, iż ich logarytmy są odpowiednio 0·87456, 1·75846 i 1·48763.

395. Znaleźć objętość ściętego ostrosłupa foremnego kwadratowego, jeżeli jego wysokość jest 3 *m*, pola zaś kół opisanych na podstawach są 10 m^2 i 8 m^2.

(Art. 87). **396.** $a^{x+3} = a^7$. **397.** $2^{3x+5} = 37$. **398.** $\dfrac{2^{10-x} \cdot 3^{x+2}}{8^{x-4} \cdot 6^{7-x}} = \dfrac{1}{3} 9^{x-2}$.

399. $a^{x+b} = c \cdot b^{x+a}$. **400.** $a^{x+b} + b^{x+a} = c \cdot b^x$. **401.** $\dfrac{a^{x-3} + 1}{a^{x-1} - 1} = b$. **402.** $2^{3^x} = 3{\cdot}322$.

403. $3^{5^x} = 7$. **404.** $3125^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot 15625 = 0{\cdot}2$. **405.** $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}$.

406. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3}$.

407. $\sqrt[x]{14{\cdot}678} = 1{\cdot}4678$. **408.** $3^{2x} + 1 - \sqrt{3^{4x} + 4{\cdot}4641} = 0$.

409. $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36, \\ \sqrt{4^{-x}} : \sqrt[-10]{256^y} = 4. \end{cases}$ **410.** $\begin{cases} 2^{2x+1} \cdot 3^{3y+4} = 1889568, \\ 5^{x+2} \cdot 3^{y+4} = 455625. \end{cases}$

411. $\begin{cases} 2^x + 2^{x+1} = 3^y \cdot 0471404, \\ 5^x = 6^{x+y-\frac{1}{2}} \cdot 0{\cdot}062113. \end{cases}$ **412.** $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x+y)3^x = 279936. \end{cases}$ **413.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^{x+y} = 12, \\ 2^{x+y} \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

414. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{m^{x-5}}}{\sqrt[5]{m^{y-3}}} = 1, \\ \sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[3]{m^{y-1}} = m^{16}. \end{cases}$ **415.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18, \\ 4^x \cdot 5^z = 500, \\ 6^y \cdot 7^z = 12348. \end{cases}$

(Art. 89). **416.** $3x^2+11x=0$. **417.** $x^2-25=0$. **418.** $x^2+25=0$.
419. $4x^2+9=0$. **420.** $(x+a)^3+(x+b)^3+(a+b-x)^3-(x^3+a^3+b^3+(a+b)^3)=0$.
421. $(x^2+ax+b)^2-(x^2+ax-b)^2=0$. **422.** $(4x^2+x+1)^2-(2x+\frac{1}{4})^4-\frac{1}{8}(15x-\frac{1}{32})=0$.
423. $(x+2)^4+(x+1)^4+(x-2)^4+(x-1)^4-4(x^4+23\frac{1}{2})=0$. **424.** $(2x^2+1)^2-4(x^2+1)^2=0$.
425. $(x+2)^3+(x+1)^3-(x-2)^3-(x-1)^3=0$. **426.** $(ax+c)^2+(ax-c)^2-4c^2=0$.
427. $(ax+c)^2+(ax-c)^2=0$. **428.** $(ax+b)^2+(a-bx)^2=a^2+b^2+c^2$.
429. $2(ax+b)^2+(a-2bx)^2=0$. **430.** $(x^2+ax+b)^2-(x^2+ax-b)^2-4abx=0$.
431. $(ax+b)^2-(bx+a)^2+\dfrac{a^2-b^2}{2}\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)=0$.

(Art. 90, 91, 92). **432.** $15x^2+8x+1=0$. **433.** $6x^2+29x+35=0$.
434. $6x^2-19x+15=0$. **435.** $4x^2-11x+6=0$. **436.** $2x^2-5x-3=0$.
437. $x^2-6x+5=0$. **438.** $x^2-11x+18=0$. **439.** $x^2+17x+30=0$.
440. $x^2+19x+60=0$. **441.** $x^2+13x-48=0$. **442.** $x^2-7x-78=0$.
443. $9x^2-9x+2=0$. **444.** $6x^2-5x+1=0$. **445.** $25x^2+25x+4=0$.
446. $24x^2+10x+1=0$. **447.** $16x^2+16x-5=0$. **448.** $56x^2-x-1=0$.
449. $x^2-2x+2=0$. **450.** $x^2-4x+13=0$. **451.** $x^2-4x+\frac{37}{9}=0$.
452. $4x^2+24x+37=0$. **453.** $16x^2-24x+7=0$. **454.** $3x^2+6x-5=0$.
455. $x^2-3x+1=0$. **456.** $x^2+6x+7=0$. **457.** $2x^2-3x+3=0$.
458. $3x^2+6x+10=0$. **459.** $x^2-4x+6=0$. **460.** $x^2+10x+27=0$.
461. $x^2-6\sqrt{5}+29=0$. **462.** $4x^2-4x\sqrt{3}-13=0$. **463.** $x^2-6x\sqrt{5}+61=0$.
464. $4x^2-4x\sqrt{3}+19=0$. **465.** $x^2-4x.\sqrt{3}+7=0$. **466.** $8x^2-8x\sqrt{3}+5=0$.
467. $x^2-4x\sqrt{3}+17=0$. **468.** $8x^2-8x\sqrt{3}+7=0$. **469.** $x^2\sqrt{3}+4x-2\sqrt{3}=0$.
470. $x^2\sqrt{3}-2x\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$. **471.** $x^2\sqrt{2}-4x\sqrt{2}-3=0$.
472. $2(x^2+2x+3)^2+2(x^2-2x+4)^2-(2x^2+3)^2-65=0$.
473. $(x^2-3x+2)^2+(x^2+3x-10)^2-2(x^2-4)^2+2(x^2-4)=0$.
474. $(x-1)^4+(x^2+2x+2)^2-(x+2)^4-(x-2)^4+57=0$.
475. $4x^2-12c^2x+9c^4-25b^2(a^2+c^2)=0$. **476.** $4x^2-20ax+61a^2+36b^2=0$.
477. $(ax^2+c)(\alpha x^2+\gamma)-(ax^2+\gamma)(\alpha x^2+c)-(2x-1)(\alpha-a)(c-\gamma)=0$.
478. $(x^2+ax+b)^2+(x^2-ax-b)^2-2x^4=0$. **479.** $(x^2+ax+b)^2+(x^2-ax-b)^2-$
$-2x^4-2c^2=0$. **480.** $(x^3+ax^2+bx+c)(x+d)-x^2\left(x+\dfrac{a+d}{2}\right)^2+x^2\left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2=0$.
481. $(5a-2x)(2a+x)(b-x)=(a-x)(3b-x)(3b+2x)$.
482. $(a+7b-8x)(a+2b-3x)(a-6b+5x)=(a-7b+6x)(a+3b-4x)(a+4b-5x)$
483. $(a+13b-14x)(a+2b-3x)(a-9b+8x)=(a-13b+12x)(a+3b-4x)(a+6b-7x)$.

(Art. 93). **484.** $\dfrac{2}{x-10}+10-x=\dfrac{2}{10-x}$. **485.** $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2x}$.
486. $\dfrac{x}{100}-\dfrac{21}{25x}=\dfrac{1}{4}$. **487.** $\dfrac{15}{x}-\dfrac{72-6x}{2x^2}=2$. **488.** $\dfrac{61-3x}{35-x}=\dfrac{23+x}{13+x}$.
489. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$. **490.** $8x+11+\dfrac{7}{x}=\dfrac{21+65x}{7}$. **491.** $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}$.
492 $\dfrac{3}{2(x^2-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}=\dfrac{1}{8}$. **493.** $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{4-x}{2x}=2\frac{1}{3}$. **494.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{25}{x}=3$.
495. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=1$. **496.** $\dfrac{3x-4}{3x-\dfrac{7}{3}}+\dfrac{(2x-3)(3x-4)}{\left(2x-5)(3x-\dfrac{7}{3}\right)}-\dfrac{2x-3}{x-2}=0$.
497. $\dfrac{27+4x}{39-2x}=\dfrac{73+6x}{101-8x}$. **498.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\dfrac{3}{2}\,\dfrac{x^2+2}{3x-2}$.
499. $\dfrac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5$. **500.** $\dfrac{24-x}{18+x}=\dfrac{69-7x}{58+x}\cdot\dfrac{6}{5}$. **501.** $\dfrac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\dfrac{1}{x}$.
502. $\dfrac{x-6}{x-12}-\dfrac{x-12}{x-6}=\dfrac{5}{6}$. **503.** $\dfrac{13-x}{15-x}=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{4+2x}{3+2x}$. **504.** $7-5x=\dfrac{(12-8x)^2}{21-13x}$.
505. $4-5x=\dfrac{(6-8x)^2}{9-13x}$. **506.** $9-5x=\dfrac{(14-8x)^2}{22-13x}$. **507.** $\dfrac{6-5x}{4-3x}=\dfrac{4-3x}{3-2x}$.

508. $\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2=2.$ **509.** $\left(\frac{4+3x}{5+3x}\right)^2=\frac{6+4x}{9+4x}.$ **510.** $\left(\frac{7+3x}{5+3x}\right)^2=\frac{13+4x}{7+4x}.$

511. $\left(\frac{5-3x}{4-3x}\right)^2=\frac{9-5x}{6-5x}.$ **512.** $\left(\frac{5-4x}{7-4x}\right)^2=\frac{11-10x}{19-10x}.$ **513.** $\frac{x-2}{x-4}=\frac{2x-1}{x+1}.$

514. $\frac{x+1}{x+2}=\frac{2(x-1)}{x+3}.$ **515.** $\frac{x+3}{x-3}=\frac{2x+5}{x+5}.$ **516.** $\frac{x-1}{x+1}=\frac{3x+1}{2x+5}.$

517. $\frac{4n+9-x}{5n+9-x}=\frac{4}{5}\cdot\frac{nx+5}{nx+4}.$ **518.** $\frac{5n+6-x}{6n+5-x}=\frac{5}{6}\cdot\frac{(n-1)x+6}{(n-1)x+5}.$

519. $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{3+x^2}{a^2-x^2}.$ **520.** $\frac{2a+5b+3x}{3a-5b+2x}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{3a-b+2x}{2a-b+3x}.$

521. $\frac{x+3a-b}{x-3b+a}=\frac{4a-3b}{4b-3a}\cdot\frac{2a-b+x}{2b-a-x}.$ **522.** $\frac{2a+7b-5x}{2b+7a+5x}=\frac{8}{7}\cdot\frac{a+4b-3x}{b+4a+3x}.$

523. $\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=1.$ **524.** $\frac{2a+b-x}{3b+2a+x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{4x+3b}{4x+4b+a}.$

525. $\frac{3a-x}{3a+x}=\frac{4a+3b}{4a-3b}\cdot\frac{3x-a}{3x+a}.$ **526.** $\frac{x(x-a+b)}{(x-2a)(x-a-b)}+\frac{(x-2a)(x-a-b)}{x(x-a+b)}=2.$

527. $\left(\frac{2x+a}{2x-a}\right)^2=\frac{5x-2b+4a}{5x-2b-4a}.$ **528.** $\frac{a}{ax+\frac{1}{ax}}=\frac{1}{a}.$

529. $\frac{a-x}{3a+x}\cdot\frac{2x+2a-b}{2x+2a+b}=\frac{b-4x}{8a+b+4x}.$ **530.** $\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{cx-d}{dx-c}.$

(Art. 94). **531.** $\sqrt{2x^2+7}=x+2.$ **532.** $1=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}.$

533. $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x-3}=1.$ **534.** $\sqrt{x-1}=x-1.$ **535.** $\sqrt{10-2x}+\sqrt{2x-6}=2.$

536. $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+x}=\sqrt{2}.$ **537.** $\sqrt{10+3x}-\sqrt{10-3x}=\sqrt{x}.$

538. $\sqrt{5+4x}-\sqrt{5-4x}=2\sqrt{x}.$ **539.** $\sqrt{4x^2-4x+1}=\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}.$

540. $2x-\sqrt{x+3}+6=0.$ **541.** $4\sqrt{2-x}-3\sqrt{5-2x}=-\sqrt{5+2x}.$

542. $2\sqrt{6-4x}+\sqrt{3-2x}=\sqrt{11-6x}.$ **543.** $\sqrt{x+7}=x+1.$ **544.** $2x+\sqrt{x+3}+5=0.$

545. $4x-\sqrt{x+3}=x-5.$ **546.** $\sqrt{x+\sqrt{x+2}}=2.$ **547.** $\sqrt{x+1+\sqrt{5(x+2)}}=3.$

548. $2\sqrt{3x-2}-3\sqrt{x+2}+2=0.$ **549.** $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+4}=\sqrt{8x+9}.$

550. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{5(x+1)}=9.$ **551.** $\sqrt{x+12}+\sqrt{x}=2\sqrt{2x+1}.$

552. $1=\sqrt{2-x}-\sqrt{7-3x}.$ **553.** $\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+2}.$

554. $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}=5.$ **555.** $\sqrt{2x}-\sqrt{3x-2}=4.$ **556.** $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}.$

557. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\frac{3}{2}\sqrt{2x}.$ **558.** $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{6x+1}.$ **559.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}=\sqrt{x+14}.$

560. $2\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{a+b-2x}=\sqrt{9a+b-6x}.$

561. $2\sqrt{4a+b-4x}-3\sqrt{a+b-2x}=\sqrt{a+b+2x}.$

562. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}.$ **563.** $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=2\sqrt[3]{a}.$

564. $\sqrt{b-4x}+2\sqrt{b-a-2x}=\sqrt{9b-8a-24x}.$ **565.** $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{a+8x}.$

566. $\sqrt{a+b-2x}+\sqrt{9a+b-10x}=2\sqrt{a+4b-2x}.$

567. $\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+49b-50x}=2\sqrt{2a+b-3x}.$

568. $\sqrt{9a+b-6x}+\sqrt{9b+a+6x}=2\sqrt{4a+b+4x}.$

569. $\sqrt{\frac{a}{b}-x}-\sqrt{\frac{a}{b}+x}-2\sqrt{2x}+2\sqrt{\frac{a-4bx}{2b}}=0.$ **570.** $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}-\frac{\sqrt{x-4}}{x-2}=0.$

571. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}=2.$ **572.** $\frac{ax-1}{ax+1}=\sqrt{\frac{ax+1}{ax-1}}.$

(Art. 99). Wypisać równania, których pierwiastki są: **573.** 8, 9. **574.** 15,16.
575. 23, 30. **576.** 5, —12. **577.** —9, —13. **578.** —16, —25. **579.** $2+3i$, $2-3i$.
580. $5+7i$, $5-7i$. **581.** $-8-4i$, $-8+4i$. **582.** $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$. **583.** $-3+\sqrt{7}$, $-3-\sqrt{7}$.

584. $4+i\sqrt{3}$, $4-i\sqrt{3}$. **585**. $\sqrt{2}+3$, $\sqrt{2}-3$. **586**. $-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$.
587. $-\sqrt{2}+i\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{5}$. **588**. $-\sqrt{3}+i\sqrt{7}$, $-\sqrt{3}-i\sqrt{7}$.

589. Znaleźć α) sumę kwadratów, β) sumę sześcianów, γ) sumę czwartych potęg, δ) sumę odwrotności czwartych potęg pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$.

590. Mając dany spółczynnik p, równania $x^2+px+q=0$, i daną różnicę kwadratów pierwiastków d, znaleźć q.

(Art. 100). **591**. Nie rozwiązując równań: α) $x^2-9x+20=0$, β) $x^2-17x+66=0$, γ) $x^2-32x+225=0$, δ) $x^2-43x+390=0$, ε) $25x^2-25x+6=0$, ζ) $2x^2-3=0$, η) $x^2-5x-36=0$, ϑ) $x^2+8x-84=0$, ι) $x^2+9x-22=0$, κ) $9x^2+18x-7=0$, λ) $x^2+14x+45=0$, μ) $x^2+15x+56=0$, ν) $x^2+19x+88=0$, ο) $4x^2+24x+35=0$, π) $x^2-4x+13=0$, ρ) $x^2-6x+25=0$, σ) $9x^2-12x+5=0$, τ) $x^2+4x+7=0$, φ) $x^2-6x+14=0$, χ) $x^2+2x\sqrt{2}+5=0$, o każdem wnieść, czy ma pierwiastki rzeczywiste, czyteż zespolone. Jeżeli rzeczywiste, to jakiego są one znaku? W razie, kiedy są różnego znaku, który pierwiastek ma wartość bezwzględną większą?

(Art. 101). **592**. $x_1+x_2=15$, $x_1x_2=50$. **593**. $x_1+x_2=\frac{27}{7}$, $x_1x_2=\frac{180}{49}$.
594. $x_1+x_2=-35$, $x_1x_2=306$. **595**. $x_1-x_2=3$, $x_1x_2=4$. **596**. $x_1-x_2=13$, $x_1x_2=30$.
597. $x_1-x_2=2\sqrt{2}$, $x_1x_2=7$. **598**. $x_1+x_2=7$, $x_1^2+x_2^2=25$. **599**. $x_1+x_2=11$, $x_1^2+x_2^2=61$.
600. $x_1-x_2=4$, $x_1^2+x_2^2=34$. **601**. $x_1-x_2=5$, $x_1^2+x_2^2=73$. **602**. $x_1+x_2=7$, $x_1^3+x_2^3=91$.
603. $x_1+x_2=5$, $x_1^3+x_2^3=35$. **604**. $x_1-x_2=1$, $x_1^3-x_2^3=7$. **605**. $x_1-x_2=7$, $x_1^3-x_2^3=2738$.

(Art. 102). **606**. $\sqrt{31+\sqrt{600}}$. **607**. $\sqrt{11-3\sqrt{8}}$. **608** $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$.
609. $\sqrt{\frac{9}{8}-\sqrt{\frac{9}{8}}}$. **610**. $\sqrt{1+3\sqrt{-7}}+\sqrt{1-3\sqrt{-7}}$. **611**. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.
612. $\sqrt{11+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. **613**. $\sqrt{7+\sqrt{-15}}+\sqrt{7-\sqrt{-15}}$. **614**. $\sqrt{11+5\sqrt{-3}}\pm$ $\pm\sqrt{11-5\sqrt{-3}}$. **615**. Korzystając z tego, że $\sqrt[4]{m}=\sqrt{\sqrt{m}}$, przekształcić następujące wyrażenia: α) $\sqrt[4]{1+3i\sqrt{7}}+\sqrt[4]{1-3i\sqrt{7}}$; β) $\sqrt[4]{1+3i\sqrt{7}}-\sqrt[4]{1-3i\sqrt{7}}$;
γ) $\sqrt[8]{9232+6528\sqrt{2}}+\sqrt[8]{9232-6528\sqrt{2}}$; δ) $\sqrt[8]{9232+6528\sqrt{2}}-\sqrt[8]{9232-6528\sqrt{2}}$.
616. $x^2-(7+3\sqrt{3})x+16+12\sqrt{3}=0$. **617**. $x^2-(10+6\sqrt{2})x+40+32\sqrt{2}=0$.
618. $x^2-4x-27-10\sqrt{6}=0$. **619**. $x^2-6x+6\sqrt{2}-2=0$. **620**. $x^2-4x+\frac{23+6\sqrt{2}}{8}=0$.
621. $x^2-6x+14+2\sqrt{6}=0$.
622. Sprawdzić, że równanie $\sqrt{2a-\sqrt{x-3a^2}}=\sqrt{x-5a^2+2a+a\sqrt{2}}$ ma pierwiastek $x=5a^2-2a\sqrt{2}+1$.

(Art. 103, 104). **623**. Stosunek dwu liczb jest 11:13, a ich iloczyn 7007. Jakie są te liczby?

624. Rozłożyć 60 na takie dwie części, iżby stosunek ich iloczynu do sumy ich kwadratów był równy 2:5.

625. Rozłożyć liczbę 195 na trzy składniki, tworzące proporcyą ciągłą, której wyraz ostatni jest o 120 większy od pierwszego.

626. Raz do szukanej liczby dodawszy 3, drugim zaś razem od niej odjąwszy 3, otrzymujemy dwie takie liczby, iż suma wykładników dwu stosunków, które z owych dwu liczb utworzyć można, jest $\frac{10}{3}$. Jaka jest szukana liczba?

627. Cztery liczby tworzą proporcyą, w której suma wyrazów skrajnych jest a, suma wyrazów średnich b, suma zaś kwadratów wszystkich czterech wyrazów jest c^2. Jaki jest pierwszy wyraz tej proporcyi?

628. Iloczyn dwu liczb, z których jedna jest o 128 większa od drugiej, jest 3300. Jakie są te liczby?

629. Jako iloczyn dwu liczb, z których jedna jest o 75 większa od drugiej, otrzymano liczbę o 1000 za małą, tak iż z podzielenia tego błędnego iloczynu przez mniejszy z czynników wypada w ilorazie 227, a w reszcie 113. Znaleźć obie liczby i sprawdzić zadanie.

630. W dziele Indusa Bhaskara Akarja (z w. XII-go) jest zadanie: Powiedz, jaka to jest liczba, która pomnożona przez 3, a następnie o $\frac{3}{4}$ iloczynu powiększona, przez 7 podzielona, o $\frac{1}{3}$ ilorazu zmniejszona, przez siebie samę pomnożona, o 52 zmniejszona, wskutek wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego, dodania 8-u i podzielona przez 10 daje 2?

631. Podzielić liczbę a na dwie części tak, iżby jedna była średnią geometryczną liczby a i części pozostałej.

632. Kupiono 25 *kg* dwojakiego towaru i zapłacono za każdy towar po 30 *zł.*, a 1 *kg* towaru drugiego kosztuje o 1 *zł.* więcej, niż 1 *kg* pierwszego. Ile kupiono *kg* pierwszego towaru?

633. Ktoś dwukrotnie kupił ten sam towar, każdym razem za 216 *zł.*, drugim jednak razem towar ów podrożał o 1 *zł.* na 30 *kg*, wskutek czego dostał o 90 *kg* mniej niż pierwszym razem. Ile kupił *kg* pierwszym razem?

634. 4 *kg* jednego z dwu kupionych towarów kosztują o 2 *zł.* mniej niż 4 *kg* drugiego. Gdyby zaś każdego z tych towarów kupiono za $8\frac{3}{4}$ *zł.*, to pierwszego towaru byłoby o 2 *kg* więcej niż drugiego. Ile kosztuje 1 *kg* każdego towaru?

635. Za 120 *zł.* kupiono kilka metrów sukna; gdyby *m* kosztował o 3 *zł.* mniej, to za te same pieniądze mianoby 2 *m* więcej. Ile kupiono metrów i po czemu?

636. Przekupka, stawiając koszyk z jajami, rozbiła 6 jaj. Stratę tę udało jej się pokryć, sprzedając każde 5 jaj o 1 ct. drożej, aniżeli pierwotnie zamierzała, a sprzedała wszystkich jaj za 2 *zł.* 88 ct. Ile początkowo miała jaj w koszu?

637. Ktoś kupił stado owiec za 320 *zł.* i, zatrzymawszy dwie u siebie, sprzedał resztę z zyskiem 25 *zł.*, zarabiając na każdej sztuce $1\frac{1}{2}$ *zł.* Ile zapłacił za jednę owcę?

638. Ktoś kupił 33 butelek wina w dwu gatunkach, jednego za 33 *zł.*, drugiego za 27 *zł.*; butelka jednego gatunku kosztowała o 70 ct. więcej niż drugiego. Ile kupił butelek każdego gatunku?

639. Kilku podróżnych najęło statek za 342 *zł.* Pod koniec drogi zabrakło trzem podróżnym pieniędzy, wskutek czego pozostali zapłacili po 19 *zł.* więcej. Ilu było podróżnych?

640. Kilka osób złożyło w równych udziałach 4160 *zł.*, a po pewnym przeciągu czasu każda dołożyła 40 razy tyle *zł.*, ile było osób. Zysk wyniósł tyle $^0/_0$, ile było osób. Przy podziale każda otrzymała 12 razy tyle *zł.*, ile było osób. Ileż było osób?

641. Kupiec ma dwa gatunki cukru różnej ceny. Stosunek ich ciężarów jest 4 : 3. *Kg.* pierwszego gatunku kosztuje tyle centów, ile jest *kg* tego gatunku. Drugi gatunek jest tańszy od pierwszego o 5 ct. na kilogramie. Wartość wszystkiego cukru wynosi 442 *zł.* Ile jest cukru każdego gatunku?

642. Każde z dwu towarzystw dobroczynnych rozdało 1200 *zł.* swoim ubogim; pierwsze wspomogło o 40-u ubogich więcej niż drugie, ale drugie dało o 5 *zł.* każdemu ubogiemu więcej niż pierwsze. Ilu było ubogich?

643. Członkowie pewnego stowarzyszenia w dwu półroczach złożyli się na zapłacenie czynszu za spólny lokal po 168 *zł.* za półrocze. W pierwszem półroczu było o 3 członków mniej niż w drugiem, wskutek czego zapłacił każdy w drugiem półroczu o 1 *zł.* mniej niż w pierwszem. Ilu było członków w pierwszem półroczu?

644. Dwie przekupki za sprzedane pomarańcze otrzymały tę samę kwotę pieniędzy, a sprzedały pomarańcz razem 260 sztuk. Gdyby pierwsza sprzedała tyle pomarańcz, co druga, to dostałaby za nie 3 *zł.* 60 ct.; gdyby druga sprzedała tyle pomarańcz, co pierwsza, to otrzymałaby 4 *zł.* 90 ct. Ile każda przekupka miała pomarańcz?

645. Dyament, którego wartość była 1000 *zł.*, pękł w taki sposób, że właściciel jego poniósł straty 375 *zł.* Jest to następstwem tego, iż wartość dyamentu jest proporcyonalna względem kwadratu jego ciężaru. Jaki jest stosunek ciężarów dwu kawałków powstałych wskutek pęknięcia?

646. Zbiornik może być napełniony przez pierwszy z dwu kurków o 2 godziny prędzej niż przez drugi, przez oba zaś razem w przeciągu $1\frac{7}{8}$ godziny. W ciągu jakiego czasu przez każdy kurek oddzielnie byłby zbiornik napełniony?

647. Z naczynia o 60 *l* objętości, napełnionego alkoholem, odlano raz pewną ilość alkoholu, a na to miejsce dolano wody; po zamieszaniu odlano o 7 *l* więcej niż poprzednio i znowu naczynie wypełniono wodą, poczem w naczyniu stosunek ilości alkoholu i wody był 11:4. Ile pierwszym razem odlano alkoholu z tego naczynia?

648. Z beczki, mającej 20 *hl* objętości i napełnionej winem, odlano pewną ilość wina do pustej drugiej beczki tejże objętości, poczem dolano do niej wody do pełna. Po zamieszaniu przelano z niej do pierwszej beczki tyle, iż pierwsza stała się pełną. Gdyby jeszcze z pierwszej beczki po zamieszaniu odlać $6\frac{2}{3}$ *hl* do drugiej, toby ilość wina w obu beczkach była jednakowa. Ile początkowo odlano z pierwszej beczki?

649. A i B utworzyli spółkę z kapitałem 6800 *zł*; udział A był w obrocie 12 miesięcy, udział zaś B 16 miesięcy. Po obliczeniu zysków otrzymali wraz ze swemi udziałami A 4140 *zł*., B 3840 *zł*. Z jakiemi udziałami A i B przystąpili do spółki?

650. Kupiono za 264 *zł*. kawy i za tyleż *zł*. cukru o 90 *kg* więcej niż kawy. Gdyby sprzedano z zyskiem 20% kawy 30 *kg* i cukru 60 *kg*, to otrzymanoby 97·2 *zł*. Ile kupiono *kg* kawy i ile cukru?

651. Kupiec kupił 133 *kg* towaru i osiągnąwszy przy sprzedaży jego pewien procent zysku, za wszystkie pieniądze kupił znowu tenże towar, który sprzedał z takim samym, jak poprzednio, zyskiem; wtedy za otrzymane pieniądze kupił 168 *kg* towaru o 14% droższego niż poprzednio. Jaki osiągał procent zysku przy sprzedaży poprzedniego towaru?

652. Po śmierci ojca przypadł na dzieci do równego podziału kapitał 168000 *zł*. Przed podziałem umarło dwoje dzieci, wskutek czego każde z pozostałych przy życiu otrzymało o 7000 *zł*. więcej, niż wypadało z pierwotnego obliczenia. Ile było dzieci w chwili śmierci ojca?

653. Jedna część kapitału 12000 *zł*. przynosi rocznie 2800 *zł*., pozostała zaś oddana na stopę procentu o 1 większą, przynosi rocznie 2500 *zł*. Jaka jest stopa procentu pierwszej sumy?

654. Pewna osoba kapitał 13000 *zł*. umieściła w dwu częściach na różne stopy procentu, z których pierwsza była o 1 większa od drugiej; z obu części miała dochód jednakowy. Gdyby umieściła część pierwszą na stopę procentu drugiej, toby miała dochodu od niej 360 *zł*., podczas gdy druga umieszczona na stopę procentu pierwszej przynosiłaby 490 *zł*. Na jakie stopy procentu zostały obie części umieszczone?

655. Ktoś wniósł do kasy oszczędności 160000 *zł*. i po roku wyjął 2400 *zł*., a po upływie drugiego roku wyjął z kasy pozostałą sumę, która wynosiła 171387 *zł*. Ile % płaciła kasa oszczędności?

656. Dyskonto teoretyczne dwu weksli, jednego na 2080 *zł*. z terminem 8-omiesięcznym, drugiego zaś na 3150 *zł*. z terminem 10-omiesięcznym, wynosi przy tej samej stopie procentu 230 *zł*. Po ile % dyskontowano te weksle?

657. Ma ktoś zapłacić 8800 *zł*. po 7-u miesiącach i 5940 *zł*. po roku. W jakim terminie pośrednim mógłby zapłacić całą sumę 14740 *zł*., płacąc od pierwszej kwoty 5%, od drugiej zaś otrzymując rabatu 5 *zł*. od każdych 105 *zł*. (5 „auf Hundert“)?

658. Fabrykant sprzedał kupcowi dwa gatunki towaru, pierwszego za 7176 *zł*., a drugiego za 3536 *zł*. Przy tej sprzedaży na pierwszym miał zysku tyleż %, ile na drugim straty % („auf Hundert“ i „in Hundert“), a na całym tym obrocie miał zysku 312 *zł*. Po ile % fabrykant mógł liczyć sobie zysku i straty?

659. Ciało z pewnej wysokości spada z prędkością początkową c. Obliczyć, posiłkując się wzorem $s=ct\pm\frac{1}{2}gt^2$ (gdzie g jest przyspieszeniem ciężkości, t ilością sekund, z podwójnego zaś znaku górny odnosi się do ciał spadających, a dolny do ciał wznoszących się), w ilu sekundach to ciało zrobi drogę s.

660. Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością początkową c; obliczyć, po ilu sekundach znajdzie się na wysokości s.

661. Kula armatnia wyrzucona została pionowo w górę z prędkością początkową 490·4 *m* w miejscu, w którem przyspieszenie prędkości jest 9·808 *m* i wzniosła się do wysokości 12260 *m*. Obliczyć, jak długo kula biegła w górę?

662. Przyjmując, że stosunek masy ziemi do masy księżyca jest 81:1, a odległość ziemi od księżyca wynosi 60 promieni ziemskich (zob. I, zad. 208), znaleźć na prostej, łączącej środki ziemi i księżyca, punkt przyciągany z tem samem natężeniem przez księżyc, co przez ziemię.

663. A i B zrobili tę samę drogę 110 *km*. A szedł dziennie o 1 *km* więcej niż B i wskutek tego był o 1 dzień mniej w drodze. Ile każdy robi dziennie *km*?

664. Wioślarz, robiąc jednostajnie wiosłami, popłynął w górę rzeki $3\frac{1}{3}$ *km* i powrócił w ciągu 1 godziny 40 minut. Bieg rzeki wynosi 2 *km* na 1 godzinę; ileby *km* przepłynął wioślarz w ciągu godziny, tak samo robiąc wiosłami, na wodzie stojącej?

665. Dwie osoby z tego samego miejsca jadą, jedna do miasta A, odległego o 324 *km*, a druga do miasta B, odległego o 198 *km*. Pierwsza, jadąc 3 *km* na godzinę więcej niż druga, znalazła się w A o 3 godzin później niż druga w B. Ile godzin jechała każda z nich?

666. Z dwu miejsc A i B, oddalonych od siebie o $2\frac{1}{2}$ mili, jednocześnie w kierunku od B ku A wyjechały dwie osoby. Po upływie 14 godzin spotkały się z sobą. Znaleźć odległość punktu spotkania się od A, wiedząc, że druga z tych osób potrzebuje o $\frac{1}{4}$ godziny mniej czasu niż pierwsza do przebycia każdych 5-u mil.

667. A i B jednocześnie wyszli naprzeciwko siebie z miejsc oddalonych o 80 *km*. A robi dziennie o 2 *km* więcej niż B, ilość zaś dni między ich wyruszeniem a chwilą spotkania się jest dwa razy większa od ilości *km*, które B szedł codziennie. Ile *km* robi każdy dziennie?

668. Z dwu punktów odległych od siebie o 910 *m* poruszają się ku sobie 2 ciała ruchem jednostajnym; gdyby pierwsze zaczęło swój ruch o 56 sekund później niż drugie, to punkt ich spotkania się przypadłby w środku całej drogi; gdyby zaś rozpoczęły ruch jednocześnie, to po upływie 20 sekund byłyby oddalone od siebie o 550 *m*. W ciągu ilu sekund każde z tych ciał przebiegłoby całą drogę?

669. Dwa ciała poruszają się na prostych, do siebie prostopadłych, oddalając się od punktu przecięcia się tych prostych z sobą. Pierwsze przebiega na jedną sekundę 49 *dm*, a drugie 28 *dm*; w pewnym momencie pierwsze ciało znajdowało się w odległości 175 *dm*, drugie zaś w odległości 20 *dm* od punktu przecięcia się ich dróg. Oznaczyć chwilę, w której odległość tych ciał od siebie jest 370 *dm*.

670. Zaczynając od punktów końcowych podstawy a trójkąta równobocznego, dwa ciała poruszają się po pozostałych bokach trójkąta, dążąc do wierzchołka z prędkościami m i n na sekundę. Po ilu sekundach odległość tych ciał będzie równa wysokości trójkąta?

671. Środki dwu kół, których promienie są 981 i 980 *cm*, poruszają się po dwu do siebie prostopadłych prostych, dążąc do punktu, w którym się owe proste przecinają, pierwszy z prędkością 7 *cm*, drugi 5 *cm* na sekundę. W pewnym momencie środek pierwszego koła był oddalony o 2442 *cm*, środek zaś drugiego o 1591 *cm* od punktu przecięcia się prostych. O ile sekund później te koła będą do siebie styczne zewnętrznie?

672. Środki dwu kół, jednego o promieniu 36 *cm*, drugiego o promieniu 16 *cm*, poruszają się po ramionach kąta prostego ku jego wierzchołkowi. Pierwszy porusza się z prędkością 2 *cm* na sekundę i początkowo jest 38 *cm* odległy od wierzchołka, drugi zaś, poruszający się z prędkością 18 *cm* na sekundę, jest wówczas odległy o 210 *cm* od wierzchołka. Kiedy te koła będą do siebie styczne zewnętrznie, a kiedy wewnętrznie?

673. Po równi pochyłej z punktu, o h metrów nad poziomem się znajdującego, spada ciało z prędkością początkową c metrów. Jaką ono drogę przebiega, jeżeli wiadomo, że czas spadku jest taki, w jakimby z tejże wysokości h ciało wolno puszczone spadło na poziom (zob. zadanie 659)?

674. Obliczyć głębokość studni, wiedząc, że od chwili, kiedy z poziomu kamień wolno puszczonym został, do chwili usłyszenia odgłosu plusku upłynęło t sekund, (t jest sumą czasu, podczas którego kamień spada, i czasu potrzebnego dla dojścia odgłosu plusku; jeżeli głos w θ sekund z prędkością v przebiega odległość s, to $s = v.\theta$).

675. Trzy koła spółśrodkowe, z których największe ma promień 32 *cm*, są takie, iż pola koła najmniejszego, pasa kołowego zewnętrznego i pasa kołowego pośredniego są proporcyonalne względem liczb 4, 7 i 5. Znaleźć promienie pozostałych kół.

676. Jakim trzem po sobie następującym liczbom odpowiadać mogą boki trójkąta prostokątnego?

677. Wiele ma boków wielokąt, jeżeli w nim można poprowadzić 275 przekątnych?

678. Na przedłużeniu danego odcinka $AB = a$ poza B znaleźć taki punkt C, iżby odcinek BC był średnią geometryczną odcinków AC i AB.

679. Mając obwód p trójkąta prostokątnego i przeciwprostokątną a, określić każdą z przyprostokątnych.

680. Cztery punkty A, A_1, B i B_1 następują po sobie na okręgu koła, a C jest punktem przecięcia się prostych AB i A_1B_1. Dane są długości $AB = \frac{15}{2}$ i $A_1B_1 = 12$ i odległość $CA = 2$. Obliczyć CA_1 i CB_1.

681. W kole o promieniu r dany jest kierunek średnicy i dana prostopadła do niej cięciwa, oddalona od środka koła o a. Znaleźć promień koła stycznego jednocześnie do danego koła, oraz do średnicy i do cięciwy, lub do ich przedłużeń.

682. Trzy krawędzi prostopadłościanu są proporcyonalne względem liczb 3, 6 i 8; jeżeli te krawędzi powiększymy odpowiednio o $3\,m$, $2\,m$ i $5\,m$, to objętość prostopadłościanu powiększy się o $1494\,m^3$. Jakie są wielkości tych krawędzi?

683. Przeciąć kulę płaszczyzną tak, aby pole koła przecięcia było równe różnicy powierzchni obu czasz powstałych z przecięcia.

684. Przeciąć kulę dwiema płaszczyznami prostopadłymi do danej średnicy i równo odległymi od środka kuli, w ten sposób, by suma powierzchni obu kół powstałych z przecięcia była równa pasowi kulistemu oddzielonemu przez te płaszczyzny.

685. Dana jest objętość v, wysokości h i bok a podstawy dolnej ostrosłupa sześciokątnego foremnego ściętego. Obliczyć bok górnej podstawy.

686. Na ścianie sześcianu wystawić ostrosłup ścięty tejże co sześcian wysokości tak, iżby stosunek objętości tych dwu brył był k.

(Art. 105, 106, 107). **687.** Oznaczyć, jakiego znaku mogą być wartości trójmianu przy rzeczywistych wartościach x, oraz wykreślić trójmian:
α) x^2-3x+2, β) $2x^2-3x+1$. γ) $-x^2+2x+3$, δ) $-3x^2-x+4$, ε) x^2-2x+1,
ζ) x^2-4x+4, η) $-x^2+3x-\frac{9}{4}$, θ) $-x^2-\frac{5}{2}x-\frac{25}{16}$, ι) x^2+2x+3, κ) $2x^2-2x+1$,
λ) $-x^2-3x-5$, μ) $-2x^2+3x-3$.

(Art. 109). **688.** Ze wszystkich prostokątów o tym samym obwodzie $2p$, który ma pole największe?

689. Który z trójkątów o tym samym obwodzie i o tej samej podstawie ma pole największe?

690. W dany trójkąt wpisać prostokąt o największem polu.

691. Na danej kuli opisać stożek o najmniejszej objętości.

692. Rozłożyć liczbę p^2 na dwa czynniki dodatne, których suma jest minimum.

(Art. 110). **693.** Który z trójkątów o tym samym obwodzie ma pole największe?

694. Który z prostopadłościanów o tej samej powierzchni ma objętość największą?

695. Który z prostopadłościanów o tej samej przekątnej ma objętość największą?

696. Okazać, że jeżeli nie wszystkie liczby dodatne $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są równe sobie, to

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} < \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},$$

t. j. „średnia geometryczna" pewnej ilości liczb dodatnych jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

(Art. 111). **697.** Który z prostokątów o tym samym obwodzie utworzy wskutek obrotu około jednego z boków, jako osi, walec o objętości największej?

698. Który z walców wpisany w kulę ma objętość największą?

699. Który z trójkątów równoramiennych, wpisanych w koło, ma pole największe?

700. Który z walców, wpisanych w stożek, ma objętość największą?

(Art. 112). Dla jakich wartości x jest **701.** α) $x^2 < 1$; β) $x^2 > 1$. **702.** $x^2 > a$. **703.** $x^2-6x+8 < 0$. **704.** α) $x^2-8x > 15$; β) $x^2-8x < 15$. **705.** α) $x^2-4x+13 > 0$. β) $x^2-4x+13 < 0$.

(Art. 114). **706.** $x^3-5x^2-4x+20=0$. **707.** $x^3-8x^2+19x-12=0$.
708. $x^4-6x^3+x^2+24x-20=0$. **709.** $x^4-7x^3+11x^2+7x-12=0$.
710. $x^4-4x^3-3x^2+16x-4=0$. **711.** $x^4-4x^3+4x^2+36x-117=0$.
712. $1-x=\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}$ **713.** $\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}=x$.

714. W jakiej odległości od środka kuli o promieniu r należy poprowadzić płaszczyznę, aby stosunek objętości powstałego mniejszego odcinka do objętości stożka mającego tož koło za podstawę a wierzchołek w środku kuli, był m.

715. Z beczki, zawierającej $81\,l$ wina, wylano pewną ilość l, a natomiast dolano beczkę wodą; z mieszaniny tej wylano następnie tyleż, co poprzednio, i znowu do beczki dolano wody. Gdy to powtórzono cztery razy, to w mieszaninie, znajdującej się w beczce, pozostało $16\,l$ czystego wina. Po ile wylewano każdym razem?

(Art. 116). **716.** $x^3-125=0$. **717.** $x^3+512=0$. **718.** $(x^2-5)(x+25)=5x(5x-1)$.
719. $(x-6)(x^2+4\sqrt{3})=2x\sqrt{3}(2-x\sqrt{3})$. **720.** $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-2}=\frac{1}{x}$.
721. $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}+\frac{12x}{x^2-5x+6}+\frac{x-192}{x^3-6x^2+11x-6}=0$.

(Art. 117). **722.** $x^4-4096=0$. **723.** $x^4+2401=0$. **724.** $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{8}{3x^2}$.
725. $x(x^3+17x^2-289x-4913)=17x^2(x-17)-17x\left(289-\frac{4913}{x}\right)$.
726. $\frac{2x^2+5}{2x^2-5}+\frac{2x^2-5}{2x^2+5}=-\frac{58}{21}$. **727.** $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{256}{x^3-10x^4+9}=$
$=\frac{x^2+3}{x^2-3}+\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

(Art. 118). **728.** $x^6-262144=0$. **729.** $x^6+2985984=0$.
(Art. 120). **730.** $x^6+27=28x^3$. **731.** $x^6-10x^3=459$. **732** $x^8-97x^4+1296=0$.
733. $(x^4-3x^2+4)^2+6x^2(x^2-2)^2=160$. **734.** $(x^4+3)^2+(x^2+3)^2+(x^2-3)^2=411$.
(Art. 121). **735.** $x^4-13x^2+36=0$. **736.** $x^4+7x^2-144=0$. **737.** $x^4+41x^2+400=0$.
738. $x^4-33x^2+270=0$. **739.** $x^4-4x^2+1=0$. **740.** $x^4-6x^2+1=0$.
741. $x^4-6x^2-1=0$. **742.** $2x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}=20$. **743.** $\frac{1+x}{1-x+x^2}+\frac{1-x}{1+x+x^2}=a$.

Znaleźć pierwiastki równań wymiernych, do których dochodzimy z czterech następujących równań:
744. $\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1$. **745.** $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$.
746. $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{2}$ **747.** $\sqrt[4]{17+12x}+\sqrt[4]{17-12x}=2$.

748. Oznaczyć p w równaniu $x^2-px+15=0$ w ten sposób, aby różnica kwadratów obu pierwiastków była równa 16.

749. Ostrosłup prosty, którego powierzchnia boczna jest $144\,cm^2$, a krawędź boczna $10\,cm$, ma za podstawę trójkąt równoboczny. Jaki jest bok tego trojkąta?

750. Ostrosłup prosty, którego powierzchnia boczna jest $2800\,cm^2$, a wysokość $48\,cm$, ma za podstawę kwadrat. Jaki jest bok tego kwadratu?

751. Pole trójkąta ma $84\,m^2$, a dwa jego boki $13\,m$ i $15\,m$. Znaleźć trzeci bok tego trójkąta.

752. Dany jest prostokąt, którego boki są a i b. Określić boki równoważnego prostokąta, którego przekątna jest 2 razy większa od przekątnej danego prostokąta?

753. Na prostopadłej, wystawionej z punktu końcowego średnicy równej $15\,cm$, znaleźć punkt taki, iżby odcinek zewnętrzny siecznej łączącej ten punkt z drugim punktem końcowym średnicy był $16\,cm$.

754. Mając koło o promieniu r, poprowadzić koło spółśrodkowe tak, iżby pole nakreślonego koła było średnią geometryczną pola danego koła i pola pasa kołowego.

755. W trójkącie dwusieczna kąta przy wierzchołku dzieli podstawę na odcinki a i b, a wysokość trójkąta jest h. Znaleźć pozostałe boki trójkąta?

756. Z punktu oddalonego od prostej danej o 8 *cm* poprowadzono pochyłą tak, iż prostokąt wystawiony na niej i na jej rzucie na prostą daną ma pole 255 cm^2. Jaka jest długość owej pochyłej?

757. Pole trójkąta jest s^2, a boki przy wierzchołku a i b. Określić długość prostej, łączącej wierzchołek trójkąta ze środkiem podstawy?

758. Trójkąt równoramienny jest równoważny z trójkątem równobocznym o boku a, suma zaś kwadratów jego podstawy i jednego z pozostałych boków jest $2a^2$. Jaka jest podstawa tego trójkąta równoramiennego?

759. Wysokość graniastosłupa jest 18·5 *cm*, objętość 865·8 cm^3, a podstawa jest trójkątem równoramiennym, w którym każdy z równych boków ma długości 9·7 *cm*. Znaleźć podstawę tego trójkąta?

(Art. 125). **760.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$. **761.** $x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0$.
762. $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$. **763.** $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. **764.** $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$.
765. $x^3 - \frac{21}{4}x^2 + \frac{21}{4}x - 1 = 0$. **766.** $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
767. $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0$. **768.** $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$. **769.** $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$.
770. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$. **771.** $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 = 0$.
772. $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$. **773.** $x^4 - \frac{17}{4}x^2 + 1 = 0$. **774.** $x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$.
775. $6x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$. **776.** $x^4 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$.
777. $x^4 + 4x^3 - 4x - 1 = 0$. **778.** $x^4 - \frac{6}{7}x^3 + \frac{6}{7}x - 1 = 0$. **779.** $x^4 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{4}x - 1 = 0$.
780. $3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 = 0$. **781.** $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.
782. $x^5 + 10x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 10x + 1 = 0$. **783.** $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
784. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$. **785.** $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = 0$. **786.** $x^5 + x^4 + x + 1 = 0$.
787. $x^5 + 3x^4 + \frac{11}{4}x^3 + \frac{11}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$. **788.** $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$.
789. $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$. **790.** $x^5 - 3x^4 + 3x - 1 = 0$.
791. $x^6 - 4x^5 - 4x^4 + 4x^2 + 4x - 1 = 0$. **792.** $x^6 - 5x^5 + 7x^2 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.
793. $x^6 - x^2 + x^2 - 1 = 0$. **794.** $x^6 - \frac{35}{6}x^5 + \frac{28}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 + \frac{35}{6}x - 1 = 0$.
795. $x^6 - \frac{19}{3}x^5 + 11x^4 - 11x^2 + \frac{19}{3}x - 1 = 0$.

796. Rozwiązać równanie $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, kładąc $x = az$.

797. Przez wierzchołek kwadratu, którego bok jest 3 *cm*, jest tak poprowadzona prosta, iż jej odcinek, między jednym z dwu boków nie schodzących się w owym wierzchołku, a przedłużeniem drugiego z nich, jest równy 4 *m*. Znaleźć stosunek długości tego odcinka, przez owę prostą na boku kwadratu oddzielonego, który nie jest przyległy do boku przedłużonego, do długości boku kwadratu.

(Art. 127). **798.** $x^{\log x} = 10$. **799.** $4^{x^2-5x+14} = 65536$. **800.** $3.2^x = 4\sqrt[x]{9}$.
801. $x^{\log x - 2} = 0{\cdot}177828$. **802.** $x^{2+\log x} = 15{\cdot}2015$. **803.** $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$.
804. $3.4^{x+2} = 4.3^{\frac{3x+1}{2x}}$. **805.** $10000\,x^{[(\log x)^3 - 5\log x]} = 1$. **806.** $(10000\,x)^{[(\log x)^3 - 5\log x]} = 1$.
807. $(2x+1)^{\log(2x+1)-3} = \frac{1}{100}$. **808.** $\sqrt{2.3^{4x}+3} - \sqrt{3^{4x}+1} = 5$. **809.** $\sqrt{2^x+1} + \sqrt{2{\cdot}2^x - 7} = 6$.
810. $(\frac{5}{2})^{2x} - 3(\frac{5}{2})^{x+1} = -\frac{25}{2}$. **811.** $\sqrt[x+1]{2} = 3^{x+2}$. **812.** $e^x + e^{-x} = \frac{5}{2}$

ODPOWIEDZI.

3. $4ab(a^4 - a^3b - ab^3 + b^4)$. **4.** $\alpha) = \beta)$. **5.** $\frac{1}{1-x^2}$. **6.** $\alpha) = \beta)$. **7.** $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.
10. $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. **11.** $\frac{1}{12}(2a - b)$. **12.** $x = 1$, $y = 1$. **14.** 1841449. **15.** 152399025.
16. 780811249. **17.** 412252416. **18.** 900540081. **19.** 3466383376. **20.** 43046721.
21. 214358881. **22.** 33232930569601. **24.** 0·00015129. **25** 0·00273529. **26.** 100·2001.
29. $\frac{6305}{6561}$. **30.** $\frac{1156}{12321}$. **45.** 2498846293. **46.** 8754552981. **47.** 1371700960631. **48.** 531441.
49. 2985984. **50.** 134217728. **51.** 2357947691. **52.** 8·741816. **53.** 8·084294343.

54. β). $510\frac{909219}{1953125}$. **59.** $7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$. **60** $\frac{27a^9x^9}{8b^3y^6}$. **61.** $\frac{a+b}{a-b}$.

62. $\frac{1}{(1-a)^{14}}$. **63.** $\frac{1}{a^4+4a^2b+4b^2}$. **64.** $a^4-1+\frac{1}{4a^4}$. **65.** $27a^3+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{27a^3}$.

66. $\frac{b^{2p+n}}{a^{3p}c^{2q+3}}$. **68.** 1.2.3.4.5.6.7. **70.** $3^3.5.7$. **71.** $2^2.3$. **74.** 72. **75.** $6a^2b^2c^6d^5$.

76. $4a^2b^2c^4d^3$. **77.** $6(a^2-b^2)$. **81.** $2abc^2\sqrt{3ac}$. **82.** $2a^2b^pc^q\sqrt[3]{4abc^{q+2}}$.

83. $(a-2b)\sqrt[4]{3ab}$. **84.** $144\sqrt[3]{20}$. **85.** $2{\cdot}42\sqrt[3]{3}$. **86.** $1{\cdot}2\sqrt{0{\cdot}3}$. **87.** $\frac{a^2}{c^3d^5}$.

88. $\frac{2}{a}\sqrt[3]{b^2c}$. **89.** $\frac{12}{7}$. **90.** $bc^2\sqrt{a}$. **91.** $ac^2\sqrt[15]{a}\sqrt[3]{b^2}$. **92.** $3\sqrt[6]{7}\cdot\sqrt{2}$. **93.** $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[15]{2000}$

94. $2\sqrt[5]{3.7^4}$. **95.** $24\sqrt[4]{72\sqrt[3]{3}}$. **96.** $2\sqrt[5]{12}$. **97.** $\frac{12}{25}\sqrt[10]{\frac{(a-x)^3}{32m^{11}}}$. **98.** a^2b^4c.

99. $a^2b^2c^2\sqrt[12]{b^5c}$. **100.** $a^3b^3c^2d^5$. **101.** $\sqrt[6]{ab}$. **102.** $\sqrt[20]{\frac{b}{a}}$. **103.** $\sqrt[35]{\frac{a}{b^p}}$. **104.** $\sqrt[6]{\frac{c}{a^n}}$.

105 $\sqrt[15]{\frac{c^x}{b}}$. **106.** $\sqrt[3]{\frac{c}{ab}}$. **107.** 432. **108.** $\sqrt[99]{\frac{5}{3}}$. **109.** $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, i t. d.

111. $x=1{\cdot}2$. **112.** $x=3\sqrt{3}$. **113.** $x=a^2b$, $y=ab^2$. (Te liczby starożytni nazywali 2-ma średniemi proporcyonalnemi dwu sześcianów). **114.** β) Zob. w części I zadanie 302.

117. $9\frac{23}{37}\pi m^2$. **119** $14\sqrt{30}$. **120.** $2(ab\sqrt{c}+ac\sqrt{2b}+bc\sqrt{3a})$. **121.** $(5a+3\sqrt{a+b}).\sqrt{a-b}$

122. 0 **123.** $(a+10b)\sqrt{ab}$. **124.** $(a+2b+3c)\sqrt{mn}$. **125.** $5\sqrt{ab}$. **126.** $4\sqrt[3]{10}$.

127. $4(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$. **128.** $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3-x}$. **131.** $14-6\sqrt{5}$. **132.** $72-32\sqrt{5}$.

133. $ab(a+b+1)+2ab(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b})$. **134.** $1-2\sqrt{15}$ **135.** $21-6\sqrt{5}+6\sqrt{7}-2\sqrt{35}$.

136. -59. **137.** $135-53\sqrt{5}+49\sqrt{7}-18\sqrt{35}$. **138.** 30. **139.** $1+x^4$. **140.** $1+x^6$.

141. $\frac{c}{a}$. **142.** ax^2+bx+c. **143.** p^4-q^4. **144.** $x-y$. **145.** $-(2\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

146. $2(acx+bdy)$. **147.** 3. **148.** $3(2\sqrt[6]{2}-\sqrt[3]{4})$. **149.** $a-b$.

150. $30+12\sqrt[8]{2}+18\sqrt[6]{2}-24\sqrt[12]{2}$. **151.** $4ab-(a+b-c)^2$. **153.** $7-3\sqrt{5}$. **154.** $\sqrt{a}+\sqrt{ax}$.

155. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$. **156.** $a+\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt[4]{a^2b^2}+\sqrt[4]{ab^3}+b$. **157.** $\sqrt{a}+1$. **158** $\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}-3\sqrt[4]{b^3}$.

159. $2\left(\sqrt{1+x}-\frac{1}{x}\right)$. **160.** $-2(x^2+1)(x-1)$. **161.** $\frac{1}{6}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30})$.

162. $\frac{4a(a-1)}{a(a-1)^2-1}$. **163.** $\frac{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}+\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}{ab+ac+bc}$.

164. $\frac{15}{4}\sqrt{7}$. **165.** $\frac{2f}{a+b+c}$. **166.** (Przekątna kwadratu danego; cięciwa styczności koła stycznego do dwu boków kwadratu). $\frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$. **167.** $\frac{5}{12}(17+\sqrt{193})$. **168.** $\frac{2}{21}\sqrt{7}$.

169. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$. **170.** $\frac{3}{2}\sqrt{5}-\sqrt{3})$. **171.** $3(9+4\sqrt{3}+6\sqrt{5}-\sqrt{15})$.

172. $\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}$. **173.** $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$. **174.** $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

175. $27\sqrt[4]{3^3}-9\sqrt{3}+3\sqrt[4]{3}-1$.

176. $\frac{a^4+a^3\sqrt[4]{b}-a^3+a^2\sqrt[4]{b^2}-a^2\sqrt[4]{b}+a\sqrt[4]{b^3}-a\sqrt[4]{b^2}-\sqrt[4]{3}-1}{a^4-b}$.

177. $\frac{4a^2\sqrt{2a}-4a^2\sqrt[3]{3b}+2a\sqrt[6]{648a^3b^4}+6ab+36\sqrt[6]{72a^3b^2}+36\sqrt[3]{9b^2}}{8a^3-9b^2}$.

178. $\dfrac{a-\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt[4]{a^2b^2}-\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}$.

179. $\dfrac{c\left(\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5}\right)}{a-b}$. **180.** $1+\sqrt{2}$.

181. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\sqrt{10})$. **182.** $\sqrt{15}-\sqrt{10}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

183. $\frac{1}{1319}(323\sqrt{5}-84\sqrt{30}+203\sqrt{2}-94\sqrt{15}+8\sqrt{10}-153\sqrt{6}+447-77\sqrt{3})$.

184. 4. **185.** 45. **186.** 4. **187.** 1. **188.** 64. **189.** $a.\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^2$ **190.** $(b-a)^2$.

191. 3. **192.** $\frac{2}{3}$. **193.** $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{c^2}{c-1}+b\right)$. **194.** 4. **195.** $\frac{1}{9}$. **196.** 3. **197.** $9\frac{4}{5}$.

198. $\dfrac{c^3-b^3}{3ab(b-a)}$. **199** 9. **200.** 1. **201.** 9. **202.** 7. **203.** $\frac{4}{9}$. **204.** $-\dfrac{ab}{a+b}$.

205. $\dfrac{(b-a)^2}{2a-b}$. Przy sprawdzeniu przyjmujemy $2a>b>a$. **206.** $\frac{55}{19}$. **207.** $\frac{1235}{144}$.

208. 3. **209.** 8. **210.** 2. **211.** 2. Podstawiwszy w dane równanie i po podniesieniu obu stron równości, mającej wyrazy tylko dodatne, do kwadratu dojdziemy do tożsamości). **212.** -2. **213.** 1. **214.** 2. **215, 216** i **217.** Równania niemożliwe.

218. $x=16, y=25$. **219.** $x=4, y=9$. **220.** $x=y=1$. **221.** $x=11, y=7$. **222.** $x=2, y=1$.
223. $x=-64$, $y=1000$. **224.** $x=1$, $y=1$. **225.** $x=3$, $y=7$. **226.** $x=y=1$.
227. $x=2$, $y=3$. **228.** Układ równań niemożliwy. **229.** $2a^3-3ab^2-3b^3$.
230. $4a^3b^2-7a^2b^3-6ab^4+2b^5$. **231.** $\frac{2}{3}a^3b^2c^3-\frac{1}{3}a^2b^3c^2-ab^4c$. **232.** $2ab-3b^2$.
233. $a^2+2ab+b^2$. **235.** 69. **236.** 235. **237.** 467. **238.** 1345. **239.** 4489.
240. 7304. **241.** 26345. **242.** 58876. **243.** 115036. **244.** 187363267. **245.** 1·23.
246. 4·06. **247.** 1·304. **248.** 0·6502. **249.** 0·003205. **250.** 27. **251.** 8·1.
252. 1·6. **253.** 3·16 i 3·17. **254.** 3·872 i 3·873 **255.** 1·8973 i 1·8974. **256.** 0·9486 i 0·9487.
257. 0·97467 i 0·97468. **258.** 0·79372 i 0·79373 **259.** 3·52136 i 3·52137.
260. 0·088881 i 0·088882. **261.** $3\frac{5}{6}$ i $3\frac{11}{12}$ **262.** $1\frac{11}{12}$ i 2. **263.** $11\frac{1}{12}$ i $11\frac{1}{6}$.
264. $14\frac{1}{6}$ i $14\frac{1}{4}$. **265.** $6\frac{29}{35}$ i $6\frac{30}{35}$ **266.** $2\frac{26}{35}$ i $2\frac{27}{35}$. **267.** $3\frac{6}{35}$ i $3\frac{1}{5}$. **268.** $10\frac{4}{35}$ i $10\frac{1}{7}$.
269. $3a^2b^3-2cd^4$. **270.** a^2-2a+1. **271.** $2a^2-3ab+b^2$. **272.** $2a^2+4ab-3b^2$.
273. $2a^2-3ab+4b^2$. **274.** $a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3$. **275.** $a^4+a^3+a^2+1$. **276.** 56. **277.** 65.
278. 83. **279.** 112. **280.** 101. **281.** 401. **282.** 444. **283.** 753. **284.** 803.
285. 905. **286.** 1357. **287.** 2061. **288.** 3003. **289.** 11111. **290.** 20102. **291.** 3·6.
292. 0·96. **293.** 0·698. **294.** 1·854. **295.** 3·375. **296.** 0·015625. **297.** 103·823.
298. 95. **299.** 59. **300.** 14 i 15. **301.** 1·25 i 1·26. **302.** 2·57 i 2·58.
303. 0·307 i 0·308. **304.** 0·4431 i 0·4432. **305.** 3·3322 i 3·3323. **306.** 0·20800 i 0·20801.
307. 4·530654 i 4·530655. **308.** $\frac{7}{9}$ i $\frac{8}{9}$. **309.** 2 i $2\frac{1}{12}$. **310.** $4\frac{4}{12}$ i $4\frac{5}{12}$. **311.** $2\frac{3}{4}$ i $2\frac{5}{6}$.
312. $2\frac{1}{12}$ i $2\frac{1}{6}$. **313.** $4\frac{1}{7}$ i $4\frac{4}{21}$. **314.** $2\frac{19}{21}$ i $2\frac{20}{21}$. **315.** $2\frac{2}{7}$ i $2\frac{1}{3}$. **316.** $1\frac{1}{3}$ i $1\frac{8}{21}$.
317. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. **318.** $4a+6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+9b$. **319.** $a^2-3a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+4ab^{-1}-3a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+b^{-2}$.
320. $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{7}{6}}+a^{\frac{3}{2}}$. **321.** $4a+9b$. **322.** $81a^{\frac{4}{5}}+108a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+144a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}+192a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+256b^{\frac{4}{5}}$.
323. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{-1}$ **324.** $2a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{2}{3}}$. **325.** $a^{-\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$. **326.** $a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}$.
327. $a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{12}}-1)$. **328.** $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{2}{3}}$. **329.** α) 6; β) $4i$; γ) 15, -2; δ) $-\frac{1}{13}(5+i)$; ε) -10; ζ) -96. **330** $x^2_1+x^2_2+y^2_1+y^2_2$. **331.** α) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; β) $-1, 1$; γ) 0, 0. **332.** α) $x+\xi+i(y+\eta)$, $x-\xi+i(y-\eta)$, $x\xi-y\eta+i(\xi y+x\eta)$, $\dfrac{x\xi+y\eta+i(\xi y-x\eta)}{\xi^2+\eta^2}$; β) $x^2+\xi^2-y^2-\eta^2+2i(xy+\xi\eta)$, $x^2-\xi^2-y^2+\eta^2+2i(xy-\xi\eta)$. **333.** $-500+200$. **336.** 1·76233.
337. 1·74256. **338.** 141·873. **339** 1·20117. **340.** 1·25006. **341.** 0·595786.
342. 1·25944. **343.** 3440·17. **344.** 0·319707. **345.** 126·521 **346.** 64·501.
347. 0·27898. **348.** 15·5207. **349.** 15035·5. **350.** 1395·53. **351.** 16180·7.
352. 2·00018. **353.** 2·44389. **354.** 1. **355.** 3557·77. **356.** 0·0106295. **357.** 53·6738.
358. 0·257147. **359.** 0·00000170508. **360.** 3·60525. **361.** 1·24203. **362.** 0·85566.

363. $\log x = \frac{4}{9}\log 3 - \frac{3}{4}\log 5$, $x = 0\cdot487322$. **364.** 0·96186. **365.** 3·03027. **366.** 1·11739.
367. 0·695871. **368.** 0·75342. **369.** 2·207. **370.** 1·32139. **371.** 3·00000.
372. 1·61119. **373.** 2417·17. **374.** 100. **375.** 189·478. **376.** 2·07843. **377.** 2·0231.
378. 16076·7. **379.** $x=8$, $y=7$. **380.** 0·2821. **381.** 0·620357. **382.** 57°17′45″.
383. 11·5149 m^2. **384.** 4·948 g. **385.** $l = 0\cdot99383$. **386.** α) 1·72052 dm i 7·08583 dm; β) 1·08385 dm i 5·03087 dm^2. **387.** $5093\cdot10^3$, 1081.10^6. **388.** 3·09021. **389.** 1·92380.
390. 3201·23. **391.** 1·05363. **392.** 7 m^2. **393.** 146·183. **394.** $v = 47030$. **395.** 17·1535.
396. 4. **397.** 0·069815. **398.** 5. **399.** $\frac{\log c + a\log b - b\log a}{\log a - \log b}$. **400.** $\frac{\log(c-b^a) - b\log a}{\log a - \log b}$.
401. $3 + \frac{\log(b+1) - \log(a^2b-1)}{\log a}$. **402.** $\frac{1}{2}$. **403.** 0·35521. **404.** $-1\frac{7}{12}$. **405.** —0·87204.
406. 1·22756. **407.** 6·99983. **408.** $\frac{1}{4}$. **409.** $x=6$, $y=10$. **410.** $x=y=2$. **411.** $x=\frac{1}{2}$, $y=2$.
412. $x=7$, $y=121$. **413.** $x=2$, $y=-1$. **414.** $x=\frac{917}{127}$, $y=\frac{851}{127}$. **415.** $x=1$, $y=2$, $z=3$.
420. $\frac{ab}{a+b}$, 0. **421.** 0, $-a$. **422.** $\sqrt{-\frac{2}{15}}$, $-\sqrt{-\frac{2}{15}}$. **423.** 1, —1.
424. $\frac{i}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{i}{2}\sqrt{3}$. **425.** i, $-i$. **426.** $\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{a}$. **427.** $\frac{c}{a}i$, $-\frac{c}{a}i$.
428. $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^8}}$. **429.** $\frac{i}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{i}{2}\sqrt{2}$. **430.** 0, 0. **431.** 0, 0.
432. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$. **433.** $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{3}$. **434.** $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$. **435.** 2, $\frac{3}{4}$. **436.** 3, $-\frac{1}{2}$. **437.** 1, 5.
438. 2, 9. **439.** —15, —2. **440.** —15, —4. **441.** —16, 3. **442.** 13, —6.
443. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$. **444.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **445.** $-\frac{1}{5}$, $-\frac{4}{5}$. **446.** $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$. **447.** $\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$. **448.** $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{8}$.
449. $1+i$, $1-i$. **450.** $2+3i$, $2-3i$. **451.** $2+\frac{1}{3}i$, $2-\frac{1}{3}i$. **452.** $-3+\frac{1}{2}i$, $-3-\frac{1}{2}i$.
453. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$. **454.** $-1+\sqrt{\frac{8}{3}}$, $-1-\sqrt{\frac{8}{3}}$. **455.** $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
456. $-3+\sqrt{2}$, $-3-\sqrt{2}$. **457.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{15}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\sqrt{15}$. **458.** $-1+i\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-1-i\sqrt{\frac{2}{3}}$.
459. $2+i\sqrt{2}$, $2-i\sqrt{2}$. **460.** $-5+i\sqrt{2}$, $-5-i\sqrt{2}$. **461.** $3\sqrt{5}+4$, $3\sqrt{5}-4$.
462. $\frac{1}{2}\sqrt{3}+2$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-2$. **463.** $3\sqrt{5}+4i$, $3\sqrt{5}-4i$. **464.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-2i$.
465. $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$. **466.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$.
467. $2\sqrt{3}+i\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}-i\sqrt{5}$. **468.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}i\sqrt{2}$.
469. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{30}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{30}$. **470.** $\frac{1}{3}\sqrt{21}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{21}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
471. $2+\frac{1}{2}\sqrt{16+6\sqrt{2}}$, $2-\frac{1}{2}\sqrt{16+6\sqrt{2}}$. **472.** 1, $-\frac{3}{4}$. **473.** 2, $1\frac{3}{5}$. **474.** 1, $-\frac{15}{17}$.
475. $\frac{3}{2}c^2+\frac{5}{2}b\sqrt{a^2+c^2}$, $\frac{3}{2}c^2-\frac{5}{2}b\sqrt{a^2+c^2}$. **476.** $\frac{5}{2}a+3i\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{5}{2}a+3i\sqrt{a^2+b^2}$.
477. 1, 1. **478.** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$. **479.** $-\frac{b+c}{a}$, $-\frac{b-c}{a}$. **480.** $-d$, $-\frac{c}{b}$.
481. $10a-9b$, $\frac{ab}{a+b}$. **482.** a, b. **483.** a, b. **484.** 8, 12. **485.** $\frac{1}{2}$, —1. **486.** 28, —3.
487. 6, 3. **488.** 3, 2. **489.** $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$. **490.** 7, $-\frac{7}{9}$. **491.** 8, —8. **492.** 3, —5.
493. 3, $-\frac{4}{5}$. **494.** $6+8i$, $6-8i$. **495.** $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. **496.** 3, $\frac{29}{30}$.
497. 3, 2. **498.** $\frac{13}{3}$, 0. **499.** 2, $-\frac{2}{15}$. **500.** 2, $-6\frac{24}{37}$. **501.** 1, $\frac{3}{5}$. **502.** 24, $-8\frac{2}{3}$.
503. 3, 4. **504.** 3, 1. **505.** 1, 0. **506.** 2, 1. **507.** 2, 1. **508.** $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.
509. $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. **510.** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. **511.** 2, 1. **512.** 2, 1. **513.** $4+\sqrt{10}$, $4-\sqrt{10}$.
514. $1+\sqrt{8}$, $1-\sqrt{8}$. **515.** $4\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{201}$, $4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{201}$. **516.** $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{23}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{23}$.
517. 4, 5. **518.** 5, 6. **519.** $1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{2}$. **520.** a, $-a$. **521.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $-\sqrt{a^2+b^2}$.
522. b, $-2a-b$. **523.** $\sqrt{-\frac{abc}{a+b+c}}$, $-\sqrt{-\frac{abc}{a+b+c}}$
524. $-a+\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $-a-\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **525.** $-b+\sqrt{a^2+b^2}$, $-b-\sqrt{a^2+b^2}$. **526.** a, a.
527. $b+\sqrt{a^2+b^2}$, $b-\sqrt{a^2+b^2}$. **528.** $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2a}\sqrt{a^4-4}$, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2a}\sqrt{a^4-4}$.
529. $-a+\sqrt{ab}$ $-a-\sqrt{ab}$. **530.** $\frac{ac-bd+\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}}{ad-bc}$, $\frac{ac-bd-\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}}{ad-bc}$.
531. 3, 1. **532.** 2, 1. **533.** 4, 3. **534.** 2, 1. **535.** 3, 5. **536.** 2, 2. **537.** 0, $1\frac{3}{17}$.

538. 0, 1. **539.** $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$. **540.** $-2\frac{3}{4}$, -3. **541.** 2, -2. **542** $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. **543.** 2.
544. $-2\frac{3}{4}$. **545.** $-1\frac{3}{9}$. **546.** 2. **547.** 3. **548.** 2. **549.** 5. **550.** 4. **551.** 4.
552—559. Równania niemożliwe. **560.** $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$. **561.** $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$. **562.** a, $-a$.
563. Po podniesieniu obu stron do sześcianu wyłączyć z dwu wyrazów $\sqrt[3]{a^2-x^2}$ i uwzględnić równanie pierwotne; 0, 0. **564.** $-a+\sqrt{ab}$, $-a-\sqrt{ab}$. **565.** Postąpić podobnie, jak przy rozwiązywaniu zad. 563-go; 0. $-\frac{1}{9}a$. **566.** a. **567.** b. **568.** $\sqrt{ab}$.
569. $\frac{a}{9b}$. **570.** 5. **571.** a. **572.** $-\frac{1}{a}\sqrt{-\frac{1}{3}}$. **573—588.** Sprawdzić, rozwiązując otrzymane równania. **589.** α) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$, β) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$, γ) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$, δ) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}$. **590.** $\frac{p^4-d^2}{4p^2}$. **591.** Sprawdzić, rozwiązawszy równania.
592—605. Otrzymane liczby podstawić w zadania. **610.** $3\sqrt{2}$. **611.** $\sqrt{10}$. **612.** $2\sqrt{10}$, 2.
613. $\sqrt{30}$. **614.** $5\sqrt{2}$ i $\sqrt{-6}$. **615.** α) $\sqrt[4]{7\sqrt{2}}$; β) $i\sqrt{2}$; γ) 4; δ) $2\sqrt{2}$.
616. $5+\sqrt{3}$, $2+2\sqrt{3}$. **617.** $6+2\sqrt{2}$, $4+4\sqrt{2}$. **618.** $7+\sqrt{6}$, $-3-\sqrt{6}$.
619. $6-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **620.** $2 \pm (\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{6})$. **621.** $3 \pm i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
623. 77 i 91; -77 i -91. **624.** 40 i 20. **625** 15, 45 i 135; 125, -175 i 245.
626. 6 lub -6. **627.** Suma kwadratów wyrazów średnich jest różnicą między kwadratem sumy tych wyrazów a podwojonym iloczynem wyrazów skrajnych; $\frac{1}{2}(a+\sqrt{c^2-b^2})$ lub $\frac{1}{2}(a-\sqrt{c^2-b^2})$. **628.** 22 i 150; -150 i -22. **629.** 159 i 234.
630. 28 lub -28. **631.** $-\frac{1}{2}a(1-\sqrt{5})$ lub $-\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$. **632.** 15 *kg*. **633.** 810 *kg*.
634. $1\frac{1}{2}$ zł., $1\frac{3}{4}$ zł. **635.** 8 *m* po 15 zł. **636.** 96. **637.** 10 zł. **638.** 15 i 18. Dlaczego inna odpowiedź ($103\frac{5}{7}$ i $106\frac{5}{7}$) jest bezwarunkowo niemożliwa? **639.** 9-u. **640.** Ilość osób jest od 0 różna; 26 lub 4. **641.** 160 *kg* i 120 *kg*. **642.** 200. **643.** 21. **644.** Pierwsza 140, druga 120. **645.** 3 : 5. **646** W ciągu 3 godz. i w ciągu 5 godz. **647.** 5 *l*
648. 10 *hl*. **649.** A z 3600 *zł*., B z 3200 *zł*. **650.** 240 *kg*. kawy, 330 *kg*. cukru. **651.** 20%.
652. Ośmioro. **653.** 4%. **654.** 7% i 6%. **655.** $4\frac{1}{4}$%. **656.** 6%. **657.** Po dziewięciu miesiącach. **658.** Albo po 15%, albo po 20%. **659.** Po $\frac{\sqrt{c^2+2gs}-c}{g}$ sekundach.
660. Po $\frac{c-\sqrt{c^2-2gs}}{g}$ i po $\frac{c+\sqrt{c^2-2gs}}{g}$ sekundach. **661.** 50 sekund. **662.** Jeden w odległości 54, drugi w odległości 67·5 promieni ziemskich od środka ziemi.
663. A 11 *km*, B 10 *km*. **664.** 5 *km*. **665.** Idąca do A 36, albo 9 godz., do B 33, albo 6 godz. **666.** Odległość punktu spotkania się od A $17\frac{1}{2}$ mili. **667.** B 4 *km*, A 6 *km*.
668. W ciągu 182 *sek*. i w ciągu 70 *sek*. **669.** $3\frac{4}{7}$ *sek*. po owej chwili lub $9\frac{4}{13}$ przed nią.
670. Po $\frac{a(n+m+\sqrt{3mn})}{2(n^2-n.m+m^2)}$ *sek*. lub $\frac{a(n+m-\sqrt{3mn})}{2(n^2-n.m+m^2)}$ **671** Po 111 lub 566 *sek*.
672. Zewnętrznie po 9 i $14\frac{34}{41}$ *sek*., wewnętrznie po 11 i po $12\frac{34}{41}$ *sek*. od chwili wyjścia z początkowego położenia. **673.** $\sqrt{\frac{h}{2g}}(c+\sqrt{c^2+2hg})$. **674.** $\frac{v}{g}(tg+v-\sqrt{v^2+2vtg})$.
675. 16 *cm* i 24 *cm*. **676.** 3, 4 i 5. **677.** 25 boków. **678.** $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$.
679. $\frac{1}{2}(p-a+\sqrt{a^2+2ap-p^2})$ i $\frac{1}{2}(p-a-\sqrt{a^2+2ap-p^2})$. **680.** 1, 11. **681.** Szukane koła mogą przypadać po jednej, lub po drugiej stronie danej średnicy. Wielkości promieni kół wewnętrznych są: $-(r\mp a)+\sqrt{2r(\mp a)}$, kół zaś zewnętrznych: $r\pm a+\sqrt{2r(r\pm a)}$, gdzie jednocześnie należy brać albo znaki górne, albo też dolne.
682. 6, 12 i 16 *m*. **683.** Odległość płaszczyzny od środka kuli jest $r(\sqrt{2}-1)$.
684. Płaszczyzny są oddalone od środka kuli o $r(\sqrt{2}-1)$.
685. Gdy pole podstawy dolnej nazwiemy b (jest $b=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$), to wyrażenie szukanego

boku jest $\frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{3(4v-bh)}{bh}}\right)$. **686**. Gdy krawędź sześcianu a, to bok podstawy górnej $-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3(4-k)}{k}}$. **688**. Kwadrat o boku $\frac{1}{2}p$. **689**. Równoramienny. **690**. Prostokąt, którego pole jest połową pola trójkąta danego. **691**. Wysokość szukanego stożka jest równa dwu średnicom kuli. **692**. p i p. **693**. Równoboczny. **694**. Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, iż największą objętość ma sześcian. **695**. Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, iż największą objętość ma sześcian **696**. Ten którego bok, będący osią, jest dwa razy mniejszy od boku pozostałego. **697**. Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, że ten ma objętość największą, w którym stosunek średnicy podstawy do wysokości jest $\sqrt{2}$. **699**. Rozważając kwadrat pola trójkąta, znajdziemy, iż największe pole ma trójkąt równoboczny. **700**. Ten, którego wysokość jest trzecią częścią wysokości stożka. **701**. α) $-1<x<+1$; β) $x<-1$ lub $x>+1$; **702**. Przy $a=0$, przy $a<0$ nierówność niemożliwa; przy $a>0$, $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$.
703. $2<x<4$.. **704**. α) $x<4-\sqrt{31}$ lub $x>4+\sqrt{31}$ β) $4-\sqrt{31}<x<4+\sqrt{31}$.
705. α) x jekiekolwiek, β) nierówność niemożebna. **706**. 5, 2, -2. **707**. 3, 4, 1.
708. 5, 2, -2, 1. **709**. 4, 3, 1, -1. **710**. 2, -2, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ **711**. 3, -3, $2+3i$, $2-3i$. **712**. 0, 0. **713**. 0, 0. **714**. 0, 0, $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $-\sqrt{\frac{5}{3}}$. **715**. $\frac{r}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{m+q}{m+1}}\right)$.
716. Po $27l$. **720**. $-\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(1\mp i\sqrt{3})$. **721**. 4, $2(-1\pm i\sqrt{3})$.
723. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\mp 1\pm i)$ **724**. $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$. **725**. ± 17, $\pm 17i$. **726**. ± 1, $\pm i$.
727. $\pm\sqrt[4]{8}$, $\pm i\sqrt[4]{8}$. **730**. 3, 1, $\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$. **731**. 3, $\frac{3}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{17}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}(1\pm i\sqrt{3})$. **732**. ± 3, $\pm 3i$, ± 2, $\pm 2i$. **733**. ± 2, $\pm 2i$, $\frac{1}{2}\sqrt{6}(\pm 1\pm i)$.
734. ± 2, $+2i$, $\sqrt[4]{6}(\pm 1\pm i)$. **735**. ± 2, ± 3. **736**. $\pm 3\pm 4i$.
737. $\pm 4i\pm 5i$. **738**. $\pm\sqrt{15}$, $\pm 3\sqrt{2}$. **739**. $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. **740**. $\pm(\sqrt{2}\pm 1)$.
741. $\pm\sqrt{3\pm\sqrt{10}}$ **742**. Zamiast $\sqrt[3]{x}$ wstawić nową niewiadomą; ± 8, $\pm\frac{5}{4}i\sqrt{10}$.
743. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{3}{4}}}$ **744**. $\pm\sqrt{2\pm 2\sqrt{5}}$ **745**. 1, 16, $\frac{1}{2}(17\pm 69i\sqrt{55})$.
746. ± 1, $\pm i\sqrt{63}$ **747**. $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}i\sqrt{2}$. **748**. ± 8, $\pm 2i$ **749**. 12 *cm*, lub 16 *cm*.
750. 28 *cm*. **751**. $14m$ lub $4\sqrt{37}\ m$. **752**. $\sqrt{2(a^2+b^2)\pm\sqrt{4(a^2+b^2)^2-a^2b^2}}$.
753. 20 *cm*. **754**. $\frac{r}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2}$. **755**. Niech $a>b$; $\frac{a}{a-b}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-h^2(a-b)^2}}$, $a+b$. **756**. 17 *cm*. **757**. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4s^2}}$ **758**. $a\sqrt{\frac{3}{5}}$. **759**. 14·4*cm* lub 13*cm*.
760. -1, $2\pm\sqrt{3}$. **761**. -1, -2, $-\frac{1}{2}$. **762**. -1, -5, $-\frac{1}{5}$. **763**. $-2\pm\sqrt{3}$.
764. 1, $2\pm\sqrt{3}$. **765**. 1, 4, $\frac{1}{4}$. **766**. -1, -1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **767**. 1, 1, $-3\pm 2\sqrt{2}$.
768. $\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})$, $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10+2\sqrt{5}})$.
769. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{2-2\sqrt{5}})$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}})$. **770**. $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. **771**. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{-2\sqrt{3}})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}})$.
772. -1, -1, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}$. **773**. 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **774**. 2, $\frac{1}{2}$, $-2\pm\sqrt{3}$. **775**. 1, 1, $\frac{1}{12}(-5\pm i\sqrt{119})$. **776**. ± 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ **777**. ± 1, $-2\pm\sqrt{3}$. **778**. ± 1, $\frac{1}{7}(3\pm 2i\sqrt{10})$.
779. ± 1, $\frac{1}{8}(-9\pm\sqrt{17})$. **780**. ± 1, $\frac{1}{6}(7\pm\sqrt{13})$. **781**. -1, $\pm i$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$.
782. -1, 1, 1, $\frac{1}{2}(-11\pm 3\sqrt{13})$. **783**. -1, $-2\pm\sqrt{3}$ 1, 1. **784**. ± 1, 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$.
785. $+1$, 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. **786**. -1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1\pm i)$. **787**. -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15})$.
788. 1, 1, 1, $\pm i$. **789**. ± 1, $-1\pm i$. **790**. 1, $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}})$,

$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)$. **791.** ± 1, $\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$. **792.** 1, 1, ± 1, $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. **793.** ± 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(+1\pm i)$. **794.** ± 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$. **795.** 3, $\frac{1}{3}$, ± 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$. **796.** $\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{b^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{b^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. **797.** $\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$. **798.** 10, $\frac{1}{10}$. **799.** 3, 2. **800.** 2, $-1{\cdot}58496$. **801.** 3·16228, 31·6228. **802.** 3, $\frac{1}{300}$. **803.** 100, $\frac{1}{100}$. **804.** -1, 0·396245. **805.** 100, $\frac{1}{100}$, 10, $\frac{1}{10}$. **806.** $\sqrt{2}$ 1, $\frac{1}{10000}$, $10^{\sqrt{5}}$, $10^{-\sqrt{5}}$. **807.** $\sqrt{5}$, 49·5, 4.5. **808.** 0·25. **809.** 3. **810.** 1, 1·75652. **811.** $-0{\cdot}56142$, $-2{\cdot}43858$. **812.** $\pm 0{\cdot}69315$.

CZĘŚĆ TRZECIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z WIELU NIEWIADOMEMI.

RÓWNANIE Z WIELU NIEWIADOMEMI.

1. Gdy równanie z dwiema niewiadomemi (a więc nieoznaczone) jest stopnia 2-go, to, jeżeli owe niewiadome nazwiemy x i y, mogą w niem być tylko wyrazy zawierające x^2, x^1y^1, y^2, x^1, y^1, oraz wyrazy niezawierające niewiadomej. — Przeto kształt ogólny takiego równania zupełnego jest

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \tag{1}$$

Gdy w równaniu (1) jednej niewiadomej np. x nadamy wartość jakąkolwiek, np. $x=\alpha$, to ono przejdzie na równanie

$$cy^2+(b\alpha+e)y+a\alpha^2+d\alpha+f=0,$$

z którego, jako z równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, otrzymujemy dwie wartości y, odpowiadające owej jednej wartości $x=\alpha$. Nawzajem, jeżeli w równaniu (1) nadamy dowolną wartość niewiadomej y, to otrzymamy z niego dwie odpowiadające wartości niewiadomej x.

Rozważymy kilka przypadków szczególnych równania (1).

Z równania

$$y^2=2px$$

wypada $x=\dfrac{y^2}{2p}$, $y=\pm\sqrt{2px}$. Jeżeli $p>0$, to: przy każdej rzeczywistej wartości y otrzymujemy dodatną jedyną wartość x; przy każdej dodatnej wartości x otrzymujemy dwie rzeczywiste wartości y, różniące się od siebie tylko znakiem; przy $x=0$ otrzymujemy wartość $y=0$; nakoniec przy $x<0$ otrzymujemy dwie wartości y, obie urojone, różniące się od siebie tylko znakiem. Łatwo podobnie objaśnić przypadek $p<0$.

Gdy weźmiemy równanie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

to $x=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$, $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Przeto; przy wszelkich wartościach rzeczywistych y otrzymujemy dwie wartości rzeczywiste x różniące się od siebie tylko znakiem, ale nie otrzymujemy wartości rzeczywistych x, pośrednich między $-a$ i $+a$; przy $x=-a$, lub $x=+a$ mamy $y=0$; przy każdej zaś wartości rzeczywistej $x<-a$, lub $x>+a$, otrzymujemy dwie wartości y, różniące się tylko znakiem.

Ogólny kształt równania jednorodnego stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi jest

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Temu równaniu czyni zadość para wartości

$$x=0, \quad y=0.$$

Nie biorąc tych wartości na uwagę, możemy obie strony powyższego równania podzielić przez kwadrat jednej niewiadomej np. przez y^2; powstałe równanie $a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\frac{x}{y}+c=0$ rozwiązując względem niewiadomej $\frac{x}{y}$, znajdziemy

albo $x:y=-(b-\sqrt{b^2-4ac}):2a$, alboteż $x:y=-(b+\sqrt{b^2-4ac}):2a$.

2. Gdy mamy równanie stopnia 2-go z trzema niewiadomemi np.

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

to np. $z=\pm\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}$. Wartości zatem z będą rzeczywiste przy takich rzeczywistych wartościach x i y, przy których $x^2+y^2\leqq r^2$. Największą bezwzględnie z możliwych wówczas wartości x można wziąć przy $y=0$, i nawzajem największą bezwzględnie wartość y można wziąć przy $x=0$. A więc według tej nierówności x może się zmieniać, od wartości $x=-r$ wzrastając do wartości $x=+r$, i y może się zmieniać, od wartości $y=-r$ wzrastając do wartości $y=+r$; ale każde dwie jednocześnie wzięte wartości niewiadomych x i y mają być takie, iżby suma ich kwadratów nie była większa od r^2. Do podobnych wyników dojdziemy rozwiązawszy dane równanie względem x, lub względem y.

Weźmy równanie

$$y^2+z^2=2px,$$

w którem niech $p>0$. Widocznie przy wszelkich rzeczywistych wartościach każdej z niewiadomych y i z otrzymujemy dodatną wartość x. Ponieważ z tego równania $z=\pm\sqrt{2px-y^2}$, przeto: przy tak dobranych wartościach rzeczywistych y (i dodatnych x), iż $2px>y^2$, otrzymujemy dwie rzeczywiste różniące się znakiem wartości z; przy $y^2=2px$, otrzymujemy $z=0$; nakoniec, przy wartościach ujemnych x, jakoteż przy wartościach dodatnych $x<\frac{y^2}{2p}$, obie wartości z są urojone.

UKŁAD DWU RÓWNAŃ Z DWIEMA NIEWIADOMEMI.

3. Weźmy układ dwu równań stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi w kształcie ogólnym,

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Moglibyśmy jedno z nich, np. drugie, rozwiązać względem jednej niewiadomej, np. y, przedstawiając je uprzednio w kształcie

$$c_2y^2+(b_2x+e_2)y+(a_2x^2+d_2x+f_2)=0,$$

a następnie otrzymane dwa wyrażenia y kolejno podstawić w pierwsze z tych równań. Unikniemy jednak pierwiastków kwadratowych, pod których znakiem jest niewiadoma x, postępując inaczej. Pomnóżmy mianowicie pierwsze z równań (1) przez c_2, drugie zaś przez $-c_1$, dodajmy je do siebie stronami odpowiedniemi, a tak otrzymane równanie rozwiążmy względem y,

$$y = -\frac{(a_1c_2 - a_2c_1)x^2 + (c_2d_1 - c_1d_2)x + (c_2f_1 - c_1f_2)}{(b_1c_2 - b_2c_1)x + (c_2e_1 - c_1e_2)}. \qquad (2)$$

To równanie i którekolwiek z równań układu danego tworzą układ równoznaczny z danym. Podstawiając otrzymane wyrażenie y w jedno z równań danych, np. w pierwsze otrzymamy, po zniesieniu mianowników, równanie

$$mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

w którem pierwszy spółczynnik jest

$$m = a_1(b_1c_2 - b_2c_1)^2 - b_1(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1) + c_1(a_1c_2 - a_2c_1)^2, \qquad (3)$$

a następne są podobnemi wyrażeniami, również całkowitemi względem spółczynników równań (1), jak o tem przekonać się można. W razie więc, kiedy spółczynniki rownań (1) są liczbami wymiernemi, spółczynniki równania (3) są także liczbami wymiernemi.

Rozwiązaniem równania (3) zajmiemy się tylko w niektórych przypadkach szczególnych. Prócz przypadków: α) kiedy redukuje się ono do równania stopnia 1-go, lub kiedy daje się rozłożyć na równanie stopnia 1-go i na równanie, mające tylko pierwiastek $x=0$ ($m=n=p=0$; $m=n=r=0$; $m=q=r=0$; $p=q=r=0$), β) kiedy redukuje się do równania stopnia 2-go lub równania, dającego się rozłożyć na równanie stopnia 2-go i na równanie, mające tylko pierwiastek $x=0$ ($m=n=0$; $m=r=0$; $q=r=0$), możemy sposobami poprzednio wyłożonemi rozwiązać równanie (3), kiedy γ) $n=q=0$, δ) $m=p=q=0$, lub $n=p=r=0$, ε) $n=p=q=0$, ζ) $m=0$, $n=r$, $p=q$, lub $m=q$, $n=p$, $r=0$, η) $m=0$, $n=-r$, $p=-q$, lub $m=-q$, $n=-p$, $r=0$, ϑ) $m=r$, $n=q$, ι) $m=-r$, $n=-q$, $p=0$. Np.

$$\begin{cases} 18x^2 - 3xy - y^2 + 9x - 18y - 65 = 0, \\ 99x^2 + 6xy - 70y^2 - 99x + 198y - 338 = 0. \end{cases}$$

Po wyrównaniu spółczynników y^2 i odjęciu od siebie tych równań stronami odpowiedniemi, dochodzimy do równania $-43x^2+8xy-27x+54y+156=0$ z którego

$$y = -\frac{43x^2 + 27x - 156}{8x + 54}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia y w którekolwiek z danych równań, otrzymamy równanie

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

odpowiadające przypadkowi γ. Po rozwiązaniu tego równania i znalezieniu odpowiadających jego pierwiastkom wartości y z poprzedniego wyrażenia tej niewiadomej przez niewiadomą x, otrzymamy 4 pary pierwiastków danego układu równań,

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\quad x_2 = -2,\ y_2 = -1;\quad x_3 = 3,\ y_3 = 4;\quad x_4 = -3,\ y_4 = 5.$$

4. α). Jeżeli mamy układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno stopnia 2-go, pozostałe zaś stopnia 1-go, to, wyraziwszy z równania stopnia 1-go jedną niewiadomą i podstawiwszy to wyrażenie w pozostałe równanie, otrzymamy równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, po którego rozwiązaniu znajdziemy z wyrażenia pierwszej niewiadomej odpowiednie jej wartości.

β) Jeżeli mamy układ

$$\begin{cases} b_1 xy + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0, \\ b_2 xy + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0. \end{cases}$$

to np. z drugiego równania mamy

$$y = -\frac{d_2 x + f_2}{b_2 x + e_2},$$

co podstawiając w pierwsze otrzymujemy

$$(b_1 d_2 - b_2 d_1)x^2 + (b_1 f_2 - b_2 f_1 + d_2 e_1 - d_1 e_2)x + (e_1 f_2 - e_2 f_1) = 0.$$

5. 1). $$\begin{cases} x + y = s, \\ xy = t. \end{cases}$$

Ten układ odpowiada rozwiązanemu w części II (art. 101) zadaniu: mając sumę dwu liczb i ich iloczyn, znaleźć te liczby. Zamiast jednak, uważając niewiadome za pierwiastki równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, tworzyć owo równanie, możemy inaczej postąpić. Po podniesieniu obu stron równania pierwszego do kwadratu odejmiemy stronami odpowiedniemi równanie drugie, pomnożywszy je uprzednio przez 4; otrzymamy

$$(x - y)^2 = s^2 - 4t, \quad \text{skąd} \quad x - y = \pm\sqrt{s^2 - 4t}.$$

Biorąc w tem równaniu $+\sqrt{s^2 - 4t}$, otrzymamy z niego i z pierwszego z równań danych, jako z układu dwu równań stopnia 1-go, $x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4t})$, $y = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4t})$. Gdybyśmy zaś wzięli $-\sqrt{s^2 - 4t}$, to w ten sposób otrzymalibyśmy odwrotnie: $x = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4t})$, $y = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4t})$. Dane bowiem dwa równania były takie, iż w nich można było przestawić z sobą niewiadome x i y, czyli, jak mówimy, były »symetryczne« względem tych niewiadomych.

2). $$\begin{cases} x - y = a, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Kładąc $y = -\eta$ i mnożąc obie strony równania drugiego przez -1, sprowadzimy zadanie do zadania poprzedzającego.

3). $$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = b. \end{cases}$$

Pomnożywszy obie strony równania drugiego przez 2 i dodawszy do stron odpowiednich pierwszego znajdziemy $x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}$ i temsamem sprowadzimy zadanie do zadania pod 1). Otrzymamy tu cztery wartości x i cztery odpowiadające wartości y; z tych czterech par wartości z powodu symetryczności równań danych, dwie pary są przestawionemi wartościami pozostałych dwu par.

4).
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$$

Szukajmy wartości x^2 i y^2; względem nich te równania są stopnia pierwszego; jest więc $x^2 = \frac{1}{2}(a+b)$, $y^2 = \frac{1}{2}(a-b)$, a zatem $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)}$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)}$, a przy każdej z dwu wartości x można wziąć każdą z dwu wartości y, tak iż mamy tu cztery pary pierwiastków.

5).
$$\begin{cases} x^2 + xy = ay, \\ y^2 + xy = bx. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $x = \frac{y^2}{b-y}$, co podstawiając w pierwsze, otrzymujemy równanie
$$(a-b)y^3 - 2aby^2 + ab^2y = 0,$$
które ma pierwiastki $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{ab + b\sqrt{ab}}{a-b}$, $y_3 = \frac{ab - b\sqrt{ab}}{a-b}$, co podstawiając kolejno w poprzednie wyrażenie x, otrzymamy
$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{-ab - a\sqrt{ab}}{a-b}, \quad x_3 = \frac{-ab + a\sqrt{ab}}{a-b}.$$

6. Niekiedy bywa dogodne wprowadzenie nowej niewiadomej, jako pomocniczej, co objaśnimy na przykładzie.
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy + 2y^2 = 60, \\ 6x^2 + 4xy + 3y^2 = 75. \end{cases}$$

Kładąc w tych równaniach $y = tx$, otrzymamy
$$\begin{cases} x^2(3 + 5t + 2t^2) = 60, \\ x^2(6 + 4t + 3t^2) = 75. \end{cases} \qquad (\alpha)$$

Pomnożywszy obie strony pierwszego z równań (α) przez 5, drugiego zaś przez 4, odejmiemy je od siebie stronami odpowiedniemi i dojdziemy do równania
$$x^2(2t^2 - 9t + 9) = 0. \qquad (\beta)$$

Gdyby było $x = 0$, to ponieważ $y = tx$, byłoby także $y = 0$; para zaś wartości $x = 0$ i $y = 0$ nie czyni zadość układowi równań danych; możemy więc obie strony równania (β) podzielić w tym razie przez x^2 i zastąpić je przez równanie $2t^2 - 9t + 9 = 0$; $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Te wartosci t podstawiając w pierwsze z równań (α), otrzymamy

$x^2 = \frac{5}{3}$, skąd $x_1 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, oraz $x^2 = 4$, skąd $x_3 = +2$, $x_4 = -2$. Podstawiając zaś w równanie $y = tx$ raz $t = t_1$ i przytem $x = x_1$ i $x = x_2$, otrzymamy
$$y_1 = 3\sqrt{\tfrac{5}{3}}, \quad y_2 = -3\sqrt{\tfrac{5}{3}},$$
drugim razem $t = t_2$ i przytem $x = x_3$ i $x = x_4$, otrzymamy
$$y_3 = 3, \quad y_4 = -3.$$

Mamy zatem cztery pary wartości x i y czyniących zadość danemu układowi równań.

7. Weźmy jeszcze na uwagę szczególne układy dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest stopnia 2-go, a pozostałe stopnia 1-go (art. 4, α).

1).
$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y\eta = p(x+\xi), \end{cases}$$

$$y = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}, \quad x = \frac{1}{p}(\eta^2 - p\xi \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie, a dolne sobie, tak iż dane równania mają dwie pary pierwiastków. Jeżeli liczby p, ξ i η są takie, iż $\eta^2 < 2p\xi$, to układ danych równań nie ma rozwiązania rzeczywistego. Jeżeli $\eta^2 > 2p\xi$, układ dany ma dwa rozwiązania rzeczywiste. Jeżeli nakoniec $\eta^2 = 2p\xi$, jedna tylko para wartości $x = \xi$, $y = \eta$ równaniom danego układu czyni zadość.

2).
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{\xi x}{a^2} + \dfrac{\eta y}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$x = \frac{a^2b^2\xi \pm a^2\eta\sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2b^2}}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2}, \quad y = \frac{a^2b^2\eta \mp b^2\xi\sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2b^2}}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2},$$

gdzie z podwójnych znaków należy brać albo jednocześnie górne, alboteż jednocześnie dolne, tak iż dany układ ma dwie pary pierwiastków. Jeżeli a, b, ξ i η, są takiemi liczbami, iż $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} < 1$, tak obie wartości ξ, jak i obie wartości η są zespolone. Jeżeli zaś $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} > 1$, obie pary pierwiastków są rzeczywiste. W razie nakoniec, kiedy $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$, danemu układowi czynią zadość wartości $x = \xi$, $y = \eta$.

UKŁAD TRZECH RÓWNAŃ Z TRZEMA NIEWIADOMEMI I T. D.

8. Możemy łatwo rozwiązywać niektóre prostsze układy trzech równań stopnia 2-go z trzema niewiadomemi, czterech równań stopnia 2-go z czterema niewiadomemi i t. d.

1).
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4. \end{cases}$$

Z tych równań, które są stopnia 1-go względem x^2, y^2, z^2, znajdziemy

$$x = \pm 3, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 2.$$

Tu przy każdej z dwu wartości x należy wziąć każdą z dwu wartości y i każdą z dwu wartości z, a więc danym równaniom czyni zadość osiem trójek liczb.

2).
$$\begin{cases} xy + xz = a, \\ xy + yz = b, \\ xz + yz = c. \end{cases}$$

Od sumy dwu z tych równań odejmując pozostałe stronami odpowiedniemi, znajdziemy

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2}(a+b-c), \\ xz = \frac{1}{2}(a+c-b), \\ yz = \frac{1}{2}(b+c-a); \end{cases}$$

iloczyn każdych dwu z tych równań dzieląc przez równanie pozostałe, znajdziemy

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{2(b+c-a)}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{b^2-(c-a)^2}{2(a+c-b)}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{2(a+b-c)}},$$

gdzie z podwójnych znaków należy tu brać jednocześnie górne i jednocześnie dolne, tak iż równaniom danym czynią zadość dwie trójki liczb.

3). Mając rozwiązać równanie

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{8x+15},$$

możemy wprowadzić oznaczenia

$$\sqrt{2x+3}=y, \quad \sqrt{2x+5}=z, \quad \sqrt{8x+15}=u$$

i znaleźć wartość jednej z tych niewiadomych pomocniczych.

$$\begin{cases} 2x+3=y^2, \\ 2x+5=z^2, \\ 8x+15=u^2, \\ y+z=u, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2-y^2=2, \\ u^2-4y^2=3, \\ y+z=u, \end{cases} \quad \begin{cases} u^2-2uy=2, \\ u^2-4y^2=3, \end{cases} \quad u^2=4.$$

Jest zatem

$$8x+15=4, \quad \text{skąd } x=-\tfrac{11}{8},$$

a ta wartość x jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego.

ROZDZIAŁ DRUGI.

UŁAMKI CIĄGŁE.

WPROWADZENIE UŁAMKÓW CIĄGŁYCH.

9. Gdy mamy liczbę Q dodatną niecałkowitą, t. j. albo wymierną ułamkową, alboteż niewymierną, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w Q, nazwawszy q_1, będziemy mieli $Q=q_1+r_1$, gdzie $r_1<1$; alboteż, odwrotność liczby r_1 nazwawszy ρ_1, będziemy mieli $Q=q_1+\dfrac{1}{\rho_1}$, gdzie $\rho_1>1$. Jeżeli ρ_1 nie jest liczbą całkowitą, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w ρ_1 nazwawszy q_2, będziemy mieli $\rho_1=q_2+r_2$, gdzie $r_2<1$; albo $\rho_1=q_2+\dfrac{1}{\rho_2}$, gdzie $\rho_2>1$. Jeżeli ρ_2 nie jest liczbą całkowitą, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w ρ_2, nazwawszy q_3, będziemy mieli $\rho_2=q_3+r_3$, gdzie $r_3<1$; albo $\rho_2=q_3+\dfrac{1}{\rho_3}$, gdzie $\rho_3>1$. I t. d.

Zdarzyć się mogą dwa przypadki, albo któraś z liczb $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \cdots$, np. ρ_{m-1}, jest już liczbą całkowitą, a wtedy $\rho_{m-1}=q_m$, alboteż żadna z owych liczb nie jest liczbą całkowitą, tak iż ciąg równości $\rho_{m-1}=q_m+\dfrac{1}{\rho_m}, \cdots$ jest nieograniczony.

Z równości

$$Q = q_1 + \frac{1}{\rho_1},\quad \rho_1 = q_2 + \frac{1}{\rho_2},\quad \rho_2 = q_3 + \frac{1}{\rho_3},\ldots,$$

odpowiednio do tego, czy dochodzimy do liczby ρ_{m-1} całkowitej, czyteż nie, otrzymujemy wyrażenie skończone lub nieskończone liczby Q,

$$Q = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{q_m}}}} \quad (1) \qquad Q = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{q_m + \cdots}}}} \quad (2)$$

Takie, czyto skończone, czyteż nieskończone, wyrażenie liczby Q nazywamy ułamkiem ciągłym (Kettenbruch) i mówimy, że liczba Q jest »rozwinięta na ułamek ciągły«. W nim liczby q_1, q_2, $q_3,\ldots$, całkowite i dodatne, z których tylko liczba q_1 może być równa zeru, nazywają się ilorazami niezupełnemi $\left(\text{Nenner der Glieder } \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3},\ldots\right)$. Nawet w razie, kiedy $q_1 = 0$, nazywać będziemy q_2 drugim, q_3 trzecim,... ilorazem niezupełnym.

Ułamek ciągły jestto szczególne wyrażenie ułamkowe mające w mianowniku sumę liczby całkowitej i ułamka, którego mianownik jest znowu takąż sumą liczby całkowitej i ułamka i t. d. Rozważać tu będziemy tylko przypadek, kiedy liczniki owych ułamków są równe 1.

Np. $\frac{137}{51} = 2 + \frac{35}{51}$, $\frac{51}{35} = 1 + \frac{16}{35}$, $\frac{35}{16} = 2 + \frac{3}{16}$, $\frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$; 3.

Jest więc

$$\frac{137}{51} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}} \quad (3)$$

Tu
$$\begin{aligned} 137 &= 51\times 2 + 35,\\ 51 &= 35\times 1 + 16,\\ 35 &= 16\times 2 + 3,\\ 16 &= 3\times 5 + 1,\\ 3 &= 1\times 3;\end{aligned}$$

t. j. »ilorazy niezupełne« otrzymaliśmy stosując do licznika i mianownika danej liczby ułamkowej sposób poszukiwania największego ich spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, co usprawiedliwia ich nazwę.

Gdy mamy np. $\sqrt{18}$, który jest liczbą pośrednią między 4 a 5, to, kładąc $\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{\rho_1}$, mieć będziemy $\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{18} - 4} = \frac{\sqrt{18}+4}{2}$. Ta liczba jest pośrednia między 4 i 5, a więc możemy przyjąć $\frac{\sqrt{18}+4}{2} = 4 + \frac{1}{\rho_2}$, skąd mamy $\rho_2 = \frac{2}{\sqrt{18}-4} = \sqrt{18}+4$. Ta znowu liczba jest pośrednia między 8 a 9; jest więc $\sqrt{18}+4 = 8 + \frac{1}{\rho_3}$, skąd $\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{18}-4}$. Otrzymaliśmy $\rho_3 = \rho_1$; a więc, kładąc $\rho_3 = 4 + \frac{1}{\rho_4}$, mieć będziemy $\rho_4 = \rho_2$ i t. d. Otrzymujemy więc jako rozwinięcie liczby $\sqrt{18}$,

$$\sqrt{18}=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cdots}}}},\tag{4}$$

ułamek ciągły nieskończony, w którym wciąż powtarzać się będą drugi i trzeci (q_2 i q_3) ilorazy niezupełne.

Zastosujmy to postępowanie do szukania np. logarytmu zwyczajnego liczby 6, t. j. znajdźmy $x=\log 6$. Ponieważ $10^x=6$, przeto x jest liczbą pośrednią między 0 i 1; kładąc $x=\frac{1}{\rho_2}$, mamy $10^{\frac{1}{\rho_2}}=6$, czyli $6^{\rho_2}=10$. Tu ρ_2 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_2=1+\frac{1}{\rho_3}$, mamy $6^{1+\frac{1}{\rho_3}}=10$, $6^{\frac{1}{\rho_3}}=\frac{5}{3}$, czyli $\left(\frac{5}{3}\right)^{\rho_3}=6$. Tu ρ_3 jest liczbą pośrednią między 3 i 4. Kładąc $\rho_3=3+\frac{1}{\rho_4}$, mamy $\left(\frac{5}{3}\right)^{3+\frac{1}{\rho_4}}=6$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\rho_4}}=\frac{162}{125}$, czyli $\left(\frac{162}{125}\right)^{\rho_4}=\frac{5}{3}$. Tu ρ_4 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_4=1+\frac{1}{\rho_5}$, mieć będziemy $\left(\frac{162}{125}\right)^{1+\frac{1}{\rho_5}}=\frac{5}{3}$ $\left(\frac{162}{125}\right)^{\frac{1}{\rho_5}}=\frac{625}{486}$, czyli $\left(\frac{625}{486}\right)^{\rho_5}=\frac{162}{125}$. Tu ρ_5 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_5=1+\frac{1}{\rho_6}$, mamy $\left(\frac{625}{486}\right)^{1+\frac{1}{\rho_6}}=\frac{162}{125}$, $\left(\frac{625}{486}\right)^{\frac{1}{\rho_6}}=\frac{78732}{78125}$, czyli $\left(\frac{78732}{78125}\right)^{\rho_6}=\frac{625}{486}$. Tu ρ_6 jest liczbą pośrednią między 32 i 33. Kładąc $\rho_6=32+\frac{1}{\rho_7}$ mieć będziemy, i t. d. Jest więc

$$\log 6=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32+\cdots}}}}}\tag{5}$$

UŁAMKI ZBLIŻONE.

10. Mając ułamek ciągły, jak (1) lub (2) w art. 9-ym, możemy w nim zatrzymać się na którymkolwiek ilorazie niezupełnym, odrzuciwszy całą dalszą część ułamka. Nazwijmy odpowiednio:

$$\frac{L_1}{M_1}=q_1,\quad \frac{L_2}{M_2}=q_1+\frac{1}{q_2},\quad \frac{L_3}{M_3}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}\ \ldots,\quad \frac{L_n}{M_n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}$$

Te ułamki $\frac{L_1}{M_1}$, $\frac{L_2}{M_2}$, $\frac{L_3}{M_3}$ nazywać będziemy ułamkami zbliżonemi (Näherungsbrüche) albo reduktami danego ułamka ciągłego.

Mamy tu:

$$\frac{L_1}{M_1}=\frac{q_1}{1},\quad \frac{L_2}{M_2}=\frac{q_1q_2+1}{q_2},\quad \frac{L_3}{M_3}=\frac{(q_1q_2+1)q_3+q_1}{q_2\cdot q_3+1}=\frac{L_2q_3+L_1}{M_2q_3+M_1},$$

t. j. ułamek $\frac{L_3}{M_3}$ powstał z dwu poprzednich w ten sposób, iż jego wyrazy (licznik i mianownik) są sumami odpowiednich wyrazów ułamka $\frac{L_2}{M_2}$ pomnożonych przez iloraz niezupełny q_3 i odpowiednich wyrazów ułamka $\frac{L_1}{M_1}$.

Dowiedziemy zapomocą indukcyi, że takie prawo powstawania ułamka zbliżonego z dwu poprzedzających go ułamków zbliżonych jest ogólne. Dowiedziemy przeto, że jeżeli np. $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}=\frac{L_{n-2}\cdot q_{n-1}+L_{n-3}}{M_{n-2}\cdot q_{n-1}+M_{n-3}}$ to jest również $\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-1}\cdot q_n+L_{n-2}}{M_{n-1}\cdot q_n+M_{n-2}}$. Jakoż, ponieważ z ułamka zbliżonego $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, biorąc w nim $q_{n-1}+\frac{1}{q_n}$ zamiast q_{n-1}, otrzymujemy $\frac{L_n}{M_n}$, jest

$$\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-2}\left(q_{n-1}+\frac{1}{q_n}\right)+L_{n-3}}{M_{n-2}\left(q_{n-1}+\frac{1}{q_n}\right)+M_{n-3}}=\frac{(L_{n-2}q_{n-1}+L_{n-3})q_n+L_{n-2}}{(M_{n-2}q_{n-1}+M_{n-3})q_n+M_{n-2}},$$

t. j.

$$\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-1}q_n+L_{n-2}}{M_{n-1}q_n+M_{n-2}}.$$

A zatem, jeżeli owo prawo jest prawdziwe dla ułamka $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, to jest także prawdziwe dla ułamka $\frac{L_n}{M_n}$. Widzieliśmy zaś wprost, że według tego prawa powstaje ułamek $\frac{L_3}{M_3}$ z dwu poprzednich. W takiż więc sposób powstaje $\frac{L_n}{M_n}$ z dwu poprzednich.

Ogólnie więc *wyrazy ułamka zbliżonego są sumami odpowiednich wyrazów poprzedniego ułamka zbliżonego pomnożonych przez ostatni iloraz niezupełny i odpowiednich wyrazów ułamka zbliżonego, tamten poprzedzającego.*

Z tego prawa tworzenia wyrazów ułamków zbliżonych wynika, iż te wyrazy są liczbami całkowitemi i dodatnemi, a nadto, że $L_n > L_{n-1}$ i $M_n > M_{n-1}$.

Np. kolejne ułamki zbliżone ułamka ciągłego (3) art. 9-go są

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{3.2+2}{1.2+1}=\frac{8}{3},\ \frac{8.5+3}{3.5+1}=\frac{43}{16},\ \frac{43.3+8}{16.3+3}=\frac{137}{51}.$$

UŁAMEK CIĄGŁY SKOŃCZONY.

11. Jeżeli mamy ułamek ciągły skończony, w którym ostatni iloraz niezupełny jest q_m, to według powyższego prawa utworzony ułamek zbliżony $\frac{L_m}{M_m}$ przedstawia ten ułamek zwyczajny, który został rozwinięty na ów ułamek ciągły. W ten więc sposób można, mając dany ułamek ciągły skończony, zawsze dokładnie wyznaczyć liczbę, którą ów ułamek ciągły przedstawia.

Z tego wprost wynika, że *ułamek ciągły skończony przedstawia liczbę wymierną ułamkową.*

Nawzajem *ułamek ciągły przedstawiający liczbę wymierną ułamkową jest skończony,* co wynika wprost z tego, że rozwinięcie takiej liczby na ułamek ciągły dokonywa się przez stosowanie sposobu poszukiwania największego spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, a więc ilość dzieleń, a temsamem ilość otrzymanych ilorazów niezupełnych jest ograniczona.

WŁASNOŚCI UŁAMKÓW ZBLIŻONYCH.

12. Wziąwszy wyrażenie $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n$ i podstawiwszy w niem $L_n = L_{n-1} q_n + L_{n-2}$, $M_n = M_{n-1} q_n + M_{n-2}$, mieć będziemy $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (L_{n-1} q_n + L_{n-2}) M_{n-1} - L_{n-1}(M_{n-1} q_n + M_{n-2}) = -(L_{n-1} M_{n-2} - L_{n-2} M_{n-1})$. Wskutek tego $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^2 (L_{n-2} M_{n-3} - L_{n-3} M_{n-2})$ i t. d. Nakoniec $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^{n-2}(L_2 M_1 - L_1 M_2)$. Lecz

$L_2 M_1 - L_1 M_2 = (q_1 q_2 + 1) 1 - q_1 \cdot q_2 = 1$, zaś $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, a więc

$$L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^n. \tag{1}$$

Gdyby liczby L_n i M_n miały spólny dzielnik większy od 1, to miałyby go również wielokrotności tych liczb, $L_n M_{n-1}$ i $L_{n-1} M_n$, a więc także ich różnica byłaby przezeń podzielna, t. j. byłaby przezeń podzielna liczba $+1$ lub -1. Zatem otrzymany według prawa wypowiedzianego w art. 10-ym *ułamek zbliżony jest w postaci nieskracalnej.*

13. Ze wzoru (1) wynika

$$\frac{L_n}{M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{M_n M_{n-1}}, \tag{2}$$

t. j. *wartość bezwzględna różnicy między dwoma po sobie następującemi ułamkami zbliżonemi jest równa odwrotności iloczynu ich mianowników.*

14. Ponieważ $M_n > M_{n-1} > M_{n-2} > \ldots$ (art. 10), przeto *wartość bezwzględna różnicy między parą po sobie następujących ułamków zbliżonych, wmiarę jak je bierzemy coraz dalsze, coraz się zmniejsza.*

Ze wzoru (2) wynika, że przy n parzystem różnica po stronie lewej jest dodatna, zaś przy n nieparzystem ujemna, t. j. *ułamek zbliżony ze wskaźnikiem parzystym jest większy tak od poprzedzającego jak i od następującego ułamka zbliżonego,* zaś *ułamek zbliżony ze wskaźnikiem nieparzystym jest mniejszy tak od poprzedzającego jak i od następnego ułamka zbliżonego.*

Jeżeli w ułamku ciągłym (1) lub (2) art. 9-go całą jego część od pewnego ilorazu q_k do końca nazwiemy Q', t. j. $Q' = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \cdots}$, to w wyrażeniu k-tego ułamka zbliżonego $\frac{L_k}{M_k} = \frac{L_{k-1} q_k + L_{k-2}}{M_{k-1} q_k + M_{k-2}}$ zamiast q_k pisząc Q', otrzymamy oczywiście Q,

$$Q = \frac{L_{k-1} Q' + L_{k-2}}{M_{k-1} Q' + M_{k-2}}, \text{ skąd } Q' = \frac{L_{k-2} - M_{k-2} Q}{M_{k-1} Q - L_{k-1}}, \text{ albo } Q' \frac{M_{k-1}}{M_{k-2}} = \frac{\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}} - Q}{Q - \frac{L_{k-1}}{M_{k-1}}}.$$

Po lewej stronie równości ostatniej mamy liczby dodatne (art. 10), a więc licznik i mianownik po prawej są jednakowego znaku, z czego wynika, iż

Q jest zawarte między $\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}}$ i $\frac{L_{k-1}}{M_{k-1}}$, t. j. *wartość ułamka ciągłego jest zawarta między każdemi dwoma po sobie następującemi ułamkami zbliżonemi.* Uwzględniając zaś jeszcze to, cośmy powiedzieli powyżej, widzimy, że *ułamki zbliżone ze wskaźnikami parzystemi są większe od wartości ułamka ciągłego,* zaś *ułamki zbliżone ze wskaźnikami nieparzystemi są mniejsze od wartości ułamka ciągłego.*

Ponieważ nadto po lewej stronie równości ostatniej oba czynniki są większe od 1 (art. 10), przeto bezwzględna wartość różnicy $\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}} - Q$, jest większa od bezwzględnej wartości różnicy $\frac{L_{k-1}}{M_{k-1}} - Q$, t. j. *z dwu po sobie następujących ułamków zbliżonych, drugi jest bliższy wartości ułamka ciągłego.*

Łącząc tę własność z poprzednią, wnosimy, iż *kolejne ułamki zbliżone ze wskaźnikami parzystemi, zmniejszając się, coraz się zbliżają do wartości ułamka ciągłego,* zaś *kolejne ułamki zbliżone ze wskaźnikami nieparzystemi, powiększając się, coraz zbliżają się do wartości ułamka ciągłego.*

15. Niech $\frac{a}{b}$ będzie ułamkiem nieskracalnym przedstawiającym wartość przybliżoną pewnego ułamka ciągłego. Jeżeli ten ułamek $\frac{a}{b}$ jest bliższy ułamka ciągłego, niż ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to przypada on (art. 14) między ułamkami zbliżonemi $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$ i $\frac{L_n}{M_n}$, a temsamem jest także bliższy tegoż ułamka ciągłego, niż ułamek zbliżony $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$. Gdy weźmiemy różnice $\frac{a}{b} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, $\frac{L_n}{M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, to one będą jednakowego znaku i wartość bezwzględna pierwszej z nich będzie mniejsza od wartości bezwzględnej drugiej. Po pomnożeniu obu tych różnic przez $(-1)^n$, z drugiej z nich otrzymamy według (2) liczbę dodatną, tak iż możemy napisać

$$(-1)^n\left(\frac{a}{b} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}\right) < \frac{1}{M_{n-1}M_n}, \quad \text{albo} \quad (-1)^n(aM_{n-1} - bL_{n-1}) < \frac{b}{M_n}.$$

Po lewej stronie ostatniej nierówności mamy liczbę całkowitą różną od zera $\left(\text{gdyż } \frac{a}{b} \text{ jest różne od } \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}\right)$, a więc jest $b > M_n$. — Gdybyśmy wzięli różnice $\frac{M_{n-1}}{L_{n-1}} - \frac{b}{a}$ i $\frac{M_{n-1}}{L_{n-1}} - \frac{M_n}{L_n}$, to byłyby one jednakowego znaku i mianowicie takiego, jak różnice poprzednio rozważane. Rozumując podobnie, jak powyżej, wniesiemy, iż $a > L_n$. — Z tego wynika, że ułamek zwyczajny wyrażający wartość przybliżoną danego ułamka ciągłego, jeżeli ma być bliższy ułamka ciągłego, niż przybliżenie $\frac{L_n}{M_n}$, ma wyrazy większe od odpowiednich wyrazów tego ułamka zbliżonego. Innemi słowy: *ułamek zbliżony jest bliższy liczby, rozwiniętej na ułamek ciągły, niż jakikolwiek ułamek zwyczajny o mniejszym, czyto mianowniku, czyteż liczniku.* Ta własność jest uzasadnieniem nazwy: »ułamek zbliżony«.

16. Jeżeli, jako przybliżenie wartości ułamka ciągłego Q, weźmiemy ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to, ponieważ Q przypada między $\frac{L_n}{M_n}$ i $\frac{L_{n+1}}{M_{n+1}}$, wartość bezwzględna różnicy $Q - \frac{L_n}{M_n}$ jest mniejsza od wartości bezwzględnej różnicy $\frac{L_{n+1}}{M_{n+1}} - \frac{L_n}{M_n}$, czyli według (2) mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n M_{n+1}}$.

Gdy tedy zamiast liczby Q, rozwiniętej na ułamek ciągły, bierzemy jej przybliżenie wyrażone przez ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to popełniamy błąd, którego wartość bezwzględna jest mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n\, M_{n+1}}$.

Gdy bierzemy owo przybliżenie $\frac{L_n}{M_n}$, to zwykle nie mamy znalezionego ilorazu niezupełnego q_{n+1}, który jest potrzebny dla utworzenia liczby M_{n+1} Dlatego zwykle inaczej wyrażamy błąd wziętego przybliżenia. Jest mianowicie (art. 10) $M_{n+1} > M_n$, a także $M_{n+1} > M_n + M_{n-1}$; przeto

$$\frac{1}{M_n M_{n+1}} < \frac{1}{M_n^2}, \quad \frac{1}{M_n M_{n+1}} < \frac{1}{M_n(M_n + M_{n-1})}.$$

Wartość więc bezwzględna błędu, jako mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n M_{n+1}}$, jest również mniejsza tak od liczby $\frac{1}{M_n^2}$, jak i od liczby $\frac{1}{M_n(M_n + M_{n-1})}$. A zatem nie znając ilorazu niezupełnego q_{n+1}, możemy stopień przybliżenia wartości $\frac{L_n}{M_n}$ liczby Q oceniać przy pomocy albo liczby $\frac{1}{M_n^2}$, alboteż przy pomocy liczby $\frac{1}{M_n(M_n + M_{n-1})}$. Ponieważ druga z tych liczb jest mniejsza od pierwszej, przeto lepiej brać owę drugą, jako określającą dokładniej błąd popełniony. Powiemy więc: *błąd, powstały z zastąpienia ułamka ciągłego przez ułamek zbliżony, jest co do bezwzględnej wartości mniejszy od odwrotności iloczynu dwu czynników, z których jeden jest mianownikiem owego ułamka zbliżonego, drugi zaś sumą tego mianownika i mianownika poprzedniego ułamka zbliżonego.* Zauważmy jeszcze, że według art. 14-go ułamek zbliżony ze wskaźnikiem nieparzystym przedstawiać będzie wartość przybliżoną z niedomiarem, ułamek zaś zbliżony ze wskaźnikiem parzystym wartość przybliżoną z nadmiarem. Np.

1). Początkowe ułamki zbliżone log 6 według wypisanej części ułamka ciągłego (5) w art. 9-ym są $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{228}{293}$. Pierwszy, trzeci i piąty z tych ułamków są wartościami przybliżonemi log 6 z niedomiarem, zaś drugi czwarty i szósty z nadmiarem. Ponieważ $\frac{1}{293.(293+9)} < \frac{1}{10^4}$, przeto wyrażając ułamek $\frac{228}{293}$ w postaci ułamka dziesiętnego (0·77815...), otrzymamy log 6 z dobremi pierwszemi czterema cyframi dziesiętnemi, a więc $\log 6 = 0{\cdot}7781$.

2). Wiedząc, że przybliżona na $\frac{1}{2.10^6}$ z nadmiarem wartość liczby π jest 3·141593, znajdźmy ułamek zwyczajny, wyrażający się przy pomocy mniejszych liczb, któryby z temże przybliżeniem przedstawiał liczbę π. W tym celu rozwińmy wypisaną wartość przybliżoną liczby π na ułamek ciągły.

$$3{\cdot}141593 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{983 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

i obliczmy początkowe ułamki zbliżone

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{355}{113},\ldots.$$

Trzeci ułamek zbliżony przedstawia przybliżenie z niedomiarem liczby rozwiniętej, a stopień tego przybliżenia określa liczba $\frac{1}{M_3 M_4} = \frac{1}{113.111086} < \frac{1}{2.10^6}$. Ponieważ każda z dwu różnic

$$3{\cdot}141593 - \pi,\quad 3{\cdot}141593 - \frac{355}{113}$$

jest liczbą dodatną i mniejszą od $\frac{1}{2.10^6}$, przeto także wartość bezwzględna różnicy $\left(3{\cdot}141593 - \frac{355}{113}\right) - (3{\cdot}141593 - \pi) = \pi - \frac{355}{113}$ jest mniejsza od $\frac{1}{2.10^6}$. Zatem ułamek $\frac{355}{113}$ przedstawia przybliżoną na $\frac{1}{2.10^6}$ wartość liczby π.

UŁAMEK CIĄGŁY PERYODYCZNY.

17. Jeżeli w ułamku ciągłym nieskończonym pewna grupa następujących po sobie ilorazów niezupełnych wciąż w tymże porządku się powtarza, to taki ułamek ciągły nazywamy peryodycznym (periodischer K.), a grupę owych powtarzających się ilorazów niezupełnych nazywamy peryodem (Periode). Jeżeli już pierwszy iloraz niezupełny należy do peryodu, ułamek ciągły jest peryodyczny prosty (rein p. K.), w przeciwnym zaś razie t. j. jeżeli, jak w ułamku (4) art. 9-go, pewna ilość początkowych ilorazów niezupełnych do peryodu nie należy, nazywamy go peryodycznym mieszanym (gemischter p. K.).

Weźmy ogólnie ułamek peryodyczny mieszany, w którym peryod zaczyna się od n-tego ilorazu niezupełnego i obejmuje p ilorazów niezupełnych. Nazwijmy ten ułamek ciągły x, całą zaś część jego zaczynającą się od pierwszego w peryodzie ilorazu niezupełnego nazwijmy y. Jest więc

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{y}}},\qquad x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cdots + \cfrac{1}{q_{n+p-1} + \cfrac{1}{y}}}}}.$$

A zatem
$$x = \frac{L_{n-1}\,y + L_{n-2}}{M_{n-1}\,y + M_{n-2}},\qquad x = \frac{L_{n+p-1}\,y + L_{n+p-2}}{M_{n+p-1}\,y + M_{n+p-2}}$$

czyli
$$\begin{cases} M_{n-1}\,xy + M_{n-2}x - L_{n-1}\,y - L_{n-2} = 0, \\ M_{n+p-1}\,xy + M_{n+p-2}\,x - L_{n+p-1}\,y - L_{n+p-2} = 0. \end{cases}$$

Z tych dwu równań rugując y otrzymamy (art. 4, β) równanie stopnia 2-go z niewiadomą x (w którem spółczynniki są liczbami całkowitemi), a więc x jest pierwiastkiem owego równania. Nie może ten pierwiastek być liczbą wymierną, ani całkowitą, aniteż ułamkową (art. 11); jest więc liczbą niewymierną. A zatem *ułamek ciągły peryodyczny przedstawia liczbę niewymierną, która jest pierwiastkiem równania stopnia 2-go o spółczynnikach całkowitych.* Np.

1). $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$ t. j. $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$ czyli $x = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$.

Mamy tu jedno równanie $x^2 - 2x - 2 = 0$. Z dwu pierwiastków tego równania, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$, drugi jest liczbą ujemną, a więc $x = 1 + \sqrt{3}$.

2). $x = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}$, gdzie $y = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{y}}}$.

Mamy tu dwa równania

$$\begin{cases} x = \dfrac{7y + 3}{2y + 1}, \\ x = \dfrac{173y + 45}{50y + 13}, \end{cases}$$

z których po wyrugowaniu y otrzymujemy $12x^2 - 71x + 102 = 0$. Z dwu pierwiastków tego równania $\frac{71}{24} + \frac{1}{24}\sqrt{145}$, $\frac{71}{24} - \frac{1}{24}\sqrt{145}$ wartość drugiego jest mniejsza od $2\frac{1}{2}$, gdy tymczasem $\frac{3}{1}$ jest wartością przybliżoną z niedomiarem liczby x, a więc jest $x = \frac{71}{24} + \frac{1}{24}\sqrt{145}$.

ROZDZIAŁ TRZECI.

ROZWIĄZANIA CAŁKOWITE RÓWNAŃ NIEOZNACZONYCH.

ZADANIE DIOFANTA.

18. Zadanie: znaleźć rozwiązania całkowite równania nieoznaczonego stopnia 1-go (I, art. 172) ze spółczynnikami całkowitemi, lub też układu nieoznaczonego równań stopnia pierwszego (I, art. 182) ze spółczynnikami całkowitemi, znane jest w nauce pod nazwą z a d a n i a D i o f a n t a (Diophantische Aufgabe).

Niech w równaniu

$$ax + by = c \tag{1}$$

spółczynniki a, b, c, będą liczbami całkowitemi. Jeżeliby one miały spólny dzielnik, to przezeń możemy podzielić obie strony równania (1). Przyjmiemy zatem, że w równaniu (1) *spółczynniki a, b, c nie mają spólnego dzielnika.*

Gdyby liczby a i b miały spólny dzielnik większy od jedności, to przy całkowitych wartościach x i y byłyby przezeń podzielne liczby ax i by, a więc także ich suma $ax+by$, czyli c, co być nie może. A więc *równaniu (1), jeżeli liczby a i b nie są pierwsze względem siebie, nie czyni zadość żadna para całkowitych wartości x i y.* Nadal więc przyjmiemy, że w równaniu (1) *liczby a i b są pierwsze względem siebie.*

Z równania (1), w którem możemy przyjąć, iż jeden ze spółczynników a i b, np. a, jest dodatny, mamy

$$x=\frac{c-by}{a}. \tag{2}$$

Podstawmy w (2) zamiast y dwie różne od siebie wartości całkowite i dodatne, y_1 i y_2, mniejsze od a. Dzieląc liczby $c-by_1$ oraz $c-by_2$ przez a, tak wyznaczmy w ilorazach liczby całkowite, odpowiednio k_1 i k_2, iżby reszty odpowiednie r_1 i r_2 były liczbami dodatnemi; jest więc $c-b_1=k_1a+r_1$, $c-by_2=k_2a+r_2$. Gdyby było $r_1=r_2$, to byłoby $\frac{b(y_2-y_1)}{a}=k_1-k_2$. Po stronie prawej mamy tu liczbę całkowitą, a po lewej czynnik b jest pierwszy względem a, czynnik zaś y_2-y_1, jako różnica liczb mniejszych od a, jest przez a niepodzielny. Ostatnia więc równość jest niemożliwa, czyli jest $r_1 \gtrless r_2$. Podstawiając przeto w (2) zamiast y kolejno liczby $0, 1, 2, \ldots, a-1$, z podzielenia $c-by$ przez a otrzymujemy a reszt dodatnych, różnych od siebie, a mniejszych od a. Jedna więc z nich jest 0, t. j. przy jednej wartości całkowitej y, którą nazwijmy y_0, mniejszej od a, otrzymujemy z (2) wartość całkowitą x, którą nazwijmy x_0. A więc, *kiedy a i b są pierwsze względem siebie, równanie (1) ma pierwiastki całkowite.* Gdy mamy np.

$$4x-7y=6, \quad \text{skąd } x=\frac{6+7y}{4},$$

to przy jednej z wartości 0, 1, 2, 3 niewiadomej y otrzymujemy całkowitą wartość x, mianowicie, jakto znajdziemy kolejno próbując, przy $y_0=2$, $x_0=5$.

Z tego wprost wynika wskazówka, iż, rozwiązawszy równanie (1) względem tej niewiadomej, której spółczynnik jest mniejszy, możemy, podstawiając zamiast pozostałej niewiadomej kolejno liczby $0, 1, 2, \ldots$, mniejsze od wartości bezwzględnej wspomnianego spółczynnika, znaleźć parę pierwiastków całkowitych równania (1). Ten sposób rozwiązania zadania jest jednak niedogodny w razie, kiedy oba spółczynniki są liczbami większemi.

19. Gdy liczby x_0 i y_0 przedstawiają jednę parę pierwiastków równania (1), to $ax_0+by_0=c$. Odejmując tę równość od równania (1) stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

równanie równoznaczne z (1), a z tego równania

$$x-x_0=\frac{-b(y-y_0)}{a}.$$

Tu, ponieważ liczby a i b są pierwsze względem siebie, tylko przy każdej wartości całkowitej y takiej, iż $y-y_0$ jest podzielne przez a, a więc przy wartosci $y=y_0+at$, gdzie t jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, otrzymujemy

$x = x_0 - bt$, wartość również całkowitą. Widzimy więc, że *jeżeli liczby* x_0 i y_0 *są pierwiastkami równania* (1), *to temuż równaniu czynią także zadość wartości*

$$x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at, \tag{3}$$

gdzie w obu wyrażeniach t ma jednakową wartość, albo całkowitą dodatną, albo 0, alboteż całkowitą ujemną. Tak np. powyższemu równaniu $4x - 7y = 6$ nietylko czynią zadość wartości $x = 5$, $y = 2$, ale także: $x = 12$, $y = 6$; $x = 19$, $y = 10$; ...; $x = -2$, $y = -2$, $x = -9$, $y = -6$; ....

20. W przypadku szczególnym, kiedy w równaniu (1) jest $c = 0$, mamy równanie jednorodne $ax + by = 0$, któremu czynią zadość wartości $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, a więc według (3) pierwiastki tego równania są $x = -bt$, $y = at$.

21. Niech w równaniu (1) $c \gtrless 0$. Przyjmując, jak poprzednio (art. 18) iż $a > 0$, wartości bezwzględne spółczynników a i b nazwijmy α i β i niech będzie np. $\alpha < \beta$. Możemy więc mieć jedno z dwu równań

$$\alpha x + \beta y = c, \quad \alpha x - \beta y = c. \tag{4}$$

Kładąc

$$x = c\xi, \quad y = c\eta, \tag{5}$$

zamiast równań (4) możemy rozważać równania

$$\alpha\xi + \beta\eta = 1, \quad \alpha\xi - \beta\eta = 1. \tag{6}$$

Rozwińmy ułamek $\frac{\beta}{\alpha}$ na ułamek ciągły. Niech w tym ułamku ciągłym będzie n ilorazów niezupełnych. Ostatnim ułamkiem zbliżonym jest (art. 11) ułamek $\frac{\beta}{\alpha}$, przedostatni nazwijmy $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$. Według wzoru (1) art. 12-go mamy

$$\beta M_{n-1} - \alpha L_{n-1} = (-1)^n, \quad \text{a więc } (-1)^{n-1}\alpha L_{n-1} - (-1)^{n-1}\beta M_{n-1} = 1.$$

Odejmując tę równość od każdego z równań (6) stronami odpowiedniemi, otrzymujemy

$$\alpha[\xi - (-1)^{n-1}L_{n-1}] + \beta[\eta + (-1)^{n-1}M_{n-1}] = 0,$$
$$\alpha[\xi - (-1)^{n-1}L_{n-1}] - \beta[\eta - (-1)^{n-1}M_{n-1}] = 0.$$

Tym równaniom równoznacznym z odpowiedniemi równaniami (6) zadość czynią wartości $\xi = (-1)^{n-1}L_{n-1}$, $\eta = \mp(-1)^{n-1}M_{n-1}$, gdzie z podwójnego znaku górny odnosi się do pierwszego, dolny zaś do drugiego z równań (6). A więc według (5) liczby $x_0 = (-1)^{n-1}cL_{n-1}$ i $y_0 = \mp(-1)^{n-1}cM_{n-1}$ są pierwiastkami równań (4). Ogólnie zaś pierwiastki równania (1) możemy według (3) przedstawić

$$x = (-1)^{n-1}cL_{n-1} - bt, \quad y = \mp(-1)^{n-1}cM_{n-1} + at, \tag{7}$$

gdzie z podwójnego znaku należy brać górny lub dolny stosownie do tego, czy równanie (1) daje się sprowadzić do pierwszego, czyteż do drugiego z równań (4).

Np.
$$51x - 137y = -4.$$

Rozwijając $\frac{137}{51}$ na ułamek ciągły (art. 9), otrzymujemy w nim 5 ilorazów niezupełnych. Przedostatni ułamek zbliżony jest $\frac{43}{16}$. Pierwiastki zatem naszego równania według (7) są

$$x=(-1)^{5-1}(-4)43+137t=-172+137t,$$
$$y=(-1)^{5-1}(-4)16+51t=-64+51t.$$

22. Można także, nie rozwinąwszy ułamka $\frac{\beta}{\alpha}$ na ułamek ciągły, a temsamem nie obliczywszy wprost jego przedostatniego ułamka zbliżonego, stosując stopniowo do liczb α i β poszukiwanie największego spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, znaleźć pierwiastki równania (1). Np.

$51x-137y=-4$, $x=\frac{-4+137y}{51}$; $137=2.51+35$; $x=2y+\frac{-4+35y}{51}$;

przyjmijmy $\frac{-4+35y}{51}=t_1$;

$35y-51t_1=4$, $y=\frac{4+51t_1}{35}$; $51=35.1+16$; $y=t_1+\frac{4+16t_1}{35}$;

przyjmijmy $\frac{4+16t_1}{35}=t_2$;

$16t_1-35t_2=-4$, $t_1=\frac{-4+35t_2}{16}$; $35=16.2+3$; $t_1=2t_2+\frac{-4+3t_2}{16}$;

przyjmijmy $\frac{-4+3t_2}{16}=t_3$;

$3t_2-16t_3=4$, $t_2=\frac{4+16t_3}{3}$; $16=3.5+1$; $t_2=5t_3+\frac{4+t_3}{3}$;

przyjmijmy $\frac{4+t_3}{3}=t$;

$t_3=-4+3t$.

Mamy tu układ 5-u równań z 6-u niewiadomemi

$$\begin{cases} x=2y+t_1, \\ y=t_1+t_2, \\ t_1=2t_2+t_3, \\ t_2=5t_3+t, \\ t_3=-4+3t. \end{cases}$$

Wyrażając przez t kolejno t_2, t_1, y, x, znajdziemy

$$x=-172+137t, \quad y=-64+51t.$$

23. Ponieważ w wyrażeniach (7) litera t oznacza zero lub jakąkolwiek liczbę całkowitą, dodatną lub ujemną, przeto par odpowiadających sobie wartości (7) może być nieskończenie wiele.

W wyrażeniach (7) możemy zamiast t wziąć liczbę różniącą się od t o liczbę całkowitą. Tak np. w wyrażeniach pierwiastków ostatniego równania możemy zamiast t wziąć liczbę $t+2$, wtedy pierwiastki tego równania będą przedstawione w postaci

$$x=102+137t, \quad y=38+51t.$$

Podobnie, gdy mamy

$$3x-2y=56, \text{ czyli } 2y-3x=-56,$$

skąd
$$y=56+3t, \quad x=56+2t,$$

możemy, zamiast t biorąc $t-28$, pierwiastki tego równania tak przedstawić:

$$y = -28 + 3t, \quad x = 2t.$$

24. Niekiedy zadanie, które ułożyć wypada w równanie nieoznaczone, jest tego rodzaju, iż do odpowiedzi na zadanie prowadzą jedynie pierwiastki owego równania nietylko całkowite, ale jednocześnie dodatne. Dlatego wyznaczymy pierwiastki całkowite i dodatne kilku takich równań.

1). $51x - 137y = -4;\quad x = -172 + 137t,\ y = -64 + 51t.$

Aby pierwiastki były dodatne, możemy literze t w tych wyrażeniach nadać tylko takie wartości całkowite lub 0, przy których jest jednocześnie

$$-172 + 137t > 0, \quad -64 + 51t > 0.$$

Rozwiązując te nierówności względem t, znajdziemy $t > \frac{172}{137}$, $t > \frac{64}{51}$. Obu tym warunkom zadość czynią wartości $t = 2, 3, 4, \ldots$ To więc równanie ma nieskończenie wiele par pierwiastków całkowitych i dodatnych:

$$x = 102,\ y = 38;\quad x = 239,\ y = 89;\quad x = 376,\ y = 140; \ldots$$

2). $19x + 11y = 1000;\quad x = 4 - 11t,\ y = 84 + 19t;$

$4 - 11t > 0,\ 84 + 19t > 0;\quad t < \frac{4}{11},\ t > -4\frac{8}{19}$, a więc t może mieć jednę z wartości: $0, -1, -2, -3, -4$.

Pierwiastki przeto dodatne i całkowite tego równania są:

$x = 4,\ y = 84;\ x = 15,\ y = 65;\ x = 26,\ y = 46;\ x = 37,\ y = 27;\ x = 48,\ y = 8.$

3). $5x + 7y = 23;\ x = 6 - 7t,\ y = -1 + 5t;$

$-1 + 5t > 0,\ 6 - 7t > 0;\ t > \frac{1}{5},\ t < \frac{6}{7}$. Ponieważ między $\frac{1}{5}$ a $\frac{6}{7}$ niema liczby całkowitej, przeto to równanie nie ma pierwiastków całkowitych i dodatnych.

4) $4x + 9y = -42;\ x = -6 - 9t,\ y = -2 + 4t;$

$-6 - 9t > 0,\ -2 + 4t > 0;\ t < -\frac{2}{3},\ t > \frac{1}{2}$. Ponieważ te nierówności są z sobą sprzeczne, przeto dane równanie nie ma rozwiązań całkowitych i dodatnych.

25. Gdy mamy układ nieoznaczony dwu równań z trzema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 2x + 14y - 7z = 341, \\ 10x + 4y + 9z = 473, \end{cases}$$

to rugując z nich niewiadomą x otrzymujemy równanie (art. 23)

$$3y - 2z = 56;\quad y = 2t,\ z = -28 + 3t.$$

Podstawiając te wyrażenia y i z np. w pierwsze z równań danych, otrzymujemy równanie

$$2x + 7t = 145,$$

z którego

$$x = 69 + 7\tau,\ t = 1 - 2\tau.$$

Podstawiając to wyrażenie t w poprzednio otrzymane wyrażenia y i z, będziemy mieli rozwiązania całkowite danego układu równań,

$$x = 69 + 7\tau,\ y = 2 - 4\tau,\ z = -25 - 6\tau,$$

przy jakiejkolwiek całkowitej lub 0 wartości τ. Aby znaleźć rozwiązanie całkowite i dodatne powyższego układu równań potrzeba nierówności

$$69 + 7\tau > 0,\ 2 - 4\tau > 0,\ -25 - 6\tau > 0$$

rozwiązać względem τ. Nierównościom

$$\tau > -9\tfrac{6}{7},\quad \tau < \tfrac{1}{2},\quad \tau < -4\tfrac{1}{6}$$

zadość czynią wartości τ całkowite -5, -6, -7, -8, -9. A więc dany układ posiada całkowite rozwiązania

$$x=34,\ y=22,\ z=5;\ldots;\ x=6,\ y=38,\ z=29.$$

26. Gdybyśmy chcieli, mając równanie z trzema niewiadomemi

$$10x+9y+7z=58,$$

znaleźć jego rozwiązania całkowite, to, zważywszy, że ze spółczynników najmniejszą wartość bezwzględną ma spółczynnik z, wyrazilibyśmy

$$z=\frac{58-9y-10x}{7}=8-y-x+\frac{2-2y-3x}{7}=8-y-x+t,\ \text{gdzie}\ \frac{2-2y-3x}{7}=t;$$

stąd $y=\dfrac{2-3x-7t}{2}=1-x-3t-\dfrac{x+t}{2}=1-x-3t-t'$, gdzie $\dfrac{x+t}{2}=t'$.

Jest więc

$$x=-t+2t',\quad y=1-2t-3t',\quad z=7+4t+t',$$

gdzie każda z liczb t i t' może otrzymywać wartości całkowite ujemne, 0, całkowite dodatne.

27. Aby mieć rozwiązania całkowite układu równań

$$\begin{cases} 6x+7y+3z+2u=100, \\ 24x+12y+7z+3u=200, \end{cases}$$

wyrugujemy z nich jednę niewiadomą np. u. Otrzymamy równanie

$$30x+3y+5z=100.$$

Ponieważ dwa spółczynniki tego równania, 30 i 100, są podzielne przez spółczynnik 5, przeto dogodniej wziąć tu wyrażenie z,

$$z=20-6x-\tfrac{3}{5}y;\quad y=5t,\ z=20-6x-3t.$$

Podstawiając te wartości w pierwsze z danych równań, otrzymujemy z niego $u=20+6x-13t$. Otrzymaliśmy tedy wyrażenia trzech niewiadomych y, z, u przez niewiadomą pozostałą x i przez liczbę pomocniczą t,

$$y=5t,\ z=20-6x-3t,\ u=20+6x-13t,$$

z których, nadając tak na x jak i na t jakiekolwiek wartości całkowite lub 0, otrzymujemy całkowite wartości y, z i u.

RÓWNANIE PITAGORASA.

28. Znane twierdzenie geometryczne Pitagorasa dało powód do szukania całkowitych i oczywiście dodatnych rozwiązań równania nieoznaczonego jednorodnego stopnia 2-go

$$x^2+y^2=z^2. \tag{1}$$

Dlatego to równanie, nazywają **równaniem Pitagorasa** (Pythagoräische Gleichung) trójkę zaś liczb całkowitych i dodatnych, które mogą być pierwiastkami tego równania, **liczbami Pitagorasa**.

Ponieważ liczba i jej kwadrat są jednocześnie liczbami parzystemi, albo też nieparzystemi, przeto, gdyby w równaniu (1) liczby x i y były obie nieparzyste np. $x=2\alpha+1$, $y=2\beta+1$, to liczba z byłaby parzysta np. $z=2\gamma$; i mielibyśmy $4(\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta)+2=4\gamma^2$, co być nie może. A więc z dwu liczb x i y przynajmniej jedna jest parzysta.

Zauważmy jeszcze, że, jeżeli w równaniu (1) liczby x i y mają spólny dzielnik, to przezeń liczba z jest podzielna. Z trójki zaś liczb x, y, z, w której x i y są liczbami pierwszemi względem siebie, mnożąc wszystkie 3 liczby przez jakąkolwiek liczbę dodatną i całkowitą, otrzymamy trójkę liczb, będących także pierwiastkami równania (1).

29. Niech $x=\xi$. Kładąc $z=y+t$ równanie (1) sprowadzimy do równania

$$\xi^2=2ty+t^2, \quad \text{skąd} \quad y=\frac{\xi^2-t^2}{2t}. \quad \text{Że zaś } z=y+t, \text{ przeto } z=\frac{\xi^2+t^2}{2t}.$$

Trójka więc wartości liczb całkowitych i dodatnich

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2-t^2}{2t}, \quad z=\frac{\xi^2+t^2}{2t} \tag{2}$$

przedstawia pierwiastki równania (1).

Aby przy dowolnem całkowitem ξ wartości y i z były dodatne i całkowite, potrzeba na t nadawać takie wartości dodatne i całkowite, iżby: popierwsze, $t^2<\xi^2$, a więc $t<\xi$; powtóre tak ξ^2-t^2, jak i ξ^2+t^2 było podzielne przez $2t$, do czego potrzeba, aby liczby ξ i t były jednocześnie parzyste, lub jednocześnie nieparzyste, i aby liczba t była dzielnikiem liczby ξ^2. A więc liczby (2) żądanemi rozwiązaniami, jeżeli ξ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, jeżeli liczba t jest dzielnikiem liczby ξ^2, mniejszym od ξ, i jeżeli liczby ξ i t są albo jednocześnie parzyste, alboteż jednocześnie nieparzyste.

30. Z tego wynika, że w wyrażeniach (2) przy ξ nieparzystem można przyjąć $t=1$, zaś przy ξ parzystem najmniejsza możliwa wartość t jest $t=2$.

W pierwszym razie mamy

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2-1}{2}, \quad z=\frac{\xi^2+1}{2}, \tag{3}$$

i przyjmując $\xi=3, 5, 7, 9, \ldots$, otrzymujemy rozwiązania równania (1)

$$3, 4, 5; \quad 5, 12, 13; \quad 7, 24, 25; \quad 9, 40, 41; \ldots. \tag{4}$$

W drugim zaś razie mamy

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2}{4}-1, \quad z=\frac{\xi^2}{4}+1 \tag{5}$$

i przyjmując $\xi=4, 6, 8, 10, \ldots$, otrzymujemy rozwiązania równania (1)

$$4, 3, 5; \quad 6, 8, 10; \quad 8, 15, 17; \quad 10, 24, 26; \ldots. \tag{6}$$

Zauważmy, że w rozwiązaniach (3) różnica $z-y=t=1$, w rozwiązaniach zaś (5) $z-y=t=2$. Z tego wynika, że pośród rozwiązań (6) znajdą się wszystkie rozwiązania (4) po pomnożeniu tych ostatnich przez 2. Prócz nich jednak pośród rozwiązań (6) są takie, jak np. 3-cie z wypisanych, których w podobny sposób z rozwiązań (4) wyprowadzić nie można.

Pitagoras podał rozwiązania (4), Plato zaś podał rozwiązania (6).

31. Uwzględniliśmy dotąd najmniejsze możliwe wartości t w wyrażeniach (2). Co do innych wartości t, rozważmy naprzód przypadek, kiedy t jest dzielnikiem ξ. Niech $\xi = t\xi'$. Wówczas wyrażenia (2) możemy tak przedstawić

$$x = t\xi', \quad y = t\frac{\xi'^2 - 1}{2}, \quad z = t\frac{\xi'^2 + 1}{2} \tag{7}$$

Te wyrażenia są ogólne, jednak w razie parzystego t np. $t = 2t'$, kładąc w (2) $\xi = t'\xi''$ albo w (7) $2\xi' = \xi''$, otrzymamy

$$x = t'\xi'', \quad y = t'\left(\frac{\xi''^2}{4} - 1\right), \quad z = t'\left(\frac{\xi''^2}{4} + 1\right). \tag{8}$$

Z wyrażeń (7), gdy je odniesiemy do przypadku, kiedy ξ i t są liczbami nieparzystemi i z wyrażeń (8) odnoszących się do przypadku, kiedy ξ jest liczbą parzystą, widzimy, iż wogóle w razie, kiedy t jest dzielnikiem liczby ξ, otrzymać możemy tylko pierwiastki równania (2) będące wielokrotnościami pierwiastków (3) i (5).

32. Pozostał do rozważenia przypadek, kiedy t, zadość czyniąc warunkom, wypowiedzianym w art. 29-ym, nie jest dzielnikiem liczby ξ. Np. kiedy przy $\xi = 15$ jest $t = 9$, albo przy $\xi = 12$ jest $t = 8$. Największy spólny dzielnik liczb ξ i t nazwijmy τ, niech $\xi = \tau\sigma$, $t = \tau s$. Ponieważ $\frac{\xi^2}{t} = \frac{\tau\sigma^2}{s}$ jest liczbą całkowitą, przeto s jest dzielnikiem τ i niech $\tau = \vartheta s$. Wówczas według wzorów (2)

$$x = \vartheta\sigma s, \quad y = \vartheta\frac{\sigma^2 - s^2}{2}, \quad z = \vartheta\frac{\sigma^2 + s^2}{2}. \tag{9}$$

Tu różnica $z - y = t = \vartheta s^2$. Że zaś nie może być w tym przypadku $s = 1$, przeto rozwiązania (9) są różne od Pitagorejskich i Platońskich, choć mogą być między niemi wielokrotności tamtych (w tych razach oczywiście x i y nie są pierwsze względem siebie). Jakoż, np. przy $\xi = 75$, $t = 9$, oraz przy $\xi = 36$, $t = 8$, otrzymamy odpowiednio

$$x = 75,\ y = 308,\ z = 317; \quad x = 36,\ y = 77,\ z = 85;$$

w tych rozwiązaniach równania (1) wartości x i y są pierwsze względem siebie.

33. Gdybyśmy we wzorach (2) co do liczby dodatnej i całkowitej t uczynili jedyne zastrzeżenie, iż $t < \xi$, mogłyby z tych wzorów wypadać ułamkowe wartości liczb y i z. Zważmy jednak, że, mnożąc wszystkie liczby (2) przez $2t$, otrzymamy liczby

$$x = 2\xi t, \quad y = \xi^2 - t, \quad z = \xi^2 + t^2, \tag{10}$$

które czynią zadość równaniu (1) i są całkowite i dodatne. Z liczb (10) jest x zawsze liczbą parzystą, co odpowiada uwadze uczynionej w art. 29-ym, iż przynajmniej jedna z wartości x i y jest parzysta. Wyrażenia więc (10) przy jakichkolwiek całkowitych wartościach ξ i t i przy warunku $t < \xi$ przedstawiają nam również całkowite i dodatne rozwiązania równania (1). Z tych wyrażeń (10) rozwiązanie Pitagorasa określa warunek $z - x = 1$, t. j. wypadają one przy wartości $t = \xi - 1$, rozwiązania zaś Platona określa warunek $z - y = 2$, t. j. wypadają one przy wartości $t = 1$.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

POSTĘPY. ODSETKI SKŁADANE.

POSTĘP ARYTMETYCZNY.

34. Liczby następujące po sobie w taki sposób, iż drugą i każdą dalszą otrzymać możemy z liczby ją poprzedzającej, dodając do niej tę samę liczbę, tworzą postęp arytmetyczny (arithmetische Progression), inaczej zwany różnicowym. Tak n. p. kolejne liczby nieparzyste tworzą postęp arytmetyczny.

Każdą z liczb tworzących ten postęp nazywamy jego wyrazem (Glied). Liczbę, która jest różnicą między drugim lub którymkolwiek z dalszych wyrazów postępu arytmetycznego a wyrazem poprzedzającym, nazywamy różnicą postępu arytmetycznego (Differenz d. a. P.). Jeżeli różnica jest dodatna, jak np. w postępie

$$-5,\ -1\tfrac{1}{2},\ 3,\ 7\tfrac{1}{2},\ 12,\ 16\tfrac{1}{2},\ 21, \qquad (\text{różnica } +4\tfrac{1}{2}),$$

to postęp nazywamy rosnącym (steigend); jeżeli zaś różnica jest ujemna, jak np. w postępie

$$16,\ 12,\ 8,\ 4,\ 0,\ -4,\ -8, \qquad (\text{różnica } -4),$$

to postęp nazywamy malejącym (fallend).

Jeżeli wszystkie wyrazy postępu oznaczymy przez tę samę liczbę ze wskaźnikiem odpowiadającym miejscu zajętemu w postępie przez odpowiedni wyraz, a różnicę postępu nazwiemy r, to postęp o n wyrazach możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n, \quad \text{gdzie } a_k - a_{k-1} = r, \tag{1}$$

przy k równem $2, 3, \ldots, n$.

35. Ponieważ $a_2 = a_1 + r$, zaś $a_3 = a_2 + r$, przeto $a_3 = a_1 + 2r = a_1 + (3-1)r$, podobnie jak $a_2 = a_1 + (2-1)r$. Przypuśćmy, że także $a_k = a_1 + (k-1)r$. Ponieważ $a_{k+1} = a_k + r$, przeto $a_{k+1} = [a_1 + (k-1)r] + r = a_1 + kr$. Że zaś, jak widzieliśmy bezpośrednio, w taki sposób wyraża się wyraz a_2, zatem w podobny sposób wyraża się jakikolwiek dalszy wyraz.

W szczególności jest

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \tag{2}$$

t. j. *ostatni wyraz postępu arytmetycznego jest równy sumie algebraicznej wyrazu pierwszego i różnicy postępu, pomnożonej przez ilość wyrazów poprzedzających.*

Postęp (1), pisząc w nim $a_1 + (k-1)r$ zamiast a_k, możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_1 + r,\ a_1 + 2r, \ldots,\ a_1 + (n-2)r,\ a_1 + (n-1)r. \tag{3}$$

36. W postępie (1) weźmy jakiekolwiek dwa wyrazy jednakowo oddalone od skrajnych, np. wyrazy a_k, a_{n-k+1}. Odrzuciwszy w postępie (1) raz $n-k$ końcowych wyrazów, drugim zaś razem $n-k$ początkowych wyrazów, będziemy mieli dwa postępy

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_k;\quad a_{n-k+1},\ a_{n-k+2}, \ldots, a_n.$$

W tych postępach według wzoru (2) jest

$$a_k = a_1 + (k-1)r,\quad a_n = a_{n-k+1} + (k-1)r.$$

Od pierwszej z tych równości odjąwszy drugą otrzymujemy $a_k - a_n = a_1 - a_{n-k+1}$, czyli

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \tag{4}$$

t. j. *suma wyrazów postępu arytmetycznego jednakowo oddalonych od skrajnych jest równa sumie wyrazów skrajnych.* Jeżeliby postęp miał nieparzystą ilość wyrazów, to przy

$$k = \frac{n+1}{2} \text{ jest } 2a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 + a_n.$$

37. Sumę wyrazów postępu (1) nazwijmy S_n, t. j.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Wypisawszy składniki sumy w odwrotnym porządku mamy

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Z dodania do siebie tych dwu równości stronami odpowiedniemi otrzymujemy

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Ponieważ każda z n sum w nawiasach po stronie prawej, może być według (4) zastąpiona przez sumę $a_1 + a_n$, przeto mamy $2S_n = (a_1 + a_n)n$, skąd

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \tag{5}$$

t. j. *suma wyrazów postępu arytmetycznego równa się połowie iloczynu sumy wyrazów skrajnych przez ilość jego wyrazów.* Tak np.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-3) + (2p-1) = p^2.$$

38. Wzory (2) i (5) są 2-ma równaniami między 5-u liczbami a_1, a_n, r, n, S_n, z których każde jest względem oddzielnej z tych 5-u liczb doń wchodzącej stopnia 1-go. Gdy więc 3 z tych 5-u liczb mają znane wartości, to z owych dwu równań można dla dwu pozostałych liczb znaleźć odpowiednie wartości. Innemi słowy przez 3 z tych 5-u liczb postęp arytmetyczny jest oznaczony. Może być 10 różnych zadań na szukanie dwu z tych 5-u liczb t. j. mogą być szukane a_n i S_n, a_1 i S_n, r i S_n, n i S_n, r i n, a_n i r, a_1 i r, a_n i a_1, a_n i n, a_1 i n. W dwu ostatnich zadaniach wypada rozwiązać równanie stopnia 2-go.

39. Zadanie. Między dwie dane liczby a i b wstawić m takich liczb, iżby one wraz z danemi liczbami tworzyły postęp arytmetyczny.

Postęp żądany będzie miał wyrazów $m+2$. Pierwszym wyrazem będzie a, ostatnim zaś b. Należy więc we wzorze (2) przyjąć $a_n = b$, $a_1 = a$, $n = m+2$. Będzie więc

$$b = a + (m+1)r, \quad \text{skąd} \quad r = \frac{b-a}{m+1}.$$

Według (3) postęp żądany jest

$$a,\ a + \frac{b-a}{m+1},\ a + 2\frac{b-a}{m+1}, \ldots,\ a + m\frac{b-a}{m+1},\ b. \tag{6}$$

Gdybyśmy w taki sposób między każde dwa wyrazy postędu (1) wstawili m wyrazów, któreby z owemi dwoma tworzyły postęp arytmetyczny, to z uwagi, że $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$, wszystkie owe $n+(n-1)\cdot m$ liczb tworzyłyby postęp arytmetyczny.

POSTĘP ARYTMETYCZNY RZĘDU WYŻSZEGO.

40. Gdy liczby

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_{n-1},\ b_n,\ b_{n+1} \tag{1}$$

są takie, iż kolejne różnice

$$b_2 - b_1 = a_1,\ b_3 - b_2 = a_2, \ldots,\ b_{n+1} - b_n = a_n$$

tworzą postęp arytmetyczny, to o liczbach (1) mówimy, iż one tworzą postęp arytmetyczny rzędu 2-go (zweiter Ordnung). Podobnie, jeżeli mamy takie liczby

$$c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots,\ c_n,\ c_{n+1},\ c_{n+2}, \tag{2}$$

iż kolejne różnice

$$c_2 - c_1 = b_1,\ c_3 - c_2 = b_2, \ldots,\ c_{n+2} - c_{n+1} = b_{n+1}$$

przedstawiają postęp arytmetyczny rzędu 2-go, to o liczbach (2) mówimy, iż one przedstawiają postęp arytmetyczny rzędu 3-go. i t. d. Zauważywszy, że gdy w podobny sposób, mając zwykły postęp arytmetyczny, weźmiemy różnice kolejne $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$, to one są tą samą liczbą, możemy podać ogólne określenie postępu arytmetycznego rzędu wyższego. Mianowicie, jeżeli mamy takie liczby, iż po otrzymaniu kolejnych ich różnic, czyli tak zwanych »różnic pierwszych« weźmiemy kolejne tych różnic różnice, czyli tak zwane »różnice drugie« i t. d. to, kiedy »różnice m-te« są wszystkie sobie równe, dane liczby przedstawiają postęp arytmetyczny rzędu m-tego. Tak np.

	1,	−3,	8,	84,	335,	955,	2246,	4642,	8733,	15289,	25284,	(3)
(różnice pierwsze)	−4,	11,	76,	251,	620,	1291,	2396,	4091,	6556,	9995,		
(różnice drugie)		15,	65,	175,	369,	671,	1105,	1695,	2465,	3439,		
(różnice trzecie)			50,	110,	194,	302,	434,	590,	770,	974,		
(różnice czwarte)				60,	84,	108,	132,	156,	180,	204,		
(różnice piąte)					24,	24,	24,	24,	24,	24.		

Liczby więc (3) tworzą postęp arytmetyczny rzędu 5-go.

POSTĘP GEOMETRYCZNY.

41. Liczby następujące po sobie w taki sposób, iż drugą i każdą dalszą otrzymać możemy z liczby ją poprzedzającej mnożąc ją przez tę samę liczbę, tworzą postęp geometryczny (geometrische P.), inaczej zwany ilorazowym. Tak np. kolejne ujemne i dodatne potęgi pewnej liczby tworzą postęp geometryczny.

Każdą z liczb tworzących ten postęp nazywamy także jego wyrazem. Liczbę, która jest ilorazem z podzielenia drugiego lub któregokolwiek z dalszych wyrazów postępu geometrycznego przez wyraz poprzedni, nazywamy wykładnikiem postępu geometrycznego (Quotient d. g. P.).

Jeżeli wykładnik jest dodatny, wszystkie wyrazy postępu są jednakowego znaku; jeżeli zaś wykładnik jest ujemny, wyrazy postępu mają znaki naprzemian $+$ i $-$.

Jeżeli wartość bezwzględna wykładnika jest większa od 1, postęp nazywamy rosnącym; jeżeli zaś ona jest mniejsza od 1, postęp nazywamy malejącym.

Oznaczając wszystkie wyrazy postępu przez tę samę literę ze wskaźnikiem odpowiadającym miejscu przez odpowiedni wyraz w postępie zajętemu, a wykładnik postępu nazwawszy q, możemy postęp geometryczny tak przedstawić:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{n-1},\ a_n, \text{ gdzie } a_k : a_{k-1} = q, \tag{1}$$

przy $k = 2, 3 \ldots, n$.

Zauważmy, iż postęp geometryczny o trzech wyrazach jest proporcyą ciągłą $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$.

42. Ponieważ $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, przeto $a_3 = a_1 q^2 = a_1 q^{(3-1)}$, podobnie jak $a_2 = a_1 q^{(2-1)}$. Przypuśćmy, że także $a_k = a_1 q^{k-1}$. Ponieważ $a_{k+1} = a_k q$, przeto $a_{k+1} = (a_1 q^{k-1}) q = a_1 q^k$. Że zaś w takiż sposób wyraża się wyraz a_2, zatem w podobny sposób wyraża się jakikolwiek wyraz dalszy. W szczególności jest

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{2}$$

t. j. *wyraz ostatni postępu geometrycznego jest równy iloczynowi wyrazu pierwszego przez potęgę wykładnika postępu, odpowiadającą ilości wyrazów poprzedzających.*

Postęp (1), pisząc w nim $a_1 q^{k-1}$ zamiast a_k, możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2, \ldots,\ a_1 q^{n-2},\ a_1 q^{n-1}. \tag{3}$$

43. Sumę wyrazów postępu (1) czyli (3) nazwijmy S_n t. j.

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Suma w nawiasie jest ilorazem z podzielenia dwumianu $1^n - q^n$ przez dwumian $1 - q$, a więc $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$. Tu zamiast $a_1 q^n = (a_1 q^{n-1}) q$ możemy według (2) napisać $a_n q$. Mamy zatem

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \tag{4}$$

t. j. *suma wyrazów postępu geometrycznego jest równa różnicy między wyrazem pierwszym a iloczynem ostatniego przez wykładnik postępu, podzielonej przez różnicę między jednością a tymże wykładnikiem.* Tak np.

$$\tfrac{3}{25} - \tfrac{3}{5} + 3 - 15 + 75 - 375 = \frac{\tfrac{3}{25} - 375 \times 5}{1+5} = -312{\cdot}48.$$

44. Wzory (2) i (4) są równaniami między 5-u liczbami a_1, a_n, q, n, S Gdy więc 3 z tych 5-u liczb mają znane wartości, to z owych dwu równań (z których drugie jest stopnia 1-go względem oddzielnej z wchodzących doń liczb, a pierwsze stopnia 1-go względem a_n i a_1, stopnia $(n-1)$-go względem q, wykładnicze zaś względem n) możemy dla dwu pozostałych liczb znaleźć wartości odpowiednie. Innemi słowy przez 3 z tych 5-u liczb postęp geometryczny jest oznaczony.

Może być 10 różnych zadań na szukanie dwu z tych 5-u liczb.

45. Zadanie. Między dwie dane liczby a i b wstawić m takich liczb, iżby one wraz z danemi liczbami tworzyły postęp geometryczny.

Kładąc we wzorze (2) $a_1 = a$, $a_n = b$, $n = m+2$, otrzymamy z niego $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, tak iż według (3) żądany postęp jest

$$a,\ a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \ldots,\ a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^m},\ b. \tag{5}$$

Gdybyśmy w taki sposób między każde dwa wyrazy postępu (1) wstawili m wyrazów, któreby z owemi dwoma tworzyły postęp geometryczny, to z uwagi, że $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wszystkie owe $n + (n-1)m$ liczb utworzyłyby postęp geometryczny.

46. Opuściwszy w postępie (1) naprzód $n-k$ końcowych, a następnie $n-k$ początkowych wyrazów, będziemy mieli według (2)

$$a_k = a_1 q^{k-1},\quad a_n = a^{n-k+1} q^{k-1},\quad \text{skąd } a_k : a_n = a_1 : a^{n-k+1},\quad \text{czyli}$$

$$a_k a^{n-k+1} = a_1 a_n. \tag{6}$$

Jeżeliby postęp miał nieparzystą ilość wyrazów, to $a^2_{\frac{n+1}{2}} = a_1 a_n$.

Iloczyn wszystkich wyrazów postępu (3) nazwijmy I_n. Mamy $I_n = a_1^n q^{1+2+\cdots+(n-1)}$. Suma w wykładniku przedstawia (art. 37) liczbę $\frac{n(n-1)}{2}$. Jest więc

$$I_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1 . a_1 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}},\ \text{ t. j.}$$

$$I_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}. \tag{7}$$

Porównywając wzór (2) ze wzorem (2) art. 35-go, wzór (6) ze wzorem (4) art. 36-go, wzór (7) ze wzorem (5) art. 37-go, oraz wyrazy postępu (5) z wyrazami postępu (7) art. 39-go, widzimy, że mnożeniu, dzieleniu, podnoszeniu do potęgi i wyciąganiu pierwiastka w postępie geometrycznym odpowiada dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w postępie arytmetycznym.

Gdy mamy postęp geometryczny o wyrazach dodatnych ($a_1 > 0$, $q > 0$)

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2,\ a_1 q^3, \ldots,\ a_1 q^{n-1}, \tag{8}$$

to, wziąwszy jakąkolwiek liczbę dodatną a, różną od 1, możemy, jeżeli $a_1 = a^\alpha$, zaś $q = a^r$, postęp powyższy tak przedstawić:

$$a^\alpha,\ a^{\alpha+r},\ a^{\alpha+2r},\ a^{\alpha+3r}, \ldots,\ a^{\alpha+(n-1)}.$$

Widzimy, że wykładniki kolejne liczby a

$$\alpha,\ \alpha+r,\ \alpha+2r,\ \alpha+3r, \ldots,\ \alpha+(n-1)r, \tag{9}$$

które są logarytmami odpowiednich wyrazów postępu (8) przy podstawie a, przedstawiają postęp arytmetyczny (9). A więc *logarytmy liczb, tworzących postęp geometryczny, tworzą postęp arytmetyczny.*

47. Jeżeli w postępie geometrycznym wyrazy wciąż po sobie następują tak, iż ich jest nieskończenie wiele,

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2, \ldots,\ a_1 q^{n-1}, \ldots, \tag{10}$$

to mówimy, że postęp jest n i e s k o ń c z o n y.

Przypuśćmy, iż ten postęp jest rosnący o wyrazach dodatnych; jest wtedy $q > 1$. Jeżeli w wyrazach postępu (3) zamiast q weźmiemy 1, to wszystkie, prócz pierwszego, zmniejszymy, tak iż będzie $S_n > a_1 n$,

$$\text{t. j. } \frac{a_1 - a_n q}{1-q} > a_1 n, \quad \text{skąd } a_n > \frac{a_1 n(q-1) + a_1}{q}.$$

Gdy obierzemy jakkolwiek wielką liczbę dodatną l, to $\dfrac{a_1 n(q-1)+a_1}{q} > l$, jeżeli weźmiemy $n > \dfrac{lq - a_1}{a_1(q-1)}$; a więc także będzie wówczas $a_n > l$, t. j. przy dostatecznie wielkiem n może być a_n większe od jakkolwiek wielkiej liczby l. Możemy zatem powiedzieć, że *w postępie geometrycznym rosnącym nieskończonym wartości bezwzględne wyrazów wzrastają nieskończenie.*

Niech postęp nieskończony (10) będzie malejący ($q^2 < 1$). Wtedy postęp

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_1 q},\ \frac{1}{a_1 q^2}, \ldots, \frac{1}{a_1 q^{n-1}}, \ldots, \tag{11}$$

o wykładniku $\dfrac{1}{q}$, będzie postępem rosnącym. Przy dostatecznie wielkiem n wartość bezwzględna wyrazu $a_n = a_1 q^{n-1}$ postępu (10) może być mniejsza od jakkolwiek małej liczby dodatnej $\dfrac{1}{l}$, gdyż, jak dowiedliśmy, odwrotność bezwzględnej wartości tego wyrazu, t. j. wartość bezwzględna wyrazu n-go postępu (11), może być większa od liczby l. A więc *w postępie geometrycznym malejącym nieskończonym wartości bezwzględne wyrazów maleją nieograniczenie.*

Jeżeli przeto mamy postęp geometryczny malejący nieskończony (10), to w wyrażeniu (4) wartość bezwzględna składnika $a_n q$ w liczniku, z uwagi, że $n = \infty$, jest mniejsza od każdej jakkolwiek małej liczby, tak iż możemy przyjąć (piszemy S zamiast: S_n przy $n = \infty$)

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \tag{12}$$

t. j. *suma wyrazów postępu geometrycznego malejącego nieskończonego jest ilorazem z podzielenia wyrazu pierwszego przez różnicę między jednością a wykładnikiem.* Tak np.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{(-1^n)}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

48. Mając ułamek dziesiętny peryodyczny, wypiszmy jako oddzielne składniki jego części, odpowiadające peryodom. Np.

$$0{\cdot}\dot{5}\dot{7}=\frac{57}{10^2}+\frac{57}{10^4}+\frac{57}{10^6}+\ldots;\ 0{\cdot}213\dot{5}\dot{7}=\frac{213}{10^3}+\frac{57}{10^5}+\frac{57}{10^7}+\frac{57}{10^9}+\ldots.$$

Składniki po stronie prawej pierwszej równości, jakoteż drugi i następne składniki po stronie prawej drugiej równości przedstawiają postęp geometryczny malejący nieskończony. Stosując tedy wzór (12), mamy

$$0{\cdot}\dot{5}\dot{7}=\frac{57\times10^{-2}}{1-10^{-2}}=\frac{57}{99};$$

$$0{\cdot}213\dot{5}\dot{7}=\frac{1}{10^3}\left(213+\frac{57}{99}\right)=\frac{1}{10^3}\cdot\frac{213(100-1)+57}{99}=\frac{21357-213}{99000},$$

zgodnie ze znanemi z arytmetyki prawidłami.

ZASTOSOWANIA DO NIEKTÓRYCH SZEREGÓW.

49. Gdy mamy liczby po sobie następujące według pewnego prawa, to mówimy, iż te liczby tworzą szereg liczb, albo krócej s z e r e g (Reihe). Oddzielne z tych liczb nazywamy w y r a z a m i szeregu. Postępy są szczególnemi szeregami.

Gdy bierzemy na uwagę skończoną ilość wyrazów szeregu, po sobie następujących, to mówimy, że mamy s z e r e g s k o ń c z o n y, gdy zaś uwzględnimy nieskończenie wielką ilość wyrazów, to mówimy, że mamy s z e r e g n i e s k o ń c z o n y.

Kiedy mamy szereg, to zwykle idzie nam o sumę jego wyrazów; dlatego zazwyczaj przedstawiamy szereg, pisząc odrazu sumę algebraiczną jego wyrazów.

W każdym np. z szeregów

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2+\ldots, \tag{1}$$

$$1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots+n(n+1)+\ldots, \tag{2}$$

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots, \tag{3}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{4}$$

prawo następstwa wyrazów po sobie określa wypisany n-ty jego wyraz.

W szeregach (1) i (2) wyrazy w miarę powiększania się n widocznie rosną nieograniczenie, tak iż ich suma jest nieskończenie wielka; są one postępami arytmetycznemi rzędu drugiego (art. 40).

50. 1). Sumę n początkowych wyrazów szeregu (1) nazwijmy S_n. Zważmy, że

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Kładąc w tej równości zamiast n kolejno liczby $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2$, a tak powstałe równości dodając do siebie stronami odpowiedniemi otrzymamy po wykonaniu redukcyj

$$(n+1)^3 = 3[n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1^2]+3[n+(n-1)+\ldots+2+1]+n+1;$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2}+n+1, \quad \text{skąd} \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2). Sumę n początkowych wyrazów szeregu (2) nazwijmy S_n. Ponieważ $n(n+1) = n^2+n$, przeto

$$S_n = (1^2+2^2+\ldots+n^2)+(1+2+\ldots+n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3). Jeżeli S_k oznacza sumę k początkowych wyrazów postępu (3) art. 42-go, to według wzoru (4) art. 43-go suma n poczatkowych wyrazów szeregu skończonego

$$S_1+S_2+\ldots+S_n = a_1 + \frac{a_1 - a_1 q^2}{1-q}+\ldots+\frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} =$$

$$= \frac{a_1}{1-q}[(1-q)+(1-q^2)+\ldots+(1-q^n)],$$

$$S_1+S_2+\ldots+S_n = \frac{a_1 n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}.\frac{q-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_1 n}{1-q} - \frac{a_1 q(1-q^n)}{(1-q)^2}.$$

51. Przy pomocy wzoru (12) art. 47-go można znaleźć sumy wyrazów niektórych szeregów nieskończonych. Np.

1). $S = a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+na^n+\ldots, \qquad (a^2<1),$

$$\begin{aligned} S = a &+ a^2+a^3+a^4+\ldots+a^n+\ldots \\ &+ a^2+a^3+a^4+\ldots+a^n+\ldots \\ &\qquad + a^3+a^4+\ldots+a^n+\ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$S = \frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{1-a}+\frac{a^3}{1-a}+\ldots+\frac{a^n}{1-a}+\ldots = \frac{1}{1-a}.\frac{a}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

2) $S = a+(a+ab).q+(a+ab+ab^2)q^2+\ldots+$
$+(a+ab+ab^2+\ldots+ab^{n-1})q^n+\ldots \qquad [b^2<1, \; q^2<1]$

$$\begin{aligned} S = a+aq &+aq^2 +aq^3 +\ldots+aq^{n-1}+\ldots \\ &+abq+abq^2+abq^3+\ldots+abq^{n-1}+\ldots \\ &\qquad +ab^2q^2+ab^2q^3+\ldots+ab^2q^{n-1}+\ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$S = \frac{a}{1-q}+\frac{abq}{1-q}+\frac{ab^2q^2}{1-q}+\frac{ab^3q^3}{1-q}+\ldots+\frac{ab^{n-1}q^{n-1}}{1-q}+\ldots =$$

$$= \frac{a}{1-q}.\frac{1}{1-bq} = \frac{a}{(1-q)(1-bq)}.$$

52. Wyrazy 4-ty i następne szeregu (3) są mniejsze od odpowiednich wyrazów postępu $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots=\frac{1}{2}$, a więc jest $e<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}$, t. j. $e<3$.

Gdy wyrazy szeregu (4), zwanego harmonicznym, tak zgrupujemy:

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\cdots+\tfrac{1}{16})+\cdots$$

to suma wyrazów w pierwszym nawiasie jest większa od $2\times\frac{1}{4}$, w drugim od $4\times\frac{1}{8}$, w trzecim od $8\times\frac{1}{16}$ i t. d., tak iż suma wyrazów szeregu (4) jest większa od sumy $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$. Ta ostatnia jest liczbą nieskończenie wielką, a więc także suma wyrazów szeregu harmonicznego jest nieskończenie wielka.

ZASTOSOWANIA DO ZADAŃ NA ODSETKI SKŁADANE.

53. Jeżeli odsetki od kapitału k oddanego na $p\%$ po upływie każdego roku dołączamy do kapitału, tak iż w następnym roku odsetki są liczone od kapitału, który w poprzednim roku przynosił odsetki, powiększonego o odsetki za ów rok, to po upływie n lat (n liczba całkowita) utworzy się w ten sposób pewien kapitał, który nazwijmy K. Mówimy wtedy, że kapitał k, oddany na »procent składany« (Zinseszinsen) po $p\%$ (albo: przy »kapitalizowaniu odsetek« po $p\%$), wzrósł do kapitału K.

Ponieważ jednostka kapitału po upływie roku przynosi odsetek $\frac{p}{100}$, przeto ta jednostka po upływie roku staje się kapitałem $1+\frac{p}{100}$, albo, jeżeli $\frac{p}{100}$ nazwiemy r, kapitałem $1+r$. Wskutek tego k jednostek kapitału po upływie pierwszego roku staje się kapitałem $k(1+r)$. Każda jednostka tego kapitału podczas drugiego roku przynosi odsetki i po upływie roku staje się kapitałem $1+r$, a więc $k(1+r)$ jednostek kapitału na początku drugiego roku staje się po upływie tego drugiego roku kapitałem $k(1+r)(1+r)=$ $=k(1+r)^2$. Podobnie ten kapitał po upływie 3-go roku stanie się kapitałem $k(1+r)^2(1+r)=k(1+r)^3$. I t. d. Widocznie te kapitały narosłe po upływie roku 1-go, 2-go, 3-go, ..., t. j. $k(1+r)$, $k(1+r)^2$, $k(1+r)^3, \ldots$, są wyrazami postępu geometrycznego o wykładniku $1+r$. A więc n-ty wyraz tego postępu t. j. kapitał K, narosły po upływie n lat, według wzoru (2) art. 42-go jest

$$K=k(1+r)^n. \tag{1}$$

Gdy weźmiemy logarytmy obu stron tej równości,

$$\log K=\log k+n\log(1+r),$$

to, mając dane 3 z 4-ech liczb k, n, p, K, możemy znaleźć pozostałą czwartą. Kiedy szukamy p, znajdujemy naprzód wartość $1+r$, z której łatwo wyznaczyć $100r=p$.

Obliczono tablice wartości liczby $(1+r)^n$ odpowiadających różnym wartościom n i p. Oto wyjątek z takiej tablicy:

n	p				
	3	3·5	4	4·5	5
1	1·030000	1·035000	1·040000	1·045000	1·050000
2	1·060900	1·071225	1·081600	1·092025	1·102500
3	1·092727	1·108718	1·124864	1·141166	1·157625
4	1·125509	1·147523	1·169859	1·192519	1·215506
.	....	....	....	....	....
14	1·512590	1·618695	1·731676	1·851945	1·979932
15	1·557967	1·675349	1·800944	1·935282	2·078928
.	....	....	....	....	....
32	2·575083	3·006708	3·508059	4·089981	4·764941
33	2·652335	3·111942	3·648381	4·274030	5·003189
.	....	....	....	....	....

Oczywiście, że wzór (1) odnosić się również może do zadań, w których nie mamy do czynienia z kapitałami. Np., w mieście, mającem 120000 ludności, zauważono, iż przyrost roczny ludności wynosi $\frac{1}{3}\%$; ile to miasto liczyć będzie mieszkańców po upływie 100 lat, jeżeli przyrost ludności się nie zmieni? Według wzoru (1) znajdziemy

$$120000\left(1+\frac{1}{300}\right)^{100}=167381.$$

54. We wzorze (1) jest n liczbą całkowitą. Gdyby w odpowiedniem zadaniu zamiast n lat uwzględnić należało n lat i jakąś część roku, którą nazwijmy ν, to za owę część roku należałoby obliczyć odsetki zwykłe od kapitału K obliczonego ze wzoru (1), t. j. do kapitału K dodać odsetek $\frac{p\mathrm{K}\nu}{100}=r\,\mathrm{K}\,\nu$, tak iż wtedy kapitał z narosłemi procentami za lat $n+\nu$ wyniósłby

$$\mathrm{K}'=k(1+r)^n(1+r\nu),\ \text{gdzie } \nu<1. \tag{2}$$

Jeżeli dane są k, r i K a szukana z wzoru (1) wartość n wypada pośrednia między n_1 i n_1+1, to, obliczywszy $(1+r)^{n_1}$, następnie z wzoru (2) (kładąc w nim $n=n_1$) wyznaczamy ν.

Wiele papierów procentowych daje dochód w półrocznych odstępach czasu. Rozumując podobnie, jak przy wyprowadzeniu wzoru (1), znajdziemy, iż przy natychmiastowem kapitalizowaniu tych odsetek po $p\%$ nagromadzi się po upływie n' półroczy kapitał K,

$$\mathrm{K}=k\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n'}.$$

Wzorowi zaś (2) odpowie wzór

$$\mathrm{K}'=k\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n'}(1+\nu' r),\ \text{gdzie } \nu'<\tfrac{1}{2}.$$

55. Jeżeli ktoś przez n lat na początku każdego roku wnosi tę samę kwotę a, »wkładkę« (Einlage), na procent składany po $p\%$, to w końcu n-go roku nagromadzi się pewien kapitał K_1. Złożą się na niego częściowe kapitały, do których wzrasta każda z wkładek a, pierwsza w ciągu n lat, druga w ciągu $n-1$ lat, i t. d., przedostatnia w ciągu 2 lat, ostatnia w ciągu 1-go roku, a więc według (1) jest

$$K_1 = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \ldots + a(1+r)^2 + a(1+r).$$

Mamy tu po stronie prawej sumę n wyrazów postępu geometrycznego, a zatem według wzoru (4) art. 43-go

$$K_1 = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}. \tag{3}$$

Tu wkładki były wnoszone na początku roku. Jeżeliby jednak np. ktoś miał zapewniony przez n lat coroczny dochód a, »rentę« (Rente), wypłacany w końcu każdego roku, a zamiast tej renty chciał otrzymać cały odpowiedni kapitał K_2 w końcu n-go roku, to byłoby

$$K_2 = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r) + a \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}. \tag{4}$$

Kiedy jest niewiadoma jedna z liczb K_1 lub K_2, a, n, to łatwo, używając logarytmów, zadanie rozwiązać. Jeżeli jednak jest niewiadoma liczba p, czyli $100r$, to, wziąwszy logarytmy obu stron wzoru (3) lub (4), będziemy mieli w pierwszym razie trzy, w drugim razie dwa wyrazy, nie ulegające redukcyi, do których wchodzi r, tak, iż tą drogą zadania rozwiązać nie możemy. Dlatego rozwiązujemy je przez próbowanie, jaka wartość p odpowie pozostałym liczbom danym. Im p większe, tem K_1 lub K_2 jest także większe. Bierzemy zatem coraz bliższe siebie dwie wartości p takie, iżby między odpowiadającemi im wartościami, czyto liczby K_1, czy też liczby K_2, przypadała dana wartość tej liczby. Mając zaś już dwie dostatecznie bliskie siebie takie wartości p, bierzemy pośrednią między niemi.

56. Jaka jest dzisiejsza wartość (Barwert) k renty a wypłacanej przez n lat w końcu każdego roku, jeżeli za podstawę rachunku przyjmujemy $p\%$? We wzorze (4) K_2 przedstawia wartość tej renty w końcu n-tego roku. Tego zaś kapitału K_2 dzisiejszą wartość k, otrzymamy ze wzoru (1), jeżeli w nim przyjmiemy $K = K_2$. Mamy więc

$$k(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}, \quad \text{skąd} \quad k = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}.$$

Ktoś corocznie przez n lat wnosi kwotę a na procent składamy po $p\%$; jaki kapitał k potrzebowałby w chwili wniesienia pierwszej wkładki złożyć jednorazowo, aby po upływie n lat zebrała się taż sama suma, co z owych wkładek corocznych? Suma nagromadzona po n latach z corocznych wkładek jest określona wzorem (3); dzisiejszą jej wartość k znajdziemy ze wzoru (1), kładąc w nim $K = K_1$, a więc

$$k(1+r)^n = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}, \quad \text{skąd} \quad k = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{6}$$

Zauważymy, że w zadaniach, istotnie w praktyce zdarzających się, odpowiadających wzorom (5) i (6), przedewszystkiem bywa ustalana liczba $p\%$, tak iż mogą w takich zadaniach być niewiadome albo k, albo a, alboteż n.

W ostatnim przypadku, jeżeliby z rachunku wartość n wypadała ułamkowa, $m < n < m+1$, to w zadaniach istotnie w praktyce się zdarzających, wylicza się wartość k, odpowiadającą całkowitemu m, co do różnicy zaś między pierwotnie daną a tak wyliczoną wartością k, zawiera się dodatkową umowę.

Jeżeli we wzorze (5) kapitał k przedstawia dług, z którego się dłużnik uiszcza wierzycielowi, płacąc corocznie po a, to w odpowiedniem zadaniu mówimy, iż dług k »umarza się« (amortisiert, getilgt) corocznemi »ratami« (Raten) a.

Gdyby wzory (3), (4), (5) i (6) wypadało odnieść do liczb a przedstawiających, czyto półroczne wkładki, czyteż półroczną rentę, to należałoby w tych wzorach zamiast r wziąć $\frac{r}{2}$ i jednocześnie ilość lat n zastąpić przez ilość półroczy.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

ZESTAWIENIA. OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

ZESTAWIENIA ELEMENTÓW RÓŻNYCH.

57. Mając pewną ilość np. n znaków, liter, lub wogóle przedmiotów — nazywać je będziemy ogólnie elementami (Elemente) — możemy wziąć ich ν (przy $\nu \leqslant n$) i ustawić je w pewnem po sobie następstwie. Powiemy w takim razie, żeśmy utworzyli z n danych elementów zestawienie (Complexion) wziętych ν elementów. Np. mając 5 liter *w, i, s, ł, a*, możemy wziąwszy 4 ostatnie z nich utworzyć zestawienie *s, i, ł, a*; zwykle w zestawieniu nie oddzielamy od siebie elementów żadnemi znakami, tak, iż to zestawienie napiszemy *siła*, czytając jednak te litery oddzielnie i przez to zestawienie nie rozumiejąc iloczynu tych liter. Z tychże 5-u liter możemy, biorąc je po 4, utworzyć inne ich zestawienia: *wasi*, *wiła*, *siwa*, *łais*, i t. d.

Rozważymy naprzód przypadek, kiedy, jak w powyższym przykładzie, między danemi elementami niema jednakowych.

Oznaczać będziemy elementy przez tę samę literę ze wskaźnikami od 1 do n. Tak np., jeżeli w powyższym przykładzie nazwiemy $w=a_1$, $i=a_2$, $s=a_3$, $ł=a_4$, $a=a_5$, to powyżej wypisane zestawienia będą $a_3a_2a_4a_5$, $a_1a_5a_3a_2$, $a_1a_2a_4a_5$, $a_3a_2a_1a_5$, $a_4a_5a_2a_3$. Gdybyśmy zaś wypisali same tylko wskaźniki, uważając je jako elementy (nie zaś jako cyfry liczb), mielibyśmy zestawienia 3245, 1532, 1245, 3215, 4523.

58. Gdy utworzymy wszystkie możliwe zestawienia z n elementów po ν, to te zestawienia nazywamy od wyrazu »variatio« (zmiana) waryacyami (Variationen) z n elementów po ν.

Waryacyj z n elementów $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ po jednym może być oczywiście tylko n, gdyż każda będzie utworzona przez jeden z tych elementów. Aby mieć wszystkie waryacye z tychże n elementów po 2, należy do każdej z poprzednich waryacyj (po jednym elemencie) przystawić coraz inny z pozostałych $n-1$ elementów; będzie więc: $a_1a_2, a_1a_3, \ldots, a_1a_n$; $a_2a_1, a_2a_3, \ldots, a_2a_n$; $a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, \ldots, a_3a_n$; . . .; $a_na_1, a_na_2, \ldots, a_n a_{n-1}$. Ilość ich jest $n(n-1)$. Przypuśćmy, żeśmy już utworzyli wszystkie waryacye z tychże n elementów po λ, których ilość nazwijmy W_n^λ, rozumiejąc, iż w tym symbolu λ nie jest wykładnikiem, lecz wskaźnikiem. Jeżeli chcemy utworzyć wszystkie waryacye z tychże n elementów po $\lambda+1$, to należy do każdej z poprzednich waryacyj przystawić coraz inny z pozostałych $n-\lambda$ elementów, tak iż wszystkich waryacyj z n elementów po $\lambda+1$ będzie $(n-\lambda)\ W_n^\lambda$, t. j. $W_n^{\lambda+1}=(n-\lambda)W_n^\lambda$.

Jeżeli w tym wzorze ogólnym przyjmiemy kolejno $\lambda=\nu-1,\ \nu-2, \ldots, 2, 1$, to mieć będziemy

$$W_n^\nu=(n-(\nu-1))\,W_n^{\nu-1},\ W_n^{\nu-1}=(n-(\nu-2))\,W_n^{\nu-2}, \ldots, W_n^3=(n-2)\,W_n^2,\ W_n^2=(n-1)W_n^1.$$

Ponieważ, jak widzieliśmy, $W_n^1=n$, przeto z powyższych równości wynika

$$W_n^\nu=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\nu+2)(n-\nu+1), \qquad (1)$$

t. j. *ilość wszystkich waryacyj z n elementów po ν, jest iloczynem ν kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest n.* Tak np. z 5-u elementów waryacyj po 1, po 2, po 3, po 4 i po 5 jest odpowiednio: 5, 5.4=20, 5.4.3=60, 5.4.3.2=120, 5.4.3.2.1=120. Z 4-ch elementów a_1, a_2, a_3, a_4 możemy waryacyj po 3 elementy utworzyć 4.3.2=24.

$a_1a_2a_3$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_1a_2$	$a_1a_3a_2$	$a_2a_1a_3$	$a_3a_2a_1$
$a_1a_2a_4$	$a_2a_4a_1$	$a_4a_1a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_2a_1a_4$	$a_4a_2a_1$
$a_1a_3a_4$	$a_3a_4a_1$	$a_4a_1a_3$	$a_1a_4a_3$	$a_3a_1a_4$	$a_4a_3a_1$
$a_2a_3a_4$	$a_3a_4a_2$	$a_4a_2a_3$	$a_2a_4a_3$	$a_3a_2a_4$	$a_4a_3a_2$.

Tu w pierwszym wierszu mamy wypisane wszystkie waryacye z 3-ech elementów a_1, a_2, a_3 po 3, w drugim z 3-ch elementów a_1, a_2, a_4 po 3, w trzecim z 3-ech elementów a_1, a_3, a_4 po 3, w czwartym z 3-ech elementów a_2, a_3, a_4 po 3.

59. Przypatrując się wypisanym tylkoco waryacyom, widzimy, że wszystkie znajdujące się w tym samym wierszu, odróżniają się od siebie jedynie porządkiem, w jakim elementy po sobie następują; znajdujące się zaś w różnych wierszach odróżniają się od siebie przynajmniej jednym elementem.

Gdy z pewnych ν elementów (jakby w powyższym przykładzie z 3-ech) tworzymy wszystkie zestawienia po ν, różniące się od siebie tylko porządkiem, to mówimy, że tworzymy z tych ν elementów wszystkie przemiany (Permutationen); one są oczywiście waryacyami z ν elementów po ν. Jeżeli więc ogólnie ilość przemian z n elementów nazwiemy P_n, to

$$P_n=W_n^n, \text{ czyli } P_n=1.2.3\ldots n, \qquad (2)$$

t. j. *ilość wszystkich przemian z n elementów jest iloczynem kolejnych liczb całkowitych od* 1 *do n.* Tak np. z 3-ch elementów a_1, a_2, a_3 mamy wypisane przemiany w pierwszym wierszu ostatniego przykładu w art. poprzedzającym; jest ich 1.2.3=6.

Jeżeli mamy wszystkie W_n^ν waryacyj z n elementów po ν, to można je rozłożyć na grupy (w przykładzie ostatnim art. poprzedzającego wypisane w oddzielnych wierszach) tak, iżby w każdej grupie były te waryacye, które jednocześnie są przemianami pewnych ν elementów. W każdej zatem takiej grupie będzie P_ν waryacyj. Wskutek tego, jeżeli ilość grup nazwiemy K_n^ν, jest $P_\nu . K_n^\nu = W_n^\nu$, skąd

$$K_n^\nu = \frac{W_n^\nu}{P_\nu}, \quad \text{czyli} \quad K_n^\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}. \tag{3}$$

Jeżeli z każdej takiej grupy zatrzymamy jednę tylko waryacyą (którąkolwiek), a inne odrzucimy, to każde dwa z tych zatrzymanych zestawień z n elementów po ν będą się od siebie różniły przynajmniej jednym elementem. Takie zestawienia nazywamy kombinacyami (Combinationen) z n elementów po ν. Ilość ich wyznacza wzór (3). A więc *ilość kombinacyj z n elementów po ν jest równa iloczynowi ν kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest n, podzielonemu przez iloczyn liczb całkowitych od* 1 *do* ν. Tak np. w wypisanym przykładzie ilość kombinacyj z 4-ch elementów po 3 jest $\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$. Podobnie ilość kombinacyj z 5-u elementów po 2 jest $\frac{5.4}{1.2}=10$ (porównaj art. 38 i 44).

Tak waryacye jak i kombinacye z n elementów po jednym nazywają się »pojedynczemi« (erster Classe), po dwa »podwójnemi« (zweiter C.), po trzy »potrójnemi« (dritter C.) i t. d.

60. Ponieważ ilość kombinacyj jest liczbą całkowitą, we wzorze (3) zaś n może być jakąkolwiek liczbą całkowitą niemniejszą od ν, przeto z tego wzoru wynika, iż iloczyn ν po sobie następujących liczb całkowitych jest podzielny przez iloczyn liczb od 1 do ν.

Według (3) jest

$$K_n^\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}, \quad K_n^{n-\nu} = \frac{n(n-1)\ldots(\nu+1)}{1.2.3\ldots(n-\nu)}.$$

Jeżeli licznik i mianownik pierwszego wyrażenia pomnożymy przez iloczyn $1.2.3\ldots(n-\nu)$, drugiego zaś przez iloczyn $1.2.3\ldots\nu$, to będziemy mieli

$$K_n^\nu = K_n^{n-\nu} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\nu . 1.2.3\ldots(n-\nu)}, \tag{4}$$

t. j. *ilość kombinacyj z n elementów po ν jest równa ilości kombinacyj z n elementów po $n-\nu$.*

Iloczyn liczb od 1 do n oznacza się przez skrócenie $n!$, tak iż symbol $n! = 1.2.3\ldots n$ i można go czytać albo »n z wykrzyknikiem« alboteż »n wykrzyknik«. Wprowadzając to oznaczenie wzory (2) i (4) możemy napisać

$$P_n = n!, \quad K_n^\nu = K_n^{n-\nu} = \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}.$$

Z uwagi, że oznaczenie ilości kombinacyj często do rachunku wprowadzać należy, używane bywają na nie symbole, mianowicie prócz K_n^ν, jeszcze albo $\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} = \binom{n}{\nu}$, alboteż $\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} = (n)_\nu$;

każdy z tych symbolów, jako przedstawiający »ilość kombinacyj z n po ν«, można przez skrócenie czytać albo »z n po ν« alboteż »n po ν«.

61. Pośród wszystkich kombinacyj z n elementów po ν są takie, do których wchodzi pewien dowolnie obrany jeden z tych n elementów (np. a_1), i takie, do których ów element nie wchodzi. Pierwszych kombinacyj jest oczywiście tyle, ile ich można utworzyć z $n-1$ pozostałych elementów po $\nu-1$, drugich zaś tyle, ile ich można utworzyć z $n-1$ pozostałych elementów po ν. A więc

$$\binom{n}{\nu}=\binom{n-1}{\nu-1}+\binom{n-1}{\nu}. \tag{5}$$

Mając elementy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$, zwróćmy uwagę np. na ostatnich $n-\nu+1$ z wypisanych elementów, t. j. na elementy $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{r+1}, a_\nu$. Pośród wszystkich kombinacyj z n elementów po ν, kombinacyj, do których wchodzi element a_n, jest tyle, ile jest kombinacyj z $n-1$ elementów po $\nu-1$. Oddzielmy te kombinacye; pozostałe są kombinacyami z $n-1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-1}$ po ν. Pośród nich, kombinacyj, do których wchodzi element a_{n-1}, jest tyle, ile jest kombinacyj z $n-2$ elementów po $\nu-1$. Oddzielmy także i te kombinacye; pozostałe będą kombinacyami z $n-2$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-2}$ po ν. Z nich oddzielmy te kombinacye, do których wchodzi element a_{n-2}, i t. d. Dojdziemy w ten sposób do tego, iż pozostaną już kombinacye z $\nu+1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}$ po ν; do nich albo wchodzi element $a_{\nu+1}$ (ich jest tyle, ile jest kombinacyj z ν po $\nu-1$), albo też nie wchodzi (jest ich tyle, ile jest kombinacyj z ν elementów po ν, t. j. jedna). Ta ostatnia kombinacya ma element a_ν i możemy powiedzieć (dla jednostajności), że takich kombinacyj jest tyle, ile jest kombinacyj z $\nu-1$ elementów po $\nu-1$ (t. j. także jedna). A zatem

$$\binom{n}{\nu}=\binom{n-1}{\nu-1}+\binom{n-2}{\nu-1}+\cdots+\binom{\nu}{\nu-1}+\binom{\nu-1}{\nu-1}. \tag{6}$$

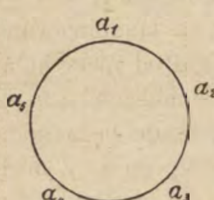
Wypisawszy liczby, wyrażające ilości kombinacyj z $n=1, 2, 3, \ldots, n$ elementów każdym razem po $\nu=1, 2, \ldots, n-1, n$,

$$\begin{array}{lll}
\binom{1}{1}, & \text{czyli} & 1, \\
\binom{2}{1}, \binom{2}{2}, & & 2,\ 1, \\
\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}, & & 3,\ 3,\ 1, \\
\binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}, & & 4,\ 6,\ 4,\ 1, \\
\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}, & & 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1, \\
\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

utworzymy tak zwany »trójkąt Pascal'a« (Pascal'sches Dreieck). Według wzoru (5) którakolwiek liczba (drugiej lub dalszej kolumny) w tym trójkącie jest sumą dwu liczb poprzedniego wiersza: nad nią się znajdującej i poprzedniej. A według wzoru (6) suma początkowych n liczb którejkolwiek kolumny jest równa n-tej liczbie w kolumnie następującej. Z tego zaś wynika, że liczby ν-tej kolumny przedstawiają postęp arytmetyczny ν-tego rzędu (art. 40). Nadto, jeżeli jakąkolwiek z tych liczb np. liczbę λ uzmysłowimy zapomocą λ kul jednakowej wielkości, to jakakolwiek liczba drugiej kolumny, np. zajmująca w niej k-te miejsce, przedstawia ilość kul potrzebnych do utworzenia z nich trójkąta równobocznego, którego bok powstał z k kul, zaś k-ta liczba w trzeciej kolumnie przedstawia ilość kul potrzebnych do utworzenia czworościanu foremnego, którego krawędź powstała z k kul. Dlategoto liczby drugiej kolumny nazywają się »trójkątnemi« (Trigonalzahlen), trzeciej »czworościennemi« (Tetraedralzahlen) (albo »piramidalnemi«), a wogóle liczby trójkąta Pascal'a nazywają się liczbami »figurowemi« (figurirte Z.) [1]).

62. W jaki sposób można metodycznie wypisywać przemiany, kombinacye i waryacye?

Gdy np. z 5-u elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mamy wypisać wszystkie przemiany, to najdogodniej postąpimy, gdy nakreślimy koło i na jego okręgu rozmieścimy np. w powyżej wypisanym porządku tych 5 elementów. Następnie wypisywać je będziemy po sobie tak, jak one na okręgu następują, poczynając kolejno od coraz innego z tych elementów, np. w kierunku ku stronie prawej. Otrzymamy w ten sposób 5 przemian:



$$a_1a_2a_3a_4a_5,\quad a_2a_3a_4a_5a_1,\quad a_3a_4a_5a_1a_2,\quad a_4a_5a_1a_2a_3,\quad a_5a_1a_2a_3a_4.$$

Aby utworzyć inne przemiany, w każdej z powyższych 5-u zatrzymamy jeden np. pierwszy element, a pozostałe 4 rozmieścimy na okręgu innego koła i 4 z nich przemiany, w podobny sposób otrzymane, dopiszemy kolejno do owego zatrzymanego elementu. Tak np. z pierwszej z wypisanych przemian, otrzymamy przemiany

$$a_1a_2a_3a_4a_5,\quad a_1a_3a_4a_5a_2,\quad a_1a_4a_5a_2a_3,\quad a_1a_5a_2a_3a_4.$$

W każdej z tak powstałych 5.4 t. j. 20-u przemian, zatrzymamy znowu dwa np. dwa pierwsze elementy, i t. d.

Gdy np. z 6-u elementów

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \tag{7}$$

mamy wypisać wszystkie kombinacye np. po 3 elementy, to tak najdogodniej postąpimy. Utworzymy z tych elementów wszystkie kombinacye pojedyncze

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6.$$

Aby z nich utworzyć kombinacye podwójne, opuśćmy kombinacyą a_6, a do każdej z pozostałych dopiszmy kolejno każdy z elementów (7), mający większy wskaźnik; otrzymamy:

$$\begin{array}{l} a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_1a_5,\ a_1a_6; \\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_2a_5,\ a_2a_6; \\ a_3a_4,\ a_3a_5,\ a_3a_6; \\ a_4a_5,\ a_4a_6; \\ a_5a_6. \end{array} \tag{8}$$

Aby utworzyć kombinacye potrójne, opuśćmy te z kombinacyj (8), w których

[1]) Wyrażenia liczb figurowych podali Fermat w r. 1636 i Pascal w r. 1650; utworzony zaś z tych liczb powyższy »trójkąt«, nazwany przez Pascal'a triangulus arithmeticus, podał był jeszcze Stifel w r. 1544.

ostatnim elementem jest a_6, a do każdej z pozostałych kombinacyj dopiszmy kolejno każdy z elementów (7), mający większy wskaźnik,

$a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5$, $a_1a_2a_6$; $a_1a_3a_4$, $a_1a_3a_5$, $a_1a_3a_6$; $a_1a_4a_5$, $a_1a_4a_6$; $a_1a_5a_6$;
$a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_5$, $a_2a_3a_6$; $a_2a_4a_5$, $a_2a_4a_6$; $a_2a_5a_6$;
$a_3a_4a_5$, $a_3a_4a_6$; $a_3a_5a_6$;
$a_4a_5a_6$.

Postępowanie to jest oparte na wzorze (6). Jeżeli jednak idzie o wypisanie kombinacyj z n elementów po ν, kiedy ν jest większe od połowy n, np. o wypisanie kombinacyj 6-u elementów (7) po 4, to praktyczniej, po wypisaniu kombinacyj podwójnych (8), odrazu, opierając się na wzorze (4), wypisać kombinacye tych elementów, które nie wchodzą do kombinacyj (8); wypisując je w porządku odwrotnym, będziemy mieli

$$a_1a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3a_5,\ a_1a_2a_3a_6,\ a_1a_2a_4a_5,\ \text{i t. d.}$$

Aby wypisać wszystkie waryacye z n elementów po ν, wypiszemy naprzód wszystkie kombinacye, a następnie w każdej kombinacyi wszystkie przemiany. (Por. przykład ostatni art. 58-go).

ZESTAWIENIA ELEMENTÓW, POŚRÓD KTÓRYCH SĄ JEDNAKOWE.

63. Jeżeli, mając n elementów różnych od siebie i utworzywszy wszystkie $n!$ ich przemian, przypuścimy następnie, że z nich np. a_1, a_2, ..., a_k, stały się sobie równymi i zastąpimy je jednym znakiem np. α_1, to okażą się zestawienia jednakowe. Jednakowemi z sobą mianowicie będą zestawienia powstałe z tych przemian pierwotnych, w których owe elementy a_1, ..., a_k, zajmowały pewnych k miejsc (np. k pierwszych). Takich zaś przemian mogło być tyle, ileby przemian z elementów na owych miejscach utworzyć można było, t. j. $k!$ A więc $k!$ pierwotnych przemian stały się jednakowemi zestawieniami. Toż samo można powiedzieć o każdej innej grupie $k!$ przemian pierwotnych, w których owe k elementów a_1, a_2, ..., a_k, zajmuje pewnych k miejsc. Pozostanie więc $\frac{n!}{k!}$ przemian różnych.

Jeżeli wogóle pośród n elementów jest elementów k równych α_1, elementów l równych α_2,..., elementów m równych α_r, tak iż $k+l+...+m=n$, to ilość różnych przemian jest

$$\frac{n!}{k!\,l!\,...\,m!}.$$

Tak np. różnych przemian z elementów α_1, α_1, α_1, α_2, α_2, α_3, α_4, jest $\frac{7!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!}=420$.

64. Waryacye i kombinacye z n elementów, pośród których są jednakowe, po ν rozważane bywają najczęściej w przypuszczeniu, iż jest $\frac{n}{\nu}=r$ różnych elementów od siebie, a każdy z nich zjawia się ν razy. Zwykle nadto mówi się w takim razie o waryacyach i kombinacyach z r elementów (mając na myśli różne) po ν, przyjmując, że w zestawieniu oddzielnem każdy z elementów różnych powtarzać się może. Gdyby więc szło o takie waryacye lub kombinacye z r elementów »po $\nu+1$«, to każdy z r elementów różnych zjawiaćby się mógł $\nu+1$ razy, i t. d.

Ilość waryacyj i kombinacyj z takich r różnych elementów, mogących się powtarzać, po ν oznaczać będziemy odpowiednio $(W)_r^\nu$, $(K)_r^\nu$, elementy zaś różne od siebie nazwiemy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Oczywiście jest $(W)_r^1 = W_r^1 = r$, $(K)_r^1 = K_r^1 = \binom{r}{1} = r$, $(W)_1^\nu = 1$, $(K)_1^\nu = 1$.

Przyjmijmy, żeśmy już utworzyli wszystkie $(W)_r^\lambda$ różnych waryacyj z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ po λ i że chcemy otrzymać wszystkie różne po $\lambda+1$. Do każdej z waryacyj po λ wypadnie przystawić każdy z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, a więc będziemy mieli r razy więcej waryacyj po $\lambda+1$, niż jest waryacyj po λ, tak iż $(W)_r^{\lambda+1} = r.(W)_r^\lambda$. Że zaś waryacyj pojedynczych jest oczywiście r, $(W)_r^1 = r$, przeto $(W)_r^2 = r^2$, i wogóle

$$(W)_r^\nu = r^\nu. \tag{1}$$

Np. z elementów α_1, α_2 różnych waryacyj po 3, mamy $(W)_2^3 = 2^3$,

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_2.$$

Przyjmijmy, żeśmy już utworzyli wszystkie $(K)_r^\lambda$ różnych kombinacyj z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ po λ i że chcemy otrzymać wszystkie różne po $\lambda+1$. Możemy to uskutecznić w taki sposób: dopiszemy do elementu α_1 wszystkie $(K)_r^\lambda$ różnych kombinacyj z tychże r elementów; do elementu α_2 wszystkie $(K)_{r-1}^\lambda$ różnych kombinacyj z $r-1$ elementów $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$; do elementu α_3 wszystkie $(K)_{r-2}^\lambda$ różnych kombinacyj z $r-2$ elementów $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_r$; i t. d.; do elementu α_{r-1} wszystkie $(K)_2^\lambda$ różnych kombinacyj z dwu elementów α_{r-1}, α_r; nakoniec do elementu α_r dopiszemy $(K)_1^\lambda$ t. j. jednę kombinacyą utworzoną przez same elementy α_r. Jest więc

$$(K)_r^{\lambda+1} = (K)_r^\lambda + (K)_{r-1}^\lambda + (K)_{r-2}^\lambda + \cdots + (K)_2^\lambda + (K)_1^\lambda. \tag{2}$$

Ze wzoru (2) przy $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu$ wynika na mocy wzoru (6) art. 61-go stopniowo

$$(K)_r^2 = \binom{r}{1} + \binom{r-1}{1} + \binom{r-2}{1} + \cdots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} = \binom{r+1}{2},$$

$$(K)_r^3 = \binom{r+1}{2} + \binom{r}{2} + \binom{r-1}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = \binom{r+2}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(K)_r^\nu = \binom{r+\nu-2}{\nu-1} + \binom{r+\nu-3}{\nu-1} + \cdots + \binom{\nu-2}{\nu-1} + \binom{\nu-1}{\nu-1} = \binom{r+\nu-1}{\nu}.$$

A więc

$$(K)_r^\nu = \binom{r+\nu-1}{\nu}. \tag{3}$$

Np. z elementów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ różnych kombinacyj po 3 jest $(K)_3^3 = \binom{5}{3} = 10$,

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_3\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_3\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_3\alpha_3.$$

65. Z elementów $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (por. art. 63) różne kombinacye: po jednym elemencie są $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; po 2 są $\alpha_1\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_2\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \alpha_3\alpha_4$; po 3 są $\alpha_1\alpha_1\alpha_1, \alpha_1\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_1\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_3\alpha_4, \alpha_2\alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_2\alpha_4, \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots$; po 7 jedna $\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

Gdybyśmy z tych elementów chcieli utworzyć wszystkie różne waryacye, to utworzywszy z tych elementów różne kombinacye, wypadałoby z każdej kombinacyi utworzyć wszystkie przemiany (art. 63). Tak np. z kombinacyi $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ otrzymamy $\frac{3!}{2!\,1!} = 3$ przemiany: $\alpha_1\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_1$.

ZASTOSOWANIA DO ZADAŃ NA OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

66. Niech w urnie znajduje się np. 10 gałek równej wielkości i ciężaru, oraz jednakich w dotknięciu, z których np. 5 jest białych a pozostałe czarne. Jeżeli wyciągniemy jednę gałkę z urny i napowrót ją do niej wrzucimy, znowu wyciągniemy jednę gałkę i ją wrzucimy i t. d., to powtarzając tę czynność niewielką ilość razy, np. 6 razy, możemy wyciągnąć 3 razy białą gałkę a 3 razy czarną, albo 4 razy czarną a 2 razy białą, lub przeciwnie, albo 5 razy gałkę czarną, a raz białą, lub przeciwnie, albo każdym razem gałkę białą, alboteż każdym razem gałkę czarną. Gdybyśmy jednak tę czynność powtarzali znacznie większą ilość razy np. 3000 razy, to albo tak ilość wyciągniętych gałek białych, jak i ilość wyciągniętych gałek czarnych, będzie $\frac{1}{2}$ ilości dokonanych wyciągnięć, alboteż owe dwie liczby będą się od siebie niewiele różniły, co, wogóle mówiąc, odpowie stosunkowi ilości gałek białych i czarnych w urnie.

Podobnie towarzystwo ubezpieczeń, przyjmując według swoich zasad, opartych na odpowiednich obliczeniach starannych, zabezpieczenie kapitału pośmiertnego od niewielu osób, może nie ponieść straty, ani nie osiągnąć zysku, ale także może stosunkowo znacznej doznać straty, alboteż znaczny mieć zysk. Gdy jednak w owem towarzystwie kapitały pośmiertne zabezpiecza bardzo wiele osób, to zyski i straty będą się równoważyły tak, iż cała taka operacya finansowa odpowie zasadom przyjętym przez to towarzystwo przy przyjmowaniu zabezpieczeń.

Biorąc na uwagę wydarzenia jednego rodzaju (np. powyższe wyciąganie gałek z urny lub zabezpieczenia kapitałów pośmiertnych) pytać się możemy o to, ile pośród nich może być wydarzeń czyniących zadość pewnemu zgóry postawionemu warunkowi. Stosunek ilości wydarzeń odpowiadających owemu warunkowi do ogółu wszystkich wydarzeń, pośród których je rozważamy, odpowiada pojęciu, które wiążemy z przewidywaną możliwością (szansą) pojawienia się takiego wydarzenia. Stosunek taki nazywamy prawdopodobieństwem (Wahrscheinlichkeit) owego wydarzenia.

Tak np. gdy w urnie jest 40 gałek jednakowych, z których 24 są białe, a pozostałe czarne, to moglibyśmy równie dobrze którąkolwiek z tych 40-u gałek wyciągnąć. Wyciągnięta może się okazać albo gałką białą, alboteż czarną. Możliwość jednak wydarzenia, iż gałka wyciągnięta będzie biała, jest większa niż możliwość, że wyciągnięta gałka będzie czarna. Z ogółu 40-u wszystkich przypadków możebnych wyciągnięcia którejkolwiek gałki przypadków pomyślnych dla wydarzenia, iż wyciągnięta gałka będzie biała, jest 24. Stosunek ilości możliwych przypadków, pomyślnych dla tego wydarzenia, do ilości wszystkich przypadków możebnych, t. j. prawdopodobieństwo wyciągnięcia z tej urny gałki białej, jest $p=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$. Prawdopodobieństwo zaś wyciągnięcia gałki czarnej jest $p=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$.

Im p jest bliższe 1, tem wydarzenie jest prawdopodobniejsze. Jeżeli $p=1$, prawdopodobieństwo jest »pewnością«; jeżeli $p=\frac{1}{2}$, wydarzenie jest »niepewne«; jeżeli $p<\frac{1}{2}$, wydarzenie jest »nieprawdopodobne«; jeżeli nakoniec jest $p=0$, wydarzenie jest »niemożliwe«.

67. 1). Jeżeli w urnie mamy n_1 gałek białych i n_2 czarnych, to jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia ν gałek białych? — Z urny wyciągnąć możemy którekolwiek ν ze znajdujących się w niej n_1+n_2 gałek. Jako więc przypadki możebne uważać należy różne kombinacye z n_1+n_2 gałek po ν. Z nich każda $\binom{n_1}{\nu}$ kombinacyj samych tylko gałek białych byłaby przypadkiem pomyślnym. Prawdopodobieństwo zatem tego wydarzenia jest

$$p=\binom{n_1}{\nu}:\binom{n_1+n_2}{\nu}=\frac{n\ldots(n_1-\nu+1)}{(n_1+n_2)\ldots(n_1+n_2-\nu+1)}.$$

2). Jeżeli w urnie mamy n_1 gałek białych i n_2 czarnych, to jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny ν_1 gałek białych i ν_2 gałek czarnych? — Jakichkolwiek $\nu_1+\nu_2$ gałek może być z urny wyciągniętych $\binom{n_1+n_2}{\nu_1+\nu_2}$ różnemi sposobami, którato liczba przedstawia ilość przypadków możebnych. Przypadkami zaś pomyślnemi będą te, w których obok jakiejkolwiek z $\binom{n_1}{\nu_1}$ kombinacyj gałek białych zjawi się jakakolwiek z $\binom{n_2}{\nu_2}$ kombinacyj gałek czarnych. A więc prawdopodobieństwo wydarzenia jest

$$p=\left[\binom{n_1}{\nu_1}\binom{n_2}{\nu_2}\right]:\binom{n_1+n_2}{\nu_1+\nu_2}.$$

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż z talii o 52-u kartach wyciągniemy 3 karty (któregokolwiek) z czterech »kolorów«? — Ilość wszystkich możebnych przypadków wyciągnięcia po 3 karty jest $\binom{52}{3}$. Ilość przypadków pomyślnych w oddzielnym z czterech kolorów jest $\binom{13}{3}$; a więc we wszystkich czterech kolorach jest $4.\binom{13}{3}$. Prawdopodobieństwo więc wydarzenia jest

$$p=\left[4\binom{13}{3}\right]:\binom{52}{3}=\frac{22}{425}.$$

68. Z koła loteryjnego, obejmującego 90 numerów, wyciąga się 5 numerów; jakie jest prawdopodobieństwo, iż pośród numerów wyciągniętych znajdzie się pewien z 90-u wszystkich numerów? — Jakichkolwiek 5 numerów może być wyciągniętych $\binom{90}{5}$ różnemi sposobami; ich ilość przedstawia przypadki możebne. Ilość zaś przypadków pomyślnych, t. j. iż pewien numer znajdzie się pośród wyciągniętych 5-u, przedstawiona będzie przez ilość możliwych kombinacyj z pozostałych numerów po 4, które obok owego numeru mogłyby się znaleźć; a więc ich ilość jest $\binom{89}{4}$. Prawdopodobieństwo przeto tego wydarzenia jest $p=\binom{89}{4}:\binom{90}{5}=\frac{1}{18}$.

Taksamo rozumując, znajdziemy, iż prawdopodobieństwo, że pośród wyciągniętych 5-u znajdą się: pewne 2 numery, jest $p=\binom{88}{3}:\binom{90}{5}=\frac{2}{801}$; pewne 3, jest $p=\binom{87}{2}:\binom{90}{5}=\frac{1}{11748}$; pewne 4, jest $p=\binom{86}{1}:\binom{90}{5}=\frac{1}{511038}$; nakoniec pewne 5, jest $p=1:\binom{90}{5}=\frac{1}{43949268}$.

69. 1). Rzucając raz kostkę możemy »wyrzucić« którąkolwiek z 6 u liczb, tak iż prawdopodobieństwo wyrzucenia jednej z tych liczb jest $p=\frac{1}{6}$.

2). W dwu rzutach kostki możemy wyrzucić $(W)_6^2=6^2$ różnych par liczb. Między tymi parami jest 6 par liczb jednakowych. Prawdopodobieństwo wyrzucenia pewnej pary jest $p=\frac{1}{36}$, prawdopodobieństwo zaś wyrzucenia którejkolwiek pary jest $p=\frac{1}{6}$.

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż w 5-u rzutach kostki wyrzucimy 3 (nie więcej) jednakowe liczby? — Pięcioma rzutami możemy wyrzucić zestawienia 5-u liczb $(W)_6^5=6^5$ sposobami. Pewne 3 liczby pośród 5-u wyrzuconych mogą się zjawić $\binom{5}{3}.(W)_5^2$ razy, gdyż obok każdego z owych $\binom{5}{3}$ wyrzuceń 3-ch liczb jednakowych, w każdym z pozostałych dwu rzutów może być wyrzucona każda z pozostałych 5-u liczb. Ponieważ zaś nam nie idzie o pewne 3 liczby jednakowe, lecz o jakiekolwiek 3 liczby jednakowe, należy ostatnią liczbę pomnożyć przez 6. A więc dzieląc $\binom{5}{3}.5^2.6$ przez 6^5 znajdziemy prawdopodobieństwo wydarzenia $p=\frac{125}{648}$.

4). Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby 7? — W dwu rzutach możemy wyrzucić 6^2 różnych par liczb. Suma liczb jednej pary może być 7, kiedy, wyrzuciwszy pierwszym razem jednę z liczb $1, 2, \ldots, 6$, drugim razem trafi się rzucić odpowiednio $6, 5, \ldots, 1$ a więc pomyślnych podwójnych rzutów może być 6. Prawdopodobieństwo zatem wyrzucenia w dwu rzutach liczby 7 jest $p=\frac{1}{6}$.

5). Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby 9? — Tu pomyślnemi będą [1]) tylko rzuty 3 i 6, 4 i 5, 5 i 4, 6 i 3. A więc prawdopodobieństwo tego wydarzenia jest $p=\frac{4}{6^2}=\frac{1}{9}$.

70. Jeżeli na n przypadków możebnych wydarzenie A zachodzić może a razy tak, iż prawdopodobieństwo tego wydarzenia A jest $p=\frac{a}{n}$, to prawdopodobieństwo tego, iż owo wydarzenie A nie nastąpi jest $p'=\frac{n-a}{n}=1-p$. Tak np., w przykładzie art. 66-go prawdopodobieństwo, iż gałka biała nie będzie wyciągnięta, jest $p'=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. Podobnie prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki nie wyrzucimy liczby 7, jest (art. 69, zad. 4) $p'=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

71. Jeżeli na n przypadków możebnych wydarzenie A_1 zachodzić może a_1 razy, wydarzenie A_2 razy a_2, wydarzenie A_3 razy a_3, to prawdopodobieństwo p_1, iż nastąpi którekolwiek z tych wydarzeń, t. j. czyto A_1, czyto A_2, czyteż A_3, jest $p=\frac{a_1+a_2+a_3}{n}=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\frac{a_3}{n}=p_1+p_2+p_3$, jeżeli p_1, p_2, p_3 są prawdopodobieństwami każdego z wydarzeń A_1, A_2, A_3 oddzielnie.

1). Prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki wyrzucimy czyto dwie liczby równe sobie (art. 69, zad. 2), czyteż liczbę 7 (art. 69, zad. 4), jest $p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

---

[1]) Wogóle, jeżeli wykonamy $(a^1+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^2$, to spółczynnik przy a^λ w otrzymanem wyrażeniu wskazuje ilość przypadków pomyślnych wyrzucenia w 2-u rzutach liczby λ.

2). Prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki wyrzucimy, czyto liczbę 7, czyto 9, czyteż 8, jest $p=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{5}{12}$.

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż pośród wyciągniętych 5-u numerów z koła loteryjnego, obejmującego 90 numerów, znajdą się czyto pewne 3 numery, czyto którekolwiek 2 z nich, czyteż którykolwiek 1 z nich? — Prawdopodobieństwo p, iż jedno z tych wydarzeń (art. 68) się trafi, jest $p=\frac{1}{11748}+\frac{2}{801}\cdot\binom{3}{2}+\frac{1}{18}\cdot\binom{3}{1}$.

72. Jeżeli pośród n przypadków możebnych jest a_1 pomyślnych dla wydarzenia A_1, zaś pośród n_2 przypadków możebnych jest a_2 pomyślnych dla wydarzenia A_2, niezależnego od wydarzenia A_1, to pośród $n_1 n_2$ przypadków, w których obok każdego z pierwszych n_1 przypadków może mieć miejsce każdy z n_2 przypadków drugich, jest przypadków $a_1 a_2$ pomyślnych jużto dla jednoczesności wydarzeń A_1 i A_2, jużteż dla nastąpienia jednego z tych wydarzeń po drugiem. Prawdopodobieństwo więc, iż wydarzenia A_1 i A_2 przypadną jednocześnie, alboteż, iż jedno z nich nastąpi po drugiem, jest $p=\frac{a_1 a_2}{n_1 n_2}=\frac{a_1}{n_1}\cdot\frac{a_2}{n_2}=p_1 p_2$, jeżeli przez p_1 i p_2 oznaczymy odpowiednio prawdopodobieństwa samego tylko wydarzenia A_1 i samego tylko wydarzenia A_2.

73. 1). W urnie U_1 jest 5 białych i 7 czarnych gałek, w urnie zaś U_2 jest 8 białych i 10 czarnych; jakie jest prawdopodobieństwo, iż, wyciągnąwszy jednocześnie z urny U_1 6 gałek a z urny U_2 9 gałek, wyciągniemy tylko pośród pierwszych 2 a pośród drugich 4 gałki białe? — Według zadania 2-go art. 67-go prawdopodobieństwo wyciągnięcia pośród 6-u gałek 2-u białych z urny U_1 jest $p_1=\left[\binom{5}{2}\binom{7}{4}\right]:\binom{12}{6}$; prawdopodobieństwo zaś wyciągnięcia z urny U_2 pośród 9-u gałek 4-ch białych jest $p_2=\left[\binom{8}{4}\binom{10}{5}\right]:\binom{18}{9}$. A więc szukane prawdopodobieństwo jest $p=p_1 p_2=\frac{3675}{26741}$.

2). W jednej z dwu urn jednakowych, którą nazwijmy U_1, jest gałek białych 5, a czarna 1, w drugiej zaś urnie, którą nazwijmy U_2, jest gałek białych 3, a czarnych 4; urny są pod zasłoną; jakie są prawdobieństwa wyciągnięcia: gałki białej z urny U_1, gałki białej z urny U_2, gałki białej z którejkolwiek z tych urn? — Prawdopodobieństwo trafienia na jednę z urn jest $\frac{1}{2}$; prawdopodobieństwo, iż, trafiwszy na urnę U_1, wyciągniemy z niej gałkę białą, jest $\frac{5}{6}$; prawdopodobieństwo zaś, iż, trafiwszy na urnę U_2, wyciągniemy z niej gałkę białą, jest $\frac{3}{7}$. A zatem szukane prawdopodobieństwa są odpowiednio: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$ i (art. 71) $\frac{5}{12}+\frac{3}{14}=\frac{53}{84}$.

3). Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z tych samych urn gałki czarnej możemy (na mocy art. 70-go) wyrazić odpowiednio $\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{5}{6})=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}(1-\frac{3}{7})=\frac{2}{7}$, $\frac{1}{12}+\frac{2}{7}=\frac{31}{84}$, co istotnie jest równe liczbie $1-\frac{53}{84}$.

ZABEZPIECZENIA KAPITAŁÓW I RENT.

74. Na podstawie troskliwie zestawianych wykazów odpowiednich są układane »tablice śmiertelności« (Sterblichkeitstafeln), które podają, ile średnio osób z pewnej ilości jednocześnie urodzonych, np. z 10000 osób, przeżyło pewien rok życia. Podanej na str. 271-ej tablicy używa Towarzystwo ubezpieczeń wzajemnych w Krakowie. Pierwsze dwie jej rubryki stanowią tablicę

Tablica śmiertelności i jednostek renty
(używana przez Towarzystwo wzajemnych ubezpieczeń w Krakowie).

l	o_l	j_l
0	10000	13·0473
1	7450	17·2138
2	7088	17·8167
3	6823	18·2490
4	6618	18·5668
5	6468	18·7310
6	6345	18·8858
7	6243	18·9621
8	6154	19·0058
9	6073	19.0297
10	6004	19·0198
11	5946	18·9720
12	5897	18·8948
13	5854	18·7949
14	5815	18·6778
15	5778	18·5493
16	5740	18·4190
17	5699	18·2936
18	5655	18·1734
19	5608	18·0587
20	5558	17·9500
21	5506	17·8443
22	5453	17·7385
23	5399	17·6325
24	5344	17·5265
25	5288	17·4206
26	5231	17·3149
27	5173	17·2094
28	5116	17·0972
29	5060	16·9778
30	5005	16·8510
31	4951	16·7161
32	4897	16·5765
33	4844	16·4282
34	4792	16·2707
35	4740	16·1072
36	4688	15.9373
37	4637	15.7571
38	4587	15·5660
39	4538	15·3634
40	4490	15·1487
41	4441	14·9285
42	4392	14·6989
43	4342	14.4629
44	4291	14·2202
45	4239	13·9704
46	4186	13·7132
47	4132	13·4481
48	4077	13·1747
49	4021	12·8925
50	3964	12·6010
51	3905	12·3030
52	3843	12·0016
53	3777	11.6997
54	3707	11·3975
55	3631	11·1015
56	3550	10·8090
57	3465	10·5171
58	3377	10·2228
59	3286	9·9261
60	3191	9·6305
61	3092	9·3364
62	2990	9·0411
63	2885	8·7450
64	2778	8·4451
65	2669	8·1416
66	2559	7·8312
67	2448	7·5138
68	2336	7·1890
69	2223	6·8566
70	2109	6·5163
71	1993	6·1714
72	1874	5·8258
73	1749	5·4919
74	1617	5·1778
75	1479	4·8873
76	1337	4·6227
77	1198	4·3654
78	1064	4·1118
79	936	3·8610
80	812	3·6286
81	697	3·3964
82	590	3·1729
83	492	2·9571
84	404	2·7453
85	327	2·5274
86	261	2·2931
87	206	2·0216
88	159	1·7240
89	117	1·4365
90	80	1·1849
91	50	0·9717
92	28	0·8047
93	14	0·6737
94	6	0·6348
95	3	0·3205
96	1	

śmiertelności. Znajdująca się np. obok liczby $l=33$ liczba $o_{33}=4844$ wskazuje, iż na 10000 jednocześnie urodzonych osób przeżyło lat 33 osób 4844.

Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby, mającej 42 lata, iż żyć będzie 50 lat? — W tablicy obok $l=42$ i $l=50$ znajdujemy liczby $o_{42}=4392$ i $o_{50}=3964$. A więc na 4392 osoby mające 42 lata przeżyło 50 lat 3964 osoby, tak iż pierwsza z tych dwu liczb przedstawia ilość przypadków możebnych, druga zaś ilość przypadków pomyślnych, i szukane prawdopodobieństwo jest $p=\frac{o_{50}}{o_{42}}=\frac{3964}{4392}=0{\cdot}9025$.

75. Jak wielki kapitał k zł. wnieść powinna jednorazowo osoba, mająca 33 lata, iżby w razie, gdy dożyje 50-u lat, wypłacona jej została przy uwzględnieniu 4% suma 10000 zł.? — Gdyby każda z $o_{33}=4844$ osób, które mają po 33 lata, wniosła kapitał k, to tym o_{50} z nich, któreby dożyły wieku lat 50, należałoby wypłacić sumę 10000 zł. $\times\, o_{50}=$ 10000 zł. $\times$ 3964. Do tego więc kapitału ma wzrosnąć kapitał k zł. $\times$ 4844 w ciągu lat 17-u, licząc odsetki składane po 4%. Według więc wzoru (1) art. 53-go jest

$$k\times 4844\times 1{\cdot}04^{17}=10000\times 3964,\ \text{skąd}\ k=\frac{3964}{4844}\times\frac{10000}{1{\cdot}04^{17}}=4201{\cdot}64.$$

76. Jaki kapitał powinna wnieść jednorazowo osoba, mająca l lat, iżby pobierała w końcu każdego roku, aż do śmierci, rentę 1 zł.? — Gdyby każda z o_l osób, które tylkoco skończyły l lat życia i które mają pobierać dożywotnie co roku po 1 zł. renty, wniosła kapitał j_l zł., to otrzymywałoby po 1 zł. renty: po 1-ym roku osób o_{l+1}, po 2-u latach o_{l+2} osób, po 3-ch latach o_{l+3} osób i t. d., a po $96-l$ latach pobrałoby tę rentę 1 zł. osób o_{96}. Według wzoru (1) art. 53-go wartość obecna każdej z tych kwot 1 zł.$\times o_{l+1}$, 1 zł. $\times o_{l+2}$, 1 zł. $\times o_{l+3},\ldots$, 1 zł. $\times o_{96}$, przy p% czyli $100r$%, jest

$$\frac{1\text{ zł.}\times o_{l+1}}{1+r},\ \frac{1\text{ zł}\times o_{l+2}}{(1+r)^2},\ \frac{1\text{ zł}\times o_{l+3}}{(1+r)^3},\ldots,\ \frac{1\text{ zł}\times o_{96}}{(1-r)^{96-l}}.$$

Ma więc być

$$j_l o_l=\frac{o_{l+1}}{1+r}+\frac{o_{l+2}}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}},$$

skąd

$$j_l=\frac{1}{o_l}\left[\frac{o_{l+1}}{1+r}+\frac{o_{l+2}}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right].$$

Według tego wzoru oblicza się wielkość kapitału j_l zł., jaki ma wnieść osoba mająca l lat, iżby w końcu każdego roku otrzymywała dożywotnie 1 zł. renty; obliczona wielkość jest oczywiście zależna od umówionej stopy procentu. Obliczone wielkości są zestawione w odpowiednich tablicach. W tablicy podanej na str. 271-ej, rubryka trzecia przedstawia właśnie wartości j_l obliczone przy 4%.

Według więc tej tablicy osoba, mająca np. 33 lata, a pragnąca sobie zabezpieczyć dożywotną rentę 1 zł., powinna jednorazowo wnieść $j_{33}=16{\cdot}4282$ zł. czyli 16·43 zł.

Jaki kapitał powinna jednorazowo wnieść osoba mająca 33 lata, iżby, uwzględniając 4% rocznie, pobierała dożywotnie w końcu każdego roku po 1000 zł.? — Szukany kapitał k zł. $= j_{33}$ zł. $\times$ 1000 = 16428·2 zł.

77. Jaki kapitał k powinna wnieść osoba, mająca l lat, aby po jej śmierci wypłacono spadkobiercom kapitał K? — Gdyby każda z o_l osób, które mają po l lat, wniosła kapitał k, to należałoby wypłacić kapitały K po pierwszym roku spadkobiercom $o_l - o_{l+1}$ osób, po dwu latach spadkobiercom $o_{l+1} - o_{l+2}$ osób, i t. d. Wartość obecna tych kapitałów, licząc po $p\% = 100r\%$, jest

$$\frac{K(o_l - o_{l+1})}{1+r},\ \frac{K(o_{l+1} - o_{l+2})}{(1+r)^2}, \ldots, \frac{K(o_{95} - o_{96})}{(1+r)^{96-l}},\ \frac{Ko_{96}}{(1+r)^{97-l}}.$$

Ma więc być

$$k o_l = K\left[\frac{o_l - o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+1} - o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{95} - o_{96}}{(1+r)^{96-l}} + \frac{o_{96}}{(1+r)^{97-l}}\right],$$

$$k o_l = \frac{K}{1+r}\left[o_l + \left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right) - \right.$$

$$\left. - (1+r)\left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right)\right],$$

$$k o_l = \frac{K}{1+r}[o_l + o_l j_l - (1+r) o_l j_l], \text{ a więc } k = \frac{K}{1+r}(1 - r j_l).$$

Jaki kapitał k ma wnieść osoba mająca 33 lata, iżby uwzględniając 4% rocznie, po jej śmierci wypłacono spadkobiercom 10000 zł.? — Stosując ostatni wzór, znajdziemy szukaną ilość zł.

$$k = \frac{10000}{1{\cdot}04}(1 - 0{\cdot}04 j_{33}) = 3296{\cdot}85.$$

78. Jaką wkładkę w na początku każdego roku powinna wnosić osoba mająca l lat, iżby po jej śmierci wypłacono spadkobiercom kapitał K? — Gdyby każda z o_l osób mających po l lat wnosiła takie wkładki, to oneby wyniosły na początku pierwszego roku $w \times o_l$, na początku drugiego roku $w \times o_{l+1}$, na początku trzeciego $w \times o_{l+2}$ i t. d. Wartość obecna tych kwot jest

$$w \cdot o_l + \frac{w \cdot o_{l+1}}{1+r} + \frac{w \cdot o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{w \cdot o_{96}}{(1+r)^{96-l}} =$$

$$= w \cdot o_l\left[1 + \frac{1}{o_l}\left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right)\right],$$

t. j. $w \cdot o_l(1 + j_l)$. Spadkobiercom zaś zmarłych tych wszystkich o_l osób wypłaconoby kwoty, których wartość obecna według art. 77-go jest $\frac{K}{1+r}(1 - r j_l) \cdot o_l$, tak iż

$$w(1 + j_l) = \frac{K}{1+r}(1 - r j_l), \quad \text{skąd } w = \frac{K}{1+r} \times \frac{1 - r j_l}{1 + r j_l}.$$

Jaką wkładkę na początku każdego roku powinna wnosić osoba mająca 33 lata, iżby, uwzględniając 4% rocznie, po jej śmierci wypłacono jej spadkobiercom 10000 zł? — Szukana ilość zł.

$$w = \frac{10000}{1{\cdot}04} \times \frac{1 - 0{\cdot}04 j_{33}}{1 + j_{33}} = 189{\cdot}17 \text{ zł.}$$

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

DWUMIAN NEWTON'A.

DWUMIAN NEWTON'A.

79. Uskuteczniając mnożenia dwumianów, mających ten sam wyraz pierwszy,

$(a+b_1)(a+b_2)=a^2+(b_1+b_2)a+b_1b_2$,

$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)=a^3+(b_1+b_2+b_3)a^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)a+b_1b_2b_3$,

$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)=a^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)a^3+(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+$
$+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)a^2+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)a+b_1b_2b_3b_4$,

widzimy, że np. w ostatnim iloczynie spółczynnik najwyższej potęgi a^4 t. j. a^4 jest 1, spółczynnik a^3 jest sumą drugich wyrazów dwumianów wziętych oddzielnie, spółczynnik a^2 jest sumą wszystkich różnych iloczynów tychże wyrazów wziętych po 2, spółczynnik a^1 jest sumą wszystkich różnych iloczynów tychże wyrazów wziętych po 3, spółczynnik zaś a^0 jest iloczynem wszystkich owych czterech wyrazów. Możemy jeszcze zauważyć, że spółczynnik a^3 jest sumą $\binom{4}{1}$ składników, spółczynnik a^2 jest sumą $\binom{4}{2}$ składników, spółczynnik a^1 jest sumą $\binom{4}{3}$ składników, nakoniec spółczynnik a^0 jest jednym iloczynem, co odpowiada temu, iż $\binom{4}{4}=1$.

Przypuśćmy, iż podobnie utworzyliśmy iloczyn n dwumianów, mających ten sam wyraz piérwszy, $(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_n)$ i znaleźliśmy: że spółczynnik a^n jest 1; że spółczynnik a^{n-1} jest sumą $\binom{n}{1}$ składników będących drugiemi wyrazami dwumianów, tak iż, nazwawszy tę sumę $S_1^{(n)}$, mamy

$$b_1+b_2+\dots+b_n=S_1^{(n)}\,; \tag{1}$$

że spółczynnik a^{n-2} jest sumą $\binom{n}{2}$ składników, będących iloczynami drugich wyrazów dwumianów wziętych po 2 — nazwijmy ją $S_2^{(n)}$ —

$$b_1b_2+b_1b_3+\dots+b_{n-1}b_n=S_2^{(n)}\,; \tag{2}$$

i t. d.; że spółczynnik $a^{n-\nu}$ jest suma $\binom{n}{\nu}$ składników będących iloczynami drugich wyrazów dwumianów wziętych po ν — nazwijmy ją $S_\nu^{(n)}$ —

$$b_1b_2\dots b_{\nu-1}b_\nu+b_1b_2\dots b_{\nu-1}b_{\nu+1}+\dots+b_{n-\nu+1}b_{n-\nu+2}\dots b_{n-1}b_n=S_\nu^{(n)}\,; \tag{3}$$

i t. d. Przypuszczamy tedy, że jest

$$(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_n)=a^n+S_1^{(n)}a^{n-1}+S_2^{(n)}a^{n-2}+\dots+S_\nu^{(n)}a^{n-\nu}+\dots+S_{n-1}^{(n)}a+S_n^{(n)}. \tag{4}$$

Mnożąc obie strony tej równości przez dwumian $a+b_{n+1}$ będziemy mieli

$(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_n)(a+b_{n+1})=a^{n+1}+(S_1^{(n)}+b_{n+1})a^n+(S_2^{(n)}+S_1^{(n)}b_{n+1})a^{n-1}+$
$+\dots+(S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1})a^{(n+1)-\nu}+\dots+(S_n^{(n)}+S_{n-1}^{(n)}b_{n+1})a+S_n^{(n)}b_{n+1}$.

Zważmy, że ogólnie spółczynnik $a^{(n+1)-\nu}$ jest $S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$. Wypisawszy drugie wyrazy dwumianów,

$$b_1,\ b_2,\dots,\ b_n,\ b_{n+1},$$

widzimy, że $S_\nu^{(n)}$ jest sumą $\binom{n}{\nu}$ iloczynów, do których wchodzą początkowe n z wypisanych wyrazów wzięte po ν, zaś $S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$ jest sumą $\binom{n}{\nu-1}$ iloczynów ostatniego z tych wyrazów ($+b_{n+1}$) przez iloczyny początkowych n z tych wyrazów wziętych po $\nu-1$. A więc $S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$ jest sumą wszystkich iloczynów wypisanych $n+1$ wyrazów wziętych po ν, a tych iloczynów według wzoru (5) art. 61-go jest $\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}=\binom{n+1}{\nu}$.

Wskutek tego, kładąc kolejno $\nu=2,3,\ldots,n$, i zauważywszy wprost, że $S_1^{(n)}+b_{n+1}=S_1^{(n+1)}$, oraz, że $S_n^{(n)}b_{n+1}=b_1b_2\ldots b_nb_{n+1}=S_{n+1}^{(n+1)}$, możemy otrzymany iloczyn tak napisać:

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)(a+b_{n+1})=a^{n+1}+S_1^{(n+1)}a^n+S_2^{(n+1)}a^{n-1}+\ldots+$$
$$+S_\nu^{(n+1)}a^{(n+1)-\nu}+\ldots+S_n^{(n+1)}a+S_{n+1}^{(n+1)}.$$

Okazaliśmy przeto, że jeżeli prawa strona wzoru (4) jest wyrażeniem iloczynu n dwumianów mających jednakowy pierwszy wyraz, to w taki sam sposób wyraża się iloczyn $n+1$ podobnych dwumianów. Że zaś, jak wprost widzieliśmy, w taki sposób wyrażały się iloczyny 2-u, 3-ch i 4-ch takich dwumianów, przeto w podobny sposób wyraża się iloczyn 5-u, a więc i 6-u i t. d., ilukolwiek takich dwumianów. Wzór zatem (4) jest ogólny, t. j. może w nim n oznaczać jakąkolwiek ilość dwumianów.

80. Jeżeli w ogólnym wzorze (4) przyjmiemy $b_1=b_2=\ldots=b_n=b$, to w tym razie według (1), (2), (3) będziemy mieli

$$S_1^{(n)}=\binom{n}{1}b,\ S_2^{(n)}=\binom{n}{2}b^2,\ldots,S_\nu^{(n)}=\binom{n}{\nu}b^\nu,\ldots,S_{n-1}^{(n)}=\binom{n}{n-1}b^{n-1},\ S_n^{(n)}=\binom{n}{n}b^n=b^n.$$

Wzór zatem (4) przejdzie na wzór

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n,\quad(5)$$

czyli

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1\cdot2\ldots\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2b^{n-2}+\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n.$$

Ten wzór podał[1]) Newton (wym. ńutn̥) i nazywamy go d w u m i a n e m N e w t o n'a (Binomischer Lehrsatz, Newton'sches Theorem), albo też rozwinięciem n-tej potęgi dwumianu.

We wzorze (5) kładąc $-b$ zamiast $+b$, otrzymamy

$$(a-b)^n=a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^\nu\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+(-1)^nb^n.\quad(6)$$

Np. według ogólnego wzoru (5) lub według wzoru (6)

$$(3a^2b^3-2cd^2)^5=243a^{10}b^{15}-810a^8b^{12}cd^2+1080a^6b^9c^2d^4-720a^4b^6c^3d^6+$$
$$+240a^2b^3c^4d^8-32c^5d^{10}.$$

81. We wzorze (5) spółczynniki iloczynów potęg liter a i b, t. j. liczby

$$1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{\nu},\ldots,\binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n}\quad(7)$$

nazywane bywają s p ó ł c z y n n i k a m i b i n o m i a l n e m i (Binomialcoefficienten). Ponieważ drugi i dalsze z tych spółczynników przedstawiają ilości kombinacyj z n elementów po $1,2,\ldots,\nu,\ldots,n-1,n$, przeto one posiadają wszystkie własności, już udowodnione w art. 61-ym.

Jeżeli dla ogólności umówimy się przez symbol $\binom{n}{0}$ rozumieć 1, to wzory (4) art. 60-go oraz (5) i (6) art. 61-go odnosić się będą do wszystkich spółczyn-

[1]) W r. 1676.

ników (7). Nadto, jeżeli w każdym z wierszy wypisanego w art. 61-ym trójkąta Pascal'a dopiszemy na początku 1, to w n-tym wierszu będziemy mieli spółczynniki binomialne (7). Gdy zaś jeszcze nad ową kolumną, utworzoną przez dopisane liczby 1, napiszemy dodatkowo 1, przez co uzupełnimy trójkąt, to suma pierwszych n liczb w dopisanej kolumnie przedstawiać będzie n-tą liczbę kolumny następnej, tak iż wypowiedziane w art. 61-ym własności liczb, tworzących ten trójkąt, posiadać będzie również trójkąt uzupełniony owemi dopisanemi liczbami 1.

Prócz tego, jeżeli przyjmiemy we wzorach (5) i (6) $a=1$, i $b=1$, będziemy mieli

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n},\quad 0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

t. j. *suma wartości bezwzględnych wszystkich spółczynników rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu jest równa liczbie* 2^n, zaś *suma bezwzględnych wartości spółczynników w wyrazach rozwinięcia potęgi dwumianu, znajdujących się na miejscach nieparzystych, jest równa sumie bezwzględnych wartości spółczynników w wyrazach, znajdujących się na miejscach parzystych.*

ZASTOSOWANIA DWUMIANU NEWTON'A.

82. Korzystając z rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu, można wielomian o ilukolwiek wyrazach podnieść do potęgi n-tej.

Jeżeli mamy $(a_1+a_2+a_3)^n$, to, kładąc $a_2+a_3=b$, będziemy mogli według wzoru (5) art. 80-go znaleźć rozwinięcie $(a_1+b)^n$. W trzecim wyrazie tego rozwinięcia będziemy mieli $b^2=(a_2+a_3)^2$, w czwartym $b^3=(a_2+a_3)^3,\dots$, w $(\nu+1)$-szym $b^\nu=(a_2+a_3)^\nu,\dots$, w ostatnim $b^n=(a_2+a_3)^n$. Rozwinąwszy każdą z tych potęg dwumianu a_2+a_3 znowu według wzoru (5), wykonamy podstawienia w rozwinięciu $(a_1+b)^n$ i znajdziemy rozwinięcie n-tej potęgi trójmianu $a_1+a_2+a_3$.

W podobny sposób moglibyśmy znaleźć rozwinięcie n-tej potęgi czworomianu $a_1+a_2+a_3+a_4$. I t. d.

Możemy, nie wypisując całego rozwinięcia $(a_1+a_2+a_3)^n$, wypisać wyraz, do którego wchodzą potęgi a_1^k, a_2^l, a_3^m (oczywiście $k+l+m=n$). W rozwinięciu $(a_1+b)^n$ wyraz zawierający a_1^k według (5) art. 80-go jest $\binom{n}{n-k}a_1^k b^{n-k}$; podobnie w rozwinięciu $b^{n-k}=(a_2+a_3)^{n-k}$ wyraz, do którego wchodzi a_2^l, jest $\binom{n-k}{(n-k)-l}a_2^l a_3^{(n-k)-l}=\binom{n-k}{m}a_2^l a_3^m$. A zatem wyraz żądany rozwinięcia $(a_1+a_2+a_3)^n$ jest

$$\binom{n}{n-k}\binom{n-k}{m}a_1^k a_2^l a_3^m=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\times\frac{(n-k)!}{m!\,l!}a_1^k a_2^l a_3^m=\frac{n!}{k!\,l!\,m!}a_1^k a_2^l a_3^m.$$

Podobnie znajdziemy, iż w rozwinięciu $(a_1+a_2+a_3+a_4)^n$ wyraz, do którego wchodzą potęgi $a_1^k, a_2^l, a_3^m, a_4^p$ (przy $k+l+m+p=n$), jest

$$\frac{n!}{k!\,l!\,m!\,p!}a_1^k a_2^l a_3^m a_4^p. \text{ I t. d.}$$

83. Mając postęp arytmetyczny

$$a_1,\ a_2,\dots,a_{m-1},\ a_m \tag{1}$$

o różnicy r, wypiszmy jego wyrazy tak:

$$a_m = a_{m-1} + r,\ a_{m-1} = a_{m-2} + r, \ldots,\ a_3 = a_2 + r,\ a_2 = a_1 + r$$

i podnieśmy wypisane wyrazy do potęgi $(n+1)$-szej według wzoru (5) art. 80-go. Otrzymamy

$$a_m^{n+1} - a_{m-1}^{n+1} = \binom{n+1}{1} a_{m-1}^n r + \binom{n+1}{2} a_{m-1}^{n-1} r^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a_{m-1} r^n + \binom{n+1}{n+1} r^{n+1},$$

$$a_{m-1}^{n+1} - a_{m-2}^{n+1} = \binom{n+1}{1} a_{m-2}^n r + \binom{n+1}{2} a_{m-2}^{n-1} r^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a_{m-2} r^n + \binom{n+1}{n+1} r^{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$a_2^{n+1} - a_1^{n+1} = \binom{n+1}{1} a_1^n r + \binom{n+1}{2} a_1^{n-1} r^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a_1 r^n + \binom{n+1}{n+1} r^{n+1}.$$

Dodając do siebie te równości stronami odpowiedniemi i sumę ν-tych potęg pierwszych $m-1$ wyrazów postępu (1) nazwawszy $\Sigma_{m-1}^{(\nu)}$, otrzymamy

$$a_m^{n+1} - a_1^{n+1} = \binom{n+1}{1} r \Sigma_{m-1}^{(n)} + \binom{n+1}{2} r^2 \Sigma_{m-1}^{(n-1)} + \ldots + \binom{n+1}{n} r^n \Sigma_{m-1}^{(1)} + \binom{n+1}{n+1} r^{n+1} (m-1). \quad (2)$$

Przy pomocy wzoru (2), znając $\Sigma_{m-1}^{(1)}, \Sigma_{m-1}^{(2)}, \ldots, \Sigma_{m-1}^{(n-1)}$, możemy obliczyć $\Sigma_{m-1}^{(n)}$. Tak np., aby, mając postęp arytmetyczny $1, 2, 3, \ldots, k$, znaleźć sumę jednakowych potęg jego wyrazów, przyjmiemy we wzorze (2) $r=1$, $m-1=k$, $a_1 = 1$ (tak iż $a_m = k+1$), będziemy mieli

$$(k+1)^{n+1} - 1 = \binom{n+1}{1} \Sigma_k^{(n)} + \binom{n+1}{2} \Sigma_k^{(n-1)} + \ldots + \binom{n+1}{n} \Sigma_k^{(1)} + k. \quad (3)$$

Kładąc w tym wzorze (3) kolejno $n=1, 2, 3, \ldots$, znajdziemy stopniowo

$$(k+1)^2 - 1 = \binom{2}{1} \Sigma_k^{(1)} + k, \qquad \Sigma_k^{(1)} = \frac{k(k+1)}{2};$$

$$(k+1)^3 - 1 = \binom{3}{1} \Sigma_k^{(2)} + \binom{3}{2} \frac{k(k+1)}{2} + k, \qquad \Sigma_k^{(2)} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6};$$

$$(k+1)^4 - 1 = \binom{4}{1} \Sigma_k^{(3)} + \binom{4}{2} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \binom{4}{3} \frac{k(k+1)}{2} + k,\ \Sigma_k^{(3)} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2;$$

i t. d.

Wyrażenie $\Sigma_k^{(2)}$ znaleźliśmy już poprzednio w zadaniu 1-em art. 50-go.

84. Jeżeli z wielomianu $W = A + B + C + D + \ldots$, uporządkowanego np. według malejących potęg litery głównej, mamy wyciągnąć pierwiastek n-tego stopnia, to, aby wykryć prawidło postępowania, przypuśćmy, że wielomian W jest n-tą potęgą wielomianu $w = a + b + c + \ldots$, uporządkowanego również według malejących potęg tejże samej litery głównej. Pierwszy wyraz wielomianu W jest n-tą potęga pierwszego wyrazu wielomianu w, a więc $\sqrt[n]{A} = a$. Po odjęciu $a^n = A$ od wielomianu W, pozostanie reszta $B + C + D + \ldots$, której pierwszy wyraz B zawiera najwyższą potęgę litery głównej. Ponieważ mamy $W = (a+b+c+\ldots)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots$, przeto $W - A = na^{n-1} b + \ldots$ i wyraz $na^{n-1} b$ zawiera najwyższą potęgę litery głównej. Jest więc $B = na^{n-1} b$. A zatem $B : (na^{n-1}) = b$, drugiemu wyrazowi pierwiastka. Mając już dwa wyrazy pierwiastka, rozwińmy $(a+b)^n$ według wzoru (5) art. 80-go, utwórzmy następnie różnicę $W - (a+b)^n$ i uporządkujmy ją według malejących potęg tejże litery głównej. Pierwszy wyraz tej różnicy, t. j. różnicy $(a+b+c+\ldots)^n - (a+b)^n = \binom{n}{1} a^{n-1} c + \ldots$, dzieląc przez na^{n-1}, otrzymamy trzeci wyraz pierwiastka. Mając już 3 wyrazy pierwiastka, znajdziemy różnicę $W - (a+b+c)^n$ i uporządkujemy ją według malejących potęg tejże litery głównej. Dzieląc następnie pierwszy wyraz tej różnicy przez na^{n-1}, znajdziemy czwarty wyraz pierwiastka. I t. d.

Jeżeliby pierwszy wyraz którejkolwiek reszty nie był podzielny przez na^{n-1}, wskazywałoby to, iż $\sqrt[n]{W}$ jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem.

Zauważmy jeszcze, że, jeżeliby $\sqrt[n]{W}$ był wielomianem, to ostatni wyraz wielomianu W byłby n-tą potęgą ostatniego wyrazu pierwiastka. Gdyby się zatem zdarzyło, że, dzieląc pierwszy wyraz którejkolwiek reszty przez na^{n-1}, otrzymalibyśmy wyraz zawierający niższą potęgę litery głównej, niż ta, która zachodzi w pierwiastku n-tego stopnia z ostatniego wyrazu danego wielomianu, to wnieślibyśmy, iż $\sqrt[n]{W}$ jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem. — Jest rzeczą widoczną, iż wyłożone poprzednio sposoby wyciągania pierwiastków kwadratowego i sześciennego z wielomianów są przypadkami szczególnemi powyższego postępowania ogólnego.

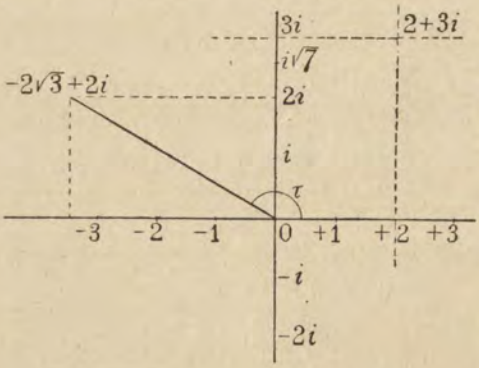
ROZDZIAŁ SIÓDMY.

LICZBY ZESPOLONE. — OKREŚLENIE ALGEBRY.

PRZEDSTAWIENIE GEOMETRYCZNE LICZB ZESPOLONYCH.

85. Gdy na linii prostej, np. poziomej, obierzemy pewien punkt jako mający przedstawiać liczbę 0 i, obrawszy pewną długość za jednostkę, w jednym kierunku od zera np. na prawo przez punkty tej prostej będziemy przedstawiali liczby dodatne, to w drugim kierunku, t. j. na lewo, przez punkty tej prostej możemy przedstawiać liczby ujemne. W taki sposób różne punkty[1]) tej prostej będą przedstawiały różne liczby rzeczywiste. Dlatego nazywać ją będziemy prostą liczb rzeczywistych (reele Zahlenlinie).

Chcąc najdogodniej zapomocą punktów przedstawić także liczby urojone i zespolone, przyjmiemy, iż punkty prostej, prostopadłej do prostej liczb rzeczywistych w punkcie 0, przedstawiać będą liczby urojone. Mianowicie umówmy się, aby liczbę $\sqrt{-1} = i$ przedstawiał punkt tej prostopadłej, znajdujący się nad prostą liczb rzeczywistych w odległości 1. Wskutek tego liczby np. $3i$ i $2i\sqrt{7}$ będą przedstawione przez punkty tej prostej nad prostą liczb rzeczywistych, w odległości od niej odpowiednio 3 i $2\sqrt{7}$. Podobnie liczby $-i$, $-2i$



[1]) Nie należy punktów na prostej, przedstawiających liczby, mieszać z długością odcinków między dwoma takiemi punktami. Długość odcinka uważa się za wielkość bezwzględną, ani za dodatną anitеż za ujemną. Tak np. długość odcinka od punktu 0 do punktu —3, jest 3.

będą przedstawione przez punkty tej prostej pod prostą liczb rzeczywistych, w odległości od niej odpowiednio 1 i 2. Tę prostą, prostopadłą do prostej liczb rzeczywistych w punkcie 0 (której punkty przedstawiają liczby urojone), nazywać będziemy prostą liczb urojonych (imaginäre Zahlenlinie).

Umówiwszy się, jak przedstawiać liczby urojone, łatwo już możemy przedstawić liczbę zespoloną. Weźmy np. liczbę $2+3i$. Zważmy, że punkty, przedstawiające liczby $2+3i$, $2+4i$, $2-5i$ i t. d., mają tę samę część rzeczywistą $+2$, którą przedstawia punkt prostej liczb rzeczywistych; dlatego przyjmiemy, że te punkty znajdą się na prostej, prostopadłej do prostej liczb rzeczywistych w punkcie $+2$. Podobnie przyjmiemy, że punkty $2+3i$, $1+3i$, $-5+3i$, jako przedstawiające liczby o tej samej części urojonej $+3i$, znajdą się na tej prostej równoległej do prostej liczb rzeczywistych, która przechodzi przez punkt $+3i$. A zatem liczba $2+3i$ znajdzie się na przecięciu się tych dwu prostych.

Podobnie oznaczyć możemy położenie np. punktu $-2\sqrt{3}+2i$ i t. d.[1])

W ten sposób różne punkty na płaszczyźnie, określonej przez prostą liczb rzeczywistych i prostą liczb urojonych, przedstawiać nam będą wszelkie liczby, które poznaliśmy, i dlatego tę płaszczyznę nazwiemy płaszczyzną liczb (Zahlenebene).

86. Weźmy jakąkolwiek liczbę zespoloną $a+bi$, gdzie każda z liczb a i b może być dodatna lub ujemna. Moduł jej, jak wiemy, jest wartością bezwzględną liczby $\sqrt{a^2+b^2}$; nazwijmy go ρ. Naszę liczbę zespoloną możemy tak przedstawić:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right), \quad \text{czyli} \quad \rho\left(\frac{a}{\rho}+\frac{b}{\rho}\,i\right).$$

Z trygonometryi zaś wiemy, iż styczna trygonometryczna kąta może, przy zmieniającym się kącie, otrzymywać wszelkie wartości ujemne i dodatne. Jakiemikolwiek więc są liczby a i b, zawsze znajdzie się taki kąt, iż $\operatorname{tg}\tau=\frac{b}{a}$, a wtedy, jak wiemy, $\cos\tau=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\rho}$, $\sin\tau=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\rho}$, gdzie, biorąc wartość bezwzględną $\sqrt{a^2+b^2}=\rho$, mamy $\cos\tau$ i $\sin\tau$ takiego znaku, jakiego są odpowiednio liczby a i b. Wskutek tego naszę liczbę możemy przedstawić

[1]) Wprawdzie liczba i jest taka, iż $i^2=(-1).(+1)$, t. j. liczba i jest średnią geometryczną liczb -1 i $+1$, lecz z tego nie wynika, aby odcinek między punktami 0 i i mógł służyć jako przedstawienie średniej geometrycznej dwu liczb, jednej dodatnej $+1$, drugiej zaś ujemnej -1. Twierdzenia bowiem geometryi elementarnej, jako wyprowadzone dla odcinków, pojmowanych bezwzględnie, mogą być tylko wtedy stosowane, kiedy nie rozważamy odcinków ujemnych, a temwięcej, kiedy nie mieszamy pojęcia długości odcinka z liczbą, którą końcowy jego punkt przedstawiać może. [Gdy około punktu 0, jako środka, promieniem 1 zakreślimy koło, to długość prostopadłej spuszczonej z któregokolwiek punktu okręgu na średnicę, jest średnią geometryczną długości odcinków średnicy. Dopuszczenie jednak, iż odcinek od punktu 0 do i przedstawia średnią geometryczną liczb -1 i $+1$, prowadziłoby za sobą także przyjęcie np., iż odcinek od punktu $+\frac{1}{2}$ do punktu $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ jest średnią geometryczną 2-u liczb, jednej, którą przedstawiałby odcinek od punktu $\frac{1}{2}$ do $+1$, i drugiej, którą przedstawiałby odcinek od punktu $+\frac{1}{2}$ do punktu -1, co być nie może].

w kształcie $\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$. Każdą zatem liczbę zespoloną możemy rozważać w jednym z dwu kształtów:

$$a+bi,\quad \rho(\cos\tau+i\sin\tau), \tag{1}$$

gdzie

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tau=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}, \tag{2}$$

zaś

$$a=\rho\cos\tau,\quad b=\rho\sin\tau. \tag{3}$$

Np. $-2\sqrt{3}+2i=4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$. Ten punkt jest przedstawiony na figurze; długość odcinka, łączącego punkt 0 z tym punktem, przedstawia moduł $\rho=4$, a ten odcinek tworzy z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych kąt $\tau=\frac{5}{6}\pi$.

Liczbę zespoloną w drugim z kształtów (1) określa moduł ρ, długość odcinka między punktem 0 a punktem przedstawiającym tę liczbę, oraz wielkość τ, nazwana odchyleniem (Amplitude), która jest kątem dodatnym, jaki z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych tworzy prosta od punktu 0 do punktu przedstawiającego liczbę.

Drugi z kształtów (1) moglibyśmy symbolicznie tak napisać ρ_τ.

Oczywiście, że liczbę zespoloną możemy nazwać jedną literą. Tak np. gdy liczbę (1) nazwiemy u, to $u=a+bi$, albo $u=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, czyli $u=\rho_\tau$.

Gdy mamy dwie liczby zespolone sprzężone: $u'=a+bi$, $u''=a-bi$, to, jeżeli $u'=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, jest $u''=\rho(\cos\tau-i\sin\tau)=\rho[\cos(2\pi-\tau)+i\sin(2\pi-\tau)]$, tak iż liczby zespolone sprzężone mają ten sam moduł, suma zaś ich odchyleń jest 2π.

Zauważymy jeszcze, że liczby, mające ten sam modnł ρ, są przedstawione przez punkty znajdujące się na okręgu koła, zakreślonego z punktu 0, jako środka, promieniem ρ. Liczby zaś, mające toż samo odchylenie τ, są przedstawione przez punkty prostej, wyprowadzonej z punktu 0, a tworzącej kąt τ z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych.

87. Jeżeli w liczbie zespolonej spółczynnik i staje się równym zeru, to liczba staje się rzeczywistą; jest wtedy we wzorach (1), (2) i (3) $b=0$, $\tau=k\pi$, gdzie k ma wartość 0 lub liczby całkowitej dodatnej. Jeżeli zaś część rzeczywista staje się zerem, to liczba zespolona staje się urojoną i we wzorach (1) (2) i (3) jest $a=0$, $\tau=\frac{2k+1}{2}\pi$, gdzie k otrzymywać może też same, co poprzednio, wartości. Liczby więc rzeczywiste i urojone uważać możemy za szczególne przypadki liczb zespolonych.

Gdyby liczba zespolona miała się stawać liczbą 0, $a+bi=0$, to byłoby $a=-bi$, albo po podniesieniu obu stron do kwadratu $a^2=-b^2$, liczba dodatna równa ujemnej, co być nie może. Ta jednak równość $a^2=-b^2$ jest możliwa, kiedy tak $a=0$ jak i $b=0$. A więc *liczba zespolona wtedy otrzymuje wartość 0, kiedy jednocześnie jej część rzeczywista i spółczynnik »i« stają się równemi zeru.*

Gdybyśmy wyszli z drugiego kształtu liczby zespolonej (1), t. j. przyjęli, iż $\rho(\cos\tau+i\sin\tau)=0$, to zauważywszy, iż czynnik $\cos\tau+i\sin\tau$ jest od zera różny (gdyż niema takiego τ, przy któremby jednocześnie było $\cos\tau=0$ i $\sin\tau$ 0), wnieść należy, iż $\rho=0$, t. j. $\sqrt{a^2+b^2}=0$, co możliwe, kiedy jednocześnie $a=0$ i $b=0$.

Na mocy tego, jeżeli dwie liczby zespolone $a_1+b_1 i$, $a_2+b_2 i$ są sobie równe, $a_1+b_1 i=a_2+b_2 i$, a więc $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i=0$, to $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. A zatem, *jeżeli dwie liczby zespolone są równe, to ich części rzeczywiste są równe, oraz ich spółczynniki »i« są równe.* Z tego wynika, że *pewien punkt płaszczyzny liczb przedstawiać może jednę liczbę*, i nawzajem *liczba może być przedstawiona tylko przez jeden punkt płaszczyzny.*

DZIAŁANIA NA LICZBACH ZESPOLONYCH.

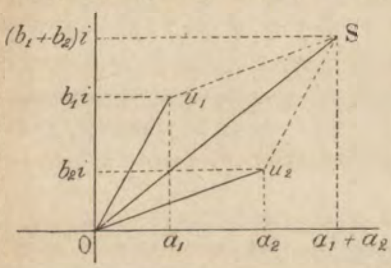
88. Weźmy dwie liczby

$$u_1=a_1+b_1 i=\rho_1(\cos\tau_1+i\sin\tau_1),\quad u_2=a_2+b_2 i=\rho_2(\cos\tau_2+i\sin\tau_2). \qquad (1)$$

α. Sumę liczb (1) nazwijmy s,

$$s=u_1+u_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;$$

widzimy więc, *że suma dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną;* byłaby ona liczbą rzeczywistą, jeżeliby było $b_1=-b_2$, zaś liczbą urojoną, jeżeliby było $a_1=-a_2$. Gdy liczby (1) przedstawimy, jak obok na rysunku, zapomocą punktów u_1 i u_2, to, poprowadziwszy prostopadłą do prostej liczb rzeczywistych oddaloną od punktu 0 o a_1+a_2, oraz równoległą do tejże prostej, oddaloną od niej o b_1+b_2, otrzymamy na przecięciu się tych dwu prostych punkt, który przedstawiać będzie liczbę $u_1+u_2=s$.



Przy pomocy rozważania odpowiednich trójkątów podobnych łatwo wniesiemy, że czworokąt $0u_1su_2$ jest równoległobokiem, tak iż *punkt, przedstawiający sumę dwu liczb, jest wierzchołkiem równoległoboku przeciwległym wierzchołkowi* 0, *gdy pozostałemi wierzchołkami są punkty przedstawiające składniki.*

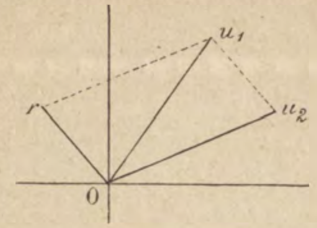
Moduł sumy liczb (1) jest

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}=\sqrt{(\rho_1\cos\tau_1+\rho_2\cos\tau_2)^2+(\rho_1\sin\tau_1+\rho_2\sin\tau_2)^2}=$$
$$=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\tau_1-\tau_2)}.$$

Jeżeliby było $\tau_1=\tau_2$, to moduł sumy byłby $\rho_1+\rho_2$, w innych zaś przypadkach jest mniejszy od $\rho_1+\rho_2$, a w razie $\tau_1=\tau_2+\pi$ moduł sumy byłby równy bezwzględnej wartości różnicy $\rho_1-\rho_2$, a więc *moduł sumy dwu liczb nie jest większy od sumy ich modułów i nie jest mniejszy od bezwzględnej wartości różnicy ich modułów.*

Gdybyśmy mieli 3 lub więcej składników, to, po znalezieniu sumy dwu z nich, szukalibyśmy sumy tak otrzymanej liczby i trzeciego składnika, i t. d., a wszystkie własności, powyżej zaznaczone dla sumy dwu składników, odnieść łatwo będziemy mogli do sumy ilukolwiek składników.

β. Od pierwszej z liczb (1) odejmijmy drugą i nazwijmy różnicę $u_1-u_2=r$,



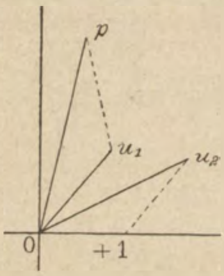
$$r=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\,i;$$

a więc *różnica dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną* i łatwo wyrozumieć, w jakich przypadkach jest ona liczbą rzeczywistą lub urojoną. Ponieważ $u_1=u_2+r$, przeto *punkt, przedstawiający różnicę dwu liczb, jest wierzchołkiem równoległoboku, którego wierzchołkami przeciwległemi są punkt* 0 *i punkt przedstawiający odjemną, a punkt przedstawiający odjemnik pozostałym wierzchołkiem.*

γ. Iloczyn liczb (1) nazwijmy p,

$$p=u_1u_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,i;$$

a więc *iloczyn dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną,* która staje się rzeczywistą, jeżeli $a_1b_2=-a_2b_1$, urojoną zaś w razie, kiedy $a_1a_2=b_1b_2$. Iloczyn ten możemy inaczej wyrazić,



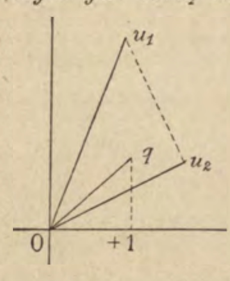
$$p=u_1u_2=\rho_1\rho_2(\cos\tau_1+i\sin\tau_1)(\cos\tau_2+i\sin\tau_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\tau_1+\tau_2)+i\sin(\tau_1+\tau_2)].$$

Ponieważ moduł iloczynu jest $\rho_1\rho_2$, przeto, jeżeli go nazwiemy R, jest $R=\rho_1\rho_2$ czyli $1:\rho_1=\rho_2:R$, a więc łatwo znaleźć długość R. Zauważywszy, że prosta, łącząca punkt 0 z punktem p, tworzy z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych kąt $\tau_1+\tau_2$, a więc z prostą łączącą punkty 0 i u_1 kąt τ_2, wniesiemy, iż trójkąt o wierzchołkach w punktach u_1, 0, p jest podobny do trójkąta o wierzchołkach w punktach 1, 0, u_2; przeto *punkt, przedstawiający iloczyn dwu liczb, jest trzecim wierzchołkiem trójkąta, wystawionego na odcinku, łączącym punkt* 0 *z punktem przedstawiającym jeden czynnik, a podobnego do trójkąta, którego odpowiedniemi wierzchołkami są punkty przedstawiające: drugi czynnik,* 0, *oraz* +1.

Gdybyśmy wzięli iloczyn p ilukolwiek czynników $u_1, u_2, \ldots, u_n$, których moduły nazwijmy odpowiednio $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, odchylenia zaś odpowiednio $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, to nietrudno dowieść, iż ogólnie

$$p=u_1u_2\ldots u_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n[\cos(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)+i\sin(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)];\qquad(2)$$

a więc *moduł iloczynu jest iloczynem modułów czynników,* zaś *odchylenie iloczynu jest sumą odchyleń czynników.*



δ. Iloraz z podzielenia pierwszej z liczb (1) przez drugą nazwijmy q,

$$q=\frac{u_1}{u_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,i;$$

a więc *iloraz dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną,* która w szczególnych przypadkach może się stawać liczbą rzeczywistą lub urojoną.

Korzystając z drugich kształtów liczb (1), mamy

$$q=\frac{u_1}{u_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\tau_1+i\sin\tau_1}{\cos\tau_2+i\sin\tau_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\tau_1+i\sin\tau_1)(\cos\tau_2-i\sin\tau_2)=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\tau_1-\tau_2)+i\sin(\tau_1-\tau_2)],$$

t. j. *moduł ilorazu dwu liczb jest ilorazem ich modułów*, zaś *odchylenie ilorazu dwu liczb jest różnicą ich odchyleń*. Jeżeliby wypadło $\tau_1-\tau_2<0$, to odchyleniem ilorazu jest kąt $2\pi+(\tau_1-\tau_2)$.

Ponieważ $u_1=u_2q$, przeto *punkt przedstawiający iloraz dwu liczb jest wierzchołkiem trójkąta wystawionego na odcinku łączącym punkt* 0 *z punktem* $+1$, *a podobnego do trójkąta, którego odpowiedniemi wierzchołkami są punkty przedstawiające dzielną*, 0, *i dzielnik*.

W szczególnym przypadku, kiedy $u_1=1$, mamy (opuszczając wskaźnik 2)

$$\frac{1}{u}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a_2+b^2}i=\frac{1}{\rho}[\cos(-\tau)+i\sin(-\tau)]=\frac{1}{\rho}[\cos(2\pi-\tau)+i\sin(2\pi-\tau)],$$

t. j. *odwrotność liczby zespolonej jest liczbą zespoloną, której moduł jest odwrotnością modułu liczby danej, a odchylenie przedstawia wraz z odchyleniem liczby danej sumę* 2π.

89. We wzorze (2) przyjmując $u_1=u_2=\ldots=u_n=u=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, będziemy mieli

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=\rho^n[\cos(n\tau)+i\sin(n\tau)], \tag{3}$$

a więc *potęga liczby zespolonej, wogóle mówiąc, jest liczbą zespoloną*, która w szczególnych przypadkach stawać się może liczbą rzeczywistą ($n\tau=k\pi$), lub urojoną ($n\tau=\frac{2k+1}{2}\pi$). Ze wzoru (3) widzimy, że, *aby liczbę zespoloną podnieść do potęgi n-tej, należy jej moduł podnieść do potęgi n-tej, jej zaś odchylenie pomnożyć przez n*.

Ze wzoru (3) wynika przy $\rho=1$ wzór

$$(\cos\tau+i\sin\tau)^n=\cos(n\tau)+i\sin(n\tau). \tag{4}$$

Wzór (4) nazywa się[1]) w z o r e m M o i v r e'a (wym. moawr'a; Moivre'sche Formel).

Jeżeli lewą stronę równości (4) rozwiniemy według dwumianu Newton'a, to otrzymamy wielomian o $n+1$ wyrazach, z których wyrazy zajmujące nieparzyste miejsca będą rzeczywiste, pozostałe zaś urojone. Z równości więc (4) według tego, cośmy mówili w art. 87-ym, wynikają równości

$$\cos(n\tau)=\cos^n\tau-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\tau\sin^2\tau+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\tau\sin^4\tau-\ldots,$$

$$\sin(n\tau)=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\tau\sin\tau-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\tau\sin^3\tau+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\tau\sin^5\tau-\ldots$$

($n=2, 3, 4,\ldots$), t. j. wyrażenia wstawy i dostawy wielokrotności kąta przez potęgi wstawy i dostawy tego kąta. —

---

[1]) Właściwie Moivre otrzymał w r. 1730 wyrażenia
$\cos(n\tau)=\frac{1}{2}[(\cos\tau+i\sin\tau)^n+(\cos\tau-i\sin\tau)^n]$, $\sin(n\tau)=-\frac{1}{2}i[(\cos\tau+i\sin\tau)^n-(\cos\tau-i\sin\tau)^n]$;
wzór zaś (4) po raz pierwszy podał Euler w r. 1748.

Jeżeliby po lewej stronie wzoru (3) liczba n była ujemna całkowita, $n=-\nu$, to zgodnie z określeniem potęgi ujemnej mielibyśmy, stosując wzór (3) i ostatni art. 88-go,

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^{-\nu}=\frac{1}{[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\nu}=\frac{1}{\rho^\nu[\cos(\nu\tau)+i\sin(\nu\tau)]}$$
$$=\rho^{-\nu}[\cos(-\nu\tau)+i\sin(-\nu\tau)]=\rho^n[\cos(n\tau)+i\sin(n\tau)],$$

t. j. wzór (3) odnosi się także do przypadku, kiedy n jest liczbą całkowitą ujemną. Wówczas odchylenie $n\tau$ zastępujemy przez odpowiednie odchylenie dodatne.

90. Kładąc we wzorze (3) przy n całkowitem i dodatnem $\rho^n=r$, $n\tau=t$, wskutek czego $\rho=r^{\frac{1}{n}}$, $\tau=\frac{t}{n}$, mieć będziemy

$$\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right)\right]^n=r(\cos t+i\sin t).$$

Z tej równości, po wyciągnięciu z obu stron pierwiastka n-tego stopnia, mamy

$$\sqrt[n]{r(\cos t+i\sin t)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right), \tag{5}$$

a więc *pierwiastek z liczby zespolonej jest liczbą zespoloną*. Ze wzoru (5) widzimy, że, *aby z liczby zespolonej wyciągnąć pierwiastek n-tego stopnia, należy z jej modułu wyciągnąć pierwiastek (arytmetyczny) n-tego stopnia, jej zaś odchylenie podzielić przez n.*

Zauważmy, że danej liczby $r(\cos t+i\sin t)$ nie zmienimy, jeżeli zamiast odchylenia t weźmiemy ogólniej odchylenie $t+2k\pi$, gdzie k ma wartość 0, lubteż jakiejkolwiek liczby całkowitej dodatnej. Możemy więc wzór (5) tak napisać:

$$\sqrt[n]{r(\cos t+i\sin t)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right). \tag{6}$$

Podstawiając w tym wzorze $k=0, 1, 2, \ldots n-1$, otrzymamy n wartości pierwiastka n-tego stopnia z liczby $r(\cos t+i\sin t)$,

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right),\ r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2\pi}{n}+i\sin\frac{t+2\pi}{n}\right),\ldots,\ r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{t+2(n-1)\pi}{n}\right). \tag{7}$$

Gdybyśmy liczbie k nadawali wartości n, $n+1, \ldots, 2n-1$, $2n$, $2n+1, \ldots$, $3n-1, \ldots$, to otrzymywalibyśmy znowu też same wartości pierwiastka. Wartości (7) są wszystkie różne od siebie, gdyż, jeżeliby przy dwu liczbach l_1 i l_2 całkowitych i dodatnych miało być

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2l_1\pi}{n}+i\sin\frac{t+2l_1\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2l_2\pi}{n}+i\sin\frac{t+2l_2\pi}{n}\right),$$

to byłoby jednocześnie

$\cos\frac{t+2l_1\pi}{n}=\cos\frac{t+2l_2\pi}{n}$, $\sin\frac{t+2l_1\pi}{n}=\sin\frac{t+2l_2\pi}{n}$, co z uwagi, iż wartość bezwzględna różnicy $\frac{t+2l_1\pi}{n}-\frac{t+2l_2\pi}{n}=\frac{l_1-l_2}{n}2\pi$ jest mniejsza od 2π (a więc nierówna wielokrotności 2π), być nie może. Gdyby nawet liczba $r(\cos t + i \sin t)$ była rzeczywista, t. j. gdyby nawet było czyto $t=0$, czyteż $t=\pi$, to także pierwiastki (7) z tej liczby byłyby od siebie różne. A więc *pierwiastek n-tego stopnia z jakiejkolwiek liczby ma n różnych wartości.* Np

$$\sqrt[n]{+1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \tag{8}$$

$$\cos 0 + i \sin 0,\ \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \ldots, \cos \frac{2(n-1)}{n}\pi + i \sin \frac{2(n-1)}{n}\pi; \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{2k+1}{n}\pi + i \sin \frac{2k+1}{n}\pi, \tag{10}$$

$$\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n},\ \cos \frac{3\pi}{n} + i \sin \frac{3\pi}{n}, \ldots, \cos \frac{2n-1}{n}\pi + i \sin \frac{2n-1}{n}\pi. \tag{11}$$

91. Ponieważ (art. 88 γ) jest

$$\left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)\left(\cos \frac{k}{n} 2\pi + i \sin \frac{k}{n} 2\pi\right) = \cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n},$$

przeto wzór (6) możemy tak napisać:

$$\sqrt[n]{r(\cos t + i \sin t)} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)\left(\cos \frac{k}{n} 2\pi + i \sin \frac{k}{n} 2\pi\right). \tag{12}$$

W ostatnim czynniku po stronie prawej liczba k oznaczać może (art. 90) którąkolwiek z liczb $0, 1, 2, \ldots, n-1$, a ten czynnik według (8) przedstawia pierwiastki n-tego stopnia z $+1$, t. j. liczby (9). Wskutek tego, według wzoru (12), *otrzymamy wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby danej, mnożąc jeden pierwiastek z tej liczby przez wszystkie n pierwiastków z $+1$.*

92. Z wyrażeń (9) wprost wypada, iż jednym pierwiastkiem n-tego stopnia z $+1$ jest liczba rzeczywista $+1$, która odpowiada wartości $k=0$. Aby pośród pierwiastków (9) był jeszcze inny rzeczywisty, potrzeba, żeby przy odpowiedniej wartości k, było $\frac{k}{n} 2\pi$ równe wielokrotności π. Ponieważ $k < n$, przeto zdarzyć się to może tylko w razie $k = \frac{n}{2}$, a więc kiedy n jest liczbą parzystą, i wówczas pierwiastek jest $\cos \pi + i \sin \pi = -1$. A więc *pośród pierwiastków stopnia n-tego z $+1$ w razie n parzystego są dwa pierwiastki rzeczywiste $+1$ oraz -1, w razie zaś n nieparzystego jest jeden tylko pierwiastek rzeczywisty $+1$.*

Aby pośrod pierwiastków (11) z -1 był rzeczywisty, potrzeba, żeby w ogólnem wyrażeniu (10), przy odpowiedniej wartości k, było $\frac{2k+1}{n}\pi$ równe wielokrotności π. Ponieważ $k < n$, przeto zdarzyć się to może tylko w razie, kiedy $\frac{2k+1}{n}\pi = \pi$, t. j. kiedy $k = \frac{n-1}{2}$, a zatem tylko przy n nieparzystem. Widzimy więc, że pośród pierwiastków stopnia n-tego z -1 tylko w razie n nieparzystego jest jedyny pierwiastek rzeczywisty -1. —

Zauważmy jeszcze, że wogóle ze wzoru (10) wprost wynika, iż pierwiastek n-tego stopnia z liczby -1 wyraża się przez liczby rzeczywiste

$\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi, \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ i przez liczbę urojoną $i=\sqrt{-1}$. Taż sama uwaga odnosi się do ogólnego wzoru (6). Dlatego w części II w art. 64-ym powiedzieliśmy, iż wprowadzając liczby urojone, a tem samem (II, art. 68) liczby zespolone, wprowadzamy właściwie jedyną nową liczbę $\sqrt{-1}$.

93. Aby w ogóle pierwiastek n-tego stopnia z liczby jakiejkolwiek był liczbą rzeczywistą, potrzeba, iżby w ogólnem jego wyrażeniu, które przedstawia strona prawa wzoru (6), spółczynnik i był równy zeru, t. j. aby było

$$\sin\frac{t+2k\pi}{n}=0. \tag{13}$$

Możemy przyjąć we wzorze (6), iż $t<2\pi$. Kładąc

$$t=\theta.2\pi, \tag{14}$$

gdzie $\theta<1$, warunek (13) tak przedstawimy:

$$\sin\frac{\theta+k}{n}2\pi=0.$$

Będzie on spełniony wtedy, kiedy albo $\frac{\theta+k}{n}2\pi=0$, albo też $\frac{\theta+k}{n}2\pi=\pi$.

α. Jeżeli $\frac{\theta+k}{n}2\pi=0$, a więc $\theta+k=0$, to, z uwagi, że żadna z liczb θ i k nie może być ujemna, jest jednocześnie $\theta=0$ i $k=0$. Wówczas według (14) jest także $t=0$, zaś według (6) jest

$$\sqrt[n]{+r}=+r^{\frac{1}{n}},$$

t. j. otrzymujemy z liczby dodatnej pierwiastek dodatny.

β. Jeżeli $\frac{\theta+k}{n}2\pi=\pi$, a więc $\frac{2\theta+2k}{n}=1$, skąd $\theta=\frac{n-2k}{2}$, to, z uwagi, iż $\theta<1$, n zaś i k są liczbami dodatnemi i całkowitemi, może być tylko:

1). Albo $n-2k=0$, a więc $k=\frac{n}{2}$, co jest możliwe tylko przy n parzystem, a wtedy $\theta=0$; wówczas według (14) $t=0$, zaś według (6) jest, przy $n=2m$,

$$\sqrt[2m]{+r}=-r^{\frac{1}{2m}},$$

t. j. w przypadku n parzystego otrzymujemy z liczby dodatnej pierwiastek ujemny.

2). Albo też $n-2k=1$, a więc $k=\frac{n-1}{2}$, co może być tylko przy n nieparzystem, a wtedy $\theta=\frac{1}{2}$; wówczas według (14) $t=\pi$, zaś według (6) jest, przy $n=2m+1$,

$$\sqrt[2m+1]{-r}=-r^{\frac{1}{2m+1}},$$

t. j. w przypadku n nieparzystego otrzymujemy z liczby ujemnej pierwiastek ujemny.

Poza temi przypadkami, wyciągając pierwiastek n-tego stopnia z liczby, nie otrzymujemy pierwiastków rzeczywistych. A więc *pierwiastek rzeczywisty* *możemy otrzymać tylko z liczby rzeczywistej.* A mianowicie: *z liczby dodatnej otrzymujemy jeden pierwiastek dodatny, oraz w przypadku parzystego wykładnika pierwiastka jeden pierwiastek ujemny; z liczby ujemnej jedynie w przypadku nieparzystego wykładnika pierwiastka otrzymujemy jeden pierwiastek ujemny.*

94. Po lewej stronie wzoru (3), w którym n może oznaczać liczbę całkowitą tak dodatną, jak i ujemną, przyjmijmy, iż n jest liczbą ułamkową, $n=\frac{p}{q}$ (p i q liczby całkowite), i niech w razie $n<0$ będzie $p<0$, tak iż zawsze jest $q>0$. Zgodnie z określeniem potęgi ułamkowej mamy, stosując wzór (12),

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^p}=\sqrt[q]{\rho^p(\cos p\tau+i\sin p\tau)}=$$

$$=\rho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\tau}{q}+i\sin\frac{p\tau}{q}\right)\left(\cos\frac{k}{q}2\pi+i\sin\frac{k}{q}2\pi\right),$$

czyli $[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=\rho^n(\cos n\tau+i\sin n\tau)(\cos\frac{k}{q}2\pi+i\sin\frac{k}{q}2\pi)$, to jest chcąc wzór (3) odnieść do przypadku, kiedy n jest liczbą ułamkową, należy w nim wyrażenie po stronie prawej pomnożyć przez wszystkie pierwiastki z $+1$ stopnia, określonego przez mianownik owej liczby ułamkowej.

OKREŚLENIE ALGEBRY.

95. Wyraz algebra pochodzi od tytułu dzieła »Algebr w Almukabala« (wym. aldżebr walmukabala), którego autorem był Muhammed ibn Musa Alchwarizmi[1]). Wyrazy w tym tytule (dżebr = restauratio = zestawienie, mukabala = oppositio = przeciwstawienie) oznaczają: pierwszy — ustawienie wyrazów równania w taki sposób, iżby po obu jego stronach znajdowały się wyrazy tylko dodatne; drugi zaś — przekształcenie równania w taki sposób, iżby, wskutek wykonania redukcyi wyrazów podobnych, pozostałe wyrazy (dodatne) po jednej stronie nie były podobne do pozostałych wyrazów (dodatnych) po drugiej.

Algebra jest nauką o równaniach, któremi niewiadome są z liczbami danemi związane w taki sposób, iż tak na niewiadomych, jak i na liczbach danych ma być uskuteczniona skończona ilość działań, a temi działaniami mogą być dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka.

Dlategoteż w algebrze bada się szczegółowo własności wyrażeń, które mogą być stronami równań, w tej nauce rozważanych (czyli równań algebraicznych), podaje się metody rozwiązywania tych równań algebraicznych,

[1]) T. j. Muhammed syn Mojżesza z Charizm (dzisiejszej Chiwy). Żył on w pierwszej ćwierci wieku IX.

Mylnie do niedawna wywodzono wyraz algebra od nazwiska arabskiego matematyka Geber (wym. dżabir), żyjącego w połowie wieku XI.

których pierwiastki mogą być wyrażeniami algebraicznemi utworzonemi ze spółczynników tych równań, roztrząsa się rozmaite własności pierwiastków równań algebraicznych, oraz uzasadnia się, iż pierwiastki pewnych równań algebraicznych nie mogą być wyrażeniami algebraicznemi, utworzonemi z liczb danych.

Wspomnięliśmy powyżej, iż w wyrażeniach algebraicznych ilość wskazanych do wykonania działań ma być skończona. Należy jednak zaznaczyć, że, jeżeli w wyrażeniu mamy wskazaną nieskończenie wielką ilość wymienionych powyżej działań do wykonania, a temu wyrażeniu może być nadana inna postać, w której już skończona ilość działań zachodzi, (jak to ma miejsce np. z sumą wyrazów postępu geometrycznego malejącego nieskończonego), to takie wyrażenie uważamy także za wchodzące w zakres badań algebry.

96. Algebrę dzielić się zwykło na algebrę początkową, czyli elementarną (elementare A.), i algebrę wyższą (Höhere A.). Nie można jednak przeciwstawiać algebrze początkowej algebry wyższej. Nie są to bowiem ani dwie gałęzi nauki, aniteż dwa działy jednej gałęzi matematycznych badań. Algebrę początkową stanowią te części algebry, których roztrząsanie w nauczanie średnie ogólne może być wprowadzone z korzyścią. Korzyść zaś owa jest dwojaka: rozwój ścisłego myślenia uczniów, oraz rozwiązywanie ważnych lub ciekawych zadań rozmaitych. Tym ostatnim względem usprawiedliwia się wprowadzenie do algebry początkowej wskazówek dokonywania rachunków przy pomocy logarytmów, chociaż tak teorya wyczerpująca logarytmów, jakoteż samo obliczanie logarytmów liczb nie należy do algebry.

Najczęściej za główną cechę, a właściwiej mówiąc, za kres problematów algebraicznych, stanowić mogących przedmiot nauczania średniego, czyli za kres algebry początkowej, uważa się stosowanie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą do rozwiązywania grup równań stopni wyższych ponad drugi. Gdy do tego obszaru kwestyj doda się jeszcze wspomniane powyżej uwzględnienie logarytmów, dwumian Newton'a przy wykładniku dodatnym całkowitym, jakoteż wykład, przy pomocy wielkości trygonometrycznych, najprostszych własności liczb zespolonych, to będziemy mieli określony przedmiot algebry początkowej.

Te zaś działy algebry, które nie nadają się do uwzględnienia w nauczaniu średniem, obejmujemy ogólną nazwą algebry wyższej.

97. W algebrze korzystamy z różnych wyników osiągniętych w arytmetyce, tak iż nauka arytmetyki poprzedza naukę algebry. Nie jest jednak algebra dalszym ciągiem arytmetyki, gdyż wiele szczegółów, na które w arytmetyce wyraźnie nacisk kładziemy, pozostają w zupełności poza zakresem badań algebraicznych.

W arytmetyce — zgodnie z bezpośredniem określeniem liczby: liczba jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, z nim jednorodnym, przyjętym za jednostkę — zajmujemy się tylko dodatnemi (ściślej mówiąc: bezwzględnemi) liczbami całkowitemi i ułamkowemi. Wychodząc z pojęcia takich właśnie liczb (oderwanych), w algebrze stopniowo uogólniamy pojęcie liczby przez wprowadzenie liczb ujemnych, niewymiernych pierwiastkowych, urojonych i zespolonych.

Nauka o wykonywaniu czterech działań na dodatnych liczbach całkowitych i ułamkowych, o niektórych tych liczb własnościach, pomocnych do zrozumienia lub do prostszego wykonywania tych działań, oraz o rozwiązywaniu szczegółowem tych różnych zadań z życia praktycznego, które albo bezpośrednio są zadaniami na regułę trzech, alboteż dadzą się sprowadzić do zadań na regułę trzech, — stanowi arytmetykę.

Z tego wynika, że chociaż z liczb, rozważanych w arytmetyce, liczby oderwane należą do zakresu liczb, z któremi mamy do czynienia w algebrze, to jednak tak sposób, w jaki wogóle liczby rozważamy w arytmetyce, jak i sposób rozważania zadań arytmetycznych, pod wielu względami jest całkiem obcy charakterowi roztrząsań algebraicznych.

ZADANIA.

(Art. 4 α). 1. $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x+3y=21. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x^2-61y^2=50, \\ x=3y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -7x^2+8xy=1, \\ 5x+2y=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x-4)^2+(y+4)^2=100, \\ x+y=14. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2+x\quad y=3, \\ 7x+3y=10. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x^2-3xy+8y^2=614, \\ 2y=9x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x^2+3xy+4y^2=18, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5xy+4x+2y^2+16=0, \\ 11x+5y=4. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x^2+4y^2=48, \\ x=2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x^2+3xy+4y^2=104, \\ 2x=3y. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x^2+3y^2=40, \\ x+y=5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2-3xy+\frac{9}{4}y^2=16, \\ 2x+3y=12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy=-2\sqrt{2}, \\ 2x=3y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2+3xy-10y^2+12=0, \\ 3x-7y=0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 8x^2-12xy+5y^2+15=0, \\ 2x-3y+5=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 15x^2-30xy-11y^2+77=0, \\ 3x+y-1=0. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1, \\ x+y=2. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{b^2}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-y^2}=8, \\ x-y=4. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x+y=l. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x+y=2a, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{4ab}{a^2 b^2}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y-x=a+b, \\ \frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\frac{a^2-b^2}{ab}. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a, \\ \frac{1}{xy}-\frac{1}{y^2}=b. \end{cases}$

24. Stosunek dwu liczb jest 11:13, a suma kwadratów tych dwu liczb jest 14210. Znaleźć te liczby.

25. Suma dwu liczb jest 50, a suma ich kwadratów 1258; jakie są te liczby?

26. Zmieniwszy następstwo cyfr w liczbie dwucyfrowej, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od szukanej, biorąc zaś sumę kwadratów cyfr liczby szukanej, otrzymujemy liczbę o 62 większą od sumy jej cyfr. Jaka jest szukana liczba?

27. Znaleźć liczbę dwucyfrową, wiedząc, że, zmieniwszy porządek cyfr, otrzymamy liczbę o 9 mniejszą od szukanej, oraz, że, dzieląc ją przez $5\frac{1}{3}$, otrzymamy liczbę utworzoną przez iloczyn cyfr liczby szukanej.

28. Powiększając licznik szukanego ułamka o 3, a mianownik o 5, otrzymujemy $\frac{2}{3}$; powiększając zaś licznik szukanego ułamka o 9, a mianownik o 5, otrzymujemy odwrotność szukanego ułamka. Jaki jest ów ułamek?

29. O ile trzeba powiększyć podstawę i o ile zmniejszyć wysokość prostokąta, mającego podstawę 119 *cm*, a wysokość 29 cm, iżby pole się nie zmieniło, a obwód powiększył się o 24 *cm*?

30. Jakie są wymiary prostokąta o przekątnej d, wpisanego w trójkąt, którego podstawa jest b, a wysokość h?

31. Zmniejszywszy podstawę prostokąta o 8-mą jej część, zaś jego wysokość zmniejszywszy o 16-tą jej część, otrzymalibyśmy prostokąt, którego pole byłoby mniejsze o 3·68 m^2, zaś obwód mniejszy o 3·4 m. Jakie są wymiary prostokąta pierwotnego?

32. W koło o promieniu 5 *dm* jest wpisany trójkąt równoramienny, a suma jego podstawy i wysokości jest 15 *dm*. Znaleźć wysokość i podstawę tego trójkąta.

(Art. 4 β). 33. $\begin{cases} 5xy - 3x - 4y = 6, \\ 3xy - 7x + y = 0. \end{cases}$ 34. $\begin{cases} 3xy + 2x + y = 11, \\ 4xy - 3x + 2y = 4. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 4, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} 3xy + 3x + 2y = -54, \\ -2xy + 15x + 10y = 36. \end{cases}$ 37. $\begin{cases} 2xy + 3x + 4y = 7, \\ 3xy + 4x + 5y = 8. \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2xy + x + 3y = 26, \\ 3xy + 2x + 5y = 40. \end{cases}$ 39. $\begin{cases} 2xy - x - 7y = -22, \\ xy - 2x - 2y = -8. \end{cases}$

Okazać, że gdy 40. $\begin{cases} ab - \frac{1}{2}(a+b)(x+y) + xy = 0, \\ cd - \frac{1}{2}(c+d)(x+y) + xy = 0, \end{cases}$ to $\dfrac{(x-y)^2}{4} = \dfrac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}$.

41. Trapez o podstawach a i b i wysokości h odcinkiem równoległym do podstawy jest podzielony na dwa równoważne trapezy. Jaka jest długość tego odcinka?

42. Obwód trójkąta prostokątnego jest $2p$, a długość prostopadłej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną jest h; znaleźć przyprostokątne.

43. Po drodze 1732·5 *m* przednie koło robi o 265 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła był większy o 0·75 *m*, to przednie koło zrobiłoby o 112 obrotów więcej niż tylne. Jakie są obwody kół?

44. A i B idą naprzeciw siebie, A wyszedł o 3 dni wcześniej niż B, a B robi codziennie o 2 mile więcej niż A. W chwili ich spotkania się stosunek dróg przebytych był 13:15. Gdyby A był o 5 dni mniej w drodze i B robił codziennie o 2 mile więcej, to w chwili spotkania się ich z sobą stosunek dróg przebytych byłby 2:5. Ile A robi mil codziennie i ile dni był w drodze do chwili spotkania się z B?

45. Gdyby stopa procentu, na jaką umieszczony został kapitał 1800 zł., była o 1 większa, a przeciąg czasu o rok mniejszy, to kapitał przyniósłby odsetek również 360 zł., które przyniósł w rzeczywistości. Jaka była stopa procentu i jaki przeciąg czasu?

46. Ktoś kupił dwa domy; dochód z pierwszego wynosi 600 zł., dochód zaś z drugiego domu, który kosztuje mniej o 2000 zł. niż pierwszy i przynosi od wyłożonego kapitału o 1% mniej niż pierwszy dom, wynosi 400 zł. Ile zapłacił za pierwszy dom i jaki z niego ma % od wyłożonego kapitału?

47. Do kapitału dołączywszy odsetki, które on przyniósł po 8% przez pewną ilość lat, otrzymalibyśmy 2574 zł.; gdybyśmy zaś do kapitału mniejszego o 975 zł. dołączyli odsetki przy tejże stopie % za ilość lat większą od poprzedniej o $2\frac{1}{2}$, to otrzymalibyśmy 910 zł. Jaki był pierwotny kapitał i przez ile lat był oddany na %?

(Art. 5). 48. $\begin{cases} x^2 + xy + x = 3, \\ xy + 3x = 4. \end{cases}$ 49. $\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = 0{\cdot}375, \\ x^2 - y^2 - x + y = 0{\cdot}125. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2 + xy = 9490, \\ y^2 + xy = 7410. \end{cases}$ 51. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$ 52. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 61, \\ xy = 20. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 32, \\ 3x^2 + 3y^2 - 5xy = 27. \end{cases}$ 54. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 33, \\ 3x^2 + 14xy + 6y^2 = 291. \end{cases}$ 55. $\begin{cases} x^2 - x - y = 0, \\ x - 3y + y^2 = 0. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$ 57. $\begin{cases} 4(x+y) - 3xy = 0, \\ x + y + x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$ 58. $\begin{cases} 3xy - x^2 + y^2 = 36, \\ xy = 108. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61, \\ 19(x+y) - xy = 211. \end{cases}$ 60. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x = 15, \\ y(y+4) - xy = 20. \end{cases}$ 61. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 84, \\ x + y + \sqrt{xy} = 14. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = ab. \end{cases}$ 63. $\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$ 64. $\begin{cases} x^2 = ax + by, \\ y^2 = ay + bx. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2} = b. \end{cases}$ 66. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x+1)(y+1)} = a - b, \\ \dfrac{x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)} = \dfrac{a-b}{ab}. \end{cases}$ 67. $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-y} + \dfrac{1+y}{1-x} = a, \\ \dfrac{1+x}{1+y} + \dfrac{1-y}{1-x} = b. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^2 + xy = 7, \\ y^2 + xy = -7. \end{cases}$

69. Jeżeli licznik pewnego ułamka powiększę o 2, a jego mianownik zmniejszę o 2, to otrzymam odwrotność ułamka pierwotnego. Zmniejszając zaś licznik o 2, a mianownik powiększając o 2, otrzymam liczbę o $1\frac{1}{15}$ mniejszą od odwrotności ułamka pierwotnego. Jaki jest ułamek pierwotny?

70. Przez punkt M, wzięty na dwusiecznej kąta prostego i oddalony od jego wierzchołka o $4\sqrt{2}\,m$, poprowadzić taką prostą, iżby jej odcinek, zawarty między ramionami tego kąta, miał długości $11\frac{2}{3}\,m$. Jakie ta prosta oddziela odcinki na ramionach kąta danego?

71. Obwód trójkąta prostokątnego jest $12\,m$, stosunek zaś pola kwadratu wystawionego na przeciwprostokątnej do pola prostokąta wystawionego na przyprostokątnych jest $25:12$. Znaleźć przyprostokątne w tym trójkącie.

72. W kulę o promieniu $5\,m$, wpisać walec, którego powierzchnia jest $66\,\pi m^2$.

73. Obliczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, mając jego przeciwprostokątną a i odpowiadającą jej wysokość h.

74. Dwa boki a i b trójkąta, którego pole jest p, są przecięte prostą równoległą do boku trzeciego. Jak wielkie są odcinki owych dwu boków przyległe wierzchołkowi, w którym się boki a i b przecinają z sobą, jeżeli α) pole trójkąta oddzielonego przez równoległą jest średnią geometryczną pola całego trójkąta i pola oddzielonego trapezu, β) pole oddzielonego trapezu jest średnią geometryczną pola całego trójkąta i pola trójkąta oddzielonego?

75. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x + y = 4. \end{cases}$ 76. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 342, \\ x - y = 6. \end{cases}$ 77. $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 240, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \frac{5}{12}. \end{cases}$ 78. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x^2 - x^2 y^2 + y^2 = 19, \\ x - xy + y = 4. \end{cases}$ 80. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10, \\ x^2 y + y^3 = 5. \end{cases}$ 81. $\begin{cases} xy + xy^3 = 30, \\ x + xy^2 + xy^4 = 63. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x(12 - xy) - y(xy - 3) = 0, \\ xy(y + 4x - xy) = 12(x+y) - 36. \end{cases}$ 83. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 24a^2 b + 2b^3, \\ x - y = 2b. \end{cases}$ 84. $\begin{cases} x^3 + y^3 = bxy, \\ x + y = a. \end{cases}$

85. $\begin{cases} (x-y)(x^2 + y^2) = a, \\ (x+y)(x^2 - y^2) = b. \end{cases}$ 86. $\begin{cases} (x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3)(x+y) = a, \\ (x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3)(x-y) = b. \end{cases}$ 87. $\begin{cases} x^3 + y^3 = -3a, \\ x^2 y + xy^2 = a. \end{cases}$

88. Suma sześcianów dwu liczb jest 407, a suma tych liczb jest 11. Jakie są te liczby?

89. Przeciąć kulę płaszczyzną tak, iżby stosunek objętości mniejszego jej odcinka do odpowiadającego mu wycinka kulistego był równy liczbie $a < 1$.

90. W kulę o promieniu r tak wpisać walec, iżby jego objętość była równa sumie dwu odcinków kulistych, podpartych przez podstawy walca.

91. W trójkącie dany jest bok a i wysokości h_1 i h_2, odpowiadające pozostałym jego bokom. Obliczyć owe dwa pozostałe boki trójkąta.

92. W kulę o promieniu $5\,m$ wpisać stożek ścięty, którego wysokość jest $7\,m$, a objętość $\frac{259}{3}\,\pi m^3$. Obliczyć promienie podstaw tego stożka.

(Art. 6). **93—101**. Zadania 52, 54, 58, 63, 72, 73, 85, 86 i 87.

102. $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -7. \end{cases}$ 103. $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 6, \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 4. \end{cases}$ 104. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 5y^2 = 113, \\ xy + y^2 = 28. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ 2x^2-3xy+4y^2=41. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=336, \\ y^2+x\sqrt{xy}=112;\ (y=t^2x). \end{cases}$ 107. $\begin{cases} xy+2y^3=32, \\ y^3+3\dfrac{x^2}{y}=104;\ (x=ty^2). \end{cases}$

(Art. 8). 108. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=d^2, \\ bx=ay, \\ cx=az. \end{cases}$ 109. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1, \\ yz=bc. \end{cases}$ 110. $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=m, \\ (x+z)(x+y+z)=n, \\ (x+y)(x+y+z)=p. \end{cases}$

111. $\begin{cases} x(y+z)=2p, \\ y(z+x)=2q, \\ z(x+y)=2r. \end{cases}$ 112. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}=5. \end{cases}$ 113. $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=61, \\ 2yz=x(y+z). \end{cases}$

114. $\begin{cases} (x+y+z^2)=4y(y+x)+8(x+z)-4y, \\ x^2=y+z, \\ z^2=x^2+y^2. \end{cases}$ 115. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases}$

116. $\begin{cases} x+y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=6, \\ x^4+y^4-z^4=66. \end{cases}$ 117. $\begin{cases} x^2+y^2=3+z^2+u^2, \\ x+y=1+z+u, \\ y=uz, \\ xy-uz=3. \end{cases}$

118. Obwód trójkąta prostokątnego jest $2p$, a jego pole m^2; obliczyć boki tego trójkąta.

119. Znaleźć boki trójkąta prostokątnego, którego obwód jest $2p$ i w którym suma przeciwprostokątnej i odpowiadającej jej wysokości jest a.

120. Odcinki łączące wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków są m_1, m_2, m_3; obliczyć boki tego trójkąta.

121. Powierzchnia prostopadłościanu jest 552 dm^2, przekątna 17 dm, wysokość zaś jest o 5 dm mniejsza od sumy szerokości i grubości. Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?

122. Obliczyć wymiary prostopadłościanu, w którym przekątna jest d, powierzchnia s^2, a jeden z wymiarów jest średnią arytmetyczną dwu innych.

123. W trójkącie dwusieczna jednego kąta jest a, i dzieli bok przeciwległy na odcinki b i c, znaleźć wyrażenia boków tego trójkąta.

124. Pole trójkąta równoramiennego, w którym suma podstawy i wysokości jest równa sumie pozostałych boków, jest s. Obliczyć boki trójkąta i jego wysokość.

125. Znaleźć cztery liczby proporcyonalne względem liczb 2, 5, 9, 11, wiedząc, że suma kwadratów trzech pierwszych jest 2750.

126. Suma wyrazów średnich proporcyi jest 23, skrajnych 27, suma zaś kwadratów wszystkich wyrazów jest 754. Jaka jest ta proporcya?

127. Pociągiem spacerowym jechało drugą klasą o 64 osoby więcej, niż pierwszą, a o 166 mniej niż trzecią. Wszyskie zapłaciły za bilety 669 *zł.* 60 ct., a mianowicie za bilety drugiej klasy o 163 *zł.* 20 ct. więcej, niż za bilety pierwszej, a o 40 *zł.* 80 ct. mniej, niż za bilety trzeciej. Cena biletu pierwszej klasy była równa sumie cen biletów drugiej i trzeciej. Ile osób jechało w każdej klasie i ile kosztowały bilety do oddzielnych klas?

128. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=3.$ **129.** $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4.$ **130.** $\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x+11}=8.$

131. $\sqrt{2+3\sqrt{x}}+\sqrt{2-3\sqrt{x}}=2.$ **132.** $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+2}.$

133. $\sqrt{5+4x}-\sqrt{5-3x}=2\sqrt{x}.$ **134.** $\sqrt{10+3x}-\sqrt{10-3x}=\sqrt{x}.$

135. $\sqrt{3x+1}-3\sqrt{x+1}+4=0.$ **136.** $2\sqrt{3x+1}-3\sqrt{x+3}+2=0.$

137. $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}.$

(Art. 9). **138**. $\frac{836}{57}$. **139** $\frac{13}{36}$. **140**. $\frac{68}{157}$. **141**. $2\frac{29}{106}$. **142**. $\frac{1461}{59}$. **143**. $\frac{529}{231}$. **144**. $\frac{1597}{1292}$. **145** $\frac{637}{447}$ **146**. $\frac{89}{55}$. **147**. $\frac{10373}{7279}$. **148**. $\frac{99}{151}$ **149**. $\frac{123}{153}$. **150**. $\frac{421}{972}$. **151**. $\frac{405}{889}$. **152** $\sqrt{5}$ **153**. $\sqrt{7}$. **154**. $\sqrt{11}$. **155**. $\sqrt{17}$. **156** $\sqrt{35}$. **157**. $\sqrt{31}$. **158**. $\sqrt{41}$. **159**. $\sqrt{47}$. **160** $\sqrt{79}$. **161**. $\sqrt{210}$. **162**. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **163**. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. **164**. $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)$. **165**. $\frac{1}{34}(\sqrt{3601}+55)$. **166**. $\frac{1}{14}(\sqrt{3601}-55)$. **167**. $\frac{1}{302}(\sqrt{2235029}-1265)$. **168** $\log 2$, (q_7). **169**. $\log 4$, (q_9). **170**. $\log 5$, (q_8). **171**. $\log 7$, (q_7). **172** $\log 8$, (q_7). **173**. $\log 13$ (q_7). **174**. $\log_2 6$, (q_5).

(Art. 10). Znaleźć pięć początkowych ułamków zbliżonych ułamka ciągłego, otrzymanego jako odpowiedź: **175**. na zad. 154. **176**. na zad. 162. **177**. na zad. 163. **178**. na zad. 173. **179**. na zad. 174.

(Art. 11). **180**. $? = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6}}}}}}$ **181**. $? = 14 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{28+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{28}}}}$

182. $? = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}$ **183**. $? = 2 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$

184. $? = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+1+\cfrac{1}{a+2+\cfrac{1}{a+3}}}}$ **185**. $? = \cfrac{1}{n+1+\cfrac{1}{2n+3+\cfrac{1}{4n+5+\cfrac{1}{6n+7}}}}$

(Art. 13). **186**. Znaleźć różnicę między ułamkami zbliżonemi 8-ym i 7-ym, między 9-ym i 8-ym, między 10-ym i 9-ym, między 11-ym i 10-ym ułamka ciągłego, otrzymanego jako odpowiedź na zad. 162.

(Art. 16). Obliczyć: **187**. $\sqrt{5}$ z przybliżeniem na 0·001, na 0·00001. **188**. $\sqrt{7}$ z prz. na 0·0001. **189**. $\sqrt{11}$ z prz. na 0·000001. **190**. $\sqrt{17}$ z prz. na 0·0001. **191**. $\frac{1}{34}(\sqrt{3601}+55)$ z prz. na 0·00001. **192**. $\log 2$ z prz. na 0·00001. **193**. $\log 4$ z prz. na 0·00001. **194**. $\log 5$ z prz. na 0·00001. **195**. Jaki jest stopień przybliżenia wartości

α). $\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12}}}}$ β). $\sqrt{21} = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$ γ). $\log 13 = 1 + \cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$

(Art. 17). **196**. $x = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$ **197**. $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}$

198. $x = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$ **199**. $x = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}$ **200**. $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}}$

201. $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}$ **202.** $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}}$ **203.** $x=3+\frac{1}{y}$, $y=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$

204. $x=1+\frac{1}{y}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y}}}$ **205.** $x=2+\frac{1}{y}$ $y=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}}$

206. $x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$ $y=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ **207.** $x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

208. $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ $y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$ **209.** $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

210. $x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ $y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

(Art. 18). **211.** $2x+3y=11$. **212.** $2x+3y=25$. **213.** $3x-y=5$. **214.** $3x-5y=1$. **215.** $3x+8y=43$. **216.** $5x+4y=12$. **217.** $6x-5y=37$. **218** $7x-11y=-1$. **219.** $7x-6y=13$. **220.** $5x+6y=49$. **221.** $8x+7y=75$. **222.** $9x+7y=103$.

(Art. 21—23). **223.** $3x-5y=1$. **224.** $11x-7y=1$. **225.** $5x+6y=3$. **226.** $5x-7y=3$. **227.** $6x+7y=5$. **228.** $5x+4y=12$. **229** $8x+11y=9$. **230** $10x-11y=2$. **231.** $11x-13y=3$. **232.** $14x-9y=5$. **233.** $7x-17y=-4$. **234.** $16x-13y=3$. **235.** $13x+14y=27$. **236.** $7x-19y=11$. **237.** $19x+13y=-5$. **238.** $21x-29y=-3$ **239.** $20x+17y=4$. **240.** $23x+33y=5$. **241.** $31x-42y=-3$. **242.** $25x+13y=43$. **243.** $66x-7y=10$. **244.** $37x-11y=15$. **245.** $17x+23y=120$. **246.** $41x+47y=100$. **247.** $57x+13y=140$. **248** $29x+41y=320$.

249. Jakie są najmniejsze oba dodatne pierwiastki równania zad.: 223, 225, 230 i 231.

250. Jakie są rozwiązania zadań 225, 227, 228 i 229 o najmniejszej dodatnej wartości x?

(Art. 24). Znaleźć rozwiązania dodatne równań: **251.** $7x-11y=-1$. **252.** $7x-6y=13$. **253.** $5x-7y=3$. **254.** $16x-13y=3$. **255.** $8x-5y=3$. **256.** $17x-12y=27$. **257.** $10x-11y=2$. **258.** $11x-14y=10$. **259.** $16x-7y=40$. **260.** $66x-7y=10$. **261.** $7x+15y=247$. **262.** $15x+7y=382$. **263.** $5x+13y=233$. **264.** $4x+7y=123$. **265.** $5x+4y=85$. **266.** $3x+5y=103$. **267.** $13x+24y=2373$. **268.** $5x+7y=52$. **269.** $6x+11y=157$. **270.** $15x+13y=189$. **271.** $23x+17y=400$. **272.** $123x+567y=5028$. **273.** $5x+6y=3$. **274.** $6x+7y=15$. **275.** $8x+11y=21$. **276.** $5x+4y=12$. **277.** $17x+15y=37$. **278.** $31x+59y=80$.

279. Ile można kupić koni i wołów, płacąc za konia po 282 zł., a za wołu po 198 zł., jeżeli suma zapłacona za konie jest od sumy zapłaconej za woły większa o 32 zł.?

280. Jakie liczby α) podzielone przez 4 dają resztę 1, podzielone zaś przez 5 dają resztę 3; β) podzielone przez 37 dają resztę 11, podzielone zaś przez 10, dają resztę 0?

281. Znaleźć dwa ułamki dodatne z mianownikami 9 i 13, których suma jest $\frac{138}{117}$.

282. Znaleźć liczby trzycyfrowe, które są podzielne przez 9, a podzielone przez 13 dają resztę 4.

283. Rozłożyć 1000 na dwa składniki dodatne, z których jeden jest podzielny przez 12, a drugi przez 53.

284. Jednę z dwu liczb dodatnych pomnożywszy przez 25, drugą zaś przez 42, otrzymamy jako sumę iloczynów 1126. Jakie są owe liczby?

285. Znaleźć rozwiązania dodatne równania $7x - 12y = 52$ takie, w których tak wartość x jak i wartość y jest mniejsza od 30.

286. Zebrano ze składki 135 *zł.*; mężczyzna płacił po 8 *zł.*, a kobieta po 7 *zł.* Ilu mężczyzn i ile kobiet mogło wziąć udział w takiej składce?

287. Zegarmistrz dostarczył za 198·8 *zł.* dla służby kolejowej dwojakie zegarki, zegarki jednego rodzaju po 16·25 *zł.*, drugiego zaś rodzaju po 9·45 *zł.* Ile mógł dostarczyć wszystkich zegarków?

288. W worku jest więcej niż 60, a mniej niż 90 orzechów. Gdybyśmy z niego brali po 5 orzechów, to zostałyby 3 orzechy; gdybyśmy zaś brali po 4 orzechy, to zostałby 1. Ile w worku jest orzechów?

289. Dwojakiemi monetami, z których jedne mają średnicy 19 *mm*, drugie zaś 21 *mm*, chcemy wypełnić długość metra. Ile trzeba wziąć monet każdego z tych gatunków?

290. Ktoś kupił za 31·4 *zł.* wina w dwu gatunkach i płacił za butelkę jednego gatunku po 1·2 *zł*, za butelkę zaś drugiego po 2·6 *zł.* Ile kupił butelek wina?

291. Ktoś chce mieć 100 litrów cieczy w butlach o objętości 7 *l* lub 9 *l*. Ile może być tych butli?

292. Przekupka ma niewięcej niż 200 jaj. Gdyby je sprzedawała tuzinami, toby jej zostało 10 jaj, gdyby zaś sprzedawała mendlami, toby jej zostały 4 jaja. Ile ma jaj?

293. Ogrodnik ma mniej niż 1000 drzewek. Gdyby je sadził po 43 w każdym rzędzie, toby mu zostało 11, a gdyby je sadził po 37 w każdym rzędzie, toby mu zostało 8. Ile ma drzewek?

294. Ramiona AB i AC kąta prostego mają długości odpowiednio 120 *cm* i 75 *cm*. Dwa punkty, poruszające się jednostajnie z jednakową prędkością, wychodzą z punktu A i jeden odbywa wciąż drogę ABA, drugi zaś drogę ACA. Ile razy każdy odbędzie swoję drogę do chwili kiedy po raz pierwszy znowu się w punkcie A spotkają?

295. Dwa koła, jedno o promieniu 6 *m* drugie zaś o promieniu 5 *m*, są styczne do siebie w punkcie A; punkty przeciwległe średnic tych kół, przechodzących przez punkt A, są w pierwszym kole B, w drugiem C. Z punktu A wychodzą dwa ciała i poruszają się jednostajnie z jednakową prędkością jedno po jednem, drugie zaś po drugiem kole. Oznaczyć, po ilu obrotach każdego z tych ciał znajdą się one po raz pierwszy α) oba w punkcie A, β) pierwsze w punkcie A, drugie w punkcie C, γ) pierwsze w B, drugie w A, δ) pierwsze w B, drugie w C?

296. W najdawniejszej książce matematycznej polskiej: »Algoritmus« Tomasza Kłosa (z roku 1539) jest[1]) takie zadanie: Kupiono 32 łuty za 4 złote, 17 groszy i 16 pieniążków, a 23 łuty (tegoż samego towaru) za 3 złote, 10 groszy i $8\frac{27}{32}$ pieniążka. Za ile groszy rachowano złoty, a za ile pieniążków rachowano grosz?

297. Kupiec nabył 3235 litrów i żąda aby mu je posłano w beczkach 45-olitrowych i 60-olitrowych. Ilu sposobami można ściśle wykonać żądanie kupca?

298. Gospodyni stargowała melony po 23 ct., a arbuzy po 13 ct. Ile może kupić jednych i drugich za 1 *zł.*?

(Art. 25). **299.** $\begin{cases} x - y - z = -19, \\ 3x - 7y - 8z = 3. \end{cases}$ **300.** $\begin{cases} x + 3y + 5z = 44, \\ 3x + 5y + 7z = 68. \end{cases}$

301. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 50, \\ 4x - 5y - 6z = -66. \end{cases}$ **302.** $\begin{cases} 12x - 16y + 11z = 57, \\ 3x + 17y - 20z = 23. \end{cases}$ **303.** $\begin{cases} 17x + 15y - 28z = 61, \\ 19x - 25y + 12z = 31. \end{cases}$

304. $\begin{cases} x + y + 2z = 17, \\ x + 3y + 4z = 28. \end{cases}$

305. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne układu w zad. α) 300-em; β) 301-em; γ) 303-em.

---

[1]) Zob. wydanie Akademii umiejętności w Krakowie („Biblioteka pisarzów polskich“) z roku 1889, str. 50.

306. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne dla każdej z niewiadomych mniejsze od 1000 układu w zad. α) 303-em; β) 302-em.

307. Znaleźć takie rozwiązania całkowite i dodatne, w którychby wartość z była pośrednia między liczbami 100 i 200, układu

$$\begin{cases} 11x - 3y - 2z = 157, \\ 5x - 11y + 8z = 87. \end{cases}$$

308. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne, w którychby wartość x była większa od 10, układu

$$\begin{cases} 8x + 3y - 2z = 8, \\ 7x + 2y - z = 8. \end{cases}$$

309. Rozłożyć $\frac{843}{1001}$ na sumę trzech ułamków, których mianowniki są 7, 11, 13, liczniki zaś przedstawiają sumę 9.

310. Ktoś otrzymał polecenie, aby kupił 120 cygar za 8 *zł.* po 5, $6\frac{1}{2}$ i 9 ct. sztuka. Ilu sposobami może to polecenie wykonać?

311. Rozłożyć liczbę 20 na trzy takie liczby całkowite i dodatne, aby po pomnożeniu pierwszej przez 7, drugiej przez 9, a trzeciej przez 3, otrzymać jako sumę liczbę 148.

(Art. 26). **312.** $5x + 2y + 3z = 20$. **313.** $3x + 4y - 8z = 0$. **314.** $3x + 5y + 7z = 67$. **315.** $16x + 21y + 35z = 223$.

316. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne równania w zad. α) 312-em; β) 313-em, γ) 314-em; δ) 315-em.

317. Znaleźć dodatne całkowite a mniejsze od 100 pierwiastki równania

$$18x - 24y + 35z = 165.$$

318. Rozłożyć ułamek $\frac{233}{105}$ na sumę trzech ułamków, których mianowniki są 3, 5 i 7.

319. Ktoś ma wypłacić 153 marki, a ma w zapasie 18 sztuk dwudziestomarkowych, 7 pięciomarkowych i 13 dwumarkowych. Ilu sposobami może uskutecznić wypłatę?

(Art. 27). **320.** $\begin{cases} x + y + 2z + 3u = 14, \\ 3x + y + z + 2u = 14. \end{cases}$ **321.** $\begin{cases} 5x + 3y + 7z + 4u = 96, \\ 2x - 7y + 9z + 5u = 70. \end{cases}$

322. Mając srebro w czterech gatunkach: próby 900, 850, 650 i 550, tak utworzyć 17 *kg.* srebra próby 750, iżby z każdego gatunku wziąć całkowitą ilość kilogramów.

(Art. 35). **323.** Początkowe wyrazy postępu arytmetycznego są α) 5, 8, 11, . . ., jaki jest wyraz 30-y tego postępu, β) —3·5, —2·6, —1·7, . . ., jaki jest wyraz 10-y tego postępu, γ) 0·012, 0·124, 0·236, . . ., jaki jest wyraz 21-szy tego postępu, δ) 17, $22\frac{1}{2}$, 28, . . ., jaki jest wyraz 79-y tego postępu, ε) $29\frac{3}{4}$, 37, $44\frac{1}{4}$, . . ., jaki jest wyraz 711-y tego postępu, ζ) $28\frac{1}{2}$, $23\frac{1}{12}$, $17\frac{8}{12}$, . . ., jaki jest wyraz 47-y tego postępu, η) $-7\frac{3}{4}$, $-8\frac{1}{6}$, $-8\frac{7}{12}$, . . ., jaki jest wyraz 73-i tego postępu, θ) —63·3, —62·9, —62·5, . . ., jaki jest wyraz 125-y tego postępu?

324. Urzędnik oszczędził w jednym roku 400 *zł.*, a w każdym następnym o 70 *zł.* więcej. Ile oszczędził w roku dziewiątym?

325. Studniarz zgodził się za wykopanie studni od metra głębokości, mianowicie za pierwszy 2 *zł.* 30 ct., a za każdy następny o 7 ct. więcej. Ile mu się należy za 15 metr?

326. W pewnej miejscowości ciało swobodnie spadające przebiega w pierwszej sekundzie 4·904 m. Jaką mieć ono będzie prędkość spadku w końcu 11-ej sekundy?

(Art. 37). **327.** Postępów zad. 323-go znaleźć sumę pierwszych α) 6-ciu wyrazów, β) 10-u wyrazów, γ) 24-ch wyrazów, δ) 79-u wyrazów, ε) 125-u wyrazów?

328. Znaleźć sumę szeregu liczb naturalnych α) od 1 —100, β) od 1—1000, γ) od 1 do 10000, δ) od 1 do liczby roku bieżącego, ε) od 500 do 5000, ζ) od 2000 do 10000.

329. Znaleźć sumę liczb nieparzystych dodatnych α) mniejszych od 100, β) mniejszych od 500, γ) od 501 do 999, δ) od 1 do $2p+1$, ε) od 1 do $4r+1$, ζ) od 1 do $8n+1$.

330. Znaleźć sumę liczb parzystych α) niewiększych od 100, β) niewiększych od 200, γ) niewiększych od 1000, δ) od 502 do 1500, ε) od 2 do $2p$, ζ) od 2 do $4p$, η) od 2 do $4p+2$, θ) od 2 do $8p$.

331. Mając postępy α) 10, 17, 24, . . .; β) 3·5, 4·6, 5·7, . . .; γ) 0·113, 0·126, 0·139,...; δ) -11, -23, -35, . . .; ε) 12·653, 11·987, 11·321, . .; ζ) $-0·3$, $-0·25$, $-0·2$, . . .; η) 10·8431, 9·4522, 8·0613, . . .; θ) $-2\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, . . .; ι) $-12\frac{2}{3}$, $-11\frac{1}{3}$, -10, . . ., znaleźć w każdym sumę początkowych 15-u wyrazów, początkowych 20-u wyrazów i początkowych 28-u wyrazów.

332. Z punktów A i B idą naprzeciwko siebie dwaj wędrowcy. Pierwszy przeszedł pierwszego dnia 15 *km*, a następnie codzień o $1\frac{1}{2}$ *km*. więcej; drugi zaś przeszedł pierwszego dnia 12 *km*, a każdego następnego dnia szedł więcej o 2 *km*.; po 11-tu dniach ci wędrowcy spotkali się z sobą. Jaka jest odległość od A do B.

333. Jaka jest ilość kul o jednakowym promieniu, jeżeli możemy z nich utworzyć trójkąt równoboczny, i jeżeli, wziąwszy dwa razy więcej takich kul, po utworzeniu z nich naj, większego możebnego kwadratu mielibyśmy zbytecznych 20 kul?

(Art. 38). **334**. Znaleźć a_n i S_n, mając α) $a_1=0·657$, $r=0·046$, $n=12$; β) $a_1=-1·6987$, $r=-0·4352$, $n=43$; γ) $a_1=2x+1$, $r=2x-2$, $n=7$; δ) $a_1=2x+8y$, $r=3x-y$, $n=9$.

335. Znaleźć a_1 i S_n, mając α) $a_n=24$, $r=\frac{5}{7}$, $n=22$; β) $a_n=56\frac{1}{2}$, $r=4$, $n=15$, γ) $a_n=11$, $r=-7$, $n=290$; δ) $a_n=726$, $r=13$, $n=53$.

336. Znaleźć r i S_n, mając α) $a_1=7$, $a_n=55$, $n=13$; β) $a_1=1·2$, $a_n=3·2$, $n=11$; γ) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_n=71\frac{1}{3}$, $n=214$; δ) $a_1=106·9056$, $a_n=5·8176$, $n=33$.

337. Znaleźć n i S_n, mając α) $a_1=100$, $a_n=94\frac{1}{2}$, $r=-\frac{1}{2}$; β) $a_1=-13·452$, $a_n=5·268$; $r=1·56$; γ) $a_1=\frac{9}{15}$, $a_n=10\frac{37}{45}$, $r=\frac{5}{24}$, δ) $a_1=5$, $a_n=107$, $r=3$.

338. Znaleźć r i n, mając α) $a_1=5$, $a_n=23$, $S_n=392$; β) $a_1=13·76$, $a_n=12·64$, $S_n=198$; γ) $a_1=-3·4128$, $a_n=-3·4709$, $S_n=-289·1154$; δ) $a_1=5·625$, $a_n=84·475$, $S_n=901$.

339. Znaleźć a_n i r, mając α) $a_1=8\frac{1}{4}$, $n=147$, $S_n=15967\frac{7}{8}$; β) $a_1=12$, $n=45$, $S_n=9450$, γ) $a_1=-146$, $n=21$, $S_n=13·776$; δ) $a_1=0·55$, $n=25$, $S_n=243·75$.

340. Znaleźć a_1 i r, mając α) $a_n=212$, $n=42$, $S_n==4599$; β) $a_n=28\frac{4}{5}$, $n=55$, $S_n=708\frac{5}{8}$; γ) $a_n=140$, $n=301$, $S_n=19565$; δ) $a_n=5142$, $n=147$, $S_n=3802·89$.

341. Znaleźć a_1 i a_n, mając α) $r=2$, $n=16$, $S_n=272$; β) $r=-50$, $n=644$, $S_n=10352300$; γ) $r=-\frac{1}{15}$, $n=14$, $S_n=1631$; δ) $r=-17\frac{1}{2}$, $n=30$, $S_n=92377\frac{1}{2}$.

342. Znaleźć a_n i n, mając α) $a_1=-6$, $r=\frac{3}{4}$, $S_n=146\frac{1}{4}$; β) $a_1=5$, $r=3$, $S_n=61305$; γ) $a_1=-\frac{5}{4}$, $r=-\frac{7}{8}$, $S_n=281\frac{1}{4}$, δ) $a_1=\frac{1}{6}$, $r=\frac{1}{2}$, $S_n=70\frac{5}{6}$.

343. Znaleźć a_1 i n, mając α) $a_n=49$, $r=3$, $S_n=420$; β) $a_n=18·53$, $r=0·27$, $S_n=628·43$; γ) $a_n=-52·435$, $r=-2·435$, $S_n=-589·95$; δ) $a_n=\frac{40}{3}$, $r=\frac{1}{3}$, $S_n=\frac{1349}{3}$.

344. Suma liczb całkowitych po sobie następujących, z których pierwsza jest 5, jest 1530. Jaka jest ostatnia z owych liczb?

345. Suma 26-u wyrazów postępu arytmetycznego jest 728, a wyraz piąty jest 11. Jaki jest ostatni wyraz i jaka różnica tego postępu?

346. Jeżeli ciało wolno spadając przebiega w pierwszej sekundzie 4·904 *m*, to w ciągu ilu sekund spadnie z wysokości 397·224 *m*?

347. Jaki jest pierwszy wyraz postępu arytmetycznego i jaka jego różnica, jeżeli suma wyrazów 2-go, 4-go, 8-go i 10-go jest -72, suma zaś wyrazów 3-go, 5-go i 13-go jest od wyrazu 7-go mniejsza o 42?

348. Ktoś ma spłacić kwotę 1600 *zł*. w ratach miesięcznych, a mianowicie po pierwszym miesiącu 40 *zł*., a po każdym miesiącu o pewną tę samę ilość *zł*. więcej, tak, iżby ostatnia rata wyniosła 160 *zł*. W ciągu ilu miesięcy spłaconą zostanie cała kwota i ile wyniesie rata po drugim miesiącu?

349. Znaleźć 3 liczby tworzące postęp arytmetyczny, których suma jest 48. a iloczyn 3840.

350. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny; stosunek sumy pierwszych dwu do sumy 2-ej i 3-ej jest 3:4, suma zaś wszystkich trzech liczb jest 21. Jakie to są liczby?

351. Na turnieju szachowym ze subwencyi otrzymanych i wkładek stawających były takie nagrody: 1080 *zł*., a każda następna o 135 *zł*. mniej, a wszystkie nagrody utworzyły razem sumę 4050 *zł*. Ile było nagród?

352. Gdyby z dwóch stacyi, oddalonych od siebie o 3520 *km*, jechały tak dwa pociągi naprzeciwko siebie, iżby pierwszy przejechał w pierwszym dniu 195 *km*, a każdego następnego dnia coraz mniej o 10 *km*, drugi zaś pierwszego dnia przejechał 120 *km*, a każdego następnego dnia o 23 *km* więcej, to po ilu dniach spotkałyby się z sobą?

353. Jedno ciało wyszło z punktu A i porusza się tak, iż w pierwszej sekundzie przebiegło 11 *m*, a w każdej następnej coraz o 1 *m* mniej. Drugie ciało o 3 sekundy później wyszło z punktu A w tymże kierunku i porusza się tak, iż w pierwszej sekundzie przebiegło 10 *m*, a w każdej następnej o 1 *m* więcej. Po ilu sekundach od chwili, kiedy pierwsze ciało wyszło z punktu A, i w jakiej od A odległości te ciała się z sobą spotkają?

354. Z tego samego punktu wyszły dwa ciała. Jedno przebiega w pierwszej sekundzie 1 *m*, a w każdej następnej o 2 *m* więcej. Drugie zaś ciało, które z początkowego punktu wyszło o 3 sekundy później, przebiega w pierwszej sekundzie 12 *m*, a w każdej następnej o 1 *m* więcej. Po ilu sekundach od chwili wyjścia drugiego ciała z punktu początkowego spotkają się one z sobą?

355. Suma wyrazów postępu arytmetycznego jest 1368, suma wyrazów 7-go i 12-go jest 204, suma zaś 2-go i 11-go jest 228. Ile jest wyrazów tego postępu i jakie są jego wyrazy pierwszy i ostatni?

356. Suma pierwszych n wyrazów postępu arytmetycznego o różnicy $\frac{1}{2}$ jest 81, suma zaś $n+4$ pierwszych wyrazów tegoż postępu jest 124. Znaleźć wyraz pierwszy i ilość wyrazów n tego postępu.

357. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny; ich suma jest 72, suma zaś ich kwadratów jest 1928. Wypisać ten postęp.

358. Jaki jest wyraz pierwszy i jaka różnica postępu, jeżeli suma wyrazów 4-go i 6-go jest 56, iloczyn zaś wyrazów 3-go i 10-go jest 928?

359. Oddzielnie wzięte cyfry liczby trzycyfrowej tworzą postęp arytmetyczny, którego suma jest $\frac{1}{26}$ owej liczby. Wskutek dodania 396 do owej liczby otrzymamy liczbę, utworzoną z tychże samych, co tamta, cyfr, lecz one będą przedstawiały postęp malejący. Jaka jest owa pierwsza liczba?

360. Ile trzeba wziąć wyrazów postępu, w którym po dodaniu wyrazu 3-go do 7-go otrzymujemy liczbę 138, po podzieleniu zaś 2-go przez 6-y liczbę $\frac{3}{7}$, aby suma tych wyrazów była 4725?

361. Na prostej znajduje się n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, w odległości każdy od poprzedzającego o d metrów. Znaleźć na tej prostej punkt taki, iżby suma odcinków między tym punktem a każdym z punktów $A_1, \ldots, A_n$ oraz powtórnie wziętych odcinków między tymże punktem a każdym z punktów $A_2, \ldots, A_{n-1}$ była 4 razy większa od sumy odcinków między punktem A_1, a każdym z punktów $A_2, \ldots, A_n$.

362. Dwie liczby są takie, iż po pomnożeniu pierwszej przez 31, drugiej zaś przez sumę 8-u wyrazów postępu arytmetycznego, z których pierwszy jest 1, a ósmy $4\frac{1}{4}$, otrzymujemy jako sumę tych dwu iloczynów liczbę 1770. Jakie są te liczby?

363. Znaleźć pierwiastki równania $x^2+px-q=0$, jeżeli p jest pierwszym, zaś q ósmym wyrazem postępu arytmetycznego o różnicy $29\frac{20}{36}$, w którym suma pierwszych 8-u wyrazów jest $951\frac{2}{9}$.

364. Dwa postępy mają ten sam pierwszy wyraz; w jednym wyraz ostatni jest 39, a suma wyrazów 207, w drugim zaś wyraz ostatni jest 124, a suma wyrazów 917. Jaki jest pierwszy wyraz i ile każdy z tych postępów ma wyrazów, oraz jaka jest różnica każdego z tych postępów?

365. Znaleźć cztery liczby tworzące postęp arytmetyczny, których suma jest 10, suma zaś odwrotności jest $\frac{25}{12}$.

366. Postęp arytmetyczny ma 5 wyrazów, których suma jest 20, iloczyn zaś 46080. Znaleźć wyrazy tego postępu.

(Art. 39). **367**. Między liczby 7 i 140 wstawić 18 liczb, tworzących z danemi dwiema postęp arytmetyczny. Jaka jest różnica tego postępu i suma pierwszych 10-u jego wyrazów?

368. Między liczby 7 i 13 wstawiono pewną ilość liczb, tworzących z tamtemi dwiema postęp arytmetyczny, którego suma jest 100. Ile wstawiono liczb i jaka jest różnica owego postępu?

369. Między liczby 2553 i 10656 wstawić tyle liczb, tworzących wraz z tamtemi dwiema postęp arytmetyczny, iżby stosunek pierwszej do ostatniej z wstawionych liczb był $\frac{24}{95}$. Ile trzeba wstawić liczb i jaka jest różnica powstałego postępu?

370. Między pierwszy i drugi wyraz postępu 2, 5, 8, . . . wstawiono takie liczby, tworzące wraz z owemi dwoma wyrazami postęp arytmetyczny, iż suma wstawionych liczb jest o 1 mniejsza od sumy pierwszych 20-u wyrazów postępu pierwotnego. Ile wstawiono owych liczb i jaka jest różnica przez nie utworzonego postępu?

371. Mając postęp arytmetyczny, w którym suma pierwszych 8-u wyrazów jest 164, a iloczyn wyrazów 1-go i 8-go jest 114, wstawić między jego wyrazy po pięć liczb tak, iżby powstał postęp arytmetyczny. Jaka będzie różnica tego nowego postępu?

372. Między dwie liczby, których suma kwadratów jest 197, wstawiono 12 liczb, tworzących wraz z tamtemi postęp arytmetyczny o sumie 105. Znaleźć owe dwie liczby i różnicę postępu.

373. Mając postęp arytmetyczny, w którym 6-y wyraz jest 6, iloczyn zaś wyrazów 4-go i 11-go jest $18\frac{1}{2}$, wstawiamy między każde dwa 9 wyrazów tak, iż powstaje wskutek tego postęp arytmetyczny. Jaki jest pierwszy wyraz i różnica pierwotnego postępu, i jaka jest suma pierwszych 53-ch wyrazów postępu utworzonego?

374. Między dwie liczby wstawiono 5 liczb, tworzących z tamtemi postęp arytmetyczny, którego suma jest 21, suma zaś czwartych potęg liczb wstawionych jest 979. Znaleźć pierwotne dwie liczby i różnicę postępu.

(Art. 42). **375**. Początkowe wyrazy postępu geometrycznego są α) 3, 9, 27, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? β) 0·2, 0·4, 0·8, . . ., jaki jest wyraz 12-y tego postępu? γ) 1, 1·2, 1·44, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? δ) —0·2, 0·08, —0·032, . . ., jaki jest wyraz 9-y tego postępu? ε) 5, —25, 125, . . ., jaki jest wyraz 8-y tego postępu? ζ) 1, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{36}$, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? η) 0·11, 1·21, 13·31, . . ., jaki jest wyraz 8-y tego postępu? θ) 1, —0·21, 0·0441, . . ., jaki jest wyraz 5-y tego postępu?

376. Gdyby ktoś wysiawszy w pierwszym roku hektolitr żyta, cały plon zebrany wysiał w roku drugim i mógł w następnych latach również cały plon wysiewać, a w każdym roku miał urodzaj 7 ziarn, to ileby zebrał w 10-ym roku?

377. Z naczynia, mającego a litrów objętości i napełnionego alkoholem, odlano b litrów i dolano do pełna wody. Gdyby tę czynność powtórzono 20 razy, to ileby w owem naczyniu pozostało alkoholu?

(Art. 43). **378**. Postępów zad. 275-go znaleźć sumę pierwszych α) 4-ch, β) 6-u, γ) 9-u, δ) 12-u wyrazów.

379. Znaleźć sumę pierwszych 11-u wyrazów postępu geometrycznego a^{10}, a^9b, a^8b^2,...

380. Znaleźć sumę n wyrazów postępu geometrycznego 1, a, a^2,...

381. Znaleźć sumę $2p+1$ wyrazów postępu geometrycznego 1, a, a^2, a^3,...

382. Znaleźć sumę $2p$ wyrazów postępu geometrycznego 1, $-a$, a^2, $-a^3$,...

383. Mając postęp geometryczny a, aq, aq^2, . . ., obliczyć sumę jego p wyrazów, poczynając od wyrazu znajdującego się na miejscu $(m+1)$-em.

384. Znaleźć sumę $2n+1$ wyrazów postępu geometrycznego a^{-n}, $-a^{-n-1}$, a^{-n-2}, $-a^{-n-3}$, . . .

385. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego spuszczamy prostopadłą na przeciwprostokątną c, z jej spodka prostopadłą na przyprostokątną a, ze spodka tej prostopadłej prostopadłą na przeciwprostokątną, a z jej spodka znowu prostopadłą na tęż przyprostokątną a. Jaka jest suma drugiej przyprostokątnej danego trójkąta i poprowadzonych wewnątrz niego odcinków?

386. W kwadrat o boku a wpiszmy kwadrat, którego wierzchołki są środkami boków pierwszego kwadratu; w ten kwadrat podobnie wpiszmy inny kwadrat i t. d., $n-1$ razy. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól tych n kwadratów.

387. W dziele Leonarda z Pizy (z w. XIII) znajdujemy zadanie: 7 bab idzie do Rzymu, z których każda ma mułów 7, a na każdym mule sakiew 7, a w każdej sakwie chlebów 7, a w każdym chlebie nożyków 7, a każdy nożyk ma ostrzy 7; szukana jest suma wszystkich tych rzeczy.

388. Powiadają, iż Indus, wynalazca szachów, zapytany przez króla, jakiej pragnie nagrody, miał powiedzieć, iż prosi o tyle pszenicy, aby na pierwsze pole szachownicy przypadało jedno ziarno, na drugie dwa, na trzecie 4, na czwarte 8 i t. d., na każde następujące coraz dwa razy więcej ziarn. Obliczyć, ile liczba, wyrażająca sumę ziarn, któreby przypadały na wszystkie 64 pola szachownicy, ma cyfr, i przy pomocy tablic logarytmów wyznaczyć pierwszych 6 cyfr owej liczby.

(Art. 44). **389.** Znaleźć a_n i S_n, mając α) $a_1=7$, $q=3$, $n=11$; β) $a_1=5\cdot25$, $q=0\cdot25$, $n=4$; γ) $a_1=-7$, $q=-\frac{1}{2}$, $n=6$; δ) $a_1=4096$, $q=0\cdot375$, $n=6$.

390. Znaleźć a_1 i S_n, mając α) $a_n=413343$, $q=3$, $n=11$; β) $a_n=8.10^7$, $q=5$, $n=8$; γ) $a_n=-\frac{80}{243}$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=6$; δ) $a_n=81062\frac{649}{2048}$, $q=2\frac{1}{2}$, $n=11$.

391. Znaleźć S_n i rzeczywiste q, mając α) $a_1=\frac{1}{8}$, $a_n=1024$, $n=14$; β) $a_1=5$, $a_n=6103515625$, $n=14$; γ) $a_1=2$, $a_n=32768$, $n=15$; δ) $a_1=3$, $a_n=129140163$, $n=17$.

392. Znaleźć n i S_n, mając α) $a_1=1$, $a_n=5\frac{1}{16}$, $q=\frac{3}{2}$; β) $a_1=7$, $a_n=354375$, $q=15$; γ) $a_1=1\cdot44$, $a_n=\frac{125}{216}$, $q=\frac{5}{6}$; δ) $a_1=\frac{a^2}{b}(1+x-x^2-x^3)$, $a_n=\frac{b^2(1-x)}{a^2(1+x)}$, $q=\frac{b}{a(1+x)}$.

393. Znaleźć q i n, mając α) $a_1=3$, $a_n=19683$, $S_n=29524$; β) $a_1=5$, $a_n=390625$, $S_n=488181$; γ) $a_1=2$, $a_n=33554432$, $S_n=67108863$; δ) $a_1=3$, $a_n=12288$, $S_n=9831$

394. Znaleźć a_n i rzeczywiste q, mając α) $a_1=20$, $n=3$, $S_n=95$; β) $a_1=2$, $n=7$. $S_n=2$; γ) $a_1=105$, $n=4$, $S_n=420$; δ) $a_1=1$, $n=7$, $S_n=\frac{x^7-y^7}{y^6(x-y)}$.

395. Znaleźć a_1 i rzeczywiste q, mając α) $a_n=600$, $n=3$, $S_n=834$; β) $a_n=10$, $n=6$, $S_n=0$; γ) $a_n=15$, $n=4$, $S_n=60$; δ) $a_n=\left(\frac{a}{b}\right)^6$, $n=7$, $S_n=\frac{a^7+b^7}{b^6(a+b)}$.

396. Znaleźć a_1 i a_n, mając α) $q=7$, $n=7$, $S_n=411711$; β) $q=\frac{3}{4}$, $n=6$, $S_n=19\frac{373}{512}$, γ) $q=\frac{1}{2}$, $n=9$, $S_n=191\frac{5}{8}$; δ) $q=\frac{7}{5}$, $n=25$, $S_n=33741\cdot5807$.

397. Znaleźć a_n i n, mając α) $a_1=5$, $q=5$, $S_n=97655$; β) $a_1=1\cdot03$, $q=1\cdot03$, $S_n=14\cdot61796$; γ) $a_1=1\cdot04$, $q=1\cdot04$, $S_n=22\cdot69748$; δ) $a_1=1\cdot025$, $q=1\cdot025$, $S_n=26\cdot18342$.

398. Znaleźć a_1 i n, mając α) $a_n=\frac{1}{128}$, $q=\frac{1}{2}$, $S=1\frac{127}{128}$; β) $a_n=1408576$, $q=4$; $S_n=187810$; γ) $a_n=32194$, $q=1\cdot05$, $S_n=69\cdot7608$; δ) $a_n=7\cdot25103$, $q=1\cdot06$, $S_n=109\cdot375$.

399. Iloczyn wyrazów 1-go i 3-go postępu geometrycznego jest 100, suma zaś jego wyrazów 2-go i 3-go jest 50. Jaki to jest postęp?

400. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny; suma pierwszych 3-ch jest 63, stosunek różnicy między czwartą z nich a drugą do różnicy między drugą a pierwszą jest 6:1. Jakie są te liczby?

401. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny. Stosunek sumy skrajnych do sumy średnich jest 3:2, a czwarta jest od 2-ej większa o 72. Jakie to są liczby?

402. Suma pierwszych 6-u wyrazów postępu geometrycznego o wyrazach dodatnych jest 189, suma zaś następnych 6-u jego wyrazów jest 12096. Jaki jest pierwszy wyraz i wykładnik postępu?

403. Wykładnik postępu geometrycznego jest jego wyrazem 5-ym, suma zaś wyrazów 2-go i 3-go jest $1\frac{1}{3}$. Jaki to jest postęp?

404. Suma trzech liczb tworzących postęp geometryczny jest 13, iloczyn zaś pierwszej i trzeciej jest 9. Znaleźć pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu.

405. Trzy liczby dodatne, których suma jest 28, tworzą postęp geometryczny; iloczyn sumy skrajnych przez średnią jest 160. Jakie to są liczby?

406. Pięć liczb dodatnych tworzy postęp geometryczny. Suma skrajnych i środkowej jest 1092 i jest o 820 większa od sumy pozostałych. Jakie to są liczby?

407. Suma wyrazów postępu geometrycznego jest —4372; suma wyrazów pierwszego i ostatniego jest —2920, iloczyn zaś tych wyrazów jest 11664. Znaleźć ilość wyrazów, pierwszy wyraz i wykładnik postępu.

408. W postępie geometrycznym ośmiowyrazowym suma wyrazów na miejscach parzystych jest $\frac{85}{128}$, suma zaś wyrazów na miejscach nieparzystych jest $1\frac{21}{64}$. Jaki jest pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu?

409. Trzy kolejne liczby całkowite są takie, iż suma ich kwadratów jest równa sumie 20-u wyrazów początkowych postępu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz jest 2, dwudziesty zaś 17·4. Pomnożywszy x przez pierwszą z owych liczb, zaś y przez drugą z nich, po dodaniu do siebie tych dwu iloczynów otrzymujemy sumę postępu geometrycznego, o 5-ciu wyrazach i wykładniku 2, w którym pierwszy wyraz jest 4. Znaleźć x i y.

410. Odejmując 297 od liczby trzycyfrowej, otrzymujemy liczbę różniącą się porządkiem cyfr. Cyfry owej liczby tworzą postęp geometryczny i suma skrajnych jest równa pięciokrotnej średniej. Jaka to jest liczba?

411. W systemacie ośmiu kół zębatych o jednakowej ilości zębów, każde z pierwszych siedmiu kół wprawia w ruch tryb znajdujący się na osi następnego koła zębatego, a mający zębów 3 razy mniej niż koło. Wiedząc, że ostatnie koło robi na minutę 10935 obrotów, obliczyć ile obrotów na minutę robi pierwsze koło.

412. Ktoś corocznie do kasy robił wkładki w ten sposób, iż w pierwszym roku wniósł 15 zł., a w każdym następnym do należnych za rok ubiegły odsetek dopłacał tyle, iżby ta kwota wraz z owym procentem przedstawiała kwotę 3 razy większą niż w roku poprzednim. Po ilu latach zbierze się w kasie oszczędności kapitał, od którego roczny dochód po 4% wynosiłby 218 zł. 40 ct.?

413. Między trzema pierwiastkami x_1, x_2 i x_3 równania $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ zachodzą związki: $x_1+x_2+x_3=-\alpha$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\beta$, $x_1x_2x_3=-\gamma$. Wiedząc, że pierwiastki równania $x^3-9x^2+\beta x+216=0$ są rzeczywiste i tworzą postęp geometryczny, znaleźć te pierwiastki i spółczynnik β.

414. Sześć kół, z których każde jest styczne zewnętrznie do poprzedniego koła, mają spólne dwie proste styczne. Pole największego z tych kół jest 59049 razy większe od pola najmniejszego z nich. Wyrazić w promieniu najmniejszego z tych kół odległość jego środka od punktu przecięcia się z sobą dwu spólnych stycznych.

415. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny. Gdy pierwszą z nich powiększymy o 8, mieć będziemy postęp geometryczny, którego suma jest 26. Jakie to są liczby?

416. Mamy dwie trójki liczb; liczby jednej tworzą postęp arytmetyczny, drugiej zaś postęp geometryczny. Suma pierwszych wyrazów tych dwu postępów jest 27, suma drugich 39, suma trzecich 87, suma zaś liczb pierwszej trójki jest 36. Jakie są liczby każdej trójki?

417. Znaleźć cztery liczby, z których trzy pierwsze tworzą postęp geometryczny, trzy zaś ostatnie arytmetyczny, gdy wiemy, że suma liczb skrajnych jest 14, a suma środkowych jest 12.

418. Dwa postępy, jeden arytmetyczny, drugi zaś geometryczny, są takie, iż, odejmując od każdego z pierwszych czterech wyrazów arytmetycznego wyraz odpowiedni geometrycznego, otrzymujemy liczby odpowiednio 1, 1, 0, —3. Jakie to są postępy?

419. Z dwu postępów jeden jest arytmetyczny, drugi geometryczny; pierwszy wyraz arytmetycznego jest wykładnikiem geometrycznego, pierwszy zaś wyraz geometrycznego jest różnicą arytmetycznego. Suma 10-u początkowych wyrazów postępu arytmetycznego jest 155, a suma początkowych dwu wyrazów geometrycznego jest 9. Jakie są te postępy?

420. Dwa postępy, jeden arytmetyczny o 8-u wyrazach, drugi zaś geometryczny o 4-ch wyrazach, których pierwsze wyrazy są 2, mają ostatnie wyrazy równe, suma zaś wyrazów postępu geometrycznego jest o 4 większa od ostatniego wyrazu postępu. Jakie to są postępy?

421. Dwa postępy o wyrazach dodatnych, z których jeden jest arytmetyczny, drugi zaś geometryczny, mają ten sam wyraz pierwszy, a suma ich wyrazów drugich jest 10. Prócz tego wiadomo, iż 3-ci wyraz postępu geometrycznego jest większy od 3-go wyrazu postępu arytmetycznego o 12, oraz iż czwarty wyraz postępu geometrycznego jest większy od czwartego wyrazu postępu arytmetycznego o 46. Jakie są te dwa postępy?

422. Pierwsze wyrazy trzech postępów geometrycznych przedstawiają postęp geometryczny o wykładniku 2, wykładniki zaś tych postępów przedstawiają postęp arytmetyczny o różnicy 1; suma drugich wyrazów tych postępów jest 24, suma zaś pierwszych 3-ch wyrazów trzeciego z tych postępów jest 84. Jakie są te postępy?

(Art. 45). **423**. Między liczby $\frac{1}{32}$ i 64 wstawić 10 liczb rzeczywistych, tworzących wraz z tamtemi postęp geometryczny. Jaki jest wykładnik tego postępu i jaka suma wszystkich jego wyrazów?

424. Między wyrazy 9-ty i 10-ty postępu 4, 12, 36,... wstawiamy 17 liczb rzeczywistych, tworzących wraz z owemi dwiema postęp geometryczny. Jaka jest pierwsza ze wstawionych liczb?

425. Między liczby $\frac{5}{32}$ i $\frac{5}{2}$ ile trzeba wstawić liczb, aby one wraz z tamtemi dwiema tworzyły postęp geometryczny, którego suma jest $2\frac{3}{16}$, i jakie są te liczby?

426. Między liczby 1 i 59049 wstawiono pewną ilość liczb, tworzących z tamtemi dwiema postęp geometryczny, którego suma jest 88572. Ile wstawiono liczb i jaki jest wykładnik tego postępu?

427. Między dwie liczby rzeczywiste, których suma jest $8\frac{1}{4}$, wstawiono cztery liczby rzeczywiste, tworzące z tamtemi postęp geometryczny taki, iż suma 2-ej i 3-ej ze wstawionych liczb jest 3. Jaka jest pierwsza z pierwotnych liczb i jaki wykładnik tego postępu?

428. Między dwie liczby rzeczywiste, których suma jest 51, wstawiono 3 liczby rzeczywiste, tworzące z tamtemi postęp geometryczny, których suma jest 42. Jaka jest pierwsza z pierwotnych liczb i wykładnik tego postępu?

429. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny; suma skrajnych jest 4097, suma zaś średnich 272. Między każde dwie wstawmy takie 3 liczby dodatne, iżby tych 13 liczb tworzyło postęp geometryczny. Wypisać pierwsze trzy wyrazy tak powstałego postępu?

430. Rozłożyć liczbę 155 na trzy składniki, tworzące postęp geometryczny, tak, iżby pierwszy był od drugiego mniejszy o 120, i wstawić między nie po jednej liczbie tak, iżby otrzymać postęp geometryczny o 5-u wyrazach. Znaleźć pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu.

(Art. 47). **431**. Znaleźć sumę postępu malejącego nieskończonego α) 3, 1, $\frac{1}{3}$, . . .; β) 4, $\frac{8}{5}$, $\frac{16}{25}$, . . .; γ) $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{24}$, $\frac{1}{96}$, $-\frac{1}{384}$, . . .; δ) $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, . . ., ε) $\frac{a}{1-a}$, $\frac{a^2}{1-a^2}$, $\frac{a^3}{1+a-a^2-a^3}$, . . . przy $a>-\frac{1}{2}$; ζ) $\frac{a}{1-q}$, $\frac{abq}{(1-q)^2}$, $\frac{ab^2q^2}{(1-q)^2}$, . . . przy $b^2<\frac{(1-q)^2}{q^2}$.

432. Znaleźć wyraz pierwszy postępu malejącego nieskończonego, którego α) S=70, $q=\frac{3}{7}$; β) S=$14\frac{1}{7}$, $q=\frac{2}{9}$; γ) S=5, $q=-\frac{3}{5}$.

433. Znaleźć wykładnik postępu malejącego nieskończonego, którego α) $a_1=b$, S=18; β) $a_1=5$, S=$\frac{25}{4}$; γ) $a_1=-3$, S=$-\frac{21}{8}$.

434. Ile wyrazów ma postęp geometryczny, którego wyraz pierwszy jest 3, wykładnik $\frac{3}{4}$, a suma 12?

435. W postępie geometrycznym o wyrazach rzeczywistych suma wziętych wyrazów jest $\frac{5}{2}$, suma trzech pierwszych z nich jest $\frac{76}{25}$, a suma następnych trzech jest $-\frac{2052}{3125}$. Jakie są wyraz pierwszy, wykładnik, i ilość wyrazów tego postępu?

436. Z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego spuszczamy prostopadłą na przeciwprostokątną *c*, z jej spodka prostopadłą na przyprostokątną *a*, i t. d. do nieskończoności. Jaka jest suma drugiej przyprostokątnej i wszystkich odcinków, które w sposób powyższy możnaby w tym trójkącie poprowadzić?

437. W kwadrat o boku *a* wpisujemy kwadrat, którego wierzchołki są w środkach boków kwadratu poprzedniego; podobnie w ten drugi kwadrat wpisujemy kwadrat trzeci i t. d. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól wszystkich tych kwadratów.

438. W kwadrat o boku a wpisujemy koło; w nie wpisujemy kwadrat, w niego koło itd. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól wszystkich tych kwadratów i kół razem.

439. W trójkąt równoboczny A B C o boku a wpisujemy koło i prowadzimy styczne do koła, oddzielające przy wierzchołkach A, B, C trójkąty mniejsze równoboczne; w tych trójkątach po wpisaniu kół oddzielamy przy wierzchołkach A, B, C znowu trójkąty równoboczne i t. d. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę promieni, β) sumę pól wszystkich tych kół.

(Art. 50). **440.** $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}$. **441.** $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

442. $1+2a+3a^2+\ldots+n.a^{n-1}$. **443.** $2+3a+4a^2+\ldots+(n+1)\,a^{n-1}$.

444. $3+4a+5a^2+\ldots+(n+2)a^{n-1}$. **445.** $2.1+3.2x+4.3x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$.

446. $a+(a+b)q+(a+2b)q^2+(a+3b)q^3+\ldots+(a+nb-b)\,q^{n-1}$.

447. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

448. Szalbierz zaproponował naiwnemu, który miał 1 zł., ciągłe podwajanie jego pieniędzy, zastrzegając sobie, iż przed pierwszem podwojeniem potrąci sobie 10 ct., a przed każdem dalszem kolejno kwotę dwa razy coraz większą. Po ilu takich „podwojeniach" szalbierz wyłudzi ów postawiony przez naiwnego złoty?

(Art. 51). **449.** $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\ldots$ **450.** $1-\frac{2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots$

451. $2+3a+4a^2+5a^3+\ldots$ przy $a^2<1$.

452. $a+(a+ab)q+(a+ab+ab^2)q^2+(a+ab+ab^2+ab^3)q^3+\ldots$ przy $q^2<1$ i $b^2q^2<1$.

453. $2.1+3.2x+4.3x^2+\ldots$ przy $x^2<1$.

(Art. 53). Gwiazdka * przy numerze oznacza, że zadanie należy zrobić przy pomocy tabliczki, podanej na str. 258-ej.

454*. Jaki narośnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 4000 zł. po 5% na 15 lat; β) 5600 zł. po 3·5% na 32 lata?

455. Jaki narośnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 18706 zł. po 4½% na 10 lat; β) 12388 zł. po 3½% na 17 lat; γ) 2739 zł. po 3¾% na 9 lat; δ) 68076 zł. po 4¾% na 12 lat?

456*. Z jakiego kapitału, oddanego na procent składany α) na 4 lata po 4%, powstanie 350958 zł.; β) na 33 lata po 5%, powstanie 50031·89 zł.?

457. Z jakiego kapitału, oddanego na procent składany α) na 27 lat po 4¾%, powstanie 8401·75 zł.; β) na 80 lat po 2¼%, powstanie 80001 zł.; γ) na 36 lat po 4%, powstanie 4924·7 zł.; δ) na 25 lat po 4¾%, powstanie 5042·67 zł.?

458*. Po ile % na procent składany oddane α) na 15 lat 7000 zł. wzrosną do 13546·97 zł.; β) na 32 lata 2800 zł. wzrosną do 8418·78 zł.?

459. Po ile % na procent składany oddane α) na 8 lat 46071 zł. wzrosną do 125000 zł.; β) na 18 lat 40800 zł. wzrosną do 56816 zł.; γ) na 9 lat 2100 zł. wzrosną do 4059·88 zł.; δ) na 20 lat 8000 zł. wzrosną do 15166·7 zł.?

460*. W ciągu ilu lat oddany na procent składany α) 8000 zł. po 3% wzrosną do 12100·72 zł.; β) 2727·3 zł. po 4% wzrosną do 3190·53 zł.?

461. W ciągu ilu lat oddane na procent składany α) 54 zł. po 3½% wzrosną do 123·29 zł.; β) 10000 zł. po 4½% wzrosną do 19353 zł.; γ) 5000 zł. po 6% wzrosną do 24111·7 zł.; δ) 3000 zł, po 5½% wzrosną do 18522·6 zł.?

462*. Jaki kapitał ma wnieść ojciec do kasy oszczędności na procent składany po 3½% na imię pięcioletniego syna, iżby tenże mając lat 19 otrzymał 2070 zł.?

463. W mieście, które przed 24-ma laty miało ludności 65000 osób, przybyło do obecnej chwili 67132 osoby; obliczyć średni procent wzrostu ludności przez te lata.

464. Miasteczko ma ludności 6443 osoby, a przed 15-u laty miało jej 3185 osób; gdyby przypuścić, że przyrost ludności pozostawał jednakowym, to ile ono mieć mogło ludności 24 lata temu?

465. Po ilu latach kapitał 8443 zł., oddany na procent składany po 4%, wzrośnie do sumy, którą przedstawi kapitał 9000 zł., oddany na procent składany po 6%, po 9-u latach?

466. Na jaki procent składany należy oddać kapitał 32748·4 zł., aby po 3-ch latach przedstawiał sumę, do jakiej w tymże samym przeciągu czasu wzrośnie kapitał 31843·2 zł., oddany na procent składany po 7·5%?

467. Kasa oszczędności przyjęła kapitał 10000 zł. na procent składany po 3%, a umieściła go na 6% i taksamo kapitalizowała odsetki. Jaki będzie miała zysk po upływie 10 lat?

468. Na jaki procent składany kasa przyjęła 1500 zł., jeżeli, umieściwszy go na procent składany po 5%, osiągnęła w ciągu 10-u lat 427·47 zł. zysku?

469. Na jaki procent składany należałoby oddać kapitał, aby się podwoił w ciągu 10 lat?

470. Pewien kapitał był oddany na procent składany po 5%, z narastającego kapitału po upływie lat 10-u wzięto 7000 zł., a pozostała część wzrastała dalej po 4½% przez 30 lat i wzrosła do 70000 zł. Jaki był pierwotny kapitał?

(Art. 54). **471*.** Po jakim czasie kapitał, oddany na procent składany po 5%, α) podwaja się, β) powiększa się 5 razy?

472. Jaki urośnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 2400 zł. po 5% na 10 lat i 5 miesięcy; β) 3250 zł. po 7% na 22 lata i 10¼ miesiąca?

473. W ciągu jakiego czasu oddane na procent składany α) 1200 zł. po 4% wzrosną do 5072·3 zł.; β) 40800 po 2% wzrosną do 57336·8 zł.?

474. Oddano 4800 zł. na procent składany po 4¾%; jaki przy półrocznej kapitalizacyi procentu powstanie kapitał po 27-u latach?

475. Ktoś posiada na 100000 zł. pięcioprocentowych papierów publicznych z kuponami półrocznemi. Przy natychmiastowem kapitalizowaniu półrocznem dochodów jaki powstałby kapitał po upływie 30-u lat?

476. Po ilu latach kapitał 5000 zł., oddany na procent składany po 6%, przy półrocznej kapitalizacyi odsetek narośnie do 9030·56 zł.?

(Art. 55). **477*.** Jaki w rok po wniesieniu ostatniej wkładki zgromadzi się kapitał z wkładek corocznych oddawanych na procent składany α) po 270 zł. przez 14 lat po 4½%; β) po 840 zł. przez 33 lata po 3½%?

478. Jaki w rok po wniesieniu ostatniej wkładki zgromadzi się kapitał z wkładek corocznych, oddawanych na procent składany α) po 40 zł. przez 24 lata na 7%; β) po 200 zł. przez 16 lat na 5%; γ) po 770 zł. przez 12 lat na 3½%; δ) po 1500 zł. przez 30 lat na 6%?

479*. Jaka ma być coroczna wkładka oddawana na procent składany, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki utworzył się α) przy 5% w ciągu 4-ch lat kapitał 45256 zł.; β) przy 3% w ciągu 14-u lat kapitał 1573903 zł.?

480. Jaka ma być coroczna wkładka oddawana na procent składany, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki utworzył się α) przy 4% w ciągu 20-u lat kapitał 629385 zł., β) przy 3% w ciągu 12-u lat kapitał 877068 zł.; γ) przy 3·5% w ciągu 22-u lat kapitał 175403 zł.; δ) przy 2·5% w ciągu 34-ch lat kapitał 269641 zł.?

481*. Ile trzeba wnieść na procent składany corocznych wkładek, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki α) przy 5% i rocznej wkładce 625 zł. powstał kapitał 49414·85 zł., β) przy 4% i rocznej wkładce 420 zł. powstał kapitał 8846·31 zł.?

482. Ile trzeba wnieść na procent składany corocznych wkładek, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki α) przy 6% i rocznej wkładce 600 zł. powstał kapitał 148035 zł.; β) przy 4·5% i rocznej wkładce 540 zł. powstał kapitał 89406 zł.; γ) przy 3% i rocznej wkładce 210 zł. powstał kapitał 165739 zł.; δ) przy 3·5% i rocznej wkładce 1050 zł. powstał kapitał 112674 zł.?

483*. Jaki kapitał w chwili ostatniej wypłaty przedstawiają corocznie dokonywane w końcu roku wypłaty po 3500 zł. przy 3½% przez 15 lat?

484. Jaki kapitał w chwili ostatniej wypłaty przedstawiają corocznie dokonywane w końcu roku wypłaty α) po 300 zł. przy 6% przez 6 lat; β) po 400 zł. przy 4% przez 13 lat; γ) po 240 zł. przy 3% przez lat 21?

485*. Jaką ma być coroczna wypłata, aby spłacić należność 327403 zł. płatnych po po 33 latach przy 4·5%?

486. Jaką ma być coroczna wypłata, aby spłacić należność α) 354072 zł. płatnych po 10-u latach przy 5·5%; β) 184908 zł. płatnych po 25-u latach przy 4·5%; γ) 397495 zł. płatnych po 30-u latach przy 3·5%?

487. Ktoś wniósł do kasy oszczędności 500 zł., a następnie corocznie dokładał 12548 zł.; kasa oszczędności oblicza procent po 4·5%. Jaki nagromadził się kapitał w ciągu 10-go roku od chwili wniesienia pierwszej kwoty?

488. Jan pobierał od Piotra w dniu swych urodzin od chwili skończenia 38-go roku życia po 180 zł., za co Piotr nabył prawo otrzymania z chwilą śmierci Jana z pozostałego po nim majątku jednorazowo 6000 zł. Jan umarł w końcu 64-go roku życia. Przyjmując za podstawę rachunku 3·6%, obliczyć zysk czy też stratę Piotra w chwili śmierci Jana.

489. Kapitalista mający 600000 zł. umieszcza swój majątek na procent składany po 5%; po upływie jednak każdego roku czerpie z niego na swe utrzymanie 6000 zł. Jaki będzie posiadał majątek w końcu 12 roku?

490. Ktoś pożyczywszy 2578 zł. na 5% płacił przez 10 lat w końcu każdego roku po 100 zł. na rachunek odsetek. Jak wielki jest jego dług na początku 11-go roku?

491. Sprawdzić ,przyjmując w obrachunku stopę 5%, czy jest korzystne przedsiębiorstwo, w którem na początku trzeba włożyć kapitał 12480 zł., a przez 6 następujących lat corocznie na początku roku dokładać po 2400 zł., wobec pewności, iż od początku 8-go roku przynosić ono będzie 1500 zł. rocznie czystego zysku.

(Art. 56). **492*.** Jaka jest dzisiejsza wartość 5% renty 500 zł., wypłacanej w końcu roku przez 14 lat?

493. Jaka jest dzisiejsza wartość α) przy 5% renty 1036 zł., wypłacanej w końcu roku przez 14 lat; β) przy 4·5% renty 380 zł., wypłacanej w końcu roku przez 8 lat; γ) przy 3·5% renty 60674 zł., wypłacanej w końcu roku przez 25 lat?

494*. Jaką można mieć corocznie w końcu roku wypłacaną rentę przez 32 lata przy 4% za kapitał 714942 zł.?

495. Jaką można mieć corocznie w końcu roku wypłacaną rentę α) przez 15 lat przy 4·5% za kapitał 35780 zł.; β) przez 20 lat przy 5% za kapitał 10000 zł.; γ) przez 10 lat przy 5·5% za kapitał 16582·7 zł.?

496*. Przez ile lat można otrzymywać w końcu roku rentę 450 zł., oddając kapitał 7660·33 zł. przy 4·5%?

497. Przez ile lat można otrzymywać w końcu roku rentę α) 15375·5 zł., oddając kapitał 200000 zł. przy 4·5%; β) 388·51 zł., oddając kapitał 3000 zł. przy 5%; γ) 2373·93 zł., oddając kapitał 10000 zł. przy 6%?

498*. Jaki można wnieść jednorazowo kapitał w chwili pierwszej wkładki zamiast płacenia przez 15 lat po 3500 zł., przyjmując w rachunku 3·5%?

499. Jaki można wnieść jednorazowo kapitał w chwili pierwszej wkładki zamiast płacenia α) przez 18 lat po 1200 zł., przyjmując w rachunku 5%; β) przez 30 lat po po 7155·66 zł., przyjmując w rachunku 5%; γ) przez 20 lat po 10000 zł., przyjmując w rachunku 4%?

500*. Jakiej corocznej wkładce przez 33 lata odpowiada przy 4% kapitał 2521·71 zł.?

501. Jakiej corocznej wkładce α) przez 20 lat odpowiada przy 5% kapitał 84000 zł.; β) przez 13 lat odpowiada przy 3·5% kapitał 16527·6 zł.; γ) przez 6 lat odpowiada przy 5% kapitał 1522·71 zł.?

502*. Ilu corocznym wkładkom po 400 zł. odpowiada przy 4% kapitał 1510.04 zł.?

503. Ilu odpowiada corocznym wkładkom α) po 100 zł. przy 5% kapitał 1137·48 zł.; β) po 480 zł. przy 3% kapitał 14138·7 zł.; γ) po 2100 zł. przy 3·5% kapitał 23735·5 zł.?

504. Aby umorzyć dług 3253·3 *zł.* w ciągu 14-u lat, jaką corocznie trzeba płacić ratę, przyjmując przy obrachunku 6%?

505. Miasto potrzebuje uzyskać z pożyczki 864000 zł. Bank udziela jej, płacąc 96 za 100, na spłatę 10-oletnią przy 5%. Jak wielka ma być jednoroczna spłata?

506. Dzierżawca ma płacić z majątku po 5470 *zł.* rocznie. Właściciel majątku pragnie tenutę za 8 następnych lat otrzymać w dwu równych ratach, jednę teraz, drugą na początku 5-go roku. Jak wielkie mają być te raty, jeżeli przy obrachunku przyjęto 6%?

507. Ile przez 12 lat należy do banku wnosić corocznie, aby zapewnić sobie przez następujących lat 20 rentę roczną po 2000 *zł.*, gdy bank przyjmuje w obrachowaniu $3{\cdot}5\%$?

508. Ktoś umieścił w kasie oszczędności 300000 *zł.* po 5% na procent składany; corocznie jednak bierze z kasy 18000 *zł.* Po ilu latach wyczerpie ten kapitał?

(Art. 58). **509.** Znaleźć ilość waryacyj α) z 7-u elementów po 2, po 5, po 6; β) z 9-u elementów po 3, po 5, po 7; γ) z 12-u elementów po 3, po 5, po 6; δ) z 90-u elementów po 4, po 6; ε) ze 100-u elementów po 3, po 5.

510. Ile istnieje różnych liczb 4-ocyfrowych, nie mających cyfr jednakich?

511. Ile przy pomocy cyfr od 1 do 9 można utworzyć różnych liczb 7-ocyfrowych, mających tę samę cyfrę na pierwszem miejscu, a nie mających cyfr jednakowych?

(Art. 59). **512.** Ile jest przemian α) z 5-u elementów; β) z 8-u elementów; γ) z 10-u elementów?

513. Gdyby w ciągu minuty można było napisać średnio 6 przemian z 10-u elementów, to ile potrzebaby godzin na wypisanie wszystkich tych przemian?

514. Z 10-u cyfr ile można utworzyć różnych liczb 10-ocyfrowych, nie mających cyfr jednakowych?

515. Ile jest kombinacyj α) z 9-u elementów po 3, po 5, po 6; β) z 15-u elementów po 2, po 5, po 7, po 8, po 10, po 13; γ) z 50-u elementów po 4, po 6, po 44, po 46?

516. Ilu sposobami można 52 karty rozdzielić między 4-ch graczy?

517. 32 kule poznaczone rozmieścić w 3-ch naczyniach tak, iżby w dwu było ich po 12, a w trzeciem pozostałe. Ilu sposobami można tego dokonać?

518. Ilu sposobami można rozdać 32 karty między 3-ch graczów, dając każdemu po 10, a dwie odkładając jako kupne?

519. Na płaszczyźnie znajduje się n prostych, z których p jest do siebie równoległych, żadne dwie z pozostałych $n-p$ prostych nie są do siebie równoległe, a żadne 3 (ze wszystkich prostych) nie przecinają się z sobą w jednym punkcie. Ile jest w odległości skończonej punktów przecięcia się tych prostych?

520. Na płaszczyźnie leżą 2 pęki promieni, jeden o 8-u a drugi o 5-u promieniach, nie mające promienia spólnego. Ile jest wszystkicb punktów przecięcia się promieni?

521. Z ilu elementów kombinacyj po 4 jest 495?

522. Na płaszczyźnie znajduje się n prostych, pośród których niema równoległych do siebie i żadne 3 nie przechodzą przez ten sam punkt. Ile najwięcej można poprowadzić prostych, przechodzących przez 2 punkty przecięcia się z sobą tamtych prostych?

(Art. 61). **523.** Sprawdzić formuły 5 i 6, kładąc α) $n=6$, $\nu=3$; β) $n=9$, $\nu=4$.

(Art. 62). **524.** Wypisać metodycznie wszystkie przemiany z elementów α) a_1, a_2, a_3; β) a_1, a_2, a_3, a_4.

525. Wypisać wszystkie kombinacye po 3, po 4, po 5, po 6 α) z elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; β) z elementów $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.

526. Wypisać wszystkie waryacye z elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 α) po 2; β) po 3.

(Art. 63). **527.** Ustawić obok siebie 12 kul, z których 3 są białe, 4 czerwone, a 5 czarnych. Ilu sposobami można tego dokonać?

528. W kole loteryjnem są 24 bilety, z których 12 pustych, 6 wygrywających przedmioty jednakowe, a pozostałe wygrywają przedmioty różne. Ilu różnemi sposobami można dokonać ciągnienia wygranych?

529. Mając iloczyn α) $2n$ czynników, grupujemy je w pary; ile może być takich ugrupowań, mających niejednakowe pary; β) $3n$ czynników, grupujemy je w trójki; ile może być takich ugrupowań, mających niejednakowe trójki?

(Art. 64). **530.** Z dwu znaków telegraficznych: kropki i kreski ile można złożyć sygnałów, biorąc α) po 2 znaki; β) po 3 znaki; γ) po 4 znaki?

531. Na klawiaturze, mającej 7 oktaw, ilu sposobami można wziąć jednocześnie 3 tony: C, E i G?

532. Ile istnieje wszystkich liczb 4-ocyfrowych?

533. Ile różnych liczb 6-ocyfrowych można utworzyć przy pomocy cyfr 1, 5, 7, 8?

534. Ktoś ma 4 konie siwe, 4 gniade i 4 kare. Sprzęga czwórkę. Ilu sposobami może to uczynić, jeżeli jedna czwórka od innej ma się różnić α) przynajmniej jednym koniem innej maści; β) przynajmniej jednym koniem innej maści na jednem z czterech miejsc?

535. Z pełnej talii kart wziąwszy ich 13, zwracamy na to tylko uwagę, ile pośród wziętych znajduje się kart tego lub owego z czterech »kolorów«. Ilu różnemi z tego względu sposobami można wziąć tak z talii po 13 kart?

(Art. 66). **536.** W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 2 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo α) wyciągnięcia gałki czarnej; β) gałki białej; γ) gałki niebieskiej?

(Art. 67). **537.** W urnie jest 15 gałek białych i 10 czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia α) 10-u gałek białych; β) 5-u gałek białych; γ) 5-u gałek czarnych?

538. W urnie jest 15 gałek białych i 10 czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia α) 5-u białych i 5-u czarnych; β) 10-u białych i 5-u czarnych; γ) 4-ch gałek białych i 6-u czarnych?

539. Jakie jest prawdopodobieństwo z talii 32-u kart wyciągnięcia α) 4-ch kart pikowych; β) 4-ch kart jednego koloru?

540. Jakie jest prawdopodobieństwo z talii 52-u kart wyciągnięcia 3-ch kart: dwu tuzów i jednego niżnika?

(Art. 69). **541.** Jakie jest prawdopodobieństwo, iż w 6-u rzutach kostki wyrzucimy cztery razy, nie więcej, α) po dwójce, β) jednakowe liczby?

542. Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby α) 2; β) 3; γ) 4; δ) 5; ε) 6; ζ) 8; η) 10; θ) 11; ι) 12?

543. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w 3-ch rzutach kostki liczby α) 5; β) 6; γ) 9; δ) 15?

544. Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby grającej w domino (28 »kamieni«), iż pośród wziętych przez nią 7-u kamieni niema podwójnej szóstki?

545. W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 3 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wyciągniemy gałki niebieskiej?

(Art. 71). **546.** W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 3 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo α) wyciągnięcia gałki bądź czarnej bądź niebieskiej; β) wyciągnięcia gałki bądź białej bądź niebieskiej?

(Art. 72). **547.** Mamy dwie urny, pierwsza zawiera 5 czarnych gałek i 3 białe, druga 7 czarnych i 7 zielonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc raz z pierwszej urny i raz z drugiej, wyciągniemy w obu razach gałkę czarną?

548. W urnie są 2 gałki białe i dwie czarne; α) wyciągnąwszy jednę gałkę, wrzucamy ją do urny i wyciągamy powtórnie jednę gałkę; β) wyciągnąwszy jednę gałkę, nie wrzucamy jej do urny i wyciągamy powtórnie jednę gałkę (albo: wyciągamy z urny odrazu dwie gałki). O ile jest większe prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny dwu gałek białych sposobem α) niż sposobem β)?

549. Jakie przy rzucaniu kostki dwa razy jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby 1 w pierwszym, a jeżeli nie to w drugim rzucie?

550. Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby grającej w domino, iż pośród wziętych przez nią 7-u kamieni α) niema podwójnego kamienia; β) że wszystkie wzięte kamienie są podwójne; γ) że wszystkie kamienie mają mydło; δ) że wszystkie mają jednakową połowę?

551. Jakie jest prawdopodobieństwo przy trzech rzutach kostki, że liczba 1 α) w dwu pierwszych rzutach nie wyjdzie, a w 3-im wyjdzie; β) raz przynajmniej wyjdzie; γ) wyjdzie w 1-ym rzucie, a w 2-im i 3-im pojawi się raz jeden; δ) nie wyjdzie w 1-ym rzucie, a wyjdzie zarówno w 2-im jak i w 3-im; ε) dwa razy wyjdzie?

(Art. 74). **552.** Jakie jest prawdopodobieństwo, iż osoba, mająca α) lat 21, żyć będzie 50 lat; β) lat 25, żyć będzie 45 lat; γ) lat 25, żyć będzie 60 lat; δ) lat 30, żyć będzie 70 lat?

(Art. 75). **553.** Jaki kapitał ma wnieść (przy 4%) jednorazowo osoba, mająca α) lat 21, aby w razie, gdy dożyje 45-u lat, otrzymała 15000 zł.; β) lat 18, aby w razie, gdy dożyje 50-u lat, otrzymała 15000 zł.; γ) lat 35, aby w razie, gdy dożyje 52-u lat, otrzymała 25000 zł.; δ) lat 40, aby w razie, gdy dożyje 65-u lat, otrzymała 10000 zł.?

554. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć sobie osoba, mająca α) lat 21, gdy dożyje 50-u lat, wnosząc teraz 5000 zł.; β) lat 30, gdy dożyje 50-u lat, wnosząc teraz 12000 zł.; γ) lat 20, gdy dożyje 45-u lat, wnosząc teraz 3650 zł.; δ) lat 25, gdy dożyje 62-u lat, wnosząc teraz 4280 zł.?

(Art. 76). **555.** Jaki kapitał wnieść ma (przy 4%) osoba, mająca α) lat 21, aby pobierała dożywotnie rentę 800 zł.; β) lat 38, aby pobierała dożywotnie rentę 1300 zł.?

556. Jaką pobierać może (przy 4%) dożywotnią rentę osoba, mająca α) 25 lat, wnosząc 6000 zł.; β) lat 53, wnosząc 7500 zł.?

(Art. 77). **557.** Jaki kapitał wnieść (przy 4%) powinna osoba, mająca α) lat 21, aby jej spadkobiercy otrzymali 15000 zł.; β) lat 49, aby jej spadkobiercy otrzymali 10000 zł.; γ) lat 35, aby jej spadkobiercy otrzymali 12000 zł.; δ) lat 55, aby jej spadkobiercy otrzymali 8000 zł.?

558. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć swym spadkobiercom osoba, mająca α) lat 21, wnosząc 10000 zł.; β) 26 lat, wnosząc 17000 zł.; γ) 49 lat, wnosząc 20000 zł.; δ) 55 lat, wnosząc 10000 zł.?

(Art. 78). **559.** Jaką wkładkę na początku każdego roku wnieść (przy 4%) ma osoba, mająca α) lat 21, aby jej spadkobiercom wypłacono 15000 zł.; β) lat 30, aby jej spadkobiercom wypłacono 12000 zł.; γ) lat 45, aby jej spadkobiercom wypłacono 30000 zł.; δ) lat 54, aby jej spadkobiercom wypłacono 65000 zł.?

560. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć swym spadkobiercom osoba, mająca α) lat 21, wnosząc na początku każdego roku po 200 zł.; β) lat 34, wnosząc na początku każdego roku po 350 zł.; γ) lat 49, wnosząc na początku każdego roku po 200 zł.; δ) lat 40, wnosząc na początku każdego roku po 1000 zł.?

(Art. 80). **561.** $(3a-7b)^7$. **562.** $(2-i)^6$. **563.** $(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6$.

564. Wypisać spółczynnik x^1 w rozkładzie $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$.

565. Wypisać α) wyraz siódmy wyrażenia $(3a^{\frac{1}{2}}-4b^{\frac{3}{2}})^{10}$; β) wyraz 7-y i 15-y wyrażenia $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{20}$; γ) wyrazy środkowe wyrażenia $(5a-2b)^{13}$.

566. Jaki jest wyraz 6-y postępu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest $\frac{\sqrt{b}}{ab}$, a wykładnikiem $a\sqrt{b}-b\sqrt{a}$?

567. W jakiej potędze dwumianu spółczynnik w wyrazie trzecim jest α) 528; β) 1596; γ) $2p^2-5p+3$?

568. W jakiej potędze dwumianu spółczynnik w wyrazie piątym jest 126?

569. W jakiej potędze dwumianu wyrazy trzeci i piąty mają ten sam spółczynnik?

570. Jaki jest spółczynnik wyrazu zawierającego $a^{n-r}b^r$ w wyrażeniu $(a-\frac{1}{2}b)^n$, jeżeli n jest wyrazem trzecim postępu geometrycznego o 6-u wyrazach, w którym suma wyrazów na miejscach parzystych jest 147, wyrazów zaś na miejscach nieparzystych jest $73\frac{1}{2}$, i jeżeli p przedstawia ilość wyrazów postępu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 5, różnicy 3 i sumie 98?

(Art. 81). **571**. Przy dodatnem i całkowitem n jest
α) $1+2n+2n(n-1)+\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)+\ldots+2^n=$? β) $1+3n+\frac{9}{2}n(n-1)+\frac{9}{2}n(n-1)(n-2)+\ldots+3^n=$?

(Art. 82). **572**. Znaleźć ilość wyrazów rozkładu $(a+b+c)^n$.

573. Znalezć wyraz wyrażenia $(a+b+c+d)^n$ zawierający d^{n-3}.

574. Jaki jest spółczynnik przy x^{12} w rozkładzie $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)^5$.

(Art. 84). **575**. Wyciągnąć pierwiastek stopnia ósmego z wielomianu:
$a+8\sqrt[8]{a^7b}+28\sqrt[4]{a^3b}+56\sqrt[8]{a^5b^3}+70\sqrt{ab}+56\sqrt[8]{a^3b^5}+28\sqrt[4]{ab^3}+8\sqrt[8]{ab^7}+b$.

576. Wyciągnąć pierwiastek stopnia 5-go z wielomianu α) $32a^5-240a^4b+720a^3b-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5$; β) $243x^{20}+405x^{19}-2565x^{18}-5715x^{17}+9465x^{16}+31441x^{15}-8165x^{14}-86055x^{13}-36185x^{12}+119495x^{11}+108073x^{10}-71145x^9-111845x^8+5435x^7+47025x^6+1955x^5-11390x^4+680x^3+1440x^2-400x+32$.

(Art. 86). **577**. Przedstawić w kształcie trygonometrycznym liczby:
α) $1+i\sqrt{3}$; β) $-2\sqrt{3}+2i$; γ) $-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}$; δ) $-4\sqrt{2+\sqrt{2}}-4i\sqrt{2-\sqrt{2}}$,
ε) $-4\sqrt{2+\sqrt{2+2}}-4i\sqrt{2-\sqrt{2+2}}$; ζ) $5\sqrt{3}-5i$.

578. Przedstawić w kształcie trygonometrycznym liczby:
α) $6{\cdot}12829+5{\cdot}14233i$, β) $5{\cdot}40575-2{\cdot}60329i$.

(Art. 88). **579**. Przedstawić w dwu kształtach iloczyn liczb w zad. 577-em, a mianowicie: *a*) iloczyn pod α i β; *b*) iloczyn liczb pod α i γ; *c*) iloczyn liczb pod α, β i γ.

580. Z trygonometrycznego kształtu iloczynu dwu liczb w zadaniu 578-em wyrachować inny.

581. Przedstawić w dwu kształtach iloraz liczb w zad. 577-em, a mianowicie iloraz: *a*) z podzielenia liczby pod α przez liczbę pod β; *b*) z podzielenia liczby pod α przez liczbę pod γ, *c*) z podzielenia liczby pod γ przez liczbę pod δ.

582. Z trygonometrycznego kształtu ilorazu pierwszej z liczb przez drugą w zadaniu 578-em wyrachować inny.

(Art. 90—93). **583**. Wyrazić, w obu kształtach wszystkie pierwiastki sześcienne α) z $+1$; β) z -1; γ) z 8; δ) z -8.

584. Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki stopnia 4-go α) z 64: β) z -64.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+1$, β) z -1 **585**. stopnia 8-go, **586**. stopnia 12-go, **587**. stopnia 16-go, **588**. stopnia 5-go, **589**. stopnia 10-go, **590**. stopnia 20-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+1$, β) z -1 **591**. stopnia 7-go, **592**. stopnia 9-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+i$, β) z $-i$. **593**. stopnia 3-go. **594**. stopnia 4-go, **595**. stopnia 6-go, **596**. stopnia 8-go, **597**. stopnia 12-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki stopnia 9-go α) z $+i$, β) z $-i$.

ODPOWIEDZI.

1. $x_1=7{\cdot}5$, $y_1=2$; $x_2=3$, $y_2=5$. **2**. $x_1=15$, $y_1=5$; $x_2=-15$, $y=-5$. **3**. $x_1=y_1=1$; $x_2=\frac{1}{27}$, $y_2=3\frac{11}{27}$. **4**. $x_1=10$, $y_1=4$; $x_2=12$, $y_2=2$. **5**. $x_1=y_1=1$; $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=2\frac{5}{9}$. **6**. $x_1=2$, $y_1=9$; $x_2=-2$, $y_2=-9$. **7**. $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=1\frac{1}{16}$, $y_2=1\frac{5}{8}$. **8**. $x_1=4$, $y_1=-8$, $x_2=-3\frac{3}{11}$, $y_2=8$. **9**. $x_1=2\sqrt{3}$, $y_1=\sqrt{3}$; $x_2=-2\sqrt{3}$, $y_2=-\sqrt{3}$. **10**. $x_1=3\sqrt{2}$, $y_1=2\sqrt{2}$; $x_2=-3\sqrt{2}$, $y_2=-2\sqrt{2}$. **11**. $x_1=3-\sqrt{2}$, $y_1=2+\sqrt{2}$; $x_2=3+\sqrt{2}$, $y_2=2-\sqrt{2}$. **12**. $x_1=1$, $y_1=3\frac{1}{3}$; $x_2=5$, $y_2=\frac{2}{3}$. **13**. $x_1=i\sqrt[4]{18}$, $y_1=\frac{2}{3}i\sqrt[4]{18}$; $x_2=-i\sqrt[4]{18}$, $y_2=-\frac{2}{3}i\sqrt[4]{18}$.

14. $x_1 = 7i\sqrt{\tfrac{5}{11}},\ y_1 = 3i\sqrt{\tfrac{5}{11}};\ x_2 = -7i\sqrt{\tfrac{6}{11}},\ y_2 = -3i\sqrt{\tfrac{6}{11}}$. **15.** $x_1 = 2+3i,\ y_1 = 3+2i;\ x_2 = 2-3i,$ $y_2 = 3-2i$. **16.** $x_1 = -3+i\sqrt{2},\ y_1 = 10-3i\sqrt{2};\ x_2 = -3-i\sqrt{2},\ y_2 = 10+3i\sqrt{2}$.

18. $x_1 = y_2 = \dfrac{ab\,(b-\sqrt{2a^2-b^2})}{b^2-a^2};\ x_2 = y_1 = \dfrac{ab\,(b+\sqrt{2a^2-b^2}}{b^2-a^2}$. **19.** $x=4,\ y=0$.

20. $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}(l+\sqrt{2a^2-l^2});\ y_1 = x_2 = \frac{1}{2}(l-\sqrt{2a^2-l^2})$.

21. $x_1 = \frac{1}{2}a\,(2-ab-\sqrt{a^2b^2+4}),\ y_1 = \frac{1}{2}a\,(2+ab+\sqrt{a^2b^2+4});\ x_2 = \frac{1}{2}a(2-ab+\sqrt{a^2b^2+4}),$ $y_2 = \frac{1}{2}a\,(2+ab-\sqrt{a^2b^2+4})$.

22. $x_1 = \dfrac{b^2-a^2-2ab+\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)},\ y_1 = \dfrac{a^2-b^2-2\,ab+\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab\,(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)};$

$x_2 = \dfrac{b^2-a^2-2ab-\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)},\ y_2 = \dfrac{a^2-b^2-2ab-\sqrt{(a^2+b^2)^2-8\,ab\,(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)}$.

23. $x_1 = \dfrac{3a+\sqrt{a^2-8b}}{2(a^2+b)},\ y_1 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-8b}}{2b};\ x_2 = \dfrac{3a-\sqrt{a^2-8b}}{2(a^2+b)},\ y_2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2-8b}}{2b}$.

24. 77 i 91, albo —77 i —91. **25.** 27 i 23. **26.** 75, albo —46. **27.** 32.

28. $\dfrac{3}{4}$, albo $\dfrac{-0{\cdot}6}{-1{\cdot}4}$. **29.** Podstawę należy powiększyć o $(-39+\sqrt{2949})$ *cm*, a wysokość zmniejszyć o $(-51+\sqrt{2949})$ *cm*. **30.** $\dfrac{h}{b^2+h^2}(b^2+\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2}),$

$\dfrac{b}{b^2+h^2}(h^2-\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2};\ \dfrac{h}{b^2+h^2}(b^2-\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2},\ \dfrac{b}{b^2+h^2}(h^2+\sqrt{d^2(b^2+h^2-b^2h^2})$.

31. Podstawa 12·8 *m* lub 0·8 *m*, wysokość odpowiednio 1·6 *m* lub 25·6 *m*.

32. Wysokość 9 *dm* lub 5 *dm*, podstawa odpowiednio 6 *dm* lub 10 *dm*.

33. $x_1 = y_1 = 2;\ x_2 = -\frac{3}{28},\ y_2 = -1\frac{4}{17}$. **34.** $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\frac{45}{91},\ y_2 = -20\frac{1}{2}$.

35. Znosząc mianowniki, dochodzimy do układu dwu równań stopnia 2-go, który przy wartościach niewiadomych różnych od zera jest równoznaczny z układem danych dwu równań ułamkowych; $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$. **36.** $x_1 = -2\sqrt{3},\ y_1 = 3\sqrt{3};\ x_2 = 2\sqrt{3},\ y_2 = -3\sqrt{3}$.

37. $x_1 = 3+2\sqrt{3},\ y_1 = 1+\sqrt{3};\ x_2 = 3-2\sqrt{3},\ y_2 = 1-\sqrt{3}$.

38. $x_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{39}),\ y_1 = \frac{1}{2}(3+i\sqrt{39});\ x_2 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{39}),\ y_2 = \frac{1}{2}(3-i\sqrt{39})$.

39. $x_1 = 1+i\sqrt{3},\ y_1 = 3+i\sqrt{3};\ x_2 = 1-i\sqrt{3},\ y_2 = 3-i\sqrt{3}$. **41.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

42. $\dfrac{p}{h+2p}(\sqrt{p^2-2ph-h^2}+p+h),\ \dfrac{p}{h+2p}(\sqrt{p^2-2ph-h^2}-p-h).]$ **43.** 3 *m*, 4·2 *m*.

44. 4 mile, 13 dni. **45.** 4%, 5 lat. **46.** 12000 zł. i 5% lub 10000 zł. i 6%.

47. 1430 zł., 10 lat. **49.** $x_1 = x_2 = \frac{1}{8},\ y_1 = \frac{5}{8},\ y_2 = -\frac{3}{8}$. **50.** $x_1 = 73,\ y_1 = 57;\ x_2 = -73,\ y_2 = -57$.

51. $x_1 = y_2 = 1,\ y_1 = x_2 = 3$. **52.** $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = -5,\ y_2 = -4$.

53. $x_1 = 4{\cdot}8,\ y_1 = 2{\cdot}6;\ x_2 = -2{\cdot}6,\ y_2 = -4{\cdot}8;\ x_3 = -5,\ y_3 = -3;\ x_4 = 3,\ y_4 = 5$.

54. $x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = -3,\ y_2 = -4;\ x_3 = 6\frac{9}{11},\ y_3 = 1\frac{5}{11};\ x_4 = -6\frac{9}{11},\ y_4 = -1\frac{5}{11}$.

55. $x_1 = 2,\ y_1 = 2-\sqrt{2};\ x_2 = -2,\ y_2 = 2+\sqrt{2}$. **56.** $x_1 = 3\sqrt{2},\ y_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2},\ y_2 = -\sqrt{2}$.

57. $x_1 = y_2 = 2,\ y_1 = x_2 = 4;\ x_3 = y_4 = -\frac{1}{6}(13+\sqrt{377}),\ y_3 = x_4 = -\frac{1}{6}(13-\sqrt{377})$.

58. $x_1 = 18,\ y_1 = 6;\ x_2 = -18,\ y_2 = -6;\ x_3 = 6i,\ y_3 = -18i;\ x_4 = -6i,\ y_4 = 18i$.

59. $x_1 = y_2 = 9,\ y_1 = x_2 = 4;\ x_3 = y_4 = 22+i\sqrt{141},\ y_3 = x_4 = 22-i\sqrt{141}$.

60. $x_1 = y_1 = 5,\ x_2 = 3,\ y_2 = 4;\ x_3 = 4+i\sqrt{71},\ y_3 = \frac{1}{2}(-3+i\sqrt{71})\ x_4 = 4-i\sqrt{71}\ y_4 = -\frac{1}{2}(3+i\sqrt{71})$.

61. $x_1 = y_2 = 2,\ y_1 = x_2 = 8$. **62.** $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a}\,(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b})\ y_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a}\,(\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b})$

63. $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2a-b}}\ y_1 = \dfrac{a-b}{\sqrt{2a-b}}\ x_2 = -\dfrac{a}{\sqrt{2a-b}}\ y_2 = -\dfrac{a-b}{\sqrt{2a-b}}$

64. $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}(a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}),\ y_1 = x_2 = \frac{1}{2}(a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}$.

65. $x_1 = \dfrac{a-\sqrt{4b-3a^2}}{2(a^2-b)},\ y_1 = -\dfrac{2\sqrt{4b-3a^2}}{4b-3a^2};\ x_2 = \dfrac{a+\sqrt{4b-3a^2}}{2(a^2-b)},\ y_2 = \dfrac{2\sqrt{4b-3a^2}}{4b-3a^2}$.

66. $x_1 = \dfrac{2a+ab+1}{1-ab},\ y_1 = \dfrac{2b+ab+1}{1-ab};\ x_2 = \dfrac{ab-2b+1}{1-ab},\ y_2 = \dfrac{ab-2a+1}{1-ab}$.

67. $x_1=\frac{ab+\sqrt{4ab+(a+b-ab)^2}}{a+b}$, $y_1=\frac{a-b}{a+b}$, $x_2=\frac{ab-\sqrt{4ab+(a+b-ab)^2}}{a+b}$, $y_2=-\frac{a-b}{a+b}$.

68 Układ niemożliwy. **69.** $\frac{5}{7}$, albo $\frac{-1\cdot 5}{0\cdot 5}$. **70.** $7\,m$, $9\frac{1}{3}\,m$. **71.** $x=4\,m$, $y=3\,m$.

72. Promień walca $3\,m$, lub $\frac{11}{5}\sqrt{5}\,m$, wysokość odpowiednio $8\,m$ lub $\frac{4}{5}\sqrt{5}\,m$.

73. $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2ah}+\sqrt{a^2-ah})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2ah}-\sqrt{a^2-2ah})$. **74.** α) $\frac{1}{2}a\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$, $\frac{1}{2}b\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$; β) $\frac{1}{2}a\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$, $\frac{1}{2}b\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$. **75.** $x_1=y_2=1$, $y_1=x_2=3$.

76. $x_1=7$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=-7$. **77.** $x_1=y_2=4$, $y_1=x_2=6$. **78.** $x_1=y_2=8$, $y_1=x_2=4$.

79. $x_1=y_2=\frac{1}{4}(9+\sqrt{73})$, $y_1=x_2=\frac{1}{4}(9-\sqrt{73})$. **80.** $x^3=8$, $y^3=1$. **81.** $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=48$, $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\frac{5}{39}(57+7i\sqrt{24})$, $y_3=\frac{1}{5}(-1+i\sqrt{24})$, $x_4=\frac{5}{39}(57-7i\sqrt{24}$, $y_4=\frac{1}{5}(-1-i\sqrt{24})$.

82. $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=2\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$, $y_2=-2\sqrt{3}$; $x_3=y_4=i\sqrt{3}$, $y_3=x_4=-i\sqrt{3}$.

83. $x_1=y_2=b+\sqrt{a^2-2b^2}$, $y_1=x_2=b-\sqrt{a^2-2b^2}$. **84.** $x_1=y_2=\frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{3a+b}}\right)$, $y_1=x_2=\frac{1}{2}a\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{3a+b}}\right)$. **85.** $x=\frac{\pm\sqrt[6]{b}+\sqrt{2a-b}}{2\sqrt[6]{2a-b}}\alpha^\lambda$, $y=\frac{\pm\sqrt[6]{b}-\sqrt{2a-b}}{2\sqrt[6]{2a-b}}\alpha^\lambda$, gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie a dolne sobie, a każdym razem może być $\lambda=1, 2, 3$, zaś $\alpha^3=1$. **86.** $x_1=y_2=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{8(a+b)}}$, $y_1=x_2=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{8(a+b)}}$. **87.** Przy a różnem od 0 układ niemożliwy; przy $a=0$ jest $y=-x$ (a więc w przypadku szczególnym $x=0$, $y=0$). **88.** 4, 7.

89. Gdy r jest promieniem kuli, to szukana płaszczyzna jest oddalona od środka kuli o $\frac{1}{2}r(\sqrt{9-8a}-1)$. **90.** Podstawy walca są oddalone od środka kuli o $\frac{1}{2}r(\sqrt{3}-1)$.

91. $\frac{h_2}{h_1^2-h_2^2}\{h_1\sqrt{a^2-h_2^2}-h_2\sqrt{a^2-h_1^2}\}$, $\frac{h_2}{h_1^2-h_2^2}\{h_1\sqrt{a^2-h_2^2}+h_2\sqrt{a^2-h_1^2}\}$. **92.** $3\,m$ i $4\,m$.

102. $x_1=1, y_1=2$; $x_2=-1, y_2=-2$; $x_3=-\frac{19}{8}\sqrt{2}$, $y_3=\frac{9}{8}\sqrt{2}$; $x_4=\frac{19}{8}\sqrt{2}$, $y_4=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

103. $x_1=y_1=1, x_2=y_2=-1$; $x_3=\sqrt{\frac{50}{39}}$, $y_3=4\sqrt{\frac{2}{39}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{50}{39}}$, $y_4=-4\sqrt{\frac{2}{39}}$.

104. $x_1=-3$, $y_1=-4$; $x_2=4\frac{1}{2}$, $y_2=3\frac{1}{2}$. **105.** $x_1=y_2=5$, $y_1=x_2=3$; $x_3=\frac{217}{\sqrt{209}}$, $y_3=\frac{133}{\sqrt{209}}$; $x_4=-\frac{217}{\sqrt{209}}$, $y_4=\frac{139}{\sqrt{209}}$. **106.** $x_1=18, y_1=2$; $x_2=-18, y_2=-2$. **107.** $x_1=8$, $y_1=2$; $x_2=-44\sqrt[3]{\frac{4}{507}}$, $y_2=\sqrt{\frac{6}{13}}$. **108.** $x=\pm\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y=\pm\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z=\pm\frac{cd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **109.** $x_1=0, y_1=b, z_1=c$; $x_2=2a$, $y_2=-b$, $z_2=-c$. **110.** $x=\pm\frac{n-m+p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, $y=\pm\frac{m-n+p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, $z=\pm\frac{m+n-p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **111.** $x=\pm\sqrt{\frac{(p+r-q)(p+q-r)}{q+r-p}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{(p+q-r)(q+r-p)}{p-q+r}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{(p-q+r)(q+r-p)}{p+q-r}}$, gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **112.** $x_1=-\frac{1}{5}, y_1=\frac{1}{4}, z_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{2}{5}$, $y_2=-1, z=-2$.

113. $x_1=4, y_1=6, z_1=3$; $x_2=9$, $y_2=2+i\sqrt{14}$, $z_2=2-i\sqrt{14}$. **114.** $x_1=7$, $y_1=24$, $z_1=25$; $x_2=-1$, $y_2=0$, $z_2=1$. **115.** $x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=2$; $x_2=-4$, $y_2=-3$, $z_2=-2$.

116. $x_1=3$, $y_1=1$, $z_1=2$; $x_2=1+\sqrt{10}$, $y_2=2-\sqrt{10}$, $z_2=-4$. **117.** $x_1=x_2=2$, $y_1=y_2=3$, $z_1=u_2=1$, $u_1=z_2=3$; $x_3=x_4=4$, $y_3=y_4=1$, $z_3=u_4=2-\sqrt{3}$, $u_3=z_4=2+\sqrt{3}$.

118. Przeciwprostokątna $\frac{p^2-m^2}{p}$, przyprostokątne: $\frac{p^2+m^2+\sqrt{p^4-6p^2m^2+m^4}}{2p}$, $\frac{p^2+m^2-\sqrt{p^4-6p^2m^2+m^4}}{2p}$. **119.** Gdy $\sqrt{a^2+4ap-4p^2}=\gamma$, to przeciwprostokątna $\frac{1}{2}(2p+a-\gamma)$,

przyprostokątne: $\frac{1}{4}(2p-a+\gamma\sqrt{2a(a+8p)-2(a+6p)\gamma})$, $\frac{1}{4}(2p-a+\gamma-\sqrt{2a(a+8p)-2(a+6p)\gamma})$.
120. $\frac{2}{3}\sqrt{2m_2^2+2m_3^2-m_1^2}$ $\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_3^2-m_2^2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_2^2-m_3^2}$. **121.** $864\,dm^3$.
122. $\frac{1}{3}\sqrt{s^2+d^2}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{s^2+d^2}+\sqrt{\frac{2}{3}(2d^2-s^2)}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{s^2+d^2}-\sqrt{\frac{2}{3}(2d^2-s)}\right)$.
123. $\sqrt{\frac{b}{c}(a^2+bc)}$, $\sqrt{\frac{c}{b}(a^2+bc)}$, $b+c$. **124.** Podstawa $\sqrt{3s}$, wysokość $\frac{2}{3}\sqrt{3s}$, bok pozostały $\frac{5}{6}\sqrt{3s}$. **125.** $(\pm 10):(\pm 25):(\pm 45):(\pm 55)$, znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **126.** Albo $21:9=14:6$, alboteż $6:14=9:21$. **127.** I. 24 osoby po 4·2 zł., II. 88 osób po 3 zł., III. 254 osób po 1·2 zł. **128.** $\frac{1}{9}$. **129.** 3. **130.** 7. **131.** $\frac{4}{9}$. **132.** $-2\frac{1}{24}$. **133.** 0, $1\frac{23}{57}$. **134.** 0. $1\frac{3}{37}$. **135.** 8. **136.** 1. **137.** Równanie niemożliwe.

152*. $2+\cfrac{1}{\mathit{4}+\cdots}$ **153.** $2+\cfrac{1}{\mathit{1}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\mathit{4}+\cdots}}}$ **154.** $3+\cfrac{1}{\mathit{3}+\cfrac{1}{\mathit{6}+\cdots}}$ **155.** $q_2=\mathit{8}$.

156. $q_2=\mathit{1}$, $q_3=\mathit{10}$. **157.** $q_2=\mathit{1}$, $q_9=\mathit{10}$. **158.** $q_2=\mathit{2}$, $q_4=\mathit{12}$. **159.** $q_2=\mathit{1}$, $q_5=\mathit{12}$.
160. $q_2=\mathit{1}$, $q_5=\mathit{16}$. **161.** $q_2=\mathit{2}$. $q_3=\mathit{28}$. **162.** $(q_1=0)$; $q_2=\mathit{1}$. **163.** $q_3=\mathit{1}$.
164. $q_2=\mathit{3}$. **165.** $q_2=\mathit{5}$, $q_4=\mathit{3}$. **166.** $q_2=\mathit{3}$. $q_4=\mathit{7}$. **167.** $q_2=\mathit{1}$. $q_6=\mathit{9}$.

168. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}$ **169.** $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}}$ **170.** $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}}$

171. $q_6=6$, $q_7=1,\ldots$ **172.** $q_6=9$, $q_7=1,\ldots$ **173.** $q_6=9$, $q_7=1,\ldots$ **174.** $q_5=2,\ldots$
175. $\frac{L_5}{M_5}=\frac{1257}{379}$. **180.** $\frac{25077}{7561}$. **181—183.** Sprawdzić, rozwijając otrzymaną liczbę na ułamek ciągły. **184** $\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$. **185.** $\frac{48n^3+188n^2+252n+115}{48n^4+236n^3+464n^2+425n+151}$
186. $\frac{1}{19225}$, $-\frac{1}{48995}$, $\frac{1}{12816}$, $-\frac{1}{33552}$. **187.** $\frac{38}{17}$, $\frac{682}{305}$. **188.** $\frac{127}{48}$. **189.** $\frac{3970}{1197}$. **190.** $\frac{265}{65}$.
191. $\frac{1920}{601}$. **192.** $\frac{146}{485}$. **193.** $\frac{293}{485}$. **194.** $\frac{339}{485}$. **195.** α) $\frac{1}{8730}$, β) $\frac{1}{228}$, γ) $\frac{1}{9006}$.
196. $x=1+\sqrt{2}$. **197.** $x=\frac{1}{3}(2+\sqrt{10}$. **198.** $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$. **199.** $x=\frac{1}{14}(15+\sqrt{365})$.
200. $x=\frac{1}{14}(9+\sqrt{221})$. **201.** $x=\frac{1}{16}(7+3\sqrt{11})$. **202.** $x=\frac{1}{56}(59+\sqrt{5777})$. **203.** $x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})$.
204. $x=\frac{1}{14}(-13+\sqrt{1093})$. **205.** $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{6})$. **206.** $x=\frac{1}{5}(10+\sqrt{15})$.
207. $x=\frac{2}{7}(22+\sqrt{15})$. **208.** $x=\frac{1}{10}(19+\sqrt{21})$. **209.** $x=\frac{1}{3}(9-\sqrt{15})$. **210.** $x=\frac{1}{10}(-1+\sqrt{21})$.
211. $x=4, y=1$. **212.** $x=11, y=1$. **213.** $x=0, y=-5$. **214.** $x=2, y=1$. **223.** $x=2+5t$, $y=1+3t$. **224.** $x=2+7t, y=3+11t$. **225.** $x=-3-6t, y=3+5t$. **227** $x=-5-7t, y=5+6t$. **228.** $x=12-4t, y=-12+5t$. **229.** $x=-3-11t, y=3+8t$. **230.** $x=-2+11t, y=-2+10t$. **231.** $x=5+13t, y=4+11t$. **248.** $x=28-41t, y=-12+29t$. **249.** $x=2, y=1$; niema; $x=9, y=8$; $x=5, y=4$. **250.** $x=3, y=-2$; $x=2, y=-1$; $x=4, y=-2$; $x=8, y=-5$. **251.** $x=3, y=2$; $x=14, y=9$; i t. d. **252.** $x=7, y=6$; $x=13, y=13$; i t. d. **253.** $x=2$, $y=1$; $x=16$, $y=11$; i t. d. **261.** $x=16, y=9$; $x=31, y=2$; $x=1, y=16$. **262.** $x=4, y=46$; $x=11, y=31$; $x=18, y=16$; $x=25, y=1$. **263.** $x=5, y=16$; $x=18, y=11$; $x=31$, $y=6$; $x=44$, $y=1$. **264.** $x=29$, $y=1$; $x=22$, $y=5$: $x=15$, $y=9$; $x=8$, $y=13$, $x=1, y=17$. **272.** $x=4, y=8$. **273—278.** Niema. **279.** Albo koni 9, wołów 13, albo koni 42, wołów 60, i t. d. **280.** α) $13+20t$; β) $270+370t$. **281.** $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{13}$. **282.** 108,

*) Iloraz niezupełny, stanowiący peryod, alboteż pierwszy i ostatni z ilorazów niezupełnych, tworzących peryod, są wydrukowane pochyłemi cyframi.

225, 342, 459, 576, 693, 810, 927. **283**. 576 i 424. **284**. 40 i 3. **285**. $x=16$, $y=5$; $x=28$, $y=12$. **286**. 2-u i 17, 9-u i 9, 16-u i 1—a. **287**. 16. **288**. 73 orzechy. **289**. 46 i 6, 25 i 25, 4 i 44. **290**. 24 i 1, 11 i 7. **291**. 13 i 1, 4 i 8. **292**. 34, albo 94, alboteż 154. **293**. 785 drzewek. **294**. 5 razy i 8 razy. **295**. α) Po 5-u obrotach pierwszego koła a po 6-u drugiego. β) Niemożliwe. γ) Po $2\frac{1}{2}$ obrotu pierwszego a 3-ch drugiego. δ) Niemożliwe. **296**. 19 groszy na złoty, a 17 pieniążków na grosz. **297**. Żadnym. **298**. Nie może. **299**. $x=-34-t$, $y=-15-5t$, $z=4t$. **300**. $x=4-t$, $y=2t$, $z=8-t$. **301**. $x=7-3t$, $y=8-18t$, $z=9+3t$. **302**. $x=9+19t$, $y=8+39t$, $z=7+36t$. **303**. $x=5+260t$, $y=4+368t$, $z=3+355t$. **304**. Niema rozwiązań całkowitych. **305**. α) $x=1, y=6, z=5$; $x=2, y=4, z=6$; $x=3$, $y=2$, $z=7$. β) $x=7, y=8, z=9$. γ) Nieskończenie wiele: $x=5, y=4, z=3$; $x=265, y=372, z=358$; i t. d. **306**. α) $x=5$, $y=4, z=3$; $x=265, y=372, z=358$; $x=525, y=740, z=713$. β) Dwadzieścia pięć: $x=9, y=8, z=7$; . . .; $x=484, y=983, z=907$. **307**. $x=62, y=101, z=111$; $x=85, y=150, z=164$. **308**. Niema. **309**. $\frac{1}{7}+\frac{6}{11}+\frac{2}{13}$. **310**. Trzynastu: 5 sztuk po 5 ct., 104 po $6^1/_2$ ct., 11 po 9 ct.; . . .; 65 po 5 ct., 8 po $6^1/_2$ ct., 47 po 9 ct. **311**. Pięciu sposobami: 13, 6, 1;...; 1, 14, 5. **312**. $x=-z+2t$, $y=10+z-5t$. **313**. $x=4t, y=2z-3t$. **314**. $x=20+3y+7t, z=1-2y-3t$. **315**. $x=3-21y+35t$, $z=5+9y-16t$. **316**. α) $x=1$, $y=6$, $z=1$; $x=1$, $y=3$, $z=3$; $x=2, y=2, z=2$; $x=3, y=1, z=1$. β) Nieskończenie wiele: $x=4$, $y=1$, $z=2$; i t. d. β) Siedemnaście: $x=16$, $y=1, z=2$;...; $x=1, y=10, z=2$. δ) $x=3, y=5, z=2$. **317**. Dziewięć rozwiązań: $x=6$, $y=2$, $z=3$; . . .; $x=30, y=90, z=51$. **318**. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{6}{7}$. **319**. Czterema. **320**. $y=14-5x-u, z=2x-u$. **321**. $x=32-43t-5z$, $y=17t-8+2z$, $u=41t-10+3z$. **322**. Dziewięciu sposobami: 8, 1, 3, 5;...; 2, 7, 6, 2. **323**. α) 92, β) 4·6, γ) 2·252, δ) 446, ε) $5177\frac{1}{4}$, ζ) $-221\frac{3}{14}$, η) $-37\frac{3}{4}$, θ) —13·7. **324**. 960 zł. **325**. 3·28 zł. **326**. 107·888. **327**. ε) 23875, 6537·5, 869·5, 44750, $59906\frac{1}{4}$, $45678\frac{4}{7}$, $-8395\frac{5}{6}$, —937·5. **328**. ε) 12375000, ζ) 348000000. **332**. 62 *km*. **333**. 210. **334**. α) $a_n=1·163$, $S_n=10·92$; β) $a_n=-19·9771$, $S_n=-466·0512$; γ) $a_n=20x-11$, $S_n=77x-35$; δ) $a_n=26x$, $S_n=126x+26y$. **335**. α) $a_1=9$, $S_n=363$; β) $a_1=\frac{1}{2}$, $S_n=42\frac{3}{4}$; γ) $a_1=2034$, $S_n=306525$; δ) $a_1=50$, $S_n=20564$. **336**. α) $r=4$, $S=403$; β) $r=0.2$, $S_n=24·2$; γ) $r=\frac{1}{3}$, $S_n=7739\frac{2}{3}$; δ) $r=3·159$, $S_n=1859·9328$. **337**. α) $n=12$, $S_n=1167$; β) $n=13$, $S_n=54·196$; γ) $n=50$, $S_n=273\frac{13}{24}$; δ) $n=35$, $S_n=1960$. **338**. α) $r=\frac{2}{3}$, $n=28$; β) $r=-8$, $n=15$; γ) $r=-0·0007$, $u=84$; δ) $r=41·5$, $n=20$. **339**. α) $a_n=209$, $r=1\frac{3}{8}$; β) $a_n=408$, $r=9$; γ) $a_n=144·688$, $r=14·5344$; δ) $a_n=168·55$, $r=7$ **340**. α) $a_1=7$, $r=5$; β) $a_1=-10\frac{7}{20}$, $r=\frac{29}{40}$; γ) a_1-10, $r=0·5$; δ) $a_1=0·32$, $r=0·35$. **341**. α) $a_1=2$, $a_n=32$; β) $a_1=32150$, $a_n=0$; γ) $a_1=117$, $a_n=116$; δ) $a_1=3331·5$, $a_n=2825·5$. **342**. α) $a_n=15\frac{3}{4}$, $n=30$; β) $a_n=605$, $n=200$; γ) $a_n=-21\frac{3}{4}$, $n=25$; δ) $a_n=8\frac{1}{6}$, $n=17$. **343**. α) $a_1=7$, $n=15$; β) $a_1=3·14$, $n=58$; γ) $a_1=1·135$, $n=23$; δ) Zadanie niemożliwe. **344**. 55. **345**. 53, 2. **346**. W ciągu 9-u sek. **347**. —3, —3. **348**. W ciągu 16-u mies., 48 zł. **349**. Albo 20, 16 i 12; alboteż 12, 16 i 20. **350**. 5, 7, 9. **351**. 5. **352**. po 11-u dniach. **353**. Po 8-u sekundach, w odległości 60 *m*. **354**. Po 9-u sekundach. **355**. 12, 136, 92. **356**. Albo $-\frac{1}{2}$ i 27, alboteż 4 i 12. **357**. Albo 14, 24, 34, alboteż 34, 24, 14. **358**. Albo 4 i 6, alboteż $18\frac{2}{3}$ i $2\frac{1}{3}$. **359**. 468. **360**. 25. **361**. $\frac{nd(3n-4)+d}{2(n-1)}$ *m* od A_1. **362**. Albo 9 i 71, albo 30 i 40, albo —12, 102,... **363**. $9\frac{1}{3}$, $-23\frac{11}{12}$. **364**. Pierwszy wyraz jest 7, jeden postęp ma wyrazów 9, drugi 14, a różnice tych postępów są 4 i 9. **365**. Albo 1, 2, 3, 4, albo 4, 3, 2, 1, albo $\frac{1}{2}(5-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(7-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(9-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(11-\sqrt{145})$, alboteż $\frac{1}{2}(5+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(7+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(9+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(11+\sqrt{145})$. **366**. (Naprzód szukamy wyrazu a_3). Albo —12, —4, 4, 12, 20, albo 20, 12, 4, —4, —12, albo $4-4i\sqrt{11}$, $4-2i\sqrt{11}$, 4, $4+2i\sqrt{11}$, $4+4i\sqrt{11}$, alboteż $4+4i\sqrt{11}$, $4+2i\sqrt{11}$, 4, $4-2i\sqrt{11}$, $4-4i\sqrt{11}$. **367**. 7, 385. **368**. 8, $\frac{2}{3}$. **369**. 72, 111. **370**. 174, $1\frac{3}{75}$. **371**. Albo $\frac{5}{6}$, alboteż $-\frac{5}{6}$. **372**. Albo 14, 1, —1, alboteż 1, 14, 1. **373**. Albo $-6\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, alboteż $9\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{16}$, —407·04. **374**. Znaleźć najpierw wyraz środkowy. Albo 0, 6, 1, albo 6, 0, —1, albo $3-3i\sqrt{\frac{285}{17}}$, $3+3i\sqrt{\frac{285}{17}}$, $i\sqrt{\frac{285}{17}}$, alboteż $3+3i\sqrt{\frac{285}{17}}$, $3-3i\sqrt{\frac{285}{17}}$, $-i\sqrt{\frac{285}{17}}$. **376**. 40353607 *hl*.

377. $(a-b)\left(\frac{a-b}{a}\right)^{19}$. **385.** $\frac{c^5-a^5}{c^4(a-c)}\sqrt{(c^2-a^2)}$. **386.** α) $a(\sqrt{2^n}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{2^{5-n}}$, β) $a^2(2_n-1)2^{1-n}$.
387. 137256. **388.** 20, 184467. **389.** α) $a_n=413343$, $S_n=620011$; β) $a_n=0{\cdot}08203125$, $S_n=6{\cdot}97265625$; γ) $a_n=3676\frac{17}{32}$, $S_n=2857\frac{31}{32}$; δ) $a_n=81$, $S_n=6505$. **390.** α) $a_1=7$, $S_n=620011$; β) $a_1=1024$, $S_n=99999744$; γ) $a_1=2\frac{1}{2}$, $S_n=1\frac{307}{486}$; δ) $a_1=8\frac{1}{2}$, $S_n=135098\frac{399}{2048}$.
391. α) $q=2$, $S_n=2047\frac{7}{8}$; β) $q=5$, $S_n=7629394531$; γ) albo $q=2$, $S_n=65534$, alboteż $q=-2$, $S_n=43690$; δ) albo $q=3$, $S_n=193710244$, alboteż $q=-3$, $S_n=96855122$.
392. α) $n=5$, $S_n=13\frac{3}{16}$; β) $n=5$, $S_n=379687$; γ) $n=6$, $S_n=5\frac{4031}{5400}$; δ) $n=5$, $S_n=\frac{[b^5-a^5(1+x)^5](1-x)}{a^2b[b-a(1+x)](1+x)^2}$. **393.** α) $q=3$, $n=9$; β) $q=5$, $n=8$; γ) $q=2$, $n=25$; δ) $q=-4$, $n=7$. **394.** α) Albo $q=1\frac{1}{2}$, $a_n=45$, alboteż $q=-2\frac{1}{2}$, $a_n=125$; β) $q=-1$, $a_n=2$; γ) $q=1$, $a_n=105$; δ) $q=\frac{x}{y}$, $a_n=\left(\frac{x}{y}\right)^6$. **395.** α) Albo $a_1=54$, $q=3\frac{1}{3}$, alboteż $a_1=1014$, $q=-\frac{10}{13}$; β) $a_1=-10$, $q=-1$; γ) $a_1=105$, $q=1$; δ) $a_1=1$, $q=-\left(\frac{a}{b}\right)$. **396.** α) $a_1=3$, $a_n=352947$; β) $a_1=6$, $a_n=1\frac{217}{512}$; γ) $a_1=96$, $a_n=\frac{3}{8}$; δ) $a_1=3$, $a_n=9642{\cdot}58$.
397. α) $a_n=78125$, $n=7$; β) $a_n=1{\cdot}42576$, $n=12$; γ) $a_n=1{\cdot}87298$, $n=16$; δ) $a_n=1{\cdot}63862$, $n=20$. **398.** α) $a_1=1$, $n=8$; β) $a_1=4$, $n=10$; γ) $a_1=1{\cdot}05$, $n=30$; δ) $a_1=1{\cdot}1236$, $n=33$.
399. Albo $2\frac{1}{2}$, 10, 40,..., alboteż $1\frac{2}{3}$, —10, 60,... **400.** Albo 9, 18, 36, 72, alboteż 9, —27, 81, —243. **401.** Albo 12, 24, 48, 96, alboteż —192, —96, —48, —24. **402.** $a_1=3$, $q=2$.
403. Albo $\frac{8}{27}$, $-\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$,... alboteż $-\frac{125}{27}$, $\frac{25}{9}$, $-\frac{5}{3}$,... **404.** Albo $a_1=1$, $q=3$, albo $a_1=9$, $q=\frac{1}{3}$, albo $a_1=8+\sqrt{55}$, $q=\frac{1}{3}(-8+\sqrt{55})$, alboteż $a_1=8-\sqrt{55}$, $q=\frac{1}{3}(-8-\sqrt{55})$. **405.** Albo 16, 8, 4, alboteż 4, 8, 16. **406.** Albo 4, 16, 64, 256, 1024, alboteż 1024, 256, 64, 16, 4.
407. Albo $a_1=-4$, $q=3$, $n=7$, alboteż $a_1=-2916$, $q=\frac{1}{3}$, $n=7$. **408.** $a_1=1$, $q=\frac{1}{2}$.
409. Albo $x=12+8t$, $y=5-7t$, alboteż $x=-11-9t$, $y=-4-8t$. **410.** Albo 421, alboteż —124. **411.** 5 obrotów. **412.** Po 6-u latach. **413.** Pierwiastki: 3, —6, 12, zaś $\beta=-54$.
414. Dwa promienie koła najmniejszego. **415.** Albo —6, 6, 18 alboteż 10, 6, 2.
416. Albo 18, 12, 6 i 9, 27, 81, alboteż —54, 12, 78 i 81, 27, 9. **417.** Albo 2, 4, 8, 12, alboteż $12\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$. **418.** 2, 3, 4, 5, i 1, 2, 4, 8. **419.** Albo $12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{6}$, $13\frac{5}{6}$,... i $\frac{2}{3}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{625}{6}$..., alboteż 2, 5, 8,... i 3, 6, 12,.... **420.** Albo $r=18$, $q=4$, alboteż $r=-36$, $q=-2$.
421. 2, 4, 6, 8,... i 2, 6, 18, 54,... **422.** Albo 1, 2, 4,... i 2, 6, 18,... i 4, 16, 44,... alboteż $\frac{192}{31}$, $-\frac{168}{31}$. $\frac{147}{31}$,... i $\frac{384}{31}$, $\frac{48}{21}$, $\frac{6}{31}$,... i $\frac{768}{31}$, $\frac{861}{31}$, $\frac{972}{31}$,... **423.** $q=2$, $S_n=127\frac{127}{128}$.
424. $26.244\sqrt[18]{3}$. **425.** Trzy liczby $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{4}$. **426.** 9 liczb, $q=3$. **427.** Albo $\frac{1}{4}$ i 2, alboteż 8 i $\frac{1}{2}$. **428.** Albo 3 i 2, alboteż 48 i $\frac{1}{2}$. **429.** Albo 16, 8, 4, alboteż 1, 2, 4.
430. Albo 5 i $\sqrt{5}$ albo 5 i $-\sqrt{5}$, albo $\frac{245}{3}$ i $i\sqrt{\frac{11}{7}}$, alboteż $\frac{245}{3}$ i $-i\sqrt{\frac{11}{7}}$. **435.** $a_1=4$, $q=-\frac{3}{5}$, $n=\infty$. **436.** $\frac{c}{c-a}\cdot\sqrt{c^2-a^2}$. **437.** α) $4a(2+\sqrt{2})$, β) $2a^2$. **438.** α) $a(2+\sqrt{2})(4+\frac{1}{2}\pi)$, β) $a^2(2+\frac{1}{2}\pi)$. **439.** α) $\frac{5}{12}a\sqrt{3}$, β) $\frac{11}{96}a^2\pi$. **440.** $4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. **441.** $6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.
442. $\frac{na^{n+1}-(n+1)a^n+1}{(a-1)^2}$. **443.** $\frac{a^{n+1}(n+1)-a^n(n+2)-a+2}{(a-1)^2}$.
444. $\frac{a^{n+1}(n+2)-a^n(n+3)-2a+3}{(a-1)^2}$. **445.** $2\{1+2x+...+(n-1)x^{n-2}\}+$ $+2x\{1+2x+...+(n-1)x^{n-3}\}+...+2(n-1)x^{n-2}$; $\frac{n(n-1)x^{n-1}(x-1)^2-2(n-1)x^n+2nx^{n-1}-2}{(x-1)^3}$.
446. $\frac{a(q^n-1)+bq[(n-1)q^n-nq^{n-1}+1]}{(q-1)^2}$. **447.** $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$; $\frac{n}{n+1}$. **448.** Po 9-u. Wyrazy odpowiedniego szeregu są: $2(100-10)=a_1$, $2(a_1-10.2)=a_2$, $2(a_2-10.2^2)=a_3$,... **449.** 6.
450. $\frac{4}{9}$. **451.** $\frac{2-a}{(1-a)^2}$. **452.** $\frac{a}{(1-q)(1-bq)}$. **453.** $\frac{2}{(1-x)^3}$. **454.** α) 8315·71 zł., β) 16837·56 zł.
455. 29049·3 zł., β) 22232·1 zł., γ) 3815·08 zł., δ) 118812 zł., **456.** α) 3000000 zł., β) 10000 zł **457.** α) 2400 zł., β) 13490·6 zł., γ) 1200 zł., δ) 1580·50 zł. **458.** α) 4·5%, β) 3·5%. **459.** α) 12·289%, β) 1·8%, γ) 7·6%, δ) 3·75%, **460.** α) 14 lat, β) 4 lata.

461. α) 24 lata, β) 15 lat, γ) 27 lat, δ) 34 lata. **462.** 1278·80 zł. **463.** 3%. **464.** 2087 osób. **465.** Po 15-u latach. **466.** 9%. **467.** 4469·30 zł. **468.** 3%. **469.** 7·177%. **470.** 15771·7 zł. **471.** α) 14 lat i prawie $2\frac{1}{2}$ miesiąca, β) prawie 33 lata. **472.** α) 4005·36 zł., β) 17755·4 zł., **473.** α) 36 lat i 9 miesięcy, β) 17 lat i 2 miesiące. **474.** 17254·4 zł., **475.** 439740 zł. **476.** Po 10-u latach. **477.** α) 5341·69 zł., β) 26530·32 zł. **478.** α) 2490 zł., β) 4968·07 zł., γ) 11637 zł., δ) 107885 zł. **479.** α) 9337·25 zł. **481.** α) 32 wkładki, β) 15 wkładek. **482.** α) 15 wkładek, β) 49 wkładek, γ) 7 wkładek, δ) 9 wkładek. **484.** α) 2040·58 zł., β) 6650·74 zł., γ) 6884·33 zł. **486.** α) 27500 zł., β) 4147·78 zł. **487.** 136295 zł. **488.** 1812·33 zł. straty. **489.** 988023 zł. **490.** 2941·54 zł. **491.** Niekorzystne. **492.** 4950·88 zł. **493.** α) 10509 zł., β) 2508·12 zł. **495.** α) 3331·23 zł., β) 802·42 zł., γ) 2200 zł. **496.** Przez 33 lata. **497.** α) Przez 20 lat, β) przez 10 lat, γ) przez 5 lat. **499.** α) 14728·8 zł., β) 110330 zł. γ) 131706 zł. **501.** α) 6419·29 zł., β) 1550 zł, γ) 285·7 zł. **504.** 350 zł. **505.** 116553 zł. **506.** 18957·4 zł. **507.** 1946·64 zł. **508.** Po 37 latach, biorąc ostatnim razem już tylko 13146 zł. **510.** 4536. **511.** 20160. **514.** 32659220. **516.** Ilość sposobów jest $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$, mianowicie jest liczbą 29-o cyfrową z początkowemi cyframi 5, 3, 6, a 4-a zerami na końcu. **519.** $\frac{1}{2}(n-p)(n+p-1)$. **520.** $\binom{13}{2}-\binom{4}{2}-\binom{5}{2}+2$. **521.** Ilość elementów nazwawszy x wprowadzić nową niewiadomą $y=x-\frac{3}{2}$; $x=12$.

522. $\binom{\binom{n}{2}}{2}-(n-2)\binom{n}{2}=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$. **527.** 27720-u. **528.** 1799020903680-u sposobami. **529.** α) $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2n}$, β) $\frac{3n(3n-1)(3n-2)\ldots(n+1)}{6n}$.

531. Tu nie można np. tonów C w różnych oktawach uważać za ten sam powtarzający się element α_1, gdyż nie możnaby wziąć wtedy zestawienia α_1, α_1, α_1. Ilość sposobów jest $(W)_7^3$. **532.** 9000. **533.** 4096. α) $(K)_3^4$; β) $(W)_3^4$. **535.** 560. **537.** α) $\frac{273}{297160}$, β) $\frac{13}{230}$, γ) $\frac{6}{1265}$. **538.** α) i β) $\frac{17199}{74290}$; γ) $\frac{28665}{326876}$. **539.** α) $\frac{7}{3596}$, β) $\frac{7}{899}$. **540.** $\frac{6}{5525}$. **541.** α) $\frac{125}{15552}$, β) $\frac{125}{2592}$. **543.** $\frac{1}{36}$, β) $\frac{5}{108}$, γ) $\frac{25}{216}$, δ) $\frac{5}{108}$. **544.** $\frac{3}{4}$. **546.** α) $\frac{7}{16}$, β) $\frac{1}{2}$. **547.** $\frac{1}{3}$. **548.** $0\frac{1}{12}$. **549.** $\frac{11}{36}$. **550.** α) $\frac{323}{3289}$, β) $\frac{1}{1184040}$, γ) $\frac{7}{1184040}$. **551.** α) $\frac{25}{216}$, β) $\frac{91}{216}$, γ) $\frac{11}{216}$, δ) $\frac{5}{216}$, ε) $\frac{2}{27}$. **553.** α) 4506 zł., β) 2998 zł., γ) 10406·9 zł., δ) 2230·25 zł. **554.** α) 21654·5 zł., β) 33193·8 zł., γ) 12755·6 zł., δ) 32297·7 zł. **555.** α) 14275·4 zł., β) 20235·8 zł. **556.** α) 344·42 zł., β) 641·03 zł. **557.** α) 4128·29 zł., β) 4656·73 zł., γ) 4104·37 zł., δ) 4276·46 zł. **558.** α) 36334·5 zł., β) 57513·8 zł., γ) 42949 zł., δ) 18707 zł. **559.** α) 219·075 zł., β) 210·69 zł., γ) 850·12 zł., δ) 2743 zł. **560.** 13694·6 zł., β) 18004·2 zł, γ) 5966·63 zł., δ) 42617 zł. **567.** Albo w potędze $(2p-2)$-ej, przy $2p$ całkowitem i niemniejszem od 4-ch, albo też w potędze $(3-2p)$-ej przy p równem $\frac{1}{2}$ lub 0, lub też przy $2p$ całkowitem ujemnem. **568.** Zob. odpowiedź na zad. 521-e. **570.** $-\frac{429}{16}$. **576.** β) $3x^4+x^3-7x^2-5x+2$.

577. α) $2(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi)$; β) $4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$; γ) $6(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)$; δ) $8(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi)$; ε) $8(\cos\frac{17}{16}\pi+i\sin\frac{17}{16}\pi)$; ζ) $10(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi)$.

578. α) $8(\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi)$; β) $6(\cos\frac{13}{7}\pi+i\frac{13}{7}\pi)$. **579.** *a*) $8(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=-4\sqrt{3}-4i$;

b) $12(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})-3i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

c) $48(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi)=12(\sqrt{6}-\sqrt{2})+12i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

580. $48(\cos\frac{5}{63}\pi+i\sin\frac{5}{63}\pi)=46{\cdot}5156+11{\cdot}8446\,i$. **581.** *a*) $\frac{1}{2}(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)=-\frac{1}{2}i$;

b) $\frac{1}{3}(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi)=-\frac{1}{12}(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{1}{12}i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;

c) $\frac{3}{4}(\cos\frac{1}{8}\pi+i\sin\frac{1}{8}\pi)=\frac{3}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{3}{8}i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

582. α) $\frac{4}{3}(\cos\frac{23}{63}\pi+i\sin\frac{23}{63}\pi)=0{\cdot}548375-1{\cdot}21534\,i$.

586. β) $\cos\frac{1}{16}\pi+i\sin\frac{1}{16}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$, $\cos\frac{3}{16}\pi+i\sin\frac{3}{16}\pi=$
$=\frac{1}{4}\Big[\sqrt{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})}-\sqrt{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}+i\Big(\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})}+$
$+\sqrt{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}\Big)\Big]$, ..., $\cos\frac{31}{16}\pi+i\sin\frac{31}{16}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}-i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$.

589. $\cos\frac{1}{10}\pi+i\sin\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{4}i(\sqrt{5}-1)$, $\cos\frac{1}{5}\pi+i\sin\frac{1}{5}\pi=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+$ $+\frac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,..., $\cos\frac{19}{10}\pi+i\sin\frac{19}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}i(\sqrt{5}-1)$.

593. α) 1, $\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi=0{\cdot}642786+0{\cdot}766033i$,..., $\cos\frac{16}{9}\pi+i\sin\frac{16}{9}\pi=0{\cdot}642785-0{\cdot}766033i$; β) $\cos\frac{1}{9}+i\sin\frac{1}{9}=0{\cdot}93970+0{\cdot}342017i$,..., $\cos\frac{17}{9}\pi+i\sin\frac{17}{9}\pi=0{\cdot}93970-0{\cdot}342017i$.

597. α) $\cos\frac{1}{24}\pi+i\sin\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}+\frac{1}{4}i\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$, $\cos\frac{5}{24}\pi+i\sin\frac{5}{24}\pi=$ $=\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{2}+\sqrt{6})}+\frac{1}{4}i\sqrt{2(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}$,..., $\cos\frac{15}{8}\pi+i\sin\frac{15}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

β) $\cos\frac{1}{8}\pi+i\sin\frac{1}{8}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2}i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\frac{7}{24}\pi+i\sin\frac{7}{24}\pi=$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}i\left(\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{4}}\right)$,..., $\cos\frac{47}{24}\pi+i\sin\frac{47}{24}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}-\frac{1}{4}i\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$.

PRZYPISKI.

I. O WIELKOŚCIACH PROPORCYONALNYCH.

(Część I, art. 149).

1. Jeżeli wielkość A otrzymuje kolejno wartości coraz większe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$, to różnice $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ nazywamy przyrostami wartości $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ wielkości A, alboteż kolejnemi przyrostami wielkości A (Incremente der G.).

Weźmy dwie wielkości A i B, jednocześnie wzrastające, i niech wartościom $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ wielkości B. Wówczas przyrostom $\alpha_1 - \alpha_0, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ wielkości A odpowiadają przyrosty $\beta_1 - \beta_0, \ldots, \beta_l - \beta_{l-1}$ wielkości B.

2. Niech $\alpha_0 = 0$. Przyjmijmy, iż wartości wielkości B wyraziliśmy już w ten sposób[1]), że także $\beta_0 = 0$. Wtedy »pierwszemi« przyrostami są wartości odpowiednio α_1 i β_1.

Obierzmy przy dowolnie wziętej wartości α_1 takie wartości $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$ wielkości A, iżby przyrosty $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ były wszystkie sobie równe. Odpowiadające im przyrosty $\beta_1, \beta_2 - \beta_1, \ldots, \beta_l - \beta_{l-1}$ wielkości B albo są wszystkie równe sobie, alboteż nie są wszystkie równe sobie. Rozważać będziemy tylko pierwszy z tych dwu przypadków.

Ponieważ $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1 = \beta_1$, przeto $\alpha_2 = \alpha_1 . 2$, $\beta_2 = \beta_1 . 2$, i podobnie $\alpha_3 = \alpha_1 . 3$, $\beta_3 = \beta_1 . 3, \ldots, \alpha_l = \alpha_1 . l$, $\beta_l = \beta_1 . l$.

3. Weźmy na uwagę dwie jakiekolwiek wartości A_1 i A_2 wielkości A i oznaczmy przez B_1 i B_2 odpowiadające im wartości wielkości B.

Wartość A_2 może być albo spółmierna, alboteż niespółmierna z wartością A_1.

a. A_1 i A_2 są wartościami spółmiernemi z sobą; spólną ich miarą niech będzie α_1 i niech $A_1 = \alpha_1 q$, $A_2 = \alpha_1 p$. Wówczas

$$A_2 : A_1 = p : q.$$

Ponieważ wartościom $\alpha_1 q$ i $\alpha_1 p$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_1 q$ i $\beta_1 p$ wielkości B, przeto jest $B_1 = \beta_1 q$, $B_2 = \beta_1 p$, tak iż

$$B_2 : B_1 = p : q.$$

A zatem

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

b. A_1 i A_2 są wartościami z sobą niespółmiernemi. Wówczas, przy dowolnem całkowitem q, nazwawszy $\frac{A_1}{q} = \alpha_1$, możemy znaleźć taką liczbę p, iżby wartość $\frac{A_1}{q} . p = \alpha_1 p = \alpha_p$ była mniejsza od A_2, zaś wartość $\frac{A_1}{q}(p+1) = \alpha_1 (p+1) = \alpha_{p+1}$ była już większa od A_2. Ponieważ wartościom $\alpha_1, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_1, \beta_p, \beta_{p+1}$ wielkości B, wartości zaś $A_1 = \alpha_1 q$ wielkości A odpowiada wartość $\beta_1 q$ wielkości B, którą nazwaliśmy B_1, przeto: popierwsze jest $B_1 = \beta_1 q$, tak że $\beta_1 = \frac{B_1}{q}$; powtóre wartości A_2, pośredniej między α_p i α_{p+1}, odpowiadająca wartość B_2 jest również pośrednia między β_p i β_{p+1}, t. j. mamy jednocześnie

$$\alpha_p < A_2 < \alpha_{p+1} \quad \text{i} \quad \beta_p < B_2 < \beta_{p+1}.$$

---

[1]). Np. Jeżeli przez A oznaczymy ilość stopni na termometrze Celsius'a, przez F zaś ilość stopni na termometrze Fahrenheit'a, to wielkości: jedna A, druga $F - 32^0 = B$ będą już takie, iż wartości 0 wielkości A odpowiada wartość 0 wielkości B.

Tak wartość α_p, jak i wartość α_{p+1} jest spółmierna z wartością A_1. Według więc *a* jest jednocześnie

$$\alpha_p : A_1 = \beta_p : B_1,$$
$$\alpha_{p+1} : A_1 = \beta_{p+1} : B_1.$$

Jeżeli liczbę q będziemy brali coraz większą, to wartości α_p i α_{p+1}, jakoteż wartości β_p i β_{p+1} będą coraz bliższe siebie. Wskutek tego różnice między każdą z pierwszych a wartością A_2, jakoteż różnice między każdą z drugich a wartością B_2 mogą się stać tak małemi, jak chcemy. Ponieważ, jakkolwiek małe są owe różnice, zawsze powyższa równość stosunków dla wartości α_p i α_{p+1} zachodzi, przeto taż rowność stosunków zachodzi dla wartości A_2, pośredniej między α_p i α_{p+1}, której odpowiada wartość B_2, pośrednia pomiędzy β_p i β_{p+1}, t. j. mamy

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

4. Jest przeto stosunek jakichkolwiek wartości A_1 i A_2 wielkości A równy stosunkowi wartości odpowiadających B_1 i B_2 wielkości B t. j. wielkości A i B są proporcyonalne względem siebie.

A zatem: *jeżeli dwie wielkości jednocześnie wzrastają tak, iż równym sobie przyrostom jednej odpowiadają przyrosty drugiej, także równe sobie, i jeżeli równe zeru wartości tych wielkości sobie odpowiadają, to te wielkości są proporcyonalne względem siebie.*

II. O ZNOSZENIU NIEWYMIERNOŚCI.

a. ZNOSZENIE NIEWYMIERNOŚCI W MIANOWNIKU.

(Część II, art. 42).

Metoda wskazana może niedoprowadzać do zniesienia niewymierności w mianowniku nawet w razie, kiedy w nim są tylko pierwiastki kwadratowe, mianowicie jeżeli jest pięć lub więcej składników, z których przynajmniej cztery są niewymierne. Pokażemy na przykładzie, jaką w takim razie drogą postępować należy. Mając np.

$$\frac{A}{B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}},$$

oznaczmy $B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ przez α i utwórzmy wyrażenia

$$B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\beta, \quad B+\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\gamma,$$
$$B+\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\delta, \quad B+\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\varepsilon,$$
$$B+\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\zeta, \quad B+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\eta,$$
$$B+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\vartheta, \quad B-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\iota,$$
$$B-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\varkappa, \quad B-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\lambda,$$
$$B-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\mu, \quad B-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\nu,$$
$$B-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\xi, \quad B-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=o,$$
$$B-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\pi.$$

Jest

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota\varkappa\lambda\mu\nu\xi o\pi}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota\varkappa\lambda\mu\nu\xi o\pi}.$$

Wykonawszy w mianowniku częściowe mnożenia: $\alpha\beta=\rho_1$, $\gamma\delta=\rho_2$, $\varepsilon\zeta=\rho_3$, $\eta\vartheta=\rho_4$, $\iota\varkappa=\rho_5$, $\lambda\mu=\rho_6$, $\nu\xi=\rho_7$, $o\pi=\rho_8$, w żadnem z wyrażeń $\rho_1,\ldots,\rho_8$ nie będziemy mieli $\sqrt{d}$. Otrzymawszy zaś

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\,\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8}{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8},$$

wykonajmy częściowe mnożenia: $\rho_1\rho_2=\sigma_1$, $\rho_3\rho_4=\sigma_2$, $\rho_5\rho_6=\sigma_3$, $\rho_7\rho_8=\sigma_4$; w żadnem z wyrażeń σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 nie będziemy mieli $\sqrt{c}$. Otrzymawszy

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\rho_2\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4},$$

wykonajmy częściowe mnożenia: $\sigma_1\sigma_2 = \tau_1$, $\sigma_3\sigma_4 = \tau_2$; w żadnem z wyrażeń τ_1, τ_2 nie będziemy mieli $\sqrt{b}$. Otrzymawszy nakoniec

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{A\beta\,\rho_2\sigma_2\tau_2}{\tau_1\tau_2},$$

po wykonaniu w mianowniku mnożenia nie będziemy mieli $\sqrt{a}$.

b. RÓWNANIE NIEWYMIERNE.

(Część II, art. 43, 44, 94).

Metoda wskazana może nie doprowadzać do równania wymiernego nawet w razie, kiedy w równaniu danem są tylko pierwiastki kwadratowe, mianowicie jeżeli w niem jest pięć lub więcej wyrazów, z których przynajmniej cztery są niewymierne względem niewiadomej.

Aby w takim razie dojść do równania wymiernego, mogącego mieć niektóre pierwiastki spólne z równaniem danem, możemy postępować drogą podobną do podanej pod *a*. Mianowicie utworzymy równania niewymierne, które wraz z równaniem danem przedstawią grupę równań odpowiednich wyrażeniom α, $\beta, \ldots, \pi$. Mnożąc te równania stronami odpowiedniemi przy odpowiedniem wykonywaniu mnożeń częściowych, dojdziemy do równania wymiernego.

Inna metoda, polegająca na utworzeniu układu równań wymiernych z wielu niewiadomemi, jest wskazana na przykładzie w części III w art. 8-ym.

III. O DWU RÓWNANIACH STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ, MAJĄCYCH SPÓLNY PIERWIASTEK.

(Część II, art. 96).

Proporcyonalność spółczynników równań

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \tag{1}$$

jest warunkiem, aby te równania miały oba pierwiastki spólne. Znajdziemy warunek, aby równania (1) miały przynajmniej jeden pierwiastek spólny.

Jeżeli obu równaniom (1) pewna wartość niewiadomej x jednocześnie czyni zadość, to, przy tejże wartości niewiadomej x, jest także

$$\begin{cases} a_1(a_2x^2 + b_2x + c_2) - a_2(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0, \\ (a_1x + b_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) - (a_2x + b_2)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x + (a_1c_2 - a_2c_1) = 0, \\ (a_1c_2 - a_2c_1)\,x + (b_1c_2 - b_2c_1) = 0. \end{cases}$$

Te zaś dwa równania istnieją jednocześnie, kiedy (I, art. 212)

$$\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1, & a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1, & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pod tym warunkiem równania (1) mają spólny pierwiastek.

IV. UWAGI OGÓLNE O DZIAŁANIACH.

(Część II, art. 71, 72).

1. Przypuśćmy, że, mając dwie liczby, jednę a, drugą b, wykonaliśmy na nich jedno z działań, o których w tej książce była mowa. Umówmy się, aby wynik owego właśnie działania wykonanego na liczbach a i b oznaczyć np. przez

$$\Theta(a, b),$$

tak iż symbol $\Theta(a, b)$ nietylko przedstawia liczbę otrzymaną wskutek wykonania działania, ale jednocześnie wskazuje, jakie mianowicie działanie na liczbach a i b było wykonane, lub ma być wykonane. Dlatego często mówić będziemy krótko: działanie Θ. Jeżeli owę liczbę, do której dochodzimy wskutek wykonania działania Θ na liczbach a i b, nazwiemy c, to oczywiście jest

$$\Theta(a, b) = c.$$

2. Jeżeli na liczbach a i b wykonaliśmy działanie Θ, a następnie na dwu liczbach, z których pierwszą jest $\Theta(a, b)$, drugą zaś jest, czyto liczba b, czyteż liczba a, wykonaliśmy działanie Θ' takie, iż jest odpowiednio

albo $$\Theta'(\Theta(a, b), b) = a, \tag{1}$$
alboteż $$\Theta'(\Theta(a, b), a) = b, \tag{2}$$

to mówimy, że działanie Θ' jest odwrotne działaniu Θ.

Działanie Θ w razie, kiedy jest któremkolwiek z trzech działań wprost, t. j. albo dodawaniem, albo mnożeniem, alboteż podnoszeniem do potęgi, oznaczać będziemy przez θ.

Umówmy się, aby działanie Θ' wtedy, kiedy jest związane z działaniem θ wzorem (1), oznaczać przez θ'_1, wtedy zaś, kiedy jest związane z działaniem θ zapomocą wzoru (2), oznaczać przez θ'_2. Wówczas

θ	θ'_1	θ'_2
$a + b = c$	$c - b = a$	$c - a = b$
$a . b = c$	$c : b = a$	$c : a = b$
$a^b = c$	$\sqrt[b]{c} = a$	$\log_a c = b$

3. Jeżeli
$$\Theta(a, b) = \Theta(b, a), \tag{3}$$
to mówimy, że do działania Θ stosuje się zasada przestawiania (Commutatives Princip).

Chcąc odnieść wzór ogólny (3) do działań θ, znajdziemy, że

$$a + b = b + a \quad \text{i} \quad a . b = b . a,$$

lecz a^b jest różne od b^a; do żadnego zaś z działań θ'_1 i θ'_2 wzoru (3) odnieść nie można.

Działanie θ w razie, kiedy jest albo dodawaniem, alboteż mnożeniem, oznaczać będziemy przez ϑ.

Właściwie więc wzór (3) redukuje się do wzoru

$$\vartheta(a, b) = \vartheta(b, a). \tag{3}$$

Na mocy wzoru (3') według wzorów (1) i (2) mamy

$$\vartheta'(\vartheta(a, b) b) = a, \quad \vartheta'(\vartheta(b, a) b) = a.$$

A więc istnieje jednego tylko rodzaju działanie ϑ' odwrotne działaniu ϑ. Innemi słowy, następstwem tego, że do dodawania i do mnożenia stosuje się zasada przestawiania, mamy jedyne działania odwrotne, odpowiednio odejmowanie i dzielenie.

Jako następstwo zaś tego, że do podnoszenia do potęgi nie stosuje się zasada przestawiania, mamy dwa różne od siebie działania odwrotne podnoszeniu do potęgi.

4. Szczególną liczbę m taką, iż

$$\Theta(m, a) = a, \tag{4}$$

nazywamy modułem działania Θ.

Ponieważ jest $m + a = a$ przy $m = 0$, przeto liczba 0 jest modułem dodawania. Ponieważ jest $m . a = a$ przy $m = +1$, przeto liczba $+1$ jest modułem mnożenia. Ponieważ jest $m^a = a$ przy $m = \sqrt[a]{a}$, a ta liczba może mieć różne wartości, przeto niema modułu podnoszenia do potęgi. Z tegoż powodu żadne z działań odwrotnych nie ma modułu, gdyż $m - a = a$ przy $m = 2a$, $m : a = a$ przy $m = a^2$, $\sqrt[a]{m} = a$ przy $m = a^a$, $\log_a m = a$ przy $m = a^a$. A więc te tylko działania mają moduł, do których stosuje się zasada przestawiania, tak iż właściwie wzór (4) redukuje się do wzoru

$$\vartheta(m, a) = a. \tag{4'}$$

5. Liczbę a' tak związaną z liczbą a, iż

$$\vartheta(a, a') = m,$$

nazwiemy liczbą wzajemną z liczbą a względem modułu m. Na mocy (3') każda z dwu liczb a i a' jest wzajemna z pozostałą względem m.

Według tego określenia jest

$$a + a' = 0, \quad \text{skąd} \quad a' = 0 - a = -a,$$
$$a.a' = 1, \quad \text{skąd} \quad a' = 1:a = \frac{1}{a}.$$

A więc liczby wzajemne z sobą względem modułu dodawania różnią się od siebie tylko znakiem, liczby zaś wzajemne względem modułu mnożenia są każda odwrotnością drugiej.

Zauważmy jeszcze, że

$$\vartheta'(a, m) = a, \quad \vartheta'(m, a) = a', \quad \vartheta'(a, b') = \vartheta(a, b).$$

6. Jeżeli, wziąwszy trzy liczby a, b i c, mamy

$$\Theta\big(\Theta(a, b), c\big) = \Theta\big(a, \Theta(b, c)\big), \tag{5}$$

to mówimy, że do działania Θ stosuje się zasada dołączania (associatives Princip).

Odnosząc wzór ogólny (5) do działania θ, znajdziemy, że

$$(a+b)+c = a+(b+c) \text{ i } (a.b).c = a.(b.c),$$

lecz $(a^b)^c$ jest różne od $a^{(b^c)}$, do żadnego zaś z działań θ'_1 i θ'_2 wzoru (5) nie można odnieść. A więc zasada dołączania stosuje się do tych działań, do których się stosuje zasada przestawiania, tak iż właściwie wzór (5) redukuje się do wzoru

$$\vartheta\big(\vartheta(a, b), c\big) = \vartheta\big(a, \vartheta(b, c)\big), \tag{5'}$$

7. Jeżeli, przy jakichkolwiek trzech liczbach a, b, c i przy różnych od siebie działaniach Θ_1 i Θ_2, jest

$$\Theta_2\big(\Theta_1(a, b), c\big) = \Theta_1\big(\Theta_2(a, c), \Theta_2(b, c)\big), \tag{6}$$

to mówimy, że do działania Θ_2 względem działania Θ_1 stosuje się zasada rozłączania (distributives Princip).

Gdy Θ_2 jest albo mnożeniem, alboteż dzieleniem, zaś Θ_1 jest albo dodawaniem alboteż odejmowaniem, to mamy

$$(a+b).c = (a.c)+(b.c), \; (a-b).c = (a.c)-(b.c), \; (a+b):c = (a:c)+(b:c), \; (a-b):c = (a:c)-(b:c).$$

Gdy Θ_2 jest albo podnoszeniem do potęgi, alboteż wyciąganiem pierwiastka, zaś Θ_1 jest albo mnożeniem, alboteż dzieleniem, to mamy

$$(a.b)^c = (a^c).(b^c), \; (a:b)^c = (a^c):(b^c), \; \sqrt[c]{a.b} = \left(\sqrt[c]{a}\right).\left(\sqrt[c]{b}\right), \; \sqrt[c]{a:b} = \left(\sqrt[c]{a}\right):\left(\sqrt[c]{b}\right).$$

Widzimy więc, że wzór (6) stosuje się do działań algebraicznych, a mianowicie do działań drugiego rzędu względem działań pierwszego rzędu i do działań trzeciego rzędu względem działań drugiego rzędu. Nie stosuje się zaś on do logarytmów, jako wskazanych przez działanie Θ_2, ani względem mnożenia, aniteż względem dzielenia, wskazanych przez Θ_1, gdyż tak wypadki działań $\log_c(a.b)$, $(\log_c a).(\log_c b)$, jak i wypadki działań $\log_c(a:b)$, $(\log_c a):(\log_c b)$ nie są równe sobie.

KONIEC.

PODRĘCZNIK ALGEBRY.