LE ALGEBRE DI ORDINE QUALUNQUE E LE MATRICI DI RIEMANN (*)

Fin da quando pubblicai la Memoria sulla teoria generale delle matrici di RIEMANN io posi in rilievo, alla luce di un bel teorema dello HUMBERT e di alcune mie osservazioni, di cui allora non davo che un rapido cenno, le gravi manchevolezze della teoria classica della moltiplicazione complessa per le funzioni abeliane a più variabili indipendenti ([1]).

Ma per l'esatta valutazione critica di questa teoria, nè il teorema dello HUMBERT, nè le mie osservazioni erano sufficienti; soltanto la conoscenza precisa dei vari tipi di matrici riemanniane non singolari con l'indice di moltiplicabilità positivo poteva bastare a delimitarne nettamente la portata.

Alla ricerca di questi tipi, cui avevo già dedicato qualche tentativo nei primi mesi del 1916, io mi accinsi di proposito nell'agosto del 1917; e in quell'occasione non riuscii a superare le difficoltà non lievi che essa presentava, se non quando ebbi osservato che l'insieme delle sostituzioni reali rispondenti alle omografie reali di una matrice di RIEMANN non singolare poteva considerarsi come un'algebra reale primitiva e quindi equivalente, per un teorema famoso di FROBENIUS, all'algebra dei numeri reali, dei numeri complessi ordinari o dei quaternioni.

Fu questo dunque il problema concreto che mi condusse a rilevare il legame strettissimo fra la teoria delle matrici riemanniane e le algebre a più unità, e a riconoscere in queste un poderosissimo mezzo di ricerca per le proprietà di quelle matrici.

(*) Rend. Circolo Mat. di Palermo, 45 (1921) pp. 1-204.

([1]) G. SCORZA *Intorno alla teoria generale delle matrici di* RIEMANN *e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 263-380], pag. 265.

*
* *

Le algebre di ordine qualunque, sebbene siano chiamate, a mio parere, a diventare uno dei capitoli più importanti della matematica, non sono ancora conosciute, in ispecie nell'Europa continentale, quanto meriterebbero.

Lo STUDY, lo SCHEFFERS e, più tardi, il MOLIEN, il CARTAN e il FROBENIUS hanno dato alla teoria dei numeri ipercomplessi impulsi vigorosi, niente affatto inferiori a quelli dovuti allo HAMILTON, al CAYLEY, al SYLVESTER, ai due PEIRCE, padre e figlio, e, in tempi più recenti, al DICKSON e allo WEDDERBURN; ma solo fra gli anglosassoni (Inghilterra e America del Nord) le proprietà, non al tutto superficiali, dei numeri ipercomplessi, si avviano a diventar dominio comune dei matematici colti.

Si deve forse a un passo celebre di GAUSS, chiarito da ricerche posteriori di WEIERSTRASS e DEDEKIND, che culminarono in un ben noto risultato di indole negativa, la persuasione, assai diffusa, e lamentata già dallo STUDY fin dal 1890, che i sistemi di numeri ipercomplessi, all'infuori di quello dei numeri complessi ordinari, non siano di alcuna utilità; e che a niente essi conducano a cui non si possa altrettanto bene pervenire senza farvi alcun ricorso (2). Ma nè quelle ricerche autorizzano una sì pessimistica conclusione, nè è vero che le algebre a più unità non abbiano resi e non possano rendere, ancora meglio, utilissimi servigi.

L'essere stato dimostrato che, per *certi* scopi, l'introduzione di algebre diverse da quella degli ordinari numeri complessi è inutile o superflua, non porta che per *altri* tale introduzione non possa essere efficacissima e quasi necessaria; e se in linea di fatto è da riconoscere che le proprietà delle algebre di ordine qualunque non sono state molto sfruttate, non vorrà meravigliarsene chi pensi alla loro scarsa diffusione.

*
* *

È appunto questa loro scarsa diffusione che mi ha indotto a presentare qui nella prima Parte, a larghi tratti sintetici, una esposizione di insieme sufficientemente compiuta. Con che ho inteso non

(2) E. STUDY, *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppe* [Monatshefte für Mathematik und Physik, I Jahrgang (1890), pp. 283-355], pp. 341-342.

solo di agevolare la lettura della seconda Parte, ove le proprietà più riposte delle algebre ricorrono continuamente; ma anche di fornire alla nostra letteratura matematica, che sull'argomento manca, non dico di trattati, ma di monografie adeguate, un primo saggio di trattazione metodica.

In esso la nozione di algebra, cioè di sistema associativo di numeri ipercomplessi, viene posta nel senso più generale, alla maniera inaugurata dal TABER (3), e meglio ancora dal DICKSON (4); e cioè si suppone che le *coordinate* dell'elemento corrente siano, non necessariamente numeri reali o numeri complessi ordinari, come il più spesso si usa, ma numeri di un qualsivoglia corpo numerico.

Ciò, da una parte, è stato imposto dal fatto che nella teoria delle matrici di RIEMANN appunto le algebre a coordinate *razionali* sono quelle che più interessa considerare; dall'altra, ha richiesto, che, per lo sviluppo dell'esposizione io mi valessi di procedimenti non vincolati, come molto spesso sono quelli, ad es., del CARTAN (5) e del FROBENIUS (6), a ipotesi particolari sul corpo numerico costituente il campo di variabilità delle coordinate.

Per questo mi è stata di validissimo aiuto una bella Memoria dello WEDDERBURN (7), che è da considerare come la pubblicazione su questi argomenti più elegante e più geniale; ma non ho mancato anche di valermi, occorre appena avvertirlo, delle due magistrali memorie di FROBENIUS (8), e del trattatello del DICKSON (9), breve e succinto, ma assai raccomandabile per la chiarezza del dettato e la ricchezza delle informazioni bibliografiche.

Nell'esposizione, che ho composta tenendo particolarmente di mira i lavori ora citati, ma non tralasciando di esaminarne quanti

(3) H. TABER, *On hypercomplex number systems* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. V (1904), pp. 509-548], pag. 511.

(4) L. E. DICKSON, *On hypercomplex number systems* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. VI (1905), pp. 344-348].

(5) E. CARTAN, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tom. XII (1898)].

(6) G. FROBENIUS, *Theorie der hypercomplexen Grössen*, I und II [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1903, I. Halbband, pp. 504-537 e pp. 634-645].

(7) J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *On hypercomplex numbers* [Proceedings of the London Mathematical Society, s. 2, vol. 6 (1908), pp. 77-117].

(8) Loc. cit. (6).

(9) L. E. DICKSON, *Linear Algebras* [Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, n⁰ 16, Cambridge, University Press, 1914].

altri mi è stato possibile procurarmi tra difficoltà materiali non lievi, si trova qua e là qualche novità non priva di interesse; per es. l'introduzione delle caratteristiche e delle nullità di un elemento di un'algebra, che sveltisce e chiarisce molti procedimenti dimostrativi; lo studio preciso delle relazioni fra gli automoduli di un'algebra non pseudonulla, dotata di sotto-algebra eccezionale, e gli automoduli dell'algebra complementare di questa sotto-algebra; qualche dimostrazione nuova più agile di quelle già conosciute ...; ma gli scopi propostimi, di indole introduttiva, e la necessità di non eccedere certi necessari limiti di spazio, non mi hanno permesso, nè di esporre alcune mie nuove considerazioni, che forse svilupperò altrove, nè di accogliere nel saggio che segue, pur avendole talvolta già rimaneggiate e notevolmente sveltite con la speranza di farvele comparire, ricerche di CAYLEY (10), STUDY (11), ... utili e belle, ma non strettamente necessarie per le applicazioni a cui qui si mira.

*
* *

La seconda Parte contiene i nuovi risultati a cui son pervenuto dal 1917 in poi sulla teoria generale delle matrici di RIEMANN, e dei quali alcuni ho già preannunziati in tre Note preventive pubblicate nei *Comptes Rendus* e nei *Rendiconti dei Lincei* (12).

L'idea fondamentale che soggiace ad essa è la seguente.

Lo studio di una matrice di RIEMANN è lo studio dei suoi sistemi nulli, delle sue reciprocità e delle sue omografie.

Quest'ultime, sia che si considerino tutte, sia che si considerino fra di esse soltanto quelle reali o soltanto quelle razionali, costituiscono una totalità lineare ed un gruppo (continui o discontinui); quindi è chiaro che *si pone a studiarle con mezzi certo non perfettamente adeguati allo scopo, chi fa ricorso a teorie* (geometria proiettiva, gruppi continui e discontinui) *che delle due suddette proprietà*

(10) A. CAYLEY, *On double algebra* [Proceedings of the London Mathematical Society, s. 1, vol. 15 (1883-84), pp. 185-197].

(11) Loc. cit. (2).

(12) G. SCORZA, *a) Les fonctions abéliennes non singulières à multiplication complexe* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences (Paris), t. CLXV (2me semestre, 1917), pp. 497-498]; *b) Il rango di una matrice di* RIEMANN [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5a, vol. XXVI (2o semestre, 1917), pp. 177-182]; *c) Sur les fonctions abéliennes à trois variables indépendantes* [Comptes Rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences (Paris), t. CLXVII (2me semestre, 1918), pp. 454-455].

fondamentali ne sfruttano, direttamente e principalmente, soltanto una.

Invece, ove alla considerazione delle omografie si sostituisca quella delle sostituzioni lineari omogenee che le rappresentano — imponendo ai coefficienti di queste di variare soltanto nel corpo dei numeri reali, o soltanto nel corpo dei numeri razionali, se tra le omografie della matrice si vuol tener conto solo di quelle reali o solo di quelle riemanniane — si vede subito che l'insieme di coteste sostituzioni, appunto perchè è una totalità lineare ed un gruppo, è un'algebra; *quindi nella teoria delle algebre è da ravvisare lo strumento più adatto allo studio delle omografie di una matrice riemanniana.*

Questa osservazione, che mi fu suggerita dal problema concreto ricordato più sopra, non poteva mancare di rivelarsi utile e feconda, e chi voglia esaminare attentamente i risultati qui raggiunti non potrà non convenire che la previsione teorica ha trovato nel fatto la conferma più ampia e più sicura.

La teoria delle algebre non solo mi ha condotto per le matrici riemanniane a proposizioni di una precisione e generalità assolutamente insperate; ma mi si è anche manifestata di tale potenza euristica, di tanto duttile sveltezza, e di così alta eleganza che credo proprio di poterla additare come uno degli strumenti di ricerca più poderosi e più efficaci per tutte le questioni di analisi e di geometria che trovano il loro fondamento più naturale nella teoria delle matrici di RIEMANN.

Intanto è stata appunto la teoria delle algebre che mi ha consigliato di introdurre un nuovo carattere fondamentale per una matrice riemanniana.

Esso è l'intero positivo che ho chiamato *rango* di una matrice di RIEMANN e la sua importanza risalta subito quando si guardi all'ufcio essenziale cui esso risponde in questa Memoria, o, soltanto, si rifletta ai vari significati geometrici che di esso possono essere indicati.

Così il rango di una matrice riemanniana legata a una curva è il massimo del grado dell'equazione minima di una corrispondenza assegnata sulla curva ([13]); e una osservazione perfettamente analoga sta per il rango di una matrice riemanniana legata a una varietà

([13]) L'introduzione della nozione di *equazione minima* nella teoria delle corrispondenze sopra una curva algebrica è dovuta, come è ben noto, al ROSATI. Vedi la sua bella Memoria: *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1915-1916), pp. 991-1014].

abeliana. Inoltre, se una varietà abeliana della dimensione p, col numero-base σ, è pura ed è legata ad una matrice riemanniana del rango ϱ, (ϱ è un divisore di $2p$ e) l'indice ν delle corrispondenze algebriche $(\nu, 1)$ situate sulle varietà è suscettibile di tutti e soli i valori, che sono le potenze con esponente eguale a $\frac{2p}{\varrho}$ degli interi positivi rappresentabili con una determinata forma aritmetica a σ variabili di grado ϱ.

* * *

Poichè lo strumento di ricerca maggiormente utilizzato è qui la teoria delle algebre, i risultati a cui si perviene si aggirano per la maggior parte intorno al rango, all'indice di moliplicabilità e alle omografie di una matrice di Riemann; ma per talune questioni, oltre che alla teoria delle algebre e a quella degli pseudo-assi, iniziata nella Memoria del 1916, ho dovuto anche far ricorso a quella delle forme Hermitiane e, quindi, alla teoria delle antiproiettività sviluppata dal Segre in Memorie ormai classiche (14).

Alludo specialmente alla costruzione di *tutte* le matrici riemanniane non singolari ma con l'indice di moltiplicabilità positivo, che costituisce la parte più laboriosa e più riposta di questo lavoro, e che mi è sembrato utile trattare a fondo per la sua rilevante portata analitica.

Le funzioni abeliane non singolari, ma ad indice di moltiplicabilità positivo, si distinguono infatti in due categorie, di cui una racchiude soltanto funzioni con un numero pari (≥ 4) di variabili, l'altra contiene funzioni con un numero qualunque di variabili, purchè diverso da 2, e *può riguardarsi come la più spontanea generalizzazione delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa*; cosicchè lo studio delle loro proprietà darà certamente luogo a ricerche interessantissime, nè mancherà di gittar nuova luce su questioni matematiche fondamentali.

Qui dò soltanto la costruzione delle tabelle di periodi cui esse appartengono, e indico soltanto alcune delle proprietà geometriche più notevoli delle varietà abeliane che da esse derivano; ma mi propongo di ritornarvi con un lavoro apposito, perchè l'esposizione

(14) C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXV (1889-1890) pp. 276-301; 430-457; 592-612: e vol. XXVI (1890-1891), pp. 35-71].

completa anche dei soli teoremi, che già posseggo su di esse, avrebbe aumentata di troppo la mole di questa Memoria.

Parte Prima.

LE ALGEBRE DI ORDINE QUALUNQUE.

§ 1.

Nozioni fondamentali.

1. Denotato con Γ un qualsivoglia *corpo numerico* (15), diremo che un insieme A è un'*algebra di ordine* n, o *ad* n *unità, nel corpo* Γ, quando gode delle seguenti proprietà:

I) *Se x ed y sono elementi qualunque di A è definito in modo unico un elemento di A da chiamar* **somma** *di x ed y e da indicare con $x + y$:*

II) *Se x, y, z, sono elementi di A, è*

$$x + y = y + x, \tag{1}$$

e

$$(x + y) + z = x + (y + z)\ (^{16}); \tag{2}$$

III) *Se x è un elemento di A e α è un numero di Γ è definito in modo unico un elemento di A da chiamar* **prodotto** *di α ed x, o di x ed α e da indicare indifferentemente con $\alpha \cdot x$ o $x \cdot \alpha$, αx o $x\alpha$;*

IV) *Se x ed y sono elementi di A e α, α' sono numeri di Γ, è:*

$$(\alpha + \alpha')\, x = \alpha x + \alpha' x, \tag{3}$$

$$\alpha\, (x + y) = \alpha x + \alpha y, \tag{4}$$

(15) Per la definizione di corpo numerico che qui si intende adottata vedi per es. L. E. Dickson, *Definitions of a field by independent postulates* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. IV (1903), pp. 13-20]. Il corpo Γ può esser finito o infinito; ma nel testo si suppone sempre escluso che Γ sia formato da un solo elemento, e cioè, dal suo *zero*.

(16) Di qua, al solito modo, la definizione del significato di $x + y + z$, o di $x + y + z + \ldots + v$, $x, y, z, \ldots, v$ essendo sempre elementi di A. E un'osservazione analoga si intenda fatta relativamente alle (7) e (9).

e

(5) $$\alpha(\alpha' x) = (\alpha\alpha') x ;$$

V) *È possibile scegliere in A n elementi*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \qquad (n \geq 1),$$

così che gli elementi di A siano dati tutti, e ciascuno una volta sola, dall'espressione

(6) $$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n ,$$

facendo variare comunque ciascuna delle α_j *fra i numeri di* Γ;

VI) *Se* x *ed* y *sono elementi di* A *è definito in modo unico un elemento di* A *da chiamar* **prodotto** *di* x *ed* y, *considerati in quest'ordine, e da indicare con* $x \cdot y$ *o* xy;

VII) *Se* x, y, z, *sono elementi di* A *ed* α, α' *sono numeri di* Γ, *è*

(7) $$\alpha x \cdot \alpha' y = \alpha\alpha' \cdot xy,$$

(8) $$(x + y) z = xz + yz,$$

(8_{bis}) $$z(x + y) = zx + zy,$$

e

(9) $$(xy) z = x(yz) \text{ (17)}.$$

2. Se per gli elementi x e y di A si ha, conformemente a V),

$$x = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n ,$$

$$y = \eta_1 u_1 + \ldots + \eta_n u_n ,$$

con le ξ_j e η_j numeri di Γ, si ha, per II) e IV),

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1) u_1 + \ldots + (\xi_n + \eta_n) u_n .$$

Inoltre, sempre per V):

È

$$x = y,$$

(17) Insomma noi diciamo semplicemente *algebra*, alla maniera di WEDDERBURN, ciò che altri direbbe *sistema associativo di numeri ipercomplessi*, o, anche, *algebra associativa*. Facciam questo perchè non avremo mai occasione di considerare sistemi non associativi.

quando e solo quando è

$$\xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_n = \eta_n .$$

3. L'elemento di A che è dato dalla (6) facendovi nulle tutte le α, si dirà l'elemento *nullo* o, anche, lo *zero* di A e si indicherà col solito simbolo 0, sebbene lo zero di A sia un ente ben distinto dallo zero di Γ.

Per esso si ha, qualunque sia x in A,

$$x + 0 = x.$$

Si osservi che, per V) e IV), è

$$1 \cdot x = x,$$

e che, se si pone, per definizione

$$-x = (-1) \cdot x$$

è

$$x + (-x) = 0.$$

Se x ed y sono elementi di A si dice *differenza* di x ed y, e si indica con $x - y$, l'elemento di A definito dall'eguaglianza:

$$x - y = x + (-y).$$

Notisi che da

$$x + y = x + z,$$

con x, y, z in A, segue

$$y = z.$$

In particolare da

$$x + y = x$$

si trae

$$y = 0;$$

da cui si deduce che la definizione dello zero di A dipende solo apparentemente dalle $u_1, \dots, u_n$.

4. Da V) e IV) si deduce che:

È nullo il prodotto dello zero di Γ per un qualsivoglia elemento di A, ossia che è

(10) $$0 . x = x . 0 = 0,$$

dove il simbolo 0, nei primi due membri, indica lo zero di Γ e, nell'ultimo, lo zero di A.

Ma la (10) sussiste anche se vi si suppone che il simbolo 0 indichi sempre lo zero di A, per modo che:

È nullo il prodotto di due elementi di A dei quali uno almeno sia nullo.

Infatti, se x ed y sono elementi di A, da

$$y + 0 = y,$$

si trae

$$yx + 0.x = yx,$$

e

$$xy + x.0 = xy,$$

e quindi

$$0.x = x.0 = 0.$$

Avvertasi, per altro, che mentre:

Il prodotto di un numero di Γ per un elemento di A non può esser nullo, se non a patto che uno almeno dei due enti sia nullo,

non è detto che per un'algebra *qualunque* il prodotto di due elementi non nulli sia necessariamente diverso da zero.

Le algebre particolari per cui questa proprietà sussiste si dicono *primitive* (18).

5. Se un'algebra non è primitiva esistono in essa coppie di elementi non nulli x ed y per cui è

$$xy = 0.$$

Ciascun elemento di una tale coppia si dirà, col WEIERSTRASS, un *divisore dello zero*, e quando occorra precisare si dirà che x è un divisore *sinistro*, y un divisore *destro*, dello zero.

6. Gli elementi $x_1, \ldots, x_m$ di A $(m \geq 1)$ si dicono *indipendenti fra di loro in Γ* — o, semplicemente, indipendenti, quando

(18) Le algebre che qui, con lo WEDDERBURN, diciamo *primitive*, sono le *division-algebras* del DICKSON [loc. cit. (9), pag. 66]. Quelli che il CIPOLLA {*Teoria dei numeri complessi ad N unità* [Periodico di Matematica, vol. XX (1904-1905), pp. 97-106 e pp. 162-173]} dice *corpi hankeliani* sono, secondo la nomenclatura adottata, le *algebre primitive nel corpo dei numeri reali*. Lo HAWKES nella sua Memoria *On Quaternion Number-Systems* [Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), pp. 437-447] dice primitive le algebre che nel testo saranno dette *regolari*.

non vi sia luogo ad equivoci — se dal supporre che sia

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_m x_m = 0,$$

con le λ_j numeri di Γ, segue che è, a dirittura,

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0.$$

Elementi non indipendenti si diranno anche *dipendenti*.

È chiaro che se, in conformità di V), per gli elementi $x_1, \dots, x_m$ si ha:

$$x_j = \sum_l^{1\dots n} \xi_{j,l} u_l \qquad (j = 1, \dots, m),$$

con le $\xi_{j,l}$ numeri di Γ, *gli elementi stessi risultano indipendenti o dipendenti secondo che la caratteristica della matrice*

$$\| \xi_{j,l} \|$$

è uguale ad m *o inferiore ad* m.

Notisi che in A non possono esistere più di n elementi indipendenti — donde la giustificazione della definizione di ordine di un'algebra — e che le $u_1, u_2, \dots, u_n$ di cui si parla in V) sono in sostanza n elementi indipendenti qualunque di A.

Avvertasi pure che se più elementi di A sono indipendenti, ciascun di essi è necessariamente diverso da zero.

7. Un gruppo di n elementi indipendenti di A si dice un gruppo di *unità* di A.

Se $u_1, \dots, u_n$ è uno di essi, tutti i gruppi di unità di A sono dati da $u'_1, \dots, u'_n$, se è

$$u'_j = \sum_l^{1\dots n} \tau_{j,l} u_l \qquad (j = 1, \dots, n)$$

e $|\tau_{j,l}|$ percorre la totalità dei determinanti non nulli con gli elementi in Γ.

Le *coordinate* dell'elemento x di A *rispetto alle unità* $u_1, \dots, u_n$ sono i numeri $\xi_1, \dots, \xi_n$ di Γ per cui è

$$x = \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n.$$

L'elemento x e la n-pla ordinata di numeri $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ si individuano reciprocamente.

8. Due elementi x e y di un'algebra si dicono *permutabili* o *commutativi* se è

$$xy = yx.$$

Algebra commutativa è un'algebra i cui elementi sono a due a due permutabili; cioè un'algebra per cui i prodotti degli elementi godono della proprietà commutativa.

Come è chiaro, perchè un'algebra sia commutativa occorre e basta che siano a due a due permutabili gli elementi di *un* suo gruppo di unità.

9. Due algebre, definite nello stesso corpo numerico, si dicono *isomorfe* o *equivalenti* se è possibile stabilire fra i loro elementi una tal corrispondenza biunivoca che, detti x, y elementi qualunque dell'una e x', y' gli elementi omologhi dell'altra, agli elementi

$$\alpha x, \qquad x + y, \qquad xy$$

dell'una corrispondano gli elementi

$$\alpha x', \qquad x' + y', \qquad x'y'$$

dell'altra, essendo α un numero qualunque del corpo nel quale sono entrambe definite. Si dicono invece *reciproche* se è possibile stabilire fra i loro elementi una tal corrispondenza biunivoca che, mantenute le notazioni precedenti, agli elementi

$$\alpha x, \qquad x + y, \qquad xy$$

dell'una corrispondano gli elementi

$$\alpha x', \qquad x' + y', \qquad y'x'$$

dell'altra.

La relazione di *isomorfismo* o di *equivalenza* tra algebre gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Algebre reciproche ad una stessa sono equivalenti.

Se due algebre sono equivalenti o reciproche, in ciascuna corrispondenza biunivoca che ne metta in linee l'equivalenza o la *reciprocità*, allo zero dell'una corrisponde necessariamente lo zero dell'altra; quindi ad elementi indipendenti (dipendenti) dell'una corrispondono elementi indipendenti (dipendenti) dell'altra.

Algebre equivalenti o reciproche sono dunque dello stesso ordine.

Algebre commutative equivalenti sono anche reciproche, e viceversa.

Due algebre reciproche non sono necessariamente equivalenti.

10. Avvertasi una volta per tutte che *le proprietà delle algebre formanti l'oggetto di questo studio sono le proprietà invarianti di fronte alla relazione di equivalenza;* quindi ogni qual volta introdurremo delle ulteriori nozioni sarà inutile far rilevare esplicitamente che trattasi di nozioni invarianti di fronte a quella relazione ([19]).

11. Siano A e A' due algebre definite nei corpi Γ e Γ', rispettivamente.

Generalizzando una denominazione assai suggestiva del CARTAN ([20]), diremo che A' è il *prolungamento di A in Γ'*, se Γ' contiene Γ, A' contiene A, le definizioni delle somme e dei prodotti per A rientrano in quelle analoghe per A', e inoltre uno (e quindi ogni altro) gruppo di unità di A è pure nel tempo stesso un gruppo di unità di A'.

§ 2.

SISTEMI E SOTTO-ALGEBRE DI UN'ALGEBRA

12. Si dirà *sistema* ([21]) dell'algebra A, determinato dai suoi elementi $x_1, \dots, x_m$, e si indicherà con

$$(x_1, \dots, x_m)$$

l'insieme degli elementi di A forniti dall'espressione

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$$

([19]) L'importanza fondamentale della relazione di *equivalenza* per la teoria delle algebre è stata esplicitamente rilevata da B. PEIRCE; nè, a riflettervi bene, alla definizione che egli ne dà può esser mosso l'appunto indicato dallo HAWKES. Vedi B. PEIRCE, *Linear Associative Algebra* [American Journal of Mathematics, vol. IV (1881), pp. 97-229], pp. 99-100; H. E. HAWKES, *Estimate of* PEIRCE's *Linear Associative Algebra* [ibid., vol. XXIV (1902), pp. 87-95], pag. 91.

([20]) Loc. cit. ([5]), n° 76.

([21]) I *sistemi* del testo sono i *complexes* dello WEDDERBURN [loc. cit. ([7])]. Appunto allo WEDDERBURN è dovuta l'introduzione del *calcolo dei sistemi* nelle algebre, che è da considerare come la trovata più felice della sua bella Memoria.

al variare delle λ_j in tutti i modi possibili fra i numeri del corpo in cui A è definita.

Lo zero di A costituisce da solo un sistema. Si dirà il *sistema zero* e si indicherà ancora col simbolo 0.

Ordine di un sistema è il massimo numero di elementi indipendenti che possono scegliersi in esso.

Il sistema $(x_1, \ldots, x_m)$ è di ordine m o di ordine inferiore (≥ 0), secondo che $x_1, \ldots, x_m$ sono indipendenti o dipendenti.

Per indicare che, dei due sistemi S e T, T contiene S e non è esaurito dagli elementi di S, si scriverà

$$S < T \quad \text{o} \quad T > S.$$

In tal caso l'ordine di S è inferiore a quello di T.

Ciascun sistema di A è di ordine non superiore a quello di A; ed è dello stesso ordine solo quando coincide con A.

13. Se S e T sono sistemi di A si dirà *intersezione* di S e T e si denoterà con

$$S \cap T$$

il *sistema* (di ordine ≥ 0) costituito dagli elementi comuni ad S e T; si dirà invece *somma* di S e T e si indicherà con

$$S + T$$

il sistema d'ordine minimo contenente tutti gli elementi di S e T, o, ciò che è lo stesso, l'insieme degli elementi ciascun dei quali sia la somma di un elemento di S e un elemento di T.

Detti m_1, m_2 gli ordini di S e T, ed m', m'' quelli di $S \cap T$ ed $S + T$ si vede subito che è

$$m_1 + m_2 = m' + m''.$$

Notisi che

$$S \cap T = T \cap S,$$

$$S + T = T + S;$$

e che se U è pure un sistema di A è

$$(S \cap T) \cap U = S \cap (T \cap U),$$

$$(S + T) + U = S + (T + U).$$

Il sistema d'ordine minimo, contenente tutti gli elementi risultanti dal formare i prodotti di ciascun elemento di S per ciascun elemento di T, si dirà *prodotto* di S e T, considerati in quest'ordine, e si indicherà con

$$S \cdot T \quad \text{o} \quad ST.$$

L'ordine di ST è evidentemente inferiore o eguale al prodotto degli ordini di S e T.

Le leggi fondamentali dei prodotti di sistemi sono espresse dalle eguaglianze

$$(ST)\,U = S\,(TU),$$

$$U\,(S + T) = US + UT,$$

$$(S + T)\,U = SU + TU,$$

che si dimostrano immediatamente.

Se x è un elemento di A, i prodotti, in generale distinti,

$$(x) \cdot S \quad \text{ed} \quad S \cdot (x),$$

dove, in conformità del n⁰ 12, (x) è il sistema determinato da x, si indicheranno più semplicemente con

$$xS \quad \text{ed} \quad Sx,$$

appunto perchè xS, ad es., non è altra cosa che l'insieme dei prodotti di x per i singoli elementi di S.

Avvertasi a questo proposito il diverso significato delle espressioni

$$[(x) + (y)]\,S \quad \text{e} \quad (x + y)\,S,$$

dove y è, al pari di x, un elemento di A, o delle espressioni

$$S\,[(x) + (y)] \quad \text{ed} \quad S\,(x + y).$$

Mentre è, ad es.,

$$[(x) + (y)]\,S = (x) \cdot S + (y) \cdot S = xS + yS,$$

si ha invece

$$(x + y)\,S \leq xS + yS.$$

14. Le *potenze* degli elementi o dei sistemi di un'algebra qualunque ad *esponenti* interi positivi si definiscono procedendo come nell'algebra elementare, e per indicarle si useranno le stesse notazioni che si adoperano per le potenze dei numeri ordinari.

Inoltre per codeste potenze sta sempre il teorema fondamentale relativo al prodotto di potenze con la stessa *base*.

15. Se per un sistema S dell'algebra A si ha

$$S \neq 0 \qquad \text{ed} \qquad S^2 \leq S,$$

è chiaro che S è, al pari di A, un'algebra, nello stesso corpo numerico, quando a definire in esso le somme e i prodotti degli elementi si adottino le definizioni già fissate per lo scopo analogo in A.

In tal caso si dirà che S è una *sotto-algebra* di A; e si dirà che S è una sotto-algebra *propria* di A, se si vuole escludere che sia $S = A$.

A titolo di esempio si osservi che:

L'insieme degli elementi di A, permutabili con un suo elemento assegnato x, è una sotto-algebra di A.

È chiaro infatti che tali elementi costituiscono un sistema S per il quale è $S^2 \leq S$, ed è poi $S \neq 0$, perchè o $x = 0$ ed $S = A$, $x \neq 0$ ed S, contenendo x, è $\neq 0$.

16. Una sotto-algebra B di un'algebra A si dice *semi-invariante sinistra in A*, se, essendo b un elemento qualunque di B ed a un elemento qualunque di A, il prodotto ba è ancora un elemento di B; *semi-invariante destra in A*, se, con lo stesso significato di b ed a, il prodotto ab è ancora un elemento di B.

Insomma B è semi-invariante sinistra o destra in A secondo che è

$$BA \leq B \qquad \text{o} \qquad AB \leq B$$

Se per B queste due condizioni sono entrambe soddisfatte, B si dice, a dirittura, *invariante in A* ([22]).

([22]) La nozione di sotto-algebra invariante di un'algebra data risale a CARTAN, loc. cit. ([5]), n° 69. Quella di sotto-algebre semi-invarianti al POINCARÉ. Vedi H. POINCARÉ: *Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5me serie, t. IX (1903), pp. 139-212], pag. 182.

Da

$$B < A$$

si trae

$$B^2 \leq BA, \qquad B^2 \leq AB;$$

quindi una sotto-algebra semi-invariante sinistra o destra di A può anche definirsi come un *sistema* B di A per il quale sia nel tempo stesso

$$B \neq 0 \quad \text{e} \quad BA \leq B, \quad \text{o} \quad B \neq 0 \quad \text{e} \quad AB \leq B,$$

perchè ciascuna di queste due coppie di condizioni basta ad implicare che B è un'algebra.

Allo stesso modo può dirsi che una sotto-algebra invariante di A è un sistema B di A per il quale sia

$$B \neq 0, \qquad BA \leq B, \qquad AB \leq B.$$

Una sotto-algebra invariante di A si dice *massima* (23) se è propria e non esiste in A alcuna sotto-algebra invariante propria che la contenga e non coincida con essa.

Un'algebra *semplice* (24) è un'algebra priva di sotto-algebre invarianti proprie.

Se S è un sistema dell'algebra A, il prodotto SA (il prodotto AS) o è nullo o è una sotto-algebra semi-invariante sinistra (destra) di A.

Infatti è:

$$SA \cdot A = S \cdot A^2 \leq SA\,.$$

Ne discende che:

Se S è un sistema dell'algebra A, il prodotto ASA o è zero o è una sotto algebra invariante di A; quindi, se A è semplice, è

$$ASA = 0 \qquad \textit{oppure} \qquad ASA = A \text{ (25)}.$$

17. Se B_1 e B_2 sono sotto algebre di A, l'intersezione di B_1 e B_2, se diversa da zero, è evidentemente una sotto-algebra di B_1,

(23) Loc. cit. 7), pag. 81. Vedi anche S. Epsteen *and* J. H. Maclagan Wedderburn, *On the structure of hypercomplex number systems* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. VI (1905), pp. 172-178].

(24) Denominazione dovuta al Cartan, loc. cit. 5), n° 69. Ciò che T. Molien chiama *ein ursprüngliches Zahlensystem* nella sua Memoria: *Über Systeme höherer complexer Zahlen* [Mathematische Annalen, Bd. 41 (1893), pp. 83-156], pag. 93, è secondo la nomenclatura del testo, un'algebra semplice, dotata di modulo, nel corpo degli ordinari numeri complessi.

(25) Questa osservazione, assai ovvia, ma molto utile, può esser meglio precisata. Risulterà dal seguito che un'algebra semplice, che non sia una zero-algebra di ordine 1, è sempre dotata di modulo. Ora, quando A è dotata di modulo, ASA contiene S; dunque: *se A è semplice, e non è una zero-algebra di ordine 1, è $ASA = 0$ solo quando sia $S = 0$.*

B_2 ed A; non è detto invece che anche la somma di B_1 e B_2 sia una sotto-algebra di A, perchè non è detto che il sistema $B_1 + B_2$ debba risultare necessariamente un'algebra. Per altro:

Se B_1 e B_2 sono sotto-algebre invarianti di un'algebra A, anche $B_1 + B_2$ è una sotto-algebra invariante di A (26).

Infatti è $B_1 + B_2 \neq 0$, e per l'invarianza di B_1 e B_2 in A è inoltre:

$$(B_1 + B_2) A = B_1 A + B_2 A \leq B_1 + B_2 ,$$
$$A (B_1 + B_2) = A B_1 + A B_2 \leq B_1 + B_2 .$$

Se B_1 è una sotto-algebra invariante massima, è, dunque,

$$B_1 + B_2 = B_1 , \qquad \text{cioè} \qquad B_2 \leq B_1 ,$$

oppure

$$B_1 + B_2 = A .$$

Quindi:

Se B_1 e B_2 sono sotto-algebre invarianti massime distinte, è necessariamente

$$B_1 + B_2 = A.$$

18. Se A è un'algebra qualunque si ha

$$A \geq A^2 \geq A^3 \geq \dots ;$$

e fra i sistemi $A^2, A^3, \dots$ quelli che sono diversi da zero sono, al pari di A, delle algebre.

Poichè gli ordini di $A^2, A^3, \dots$ non possono scendere al disotto di zero, debbono esistere due interi consecutivi r ed $r + 1$, tali che sia

$$A^r = A^{r+1} \tag{11}$$

dopo di che sarà, a dirittura,

$$A^r = A^{r+1} = A^{r+2} = \dots .$$

(26) Cfr. loc. cit. 7), pag. 81. La proposizione può essere evidentemente generalizzata: può dirsi cioè: *Se B_1 e B_2 sono sotto-algebre semi-invarianti sinistre (destre) di un'algebra A, anche $B_1 + B_2$ è una sotto-algebra semi-invariante sinistra (destra) di A.*

Se r è il minimo intero positivo per cui valga la (11), r si dice l'*indice* (27) di A; e se, in tale ipotesi, si ha

$$A^r = A^{r+1} = \dots = 0,$$

l'algebra A si dice *pseudo-nulla* (28).

Avvertasi che in questo caso è necessariamente $r \geq 2$; poi, dovendo essere

$$A = A^{r-1} \text{ se } r = 2, \text{ oppure } A > A^2 > \dots > A^{r-1} \neq 0 \text{ se } r > 2,$$

se n è l'ordine di A, quello di A^{r-1} è al più $n - (r - 2)$; quindi è pure

$$1 \leq n - (r - 2),$$

ossia

$$r \leq n + 1.$$

Se l'indice di un'algebra pseudo-nulla è uguale a 2, essa si dice anche una *zero-algebra* (29).

Una tale algebra è dunque un'algebra per la quale i prodotti degli elementi sono tutti nulli.

19. Un'algebra *semi-semplice* (30) è un'algebra priva di sotto-algebre invarianti proprie pseudonulle.

(27) Loc. cit. 7), pag. 87.

(28) Denominazione dovuta al CARTAN, il quale per altro dette delle algebre pseudonulle (nel corpo degli ordinari numeri complessi) una definizione diversa [cfr. annotazione (43)]. La definizione del testo è dovuta allo WEDDERBURN.

Un'algebra pseudonulla dagli autori anglo-sassoni è detta *nilpotent*; dal FROBENIUS un *Wurzel-gruppe*.

(29) Loc. cit. (7), pag. 88.

(30) La denominazione è dovuta al CARTAN; ma la definizione adottata nel testo è quella dello WEDDERBURN, loc. cit. (7). Avvertasi, per altro, che le due definizioni del CARTAN e dello WEDDERBURN, anche limitandosi alle algebre definite nel corpo degli ordinari numeri complessi, non sono proprio equivalenti. Secondo la nomenclatura del testo le algebre semi-semplici del CARTAN sono le algebre semi-semplici, nel corpo degli ordinari numeri complessi, *dotate di modulo*, cioè diverse dalle zero-algebre di ordine 1.

A questo proposito giova avvertire che nè lo WEDDERBURN, nè il DICKSON, che nel suo trattatello riporta i risultati dello WEDDERBURN, hanno mai rilevata la posizione eccezionale che le zero-algebre di ordine 1 hanno fra le algebre semi-semplici e semplici.

Il FROBENIUS chiama *gruppi di* DEDEKIND le algebre semi-semplici del CARTAN.

Un'algebra semplice è anche semi-semplice.

Un'algebra semi-semplice non è pseudo-nulla, eccetto il caso in cui essa sia una zero-algebra di ordine 1.

Sia, infatti, A un'algebra semi-semplice e pseudonulla.

Se l'indice di A fosse maggiore di 2 sarebbe

$$A > A^2 \qquad \text{e} \qquad A^2 \neq 0,$$

e A^2 sarebbe per A una sotto-algebra invariante propria pseudonulla, cioè A non sarebbe semi-semplice; dunque l'indice di A è 2 ed A è una zero-algebra.

Intanto, in una zero-algebra di ordine $n > 1$, i sistemi di ordine m, con $0 < m < n$, sono altrettante zero-sotto-algebre invarianti proprie, dunque A non può essere che una zero-algebra di ordine 1.

E una zero-algebra di ordine 1 è, veramente, semi-semplice (anzi semplice, al pari di *ogni* algebra di ordine 1, e) pseudonulla.

§ 3.

Prodotti diretti [31].

20. Siano S e T due sistemi di un'algebra, tali che ciascun elemento di S sia permutabile con ciascun elemento di T e tali inoltre che il prodotto ST, eguale questa volta a TS, abbia per ordine il prodotto degli ordini di S e T.

Allora ST si dice più propriamente il *prodotto diretto* di S e T e si suole indicare anche con $S \times T$.

Naturalmente per un tal prodotto vale la proprietà commutativa.

Siano p e q gli ordini di S e T, e sia

$$S = (a_1, a_2, \ldots, a_p), \qquad T = (b_1, b_2, \ldots, b_q).$$

Siccome $S \times T$ è dell'ordine pq ed è d'altronde

$$S \times T = (a_1 b_1, \ldots, a_1 b_q, a_2 b_1, \ldots, a_2 b_q, \ldots, a_p b_q),$$

[31] La nozione di prodotto diretto risale al Clifford. Cfr. loc. cit. [9], pag. 27.

gli elementi $a_j\, b_l$ sono indipendenti; quindi gli elementi di $S \times T$ sono dati tutti, e ciascuno una volta sola, dell'espressione

$$\sum_j^{1\dots p} \sum_l^{1\dots q} \alpha_{j,l}\, a_j\, b_l$$

al variare delle $\alpha_{j,l}$ in tutti i modi possibili fra i numeri del corpo in cui è definita l'algebra considerata.

Posto

$$t_j = \sum_l^{1\dots q} \alpha_{j,l}\, b_l\,,$$

le t_j risultano elementi di T e si ha

$$\sum_j^{1\dots p} \sum_l^{1\dots q} \alpha_{j,l}\, a_j\, b_l = \sum_j^{1\dots p} a_j\, t_j\,.$$

Quindi si può anche dire, che gli elementi di $S \times T$ sono dati tutti, e ciascuno una volta sola, dall'espressione

$$\sum_j^{1\dots p} a_j\, t_j = \sum_j^{1\dots p} t_j\, a_j\,,$$

al variare delle t_j fra gli elementi di T.

Analogamente essi sono dati tutti, e ciascuno una volta sola, dall'espressione

$$\sum_l^{1\dots q} s_l\, b_l = \sum_l^{1\dots q} b_l\, s_l\,,$$

al variare delle s_l fra gli elementi di S.

Se i sistemi S e T sono delle algebre, tale è pure il loro prodotto diretto (che non è certo nullo).

21. A proposito dei prodotti diretti giova tener presenti le osservazioni che seguono ([32]).

a) *Dall'esistenza del prodotto diretto* $S \times (T \times U)$ *non segue quella del prodotto diretto* $(S \times T) \times U$.

Infatti, se è ad es. $U = 0$, i prodotti diretti $T \times U$ ed $S \times (T \times U)$ esistono certamente, e sono entrambi nulli, *qualunque*

([32]) Per quanto mi consta non tutte le osservazioni dei n[i] 21 e 22 del testo sono state esplicitamente rilevate da altri.

siano S e T; e quindi anche se il prodotto diretto $S \times T$ non esiste.

Analogamente si vede che:

b) *Dall'esistenza del prodotto diretto* $(S \times T) \times U$ *non segue quella del prodotto diretto* $S \times (T \times U)$.

Però è chiaro che:

c) *Se i prodotti diretti* $S \times (T \times U)$ *ed* $(S \times T) \times U$ *esistono entrambi, è*

$$S \times (T \times U) = (S \times T) \times U.$$

d) *Se esiste il prodotto diretto dei sistemi* S *e* T, *esiste anche quello di* S' *e* T', *essendo* S' *un qualunque sistema contenuto in* S *e* T' *un qualunque sistema contenuto in* T.

Per accorgersene basta osservare che, se gli ordini di S, T, S' e T' sono rispettivamente p, q, p', q' $(p' \leq p, q' \leq q)$, si possono sempre scegliere p elementi indipendenti di S e q elementi indipendenti di T, per modo che p' di quelli stiano in S' e q' di questi stiano in T'.

Da d) si deduce:

e) *Dall'esistenza del prodotto diretto* $S \times (T + U)$ *segue quella dei prodotti diretti* $S \times T$ *ed* $S \times U$; *dopo di che è chiaramente*

$$S \times (T + U) = S \times T + S \times U.$$

Invece:

f) *Dall'esistenza dei prodotti diretti* $S \times T$ *ed* $S \times U$ *non segue quella del prodotto diretto* $S \times (T + U)$.

Siano infatti u e v due elementi non nulli di un'algebra per i quali sussistano le eguaglianze

$$u^2 = u, \qquad uv = vu = 0, \qquad v^2 = v;$$

ipotesi che, per quanto risulterà dal seguito, sono certo compatibili.

Siano poi a e b due elementi indipendenti (e quindi non nulli) del sistema

$$(u, v),$$

il quale è dell'ordine 2, perchè u e v, grazie alle ipotesi fatte, sono certo indipendenti; e suppongasi inoltre che a e b siano entrambi esterni al sistema (v).

Se si pone

$$S = (u), \qquad T = (a), \qquad U = (b)$$

i prodotti diretti $S \times T$ ed $S \times U$ esistono e sono entrambi eguali ad S, quindi è

$$S(T+U) = ST + SU = S \times T + S \times U = S.$$

Siccome S è dell'ordine 1 e $T+U$ è dell'ordine 2, perchè coincide con (u, v), queste eguaglianze dimostrano che il prodotto diretto $S \times (T+U)$ non esiste.

22. Le relazioni più notevoli fra due algebre B e C, dotate di prodotto diretto, e l'algebra A, che è uguale a questo prodotto, sono fornite dai teoremi che seguono.

a) *Se B e C non sono pseudonulle e gli indici di B e C sono r ed s, con $r \leq s$, l'indice di A è s.*

Da

$$A = B \times C = BC = CB,$$

si trae

$$A^t = B^t C^t,$$

qualunque sia l'intero positivo t. Ma, essendo B e C delle algebre,

$$B^t \leq B, \qquad C^t \leq C;$$

dunque [n^0 21, d)] dall'esistenza del prodotto diretto $B \times C$ discende quella di $B^t \times C^t$ e si ha

$$A^t = B^t \times C^t.$$

Di qua e dalle ipotesi fatte su B e C si deduce

$$A^{s+1} = B^{s+1} \times C^{s+1} = B^s \times C^s = A^s,$$

quindi l'indice di A è $\leq s$.

Ma si ha pure

$$A^{s-1} = B^{s-1} \times C^{s-1},$$

e poi

$$B^{s-1} \geq B^s, \qquad C^{s-1} > C^s,$$

quindi l'ordine di A^{s-1}, che è il prodotto degli ordini, non nulli, di B^{s-1} e C^{s-1}, supera l'ordine di A^s, che è il prodotto degli ordini, non nulli, di B^s e C^s.

Si conclude che è

$$A^{s-1} > A^s$$

e che l'indice di A è s.

Ragionando in modo analogo si vede subito che:

b) *Se una almeno delle algebre B e C è pseudonulla, tale è anche A; e l'indice di A è quello, per es., di B, se soltanto B è pseu-*

donulla, è il minore degli indici di B e C, se B e C sono entrambe pseudonulle.

Segue che:

Se A è di indice 1, lo stesso sta per B e C.

c) *Se B_1 è una sotto-algebra propria di B, $B_1 \times C$ è una sotto algebra propria di A.*

Infatti il prodotto diretto $B_1 \times C$ esiste [n⁰ 21, d], ed è un'algebra il cui ordine è il prodotto degli ordini di B_1 e C, e quindi è inferiore all'ordine di A.

d) *Se B_1 è una sotto algebra invariante di B, $B_1 \times C$ è una sotto-algebra invariante di A.*

Infatti da

$$A = BC = CB,$$

e

$$B_1 B \leq B_1, \qquad BB_1 \leq B_1,$$

segue

$$B_1 C \cdot A = B_1 CBC = B_1 BC^2 \leq B_1 C,$$

$$A \cdot B_1 C = CBB_1 C \leq CB_1 C = B_1 C^2 \leq B_1 C.$$

Da c) e d), notando che in esse può essere scambiato l'ufficio di B e C, si deduce che:

e) *Se A è semplice, tali sono pure B e C.*

Da *d*) e *b*) segue che:

f) *Se A è semi-semplice, tali sono pure B e C.*

§ 4.

Moduli, nullifici, automoduli, caratteristiche, nullità.

23. Siano x ed y elementi di un'algebra A.

I) Se $xy = y$, si dice che x è *per* y un *modulo sinistro*;

II) Se $yx = y$, x è *per* y un *modulo destro*;

III) Se $xy = yx = y$, x è *per* y un *modulo* (senz'altro);

IV) Se $xy = 0$, si dice che x è *per* y un *nullifico sinistro*;

V) Se $yx = 0$, x è *per* y un *nullifico destro*;

VI) Se $xy = yx = 0$, x è *per* y un *nullifico* (senz'altro) (33).

(33) Per esprimere i fatti I), ..., VI) B. Peirce [loc. cit. 19), pag. 104] dice che y è rispetto ad x *idemfaciend, idemfacient, idemfactor, nilfaciend, nilfacient* o, rispettivamente, *nilfactor*. Ed è questa la nomenclatura adottata dagli anglo-sassoni; vedi per es. H. E. Hawkes, *On hypercomplex number systems* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. III (1902), pp. 312-330], pag. 313; H. Taber, loc. cit. 3), pag. 512. Ragioni linguistiche ci hanno impedito di seguirla; e per comporre quella del testo ci siamo valsi di denominazioni che già erano in uso presso di noi.

Se per un elemento x la proprietà I), II), ..., V) o VI) sussiste rispetto a *ciascun* elemento di A, e se inoltre, quando si tratti della proprietà IV), V) o VI), è $x \neq 0$, l'elemento x si dirà, rispettivamente un *modulo sinistro*, un *modulo destro*, ..., un *nullifico destro* o un *nullifico per* A o *di* A.

Un *automodulo* (34) di A è un elemento x per il quale sia nel tempo stesso

$$x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad x = x^2;$$

dopo di che è, a dirittura,

$$x = x^2 = x^3 = \dots$$

24. *Gli elementi di* A *per cui un suo elemento assegnato è modulo sinistro* (*destro*) *costituiscono un sistema che o è nullo, o è una sotto-algebra semi-invariante sinistra* (*destra*) *di* A.

Sia x un elemento di A ed S l'insieme degli elementi per cui x è, ad es., modulo sinistro.

È chiaro intanto che S è un sistema. Poi, se y è in S e z è in A, da

$$xy = y$$

si trae

$$xy \cdot z = x \cdot yz = yz;$$

quindi anche yz è in S, ed è

$$SA \leq S.$$

Questa relazione, se è $S \neq 0$, basta per concludere che S è una sotto-algebra semi-invariante sinistra di A.

(34) B. PEIRCE [loc. cit. 19), pag. 104] dice *idempotent* ogni elemento x per il quale sussista un'eguaglianza del tipo $x^m = x$ (m intero positivo). Ma avverte anche che, ove manchino esplicite dichiarazioni in contrario, quand'egli afferma, che un elemento x è *idempotent*, è da intendere che sia $x^2 = x$. È in questo senso più stretto che la denominazione viene adoperata dagli autori anglo-sassoni posteriori; e fra questi non tutti pongono esplicitamente la condizione limitativa $x \neq 0$, sebbene, a cominciare dal PEIRCE, tale condizione sia molto spesso evidentemente sottintesa.

La denominazione del testo risponde meglio all'indole della nostra lingua ed è anche più espressiva.

L'intersezione dei due sistemi formati dagli elementi per cui x è, rispettivamente, modulo sinistro o destro è l'insieme degli elementi per cui x è modulo; dunque:

Gli elementi di A per cui un suo elemento assegnato è modulo costituiscono un sistema che o è nullo o è una sotto-algebra di A.

25. Procedendo come or ora si dimostra subito che:

Gli elementi di A per cui un suo elemento assegnato è nullifico sinistro (destro) costituiscono un sistema che o è nullo o è una sotto algebra semi-invariante sinistra (destra) di A;

e che:

Gli elementi di A per cui un suo elemento assegnato è nullifico costituiscono un sistema che o è nullo o è una sotto-algebra di A.

26. *Se l'algebra A ammette dei nullifici, questi, insieme con lo zero, costituiscono una zero-algebra invariante in A.*

Infatti se B è l'insieme dello zero e dei nullifici di A, è chiaro intanto che B è un sistema (diverso da zero). Poi si ha:

$$B^2 = 0, \qquad BA = 0 < B, \qquad AB = 0 < B,$$

dunque ecc.

Segue che:

Un'algebra semi-semplice, che non sia una zero-algebra di ordine 1, non ammette nullifici.

27. Gli ordini dei sistemi xA e Ax, ciascun dei quali o è zero o è una sotto-algebra semi-invariante di A (n⁰ 16), si diranno *caratteristiche* di x, *sinistra* e *destra*, rispettivamente.

Se l'ordine di A è n e se le caratteristiche di x, sinistra e destra, sono c'_x e c''_x, per modo che sarà

$$0 \leq c'_x \leq n, \qquad 0 \leq c''_x \leq n,$$

le differenze, positive o nulle,

$$n'_x = n - c'_x, \qquad n''_x = n - c''_x,$$

si diranno le *nullità* di x, *sinistra* e *destra*, rispettivamente.

La nullità sinistra (destra) di x è l'ordine del sistema costituito dagli elementi per cui x è nullifico sinistro (destro).

Infatti si dica, ad es., ν l'ordine del sistema N costituito dagli elementi per cui x è nullifico sinistro, e siano $y_1, \dots, y_\nu$ ν elementi indipendenti di N.

Se

$$y_1, \dots, y_\nu, \qquad y_{\nu+1}, \dots, y_n$$

sono n elementi indipendenti di A è

$$xA = (xy_1, \dots, xy_\nu, xy_{\nu+1}, \dots, xy_n) = (xy_{\nu+1}, \dots, xy_n).$$

Ora suppongasi che, indicando con le λ dei numeri del corpo in cui è definita A, sia

$$\lambda_{\nu+1}\, xy_{\nu+1} + \dots + \lambda_n\, xy_n = 0.$$

Sarà

$$\lambda_{\nu+1}\, y_{\nu+1} + \dots + \lambda_n\, y_n$$

un elemento di N, e quindi esistono dei convenienti numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ per cui è:

$$\lambda_{\nu+1}\, y_{\nu+1} + \dots + \lambda_n\, y_n = \lambda_1\, y_1 + \dots + \lambda_\nu\, y_\nu .$$

Di qua, per l'indipendenza degli elementi y, segue che sono nulle tutte le λ, dunque gli elementi

$$xy_{\nu+1}, \dots, xy_n$$

sono indipendenti e l'ordine di xA è $n - \nu$.

Si conclude che è

$$c'_x = n - \nu,$$

ossia, come volevasi,

$$\nu = n - c'_x = n'_x .$$

28. Avvertasi che:

Un elemento non nullo di A è un divisore dello zero quando e solo quando una almeno delle sue caratteristiche è inferiore ad n, o, ciò che è lo stesso, una almeno delle sue nullità è positiva;

e che:

I nullifici sinistri (destri) di A sono gli elementi non nulli a caratteristica sinistra (destra) eguale a zero, ossia a nullità sinistra (destra) eguale ad n.

Di queste due osservazioni la prima può enunciarsi anche nel seguente modo:

Se x è un elemento di A, perchè esista in A uno ed un solo elemento z tale che risulti

$$xz = y \qquad (\textit{oppure } zx = y)$$

essendo y un elemento di A comunque assegnato, occorre e basta che la caratteristica sinistra (destra) di x sia n. In tal caso z si dice il ***quoziente della divisione sinistra (destra)*** *di y per x.*

29. Se l'algebra A ammette una sotto-algebra semi-invariante propria sinistra (destra) B, ed è b un qualunque elemento di B ha da essere

$$bA \leq B < A \qquad (\text{oppure } Ab \leq B < A),$$

quindi b o è nullo o è un divisore sinistro (destro) dello zero. Si ha pertanto che:

Ciascun elemento non nullo di una sotto-algebra semi-invariante propria sinistra (destra) di un'algebra è per questa un divisore sinistro (destro) dello zero.

30. *Se le caratteristiche e le nullità sinistre dei due elementi x ed y di A sono c'_x, c'_y; n'_x; n'_y e la caratteristica e la nullità sinistre del prodotto xy sono c'_{xy} ed n'_{xy} si ha:*

$$c'_{xy} \leq c'_x, \quad c'_{xy} \leq c'_y, \quad c'_{xy} \geq c'_x + c'_y - n$$

$$n'_{xy} \geq n'_x, \quad n'_{xy} \geq n'_y, \quad n'_{xy} \leq n'_x + n'_y$$ (35).

Si ha

$$xy \cdot A = x \cdot yA,$$

quindi l'ordine di $xy \cdot A$ non supera l'ordine di yA, ossia è:

$$c'_{xy} \leq c'_y.$$

(35) Questa proposizione (vedi più avanti n^0 79 di questa Parte I) generalizza teoremi ben noti del SYLVESTER sulla caratteristica e la nullità del prodotto di due matrici.

Dimostrerò altrove qualche altro utile teorema sulle caratteristiche e le nullità degli elementi di un'algebra, che generalizzano osservazioni dovute al WEYR e al FROBENIUS. Vedi E. WEYR, *Zur Theorie der bilinearen Formen* [Monatshefte für Mathematik und Physik, I Jahrgang (1890), pp. 163-236], e G. FROBENIUS, *Über den Rang einer Matrix* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (1911) I, pp. 20-29, II, pp. 128-129].

Poi è

$$xy \cdot A = x \cdot y A \leq xA,$$

dunque l'ordine di $xy \cdot A$ non supera quello di xA; ossia è

$$c'_{xy} \leq c'_x .$$

Dopo ciò, essendo

$$n'_{xy} = n - c'_{xy}, \quad n'_x = n - c'_x, \quad n'_y = n - c'_y,$$

si ha pure

$$n'_{xy} \geq n'_x, \quad n'_{xy} \geq n'_y .$$

Suppongasi ora che nel sistema yA, di ordine c'_y, esistano ν, e non più, elementi indipendenti per cui x sia un nullifico sinistro.

Per un ragionamento analogo a quello sviluppato nel n^0 27, l'ordine di $xy\,A$ sarà $c'_y - \nu$; dunque

$$n - n'_{xy} = c'_y - \nu,$$

ossia

$$n'_{xy} = n'_y + \nu$$

Ma è $\nu \leq n'_x$, dunque

$$n'_{xy} \leq n'_x + n'_y ;$$

da cui si trae

$$c'_{xy} \geq c'_x + c'_y - n.$$

Dalle disuguaglianze dimostrate segue subito che:

Se la caratteristica sinistra di uno dei due elementi x ed y è uguale ad n, la caratteristica sinistra di xy è eguale a quella dell'altro.

Occorre appena avvertire che le proposizioni di questo n^0 restano valide se invece di considerare in esse caratteristiche e nullità sinistre si considerano caratteristiche e nullità destre.

31. *Perchè l'algebra A ammetta un modulo sinistro (destro) occorre e basta che esista in A un elemento con la caratteristica sinistra (destra) eguale ad n.*

Che la condizione sia necessaria è ben chiaro, perchè se, ad es., u è per A un modulo sinistro, si ha $uA = A$ ed u ha la caratteristica sinistra n.

Suppongasi inversamente che a sia un elemento di A con la caratteristica sinistra n, Esisterà (n⁰ 28) uno (ed un solo) elemento u di A per cui sia

$$au = a.$$

Di qua, detto x un elemento qualunque di A, risulta

$$a \cdot ux = a \cdot x$$

quindi (n⁰ 28)

$$ux = x;$$

il che significa appunto che u è per A un modulo sinistro.

32. *Se per A esistono moduli sinistri (destri) distinti, per A esistono pure dei nullifici sinistri (destri).*

Infatti se u' ed u'' sono, ad es., moduli sinistri distinti di A ed x è un elemento qualunque di A, da

$$u'x = x, \quad u''x = x,$$

segue

$$(u' - u'')\,x = 0,$$

e quindi $u' - u''$, che non è zero, è un nullifico sinistro di A.

33. *Se A possiede un modulo sinistro, u, e un modulo destro, v, è $u = v$.*

Infatti è

$$uv = v, \quad uv = u,$$

e quindi

$$u = v.$$

Da ciò discende che A *ammette un solo modulo sinistro e un solo modulo destro e che i due coincidono in un modulo (unico) di A.*

Cosicchè:

Un'algebra o è priva di modulo o ne possiede uno ed uno solo.

A questo proposito si osservi che:

Perchè un'algebra sia dotata di modulo occorre e basta che esistano in essa due elementi, distinti o no, aventi l'uno la caratteristica sinistra e l'altro la caratteristica destra eguale all'ordine dell'algebra.

Notisi pure che:

Se un'algebra è il prodotto diretto di due altre dotate di modulo, il prodotto dei moduli di queste è il modulo di quella.

34. L'algebra A sia dotata di modulo e questo sia u; poi sia x un elemento di A con la caratteristica sinistra eguale all'ordine n di A.

Esiste un elemento z ed un solo per cui è

$$xz = u.$$

Ma di qua si trae

$$x \cdot zx = xz \cdot x = ux = x \cdot u,$$

e per conseguenza è pure

$$zx = u. \tag{12}$$

Dalla (12) risulta poi, qualunque sia y in A,

$$y = yu = y \cdot zx = yz \cdot x\,;$$

dunque

$$A = Ax,$$

e la caratteristica destra di x è pure eguale ad n.

Si ha così il notevole teorema:

In un'algebra dotata di modulo le caratteristiche, sinistra e destra, di un elemento sono entrambe eguali o entrambe inferiori all'ordine dell'algebra; ossia le nullità, sinistra e destra, sono entrambe nulle o entrambe positive.

Cosicchè *in una tale algebra ciascun eventuale divisore dello zero è, nel tempo stesso, divisore sinistro e divisore destro dello zero.*

Sia y un divisore dello zero dell'algebra A.

Allora *è impossibile che esista un elemento z' per cui sia*

$$yz' = u \quad (\textit{oppure } z'y = u).$$

Infatti, essendo y un divisore dello zero (sinistro e destro), esiste un elemento $t \neq 0$, per cui è

$$ty = 0$$

e quindi, se esistesse un elemento z' per cui fosse $yz' = u$ sarebbe

$$t = tu = t \cdot yz' = ty \cdot z' = 0,$$

mentre è $t \neq 0$.

In un'algebra dotata di mudulo un elemento si dice *inverso* di un altro, se il prodotto di questo per quello è uguale al modulo.

In virtù di quanto è stato detto un elemento ammette inverso quando e solo quando non è nè zero, nè un divisore dello zero; e in tal caso l'inverso è unico.

Si noti poi che se z è l'inverso di x, viceversa x è l'inverso di z.

Per esprimere che z è l'inverso di x, si scrive

$$z = x^{-1}.$$

35. Gli elementi di A per cui x è modulo sinistro stanno tutti nel sistema xA, perchè se y è un tale elemento si ha

$$y = xy$$

e quindi y è contenuto in xA.

Quand'è che quegli elementi esauriscono il sistema xA?

Perchè ciò accada occorre, evidentemente, e basta che x sia modulo sinistro per ogni prodotto del tipo xz, con z in A, cioè che sia

$$x^2 z = xz,$$

o

$$(x^2 - x) z = 0,$$

con z comunque scelto in A.

Si ha pertanto che:

Il sistema xA è l'insieme degli elementi per cui x è modulo sinistro quando, e solo quando, $x^2 - x$ o è nullo o è un nullifico sinistro.

Per il sistema Ax vale una proposizione perfettamente analoga.

Se x è un automodulo si ha

$$x^2 - x = 0,$$

e i sistemi xA e Ax sono certo non nulli perchè contengono $x \cdot x = x$, dunque:

Se x è un automodulo, le algebre xA e Ax sono le sotto-algebre degli elementi per cui x è, rispettivamente, modulo sinistro o destro.

36. *Il sistema degli elementi, per cui x è modulo, è contenuto in xA, Ax, e xAx.*

Le prime due affermazioni sono ormai evidenti; l'ultima segue dall'osservare che, se y è un elemento per cui x è modulo, è

$$y = xyx$$

e quindi y è in xAx.

Se x è un automodulo, un elemento di xAx, cioè del tipo xzx, con z in A, ha per modulo x, perchè da $x^2 = x$ segue

$$x \cdot xzx = xzx \quad \text{e} \quad xzx \cdot x = xzx\,;$$

inoltre xAx, contenendo x, è certo non nullo, dunque:

Nel caso che x sia un automodulo, l'intersezione delle algebre xA e Ax è l'algebra xAx e questa è l'algebra degli elementi aventi x per modulo, o la più ampia sotto-algebra di A avente per modulo x.

§ 5.

GRADO, RANGO, EQUAZIONE MINIMA DI UN ELEMENTO O DI UN'ALGEBRA.

37. Sia x un elemento di un'algebra A, di ordine n, nel corpo Γ. Fra le potenze di x

$$x,\ x^2,\ x^3, \ldots$$

n al più sono indipendenti, quindi il sistema X di A che esse determinano, cioè il sistema d'ordine minimo che le contiene ha un ordine g per cui è

$$0 \leq g \leq n.$$

Il numero g si dirà *grado* (36) dell'elemento x, ed esso è zero quando, e solo quando, $x = 0$.

Se è $g > 0$, fra le potenze di x ne esistono g indipendenti.

Ma se

(13) $$x,\ x^2, \ldots, x^{r-1}$$

(36) Di *grado* di un elemento, tra gli autori che ho potuto consultare, parla soltanto, in senso equivalente a quello del testo, H. E. HAWKES [loc. cit. (33), pag. 321], il quale per altro non ne parla che per il caso degli elementi *pseudonulli*.

sono indipendenti, mentre

$$x, \quad x^2, \dots, x^r$$

sono dipendenti, non solo x^r, ma anche x^{r+1}, x^{r+2}, ... risultano combinazioni lineari delle potenze (13), dunque g potenze indipendenti di x sono

$$x, \quad x^2, \dots, x^g.$$

Aggiungasi che in questo caso il sistema X, cioè il sistema

$$(x, \quad x^2, \dots, x^g)$$

è evidentemente un'algebra.

Si dirà l'*algebra potenziale* ([37]) generata da x.

Come è chiaro:

Ogni algebra potenziale è un'algebra commutativa.

38. Se l'algebra A è dotata di modulo, ciascuno dei sistemi xA e Ax contiene tutte le potenze di x; quindi:

In un'algebra dotata di modulo le caratteristiche, sinistra e destra, di un elemento sono entrambe non inferiori al suo grado.

Se l'algebra A è invece priva di modulo, ciascuno dei sistemi xA e Ax contiene certo le potenze di x con esponente superiore a 1, ma non è detto che contenga x; dunque:

In un'algebra priva di modulo le caratteristiche, sinistra e destra, di un elemento, sono non inferiori al grado diminuito di 1.

39. Si supponga che A sia dotata di modulo e si indichi questo con u.

Se x è un qualunque elemento di A, e ϱ è il minimo intero positivo per cui accade che sia

$$x^\varrho + \alpha_1 x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_{\varrho-1} x + \alpha_\varrho u = 0, \tag{14}$$

con le α in Γ, si dirà che ϱ è il *rango* di x.

Come è chiaro:

Nella (14) *i numeri* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ *sono univocamente determinati.*

([37]) Denominazione dovuta a B. Peirce [loc. cit. ([19]), pag. 108].

Avvertasi inoltre che:

Se g è il grado di x si ha

$$\varrho = g \quad \textit{oppure} \quad \varrho = g + 1.$$

Suppongasi infatti che nella (14) sia $\alpha_\varrho \neq 0$.

In tal caso si ha, moltiplicando per x,

$$x^{\varrho+1} + \alpha_1 x^\varrho + \dots + \alpha_\varrho x = 0;$$

nè può essere

$$x^r + \beta_1 x^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} x = 0,$$

con le β in Γ ed $r < \varrho + 1$, perchè altrimenti o sarebbe $r = \varrho$ e nella (14) si avrebbe non già $\alpha_\varrho \neq 0$, ma $\alpha_\varrho = 0$, o sarebbe $r < \varrho$ e il rango di x dovrebbe essere non ϱ ma un intero $\leq r$.

Si conclude che nel caso attuale le potenze di x

$$x, \quad x^2, \dots, x^\varrho$$

sono indipendenti, mentre tutte le altre dipendono da esse, e quindi è

$$g = \varrho.$$

Suppongasi invece che nella (14) sia $\alpha_\varrho = 0$.

Allora è

$$x^\varrho + \alpha_1 x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_{\varrho-1} x = 0,$$

nè può essere

$$x^r + \beta_1 x^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} x = 0,$$

con le β in Γ ed $r < \varrho$, perchè altrimenti non sarebbe ϱ il rango di x; quindi è

$$g = \varrho - 1 \qquad \text{ossia} \qquad \varrho = g + 1.$$

40. Quando $\alpha_\varrho = 0$ e $\varrho > 1$, cioè $x \neq 0$, la (14) può scriversi

$$x\,[x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_{\varrho-1} u] = 0,$$

ed in questa è

$$x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_{\varrho-1} u \neq 0;$$

quindi x è un divisore dello zero (sinistro e destro, una volta che A è dotata di modulo).

Viceversa, suppongasi che x sia un divisore dello zero.

Esisterà un elemento y di A diverso da zero per cui sarà

$$xy = 0\,;$$

quindi sarà pure

$$[\beta_0\, x^r + \beta_1\, x^{r-1} + \ldots + \beta_{r-1}\, x]\, y = 0,$$

qualunque siano l'intero positivo r e i numeri β di Γ.

Ciò significa che ciascun elemento non nullo dell'algebra potenziale generata da x è in questo caso un divisore dello zero; e quindi nella (14) ha da essere $\alpha_\varrho = 0$, perchè altrimenti il modulo di A sarebbe contenuto in codesta algebra potenziale e sarebbe un divisore dello zero.

Segue che:

È $\varrho = g$, oppure $\varrho = g + 1$, secondo che x non è, od è, lo zero o un divisore dello zero.

41. Un elemento di A del tipo

$$\alpha_0\, x^h + \alpha_1\, x^{h-1} + \ldots + \alpha_{h-1}\, x \tag{15}$$

con le α in Γ, *se A non è dotata di modulo*, o del tipo

$$\alpha_0\, x^h + \alpha_1\, x^{h-1} + \ldots + \alpha_{h-1}\, x + \alpha_h\, u \tag{16}$$

se A è dotata di modulo e questo è u, si dice una *funzione razionale intera* di x.

Se ξ è una variabile, e i polinomi

$$\alpha_0\, \xi^h + \alpha_1\, \xi^{h-1} + \ldots + \alpha_{h-1}\, \xi$$

o

$$\alpha_0\, \xi^h + \alpha_1\, \xi^{h-1} + \ldots + \alpha_{h-1}\, \xi + \alpha_h$$

si indicano rispettivamente con $\psi(\xi)$ e $\chi(\xi)$, le espressioni (15) e (16) si indicheranno brevemente con

$$\psi(x) \quad \text{e} \quad \chi(x).$$

L'insieme delle funzioni razionali intere di x è un sistema di A che, se non è nullo, è un'algebra.

Se A è priva di modulo, l'ordine di questo sistema è il grado g di x, e se $g > 0$, ossia $x \neq 0$, il sistema coincide con l'algebra potenziale generata da x.

Se A è dotata di modulo, l'ordine del sistema è il rango ϱ di x, e il sistema coincide con l'algebra potenziale generata da x quando, e solo quando, x non è nè zero, nè un divisore dello zero.

Se $f_1(\xi), \ldots, f_r(\xi)$ sono polinomi nella variabile ξ coi coefficienti in Γ, e fra di essi sussiste una relazione identica del tipo

$$F[f_1(\xi), \ldots, f_r(\xi)] = 0,$$

con F funzione razionale intera degli argomenti $f_1, \ldots, f_r$, coi coefficienti in Γ, sarà pure

$$F[f_1(x), \ldots, f_r(x)] = 0,$$

dove naturalmente si suppone che se A è priva di modulo i polinomi $f_1(\xi), \ldots, f_r(\xi)$, F siano privi di termine noto.

42. Se g è il grado di x, esistono in Γ dei numeri $\beta_1, \ldots, \beta_g$, univocamente determinati, per i quali è

$$x^{g+1} + \beta_1 x^g + \ldots + \beta_g x = 0;$$

e quindi, se si pone

$$\varphi(\xi) = \xi^{g+1} + \beta_1 \xi^g + \ldots + \beta_g \xi,$$

si ha

$$\varphi(x) = 0.$$

Ciò posto, sussiste il teorema:

Se $\Phi(x)$ *è una funzione razionale intera di* x *per cui sia*

$$\Phi(x) = 0,$$

$\varphi(\xi)$ *divide* $\Phi(\xi)$ *o* $\xi\Phi(\xi)$, *secondo che* $\Phi(\xi)$ *è priva o no di termine noto.*

Si indichi con $q(\xi)$ ed $r(\xi)$ il quoziente e il resto della divisione per $\varphi(\xi)$ di $\Phi(\xi)$, o di $\xi\Phi(\xi)$, secondo che $\Phi(\xi)$ è priva o no di termine noto.

Sarà

$$\Phi(\xi) = \varphi(\xi)\, q(\xi) + r(\xi),$$

oppure

$$\xi\Phi(\xi) = \varphi(\xi)\, q(\xi) + r(\xi),$$

e in ogni caso $r(\xi)$ sarà privo di termine noto e, se non è nullo, di grado inferiore a $g+1$.

Ora è

$$\Phi(x)=\varphi(x)=0,$$

dunque è pure, in ogni caso,

$$r(x)=0\,;$$

e questo esige che il polinomio $r(\xi)$ sia a coefficienti tutti nulli.

Si conclude, come volevasi, che, a seconda del caso, $\Phi(\xi)$ o $\xi\Phi(\xi)$ è divisibile per $\varphi(\xi)$.

43. Nel teorema precedente il caso che $\Phi(\xi)$ sia dotata di termine noto non può presentarsi, se non quando l'algebra A sia dotata di modulo.

Poniamoci in questa ipotesi e supponiamo che x sia di rango ϱ.

Esisteranno in Γ dei numeri univocamente determinati $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$, per i quali sarà

$$x^\varrho+\alpha_1 x^{\varrho-1}+\ldots+\alpha_\varrho u=0,$$

dove u è, al solito, il modulo di A; cioè, posto

$$f(\xi)=\xi^\varrho+\alpha_1\xi^{\varrho-1}+\ldots+\alpha_\varrho\,,$$

sarà

$$f(x)=0.$$

Ebbene si dimostra subito, come più sopra, che:

Se $\Phi(x)$ è una funzione intera di x per cui sia

$$\Phi(x)=0\,,$$

il polinomio $\Phi(\xi)$ è divisibile per il polinomio $f(\xi)$.

44. Se l'algebra A non è dotata di modulo si dirà *equazione minima* dell'elemento x l'equazione

$$\varphi(\xi)=0\,;$$

se invece A è dotata di modulo si dirà *equazione minima* di x l'equazione

$$f(\xi)=0.$$

Quindi:

Qualunque sia l'algebra A e qualunque sia il suo elemento x, se per una funzione razionale intera di x, $\Phi(x)$, si ha

$$\Phi(x) = 0,$$

il polinomio $\Phi(\xi)$ è divisibile per il primo membro dell'equazione minima di x.

45. *Grado* dell'algebra A è il grado (non superiore all'ordine di A) degli elementi di A di grado massimo.

Se il grado e l'ordine di A sono eguali, A è un'algebra potenziale; e inversamente.

Nel caso che A sia dotata di modulo, il *rango* di A è il rango degli elementi di A di rango massimo.

Se il corpo numerico Γ in cui è definita A è infinito, e A è dotata di modulo, il rango e il grado di A coincidono.

Infatti se u è il modulo dell'algebra ed x è un suo elemento a rango massimo, è tale anche ciascun elemento della forma

$$y = x - \alpha u$$

con α numero del corpo Γ. Ora il termine noto nell'equazione minima di y è il valore per $\xi = \alpha$ del primo membro $f(\xi)$ dell'equazione minima di x, quindi, Γ essendo infinito, è sempre possibile scegliere α per modo che quel termine risulti non nullo. Dopo di che il grado e il rango di y, che sono coincidenti, dànno col loro valor comune il grado e il rango dell'algebra.

Equazione minima di un'algebra è l'equazione minima del suo elemento corrente [38].

[38] Ciò che qui, seguendo il MOLIEN [loc. cit. [24]], vien detto *rango* di un'algebra, dotata di modulo, dallo SCHEFFERS è chiamato *grado*. Vedi G. SCHEFFERS, *Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen* [Mathematische Annalen, Bd. 39 (1891), pp. 293-390].

Quella che noi chiamiamo *equazione minima* di un'algebra è la *identical equation* dello WEDDERBURN [loc. cit. [7]]; e, per il caso delle algebre definite nel corpo degli ordinari numeri complessi e dotate di modulo, è la *Ranggleichung* del MOLIEN [loc. cit. [24]], o *charakteristische Gleichung* dello SCHEFFERS (loc. or ora citato).

Quella che noi diciamo *equazione minima* di un elemento è, per il caso delle matrici, l'equazione *ridotta* del FROBENIUS [loc. cit. [6], I, § 3] o la *Grundgleichung* del WEYR [loc. cit. [35]].

La denominazione di equazione minima, che ci è parsa la più espressiva, è dovuta al ROSATI [loc. cit. [13]].

§ 6.

Alcune osservazioni sulle algebre primitive.

46. Un'algebra primitiva non ammette divisori dello zero, dunque:

In un'algebra primitiva ogni elemento non nullo ha entrambe le caratteristiche eguali all'ordine dell'algebra, e ciascun elemento non nullo ha il rango eguale al grado.

Inoltre:

Un'algebra primitiva è necessariamente dotata di modulo e non possiede sotto-algebre semi-invarianti proprie.

In particolare:

Un'algebra primitiva è necessariamente semplice.

Se x è un divisore dello zero, poniamo, sinistro di un'algebra A, o è $xA = 0$ o è xA una sotta-algebra semi-invariante sinistra propria di A; quindi:

Se un'algebra è priva di sotto-algebre semi-invarianti proprie e non è primitiva, ogni suo divisore sinistro (destro) dello zero è un suo nullifico sinistro (destro).

Questa proposizione sarà precisata più innanzi.

Avvertasi infine che:

Un'algebra primitiva commutativa può esser riguardata come un corpo numerico.

47. *Se un'algebra A, dotata di modulo, ammette una sotto algebra B, primitiva e con lo stesso suo modulo, l'ordine di B è un divisore dell'ordine di A.*

Siano n ed m gli ordini di A e B, e si supponga $n > m$, poichè altrimenti il teorema sarebbe evidente.

Giacchè B è primitiva, ogni suo elemento non nullo è dotato di inverso, in B; ma il modulo di B coincide con quello di A, dunque (n^0 34) ogni elemento non nullo di B è dotato di inverso anche in A — i due inversi coincidendo —, e le sue caratteristiche, sinistra e destra, (in B sono entrambe eguali ad m, e) in A sono entrambe eguali ad n.

Sia ora x un elemento di A non appartenente a B, e quindi non nullo.

Il sistema xB sarà dell'ordine m, giacchè altrimenti esisterebbe in B qualche elemento non nullo a caratteristica destra, in A, inferiore ad n; e sarà pure $B \cap xB = 0$, perchè se fosse

$$xb = b',$$

con b e b' in B e non nulli, sarebbe

$$x = b' \, b^{-1},$$

cioè x sarebbe, contro l'ipotesi, un elemento di B.

Ne risulta che il sistema

$$S = B + xB$$

è dell'ordine $2m$.

Ora o è $n = 2m$, cioè $S = A$, e il teorema è dimostrato; o è $n > 2m$ ed esiste in A un elemento y non appartenente ad S e quindi non nullo.

Il sistema yB sarà dell'ordine m e non avrà elementi non nulli comuni con S per una ragione analoga a quella addotta più sopra, dunque il sistema

$$B + xB + yB$$

ha l'ordine $3m$.

Ora o è $n = 3m$ e il teorema è dimostrato, o è $n > 3m$ e si proseguirà a ragionare come nei casi precedenti. Siccome il procedimento non può essere illimitatamente proseguito, si finirà sempre per imbattersi in un multiplo di m che è eguale ad n.

48. Una sotto-algebra di un'algebra primitiva è necessariamente primitiva ed ha per modulo il modulo dell'algebra; perchè altrimenti questa, come si vede subito, ammetterebbe nella differenza dei due moduli un divisore dello zero; dunque:

L'ordine di un'algebra primitiva è divisibile per quello di ogni sua sotto-algebra (39).

(39) O. C. Hazlett, *On the theory of associative division algebras* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 18 (1917), pp. 167-176], pag. 172, n° 5. Il teorema del n° 47 non è stato, per quanto io sappia, rilevato da altri.

Intanto ogni algebra ha una sotto-algebra nell'algebra generata dalle funzioni razionali intere di un suo elemento (non nullo, se l'algebra è priva di modulo), quindi:

L'ordine di un'algebra primitiva è divisibile per il rango dell'algebra e per il rango di un suo elemento qualunque.

In particolare:

Un'algebra primitiva il cui ordine sia un numero primo è un'algebra potenziale.

Infatti ogni elemento di una tale algebra, che non appartenga al sistema d'ordine 1 generato dal modulo, ha il rango eguale (al grado, e) all'ordine dell'algebra.

49. *Se un'algebra è primitiva, l'equazione minima di un suo elemento qualunque è irriducibile nel corpo numerico in cui l'algebra è definita.*

Sia x l'elemento considerato ed

$$f(\xi) = 0 \tag{17}$$

la corrispondente equazione minima.

Se fosse $f(\xi)$ riducibile nel corpo di cui parla il teorema e si avesse

$$f(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi),$$

con $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$ polinomi (di gradi non nulli) aventi per coefficienti numeri del detto corpo, sarebbe

$$0 = f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

nè potrebbe essere

$$f_1(x) = 0 \qquad \text{o} \qquad f_2(x) = 0,$$

perchè altrimenti l'equazione minima di x non sarebbe la (17); quindi $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sarebbero due divisori dello zero e l'algebra considerata non sarebbe primitiva.

§ 7.

Elementi pseudonulli ed elementi eccezionali.

50. Un elemento di un'algebra si dice *pseudonullo* ([40]), se non è nullo ma è tale qualche sua potenza.

([40]) Denominazione dovuta al Cartan [loc. cit. ([5])]. Un elemento pseudonullo è detto dagli anglo-sassoni *nilpotent*, sull'esempio di B. Peirce; dal Frobenius è detto una *radice dello zero* (*Wurzel der Null*).

Se x è pseudonullo e x^r $(r \geq 2)$ è la potenza di x con esponente minimo per cui è

$$x^r = 0,$$

le potenze di x

(18) $$x, x^2, \dots, x^{r-1}$$

sono tutte diverse da zero, ma le successive sono tutte nulle. Inoltre:

Le potenze (18) *sono a dirittura indipendenti* ([41]).

E infatti, sia se è possibile,

(19) $$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{r-1} x^{r-1} = 0,$$

con le λ numeri non tutti nulli del corpo in cui è definita l'algebra contenente x.

Poichè nessuna delle potenze (18) è nulla, le λ non nulle saranno almeno due, e quindi esisterà un intero s per cui sarà $0 < s < r-1$ e

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{s-1} = 0, \quad \lambda_s \neq 0.$$

Dopo ciò la (19) moltiplicata membro a membro per x^{r-1-s} dà

$$\lambda_s x^{r-1} = 0\,;$$

dunque, essendo $\lambda_s \neq 0$, sarebbe

$$x^{r-1} = 0.$$

Ma questo è assurdo; dunque ecc.

Dalle osservazioni fatte segue che:

L'intero $r-1$ *è il grado dell'elemento pseudonullo* x.

51. È chiaro che:

Se x *è un elemento pseudonullo di grado* $r-1$ *e* t *è un intero positivo inferiore ad* r, x^t *è pseudonullo, e se il suo grado è* $s-1$, s *è il minimo intero positivo per cui risulti* $ts \geq r$.

In particolare x^{r-1} è pseudonullo e del grado 1; quindi;

Se un'algebra possiede elementi pseudonulli, fra questi ve n'è certo di quelli che siano del grado 1.

([41]) Osservazione di B. PEIRCE [loc. cit. ([19]), pag. 114].

Un nullifico, sinistro o destro, è un elemento pseudonullo di grado 1.

Ogni elemento pseudonullo è un divisore, sinistro e destro, dello zero, e quindi in un'algebra dotata di modulo il rango di un elemento pseudonullo è il suo grado aumentato di 1.

52. *Se il prodotto xy è nullo o pseudonullo, tale è pure il prodotto yx; e i loro gradi non possono differire che di una unità.*

Sia $r-1$ $(r \geq 1)$ il grado di xy, per modo che risulta

$$(xy)^r = 0.$$

Essendo

$$(yx)^{r+1} = y \cdot (xy)^r \cdot x,$$

sarà

$$(yx)^{r+1} = 0;$$

quindi yx è nullo o pseudonullo; e se il suo grado è $s-1$, sarà

$$s \leq r+1.$$

Allo stesso modo si prova che è

$$r \leq s+1, \qquad \text{cioè} \qquad s \geq r-1,$$

dunque

$$r-1 \leq s \leq r+1,$$

e i gradi di xy e yx o coincidono o differiscono di 1.

In particolare:

Se $xy = 0$, yx è nullo o pseudonullo di grado 1.

53. *Se gli elementi non nulli di un'algebra sono tutti pseudonulli, e $x_1, x_2, \dots, x_m$ sono m elementi per i quali sia*

$$x_1 x_2 \dots x_m \neq 0, \tag{20}$$

gli m elementi

$$x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_2 \dots x_m, \tag{21}$$

sono indipendenti [42].

[42] Questo bel teorema è dovuto al FROBENIUS [loc. cit. [6], II, § 4], il quale per altro si limita al caso delle algebre definite nel corpo degli ordinari numeri complessi, sebbene la sua dimostrazione, che è quella riprodotta nel testo, sia indipendente da tale ipotesi restrittiva. Esso generalizza una utile osservazione del CARTAN [loc. cit. [5], n° 29].

Sia infatti, indicando con le α dei numeri del corpo in cui l'algebra è definita,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 + \ldots + \alpha_m x_1 x_2 \ldots x_m = 0, \tag{22}$$

e, se è possibile, non siano le α tutte nulle.

Allora, poichè in virtù della (20) nessuno degli elementi (21) è nullo, almeno due delle α saranno diverse dallo zero, e quindi esisterà un intero l per cui sarà $0 < l < m$ e inoltre

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{l-1} = 0, \qquad \alpha_l \neq 0.$$

Dopo ciò la (22), posto

$$x_1 x_2 \ldots x_l = x, \quad \sum_j^{1..m-l} \alpha_{l+j} x_{l+1} x_{l+2} \ldots x_{l+j} = -y,$$

può scriversi

$$\alpha_l x = xy; \tag{23}$$

e qui, essendo per ipotesi $\alpha_l \neq 0$ e $x \neq 0$, sarà pure $\alpha_l x \neq 0$, cioè $xy \neq 0$; cosicchè anche $y \neq 0$. Poi gli elementi x ed y saranno, per ipotesi, entrambi pseudonulli.

Giacchè y è pseudonullo, i prodotti di x per le potenze di y con esponenti abbastanza elevati sono tutti nulli; quindi, essendo $xy \neq 0$, esiste un intero positivo $m \geq 2$, per cui è, nel tempo stesso,

$$xy^{m-1} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad xy^m = 0.$$

Ora la (23), moltiplicata a destra per y^{m-1}, fornisce

$$\alpha_l xy^{m-1} = xy^m = 0,$$

dunque sarebbe

$$\alpha_l xy^{m-1} = 0,$$

con $\alpha_l \neq 0$ e $xy^{m-1} \neq 0$.

L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra il teorema.

Da esso segue che se l'algebra considerata è di ordine n, i prodotti di $n+1$ suoi elementi qualunque sono tutti necessariamente nulli, e quindi essa è pseudonulla e di indice $\leq n+1$ (d'accordo col n^0 18).

Viceversa è chiaro che se un'algebra è pseudonulla e dell'indice r, tutti i suoi elementi non nulli sono pseudonulli e ciascuno di un grado non superiore ad $r-1$, dunque:

Un'algebra pseudonulla può anche definirsi come un'algebra in cui tutti gli elementi non nulli sono pseudonulli (43).

Osservisi che se un'algebra A è pseudonulla di indice r, da

$$A^{r-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad A^{r-1} \cdot A = A \cdot A^{r-1} = A^r = 0,$$

segue che ogni elemento non nullo di A^{r-1} è un nullifico di A, ossia che:

In un'algebra pseudonulla esiste sempre una sotto-algebra di nullifici (44).

54. Un'osservazione del n⁰ 18 può essere precisata; sussiste cioè il teorema (45):

L'indice di un'algebra pseudonulla eguaglia il suo ordine aumentato di 1, quando e solo quando l'algebra è potenziale.

Infatti se l'algebra potenziale di ordine g

$$P = (x, x^2, \dots, x^g)$$

è pseudonulla, x è pseudonullo e di grado g; quindi è

$$P^g \neq 0,$$

ma

$$P^{g+1} = 0;$$

dunque P ha l'indice $g+1$.

Inversamente se l'algebra P, definita nel corpo Γ, è pseudonulla, di ordine g e indice $g+1$, ogni prodotto di $g+1$ elementi di P è nullo, ma esistono in P g elementi

$$x_1, x_2, \dots, x_g,$$

per cui è

$$x_1 x_2 \dots x_g \neq 0$$

(43) Ed è questa appunto la definizione del CARTAN delle algebre pseudonulle.

(44) Osservazione del CARTAN, il quale la dimostra, e per le algebre alle quali egli si limita, con ragionamento assai faticoso. La dimostrazione del testo è del FROBENIUS ed è stata poi ritrovata dallo WEDDERBURN.

(45) Anche questo teorema, con la solita limitazione non necessaria, è dovuto al FROBENIUS [loc. cit. (6) II, § 4].

Allora (n⁰ 53)

$$x_1, \quad x_1 x_2, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_g$$

sono g elementi indipendenti di P, e quindi ciascun elemento di P è della forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 x_2 + \ldots + \alpha_g x_1 x_2 \ldots x_g,$$

con le α in Γ.

Ora si considerino le espressioni di questa forma che dànno $x_1, x_2, \ldots, x_g$ e se ne formi il prodotto. Badando che è nullo ogni prodotto di $g+1$ o più elementi di P, il prodotto di quelle espressioni si riduce a un termine della forma αx_1^g, dunque è:

$$\alpha x_1^g = x_1 x_2 \ldots x_g \neq 0,$$

ossia

$$\alpha \neq 0, \quad x_1^g \neq 0.$$

Segue che x_1 è (pseudonullo e) del grado g, e che P è l'algebra potenziale generata da x_1.

55. *Se un'algebra A ammette sotto-algebre pseudonulle invarianti (proprie o no), fra queste ne esiste una (ed una sola) che le contiene tutte* (46).

Fra le sotto-algebre in discorso sia E una di quelle che hanno l'ordine massimo. Sarà dimostrato il teorema (in particolare, sarà provato che di tali sotto-algebre di ordine massimo non ne esiste che una) se facciamo vedere che, detta F una qualunque sotto-algebra invariante pseudonulla di A, F è contenuta in E.

Per questo, si consideri la sotto-algebra invariante di A, $E+F$ (cfr. n⁰ 16).

Posto

$$E \cap F = G,$$

per l'invarianza di E ed F in A, si ha

$$EF \leq E, \quad EF \leq F, \quad FE \leq E, \quad FE \leq F,$$

ossia

$$EF \leq G, \quad FE \leq G,$$

e quindi anche

$$E^r F \leq G, \quad F^r E \leq G,$$

qualunque sia l'intero positivo r.

(46) L'elegante dimostrazione di questo teorema esposta nel testo è dovuta allo WEDDERBURN [loc. cit. (7), pag. 89].

Segue che è

$$(E+F)^2 \leq E^2 + G + F^2,$$

$$(E+F)^3 \leq E^3 + G + F^3,$$

e, in generale,

$$(E+F)^r \leq E^r + G + F^r.$$

Siccome E ed F sono pseudonulle, per r abbastanza elevato resta

$$(E+F)^r \leq G\,;$$

ma G è zero o è un'algebra pseudonulla, dunque anche $E+F$ è pseudonulla.

Si conclude, per la definizione di E, che è

$$E+F=E\,;$$

dunque F è, come volevasi, contenuta in E.

La sotto-algebra E, propria o no, si dirà la *sotto-algebra eccezionale* (47) di A.

Un'algebra pseudonulla ha per sotto-algebra eccezionale sè stessa; un'algebra non pseudonulla è dotata di sotto-algebra eccezionale quando e solo quando è inoltre non semi semplice.

56. Un elemento non nullo dell'algebra A si dirà *eccezionale* (48) se moltiplicato, a sinistra o a destra, per un elemento qualunque di A dà un prodotto che riesce o nullo o pseudonullo. Val quanto dire che x è un elemento eccezionale di A, se è $x \neq 0$ e inoltre ciascun dei due sistemi xA e Ax o è zero o è una sotto-algebra pseudonulla di A; o, più semplicemente, in base al teorema del n^0 52, se è $x \neq 0$ e inoltre uno dei due sistemi xA e Ax è zero o una algebra pseudonulla; poichè allora anche l'altro soddisfa alla stessa condizione.

Se x è eccezionale, $x^2 = x.x$ è zero o pseudonullo, dunque:

Un elemento eccezionale è necessariamente pseudonullo.

Se l'algebra A ammette sotto-algebra eccezionale, ciascun elemento non nullo di questa è un elemento eccezionale di A.

Quest'osservazione, come si vedrà fra poco, è invertibile.

(47) Per le algebre, che egli considera, il FROBENIUS chiama *radicale* ciò che noi chiamiamo *sotto-algebra eccezionale*.

(48) Gli elementi eccezionali il FROBENIUS li chiama *Wurzelgrössen*.

57. È chiaro che:

I) *Se x è un elemento eccezionale di A ogni elemento non nullo del sistema (x) è eccezionale;*

e si vede subito che:

II) *Se x è un elemento eccezionale e z è un qualunque elemento di A, ciascuno dei prodotti xz e zx o è nullo o è eccezionale.*

Si ha infatti

$$xz.A = x.zA \leq xA,$$

quindi, per l'ipotesi fatta su x, $xz.A$ è zero o è un'algebra pseudonulla, e xz è zero o è un elemento eccezionale.

Allo stesso modo si ha

$$A.zx = Az.x \leq Ax,$$

quindi ecc.

III) *Se x è un elemento eccezionale e y, z sono elementi qualunque di A, il prodotto yxz o è nullo o appartiene alla sotto-algebra eccezionale E di A* ([49]).

Suppongasi $yxz \neq 0$, per modo che yxz, in virtù di II), sarà eccezionale. Il sistema AxA sarà diverso da zero e quindi sarà una sotto-algebra invariante di A (n⁰ 16). D'altronde AxA, sempre per II), è un'algebra pseudonulla, dunque (n⁰ 55) AxA è contenuta nella sotto-algebra eccezionale di A, e questa contiene, come volevasi, il prodotto yxz.

IV) *Se x, y sono elementi eccezionali di A, la somma $x + y$ o è nulla o è eccezionale.*

Sia $x + y \neq 0$. Essendo

$$(x + y)^3 = x^3 + xyx + yx^2 + y^2x + x^2y + xy^2 + yxy + y^3,$$

$(x + y)^3$, come somma di elementi ciascuno dei quali, per III), o è nullo o è contenuto nella sotto algebra eccezionale E di A, o sarà zero o sarà contenuto in E; quindi $(x + y)^3$ o è zero, o è eccezionale.

Segue che $x + y$ è intanto un elemento pseudonullo.

Ora sia z un elemento qualunque di A. Ciascuno dei prodotti xz e yz, per II), o è nullo o è eccezionale, dunque per il ragiona-

([49]) Se fosse già dimostrato il teorema col quale si chiude questo n⁰ basterebbe dire « yxz appartiene alla sotto-algebra eccezionale E di A ». Ma a questo punto non è ancora dimostrato che un'algebra con elementi eccezionali è dotata di sotto-algebra eccezionale.

mento fatto la somma

$$xz + yz = (x + y) z$$

è zero o pseudonulla, e $x + y$ è anche eccezionale.

Dalle osservazioni fatte segue che l'insieme dello zero e degli elementi eccezionali di A, ove esistano, è la sotto-algebra eccezionale di A; ossia si ha il teorema:

Un'algebra possiede elementi eccezionali quando, e solo quando, è dotata di sotto-algebra eccezionale; nel qual caso quegli elementi sono tutti e soli gli elementi non nulli di tale sotto-algebra.

58. Ora siamo in grado di precisare la penultima proposizione del n⁰ 46.

Un'algebra non sia primitiva e non possegga sotto-algebre semi-invarianti proprie.

In quanto non primitiva, essa conterrà dei divisori dello zero; poi ognuno di questi (n⁰ 46) sarà un suo nullifico sinistro o destro, e quindi sarà un elemento eccezionale.

Segue che l'algebra è dotata di sotto-algebra eccezionale; anzi, è addirittura pseudonulla, perchè altrimenti la sotto-algebra eccezionale sarebbe una sua sotto-algebra invariante *propria*.

Ma un elemento pseudonullo è un divisore sinistro e destro dello zero, dunque ogni tale elemento è nel caso attuale un nullifico, e l'algebra è una zero-algebra.

Intanto in una zero algebra, di ordine ≥ 2, ogni sistema di ordine positivo ma inferiore a quello dell'algebra, è una sotto algebra invariante propria; dunque si conclude che l'algebra considerata è una zero-algebra di ordine 1.

D'altronde un'algebra di ordine 1 è priva di sotto-algebre proprie, quindi:

Un'algebra che non possegga sotto-algebre semi-invarianti proprie e non sia primitiva è una zero-algebra di ordine 1 ([50]).

§ 8.

Algebre non pseudonulle. Automoduli primitivi

59. Un'algebra pseudonulla non può contenere automoduli, una volta che ogni suo elemento diverso da zero è pseudonullo; ma invece:

([50]) Ciò dimostra che l'affermazione, con la quale lo Wedderburn chiude il n⁰ 10 della sua Memoria più volte citata (pag. 114), deve essere emendata.

Ogni algebra A non pseudonulla contiene almeno un automodulo ([51]).

Sia infatti x un elemento di A, certo esistente, diverso da zero e non pseudonullo, e si considerino i sistemi

$$xA, \qquad x^3A, \qquad x^7A, \dots, x^{2^m-1}A, \dots$$

Se di questi sistemi qualcuno fosse nullo, cioè se fosse ad es.

$$x^{2^m-1}A = 0,$$

sarebbe, considerando in A l'elemento x,

$$x^{2^m} = 0,$$

e x sarebbe contro l'ipotesi pseudonullo; dunque quei sistemi sono tutti diversi da zero e sono altrettante algebre (semi-invarianti sinistre in A).

Ora è

$$xA \geqq x^3A \geqq x^7A \geqq \dots$$

e qui non è possibile che valga sempre il segno superiore, dunque esiste un intero positivo m per cui è

$$x^{2^m-1}A = x^{2^{m+1}-1}A.$$

Questa uguaglianza può scriversi

$$x^{2^m} . x^{2^m-1} A = x^{2^m-1} A ,$$

ed x^{2^m} è un elemento dell'algebra $x^{2^m-1}A$, dunque quest'ultima contiene un elemento con la caratteristica sinistra eguale al suo ordine, cioè possiede un modulo sinistro. Segue che essa, e quindi anche A, possiede un automodulo.

60. *Se un'algebra è dotata di modulo, ogni suo eventuale automodulo diverso dal modulo è un divisore (sinistro e destro) dello zero.*

([51]) Questo teorema è di B. Peirce [loc. cit. ([19]), pag. 109], ma la dimostrazione che egli ne dà non è soddisfacente. Dimostrazioni corrette dello stesso teorema o di un teorema leggermente diverso sono state date dallo Hawkes [loc. cit. ([33])], dal Taber [loc. cit. ([3])], dal Frobenius [loc. cit. ([6]), II], dallo Wedderburn [loc. cit. ([7])]. A questi è dovuto l'elegante ragionamento esposto nel testo.

Sia infatti u il modulo di un'algebra e u_1 un suo automodulo diverso da u. Posto

$$u_2 = u - u_1 ,$$

si ha $u_2 \neq 0$, e poi

$$u_1 u_2 = u_1 (u - u_1) = u_1 - u_1 = 0,$$

$$u_2 u_1 = (u - u)_1 u_1 = u_1 - u_1 = 0,$$

dunque u_1 è un divisore (sinistro e destro) dello zero.

Avvertasi che, essendo inoltre

$$u_2^2 = (u - u_1)^2 = u - u_1 = u_2 ,$$

anche u_2 è un automodulo; quindi:

Se un'algebra dotata di modulo possiede un automodulo diverso dal modulo, la differenza del modulo e dell'automodulo è ancora un automodulo; i due automoduli sono permutabili e il loro prodotto è nullo.

Notisi pure che in virtù di quanto è stato detto:

Un'algebra primitiva non possiede automoduli diversi dal modulo.

61. *Se un'algebra A possiede un solo automodulo, u_1, e per un suo elemento $x \neq 0$ non ne esiste un altro y, sì che sia*

$$xy = u_1 \qquad (\textit{oppure } yx = u_1),$$

x è un elemento eccezionale ([52])

Infatti il sistema xA (oppure Ax), o è zero, o è una sotto-algebra semi-invariante di A che, non contenendo per ipotesi u_1, è priva di automoduli e quindi (n^0 59) è pseudonulla.

In particolare (cfr. n^0 34):

Se un'algebra è dotata di modulo e non possiede automoduli diversi dal modulo, ogni suo eventuale divisore dello zero è un elemento eccezionale; quindi una tale algebra, se non è primitiva, non è neppure semi-semplice.

([52]) Questa osservazione che, salvo una maggiore precisazione apportatavi nel testo, è dovuta allo WEDDERBURN [loc. cit. ([7]), pag. 91] generalizza una proposizione di B. PEIRCE.

62. Un automodulo u_1 di un'algebra A si dice *primitivo* (53) se l'algebra

$$u_1 A u_1$$

non possiede automoduli diversi da u_1.

Un'algebra A dotata di automoduli o, ciò che è lo stesso, non pseudonulla, ammette sempre qualche automodulo primitivo.

Infatti sia u_1 un automodulo di A non primitivo e u_2 un automodulo diverso da u_1 contenuto in $u_1 A u_1$.

Per l'algebra $u_1 A u_1$, u_1 è il modulo e u_2 è un automodulo diverso dal modulo; dunque u_2 è per essa un divisore dello zero, ed è

$$u_2 A u_2 = u_2 u_1 . A . u_1 u_2 = u_2 . u_1 A u_1 . u_2 < u_1 A u_1 .$$

Se anche u_2 non è un automodulo primitivo, si dica u_3 un automodulo di $u_2 A u_2$ diverso da u_2. Sarà:

$$u_3 A u_3 < u_2 A u_2 < u_1 A u_1 .$$

Poichè l'ordine di un'algebra non può mai discendere al disotto di 1, il procedimento ricorrente indicato deve certamente arrestarsi e quindi A possiede necessariamente qualche automodulo primitivo.

§ 9.

Le algebre complementari delle sotto-algebre invarianti

63. Due elementi x, y di un'algebra A si dicono *congrui* rispetto a un suo sistema S come *modulo*, e si scrive

$$x \equiv y \qquad (\text{mod } S),$$

se la differenza $x - y$ è un elemento di S.

Com'è chiaro:

La congruenza rispetto a un sistema è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva;

e quindi rispetto a ogni suo sistema gli elementi di un'algebra possono distribuirsi in *classi*, due elementi dell'algebra risultando con-

(53) Cfr. loc. cit. (7), pag. 91. La nozione di automodulo primitivo può farsi risalire a B. Peirce [loc. cit. (19), pp. 112-113, n° 54].

grui o no rispetto al sistema secondo che appartengono alla stessa classe o a classi differenti.

Da

$$x \equiv y \quad \text{e} \quad x' \equiv y' \qquad (\text{mod } S),$$

segue evidentemente

$$x + x' \equiv y + y' \qquad (\text{mod } S),$$

e se α è un numero del corpo nel quale è definita l'algebra A, da

$$x \equiv y \qquad (\text{mod } S),$$

segue pure

$$\alpha x \equiv \alpha y \qquad (\text{mod } S).$$

Cosicchè se si denota con $[x]$ la *classe* rispetto al mod S individuata dall'elemento x, si potranno definire la classe $\alpha[x] = [x]\alpha$, *prodotto* di α per $[x]$ o di $[x]$ per α, e la classe $[x] + [x']$, *somma* delle classi $[x]$ e $[x']$, ponendo per definizione

$$\alpha[x] = [\alpha x],$$

e

$$[x] + [x'] = [x + x'].$$

64. Si determini, come è possibile, in A un sistema T così che sia

$$S + T = A \qquad \text{ed} \qquad S \frown T = 0.$$

Ciascun elemento di A, essendo somma, in un modo solo, di un elemento di S e un elemento di T, è congruo ad un elemento di T ed uno solo; dunque se si fa corrispondere a ciascuna classe di A, mod S, l'elemento di T che appartiene ad essa, si ottiene fra l'insieme di quelle classi e l'insieme T di questi elementi una corrispondenza biunivoca. Se in questa agli elementi t_1 e t_2 di T corrispondono le classi $[t_1]$ e $[t_2]$, all'elemento αt_1 di T, dove α ha il significato precedente, corrisponde la classe $\alpha[t_1]$, e all'elemento $t_1 + t_2$ di T corrisponde la classe $[t_1] + [t_2]$.

65. Si supponga ora che *S sia una sotto-algebra invariante di A. Sotto tale ipotesi, da*

$$x \equiv y \quad e \quad x' \equiv y' \qquad (\text{mod } S),$$

segue pure

$$xx' \equiv yy' \qquad (\text{mod } S).$$

Infatti è per ipotesi

$$x = y + z, \qquad x' = y' + z',$$

con z e z' elementi di S; quindi è

$$xx' = yy' + zz' + yz' + zz'.$$

Ma zy', yz' e zz', essendo S invariante in A, sono elementi di S, dunque è tale anche $zy' + yz' + zz'$ ed è

$$xx' \equiv yy' \qquad (\text{mod } S).$$

Nell'ipotesi che S sia una sotto-algebra invariante di A, può dunque definirsi il *prodotto* $[x].[x']$ delle due classi $[x]$ e $[x']$, mod S, considerate in quest'ordine, ponendo per definizione

$$[x].[x'] = [xx'];$$

e il prodotto di classi definito a questo modo godrà evidentemente della proprietà associativa e delle proprietà distributive, sinistra e destra, rispetto alla somma.

66. Raccogliendo le osservazioni fatte nei n[i] 63, 64 e 65 si ha l'importante teorema di MOLIEN ([54]):

Se B è una sotto-algebra invariante propria di un'algebra A e gli ordini di A e B sono n ed m $(n > m)$, le classi di A mod. B formano un'algebra di ordine $n - m$, quando per esse si pongano le definizioni di somma e prodotto nei modi indicati più sopra.

Quest'algebra, definita naturalmente nello stesso corpo in cui sono definite A e B, si dirà *l'algebra complementare* di B rispetto ad A, o anche l'algebra *differenza* di A e B e si denoterà con $A - B$.

Avvertasi esplicitamente che non in ogni caso esiste in A una sotto-algebra equivalente all'algebra $A - B$; ma se C è un sistema di A per il quale si abbia

$$A = B + C, \qquad B \cap C = 0,$$

([54]) Loc. cit. ([24]).

il n^0 64 indica visibilmente come basta cambiare la definizione del prodotto degli elementi di C per convertire C in un'algebra equivalente ad $A - B$.

67. Si consideri un'algebra A dotata di sotto-algebra eccezionale, E.

Se E coincide con A, cioè se A è pseudonulla, non è il caso di parlare dell'algebra $A - E$. Questa invece esiste se $E < A$, ossia se A non è pseudonulla.

A tale proposito sussiste l'importante teorema:

L'algebra complementare, rispetto a un'algebra non semi-semplice e non pseudonulla, della sotto-algebra eccezionale è, in ogni caso, priva di elementi eccezionali.

Indicato con x un elemento qualunque di A, si dica $[x]$ la classe mod E da esso individuata.

Al variare di x in A, essendo A non pseudonulla, $[x]$ percorre l'algebra complementare di E, $A - E$.

Sia ora $[y]$ un elemento di $A - E$ nullo o eccezionale.

Qualunque sia x in A, ciascuna delle classi

$$[y].[x] = [yx] \qquad \text{e} \qquad [x].[y] = [xy]$$

sarà un elemento di $A - E$ nullo o pseudonullo, quindi se r è un intero positivo abbastanza elevato sarà

$$[yx]^r = [xy]^r = [0],$$

ossia

$$[(yx)^r] = [(xy)^r] = [0].$$

Segue che $(yx)^r$ e $(xy)^r$ sono elementi (congrui a zero mod E, ossia elementi) di E; quindi ciascuno dei prodotti yx e xy è nullo o pseudonullo, ed y o è zero o è un elemento eccezionale di A. In ogni caso è y un elemento di E, ossia

$$[y] = [0].$$

Ciò significa che $A - E$ non possiede elementi eccezionali, ossia che è semi-semplice e non pseudonulla.

68. *Se B_1 e B_2 sono sotto-algebre invarianti proprie di A e $B_2 < B_1$, $A - B_2$ contiene una sotto-algebra invariante equivalente a $B_1 - B_2$* [55].

[55] Loc. cit. [7], pag. 82.

Che B_2 sia invariante propria in B_1 è evidente, una volta che $B_2 < B_1$ e B_2 è invariante a dirittura in A; quindi esiste intanto l'algebra $B_1 - B_2$ complementare di B_2 rispetto a B_1.

Elementi di B_1 congrui rispetto a B_2 sono anche elementi di A congrui rispetto a B_2; dunque le classi di B_1 mod B_2 sono contenute una per una in classi di A mod B_2, e vi è in $A - B_2$ una sotto-algebra (propria) equivalente a $B_1 - B_2$. Essa è appunto costituita dalle classi di A mod B_2 in cui si dispongono le classi di B_1 mod B_2.

Tale sotto-algebra è inoltre invariante in $A - B_2$.

Infatti sia $[x]$ un elemento qualunque di $A - B_2$, e $[y]$ un elemento di $A - B_2$ contenuto nella sotto-algebra in discorso, essendo $[x]$ e $[y]$ le classi di A mod B_2 determinate dagli elementi x ed y.

Sarà x un elemento qualunque di A, e y si potrà pensare come un elemento qualunque di B_1; quindi, attesa l'invarianza di B_1 in A, xy e yx saranno anch'essi elementi di B_1 e le classi $[x]\cdot[y]$ e $[y]\cdot[x]$ sono, al pari di $[y]$, due elementi della nostra sotto-algebra.

Inversamente:

Se B_2 è una sotto-algebra invariante propria di A e $A - B_2$ contiene una sotto-algebra invariante propria D, esiste in A una sotto-algebra invariante propria B_1, con $B_1 > B_2$, e $B_1 - B_2$ equivalente a D.

Sia $[x]$ un elemento qualunque di D, essendo $[x]$ la classe mod B_2 di A individuata dall'elemento x, e si dica B_1 la *sotto-algebra* di A riempita dagli elementi di A costituenti la classe $[x]$, al variare di questa in D.

Siccome D è sotto-algebra propria di $A - B_2$, sarà $B_1 < A$, e siccome $[0] = B_2$, sarà $B_1 > B_2$; poi, essendo D invariante in $A - B_2$, dall'essere $[x]$ un elemento qualunque di D e $[y]$ un elemento qualunque di $A - B_2$, segue che $[xy]$ e $[yx]$ sono anch'essi degli elementi di D, quindi dall'essere x un elemento di B_1 e y un elemento qualunque di A segue che anche xy e yx sono elementi di B_1. Si conclude che B_1 è invariante in A.

D'altronde è chiaro che B_2, essendo invariante in A, è tale anche in B_1, e che $B_1 - B_2$ è equivalente a D, dunque ecc.

Dai teoremi ora dimostrati discende che:

Se B_2 è una sotto algebra invariante massima di A, $A - B_2$ è semplice; e viceversa.

69. *Se B_1 e B_2 sono sotto-algebre distinte invarianti massime di A ed è $B_1 \frown B_2 = C \neq 0$, C è una sotto-algebra invariante massima di*

B_1 e B_2. Inoltre $A - B_1$ e $A - B_2$ sono rispettivamente equivalenti a $B_2 - C$ e $B_1 - C$ ([56]).

Intanto è evidente che C è invariante in A e quindi anche in B_1 e B_2, e che C è una sotto-algebra propria, tanto per B_1, quanto per B_2.

Adesso si ponga

$$B_1 = C + D_1 \qquad \text{con} \qquad C \cap D_1 = 0,$$

$$B_2 = C + D_2 \qquad \text{con} \qquad C \cap D_2 = 0,$$

per modo che sarà pure

$$D_1 \cap D_2 = 0.$$

Essendo (n⁰ 17)

$$A = B_1 + B_2,$$

sarà

$$A = B_1 + D_2 \qquad \text{e} \qquad A = B_2 + D_1 .$$

Se indichiamo con $\overline{D}_2$ e $\overline{\overline{D}}_2$ le algebre che si ottengono dal sistema D_2 riferendolo una volta al mod B_1, un'altra al mod C (cfr. n⁰ 66 in fine), le algebre $\overline{D}_2$ e $\overline{\overline{D}}_2$ sono rispettivamente equivalenti alle algebre $A - B_1$ e $B_2 - C$.

Ora siano x ed y elementi di D_2 e quindi di $\overline{D}_2$ e $\overline{\overline{D}}_2$. La somma di x ed y in $\overline{D}_2$ e $\overline{\overline{D}}_2$ è sempre l'elemento $x + y$ di D_2; il prodotto di x e y in $\overline{D}_2$ è l'elemento di D_2 congruo a xy mod B_1, in $\overline{\overline{D}}_2$ è l'elemento di D_2 congruo a xy mod C; ma questi due elementi di D_2 coincidono perchè $C < B_1$, dunque le algebre $\overline{D}_2$ e $\overline{\overline{D}}_2$ sono equivalenti e tali sono anche le algebre $A - B_1$ e $B_2 - C$.

Allo stesso modo si vede che sono equivalenti le algebre $A - B_2$ e $B_1 - C$.

Ora, giacchè B_1 e B_2 sono invarianti massime in A, $A - B_1$ e $A - B_2$ sono semplici; dunque sono tali anche $B_2 - C$ e $B_1 - C$, e C è invariante massima tanto per B_1 quanto per B_2.

Notisi che:

Se, ferme rimanendo le ipotesi fatte su B_1 e B_2, è $B_1 \cap B_2 = 0$, le algebre $A - B_1$ e $A - B_2$ sono rispettivamente equivalenti a B_2 e B_1, e B_1, B_2 sono semplici.

Come si vedrà tra poco questo caso non può presentarsi se A è *irriducibile* (cfr. nⁱ 71 e 73).

([56]) Loc. cit. ([7]), pag. 83.

§ 10.

Serie di composizione e serie di differenze.

70. Data un'algebra A sia

$$A_1 = A, \qquad A_2, \dots, A_t \qquad (t \geq 1) \tag{24}$$

una serie di algebre tali che A_t sia semplice e $A_l\,(1 < l \leq t)$ sia una sotto-algebra invariante massima di A_{l-1}.

Allora la serie (24) si dice una *serie di composizione* di A, e la serie delle algebre semplici

$$A_1 - A_2, \qquad A_2 - A_3, \dots, A_{t-1} - A_t, \qquad A_t$$

si dice una *serie di differenze* di A.

Un'algebra può avere diverse serie di composizione e quindi diverse serie di differenze, ma:

Due serie di differenze di una stessa algebra contengono lo stesso numero di algebre, e le algebre di una serie sono, a meno eventualmente dell'ordine, equivalenti alle algebre dell'altra ([57]).

Siano

$$A_1, \ A_2, \dots, A_t \tag{25}$$

e

$$A_1, \ A'_2, \dots, A'_l \tag{26}$$

due diverse serie di composizione dell'algebra $A_1 = A$.

Giacchè il teorema è ovvio per le algebre di ordine 1, esso sarà dimostrato per l'algebra A_1, quando si sia fatto vedere che esso sussiste per A_1, se sussiste per le algebre di ordine inferiore a quello di A_1.

Per questo si considerino le algebre A_2 e A'_2, che senza venir meno alla generalità si possono considerar come distinte, e si supponga in primo luogo

$$A_2 \cap A'_2 = C \neq 0.$$

Se

$$C, C_1, C_2, \dots$$

([57]) Loc. cit. [7]), pp. 83-84. I teoremi cui si riferiscono quest'ultime tre citazioni sono dovuti allo Epsteen e allo Wedderburn [loc. cit. [23])].

è una serie di composizione di C, giacchè C è invariante massima tanto in A_2, quanto in A_2' (n⁰ 69), saranno

$$(27) \qquad A_1, A_2, C, C_1, C_2, \ldots$$

e

$$(28) \qquad A_1, A_2', C, C_1, C_2, \ldots$$

due nuove serie di composizione di A_1.

Le serie di differenze corrispondenti alle serie (27) e (28) sono costituite dello stesso numero di algebre, e le algebre di una serie, a meno, in caso, dell'ordine, sono equivalenti alle algebre dell'altra (n^0 68); ma, poichè il teorema è stato ammesso per le algebre di ordine inferiore a quello di A_1 e quindi sussiste per A_2 e A_2', lo stesso sta per le serie di differenze corrispondenti a (25) e (27), a (26) e (28); dunque le serie di differenze corrispondenti alle serie (25) e (26) sono veramente costituite dello stesso numero di algebre, e quelle di una serie sono, a meno, in caso, dell'ordine, equivalenti a quelle dell'altra.

Da ciò segue naturalmente che nelle (25) e (26) è $t = l$.

Si supponga in secondo luogo che sia

$$A_2 \cap A_2' = 0.$$

Allora (n^0 69, in fine) A_2 e A_2' sono semplici, $t = l = 2$ e le serie di differenze corrispondenti alle serie (25) e (26) sono

$$A_1 - A_2, A_2 \qquad \text{e} \qquad A_1 - A_2', A_2;$$

quindi il teorema è senz'altro vero per l'osservazione che chiude il n^0 69.

Dal teorema dimostrato segue in particolare che:

Se gli ordini delle algebre costituenti i termini di una serie di composizione di un'algebra sono $n_1, n_2, \ldots, n_t$, il gruppo degli interi

$$n_1 - n_2, n_2 - n_3, n_{t-1} - n_t, n_t$$

è, a meno, in caso, dell'ordine, indipendente dalla serie.

§ 11.

Algebre riducibili [58].

71. Un'algebra A si dice *riducibile* se ammette due sotto-algebre A_1 e A_2, tali che sia

$$A_1 \cap A_2 = 0, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 = A. \tag{20}$$

Un'algebra non riducibile si chiama anche *irriducibile.*

Per esprimere che tra le algebre A_1, A_2 e A passano le relazioni (29) si dice anche che A è la *somma diretta* di A_1 e A_2.

Evidentemente dire che A è la somma diretta di A_1 e A_2 equivale a dire che A è la somma di A_1 e A_2, che l'ordine di A è la somma degli ordini di A_1 e A_2, e che

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0.$$

Più generalmente, si dirà che A è la *somma diretta* delle sue sotto-algebre $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \geq 2$), se A è la somma di $A_1, A_2, \ldots A_k$, se l'ordine di A è la somma degli ordini di $A_1, A_2, \ldots, A_k$ e se infine è nullo il prodotto di due qualunque delle algebre $A_1, A_2, \ldots A_k$, che siano distinte.

In tal caso si verifica subito che se B è la somma di t delle algebre $A_1, \ldots, A_k$ ($t < k$) e B' è la somma delle rimanenti $k - t$, B e B' sono due *algebre* aventi A per somma diretta.

Così è pur chiaro che se A è la somma diretta di A_1 e A_2, e A_1, per es., è la somma diretta di A_1' e A_1'', A è pure la somma diretta di A_1', A_1'' e A_2; quindi:

Un'algebra riducibile è sempre decomponibile nella somma diretta di due o più algebre irriducibili.

72. *Se A è la somma diretta di A_1 e A_2, A_1 e A_2 sono sotto-algebre invarianti proprie di A.*

(58) La nozione di *algebra riducibile* è dovuta allo Study ed allo Scheffers [vedi: G. Scheffers, loc. cit. (38), pag. 294]. Essa è meno comprensiva della nozione di *algebra mista* (*mixed algebra*) introdotta da B. Peirce [loc. cit. (19), pag. 100], a proposito della quale giova consultare la Memoria dello Hawkes citata in (19), pag. 91.

Infatti, è, per es.,

$$A_1 < A\ ;\ A_1 A = A_1 (A_1 + A_2) = A_1^2 \leq A_1\ ;$$

$$A A_1 = (A_1 + A_2) A_1 = A_1^2 \leq A_1\,.$$

Segue che:
Un'algebra semplice è necessariamente irriducibile.

73. *Se A_1 e A_2 sono sotto-algebre invarianti di A ed è*

$$A_1 \cap A_2 = 0, \qquad A_1 + A_2 = A$$

A è la somma diretta di A_1 e A_2.
Dall'invarianza di A_1 e A_2 in A si trae (cfr. n⁰ 55):

$$A_1 A_2 \leq A_1 \cap A_2\,, \quad A_2 A_1 \leq A_1 \cap A_2\,;$$

quindi è, per l'ipotesi,

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0,$$

ed A è la somma diretta di A_1 e A_2.
Ricordando un'osservazione precedente (n⁰ 17) segue che:
Se A_1 e A_2 sono sotto-algebre invarianti massime distinte di A ed è $A_1 \cap A_2 = 0$, A è la somma diretta di A_1 e A_2.

74. Sia A la somma diretta di A_1 e A_2, e detti x ed y degli elementi di A sia

$$x = x_1 + x_2\,, \quad y = y_1 + y_2\,,$$

con x_1, y_1 in A_1 e x_2, y_2 in A_2. Essendo $A_1 \cap A_2 = 0, x_1$ e x_2 sono univocamente determinati da x, e y_1, y_2 da y.
Giacchè $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$ si ha

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2\,; \tag{30}$$

quindi è

$$xy = y,$$

quando e solo quando sia:

$$x_1 y_1 = y_1\,, \quad x_2 y_2 = y_2\,.$$

Cosicchè:

a) *Se x è per y un modulo sinistro o destro o un modulo senz'altro, tale è x_1 per y_1, x_2 per y_2; e viceversa.*

In particolare:

b) *Se A è dotata di modulo, anche A_1 e A_2 sono dotate di modulo, e viceversa. Inoltre il modulo di A è la somma dei moduli di A_1 e A_2.*

Un'osservazione analoga alla *a)* sta pure pei nullifici, sinistri o destri, o nullifici senz'altro.

Se r è un qualsivoglia intero positivo si ha

$$x^r = x_1^r + x_2^r, \tag{31}$$

quindi:

c) *Se x è pseudonullo, x_1 e x_2 sono entrambi pseudonulli o sono uno nullo e l'altro pseudonullo; e viceversa. Inoltre il grado di x è il maggiore dei gradi di x_1 e x_2.*

Da *c)* e dalla (30) segue pure che:

d) *L'elemento x è eccezionale quando e solo quando x_1 e x_2 sono entrambi eccezionali (per A_1 e A_2 o, ciò che è lo stesso per A), o sono uno nullo e l'altro eccezionale;*

quindi:

e) *L'algebra A è dotata di sotto-algebra eccezionale quando e solo quando è tale una almeno delle algebre A_1 e A_2; e in caso affermativo la sotto algebra eccezionale di A, a seconda delle ipotesi, o coincide con la sotto-algebra eccezionale di A_1 o A_2, o è la somma diretta delle sotto algebre eccezionali di A_1 e A_2.*

Da *b)* e dalla (31) si deduce la seguente generalizzazione della (31):

f) *Se $f(x)$ è una qualsivoglia funzione intera di x si ha*

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2),$$

e qui è $f(x) = 0$, quando e solo quando è $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Da

$$xA = x(A_1 + A_2) = xA_1 + xA_2 = (x_1 + x_2)A_1 +$$
$$+ (x_1 + x_2)A_2 = x_1 A_1 + x_2 A_2$$

e dalla relazione analoga

$$Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2,$$

badando che $x_1 A_1 \frown x_2 A_2$ e $A_1 x_1 \frown A_2 x_2$ sono eguali a zero, si trae che:

g) *La caratteristica o la nullità, sinistra o destra, di x in A è la somma dei caratteri analoghi di x_1 in A_1 e x_2 in A_2.*

A questo proposito sarà bene avvertire che le caratteristiche, per es., di x_1 in A_1, sono anche le caratteristiche di x_1 in A; ma ciò non è vero per le nullità.

La (31) dà pure che:

h) *L'elemento x è un automodulo, quando e solo quando x_1 e x_2 sono automoduli o sono uno nullo e l'altro un automodulo.*

Avvertasi che se x è un automodulo, risultando $x_1^2 = x_1$ e $x_2^2 = x_2$, si ha

$$x x_1 = (x_1 + x_2) x_1 = x_1 , \qquad x_1 x = x_1 (x_1 + x_2) = x_1 ;$$

e analogamente

$$x x_2 = x_2 x = x_2 :$$

quindi l'algebra $x A x$ contiene x_1 e x_2.

Segue che se x è primitivo, dei due elementi x_1 e x_2 uno è nullo e l'altro è eguale ad x ed è un automodulo primitivo, oltre che per A, per quella delle algebre A_1 e A_2 che lo contiene. Intanto un automodulo primitivo di A_1 o A_2 è tale anche per A, dunque:

i) *Gli eventuali automoduli primitivi di A sono tutti e soli gli automoduli primitivi di A_1 e A_2.*

Suppongasi che, in conformità di *b*), A, A_1 e A_2 siano tutte e tre dotate di modulo e che i loro moduli siano u, u_1, u_2. Essendo $u_2 A_1 u_2 = 0$, è

$$A_2 = u_2 A_2 u_2 = u_2 A u_2 = (u - u_1) A (u - u_1),$$

quindi, *nel caso attuale, A_2 è individuata da A ed A_1;* e analogamente *A_1 è individuata da A ed A_2.*

75. *Se A_1 è una sotto-algebra invariante propria di A e tanto A quanto A_1 sono dotate di modulo, A è la somma diretta di A_1 e di un'algebra ulteriore (dotata di modulo e unica).*

Siano u ed u_1 i moduli di A ed A_1. Poichè A_1 non può contenere u (n^0 29), sarà $u_1 \neq u$ e quindi, posto $u = u_1 + u_2$, u_2 sarà (n^0 60) un automodulo e sarà

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0.$$

Di qua si trae

$$u_2 A_1 = u_2 \cdot u_1 A_1 = u_2 u_1 \cdot A_1 = 0,$$

$$A_1 u_2 = 0,$$

e poichè A_1 è invariante in A sarà pure

$$u_1 A u_2 = u_1 A \cdot u_2 \leq A_1 u_2 = 0,$$

$$u_2 A u_1 = 0.$$

Essendo

$$A = uAu = (u_1 + u_2) A (u_1 + u_2),$$

non può essere (cfr. n^0 13)

$$(u_1 + u_2) A (u_1 + u_2) < u_1 Au_1 + u_2 Au_1 + u_1 Au_2 + u_2 Au_2 ,$$

quindi è

$$A = (u_1 + u_2) A (u_1 + u_2) = u_1 Au_1 + u_2 Au_1 + u_1 Au_2 +$$

$$+ u_2 Au_2 = u_1 Au_1 + u_2 Au_2 .$$

Ora $u_1 Au_1$ è la sotto-algebra degli elementi per cui u_1 è modulo (n^0 36), dunque

$$A_1 \leq u_1 Au_1 ,$$

ma, essendo A_1 invariante in A, è pure

$$A_1 \geq u_1 Au_1 ,$$

dunque

$$A_1 = u_1 Au_1 ,$$

e si ha

$$A = A_1 + u_2 Au_2 ,$$

dove A_1 ha per modulo u_1 e $u_2 Au_2$ ha per modulo u_2.

Ora A_1 e $u_2 Au_2$ non hanno elementi comuni diversi da zero, perchè altrimenti un tale elemento dovrebbe avere nel tempo stesso in u_1 un modulo e un nullifico, ed è

$$A_1 \cdot u_2 Au_2 = A_1 u_1 \cdot u_2 Au_2 = A_1 \cdot u_1 u_2 \cdot Au_2 = 0$$

$$u_2 Au_2 \cdot A_1 = 0,$$

dunque A è la somma diretta di A_1 e $u_2 Au_2$.

Dal teorema dimostrato si deduce che:

Se l'algebra A è dotata di modulo ed u_1 è un suo automodulo, diverso dal modulo, per il quale sia $u_1 A = A u_1$, A è riducibile.

Infatti posto $A_1 = u_1 A = A u_1$, A_1 è invariante (propria) in A (n⁰ 16), e, coincidendo con $u_1 A u_1$ (n⁰ 36), ha per modulo u_1.

Avvertasi che essendo A, nelle ipotesi fatte, la somma diretta di A_1 e un'algebra ulteriore, è non solo $u_1 A = A u_1$, ma, addirittura, $u_1 x = x u_1$, per *ciascun* elemento x di A, e quindi l'ultima proposizione dimostrata è solo apparentemente più generale di quest'altra:

Se l'algebra A è dotata di modulo e contiene un automodulo, diverso dal modulo e permutabile con ciascun suo elemento, A è riducibile.

Viceversa è chiaro che:

Se un'algebra dotata di modulo è riducibile, essa contiene automoduli, diversi dal modulo, e permutabili con ciascun suo elemento.

In queste due proposizioni consiste il così detto *criterio di riducibilità* dello SCHEFFERS.

76. *Sia A dotata di modulo e sia*

$$A = A_1 + A_2,$$

essendo A_1 e A_2 dei sistemi diversi da zero, per i quali sia

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0.$$

Basta questo per concludere che A è riducibile.

Se non è $A_1 \cap A_2 = 0$ si ponga

$$A_1 \cap A_2 = C \quad \text{e} \quad A_2 = C + A_2' \quad \text{con} \quad C \cap A_2' = 0.$$

Sarà

$$A = A_1 + A_2',$$

con

$$A_1 \cap A_2' = 0, \qquad A_1 A_2' = A_2' A_1 = 0.$$

Se fosse $A_2' = 0$, sarebbe $A_2 = C$, $A_2 \leq A_1$, $A = A_1$ e $AA_2 = 0$ con $A_2 \neq 0$, il che è impossibile una volta che A è dotata di modulo e quindi AA_2 contiene A_2; dunque sarà dimostrato che A è riducibile, se faremo vedere che A_1 e A_2' sono algebre.

Per questo sia u il modulo di A e sia

$$u = u_1 + u'_2$$

con u_1 in A_1 e u'_2 in A'_2.

Badando che $A_1 A'_2 = A'_2 A_1 = 0$, che $u_1 = u - u'_2$ e che $u'_2 = u - u_1$, si verifica subito che u_1 è modulo per ciascun elemento di A_1 e u'_2 è modulo per ciascun elemento di A'_2. Poi, siccome u_1 non può esser modulo per alcun elemento di A fuori di A_1, perchè da

$$x = x_1 + x'_2,$$

con x_1 in A_1 e x'_2 in A'_2, segue

$$u_1\, x = u_1\, x_1 = x_1\,,$$

ed è $x_1 \neq x$ se $x'_2 \neq 0$, si conclude che A_1 è l'*algebra* degli elementi di A aventi per modulo u_1.

Allo stesso modo si vede che A'_2 è l'algebra degli elementi di A aventi per modulo u'_2.

77. *Un'algebra riducibile dotata di modulo è decomponibile in un modo solo nella somma diretta di due o più algebre irriducibili* (59).

Sia A un'algebra riducibile dotata di modulo, e sia A la somma diretta tanto delle algebre irriducibili

$$A_1\,,\ A_2\,, \dots,\ A_t\,, \tag{32}$$

quanto delle algebre irriducibili

$$A'_1\,,\ A'_2\,, \dots,\ A'_h\,; \tag{33}$$

le quali, naturalmente [n° 74, b)] risulteranno tutte dotate di modulo.

(59) Questo teorema è dovuto allo SCHEFFERS, ma la dimostrazione esposta nel testo è dello WEDDERBURN. Lo SCHEFFERS lo enunciò per la prima volta nella Memoria citata in (38); ma in forma non del tutto corretta, come gli fu fatto rilevare dallo HÖLDER. Vi ritornò nella sua Nota posteriore: *Über die Reducibilität complexer Zahlensysteme* [Mathematische Annalen, Bd. 41 (1893), pp. 601-604]; quivi il teorema è formulato esattamente ma la dimostrazione non è esente da appunti [cfr. DICKSON, loc. cit. (9), pag. 73]. Avvertasi poi che lo SCHEFFERS considerava soltanto algebre nel corpo degli ordinari numeri complessi.

Dico che è $h = t$ e che le algebre (33) sono, a meno eventualmente dell'ordine, le algebre (32).

Siccome A'_j $(1 \leq j \leq h)$ è invariante in A (cfr. n^0 72), è

$$AA'_j A \leq A'_j \,;$$

ma A è dotata di modulo, dunque

$$AA'_j A = A'_j \,.$$

Di qua, badando che

$$A = \sum_r^{1\ldots t} A_r \,,$$

si trae

$$A'_j = \sum_{r,s}^{1\ldots t} A_r A'_j A_s.$$

Il sistema $A_r A'_j A_s$, per l'invarianza di A_r e A_s in A, sta in A_r e in A_s; ma è, per $r \neq s$, $A_r \cap A_s = 0$, quindi, per $r \neq s$, si ha:

$$A_r A'_j A_s = 0 \,;$$

e resta

$$A'_j = \sum_r^{1\ldots t} A_r A'_j A_r \,.$$

I sistemi $A_r A'_j A_r$ $(r = 1, \ldots, t)$, che non son nulli, sono algebre, giacchè per l'invarianza di A'_j in A è

$$(A_r A'_j A_r)^2 = A_r \,.\, A'_j A_r^2 A'_j \,.\, A_r \leq A_r A'_j A_r \,;$$

ed è, per $r \neq s$,

$$A_r A'_j A_r \,.\, A_s A'_j A_s = A_r A'_j \,.\, A_r A_s \,.\, A'_j A_s = 0 \,;$$

quindi uno solo dei sistemi $A_r A'_j A_r$ è diverso da zero, perchè altrimenti (n^0 76) A'_j sarebbe riducibile.

Supposto che esso sia quello per cui $r = r_j$, si ha

$$A'_j = A_{r_j} A'_j A_{r_j} \,.$$

Intanto, per l'invarianza di A_{r_j} in A,

$$A_{r_j} A'_j A_{r_j} \leq A_{r_j} \,,$$

dunque

$$A_j' \leq A_{r_j}.$$

Siccome A_{r_j} è irriducibile, per il teorema del n⁰ 75, questa relazione non può sussistere se non a patto che sia $A_j' = A_{r_j}$; e quindi, badando che le algebre A_j', al pari delle algebre A_r, sono tutte distinte fra loro, si conclude che le algebre (33) sono, a meno eventualmente dell'ordine, le algebre (32).

§ 12.

Algebre regolari.

78. Un'algebra, il cui ordine sia un quadrato perfetto p^2, si dirà *regolare* (60), se è possibile scegliere in essa p^2 elementi indipendenti $a_{j,l}\,(j\,,\,l = 1\,,\,\dots\,,\,p)$ per modo che sia

$$(34) \qquad a_{j,l}\,a_{h,k} = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad l \neq h\,, \\ a_{j,k} & \text{se} \quad l = h. \end{cases}$$

Un'algebra d'ordine 1 è regolare quando e solo quando è dotata di modulo, nel qual caso è anche primitiva.

79. Fissato un corpo numerico Γ, si consideri la totalità delle matrici d'ordine p con gli elementi in Γ.

Siano

$$x = \|\,\xi_{j,l}\,\|\,, \qquad y = \|\,\eta_{j,l}\,\|$$

due qualunque di coteste matrici, e sia α un qualunque numero di Γ.

Se, al modo che usa nel così detto calcolo delle matrici, si pone

$$\alpha x = \|\,\alpha\xi_{j,l}\,\|\,,$$

$$x + y = \|\,\xi_{j,l}\,\| + \|\,\eta_{j,l}\,\|\,,$$

$$xy = \|\,\zeta_{j,l}\,\|$$

(60) Le algebre *regolari* del testo sono le *quadrate algebras* del Clifford, i *p^2-ioni* del Sylvester e del Cartan, le *quadrate* o *simple matric algebras* dello Wedderburn, le *matric algebras* del Dickson, le *primitive algebras* dello Hawkes. La denominazione del testo è stata suggerita dal teorema del n. 80.

dove

$$\zeta_{j,l} = \sum_{h}^{1\dots p} \xi_{j,h}\, \eta_{h,l}\,,$$

e si indica con $a_{j,l}$ la matrice d'ordine p di cui tutti gli elementi sono nulli, tranne quello che appartiene alla riga j^{ma} ed alla colonna l^{ma} e che è uguale ad 1, si riconosce subito che le matrici considerate costituiscono un'algebra di ordine p^2, che è regolare, perchè per essa le $a_{j,l}$ costituiscono un gruppo di unità soddisfacenti appunto alle condizioni (34).

Tale algebra si dirà *l'algebra delle matrici d'ordine* p in Γ. Èssa è evidentemente dotata di modulo e questo è dato dalla *matrice identica* d'ordine p, cioè da:

$$a_{1,1} + \dots + a_{p,p}\,.$$

Dopo ciò è chiaro che:

Le algebre regolari in Γ d'ordine p^2 sono tutte e sole le algebre equivalenti a quella delle matrici d'ordine p in Γ;

per modo che:

Ogni algebra regolare è dotata di modulo.

80. Sia A l'algebra considerata nel n^0 prec., e sia

$$x = \| \xi_{j,l} \|$$

un suo elemento.

Siano inoltre c ed n la caratteristica e la nullità di x, *nel senso della teoria delle matrici*, per modo che sarà $c + n = p$.

Vogliamo calcolare le caratteristiche e le nullità, sinistra e destra, di x *concepito come elemento dell'algebra* A.

Mantenuto per $a_{j,l}$ il significato del n^0 prec., si osservi che il prodotto

$$xa_{j,l}$$

è la matrice che ha le colonne tutte nulle, tranne la colonna l^{ma} che è uguale alla colonna j^{ma} della matrice x.

Siccome la caratteristica di x è c, c colonne di x sono indipendenti e le rimanenti dipendono da esse; quindi, se si suppone che codeste colonne siano quelle coi n$^{\text{i}}$ d'ordine $1, 2, \dots, c$, i prodotti

$$\begin{array}{c} xa_{1,1}\,,\quad xa_{1,2}\,, \dots, xa_{1,p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xa_{c,1}\,,\quad xa_{c,2}\,, \dots, xa_{c,p} \end{array}$$

sono indipendenti, mentre (se $c < p$) tutti gli altri prodotti dello stesso tipo dipendono da essi, perchè ad es. $xa_{c+1,1}$ è una combinazione lineare di

$$xa_{1,1}\,,\ xa_{2,1}\,,\ \ldots\,,\ xa_{c,1}\,.$$

Segue che :

La caratteristica sinistra di x è

$$pc$$

e la nullità sinistra di x è

$$p^2 - pc = p\,(p - c) = pn\,.$$

Allo stesso modo, badando che il prodotto

$$a_{j,l}\,x$$

è la matrice avente le righe tutte nulle tranne la riga j^{ma} che è uguale alla riga l^{ma} di x, si riconosce che :

La caratteristica e la nullità destre di x sono date anch'esse da pc e pn;

quindi :

In un'algebra regolare le caratteristiche (le nullità), sinistra e destra, di un elemento qualsiasi sono uguali.

81. *Un'algebra regolare è semplice.*

Sia A un'algebra regolare d'ordine p^2 nel corpo Γ, con le unità $a_{j,l}$ soddisfacenti alle relazioni (34).

Sia B una sotto-algebra invariante di A e sia

$$x = \sum_{j,l}^{1\ldots p} \alpha_{j,l}\, a_{j,l}$$

un elemento non nullo di B, le $\alpha_{j,l}$ essendo numeri (non tutti nulli) di Γ.

Si ha

$$a_{g,i}\,x a_{h,k} = \sum_{j,l}^{1\ldots p} \alpha_{j,l}\, a_{g,i}\, a_{j,l}\, a_{h,k} = \alpha_{i,h}\, a_{g,i}\, a_{i,h}\, a_{h,k} = \alpha_{i,h}\, a_{g,k}\,,$$

ed essendo B invariante in A, $a_{g,i}\,xa_{h,k}$ è un elemento di B, dunque B contiene l'elemento

$$\alpha_{i,h}\, a_{g,k}\,.$$

Ora, per l'ipotesi fatta su x, si possono scegliere i ed h in modo che sia $\alpha_{i,h} \neq 0$; dunque B contiene i p^2 elementi $a_{g,k}$ e coincide con A.

Si conclude, come volevasi, che A è semplice.

82. *Un'algebra, che sia il prodotto diretto di due algebre regolari, è regolare* (61).

L'algebra C sia il prodotto diretto delle due algebre regolari A e B degli ordini p^2 e q^2, con le unità

$$a_{j,l} \text{ e } b_{r,s} \qquad (j, l = 1, \dots, p\,;\ r, s = 1, \dots, q),$$

le $a_{j,l}$ soddisfacendo alle relazioni (34) e le $b_{r,s}$ alle relazioni analoghe

$$b_{r,s}\, b_{t,v} = \begin{cases} 0, & \text{se } s \neq t, \\ b_{r,v}\,, & \text{se } s = t. \end{cases}$$

Indichiamo con $\varphi(\lambda, q)$ il quoziente intero della divisione dell'intero λ per q, aumentato di 1, se λ non è divisibile per q, o tale quoziente, se λ è multiplo di q; e con $\psi(\lambda, q)$ il resto della divisione di λ per q, se λ non è divisibile per q, o il numero q, se λ è multiplo di q. Inoltre poniamo

$$c_{\lambda,\mu} = a_{\varphi(\lambda,q),\varphi(\mu,q)}\, b_{\psi(\lambda,q),\psi(\mu,q)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, pq).$$

I p^2q^2 elementi $c_{\lambda,\mu}$ sono altrettanti elementi indipendenti di C, perchè essi sono i prodotti di ciascuna delle $a_{j,l}$ per ciascuna delle $b_{r,s}$, quindi costituiscono un gruppo di unità di C.

Ora è, per la permutabilità delle $a_{j,l}$ con le $b_{r,s}$,

$$c_{\lambda,\mu}\, c_{\varrho,\sigma} = a_{\varphi(\lambda,q),\varphi(\mu,q)}\, a_{\varphi(\varrho,q),\varphi(\sigma,q)}\, b_{\psi(\lambda,q),\psi(\mu,q)}\, b_{\psi(\varrho,q),\psi(\sigma,q)}\,,$$

e se $\mu \neq \varrho$ non può essere, nel tempo stesso,

$$\varphi(\mu, q) = \varphi(\varrho, q), \quad \psi(\mu, q) = \psi(\varrho, q);$$

(61) Questo teorema che talvolta viene attribuito allo STUDY [vedi per es. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, tome I, vol. I, fasc. 3, pag. 436, annotazione (224)] è del TABER. Veggasi H. TABER, *On the Theory of Matrices* [American Journal of Mathematics, vol. XII (1889), pp. 337-396], § 24, pag. 391 e seg.

dunque

$$c_{\lambda,\mu}\, c_{\varrho,\sigma} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mu \neq \varrho, \\ c_{\lambda,\sigma} & \text{se } \mu = \varrho, \end{cases}$$

e l'algebra C è regolare.

83. *In un'algebra regolare gli elementi, ciascun dei quali è permutabile con ogni elemento dell'algebra, sono i prodotti del modulo per i numeri del corpo in cui è definita l'algebra.*

L'algebra, di cui parla il teorema, sia l'algebra A, nel corpo Γ, considerata nel n⁰ 81, il cui modulo è

$$u = a_{1,1} + \dots + a_{p,p}\,.$$

Poi sia

$$x = \sum_{j,l}^{1\dots p} \alpha_{j,l}\, a_{j,l}\,,$$

con le $\alpha_{j,l}$ in Γ, un elemento di A.

Perchè x sia permutabile con ogni elemento di A occorre e basta che sia

$$x a_{h,k} = a_{h,k}\, x,$$

qualunque siano gli indici h e k.

Ma, per le (34),

$$x a_{h,k} = \sum_{j}^{1\dots p} \alpha_{j,h}\, a_{j,k}\,,$$

$$a_{h,k}\, x = \sum_{l}^{1\dots p} \alpha_{k,l}\, a_{h,l}\,,$$

dunque, perchè x sia permutabile con ciascun elemento di A, occorre e basta che sia

$$\alpha_{j,l} = 0 \text{ per } j \neq l \text{ e } \alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \dots = \alpha_{p,p}\,;$$

cioè che x sia, come volevasi, della forma

$$\alpha_{1,1}\,(a_{1,1} + \dots + a_{p,p}) = \alpha_{1,1}\, u.$$

84. *Se l'algebra C è il prodotto diretto di un'algebra primitiva B e un'algebra regolare A, C è semplice; e se un elemento di C è*

permutabile con ciascun elemento di C, esso è il prodotto di un elemento di B per il modulo di A [62].

L'algebra A, col modulo

$$u = a_{1,1} + \dots + a_{p,p},$$

sia quella considerata nel n⁰ 81; poi sia v il modulo di B.

Si dica inoltre D una sotto-algebra invariante di C e d un elemento di D, diverso da zero, per il quale si abbia (cfr. n⁰ 20)

$$d = \sum_{j,l}^{1\dots p} b_{j,l}\, a_{j,l},$$

essendo le $b_{j,l}$ opportuni elementi di B.

Giacchè D è invariante in C, D contiene il prodotto

$$a_{g,i}\, v \cdot d \cdot v a_{h,k} = \sum_{j,l}^{1\dots p} b_{j,l}\; a_{g,i}\, a_{j,l}\, a_{h,k} = b_{i,h}\, a_{g,k},$$

qualunque siano gli indici g, k; quindi è in D il prodotto $b_{i,h}\, A$.

Essendo $d \neq 0$, i ed h si possono supporre tali che sia $b_{i,h} \neq 0$; dopo di che, essendo B primitiva, se b è un qualunque elemento di B, ne esiste un altro b' per cui è

$$b_{i,h}\, b' = b.$$

Ora D, contenendo $b_{i,h}\, A$ ed essendo invariante in C, contiene pure

$$b_{i,h}\, A \cdot b'\, u = b_{i,h}\, b'\, A = b\, A,$$

quindi, una volta che b è un qualunque elemento di B, D contiene a dirittura il prodotto BA, ossia coincide con C.

Con questo la prima parte del teorema è dimostrata.

Adesso sia c un elemento di C permutabile con ogni elemento di C e sia

$$c = \sum_{j,l}^{1\dots p} b'_{j,l}\, a_{j,l},$$

le $b'_{j,l}$ essendo opportuni elementi di B.

[62]) WEDDERBURN, loc. cit. [7]) pag. 99. Occorre appena avvertire che questo teorema generalizza quelli dei nⁱ 81 e 83.

Sarà, qualunque siano gli indici h e k,

$$c \cdot a_{h,k} v = a_{h,k} v \cdot c\,;$$

ma

$$c \cdot a_{h,k} v = \sum_{j,l}^{1\dots p} b'_{j,l}\, a_{j,l}\, a_{h,k} = \sum_{j}^{1\dots p} b'_{j,h}\, a_{j,k}$$

e, analogamente,

$$a_{h,k} v \cdot c = \sum_{l}^{1\dots p} b'_{k,l}\, a_{h,l}\,,$$

dunque le $b'_{j,l}$ con indici diseguali sono tutte nulle e per le altre si ha

$$b'_{1,1} = b'_{2,2} = \dots = b'_{p,p}\,.$$

Si deduce, come volevasi, che è

$$c = b'_{1,1}\,(a_{1,1} + \dots + a_{p,p}) = b'_{1,1}\, u.$$

Avvertasi che se, e soltanto se, B è commutativa, ogni elemento di C che appartenga alla sotto-algebra Bu di C è permutabile con ciascun elemento di C.

§ 13.

Automoduli principali.

85. Sia A un'algebra non pseudonulla ed u_1 un suo automodulo.

La sotto-algebra degli elementi di A aventi in u_1 un modulo sinistro è data (n^0 35) da $u_1 A$, e l'ordine di questa è la caratteristica sinistra di u_1.

Se è S' il sistema degli elementi di A aventi in u_1 un nullifico sinistro, l'ordine di S' è la nullità sinistra di u_1.

Intanto, è evidentemente,

$$u_1 A \cap S' = 0,$$

dunque $u_1 A + S'$ ha l'ordine di A ed è

$$A = u_1 A + S'. \tag{35}$$

Allo stesso modo si trova, indicando con D' il sistema degli elementi di A aventi in u_1 un nullifico destro,

$$A = A u_1 + D'. \tag{36}$$

Per la sua stessa definizione, o per il n^0 25, il sistema S' contiene il sistema $S' u_1$, il quale è l'insieme degli elementi di S' aventi in u_1 un modulo destro, cioè degli elementi di A aventi in u_1 un nullifico sinistro e un modulo destro; e se N' è l'insieme degli elementi di S' che hanno in u_1 un nullifico destro, cioè degli elementi di A per cui u_1 è un nullifico, gli ordini di $S'u_1$ ed N' hanno per somma l'ordine di S' (cfr. il ragionamento del n^0 27).

Intanto è, evidentemente,

$$S' u_1 \cap N' = 0,$$

dunque:

$$S' = S' u_1 + N'. \tag{37}$$

Allo stesso modo si prova che è

$$D' = u_1 D' + N'. \tag{38}$$

Dalla (35), moltiplicando per u_1 a destra, si ricava

$$A u_1 = u_1 A u_1 + S' u_1 ;$$

quindi la (36) diventa

$$A = u_1 A u_1 + S' u_1 + D',$$

ossia per le (38),

$$A = u_1 A u_1 + u_1 D' + S' u_1 + N', \tag{39}$$

dove le intersezioni dei sistemi che compariscono al secondo membro considerati a due a due sono tutte nulle.

Il bel teorema espresso dalla (39) è dovuto a B. Peirce ([63]) e può enunciarsi come segue:

Se un'algebra non è pseudonulla ed u_1 è un suo automodulo, si può sempre trovare un suo gruppo di unità, così che ciascuna di queste abbia in u_1

([63]) Loc. cit. ([19]), n^0 41. La dimostrazione del Peirce è per altro incompleta. Dimostrazioni corrette sono state date dallo Hawkes [loc. cit. ([33])], dal Taber (loc. cit. ([3])], dallo Wedderburn, sulla cui dimostrazione è composta quella del testo.

I) *un modulo ; oppure*
II) *un modulo sinistro e un nullifico destro ; oppure*
III) *un nullifico sinistro e un modulo destro ; o, infine,*
IV) *un nullifico.*

Avvertasi che, nel gruppo considerato, esistono certo unità che presentino il caso I); invece possono mancare unità per le quali si presenti qualcuno degli altri tre casi.

Notisi inoltre che basta supporre, com'è lecito (n° 62), che u_1 sia un automodulo primitivo di A, per ottenere che l'algebra $u_1 A u_1$ non contenga automoduli diversi da u_1.

86. Suppongasi appunto che nella (39) u_1 sia un automodulo primitivo di A ed N' sia diverso da zero.

Allora N' sarà un algebra e, se non è pseudonulla, ammetterà un automodulo primitivo u_2.

Siccome u_2 appartiene ad N', è

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0 ; \tag{40}$$

quindi

$$(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2 u_1 + u_2^2 = u_1 + u_2 .$$

D'altronde, siccome N' non contiene u_1, è certo $u_1 + u_2 \neq 0$, dunque $u_1 + u_2$ è un automodulo di A.

Aggiungasi che u_2 è un automodulo primitivo (non solo per N' ma anche) per A.

Infatti dalla (39) si deduce

$$u_2 A u_2 = u_2 u_1 A u_1 u_2 + u_2 u_1 D' u_2 + u_2 S' u_1 u_2 + u_2 N' u_2$$

cioè, badando alle (40),

$$u_2 A u_2 = u_2 N' u_2 .$$

Ebbene si imagini di eseguire la decomposizione di A, analoga a quella espressa dalla (39), che si ha ponendo a base di essa l'automodulo $u_1 + u_2$, anzi che l'automodulo u_1, e sia, in conformità di ciò :

$$A = (u_1 + u_2) A (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) D'' + S'' (u_1 + u_2) + N'', \tag{41}$$

dove, in virtù di quanto è stato detto, è inutile fermarsi a dichiarare i significati dei simboli D'', S'', N''.

Dico che:

Per il sistema N'' si ha

$$N'' < N'.$$

Infatti sia x un elemento di N''. Sarà, per il significato di N'',

$$(u_1 + u_2)\,x = x\,(u_1 + u_2) = 0,$$

e quindi anche

$$u_1\,(u_1 + u_2)\,x = x\,(u_1 + u_2)\,u_1 = 0\,;$$

ma è, per le (40),

$$u_1\,(u_1 + u_2) = u_1\,, \qquad (u_1 + u_2)\,u_1 = u_1\,,$$

dunque si ha

$$u_1\,x = x\,u_1 = 0,$$

ed x è un elemento di N'.

D'altronde l'elemento u_2 è in N', ma non in N'', dunque è proprio $N'' < N'$.

87. Se nella (41) è $N'' \neq 0$, N'' è un'algebra, la quale, se non è pseudonulla, ammette un automodulo primitivo u_3.

Per questo sarà, una volta che esso è in N'' e in N',

$$u_3\,(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2)\,u_3 = u_1\,u_3 = u_3\,u_1 = 0,$$

e quindi anche

$$u_2\,u_3 = u_3\,u_2 = 0\,;$$

poi u_3 sarà anche per A un automodulo-primitivo.

Infine la somma $u_1 + u_2 + u_3$ sarà pure un automodulo di A, e se la decomposizione di A rispetto a questo automodulo, analoga a quelle date dalla (39) e dalla (41), è espressa da

$$A = (u_1 + u_2 + u_3)\,A\,(u_1 + u_2 + u_3) + (u_1 + u_2 + u_3)\,D''' +$$

$$+ S'''\,(u_1 + u_2 + u_3) + N''',$$

sarà

$$N''' < N''.$$

88. Il procedimento ricorrente indicato nei n[i] 86 e 87 non può essere illimitatamente proseguito, una volta che gli ordini delle al-

gebre N', N'', N''',... vanno continuamente decrescendo; quindi si perviene al seguente importantissimo teorema:

Se A è un'algebra non pseudonulla, è sempre possibile trovare in essa un automodulo u, tale che sia

$$u = u_1 + \dots + u_p \qquad (p \geq 1),$$

con $u_1, \dots, u_p$ automoduli primitivi, e, se $p > 1$,

$$u_i u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, p;\ i \neq j);$$

e inoltre tale che, posto

$$A = uAu + uD + Su + N, \tag{42}$$

col solito significato, rispetto ad u, dei simboli D, S, N, il sistema N o sia zero o sia un'algebra pseudonulla (64).

Un tale automodulo si dice un *automodulo principale* dell'algebra A.

89. *Un'algebra dotata di modulo ha un solo automodulo principale, e questo è il modulo* (65).

L'algebra A di cui si discorre nel teorema del n° 88 sia dotata di modulo, e questo sia v.

Dico che è

$$v = u.$$

In base alla (42), si ha

$$v = u\,a_1\,u + u\,d_1 + s_1\,u + n_1,$$

indicando con a_1, d_1, s_1, n_1 degli opportuni elementi di A, D, S, N; quindi è, per i significati di D, S, N,

$$u = vu = u\,a_1\,u + s_1\,u,$$

ed

$$u = uv = u\,a_1\,u + u\,d_1.$$

(64) Cfr. loc. cit. (7), pag. 91 e seg. Ma in queste pagine l'esposizione del WEDDERBURN lascia alquanto a desiderare per chiarezza e precisione.

(65) Per i n$^{\text{i}}$ 89, ..., 92 del testo cfr. loc. cit. (64).

Da queste uguaglianze si deduce

$$s_1\, u = u\, d_1 \,.$$

Ma $Su \frown uD = 0$, dunque

$$s_1\, u = u\, d_1 = 0,$$

e resta

$$u = u\, a_1\, u, \qquad v = u + n_1 \,.$$

Ora n_1 è nullo o pseudonullo, mentre $v - u$ o è nullo o è un automodulo (n^0 60), dunque è $n_1 = 0$ e

$$v = u.$$

Occorre appena avvertire che nel caso attuale è

$$D = S = N = 0,$$

e che la (42) si muta nella relazione ovvia

$$A = v\, Av.$$

90. *Ogni algebra priva di modulo ammette una sotto-algebra invariante pseudonulla.*

Sia A un'algebra priva di modulo e si supponga che non sia pseudonulla, perchè altrimenti il teorema sarebbe evidente. Allora si può imaginare che A sia l'algebra di cui si discorre nel teorema del n^0 88.

Nel caso attuale non può essere $D = S = 0$, perchè se ciò fosse sarebbe anche $N = 0$, e quindi resterebbe

$$A = u\, Au \,,$$

e l'automodulo (principale) u sarebbe addirittura il modulo di A; quindi è certo

$$D + S \neq 0.$$

Ciò posto, supponiamo $DS \neq 0$.

Dalla (42) si deduce

$$DA = Du\, Au + D\, u\, D + D\,(Su + N)$$

ma è $Du = 0$, e inoltre per la (37), applicata al caso attuale,

$$Su + N = S,$$

dunque resta

$$DA = DS.$$

Allo stesso modo dalla (42) si trae

$$AS = DS,$$

quindi è

$$DS = DA = AS.$$

Ora

$$DS \neq 0, \quad A \cdot DS = AD \cdot S \leq AS = DS,$$

$$DS \cdot A = D \cdot SA \leq DA = DS,$$

dunque DS è intanto una sotto-algebra invariante di A.

Siccome u è un nullifico destro per D e un nullifico sinistro per S, u è per SD un nullifico, quindi è

$$SD \leq N.$$

Ma N è zero o un'algebra pseudonulla, quindi esiste un intero $r \geq 1$, per cui è

$$(SD)^r = 0.$$

Di qua si trae

$$(DS)^{r+1} = D\,(SD)^r\, S = 0,$$

per conseguenza l'algebra DS è pseudonulla, e il teorema, sotto l'ipotesi $DS \neq 0$, è dimostrato.

Suppongasi ora che sia $DS = 0$.

Da

$$D = uD + N, \qquad S = Su + N,$$

si trae, moltiplicando, rispettivamente, a sinistra per D e a destra per S,

$$D^2 = D\,u\,D + DN = DN \leq DS = 0,$$

$$S^2 = S\,u\,S + NS = NS \leq DS = 0\,;$$

quindi è

$$(D + S)^2 = D^2 + DS + SD + S^2 = SD \leq N \leq D + S,$$

e queste relazioni, essendo $D + S \neq 0$, mostrano che $D + S$ è una sotto-algebra di A, la quale è pseudonulla una volta che

$$(D + S)^2 \leq N,$$

ed N, non essendo zero, è un'algebra pseudonulla.

Perchè sia compiutamente dimostrato il teorema basta dunque far vedere che $D + S$ è invariante in A.

Ora ciò è quasi immediato.

Si ha infatti

$$A(D + S) = AD + AS = AD + DS = AD,$$

$$(D + S)A = DA + SA = DS + SA = SA,$$

ma è (n^0 25)

$$AD \leq D, \qquad SA \leq S,$$

dunque è, come volevasi

$$A(D + S) \leq D \leq D + S,$$

$$(D + S)A \leq S \leq D + S.$$

91. Il teorema dimostrato può enunciarsi:

Un'algebra priva di modulo è una zero-algebra di ordine 1, oppure un'algebra non semi-semplice;

quindi:

Un'algebra semi-semplice, che non sia una zero-algebra di ordine 1, è necessariamente dotata di modulo.

Confrontando questo teorema con quello del n^0 61, si ha che:

Un'algebra semi-semplice non primitiva, che non sia una zero-algebra di ordine 1, possiede necessariamente degli automoduli diversi dal modulo.

92. Alle considerazioni fatte nel n^0 90 può aggiungersi qualche utile complemento.

Si supponga che A sia non pseudonulla, ma dotata di elementi eccezionali, e si indichi con E la sua sotto-algebra eccezionale. Poi si mantengano per u, D, S, N i significati del n^0 88.

Dico che:

$$D \leq E, \qquad S \leq E, \qquad N \leq E.$$

Infatti è

$$DA = AS = DS;$$

ma, per quanto è detto nel n^0 90, si ha in ogni caso

$$DS \leq E,$$

dunque
$$DA \leq E, \qquad AS \leq E,$$
e ciascun eventuale elemento non nullo di D o di S è un elemento eccezionale.

Segue che è
$$D \leq E, \qquad S \leq E,$$
dopo di che è pure
$$N \leq E.$$

Avvertasi che, essendo D ed S contenuti in E, è pure
$$uD \leq E, \qquad Su \leq E.$$

93. Si supponga che A sia un'algebra non pseudonulla e non semi-semplice, e sia E la sua sotto-algebra eccezionale.

Sarà $E < A$ e l'algebra complementare $A - E$ di E rispetto ad A sarà (n^0 67) semi-semplice e dotata di modulo.

Se, indicato con x un qualunque elemento di A, si denota con $[x]$ la classe di A mod E individuata da x, al variare di x in A, $[x]$ descriverà l'algebra $A - E$.

Ciò posto, è ben chiaro che:

Se u_1 è un automodulo di A, $[u_1]$ è un automodulo di $A - E$.

Infatti è
$$[u_1]^2 = [u_1^2] = [u_1],$$
e non è $[u_1] = [0]$, perchè u_1 non sta in E.

Viceversa, si supponga che la classe $[y]$, individuata dall'elemento y di A, sia un automodulo di $A - E$.

Dico che:

Esiste in $[y]$ qualche automodulo di A.

Giacchè $[y]$ è un automodulo di $A - E$, si ha
$$[y] \neq 0, \qquad [y] = [y^2] = [y^3] = \dots,$$
quindi per nessun intero positivo r può essere $y^r = 0$, perchè altrimenti sarebbe
$$[y] = [y^r] = [0].$$

Segue che l'algebra potenziale generata da y non è pseudonulla e ammette pertanto qualche automodulo.

Se u_1 è un tale automodulo ed è

$$u_1 = \alpha_1 y^h + \alpha_2 y^{h-1} + \dots + \alpha_h y,$$

con le $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ numeri del corpo in cui è definita l'algebra A, sarà

$$[u_1] = \alpha_1 [y^h] + \alpha_2 [y^{h-1}] + \dots + \alpha_h [y],$$

ossia

$$(43) \qquad [u_1] = \alpha [y],$$

dove $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_h$.

Dalla (43) si trae

$$[u_1^2] = \alpha^2 [y^2] = \alpha^2 [y];$$

ma, essendo $u_1^2 = u_1$, è pure

$$[u_1]^2 = [u_1],$$

dunque

$$(\alpha^2 - \alpha) [y] = [0],$$

ed, essendo $[y] \neq [0]$, si ha

$$\alpha^2 - \alpha = 0.$$

Qui $\alpha \neq 0$, giacchè altrimenti per la (43) sarebbe $[u_1] = [0]$, e u_1 sarebbe non un automodulo, ma un elemento nullo o eccezionale, dunque $\alpha = 1$ e

$$[u_1] = [y],$$

ossia u_1 è un automodulo di A contenuto nella classe $[y]$.

Si conclude che:

Se u_1 percorre gli automoduli di A, $[u_1]$ percorre gli automoduli di $A - E$;

per modo che (n⁰ 91):

Se A possiede un solo automodulo, $A - E$ è primitiva.

94. Le osservazioni precedenti possono essere precisate.

Dimostriamo infatti che:

Se $[u_1]$ è un automodulo primitivo di $A - E$, con u_1 automodulo di A, u_1 è anche un automodulo primitivo di A.

Se è possibile, non sia u_1 automodulo primitivo di A. Esisterà in $u_1 A u_1$ un automodulo $v \neq u_1$ e sarà

$$v = u_1 x u_1,$$

indicando con x un conveniente elemento di A.

È

$$[v] = [u_1][x][u_1],$$

quindi $[v]$ è un automodulo di $[u_1](A - E)[u_1]$; ma $[u_1]$ è un automodulo primitivo di $A - E$, dunque

$$[v] = [u_1],$$

e la differenza non nulla $u_1 - v$ è un elemento eccezionale.

Ora ciò è assurdo, perchè u_1 è il modulo di $u_1 A u_1$ e quindi (n⁰ 60) $u_1 - v$ è un automodulo, dunque u_1 è veramente un automodulo primitivo di A.

Inversamente:

Se u_2 è un automodulo primitivo di A, $[u_1]$ è un automodulo primitivo di $A - E$.

Suppongasi se è possibile, che ciò non sia, e si dica $[u_2]$ un automodulo di $[u_1](A - E)[u_1]$ diverso da $[u_1]$.

Sarà, indicando con x un conveniente elemento di A,

$$[u_2] = [u_1 \, x \, u_1],$$

e quindi (n⁰ 93) esiste un automodulo u_1 di A, che appartiene all'algebra potenziale generata da $u_1 x u_1$ e per il quale è

$$[u_3] = [u_1 \, x \, u_1].$$

Siccome u_3 è un elemento dell'algebra potenziale generata da un elemento dell'algebra $u_1 A u_1$, u_3 sta in $u_1 A u_1$. Ma u_1 è un automodulo primitivo, e u_3 è un automodulo, dunque u_3 coincide con u_1 e, contro il supposto,

$$[u_1] = [u_3] = [u_2].$$

Si conclude che $[u_1]$ è veramente un automodulo primitivo di $A - E$.

95. Sia ora u un automodulo principale di A.

Sarà

$$u = u_1 + \dots + u_p \qquad (p \geq 1),$$

con $u_1, \dots u_p$ automoduli primitivi di A, e, se $p > 1$,

$$u_i \, u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, p\,;\; i \neq j);$$

inoltre posto, col solito significato dei simboli,

$$A = u\,Au + uD + Su + N,$$

N o sarà zero, o sarà un'algebra (pseudonulla) contenuta in E.

Si considerino ora gli elementi di $A - E$,

$$[u], [u_1], \dots, [u_p].$$

Sarà

$$[u] = [u_1] + \dots + [u_p],$$

e, se $p > 1$,

$$[u_i][u_j] = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, p\,;\; i \neq j);$$

quindi $[u_1], \dots, [u_p]$ saranno automoduli primitivi *distinti* di $A - E$.

Decompongasi, al solito modo, $A - E$ rispetto all'automodulo $[u]$; e pongasi

$$A - E = [u]\,(A - E)\,[u] + [u]\,D_1 + S_1\,[u] + N_1\,.$$

Se $[x]$ è un elemento di N_1 sarà

$$[u][x] = [x][u] = [0],$$

ossia

$$[ux] = [xu] = [0].$$

Pongasi

$$x = ua'u + ud' + s'u + n',$$

indicando con a', d', s', n' opportuni elementi di A, D, S, N.

Per le osservazioni del n⁰ 92 è

$$[ud'] = [s'u] = [n'] = [0],$$

dunque

$$[x] = [ua'u]$$

e

$$[xu] = [ux] = [ua'u].$$

Segue

$$[ua'u] = [0]$$

e

$$[x] = 0\,;$$

dunque $N_1 = [0]$, e $[u]$ è un automodulo principale di $A - E$.

Ma $A-E$ è dotata di modulo, quindi $[u]$ *è il modulo di* $A-E$.

Si deduce che:

Se un'algebra, non semi-semplice e non pseudonulla, ammette più automoduli principali, questi sono tutti congrui fra loro rispetto alla sotto-algebra eccezionale.

§ 14.

Proprietà fondamemtali delle algebre semi-semplici.

96. *Un'algebra semi-semplice o è semplice o è riducibile* [66].

Sia A un'algebra semi-semplice ma non semplice e sia B una sotto-algebra invariante propria di A.

Giacchè A, non essendo semplice, non può essere una zero-algebra di ordine 1, sarà A (n° 91) dotata di modulo e quindi si avrà:

$$A^2 = A, \quad AB = B = BA.$$

Suppongasi ora, se è possibile, che B sia priva di modulo e che quindi B possegga una sotto-algebra eccezionale E.

Sarà

$$BEB \leq E,$$

quindi, o è $BEB = 0$, o BEB è un'algebra pseudonulla.

Ma, essendo

$$BEB \cdot A = BE \cdot BA = BEB,$$

$$A \cdot BEB = AB \cdot EB = BEB,$$

BEB o è zero, o è una sotto-algebra invariante di A, dunque, una volta che A è semi-semplice e non pseudonulla, si ha necessariamente

$$BEB = 0.$$

Ciò posto, si consideri il prodotto AEA. Poichè A è dotata di modulo, AEA contiene E, dunque AEA è diverso da zero ed è (n° 16) una sotto-algebra invariante di A.

Intanto

$$(AEA)^3 = AEAEAEA = AEA \cdot E \cdot AEA \leq BEB = 0,$$

[66] Wedderburn, loc. cit. [7], pag. 94.

quindi AEA è pseudonulla, e ciò contrasta con l'ipotesi che A sia semi-semplice e non pseudonulla.

Si conclude che B è dotata di modulo; e quindi, per il teorema del n⁰ 75, che A è riducibile.

Il ragionamento fatto prova non solo che B è dotata di modulo, ma che B è semi-semplice; quindi si ha il teorema:

Un'algebra semi-semplice ma non semplice è la somma diretta di due o più algebre semplici, nessuna delle quali è una zero algebra di ordine 1.

Inversamente, per il n⁰ 74 *e*), è chiaro che:

La somma diretta di due o più algebre semplici, nessuna delle quali sia una zero-algebra di ordine 1, è (non semplice, ma) semi-semplice e non pseudonulla.

97. *Se u_1 è un automodulo di un'algebra A (non pseudonulla e) semi-semplice, l'algebra u_1Au_1 è pure semi-semplice* [67] *(e non pseudonulla).*

Suppongasi, se è possibile, che u_1Au_1 non sia semi-semplice e sia E la sua sotto-algebra eccezionale.

Siccome E è invariante in u_1Au_1, e questa è dotata di modulo, si ha

$$E . u_1 Au_1 = E,$$

ed

$$EAE = Eu_1 . A . u_1E = Eu_1 Au_1 . E = E^2 ;$$

da cui, per r intero positivo qualunque

$$E^r AE = E^{r+1}.$$

Giacchè A è dotata di modulo è $A^2 = A$, dunque

$$(AEA)^2 = AEAEA = A . EAE . A = AE^2 A,$$

$$(AEA)^3 = AE^2AEA = A . E^2AE . A = AE^3A,$$

e, in generale,

$$(AEA)^r = AE^r A.$$

[67] Vedi loc. cit. [66]. La dimostrazione del testo è più semplice di quella dello WEDDERBURN.

Essendo E pseudonulla, segue di qua, per r abbastanza elevato,

$$(AEA)^r = 0.$$

Ora AEA, una volta che A è dotata di modulo, contiene E e quindi non è nulla; dunque AEA è una sotto-algebra pseudonulla invariante in A.

Ma questo è assurdo, perchè A è semi-semplice e non pseudonulla; dunque è assurdo supporre $u_1 A u_1$ non semi-semplice.

98. *Se l'algebra A è semi-semplice ed u_1 è un suo automodulo primitivo, l'algebra $u_1 A u_1$ è primitiva.*

Infatti $u_1 A u_1$ è (n^0 97) semi-semplice (non pseudonulla) e non possiede automoduli diversi dal modulo u_1; dunque (n^0 91) è primitiva.

§ 15.

Il teorema fondamentale per le algebre semplici [68].

99. Sia A un'algebra semplice che non sia nè primitiva, nè una zero-algebra di ordine 1; per modo che (n^0 91) A conterrà automoduli diversi dal modulo.

In base al teorema del n^0 88 sarà allora possibile determinare certi p (≥ 2) automoduli primitivi $u_1, u_2, \ldots, u_p$, per modo che sarà

$$u = u_1 + \ldots + u_p,$$

e

$$u_j u_l = 0 \qquad (j, l = 1, \ldots, p;\ j \neq l).$$

Ciò premesso poniamo

$$u_j A u_l = A_{j,l};$$

essendo

$$A = uAu = (u_1 + \ldots + u_p) A (u_1 + \ldots + u_p)$$

sarà (cfr. n^0 75)

$$A = \sum_{j,l}^{1\ldots p} A_{j,l}.$$

[68] Per gli importantissimi teoremi di questo § e del seguente, dovuti allo Wedderburn, vedi la sua solita Memoria a pag. 95 e seg.. L'esposizione del testo è ricalcata su quella dello Wedderburn, ma ne differisce in qualche particolare e vi aggiunge qualche ulteriore sviluppo.

Giacchè A è semplice, $Au_j A$ (n⁰ 16) o è zero, o è eguale ad A. Ma la prima alternativa è da escludere, perchè $Au_j A$ contiene u_j, dunque

$$Au_j A = A \qquad (j = 1, \dots, p).$$

Ora è

$$A_{j,l} A_{h,k} = u_j A u_l u_h A u_k ,$$

dunque, se $l \neq h$, è

$$A_{j,l} A_{h,k} = 0 ;$$

mentre, se $l = h$, si ha

$$A_{j,l} A_{h,k} = u_j A u_l^2 A u_k = u_j . A u_l A . u_k = u_j A u_k = A_{j,k} .$$

In particolare

$$A_{j,l} A_{l,j} = A_{j,j} .$$

Di qua, essendo $A_{j,j} \neq 0$, si trae che è

$$A_{j,l} \neq 0,$$

qualunque siano j ed l.

Notisi che i p^2 *sistemi* $A_{j,l}$ *sono altrettante sotto algebre di* A. *Fra di essi i sistemi* $A_{j,j}$ *sono* (n⁰ 98) p *algebre primitive coi moduli* u_j*; gli altri, una volta che, per* $j \neq l$,

$$A_{j,l}^2 = A_{j,l} A_{j,l} = 0,$$

sono $p(p-1)$ *zero-algebre, e fra questi* $A_{j,l}$ *è l'insieme degli elementi di* A *che hanno in* u_j *un modulo sinistro e in* u_l *un modulo destro.*

Aggiungasi che:

Ciascuno dei sistemi $A_{j,l}$ *non ha elementi comuni non nulli con la somma di tutti gli altri.*

Infatti da

$$u_j x u_l = \sum_{h,k}^{1\dots p}{}' u_h y^{(h,k)} u_k ,$$

dove l'apice apposto al sommatorio significa che per gli indici h e k non deve essere mai nel tempo stesso $h = j$ e $k = l$, e dove x e le $y^{(h,k)}$ sono elementi di A, si trae, moltiplicando a sinistra per u_j e a destra per u_l:

$$u_j x u_l = 0.$$

Ciò significa che:

L'ordine di A *è la somma degli ordini delle* $A_{j,l}$.

100. *Se* $x_{j,l}$ *è una qualunque elemento di* $A_{j,l}$, *il prodotto*

$$x_{j,l}\, A_{l,j}\,,$$

o è nullo, o eguaglia $A_{j,j}$.

Essendo

$$A_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,j}\,,$$

è intanto $x_{j,l}\, A_{l,j} \leq A_{j,j}$.

Poi è

$$x_{j,l}\, A_{l,j} \cdot A_{j,j} = x_{j,l} \cdot A_{l,j}\, A_{j,j} = x_{j,l}\, A_{l,j}\,;$$

dunque $x_{j,l}\, A_{l,j}$ o è zero o è una sotto-algebra semi-invariante sinistra di $A_{j,j}$.

Ma $A_{j,j}$ è primitiva, quindi è, come volevasi,

$$x_{j,l}\, A_{l,j} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,j}\,.$$

Allo stesso modo si prova che:

Se $x_{j,l}$ *è un qualunque elemento di* $A_{j,l}$, *il prodotto*

$$A_{l,j}\, x_{j,l}\,,$$

o è nullo, o eguaglia $A_{l,l}$.

Queste proposizioni saranno tra poco precisate. Frattanto da esse possiamo dedurre che:

Se $x_{j,l}$ *e* $x_{l,h}$ *sono elementi non nulli di* $A_{j,l}$ *ed* $A_{l,h}$, *è necessariamente*

$$x_{j,l}\, x_{l,h} \neq 0.$$

Sia infatti, se è possibile,

$$x_{j,l}\, x_{l,h} = 0.$$

Sarà

$$x_{j,l}\, x_{l,h}\, A_{h,l} = 0,$$

e non potrà essere

$$x_{l,h}\, A_{h,l} = A_{l,l}\,,$$

perchè se ciò fosse esisterebbe un elemento non nullo $x_{h,l}$ di $A_{h,l}$, per cui sarebbe, da una parte

$$x_{l,h}\, x_{h,l} = u_l\,,$$

e dall'altra

$$x_{j,l}\, x_{l,h}\, x_{h,l} = 0.$$

Ma ciò è assurdo, perchè

$$x_{j,l}\, x_{l,h}\, x_{h,l} = x_{j,l}\, u_l = x_{j,l}\,,$$

dunque sarà

$$x_{l,h}\, A_{h,l} = 0\,. \tag{44}$$

Sia $y_{h,l}$ un *qualunque* elemento non nullo di $A_{h,l}$.

Essendo, per la (44),

$$x_{l,h}\, y_{h,l} = 0,$$

con $x_{l,h} \neq 0$, $y_{h,l} \neq 0$, sarebbe, per il ragionamento fatto,

$$y_{h,l}\, A_{l,h} = 0,$$

e quindi, a dirittura,

$$A_{h,l}\, A_{l,h} = 0,$$

mentre

$$A_{h,l}\, A_{l,h} = A_{l,l}\,.$$

L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra il teorema.

Da esso segue che:

Se $x_{j,l}$ è un qualunque elemento non nullo di $A_{j,l}$, è

$$x_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,j}\,, \qquad A_{l,j}\, x_{j,l} = A_{l,l}\,;$$

e segue inoltre che gli ordini di $A_{j,j}$ ed $A_{l,l}$ sono entrambi eguali all'ordine di $A_{l,j}$. In altri termini:

Le p^2 algebre $A_{j,l}$ hanno tutte lo stesso ordine.

101. Adesso indichiamo con

$$a_{1,2}\,,\ a_{1,3}\,, \ldots,\ a_{1,p}$$

elementi non nulli comunque scelti in

$$A_{1,2}\,,\ A_{1,3}\,, \ldots,\ A_{1,p}\,,$$

rispettivamente, e poniamo inoltre

$$a_{1,1} = u_1\,, \ldots,\ a_{p,p} = u_p\,.$$

Essendo

$$a_{1,l}\, A_{l,1} = A_{1,1} \qquad (l = 2, \ldots, p),$$

esisterà in $A_{l,1}$ un elemento non nullo, e sia $a_{l,1}$, per cui sarà

$$a_{1,l}\, a_{l,1} = a_{1,1}\,;$$

e questa eguaglianza sussisterà anche per $l = 1$, una volta che

$$a_{1,1} = u_1\,.$$

Se poniamo, per $h \neq 1$, $k \neq 1$ e $h \neq k$,

$$a_{h,k} = a_{h,1}\, a_{1,k}$$

restano definiti p^2 *elementi*

$$a_{j,l} \qquad (j, l = 1, \dots, p),$$

per i quali si ha

$$a_{j,l} = a_{j,1}\, a_{1,l}\,, \tag{45}$$

qualunque siano j ed l.

Che la (45) sussista per $j \neq l$ è intanto evidente; perchè, o è anche $j \neq 1$ ed $l \neq 1$, ed allora essa sussiste per definizione, o è, per es., $j = 1$ ed essa si riduce alla relazione

$$a_{1,l} = a_{1,1}\, a_{1,l} = u_1\, a_{1,l}\,,$$

che è chiaramente soddisfatta.

Resta a far vedere che la (45) è valida per $j = l$, ossia che è

$$a_{j,1}\, a_{1,j} = a_{j,j}$$

e qui è anzi necessario considerare soltanto il caso $j \neq 1$.

Per il teorema del n⁰ 100, il prodotto

$$a_{j,1}\, a_{1,j}$$

è intanto un elemento non nullo di $A_{j,j}$; ma è

$$(a_{j,1}\, a_{1,j})^2 = a_{j,1} \cdot a_{1,j}\, a_{j,1} \cdot a_{1,j} = a_{j,1}\, a_{1,1}\, a_{1,j} = a_{j,1}\, a_{1,j}\,,$$

dunque esso è un automodulo di $A_{j,j}$.

Giacchè $A_{j,j}$ è primitiva ed ha per modulo $u_j = a_{j,j}$, segue, come volevasi,

$$a_{j,1}\, a_{1,j} = a_{j,j}\,.$$

102. La (45) può essere ora generalizzata. Possiamo provare cioè che:

Per i p^2 elementi $a_{j,l}$ si ha

$$a_{j,l}\, a_{h,k} = \begin{cases} 0, & se \quad l \neq h, \\ a_{j,k}, & se \quad l = h. \end{cases}$$

Infatti, se $l \neq h$, è

$$a_{j,l}\, a_{h,k} = 0,$$

perchè è addirittura

$$A_{j,l}\, A_{h,k} = 0\,;$$

se poi $l = h$, si ha:

$$a_{j,l}\, a_{h,k} = a_{j,l}\, a_{l,k} = a_{j,1}\, a_{1,l}\, a_{l,1}\, a_{1,k} = a_{j,1}\, a_{1,1}\, a_{1,k} = a_{j,1}\, a_{1,k} = a_{j,k}\,.$$

Aggiungasi che:

I p^2 elementi $a_{j,l}$ sono indipendenti.

Sia infatti

$$\sum_{j,l}^{1\dots p} \alpha_{j,l}\, a_{j,l} = 0,$$

essendo le $\alpha_{j,l}$ numeri del corpo in cui è definita l'algebra A.

Sarà

$$0 = a_{g,i} \cdot \sum_{j,l}^{1\dots p} \alpha_{j,l}\, a_{j,l} \cdot a_{h,k} = \sum_{j,l}^{1\dots p} \alpha_{j,l}\, a_{g,i}\, a_{j,l}\, a_{h,k} = \alpha_{j,h}\, a_{g,i}\, a_{i,h}\, a_{h,k} = \alpha_{i,h}\, a_{g,k}\,,$$

e quindi, come volevasi,

$$\alpha_{i,h} = 0,$$

qualunque siano gli indici i ed h.

Si conclude che:

I p^2 elementi $a_{j,l}$ generano una sotto-algebra regolare R di A, di ordine p^2; e il modulo di A è anche il modulo di R, essendo

$$u = u_1 + \dots + u_p = a_{1,1} + \dots + a_{p,p}\,.$$

103. Indichiamo ora con a un elemento qualunque di A e poniamo

$$c = \sum_{j}^{1\dots p} a_{j,1}\, a\, a_{1,j}\,.$$

Sarà

$$c = \sum_{j}^{1\dots p} a_{j,1} \cdot a_{1,1}\, a\, a_{1,1} \cdot a_{1,j} = \sum_{j}^{1\dots p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j}\,,$$

con $x_{1,1}$ in $A_{1,1}$, e per avere tutti gli elementi c, i quali, intanto, costituiscono evidentemente un sistema, sarà indifferente far variare a in A, o $x_{1,1}$ in $A_{1,1}$.

Sia r l'ordine di $A_{1,1}$, cioè l'ordine comune di tutte le algebre $A_{j,l}$, e siano

$$x_{1,1}^{(1)}, \dots, x_{1,1}^{(r)}$$

r elementi indipendenti di $A_{1,1}$.

Posto

$$c^{(i)} = \sum_j^{1\dots p} a_{j,1}\, x_{1,1}^{(i)}\, a_{1,j},$$

gli elementi $c^{(1)}, \dots, c^{(r)}$ *sono indipendenti.*

Infatti sia

$$\sum_i^{1\dots r} \alpha_i\, c^{(i)} = 0,$$

con le α_i numeri del corpo in cui è definita A.

Sarà

$$0 = a_{1,1} \cdot \sum_i^{1\dots r} \alpha_i\, c^{(i)} \cdot a_{1,1} = \sum_j^{1\dots p} a_{1,1}\, a_{j,1} \left(\sum_i^{1\dots r} \alpha_i\, x_{1,1}^{(i)} \right) a_{1,j}\, a_{1,1} =$$

$$= a_{1,1} \cdot \sum_i^{1\dots r} \alpha_i\, x_{1,1}^{(i)} \cdot a_{1,1} = \sum_i^{1\dots r} \alpha_i\, x_{1,1}^{(i)};$$

ma le $x_{1,1}^{(i)}$ sono indipendenti, dunque le α_i sono, come volevasi, tutte nulle.

Osservando che il prodotto di due elementi c è ancora un tale elemento, perchè da

$$c = \sum_j^{1\dots p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j},$$

$$c' = \sum_j^{1\dots p} a_{j,1}\, x'_{1,1}\, a_{1,j},$$

con $x_{1,1}$ e $x'_{1,1}$ in $A_{1,1}$, si trae

$$cc' = \sum_{j,l}^{1\dots p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j}\, a_{l,1}\, x'_{1,1}\, a_{1,l} = \sum_j^{1\dots p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,1}\, x'_{1,1}\, a_{1,j} =$$

$$= \sum_j^{1\dots p} a_{j,1}\, (x_{1,1}\, x'_{1,1})\, a_{1,j},$$

si conclude che:

Gli elementi c costituiscono un'algebra C d'ordine r.

La corrispondenza fra gli elementi di C e $A_{1,1}$ posta in evidenza dalla formula

$$c = \sum_{j}^{1..p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j}$$

mostra che C ed $A_{1,1}$ sono equivalenti.

Ma da

$$A_{j,j} = a_{j,1}\, A_{1,1}\, a_{1,j}$$

risulta che tutte le algebre $A_{j,j}$, le quali come già sappiamo sono dello stesso ordine, sono a dirittura equivalenti; dunque:

L'algebra C è equivalente a ciascuna delle p algebre $A_{j,j}$, ed è, al pari di esse, primitiva.

104. *Ciascun elemento dell'algebra C è permutabile con ciascun elemento dell'algebra R.*

Infatti, da

$$c = \sum_{j}^{1...p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j}\,,$$

segue

$$c\, a_{h,k} = \sum_{j}^{1...p} a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j}\, a_{h,k} = a_{h,1}\, x_{1,1}\, a_{1,h}\, a_{h,k} = a_{h,1}\, x_{1,1}\, a_{1,k}\,,$$

e

$$a_{h,k}\, c = \sum_{j}^{1...p} a_{h,k}\, a_{j,1}\, x_{1,1}\, a_{1,j} = a_{h,k}\, a_{k,1}\, x_{1,1}\, a_{1,k} = a_{h,1}\, x_{1,1}\, a_{1,k}\,;$$

dunque è, qualunque siano h e k,

$$c a_{h,k} = a_{h,k}\, c\,;$$

il che basta a dimostrar l'asserto.

105. Adesso sia x un qualunque elemento di A.

Sarà

$$c_{k,m} = \sum_{j}^{1...p} a_{j,1} \cdot a_{1,k}\, x\, a_{m,1} \cdot a_{1,j} \qquad (k\,, m = 1, \ldots, p)$$

un elemento di C, e sarà

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} a_{j,l}\, c_{j,l} = \sum_{j,l,m}^{1\ldots p} a_{j,l}\, a_{m,1}\, a_{1,j}\, x\, a_{l,1}\, a_{1,m} = \sum_{j,l}^{1\ldots p} a_{j,j}\, x\, a_{l,l} =$$

$$= \sum_{j}^{1\ldots p} a_{j,j} . x . \sum_{l}^{1\ldots p} a_{l,l} = u\, x\, u = x.$$

Dalla possibilità di esprimere ciascun elemento di A nella forma

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} a_{j,l}\, c_{j,l},$$

e dal fatto che l'ordine di A, essendo la somma degli ordini delle algebre $A_{j,l}$, è dato da rp^2, si desume, data la permutabilità degli elementi di C coi singoli elementi di R, che A è il prodotto diretto di C ed R; quindi:

Ogni algebra semplice che non sia nè primitiva, nè una zero-algebra di ordine 1, *è il prodotto diretto di un'algebra primitiva e di un'algebra regolare di ordine* ≥ 4.

Cosicchè:

L'ordine di un tale algebra ammette sempre dei divisori quadrati diversi da 1.

106. Osservazione I. — Notando che un'algebra primitiva è il prodotto diretto di sè stessa per l'algebra regolare di ordine 1 generata dal suo modulo, può dirsi che:

Ogni algebra semplice, che non sia una zero-algebra di ordine 1, *è il prodotto diretto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare;*

ma il teorema non è veramente significativo se non quando trattisi di un'algebra che sia inoltre non primitiva.

Osservazione II. — Più sopra per dedurre che A poteva considerarsi come il prodotto diretto di C ed R si è ricorso al fatto che le algebre $A_{j,l}$ sono tutte dello stesso ordine.

Giova rilevare, per alcune considerazioni che seguono, che un tale ricorso poteva essere evitato dimostrando che la rappresentazione di un elemento di A nella forma

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} a_{j,l}\, c_{j,l}$$

era unica.

E questo, dopo quel che già era stato detto, poteva esser dedotto osservando che da

$$x = \sum_{j,l}^{1\dots p} a_{j,l}\, c_{j,l}$$

si ricava

$$a_{h,k}\, x\, a_{m,h} = \sum_{j,l}^{1\dots p} a_{h,k}\, a_{j,l}\, c_{j,l}\, a_{m,h} = \sum_{l}^{1\dots p} a_{h,l}\, c_{k,l}\, a_{m,h}\,,$$

e quindi

$$\sum_{h}^{1\dots p} a_{h,k}\, x a_{m,h} = \sum_{h,l}^{1\dots p} a_{h,l}\, c_{k,l}\, a_{m,h} = \sum_{h,l}^{1\dots p} a_{h,l}\, a_{m,h}\, c_{k,l} =$$

$$= \sum_{h}^{1\dots p} a_{h,h} \cdot c_{k,m} = u c_{k,m} = c_{k,m}\,,$$

ossia

$$c_{k,m} = \sum_{h} a_{h,1} \cdot a_{1,k}\, x a_{m,1} \cdot a_{1,h}.$$

§ 16.

Le algebre dotate di modulo, ma non semi-semplici.

107. Indichiamo con A un'algebra non semi-semplice, dotata di modulo, e quindi non pseudonulla, e, detta E la sua sotto-algebra eccezionale, supponiamo che l'algebra complementare di questa, $A - E$, che è necessariamente semi-semplice e non pseudonulla, sia semplice ma non primitiva. Poi, al solito, se x è un elemento di A, indichiamo con $[x]$ la classe mod E che esso individua.

Siccome $A - E$ non è primitiva, il modulo u di A non è per A un automodulo primitivo, ma si può spezzare nella somma, diciamo, di p (≥ 2) automoduli primitivi $u_1, \dots, u_p$, tali che il prodotto di due qualunque di essi, purchè distinti, sia zero.

Poi $[u]$ sarà il modulo di $A - E$, $[u_1], \dots, [u_p]$ saranno automoduli primitivi di $A - E$, e sarà

$$[u] = [u_1] + \dots + [u_p],$$

$$[u_j] \cdot [u_l] = [0] \qquad (j\,, l = 1\,, \dots, p\,; j \neq l).$$

Se poniamo

$$A_{j,l} = u_j\, A u_l\,,$$

e denotiamo con $x_{j,l}$, un elemento di $A_{j,l}$, si verifica subito che quando $x_{j,l}$ percorre $A_{j,l}$, $[x_{j,l}]$ descrive in $A - E$ la sotto-algebra

$$[u_j]\,(A - E)\,[u_l]\,;$$

perciò denoteremo quest'ultima col simbolo $[A_{j,l}]$.

Per quel che è detto nel § prec., le algebre $[A_{j,l}]$ sono tutte dello stesso ordine; e fra di esse, quelle per cui $j = l$ sono primitive ed equivalenti, quelle per cui $j \neq l$ sono invece delle zero-algebre.

Quanto ai sistemi $A_{j,l}$, quelli per cui $j = l$ sono delle algebre dotate ciascuna di modulo e di nessun altro automodulo; quelli invece per cui $j \neq l$ sono delle zero-algebre, perchè, sotto questa ipotesi, è

$$A_{j,l}^2 = u_j\, A \,.\, u_l\, u_j \,.\, A u_l = 0,$$

mentre $A_{j,l} \neq 0$, una volta che $[A_{j,l}] \neq [0]$.

108. Dimostriamo ora che:

Per le algebre $A_{j,l}$ *si ha*

$$A_{j,l}\, A_{h,k} = \begin{cases} 0, & se \quad l \neq h\,, \\ A_{j,k}\,, & se \quad l = h. \end{cases}$$

Che per $l \neq h$ sia

$$A_{j,l}\, A_{h,k} = 0$$

è evidente; basterà dunque occuparsi dei prodotti del tipo

$$A_{j,l}\, A_{l,k}\,.$$

Essendo

$$A_{j,l}\, A_{l,k} = u_j \,.\, A u_l\, A \,.\, u_k \leq u_j\, A u_k\,,$$

è chiaro intanto che

(46) $$A_{j,l}\, A_{l,k} \leq A_{j,k}\,;$$

inoltre, essendo, per il § prec.,

$$[A_{j,l}]\,[A_{l,k}] = [A_{j,k}]$$

ciascun elemento di $A_{j,k}$, o è nel prodotto $A_{j,l}\, A_{l,k}$, o è congruo mod E con un elemento ivi contenuto: quindi è pure $A_{j,l}\, A_{l,k} \neq 0$.

Dalla (46) discende, in particolare:

$$A_{j,j}\, A_{j,k} \leq A_{j,k}\,,$$

ma $A_{j,j}$ contiene u_j, e quindi è

$$A_{j,j}\, A_{j,k} \geq u_j\, A_{j,k} = A_{j,k}\,,$$

dunque è proprio

$$A_{j,j}\, A_{j,k} = A_{j,k}\,. \tag{47}$$

Allo stesso modo si riconosce che è

$$A_{j,l}\, A_{l,l} = A_{j,l}\,. \tag{48}$$

La (46) dà

$$A_{j,l}\, A_{l,j} \leq A_{j,j}\,;$$

e le (47), (48) forniscono

$$A_{j,j} \cdot A_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,l}\, A_{l,j}\,,$$

$$A_{j,l}\, A_{l,j} \cdot A_{j,j} = A_{j,l}\, A_{l,j}\,,$$

dunque, se fosse

$$A_{j,l}\, A_{l,j} < A_{j,j}\,,$$

il prodotto (non nullo) $A_{j,l}\, A_{l,j}$ sarebbe una sotto-algebra invariante propria di $A_{j,j}$, la quale, non possedendo $A_{j,j}$ automoduli diversi dal modulo, sarebbe formata, all'infuori di zero, di elementi tutti eccezionali in $A_{j,j}$.

Intanto u_j, che è in $A_{j,j}$, deve esser congruo mod E con un elemento del prodotto $A_{j,l}\, A_{l,j}$, quindi è

$$u_j = v_j + e_j\,,$$

con v_j (in $A_{j,l}\, A_{l,j}$ e quindi) in $A_{j,j}$ e con e_j in E; inoltre, essendo u_j e v_j in $A_{j,j}$, anche e_j sarà in $A_{j,j}$. Ora e_j o è nullo o, essendo eccezionale in A, è tale anche in $A_{j,j}$, quindi è impossibile, essendo u_j il modulo di $A_{j,j}$, che v_j sia nullo o eccezionale in $A_{j,j}$; dunque è necessariamente

$$A_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,j}\,. \tag{49}$$

Dalle (47), (48) e (49) si deduce

$$A_{j,k} = A_{j,j}\, A_{j,k}\, A_{k,k} = A_{j,l} \cdot A_{l,j}\, A_{j,k}\, A_{k,l} \cdot A_{l,k}\,;$$

ma per la (46) e la (49)

$$A_{l,j}\, A_{j,k}\, A_{k,l} \leq A_{l,k}\, A_{k,l} = A_{l,l}$$

dunque

$$A_{j,k} \leq A_{j,l}\, A_{l,l}\, A_{l,k} = A_{j,l}\, A_{l,k}\,.$$

Questa relazione confrontata con la (46) dà, come volevasi,

$$A_{j,l}\, A_{l,k} = A_{j,k}\,.$$

109. Se $x_{j,l}$ è un elemento di $A_{j,l}$ nullo od eccezionale in A, essendo

$$x_{j,l} = u_j\, x_{j,l}\, u_l\,,$$

è $x_{j,l}$ un elemento di $u_j\, E\, u_l$ o, come diremo, di $E_{j,l}$. Viceversa è chiaro che ogni elemento di $E_{j,l}$ è un elemento di $A_{j,l}$ che, o è nullo, o è eccezionale in A.

Notisi che, se fosse $E_{j,l} = A_{j,l}$, sarebbe $[A_{j,l}] = [0]$, ciò che non è; dunque $E_{j,l} < A_{j,l}$ ed esistono in $A_{j,l}$ elementi non contenuti in $E_{j,l}$.

Ebbene:

Se $x_{j,l}$ é un elemento di $A_{j,l}$ non contenuto in $E_{j,l}$, si ha

$$x_{j,l}\, A_{l,j} = A_{j,j}\,.$$

Siccome $x_{j,l}$ non è in $E_{j,l}$, $[x_{j,l}] \neq 0$; quindi (n° 100)

$$[x_{j,l}]\,[A_{l,j}] = [A_{j,j}], \tag{50}$$

ed è intanto

$$x_{j,l}\, A_{l,j} \neq 0.$$

D'altronde

$$x_{j,l}\, A_{l,j} \leq A_{j,j}$$

e

$$x_{j,l}\, A_{l,j} \cdot A_{j,j} = x_{j,l} \cdot A_{l,j}\, A_{j,j} = x_{j,l}\, A_{l,j}\,,$$

dunque $x_{j,l}\, A_{l,j}$ è una sotto-algebra invariante sinistra di $A_{j,j}$.

Ma, in virtù della (50), u_j è congruo mod E con un elemento di $x_{j,l}\, A_{l,j}$, per conseguenza, ragionando come più sopra, si vede che non può essere $x_{j,l} A_{l,j} < A_{j,j}$, e si conclude, come volevasi,

$$x_{j,l} A_{l,j} = A_{j,j}.$$

Allo stesso modo si riconosce che:

Se $x_{j,l}$ é in $A_{j,l}$, ma non in $E_{j,l}$, si ha:

$$A_{l,j} x_{j,l} = A_{l,l}.$$

Aggiungasi che:

Se $x_{j,l}$ e $x_{l,h}$ sono elementi di $A_{j,l}$ ed $A_{l,h}$, non situati in $E_{j,l}$ ed $E_{l,h}$, il prodotto $x_{j,l} x_{l,h}$ é fuori di E; quindi é in particolare

$$x_{j,l} x_{l,h} \neq 0.$$

Infatti è, per ipotesi,

$$[x_{j,l}] \neq [0], \quad [x_{l,h}] \neq [0],$$

per modo che (n° 100) non può essere

$$[x_{j,l}][x_{l,h}] = [x_{j,l} x_{l,h}] = [0].$$

Dalle osservazioni fatte discende poi che:

Se $x_{j,l}$ é un elemento di $A_{j,l}$ non contenuto in $E_{j,l}$, esiste in $A_{l,j}$ un elemento $x_{l,j}$ per cui si ha

$$x_{j,l} x_{l,j} = u_j;$$

e quindi — occorre appena avvertirlo — $x_{l,j}$ non è certo in $E_{l,j}$.

110. Adesso si indichino con

$$a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,p},$$

elementi di

$$A_{1,2}, A_{1,3}, \dots, A_{1,p},$$

rispettivamente, non situati in

$$E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{1,p};$$

e pongasi

$$a_{1,1} = u_1, \dots, a_{p,p} = u_p.$$

Partendo da questi elementi e imitando passo per passo il procedimento sviluppato nei n' 101, ..., 105, ove parte del ragionamento del n^0 105 si intenderà modificato come è detto nella *Osservazione* II del n^0 106, si riesce a trovare in A una sotto-algebra regolare R di ordine p^2 e una sotto-algebra C equivalente ad $A_{1,1}$, e quindi dotata di modulo e di nessun altro automodulo, di cui A è il prodotto diretto; dunque:

Un'algebra non semi-semplice dotata di modulo, per cui l'algebra complementare della sotto-algebra eccezionale sia semplice ma non primitiva, é il prodotto diretto di un'algebra regolare di ordine ≥ 4 *e di un'algebra dotata di modulo, ma priva di automoduli diversi dal modulo.*

Discende di qua che *l'ordine di una tale algebra ammette sempre dei divisori quadrati diversi da* 1, e che anche nel caso attuale le algebre $A_{j,j}$ hanno ordini eguali.

Avvertasi infine che, in conformità di quanto è detto nel n^0 106, *Osservazione* I, nel teorema or ora enunciato può togliersi la restrizione che l'algebra complementare della sotto-algebra eccezionale non sia primitiva, purchè in esso si parli soltanto di un'algebra regolare e non di una tale algebra con l'ordine ≥ 4.

111. Si supponga ora A dotata di modulo e non semi-semplice, ma $A - E$ non semplice e i simboli $u, u_1, \dots, u_p$, $A_{j,l}$, $[A_{j,l}]$ abbiano per A gli stessi significati che nei n^i precedenti.

Sarà $A - E$ somma diretta di algebre semplici; poniamo delle algebre

$$(A - E)^{(1)},\ (A - E)^{(2)}, \dots,\ (A - E)^{(t)} \qquad (t \geq 2). \tag{51}$$

Il modulo

$$[u] = [u_1] + \dots + [u_p]$$

di $A - E$ è la somma dei moduli delle algebre (51); di più [n^0 74 *i*)] gli automoduli primitivi $[u_j]$ di $A - E$ debbono distribuirsi in t gruppi, quelli dei singoli gruppi essendo automoduli primitivi delle singole algebre (51) e avendo per somma i moduli delle algebre stesse.

Siano

$$\begin{array}{ll} [u_1], \dots, [u_{r_1}], & \\ [u_{r_1+1}], \dots, [u_{r_1+r_2}], & \qquad (r_1, r_2, \dots, r_t \geq 1) \\ \dots\dots\dots\dots & \\ [u_{r_1+\dots+r_{t-1}+1}], \dots, [u_{r_1+r_2+\dots+r_t}] & \end{array}$$

questi gruppi; per modo che

$$r_1 + \dots + r_t = p.$$

Se

$$u^{(1)} = u_1 + \dots + u_{r_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(t)} = u_{r_1+\dots+r_{t-1}+1} + \dots + u_p,$$

saranno $[u^{(1)}], \dots, [u^{(t)}]$ i moduli delle algebre (51).

Si tornino ora a considerare i sistemi

$$A_{j,l} = u_j A u_l,$$

e tra questi si prendano di mira quelli per cui gli indici j, l cadono in uno stesso dei t gruppi di indici

$$\left\{\begin{array}{c} 1, \dots, r_1 \\ r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots; \end{array}\right. \tag{52}$$

per es., nel gruppo

$$1, \dots, r_1.$$

Per questi sistemi, essendo

$$[A_{j,l}] = [u_j](A - E)[u_l] = [u_j]\{(A - E)^{(1)} + \dots + (A - E)^{(t)}\}[u_l],$$

e, per $h \neq 1$,

$$[u_j](A - E)^{(h)}[u_l] = [0],$$

si ha

$$[A_{j,l}] = [u_j](A - E)^{(1)}[u_l]:$$

ma $(A - E)^{(1)}$ è semplice, quindi ragionando nel caso attuale per *questi soli* sistemi, come nei n[i] prec. si è ragionato per tutti i sistemi $A_{j,l}$, si perviene a dimostrare che

$$\sum_{j,l}^{1\dots r_1} A_{j,l}$$

è il prodotto diretto di un'algebra regolare R_1, di ordine r_1^2, per un'algebra C_1 a modulo primitivo.

Corrispondentemente ai t gruppi d'indici (52) si hanno dunque t somme di sistemi $A_{j,l}$, che sono i prodotti diretti

$$R_1 \times C_1 , \; R_2 \times C_2 , \dots , R_t \times C_t$$

di t algebre regolari $R_1 , \dots , R_t$, degli ordini $r_1^2 , \dots , r_t^2$, per altrettante algebre $C_1 , \dots , C_t$, ciascuna a modulo primitivo.

Si consideri ora un sistema $A_{j,l}$ per cui l'indice j cada in uno dei gruppi (52) e l'indice l in un altro.

Si verifica subito che

$$A_{j,l}^2 = 0,$$

e che, stavolta,

$$[A_{j,l}] = [u_j](A - E)[u_l] = [0],$$

dunque un tal sistema è sempre contenuto in E ed è, o zero, o una zero algebra.

Intanto

$$A = \sum_{j,l}^{1\dots p} A_{j,l} ,$$

dunque possiamo dire che

$$A = R_1 \times C_1 + \dots + R_t \times C_t + N$$

dove N è una somma di sistemi che, o sono zero, o sono zero-algebre contenute in E.

Notisi che due, distinti, dei prodotti diretti

$$R_h \times C_h$$

sono somme di sistemi $A_{j,l}$ tali che nessun sistema dell'una somma ha un indice eguale ad un indice di un sistema dell'altra; quindi è, per $h \neq k$,

$$(R_h \times C_h)(R_k \times C_k) = (R_k \times C_k)(R_h \times C_h) = 0.$$

Inoltre ciascuna di tali somme non ha elementi comuni non nulli con la somma di tutte le altre (cfr. n^0 99), dunque, se poniamo

$$B = R_1 \times C_1 + \dots + R_t \times C_t$$

B è la somma diretta delle algebre $R_1 \times C_1 , \dots , R_t \times C_t$.

Si conclude che:

Nel caso attuale, l'algebra A è somma di sistemi che sono nulli, o zero-algebre contenute in E, e di un'algebra, che è somma diretta di prodotti diretti di algebre regolari per algebre a modulo primitivo.

§ 17.

Costanti di moltiplicazione. Parametri, matrici, determinanti di un elemento.

112. Sia A un'algebra d'ordine n nel corpo Γ ed

$$u_1, \dots, u_n$$

un suo gruppo di unità.

Se le coordinate del prodotto $u_i u_j$ (rispetto ad $u_1, \dots, u_n$) si indicano con

$$\gamma_{i,j,k} \qquad (k = 1, \dots, n),$$

ossia si pone

$$u_i u_j = \sum_{k}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} u_k \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

gli n^3 numeri $\gamma_{i,j,k}$ si dicono le *costanti di moltiplicazione* di A (rispetto alle unità considerate).

Siccome deve essere, qualunque siano i, j, l,

$$(u_i u_j) u_l = u_i (u_j u_l),$$

essendo

$$(u_i u_j) u_l = \sum_{k,h}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} \gamma_{k,l,h} u_h,$$

e

$$u_i (u_j u_l) = \sum_{k,h}^{1\dots n} \gamma_{j,l,k} \gamma_{i,k,h} u_h,$$

dovrà essere, qualunque siano i, j, l, h,

$$\sum_{k}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} \gamma_{k,l,h} = \sum_{k}^{1\dots n} \gamma_{j,l,k} \gamma_{i,k,h}. \tag{53}$$

Sono, queste, n^4 relazioni, cui gli n^3 numeri $\gamma_{i,j,k}$ debbono necessariamente soddisfare, perchè essi possano essere considerati come le costanti di moltiplicazione di un'algebra di ordine n (69).

(69) Si ricordi che qui diciamo *algebra*, senz'altro, ciò che altri direbbe *algebra associativa*.

Tra poco questo risultato sarà invertito; e quindi le (53) sono atte a caratterizzare le costanti di moltiplicazione.

Avvertasi che se l'algebra A è la somma diretta di due algebre A_1 e A_2 e queste sono generate rispettivamente dalle unità

$$u_1, \dots, u_m \text{ e } u_{m+1}, \dots, u_n$$

sono nulle tutte le $\gamma_{i,j,k}$ per cui non accade che tutti e tre gli indici i, j, k capitino, o nella serie $1, \dots, m$, o nella serie $m+1, \dots, n$.

113. Perchè l'algebra A sia commutativa occorre e basta che sia

$$u_i u_j = u_j u_i \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

dunque:

L'algebra A è commutativa quando, e solo quando, è

$$\gamma_{i,j,k} = \gamma_{j,i,k},$$

qualunque siano gli indici i, j, k.

114. Siano x ed y elementi di A con le coordinate ξ_i e η_i, e si indichino con le ζ_i le coordinate del prodotto xy.

Siccome

$$xy = \sum_{i,j}^{1\dots n} \xi_i \eta_j u_i u_j = \sum_{i,j,k}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} \xi_i \eta_j u_k,$$

sarà

$$\zeta_k = \sum_{i,j}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} \xi_i \eta_j .$$

In particolare, se le coordinate di xu_i sono le

(54) $$\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n},$$

e quelle di $u_i x$ sono le

(55) $$\xi'_{i,1}, \dots, \xi'_{i,n},$$

si ha

(56) $$\xi_{i,k} = \sum_{j}^{1\dots n} \gamma_{j,i,k} \xi_j,$$

e

(57) $$\xi'_{i,k} = \sum_{j}^{1\dots n} \gamma_{i,j,k} \xi_j .$$

Le matrici d'ordine n

$$\mu_x = \| \xi_{i,k} \|, \quad \mu'_x = \| \xi'_{i,k} \|$$

si diranno *matrici, sinistra* e *destra*, dell'elemento x, e i loro determinanti

$$\delta_x = | \xi_{i,k} |, \quad \delta'_x = | \xi'_{i,k} |$$

si diranno anche *determinanti* , *sinistro* e *destro*, di x.

Le $\xi_{i,k}$ e le $\xi'_{i,k}$ sono poi ciò che chiameremo i *parametri, sinistri* e *destri,* di x.

Avvertasi infine che, in conformità delle posizioni ora fatte, le matrici e i determinanti di un elemento saranno sempre indicati apponendo come indice il simbolo dell'elemento ai simboli $\mu, \mu', \delta, \delta'$.

115. Se l'elemento x si considera come l'elemento *corrente* di A, cioè se le ξ_i si considerano come variabili indipendenti (nel campo di variabilità Γ), le matrici e i determinanti di x si diranno anche matrici e determinanti dell'algebra A.

Se A è dotata di modulo, i parametri sinistri e destri del modulo sono tutti nulli, tranne quelli con gli indici eguali, che sono eguali a 1 ; quindi le matrici, sinistra e destra, del modulo coincidono entrambe con la matrice identica d'ordine n, e i determinanti, sinistro e destro, del modulo sono eguali entrambi a 1.

Aggiungasi che:

a) *Le caratteristiche o le nullità, sinistre e destre, di x sono le caratteristiche o le nullità delle matrici, sinistra e destra, di x ;*

b) *L'elemento x è un divisore sinistro* (*destro*) *dello zero quando, e solo quando, non è nullo e il suo determinante sinistro* (*destro*) *è nullo* ;

c) *L'algebra A ammette modulo sinistro* (*destro*) *quando, e solo quando, il suo determinante sinistro* (*destro*) *non è identicamente nullo ;*

d) *L'algebra A ammette modulo quando, e solo quando, nessuno dei suoi due determinanti è identicamente nullo.*

Se l'algebra A è la somma diretta di due algebre A_1 e A_2 e queste sono generate, rispettivamente, dalle unità $u_1, \ldots, u_m$ e $u_{m+1}, \ldots, u_n$, tra i parametri, sinistri o destri, dell'elemento x sono nulli tutti quelli per cui un indice cade nella serie $1, \ldots, m$ e l'altro nella serie $m+1, \ldots, n$; inoltre se

$$x = x_1 + x_2 ,$$

con x_1 in A_1 e x_2 in A_2, i parametri sinistri (destri) rimanenti di

x sono i parametri sinistri (destri) di x_1 in A_1 e x_2 in A_2. Quindi nel caso attuale:

La matrice, sinistra o destra, di x è composta [70] *con le matrici omonime di x_1 in A_1 e x_2 in A_2, o, ciò che fa lo stesso, è la somma delle matrici omonime di x_1 e x_2 in A; e il determinante di x, sinistro o destro, è il prodotto dei determinanti omonimi di x_1 in A_1 e x_2 in A_2.*

116. Se α è un qualunque numero di Γ, si ha

$$\mu_{\alpha x} = \alpha \mu_x , \quad \mu'_{\alpha x} = \alpha \mu'_x , \tag{58}$$

$$\delta_{\alpha x} = \alpha^n \delta_x , \quad \delta'_{\alpha x} = \alpha^n \delta'_x ; \tag{59}$$

inoltre per le matrici della somma dei due elementi x ed y si ha

$$\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y , \quad \mu'_{x+y} = \mu'_x + \mu'_y . \tag{60}$$

Ciò porta che le matrici, sinistra e destra, di x si possono esprimere mediante le matrici omonime delle unità $u_1, \ldots, u_n$ con le formule

$$\mu_x = \xi_1 \mu_{u_1} + \cdots + \xi_n \mu_{u_n} , \tag{61}$$

$$\mu'_x = \xi_1 \mu'_{u_1} + \cdots + \xi_n \mu'_{u_n} . \tag{62}$$

117. Per le matrici, sinistra e destra, di y e del prodotto xy si ponga

$$\mu_y = \| \eta_{i,k} \|, \quad \mu'_y = \| \eta'_{i,k} \|,$$

e

$$\mu_{xy} = \| \zeta_{i,k} \|, \quad \mu'_{xy} = \| \zeta'_{i,k} \|.$$

Sarà

$$\zeta_{i,k} = \sum_{j,h,l}^{1\ldots n} \gamma_{h,l,j} \gamma_{j,i,k} \xi_k \eta_l ,$$

ossia, per le (53)

$$\zeta_{i,k} = \sum_{j}^{1\ldots n} \eta_{i,j} \xi_{j,k} ,$$

e quindi

$$\mu_{xy} = \mu_y \mu_x . \tag{63}$$

(70) Per la definizione di matrice composta vedi loc. cit. (1), pag. 290.

Così è

$$\zeta'_{i,k} = \sum_{j,h,l}^{1\ldots n} \gamma_{h,l,j}\, \gamma_{i,j,k}\, \xi_h\, \eta_l\,,$$

ossia, per le (53),

$$\zeta'_{i,k} = \sum_{j}^{1\ldots n} \xi'_{i,j}\, \eta'_{j,k}\,,$$

e quindi

$$\mu'_{xy} = \mu'_x\, \mu'_y\,. \tag{64}$$

Dalle (63) e (64) si deducono per i determinanti sinistri e destri di x, y, xy le relazioni

$$\delta_{xy} = \delta_x\, \delta_y\,, \tag{65}$$

$$\delta'_{xy} = \delta'_x\, \delta'_y\,. \tag{66}$$

Dalle (63), ... , (66) segue che se r è un qualsivoglia intero positivo si ha

$$\mu_{x^r} = \mu^r_x\,, \quad \mu'_{x^r} = \mu'^r_x\,, \tag{67}$$

$$\delta_{x^r} = \delta^r_x\,, \quad \delta'_{x^r} = \delta'^r_x\,; \tag{68}$$

e quindi, tenendo presenti le (58) e (60), si ha che:

Se $g(x)$ è una qualunque funzione razionale intera di x, le matrici, sinistra e destra, di $g(x)$ sono date da

$$\mu_{g(x)} = g(\mu_x), \qquad \mu'_{g(x)} = g(\mu'_x)\,;$$

dove il significato delle notazioni $g(\mu_x)$ e $g(\mu'_x)$ è chiaro di per sè ed è ben conosciuto.

118. Se x è un nullifico sinistro di A. μ_x [n^0 115, a)] deve avere la nullità n, quindi ha da essere

$$\mu_x = 0.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta, senza che sia $x = 0$, x è un nullifico sinistro di A.

Segue che:

L'algebra A ammette nullifici sinistri quando, e solo quando, le matrici

$$\mu_{u_1}, \mu_{u_2}, \dots, \mu_{u_n}$$

sono dipendenti in Γ.

Analogamente si ha che:

L'algebra A ammette nullifici destri quando, e solo quando, le matrici

$$\mu'_{u_1}, \mu'_{u_2}, \dots, \mu'_{u_n}$$

sono dipendenti in Γ.

Ora se l'algebra A ammette nullifici sinistri (destri) non ammette moduli destri (sinistri), dunque:

Se A ammette moduli sinistri (destri), le matrici destre (sinistre) delle unità u_j sono indipendenti in Γ.

Segue che:

Se A ammette modulo sono indipendenti, in Γ, tanto le matrici sinistre quanto le matrici destre delle unità u_j.

Allora, basta tener conto delle osservazioni fatte nei n[i] 116 e 117, per dedurre che:

Se A ammette modulo, le matrici destre degli elementi di A costituiscono un'algebra equivalente ad A e le matrici sinistre degli elementi stessi costituiscono un'algebra reciproca ad A.

119. Dimostriamo ora che:

Se le $\gamma_{i,j,k}$ sono n^3 numeri del corpo Γ soddisfacenti alle n^4 relazioni (53), *esiste un'algebra — unica, rispetto alla relazione di equivalenza — di ordine n, e in questa un gruppo di unità, tale che rispetto ad esso l'algebra abbia per costanti di moltiplicazione appunto le $\gamma_{i,j,k}$.*

Si definiscano $(n+1)^3$ numeri

$$\gamma'_{h,l,m} \qquad (h, l, m = 1, \dots, n+1),$$

ponendo

$$\gamma'_{h,l,m} = \gamma_{h,l,m},$$

se nessuno dei tre indici h, l, m supera n;

$$\gamma'_{n+1,l,l} = \gamma'_{l,n+1,l} = 1,$$

per $l = 1, \dots, n+1$, e

$$\gamma'_{h,l,m} = 0,$$

per tutti gli altri casi in cui uno, almeno, dei tre indici è $n+1$.

Poi si indichi con ν_l $(l = 1, \dots, n+1)$ la matrice d'ordine $n+1$

$$\| \gamma'_{h,l,m} \| \qquad (h, m = 1, \dots, n+1).$$

Grazie all'ipotesi fatta sulle γ_{ijk} sarà

$$\sum_m^{1\dots n+1} \gamma'_{h,l,m} \gamma'_{m,r,s} = \sum_m^{1\dots n+1} \gamma'_{l,r,m} \gamma_{h,m,s} \qquad (h, l, r, s = 1, \dots, n+1);$$

quindi (cfr. il ragionamento del n° 117) per le $n+1$ matrici ν_l sarà

$$\nu_l \nu_h = \sum_m^{1\dots n+1} \gamma'_{l,h,m} \nu_m . \tag{69}$$

Intanto le $n+1$ matrici ν_l sono indipendenti in Γ, perchè la relazione

$$\sum_l^{1\dots n+1} \alpha_l \nu_l = 0,$$

con le α in Γ, equivale alle $(n+1)^2$ relazioni

$$\sum_l^{1\dots n+1} \alpha_l \gamma'_{h,l,m} = 0 \qquad (h, m, = 1, \dots, n+1),$$

e da queste per $h = n+1$, segue

$$\sum_l^{1\dots n+1} \alpha_l \gamma'_{n+1,l,m} = \alpha_m = 0 ;$$

dunque in base alle (69) le $n+1$ matrici in discorso costituiscono un gruppo di unità di un'algebra A' d'ordine $n+1$, avente per costanti di moltiplicazione le $\gamma'_{h,l,m}$, e dotata di modulo, questo essendo la matrice ν_{n+1}.

Entro quest'algebra le matrici

$$\nu_1, \dots, \nu_n \tag{70}$$

dànno una sotto-algebra A di ordine n con le costanti di moltiplicazione $\gamma_{i,j,k}$ rispetto al gruppo di unità (70).

Avvertasi che se le $\gamma_{i,j,k}$, oltre a soddisfare alle condizioni (53), sono tali che le matrici d'ordine n date da

$$\nu_j = \| \gamma_{i,j,k} \| \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$

per $j = 1, \dots, n$ risultino indipendenti, per costruire un'algebra avente le costanti di moltiplicazione $\gamma_{i,j,k}$ basta considerare queste n matrici.

Nel ragionamento fatto è implicitamente contenuto il seguente bel teorema di C. S. PEIRCE (71):

Un'algebra è sempre equivalente a un'algebra di matrici quadrate, cioè a una sotto-algebra di un'algebra regolare.

Siccome dal punto di vista astratto, algebre diverse, ma equivalenti possono riguardarsi come aspetti concreti diversi di una stessa algebra astratta, questo teorema può anche enunciarsi dicendo che:

Un'algebra si può sempre pensare come sotto-algebra di un'algebra regolare.

Un'osservazione analoga si tenga presente per intendere bene il significato della proposizione del n^0 che segue, e qualche altra affermazione successiva.

120. Se l'algebra A_1 è il prolungamento dell'algebra A in un corpo Γ_1, e come unità di A_1 si scelgono le stesse unità di A, le costanti di moltiplicazione di A_1 sono quelle di A.

Da ciò e dal teorema precedente segue subito che:

Se il corpo numerico Γ_1 contiene il corpo numerico Γ, ogni algebra definita in Γ è prolungabile nel corpo Γ_1.

121. Se in A si passa dalle unità u_j alle unità U_j con

$$U_j = \sum_i^{1\dots n} \tau_{j,i}\, u_i \qquad (j = 1, \dots, n)$$

e $|\tau_{j,i}| \neq 0$, le costanti di moltiplicazione $\Gamma_{j,k,s}$ rispetto alle unità

(71) Per la storia di questo teorema, attribuito talvolta erroneamente al WEYR, vedi H. TABER, loc. cit. (3), pag. 511. Avvertasi pure che questo teorema implica l'osservazione del POINCARÉ sullo stretto legame fra la teoria delle algebre e quella dei gruppi continui detti dal CARTAN bilineari. Vedi H. POINCARÉ, *Sur les nombres complexes* [Comptes Rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences (Paris), t. XCIX (2e semestre 1884), pp. 740-742].

U_j sono date da

$$\Gamma_{j,k,s} = \sum_{i,l,m}^{1\ldots n} \tau_{j,i}\, \tau_{k,l}\, \tau'_{s,m}\, \gamma_{i,l,m}\ ,$$

essendo $\tau'_{j,i}$ il *reciproco* di $\tau_{j,i}$ in $|\tau_{j,i}|$; e i parametri sinistri e destri dell'elemento x rispetto alle unità U_j sono dati da

$$\Xi_{k,s} = \sum_{l,m}^{1\ldots n} \tau_{k,l}\, \tau'_{s,m}\, \xi_{l,m}\ ,$$

$$\Xi'_{k,s} = \sum_{l,m}^{1\ldots n} \tau_{k,l}\, \tau'_{s,m}\, \xi'_{l,m}\ ;$$

quindi:

Per un cambiamento di unità i valori dei determinanti sinistro e destro di un elemento restano inalterati.

§ 18.

Teoremi di Cayley e di Frobenius. Equazioni fondamentali ed equazione minima di un'algebra.

122. Sia μ una matrice qualunque di ordine n, e v la matrice identica dello stesso ordine, con gli elementi in un corpo numerico Γ.

Si indichi con μ_0 la matrice trasposta dell'aggiunta di μ e con $|\mu|$ il determinante di μ. Sarà

$$\mu\mu_0 = \mu_0\, \mu = |\mu|\, v.$$

Se è

$$\mu = \| \mu_{j,l} \|$$

ed

$$\varepsilon_{j,l} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq l, \\ 1, & \text{se } j = l, \end{cases}$$

indicando con ξ una variabile, si chiamano, come è noto, *funzione caratteristica* ed *equazione caratteristica* di μ, la funzione

$$f(\xi) = | \mu_{j,l} - \varepsilon_{j,l}\, \xi |,$$

cioè il determinante della matrice $\mu - \xi v$, e l'equazione

$$f(\xi) = 0.$$

Ciò posto, si ha il seguente importante teorema di CAYLEY [72]: *La funzioni razionale intera di μ data da*

$$f(\mu)$$

è nulla.

Se $(\mu - \xi v)_0$ è la matrice trasposta dell'aggiunta di $\mu - \xi v$, si ha

$$(\mu - \xi v)_0 = \nu^{(0)} + \nu^{(1)} \xi + \dots + \nu^{(n-1)} \xi^{n-1},$$

indicando con $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n-1)}$ delle convenienti matrici d'ordine n, con gli elementi in Γ; quindi, se si pone

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n \qquad [\alpha_n = (-1)^n],$$

essendo

$$(71) \qquad (\mu - \xi v)_0 (\mu - \xi v) = f(\xi)\, v,$$

sarà, eguagliando nei due membri di questa relazione i coefficienti delle potenze di ξ con gli stessi esponenti,

$$\begin{aligned} \nu^{(0)} \mu \qquad &= \alpha_0 v \\ \nu^{(1)} \mu - \nu^{(0)} &= \alpha_1 v \\ \nu^{(2)} \mu - \nu^{(1)} &= \alpha_2 v \\ \dots\dots &\dots \\ - \nu^{n-1} &= \alpha_n v. \end{aligned}$$

Di qua, moltiplicando successivamente, a destra, per $v, \mu, \mu^2, \dots, \mu^n$ e sommando, si ricava

$$\alpha_0 v + \alpha_1 \mu + \dots + \alpha_n \mu^n = 0,$$

(72) Vedi a proposito di questo teorema famoso le notizie bibliografiche contenute nella *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, loc. cit. (61), pag. 418, annotazione (171). Alle citazioni che ivi si danno va aggiunta la seguente: O. PERRON, *Zur Theorie der Matrices* [Mathematische Annalen, Bd. 64 (1907), pp 248-263]; inoltre va notato che la dimostrazione ivi detta « la seconde demonstration de G. FROBENIUS », cioè, quella riprodotta nel testo, per quanto il FROBENIUS stesso dichiara nella Memoria che la contiene, è la dimostrazione del PASCH.

cioè, come volevasi,

$$f(\mu) = 0.$$

123. Se con $\theta(\xi)$ si indica il massimo comun divisore dei polinomi in ξ (con i gradi $\leq n-1$) che costituiscono gli elementi di $(\mu - \xi v)_0$, e si indica con ϱ il grado di $\theta(\xi)$, potrà porsi

$$(\mu - \xi v)_0 = \theta(\xi)\, \mu_1 ,$$

denotando con μ_1 una conveniente matrice i cui elementi siano polinomi in ξ, coi coefficienti in Γ, di gradi $\leq n - 1 - \varrho$, e primi tra di loro; e quindi sarà pure

$$(\mu - \xi v)_0 = \theta(\xi)\, [\nu_1^{(0)} + \nu_1^{(1)} \xi + \dots + \nu_1^{(n-1-\varrho)} \xi^{n-1-\varrho}] ,$$

le $\nu_1^{(0)}, \dots, \nu^{(n-1-\varrho)}$ essendo delle convenienti matrici, di ordine n, con gli elementi in Γ.

Intanto $\theta(\xi)$ è evidentemente un divisore di $f(\xi)$, dunque posto

$$f(\xi) = \theta(\xi)\, \psi(\xi),$$

dalla (71) si trae

$$[\nu_1^{(0)} + \nu_1^{(1)} \xi + \dots + \nu_1^{(n-1-\varrho)} \xi^{n-1-\varrho}]\, (\mu - \xi v) = \psi(\xi)\, v.$$

Di qua, ragionando come più sopra, si deduce che:

Non solo $f(\mu)$, ma addirittura $\psi(\mu)$ è nulla.

Dico ora che:

$$\psi(\xi) = 0$$

è l'equazione minima della matrice μ.

Infatti sia $F(\xi)$ un polinomio, coi coefficienti in Γ, tale che sia

$$F(\mu) = 0. \tag{72}$$

Se η è una ulteriore variabile, sarà

$$F(\xi) - F(\eta) = G(\xi, \eta)\, (\eta - \xi), \tag{73}$$

e $G(\xi, \eta)$ sarà un polinomio coi coefficienti in Γ.

Dalla (73), ponendo μ al posto di η, e ricordando la (72), si trae:

$$F(\xi)\,v = G(\xi,\,\mu)(\mu - \xi v).$$

Ma è

$$\psi(\xi)\,v = \mu_1(\mu - \xi v),$$

dunque

$$\psi(\xi)\,G(\xi,\,\mu)(\mu - \xi v) = F(\xi)\,\mu_1(\mu - \xi v)\,; \tag{74}$$

e di qua, come è facile persuadersi,

$$\psi(\xi)\,G(\xi,\,\mu) = F(\xi)\,\mu_1\,. \tag{75}$$

E infatti se il corpo numerico Γ è infinito, è certo che dalla (74) discende la (75), perchè $|\mu - \xi v|$ non è certo nullo per ogni valore di ξ; ma allora la (75), che esprime n^2 eguaglianze fra polinomi, verificabili con un calcolo diretto, sussistendo per il caso in cui Γ è infinito, sussiste in ogni caso.

In base alla (75), i prodotti di $F(\xi)$ per i singoli elementi di μ_1 sono tutti divisibili per $\psi(\xi)$; ma gli elementi di μ_1 sono polinomi in ξ primi tra di loro, dunque $\psi(\xi)$ è un divisore di $F(\xi)$, e ciò prova che

$$\psi(\xi) = 0$$

è l'equazione minima di μ.

È questo un notevolissimo complemento del teorema di CAYLEY dovuto al FROBENIUS (73).

124. Il teorema di CAYLEY permette di dedurre che:

Un'algebra regolare di ordine p^2 è del rango p.

Si supponga, come è lecito, che l'algebra data sia quella delle matrici d'ordine p con gli elementi in un corpo numerico assegnato.

Tra queste matrici si dica μ quella che nella riga j^{ma} ha nulli tutti gli elementi tranne quello appartenente alla colonna $(j+1)^{\text{ma}}$, che è eguale a 1, dove $j+1$ sta per 1 se $j = p$. Indicando con v la matrice identica, compresa tra le stesse matrici, si ha per μ

$$\mu^p - v = 0,$$

(73) G. FROBENIUS, *a) Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 (1878), pp. 1-63], pp. 11-12; e *b) Über vertauschbare Matrizen* [Sitzungsberichte der Königlich. Preussischen Akademie des Wissenschaften (1896), pp. 601-614]. Vedi anche C. ROSATI, loc. cit. 13).

mentre

$$\mu^{p-1}, \mu^{p-2}, \dots, \mu, v$$

sono indipendenti.

Si conclude che μ è del rango p.

Intanto, per il teorema di CAYLEY, nessun elemento dell'algebra è di rango superiore a p, dunque il rango dell'algebra è p e la sua equazione minima, di grado p, è fornita appunto dal teorema di CAYLEY.

125. Sia ora A un'algebra di ordine n nel corpo Γ con le unità

$$u_1, \dots, u_n$$

e siano le $\gamma_{i,j,k}$ le relative costanti di moltiplicazione.

Se le matrici, sinistra e destra, dell'elemento corrente x di A sono

$$\mu_x = \| \xi_{j,l} \|, \qquad \mu'_x = \| \xi'_{j,l} \|,$$

le funzioni caratteristiche

$$| \xi_{j,l} - \varepsilon_{j,l} \xi |, \qquad | \xi'_{j,l} - \varepsilon_{j,l} \xi |,$$

di μ_x e μ'_x si diranno *determinanti caratteristici, sinistro e destro*, di x o di A (una volta che x è l'elemento corrente dell'algebra) e si indicheranno con

$$\Delta_x(\xi) \quad \text{e} \quad \Delta'_x(\xi).$$

Ciò posto, si supponga che l'algebra A sia dotata di modulo.

In base al teorema di CAYLEY è

$$\Delta_x(\mu_x) = 0, \qquad \Delta'_x(\mu'_x) = 0;$$

ma le matrici μ_x, μ'_x al variare di x in A descrivono, sull'ipotesi fatta, due algebre delle quali una è reciproca, l'altra è equivalente ad A, dunque è pure

$$\Delta_x(x) = 0, \qquad \Delta'_x(x) = 0. \tag{76}$$

Si supponga invece che A sia priva di modulo e, com'è lecito (cfr. n^0 119), si pensi A come sotto-algebra di un'algebra A', di ordine $n+1$, dotata di modulo.

Se questo è u_{n+1}, le costanti di moltiplicazione $\gamma'_{h,k,m}$ di A' rispetto alle unità $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ si ottengono da quelle di A ponendo

$$\gamma'_{h,k,m} = \gamma_{h,k,m},$$

se nessuno dei tre indici h, k, m è superiore ad n,

$$\gamma'_{n+1,k,k} = \gamma'_{k,n+1,k} = 1$$

per $k = 1, \dots, n+1$, e

$$\gamma'_{h,k,m} = 0$$

per tutti gli altri casi in cui uno, almeno, dei tre indici è $n+1$; quindi le matrici, sinistra e destra, dell'elemento x, *concepito come elemento di* A', si ottengono da μ_x e μ'_x orlandole con una colonna di elementi tutti nulli e una riga costituita dalle coordinate $\xi_1, \dots, \xi_n$, 0 di x; e i determinanti caratteristici, sinistro e destro di x in A' sono dati da

$$\Delta_{1,x} = -\xi\Delta_x(\xi) \qquad \Delta'_{1,x}(\xi) = -\xi\Delta'_x(\xi).$$

Applicando ad A' l'osservazione fatta più sopra per A nel caso dell'esistenza del modulo, si trae che stavolta è

$$\Delta_{1,x}(x) = 0, \qquad \Delta'_{1,x}(x) = 0.$$

Le equazioni

$$\Delta_x(\xi) = 0, \qquad \Delta'_x(\xi) = 0,$$

o le equazioni

$$\xi\Delta_x(\xi) = 0, \qquad \xi\Delta'_x(\xi) = 0,$$

secondo che A è dotata o priva di modulo, si diranno le *equazioni fondamentali, sinistra* e *destra*, di x o di A (una volta che x è l'elemento corrente di A) ([74]).

([74]) Diciamo dunque *fondamentali* le equazioni che altri dice *caratteristiche*; vedi per es. E. L. DICKSON, loc. cit. ([9]), pag. 17. Abbiamo fatto questo perchè nell'algebra di tutte le matrici d'ordine p con gli elementi in un determinato corpo numerico, nella quale le due equazioni fondamentali coincidono, l'equazione fondamentale dell'algebra non è da confondere come qualcuno fa, con l'equazione *caratteristica* dell'elemento corrente, intesa per quest'ultima equazione quella che a questo modo viene denominata da tutti gli autori nella teoria delle matrici.

Notisi che:

Se A è dotata di modulo e questo è u, i determinanti caratteristici di x

$$\Delta_x(\xi) \quad e \quad \Delta'_x(\xi)$$

non sono altra cosa che i determinanti

$$\delta_{x-\xi u} \quad e \quad \delta'_{x-\xi u}$$

dell'elemento $x - \xi u$.

126. Il teorema di Frobenius dà modo di dedurre dalle equazioni fondamentali di un'algebra la sua equazione minima.

Infatti, mantenendo le notazioni precedenti e limitandoci al caso in cui A è dotata di modulo, una volta che l'altro si riporta a questo nel modo or ora indicato, si ha subito che il primo membro $f(\xi)$ dell'equazione minima di A si può ottenere da

$$\Delta_x(\xi) \quad o \quad \Delta'_x(\xi),$$

dividendo l'uno o l'altro di questi determinanti per il polinomio in ξ che dà il massimo comun divisore dei suoi minori d'ordine $n-1$.

Posto

$$\Delta_x(\xi) = f(\xi)\,\theta(\xi), \qquad \Delta'_x(\xi) = f(\xi)\,\theta'(\xi),$$

i polinomi $f(\xi)$, $\theta(\xi)$ e $\theta'(\xi)$ sono univocamente determinati quando si ponga che il coefficiente della più alta potenza di ξ in $f(\xi)$ sia 1, e quindi quelli di $\theta(\xi)$ e $\theta'(\xi)$ siano entrambi eguali a $(-1)^n$; dopo di che, essendo i coefficienti di ξ in $\Delta_x(\xi)$ e $\Delta'_x(\xi)$ funzioni razionali intere delle $\xi_1, \ldots, \xi_n$, tali saranno pure quelli di ξ in $f(\xi)$, $\theta(\xi)$ e $\theta'(\xi)$.

Aggiungasi che:

I fattori irriducibili distinti di $\Delta_x(\xi)$, $\Delta'_x(\xi)$ ed $f(\xi)$ sono gli stessi.

Che ogni fattore irriducibile di $f(\xi)$ sia un tal fattore per $\Delta_x(\xi)$ e $\Delta'_x(\xi)$ è evidente; quindi basterà far vedere che se, ad es., $\psi(\xi)$ è un fattore irriducibile di $\Delta_x(\xi)$, questo è pure un fattore irriducibile di $f(\xi)$.

Infatti siano $[\psi(\xi)]^\alpha$ e $[\psi(\xi)]^\beta$ le potenze di $\psi(\xi)$, con esponenti massimi, che entrano in $\Delta_x(\xi)$ e $\theta(\xi)$ rispettivamente.

Il determinante aggiunto di $\Delta_x(\xi)$ sarà divisibile per $[\psi(\xi)]^{n\beta}$; ma esso è uguale alla potenza $(n-1)^{\text{ma}}$ di $\Delta_x(\xi)$ e quindi è divisibile per $[\psi(x)]^{(n-1)\alpha}$ e non per una potenza di $\psi(\xi)$ con esponente più elevato, quindi è

$$n\beta \leq (n-1)\alpha.$$

Di qua risulta

$$\beta < \alpha;$$

cosicchè $\psi(\xi)$ entra in $f(\xi)$ con l'esponente ***positivo*** $\alpha - \beta$.

§ 19.

Alcune osservazioni sull' equazione minima

127. *Se l'algebra A è dotata di modulo ed è la somma diretta delle algebre A_1 e A_2, il primo membro dell'equazione minima di A è il prodotto dei primi membri delle equazioni minime di A_1 e A_2* (75).

Sia x l'elemento corrente di A. Posto

$$x = x_1 + x_2,$$

con x_1 in A_1 e x_2 in A_2, saranno x_1 e x_2 gli elementi correnti di A_1 e A_2, e se le coordinate di x_1 e x_2 in A_1 e A_2 sono le $\xi_i^{(1)}, \xi_j^{(2)}$ $(i = 1, \ldots, n_1;\ j = 1, \ldots, n_2$, dove n_1 ed n_2 sono gli ordini di A_1 e $A_2)$, le $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ tutte insieme potranno pensarsi come le coordinate di x in A.

Siano ora

$$f(\xi) = 0, \qquad f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\xi) = 0$$

le equazioni minime di A, A_1 e A_2.

Sarà

$$f(x) = 0,$$

e quindi [n° 74, f)]

$$f(x_1) = 0, \qquad f(x_2) = 0.$$

(75) Per questo teorema da attribuire allo Study, vedi G. Scheffers, loc. cit. (38), pag. 320, ove si rimanda alla Memoria dello Study, *Recurrirende Reihen und bilineare Formen* [Monatshefte für Mathematik und Physik, II Jahrgang (1891), pp. 23-54]. Quivi il teorema si presenta come proposizione riguardante non le algebre riducibili, ma le serie ricorrenti, argomenti la cui stretta affinità è messa in luce appunto dagli sviluppi dello Study.

La dimostrazione del testo sembra la più diretta e la più semplice possibile.

Segue che $f(\xi)$ è divisibile per $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$ e quindi anche per il loro minimo multiplo comune.

D'altronde, se un polinomio $F(\xi)$ è divisibile per $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$ è

$$F(x_1) = F(x_2) = 0,$$

e quindi anche

$$F(x) = 0\,;$$

dunque $f(\xi)$ è il minimo multiplo comune di $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$.

Ora i fattori irriducibili di $f_1(\xi)$ sono indipendenti dalle $\xi^{(2)}$, quelli di $f_2(\xi)$ sono indipendenti dalle $\xi^{(1)}$; i determinanti caratteristici di x_1 in A_1 e di x_2 in A_2 non hanno fattori irriducibili comuni indipendenti dalle $\xi^{(1)}$ e dalle $\xi^{(2)}$, perchè un tal fattore non potrebbe essere che ξ, e questo è impossibile una volta che A_1 e A_2 sono dotate di modulo e quindi quei determinanti non sono privi di termine noto; dunque $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ sono primi tra loro e il teorema è dimostrato.

128. L'algebra A sia dotata di modulo e di sotto-algebra eccezionale propria E.

Se n, m sono gli ordini di A ed E, si può supporre che le unità

$$u_1, \ldots, u_m$$

costituiscano un gruppo di unità di E, e se

$$x = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_m u_m + \xi_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \xi_n u_n$$

è l'elemento corrente di A con le coordinate $\xi_1, \ldots, \xi_n$, si possono riguardare le $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n$ come le coordinate dell'elemento corrente $[x]$ di $A - E$ individuato da x, rispetto alle unità $[u_{m+1}], \ldots, [u_n]$ di $A - E$ corrispondenti agli elementi $u_{m+1}, \ldots, u_n$ di A.

Naturalmente le costanti di moltiplicazione di $A - E$ rispetto a queste unità si otterranno dalle costanti $\gamma_{i,j,k}$ di $A - E$, considerando fra queste solo quelle in cui nessuno dei tre indici è inferiore ad $m + 1$.

A proposito delle equazioni minime di A ed $A - E$ sussiste il seguente teorema:

Se l'indice di E è r e le equazioni minime di A ed $A - E$ sono

$$f(\xi) = 0 \qquad e \qquad \varphi(\xi) = 0,$$

$[\varphi(\xi)]^r$ ***è divisibile per*** $f(\xi)$, ***ed*** $f(\xi)$ ***è divisibile per*** $\varphi(\xi)$ (76).

Da

$$\varphi([x]) = [0],$$

si trae

$$\varphi(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } E),$$

ossia che $\varphi(x)$ è un elemento di E. Ma E ha l'indice r, dunque

$$[\varphi(x)]^r = 0,$$

e $[\varphi(\xi)]^r$ è divisibile per $f(\xi)$.

Inversamente da

$$f(x) = 0$$

segue

$$f([x]) = [0],$$

dunque $f(\xi)$ è divisibile per $\varphi(\xi)$.

Dal teorema dimostrato risulta che:

Se $f(\xi)$ *è irriducibile, o anche se* $f(\xi)$ *è riducibile, ma i suoi fattori irriducibili sono tutti differenti, è*

$$f(\xi) = \varphi(\xi).$$

§ 20.

Le algebre complesse

129. Per brevità di discorso diremo *algebra complessa* un'algebra che sia definita nel corpo degli ordinari numeri complessi.

Da quanto è detto nel n° 126, ricordando che nel corpo degli ordinari numeri complessi ogni polinomio in una variabile è decomponibile in un prodotto di fattori lineari, si ricava subito che:

In un'algebra complessa dotata di modulo le radici distinte dell'equazione minima di un elemento qualunque sono le radici distinte di ciascuna delle due equazioni fondamentali dell'elemento stesso. Inoltre le moltiplicità di una radice dell'equazione minima per le due equazioni fondamentali sono entrambe non inferiori alla moltiplicità della radice stessa per l'equazione minima (77).

(76) Loc. cit. (7), pag. 102.

(77) G. Scheffers, loc. cit. (38), pag. 304.

130. Si consideri in questo n^0 e nei successivi un'algebra complessa A di ordine n col modulo u.

Se le radici dell'equazione fondamentale sinistra (destra) dell'elemento x di A sono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e

$$y = g(x)$$

è una funzione razionale intera di x, il determinante sinistro (destro) di y è dato dal prodotto

$$g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \dots g(\alpha_n).$$

Si supponga che le $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ siano le radici dell'equazione fondamentale sinistra di x

$$\Delta_x(\xi) = 0.$$

Posto

$$g(\xi) = \beta_1\, \xi^m + \beta_1\, \xi^{m-1} + \dots + \beta_{m-1}\, \xi + \beta_m,$$

e indicati con $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ gli zeri di $g(\xi)$, si ha

$$y = g(x) = \beta_0 (x - \gamma_1 u) \dots (x - \gamma_m u);$$

quindi si ha per il determinante sinistro di y:

$$\delta_y = \beta_0^n\, \delta_{x-\gamma_1 u} \dots \delta_{x-\gamma_m u},$$

ossia

$$\delta_y = \beta_0^n\, \Delta_x(\gamma_1) \dots \Delta_x(\gamma_m).$$

Ma è

$$\beta_0^n\, \Delta_x(\gamma_1) \dots \Delta_x(\gamma_m) = g(\alpha_1) \dots g(\alpha_n),$$

dunque, come volevasi,

$$\delta_{g(x)} = g(\alpha_1) \dots g(\alpha_n).$$

131. *Se le radici dell'equazione fondamentale sinistra (destra) di x sono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e*

$$y = g(x)$$

é una funzione razionale intera di x, le radici dell'equazione fondamentale sinistra (destra) di y sono date da

$$g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_n) \text{ [78]}.$$

Si ponga infatti:

$$h(x) = g(x) - \xi u.$$

Il primo membro dell'equazione fondamentale, per es., sinistra di $g(x)$ sarà dato da

$$\Delta_{g(x)}(\xi) = \delta_{g(x)-\xi u} = \delta_{h(x)};$$

dunque, per il teorema prec., se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici dell'equazione fondamentale sinistra di x, sarà

$$\Delta_{g(x)}(\xi) = h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) = [g(\alpha_1) - \xi] \dots [g(\alpha_n) - \xi];$$

e ciò significa appunto che gli zeri di $\Delta_{g(x)}(\xi)$ sono $g(\alpha_1), \dots g(\alpha_n)$.

132. La somma delle radici dell'equazione fondamentale sinistra (destra) dell'elemento x di A si dice *traccia sinistra* (*destra*) di x e [79] si indicherà con σ_x (con σ'_x). Essa è una forma lineare delle coordinate di x, i coefficienti essendo formati con le costanti di moltiplicazione; precisamente è

$$\sigma_x = \sum_{i,j}^{1\dots n} \gamma_{i,j,j}\, \xi_i, \qquad \sigma'_x = \sum_{i,j}^{1\dots n} \gamma_{j,i,j}\, \xi_i.$$

Se α è un qualunque numero complesso, è chiaro che:

$$\sigma_{\alpha x} = \alpha\sigma_x, \qquad \sigma'_{\alpha x} = \alpha\sigma'_x; \tag{77}$$

[78] Questa proposizione generalizza la così detta *legge di latenza* del SYLVESTER.

[79] L'introduzione di questi *caratteri* di x è dovuta al FROBENIUS, loc. cit. [6]. Con uno di essi si è incontrato quasi contemporaneamente il TABER nella sua Memoria citata in [3]. Su questo proposito il TABER è ritornato poi con le sue Memorie: *a*) *The scalar functions of hypercomplex numbers* [Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, vol. XLI (1905), pp. 59-70]; *b*) *On the scalar functions of hypercomplex numbers* [ibid., vol. XLVIII (1913), pp. 627-667] nelle quali i caratteri in discorso sono considerati entrambi. Egli chiama *funzioni scalari* di x quelle che secondo la nomenclatura del FROBENIUS adottata nel testo sarebbero da dire le *tracce* di x divise per l'ordine dell'algebra A.

e se y è un elemento qualunque di A, è pur chiaro che:

(78) $$\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y\,, \qquad \sigma'_{x+y} = \sigma'_x + \sigma'_y\,.$$

Badando poi alle relazioni che legano le costanti di moltiplicazione si verifica subito che è

(79) $$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}\,, \qquad \sigma'_{xy} = \sigma'_{yx}\,.$$

Le tracce del modulo sono entrambe eguali ad n.

Se un elemento è nullo o pseudonullo, la sua equazione minima è della forma
$$\xi^r = 0,$$
ossia è a radici tutte nulle; dunque sono a radici tutte nulle anche le sue equazioni fondamentali, e le sue tracce sono entrambe nulle.

Segue che se x è per A un elemento nullo o eccezionale, è

$$\sigma_{xy} = 0, \qquad \sigma'_{xy} = 0,$$

qualunque sia l'elemento y di A.

Viceversa, suppongasi che per x sia
$$\sigma_{xy} = 0,$$
comunque y varii in A.

Se r è un intero positivo ≥ 2, sarà
$$\sigma_{(xy)^r} = \sigma_{x\cdot(yx)^{r-1}y} = 0,$$
quindi è
$$\sigma_{(xy)^t} = 0,$$
qualunque sia l'intero positivo t.

Ora l'equazione fondamentale sinistra di $(xy)^t$ ha per radici (n^0 131) le potenze t^{esime} delle radici dell'equazione fondamentale sinistra di xy; dunque l'equazione fondamentale sinistra di xy è tale che per essa è nulla la somma delle potenze t^{esime} delle radici, *qualunque sia* t. Segue che essa è a radici tutte nulle e che quindi xy è nullo o pseudonullo.

Ciò significa che x è nullo o eccezionale.

133. Le osservazioni precedenti forniscono un criterio, di assai comoda applicazione, per decidere se un'assegnata algebra complessa dotata di modulo è, o no, semi-semplice.

Si costruisca la traccia, ad es., sinistra σ_{xy}, del prodotto di due elementi x ed y dell'algebra, che risulta per la (79) una forma bilineare simmetrica nelle coordinate di x ed y; e si scrivano le equazioni lineari omogenee nelle coordinate di x che si ottengono annullando le derivate parziali di questa forma rispetto alle coordinate di y.

L'algebra data sarà semi-semplice, o non semi-semplice, secondo che le equazioni in discorso sono risolubili, o no, con valori non tutti nulli delle incognite.

Annullare le derivate parziali di σ_{xy} rispetto alle coordinate di y, siccome σ_{xy} è simmetrica, equivale ad annullare le derivate parziali della forma quadratica σ_{x^2} delle coordinate di x, rispetto a queste coordinate stesse; quindi:

L'algebra data è semi-semplice o no, secondo che la forma quadratica σ_{x^2} é a discriminante diverso da zero o eguale a zero. E nella seconda alternativa la nullità del discriminante é l'ordine della sotto-algebra eccezionale (80).

134. Se un'algebra complessa è primitiva, l'equazione minima di un elemento qualunque, dovendo essere irriducibile nel corpo dei numeri complessi, non può essere di grado superiore al primo; dunque:

Un'algebra complessa primitiva è l'algebra di ordine 1 *generata da un automodulo.*

Una tale algebra è pertanto un corpo numerico isomorfo al corpo degli ordinari numeri complessi.

Di qua, ricordando il teorema n⁰ 106, risulta che:

Un'algebra complessa semplice, che non sia una zero-algebra di ordine 1, *o, ciò che è lo stesso, un'algebra complessa semplice e dotata di modulo è un'algebra regolare* (81).

Se l'ordine di una tale algebra A è p^2, il suo rango, cioè il grado della sua equazione minima, è p.

Supponendo che A sia l'algebra delle matrici d'ordine p ad elementi complessi, l'equazione minima di A è data dal teorema di CAYLEY ed ha per termine noto, a meno, eventualmente, del segno, il determinante della matrice corrente d'ordine p.

Ma un tal determinante è funzione irreduttibile dei suoi elementi, dunque, per una facile deduzione:

(80) Questo bel teorema è dovuto al FROBENIUS. Esso è stato ritrovato dal TABER nella Memoria *b*) ricordata in (79).

(81) T. MOLIEN, loc. cit. (24).

L'equazione minima di un'algebra complessa semplice dotata di modulo è irriducibile.

I primi membri delle equazioni fondamentali dell'algebra A che sono del grado p^2, non potendo avere zeri differenti da quelli del primo membro dell'equazione minima, debbono coincidere entrambi, a meno di un fattore numerico, con la potenza p^{esima} di quest'ultimo; dopo di che è chiaro che questo fattore numerico è $+1$ o -1, secondo che p è pari o dispari.

Da ciò segue che:

I primi membri delle due equazioni fondamentali di un'algebra complessa semplice dotata di modulo, d'ordine p^2, coincidono; e sono, a meno, in caso, del segno, la potenza p^{ma} del primo membro dell'equazione minima.

In particolare:

In un'algebra complessa semplice dotata di modulo i determinanti sinistro e destro dell'algebra coincidono.

135. Un'algebra complessa A dotata di modulo, semi-semplice, ma non semplice, è la somma diretta di due o più algebre complesse semplici dotate di modulo, e quindi regolari. Se gli ordini di queste sono $p_1^2, \dots, p_t^2$, l'ordine di A è

$$u = p_1^2 + \dots + p_t^2;$$

l'equazione minima di A, per il teorema dei n⁰ 127, è del grado

$$q = p_1 + \dots + p_t,$$

e i primi membri delle equazioni fondamentali coincidono col prodotto delle potenze $p_1^{\text{me}}, \dots, p_t^{\text{me}}$, rispettivamente, di certi stessi t fattori irreducibili dei gradi $p_1, \dots p_t$.

La coincidenza delle equazioni fondamentali, sinistra e destra, e dei determinanti, sinistro e destro, sta dunque per tutte le algebre complesse semi-semplici dotate di modulo.

136. Un'algebra complessa a modulo primitivo d'ordine $r > 1$ non è primitiva e quindi non è neppure semi-semplice; ma l'algebra complementare della sotto-algebra eccezionale, dovendo esser complessa e primitiva, è di ordine 1, dunque la sotto-algebra eccezionale è di ordine $r - 1$ e l'algebra data è la somma (non diretta) della sua sotto-algebra eccezionale e dell'algebra primitiva generata dal modulo.

Il prodotto diretto di una tale algebra per un'algebra complessa regolare d'ordine p^2 è dunque un'algebra d'ordine rp^2 somma (non diretta) di un'algebra semplice o regolare d'ordine p^2 e della sua sotto-algebra eccezionale d'ordine $(r-1)p^2$.

Di qua, per il teorema del n⁰ 111, segue facilmente che:

Ogni algebra complessa dotata di modulo non semi-semplice è somma (non diretta) della sua sotto-algebra eccezionale e di un'algebra semi-semplice ([82]).

§ 21.

Algebre reali e algebre razionali.

137. Un'algebra si dirà *reale* o *razionale*, se è definita nel corpo degli ordinari numeri reali o razionali.

Una tale algebra si può sempre pensare come prolungabile in un'algebra complessa. Osservando che per un tale prolungamento le equazioni fondamentali e l'equazione minima dell'algebra non mutano di forma, mutando solo il campo di variabilità delle coordinate dell'elemento corrente che compariscono in esse, si ha subito che i teoremi dei n^i 129, 130, 131, 132, 133 sussistono tutti anche per le algebre reali e razionali.

In particolare dal fatto che gli eventuali elementi eccezionali di un'algebra razionale, reale o complessa, dotata di modulo, si ottengono al modo indicato nel n⁰ 133 si deduce subito l'interessante enunciato:

Un'algebra reale e il suo prolungamento nel corpo dei numeri complessi, o un'algebra razionale e i suoi prolungamenti nei corpi dei numeri reali o complessi, sono insieme semi-semplici o insieme non semi-semplici.

138. Un'algebra reale primitiva è del rango 1 o 2, perchè nel corpo dei numeri reali ogni equazione di grado superiore al secondo è riducibile; quindi essa si prolunga in un'algebra complessa semi-semplice (non pseudonulla) di rango 1 o 2.

Questa o è semplice, quindi regolare e di ordine 1 o 4; o è somma diretta di due algebre semplici di rango 1, e quindi di ordine 2; dunque:

Un'algebra reale primitiva ha:

([82]) Questo teorema fondamentale è dovuto al CARTAN [(loc. cit. ([5])].

I) *l'ordine* 1 *e il rango* 1*; oppure*

II) *l'ordine* 2 *e il rango* 2*; oppure*

III) *l'ordine* 4 *e il rango* 2.

Nel caso I) l'algebra è evidentemante un corpo numerico isomorfo al corpo dei numeri reali.

139. Si supponga che A sia un'algebra reale primitiva di rango 2.

Se x è un elemento di A il cui rango sia 2, e u è il modulo, si ha per x:

$$x^2 + \alpha x + \beta u = 0 \tag{80}$$

con α e β numeri reali, e

$$\alpha^2 - 4\beta < 0,$$

una volta che il trinomio $\xi^2 + \alpha\xi + \beta$ ha da essere irriducibile nel corpo dei numeri reali.

Ora la (80) può scriversi

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}u\right)^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4}u = 0,$$

quindi, posto

$$\frac{4\beta - \alpha^2}{4} = \gamma^2,$$

con γ reale positivo, e

$$y = \frac{1}{\gamma}x + \frac{\alpha}{2\gamma}u,$$

si ha

$$y^2 = -u.$$

Ora dire che x è di rango 2 equivale a dire, nel caso attuale, che x ed u sono indipendenti, dunque:

Se A è di rango 2, *nel sistema di ordine* 2 *generato dal modulo u e da un elemento indipendente da esso vi è sempre un elemento il cui quadrato è $-u$.*

Da ciò discende subito che:

Un'algebra reale primitiva di ordine 2 *è un'algebra con due unità u e v, per le quali si ha*

$$u^2 = u, \qquad uv = vu = v, \qquad v^2 = -u;$$

per modo che una tale algebra è un corpo numerico isomorfo al corpo numerico degli ordinari numeri complessi.

Suppongasi ora che A sia dell'ordine 4 e tre suoi elementi indipendenti siano u_1, u_2, e v_3, essendo $u_1 = u$ il modulo, ed essendo, com'è lecito supporre, per il ragionamento fatto più sopra:

$$u_2^2 = v_3^2 = - u_1 .$$

Come unità di A potranno assumersi (cfr. n° 47)

$$u_1 \, ; \; u_2 \, ; \; v_3 \qquad \text{e} \qquad v_4 = u_2 v_3 .$$

Siccome $u_2 + v_3$ e $u_2 - v_3$ sono elementi di A (indipendenti da u_1 e quindi) di rango 2, sussisteranno relazioni della forma

$$(u_2 + v_3)^2 + \alpha_1 (u_2 + v_3) + \beta_1 u_1 = 0,$$

$$(u_2 - v_3)^2 + \alpha_2 (u_2 - v_3) + \beta_2 u_1 = 0,$$

con α_1, β_1, α_2 e β_2 numeri reali e

(81) $$\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0, \qquad \alpha_2^2 - 4\beta_2 < 0.$$

Ma

$$(u_2 + v_3)^2 = - 2u_1 + u_2 v_3 + v_3 u_2 ,$$

$$(u_2 - v_3)^2 = - 2u_1 - u_2 v_3 - v_3 u_2 ,$$

dunque

$$2u_1 - u_2 v_3 - v_3 u_2 = \alpha_1 (u_2 + v_3) + \beta_1 u_1 ,$$

$$2u_1 + u_2 v_3 + v_3 u_2 = \alpha_2 (u_2 - v_3) + \beta_2 u_1 .$$

Sommando, e badando che u_1, u_2 e v_3 sono indipendenti, si trova che deve essere

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 4 ;$$

quindi sottraendo risulta

$$u_2 v_3 + v_3 u_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} u_1 = 2\gamma u_1 ,$$

dove

$$\gamma = \frac{\beta_2 - \beta_1}{4} .$$

Pongasi ora

$$u_3 = \frac{v_3 + \gamma u_2}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

dove $\sqrt{1-\gamma^2}$ è reale non nullo, perchè, essendo $\beta_1 + \beta_2 = 4$, è

$$1 - \gamma^2 = \frac{\beta_1 \beta_2}{4},$$

e β_1, β_2 per le (81), dove $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, sono positivi.

Prendendo come unità di A

$$u_1, u_2, u_3, u_4 = u_2 u_3,$$

si ha per queste

$$u_1 u_i = u_i u_1 = u_i \qquad (i = 2, 3, 4),$$

$$u_2^2 = u_3^2 = u_4^2 = -u_1$$

$$u_2 u_3 = -u_3 u_2 = u_1; \quad u_3 u_4 = -u_4 u_3 = u_2; \quad u_4 u_2 = -u_2 u_4 = u_3;$$

cosicchè in questo caso l'algebra A è equivalente all'algebra degli ordinari quaternioni, o, come anche diremo, dei quaternioni reali.

140. Raccogliendo le osservazioni fatte nei n[i] 138 e 139 si ha il teorema:

I tipi di algebre reali primitive sono tre e sono dati dalle algebre dei numeri reali, degli ordinari numeri complessi e degli ordinari quaternioni ([83]).

Si osservi che l'algebra dei quaternioni reali e l'algebra reale regolare di ordine 4 hanno entrambe per prolungamento un'algebra complessa regolare di ordine 4; quindi:

Algebre non equivalenti possono avere prolungamenti equivalenti.

([83]) Questo teorema viene ordinariamente attribuito al FROBENIUS, ma il FROBENIUS nella Memoria *a*) citata in ([73]) non lo dimostra che per algebre i cui elementi siano matrici quadrate. Per il teorema di C. S. PEIRCE incontrato nel n[0] 119 del testo questa limitazione non è che apparente, ma in quella Memoria il FROBENIUS, nè dimostra il teorema di C. S. PEIRCE, nè se ne mostra informato.

Comunque il teorema di FROBENIUS venne ritrovato da C. S. PEIRCE nelle *Addenda* che fece seguire alla Memoria del padre, B. PEIRCE, citata in ([19]).

141. Mettendo a raffronto il teorema del n^0 106 con quello del n^0 prec. si ha il bel teorema di CARTAN:

Un'algebra reale semplice dotata di modulo è un'algebra regolare oppure è il prodotto di una algebra regolare e di un'algebra equivalente a quella degli ordinari numeri complessi o degli ordinari quaternioni.

Cosicchè l'ordine di una tale algebra è, a seconda dei casi, della forma p^2, $2p^2$ o $4p^2$.

142. Un'algebra regolare di ordine > 1 non è mai commutativa, nè è tale l'algebra dei quaternioni reali, quindi:

Un'algebra reale semplice dotata di modulo e commutativa equivale all'algebra degli ordinari numeri reali o degli ordinari numeri complessi;

e:

Un'algebra reale commutativa semi-semplice, ma non semplice, è somma diretta di algebre di cui ciascuna equivale all'algebra degli ordinari numeri reali o degli ordinari numeri complessi [84].

143. *L'ordine n di un'algebra razionale primitiva A di rango ϱ è della forma*

$$n = \varrho\varrho',$$

con ϱ' divisore di ϱ, e quindi é

$$n \leq \varrho^2$$ [85].

Sia

$$F(\xi, \xi_i) \equiv \xi^\varrho + f_1(\xi_1, \dots, \xi_n)\,\xi^{\varrho-1} + \dots + f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \tag{82}$$

l'equazione minima di A, essendo le ξ_i le coordinate dell'elemento corrente e le f_j funzioni razionali intere dei loro argomenti a coefficienti razionali.

(84) È questo il teorema di WEIERSTRASS cui si allude nella prefazione.

(85) Questa proposizione, che per la teoria delle matrici riemanniane è di importanza fondamentale, è implicitamente contenuta in una comunicazione del signor R. B. ALLEN alla Società americana di matematica [vedi: Bulletin of the American Mathematical Society, vol. XI (1904-1905), pag. 351] ed è stata, in parte soltanto, dimostrata dallo WEDDERBURN [loc. cit. (7), pag. 104]. Ma, che io sappia, nè lo ALLEN, nè altri ne ha pubblicato una dimostrazione compiuta. Dei due problemi di cui si parla in quella comunicazione soltanto gli sviluppi relativi al primo sono stati pubblicati dallo ALLEN nella sua Memoria: *On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. IX (1908), pp. 203-218].

Siccome A è primitiva, la (82) è certo irriducibile nel corpo delle funzioni razionali a coefficienti razionali delle ξ_i, cioè il polinomio $F(\xi, \xi_i)$, che ne costituisce il primo membro, non è decomponibile nel prodotto di due polinomi dello stesso tipo coi gradi, rispetto a ξ, positivi e minori di ϱ.

Si dica A' l'algebra complessa che è il prolungamento di A nel corpo dei numeri complessi, e la cui equazione minima è data dalla (82), quando vi si imagini ampliato nel corpo dei numeri complessi il campo di variabilità delle ξ_i.

Essendo A primitiva, A' (n^0 137) è certo semi-semplice e dotata di modulo; quindi A' o è semplice, cioè (n^0 134) regolare, o è somma diretta di due o più algebre semplici, cioè regolari. Nel primo caso, $F(\xi, \xi_i)$ è irriducibile anche nel corpo delle funzioni razionali delle ξ_i con coefficienti complessi; nel secondo, $F(\xi, \xi_i)$ si spezza, in questo corpo, in due o più polinomi coi gradi, rispetto a ξ, positivi e minori di ϱ.

In ogni caso, indichiamo con t il numero dei fattori irriducibili di $F(\xi, \xi_i)$ nel corpo in discorso, e poniamo

$$F(\xi, \xi_i) = F_1(\xi, \xi_i) \dots F_t(\xi, \xi_i), \tag{83}$$

supponendo, come è lecito, che in ciascuno dei polinomi F_j il coefficiente del termine di grado più elevato in ξ sia l'unità.

Essendo $F(\xi, \xi_j)$ irriducibile nel corpo delle funzioni razionali delle ξ_i a coefficienti razionali, i fattori F_j sono tutti distinti. Dico, inoltre, che rispetto a ξ essi sono tutti dello stesso grado.

I coefficienti delle ξ, ξ_i in $F(\xi, \xi_i)$ sono numeri razionali, dunque i coefficienti delle ξ, ξ_i nei polinomi F_j, che si ottengono identificando i coefficienti dei termini simili dei due membri della (83) e risolvendo il sistema di equazioni algebriche che così risulta, sono radici di equazioni a coefficienti (razionali, o, a dirittura) interi, cioè sono *numeri algebrici*.

Ciò posto, se $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ sono gli irrazionali algebrici che compariscono nei coefficienti di $F_1(\xi, \xi_i)$, si costruiscano tutti i polinomi

$$F_1^{(1)}(\xi, \xi_i) = F_1(\xi, \xi_i), \qquad F_1^{(2)}(\xi, \xi_i), \dots, F_1^{(\nu)}(\xi, \xi_i),$$

che si ottengono da $F_1(\xi, \xi_i)$ cambiando in esso ciascuna delle $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$, in tutte le maniere possibili, con gli irrazionali ad essa *coniugati*.

Siccome in $F_1(\xi, \xi_i)$ il coefficiente del termine di grado più elevato in ξ è l'unità, lo stesso avverrà per tutti questi polinomi, i quali risulteranno tutti dello stesso grado rispetto a ξ.

Il prodotto

$$G(\xi, \xi_i) = F_1^{(1)}(\xi, \xi_i)\, F_1^{(2)}(\xi, \xi_i) \dots F_1^{(\nu)}(\xi, \xi_i)$$

è un polinomio in ξ avente per coefficienti funzioni razionali intere delle ξ_i a coefficienti razionali; tale è, dunque, anche il massimo comun divisore di $F(\xi, \xi_i)$ e $G(\xi, \xi_i)$, il quale non è certo una costante, perchè $F(\xi, \xi_i)$ e $G(\xi, \xi_i)$ hanno a comune il fattore $F_1(\xi, \xi_i)$.

Ma $F(\xi, \xi_i)$ è irriducibile nel corpo delle funzioni razionali delle ξ_i a coefficienti razionali, dunque cotesto massimo comun divisore deve coincidere con $F(\xi, \xi_i)$, e ciascuno dei polinomi $F_2, \dots, F_t$ deve dividere uno almeno dei polinomi $F_1^{(2)}, \dots, F_1^{(t)}$. Segue che i gradi in ξ di $F_2, \dots, F_t$ non superano il grado in ξ di F_1; ma ciò che è stato detto per F_1 sta anche per ciascuno dei fattori $F_2, \dots, F_t$, dunque $F_1, \dots, F_t$ hanno tutti rispetto a ξ lo stesso grado.

Diciamo ϱ' questo grado.

L'algebra semi-semplice A' sarà allora del rango $t\varrho'$ e dell'ordine $t\varrho'^2$; quindi è

$$\varrho = t\varrho' \qquad \text{ed} \qquad n = t\varrho'^2 = \varrho\varrho',$$

con che il teorema è dimostrato.

Come mostra il ragionamento fatto, esso è l'interpretazione aritmetica del notevolissimo teorema:

L'algebra complessa prolungamento di un'algebra razionale primitiva, o è regolare, o è somma diretta di algebre regolari (dello stesso ordine, o, ciò che è lo stesso) equivalenti.

Se $\varrho' = 1$ si ha $n = \varrho$ e l'algebra A è potenziale, e quindi commutativa.

Viceversa, se A è commutativa, tale è pure A'. Ma A' non può essere, nel caso attuale, che regolare o somma diretta di algebre regolari (equivalenti); e un'algebra (complessa) regolare non è commutativa se non quando sia dell'ordine 1; dunque $\varrho' = 1$ ed A è potenziale. Si ha così che:

Un'algebra razionale primitiva è commutativa, ossia è un corpo numerico, quando, e solo quando, è potenziale.

Notisi che questo corpo numerico è isomorfo al corpo algebrico che si ottiene dal corpo dei numeri razionali con l'*aggiunta* di un numero algebrico di grado eguale all'ordine dell'algebra.

144. *In un'algebra razionale primitiva il rango di un qualsiasi elemento è un divisore* [*non solo dell'ordine* (n^0 48), *ma anche*] *del rango dell'algebra.*

Infatti se l'equazione minima dell'elemento è

$$f(\xi) = 0,$$

e l'equazione

$$\varphi(\xi) = 0$$

è ciò che diviene l'equazione minima dell'algebra, quando vi si pongano per le coordinate dell'elemento corrente quelle dell'elemento considerato, f e φ sono a coefficienti razionali e gli zeri distinti di f e φ sono gli stessi, perchè sono gli zeri distinti di ciascuna equazione fondamentale dell'elemento; ma f è irriducibile nel corpo dei numeri razionali, dunque φ è una potenza di f e il rango dell'elemento è un divisore del rango dell'algebra.

145. Giova avvertire che, per quanto risulta dalla natura stessa dei ragionamenti ivi svolti, le considerazioni dei n[i] 143 e 144 sono suscettibili di notevoli generalizzazioni.

In primo luogo infatti, quei ragionamenti sono applicabili, anche se non si tratta di algebre *razionali* primitive, ma di algebre primitive definite in corpi algebrici qualunque; in secondo luogo il teorema del n[0] 143 sta anche, ad es., per algebre razionali che non siano primitive, ma abbiano come equazione minima un'equazione irriducibile nel corpo delle funzioni razionali a coefficienti razionali e siano (semi-semplici, e quindi anche) semplici.

146. Un'algebra razionale primitiva di rango 1 è un corpo numerico isomorfo al corpo dei numeri razionali; quindi, nel problema della enumerazione dei tipi di algebre primitive razionali a rango assegnato, il primo caso che presenti un qualche interesse è quello in cui il rango sia 2.

Per le applicazioni che dovranno esserne fatte nella seconda Parte di questa Memoria, occorre che ci occupiamo un momento di questo caso.

147. Sia dunque A un'algebra razionale primitiva di rango 2 e quindi (n[0] 143) dell'ordine 2 o 4.

Se x è un elemento di A il cui rango sia 2 e u è il modulo, si ha per x una relazione della forma

$$x^2 + \alpha x + \beta u = 0,$$

con α e β razionali e $\alpha^2 - 4\beta$ non quadrato di un numero razionale (in particolare, dunque, $\neq 0$), perchè il trinomio

$$\xi^2 + \alpha\xi + \beta$$

deve essere irriducibile nel corpo dei numeri razionali; quindi, posto

$$y = x + \frac{\alpha}{2} u,$$

y è un elemento di A per cui è

$$y^2 = \gamma u,$$

dove $\gamma = \dfrac{\alpha^2 - 4\beta}{4}$ non è quadrato di un numero razionale.

Segue che se A è dell'ordine 2, essa è un'algebra con due unità u e v per le quali è

$$u^2 = u \qquad uv = vu = v, \qquad v^2 = \lambda u \tag{84}$$

con λ razionale, ma non quadrato di un numero razionale; e che se A è dell'ordine 4 si possono trovare in A due elementi u_1 e v_2, tali che u, u_1, v_2 siano indipendenti e sia inoltre

$$u_1^2 = \lambda u, \qquad v_2^2 = \mu u,$$

con λ, μ razionali ma non quadrati di numeri razionali.

Ragionando come nel n^0 139 si trova che è

$$u_1 v_2 + v_2 u_1 = 2\nu u,$$

con ν razionale.

Intanto, se si pone

$$u_2 = u_1 + \eta v_2 \qquad (\eta \text{ razionale}),$$

si ha

$$u_2^2 = (\lambda^2 + 2\nu\eta + \mu^2 \eta^2) u,$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 2u_1^2 + \eta (u_1 v_2 + v_2 u_1) = 2(\lambda + \nu\eta) u;$$

dunque, se $\nu \neq 0$, prendendo $\eta = -\dfrac{\lambda}{\nu}$, si trova che è $\eta \neq 0$, per modo che u, u_1, u_2 sono indipendenti, e

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0.$$

Segue che se A è dell'ordine 4, si possono trovare in A due elementi u_1 e u_2, tali che u, u_1, u_2 siano indipendenti e sia inoltre

$$u_1^2 = \lambda u, \qquad u_2^2 = \mu u,$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0,$$

dove μ, occorre appena avvertirlo, può non avere il significato precedente.

Ora (cfr. il n^0 139) se si pone

$$u_3 = u_1 u_2 ,$$

gli elementi u, u_1, u_2, u_3 di A risultano indipendenti, ed è

$$u_3^2 = - u_1 u_2 . u_2 u_1 = - \lambda\mu u,$$

$$u_2 u_3 = - u_3 u_2 = - \mu u_1 , \qquad u_3 u_1 = - u_1 u_3 = - \lambda u_2 ,$$

dunque, se A è dell'ordine 4, essa è un'algebra con 4 unità u, u_1, u_2, u_3, per le quali è

$$(85) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u^2 = u, \qquad u u_i = u_i u = u_i \qquad\qquad (i = 1, 2, 3), \\ u_1^2 = \lambda u, \qquad u_2^2 = \mu u, \qquad u_3^2 = - \lambda\mu u, \\ \qquad u_1 u_2 = - u_2 u_1 = u_3 , \\ \qquad u_2 u_3 = - u_3 u_2 = - \mu u_1 , \\ \qquad u_3 u_1 = - u_1 u_3 = - \lambda u_2 , \end{array} \right.$$

con λ e μ razionali, ma non quadrati di numeri razionali.

Indicando con ξ_1, ξ_2 le coordinate dell'elemento corrente della algebra (84), e con $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ quelle dell'elemento corrente della algebra (85), l'equazione minima dell'algebra (84) è

$$\xi^2 - 2\xi_1 \xi + (\xi_1^2 - \lambda\xi_2^2) = 0 ;$$

quella dell'algebra (85) è

$$\xi^2 - 2\xi_1 \xi + (\xi_1^2 - \lambda\xi_2^2 - \mu\xi_3^2 + \lambda\mu\xi_4^2) = 0 ;$$

quindi, perchè le algebre (84) e (85) risultino primitive nel corpo dei numeri razionali, occorre e basta che, in questo corpo, le forme quadratiche

$$\xi_1^2 - \lambda\xi_2^2, \quad \xi_1^2 - \lambda\xi_2^2 - \mu\xi_3^2 + \lambda\mu\xi_4^2$$

non si annullino mai per valori razionali non tutti nulli delle variabili ξ_1 e ξ_2, o $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Di qua si ricava il teorema:

Perchè un'algebra razionale di rango 2 sia primitiva occorre e basta che essa sia:

a) un'algebra d'ordine 2 con due unità u e v per le quali si abbia

$$u^2 = u, \qquad uv = vu = v, \qquad v^2 = \lambda u$$

con λ razionale ma non quadrato di un numero razionale; oppure

b) un'algebra d'ordine 4 con quattro unità u, u_1, u_2, u_3 per le quali si abbia

$$u^2 = u, \qquad uu_i = u_i u = u_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$u_1^2 = \lambda u, \qquad u_2^2 = \mu u, \qquad u_3^2 = -\lambda\mu u,$$

$$u_1u_2 = -u_2u_1 = u_3, \quad u_2u_3 = -u_3u_2 = -\mu u_1, \quad u_3u_1 = -u_1u_3 = -\lambda u_2,$$

con λ, μ razionali, e tali che la forma quadratica

$$\xi_1^2 - \lambda\xi_2^2 - \mu\xi_3^2 + \lambda\mu\xi_4^2$$

non si annulli mai per valori razionali non tutti nulli delle variabili $\xi_1, \dots, \xi_4$.

Parte Seconda.

NUOVI CONTRIBUTI ALLA TEORIA GENERALE DELLE MATRICI DI RIEMANN.

§ 1.

Le algebre connesse con le matrici di Riemann.

1. Sia

$$\omega = \| \omega_{j,r} \| \qquad (j = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p)$$

una matrice riemanniana di genere p, con gli indici di singolarità e moltiplicabilità k e h, e le imagini τ e $\overline{\tau}$ nello spazio rappresentativo Σ, a $2p-1$ dimensioni, $(x_1, x_2, \ldots, x_{2p})$ [86].

Se alla sostituzione lineare omogenea A, definita da

(1) $$x_r | a_{r,1} x_1 + \ldots + a_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, \ldots, 2p),$$

risponde in Σ una omografia A^* di ω, cioè se l'omografia di Σ, rappresentata dalle equazioni

$$x'_r = a_{r,1} x_1 + \ldots + a_{r,2p} x_{2p}$$

è una omografia di ω, si dirà che A è una *sostituzione* di ω.

Per non moltiplicare inutilmente i simboli, indicheremo la matrice $\| a_{r,s} \|$ dei coefficienti di A con lo stesso simbolo A che indica la sostituzione.

Data la sostituzione A, l'omografia A^* è individuata; ma ad A^* rispondono, nello stesso modo che A, tutte (e sole) le sostituzioni le cui matrici sono date da αA, al variare di α fra tutti i possibili numeri (reali o imaginari) non nulli.

Se nelle (1) le $a_{r,s}$ sono numeri razionali, nel qual caso A^* risulta un'omografia *riemanniana* di ω, la sostituzione A si dirà una *sostituzione riemanniana* di ω.

Che se poi le $a_{r,s}$ sono a dirittura dei numeri interi (relativi), A si dirà una *sostituzione riemanniana intera* di ω [87].

2. Poichè l'indice di moltiplicabilità di ω è h, le omografie non nulle di ω costituiscono un sistema lineare ∞^h, che, aggiuntavi la omografia nulla, è anche un gruppo continuo ad h parametri.

Ciò porta, in primo luogo, che tra le sostituzioni di ω se ne possono scegliere (e in infiniti modi) $h+1$, e siano

(2) $$A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(h)},$$

tali che le matrici $A^{(0)}, \ldots, A^{(h)}$ risultino indipendenti e le matrici rispondenti alle sostituzioni di ω, compresa la sostituzione nulla,

[86] Per la nomenclatura relativa alle matrici di RIEMANN rimandiamo una volta per tutte alla Memoria citata in [1].

Avvertasi poi che d'ora innanzi quando occorrerà citare nel testo un n° del presente lavoro, esso si farà precedere dal segno I se si riferisce alla Parte Prima.

[87] Quelle, che qui chiamo sostituzioni riemanniane *intere*, nella Memoria del 1916 eran dette sostituzioni riemanniane senz'altro, perchè ivi non vi era luogo a considerare altre sostituzioni.

siano date tutte, e ciascuna una volta sola, dall'espressione

$$(3) \qquad \alpha_0 A^{(0)} + \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_h A^{(h)}$$

al variare delle α, in tutte le maniere possibili, nel corpo degli ordinari numeri complessi.

In secondo luogo, che se le matrici A e B rispondono a due sostituzioni di ω, lo stesso accade per la matrice AB, che è una delle matrici rispondenti all'omografia $B^* A^*$ di ω, se A^* e B^* sono le omografie di ω rispondenti alle sostituzioni A e B.

Segue che:

Le matrici rispondenti alle sostituzioni di ω possono esser considerate come gli elementi di un'algebra complessa $[\omega]''$ ad $h+1$ unità.

Se si suppone, come è lecito, che le (2) siano sostituzioni riemanniane e poi che le α variino nella (3) soltanto per valori reali o soltanto per valori razionali, si ottiene che:

Le matrici rispondenti alle sostituzioni reali o razionali di ω possono esser considerate come gli elementi di un'algebra reale $[\omega]'$ o razionale $[\omega]$, ad $h+1$ unità;

e che:

Le algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ possono riguardarsi come ottenute da $[\omega]$ per prolungamenti successivi di questa nel corpo dei numeri reali, o nel corpo dei numeri complessi.

Le algebre $[\omega]$, $[\omega]'$, $[\omega]''$ sono evidentemente dotate di modulo, questo essendo dato per tutte e tre dalla matrice identica d'ordine $2p$.

3. Occorre appena avvertire che ognuna della tre algebre $[\omega]$, $[\omega]'$, $[\omega]''$, *connesse* con ω, è una sotto-algebra dell'algebra regolare di ordine $4p^2$ costitituita da tutte le matrici d'ordine $2p$ a elementi razionali, reali, o, rispettivamente, complessi.

E così è pur chiaro che:

Le algebre razionali (reali o complesse) connesse con matrici riemanniane isomorfe (in particolare, equivalenti) sono equivalenti.

4. Il grado, il rango o l'equazione minima di un elemento A di una delle tre algebre connesse con ω, si diranno anche il *grado*, il *rango* o l'*equazione minima* della sostituzione A o della omografia A^* di ω ad esso corrispondenti.

A giustificazione di queste definizioni si osservi che se A si considera come elemento, non di $[\omega]$, $[\omega]'$ od $[\omega]''$, ma come elemento di una qualunque delle tre algebre regolari costituite dalle matrici d'ordine $2p$ a elementi razionali, reali o complessi che lo contenga, il suo grado, il suo rango e la sua equazione minima restano sempre gli stessi.

Per ciascuna delle tre algebre connesse con ω, il grado è la stessa cosa che il rango, e questo è per tutte e tre uno stesso intero positivo ϱ.

Il numero ϱ, invariante di fronte alla relazione di isomorfismo (in particolare, di equivalenza) tra matrici riemanniane, si dirà il *rango* di ω.

Per esso si hanno evidentemente le disuguaglianze

$$\varrho \geq 1, \qquad \varrho \leq h+1, \qquad \varrho \leq 2p.$$

Notisi che:

È $\varrho = 1$ *quando, e solo quando, è* $h = 0$ (*e quindi anche* $k = 0$), *ossia* ω *è, come diremo, a indici nulli;*

e che:

È $\varrho = h + 1$, *quando, e solo quando, ciascuna delle algebre connesse con* ω *è un'algebra potenziale.*

5. Perchè il lettore possa fin da ora disporre di utili esempi sui valori del rango ϱ per casi notevoli di matrici riemanniane giova osservare quanto segue.

Una matrice di Riemann *ellittica è del rango* 1 *o* 2 *secondo che il suo indice di moltiplicabilità è* 0 *o* 1.

Infatti se per ω è $\varrho = 1$, è $h = 0$ qualunque sia il suo genere p, e viceversa; che se poi $p = 1$ e $h = 1$, è $\varrho = 2$, o perchè ha da essere $1 < \varrho \leq 2$, o perchè l'omografia corrente di ω è un'ordinaria proiettività a punti uniti distinti e quindi ha per equazione minima un'equazione di 2^0 grado.

Una matrice riemanniana del genere 2 *è del rango* 1, 2, 3 *o* 4 *secondo che (adoperando una classificazione nota)* (88) *essa è:*

a) *del tipo* I), *oppure*

b) *del tipo* II), III), VII) *e* VIII); *oppure*

c) *del tipo* IV); *oppure, infine,*

d) *del tipo* V), VI) *o* IX).

Infatti, tralasciando il caso banale *a*), nei casi *b*), *c*) o *d*) l'omografia corrente della matrice è, rispettivamente, biassiale, assiale o con quattro soli punti uniti distinti.

(88) Loc. cit. (1), II, n° 13.

Una matrice riemanniana impura del genere p, priva di assi isolati, i cui assi puri siano tutti ellittici, è del rango p o $2p$, secondo che essa non è od è ad indici massimi.

Infatti, nel primo caso, il gruppo delle omografie della matrice è oloedricamente isomorfo a quello di tutte le omografie dell'imagine della matrice; e, nel secondo caso, è il gruppo di tutte le omografie dello spazio rappresentativo della matrice trasformanti in sè ciascuna delle sue imagini, e questo gruppo contiene omografie con soli $2p$ punti uniti distinti [89].

6. Se la matrice ω è impura, un suo asse qualunque M può considerarsi come lo spazio rappresentativo di una matrice riemanniana ω_1, individuata, in modo noto, da ω e da M, di fronte alla relazione di isomorfismo.

In base a ciò, come già si dissero altra volta *genere* di M e *indici* di *singolarità* e *moltiplicabilità* di M il genere e gli indici analoghi di ω_1, si dirà *rango* di M il rango di ω_1, e si diranno *algebre* connesse con M le algebre connesse con ω_1 [90].

7. Sia A un elemento di $[\omega]'$, o, in particolare di $[\omega]$, e sia

$$A = \| a_{r,s} \| \qquad (r, s = 1, \dots, 2p).$$

L'omografia di Σ rappresentata dalle equazioni

$$x'_r = \sum_s^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_s \qquad (r = 1, \dots, 2p)$$

è un'omografia di ω *reale*, quindi esistono dei numeri $\lambda_{j,l}$ per cui risulta nel tempo stesso

$$\sum_l^{1\dots p} \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_s^{1\dots 2p} a_{r,s}\, \omega_{j,s} \qquad (j = 1, \dots, p\,;\ r = 1, \dots, 2p)$$

e

$$\sum_l^{1\dots p} \overline{\lambda}_{j,l}\, \overline{\omega}_{l,r} = \sum_s^{1\dots 2p} a_{r,s}\, \overline{\omega}_{j,s} \qquad (j = 1, \dots, p\,;\ r = 1, \dots, 2p),$$

dove, al solito, coll'apporre al simbolo di un numero un soprassegno

(89) Cfr. loc. cit. (1), I, n^i 54 e 59.
(90) Cfr. loc. cit. (1), I, n^0 39.

indichiamo il passaggio da quel numero al numero complesso coniugato.

Comè è noto, fissata ω, le matrici $A = \| a_{r,s} \|$ e

$$\Lambda = \| \lambda_{j,l} \|$$

si individuano a vicenda; per brevità di discorso si dirà che l'una è l'*omologa* dell'altra rispetto ad ω, o, semplicemente, quando non vi sia luogo ad equivoci, l'una omologa dell'altra.

Se con $\overline{\Lambda}$ si indica la matrice complessa coniugata a Λ, cioè si pone

$$\overline{\Lambda} = \| \overline{\lambda}_{j,l} \| ,$$

fra i determinanti $| a_{r,s} |$, $| \lambda_{j,l} |$ e $| \overline{\lambda}_{j,l} |$, che indicheremo anche con $|A|$, $|\Lambda|$ e $|\overline{\Lambda}|$, passa la relazione

$$|A| = |\Lambda| \cdot |\overline{\Lambda}| ,$$

da cui risulta, in particolare, che $|A|$ è nullo o positivo [91].

8. Se Λ' e Λ'' sono le matrici omologhe alle matrici A' e A'' di $[\omega]'$, e α', α'' sono numeri reali qualunque, le matrici omologhe alle matrici

$$\alpha' A' + \alpha'' A'' \qquad \text{e} \qquad A' A''$$

di $[\omega]'$ sono

$$\alpha' \Lambda' + \alpha'' \Lambda'' \qquad \text{e} \qquad \Lambda'' \Lambda' ,$$

dunque:

Le matrici omologhe a quelle di $[\omega]'$ *costituiscono un'algebra reale* $\{\omega\}'$ *ad* $h+1$ *unità, reciproca ad* $[\omega]'$;

e:

Le matrici omologhe a quelle di $[\omega]$ *costituiscono un'algebra razionale* $\{\omega\}$ *ad* $h+1$ *unità, reciproca ad* $[\omega]$.

Le algebre $\{\omega\}'$ ed $\{\omega\}$, essendo reciproche alle algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]$, hanno per equazioni minime, le equazioni minime di queste; avvertasi, per altro, che mentre l'equazione minima di un elemento di $[\omega]'$ od $[\omega]$ è l'equazione minima dell'elemento, anche se questo si considera come appartenente all'algebra regolare di ordine $4p^2$ costituita da *tutte* le matrici d'ordine $2p$ a elementi complessi, non

(91) Loc. cit. (1), I, n° 22.

è detto che l'equazione minima di un elemento di $\{\omega\}'$ od $\{\omega\}$, in quanto elemento di una di queste algebre, resti l'equazione minima di esso, in quanto elemento dell'algebra regolare di ordine p^2 costituita da tutte le matrici d'ordine p a elementi complessi.

Se ciò fosse, il rango di $\{\omega\}'$ od $\{\omega\}$ non potrebbe mai superare p, mentre esso è il rango di ω, che come già risulta dagli esempi addotti e meglio si vedrà nel seguito, può raggiungere il valore $2p$.

Gli è che le matrici di $\{\omega\}'$, ad esempio, sono matrici a elementi *complessi*; e quindi matrici di $\{\omega\}'$, indipendenti *in* $\{\omega\}'$, cioè indipendenti nel corpo dei numeri reali, possono benissimo essere dipendenti nella suddetta algebra regolare di ordine p^2, cioè dipendenti nel corpo dei numeri complessi.

§ 2.

Caratterizzazione delle algebre razionali connesse con le matrici di Riemann.

9. *Perchè l'algebra* $[\omega]$ *sia riducibile occorre e basta che la matrice* ω *sia impura e possegga assi isolati.*

Supponiamo, infatti, che ω possegga assi isolati, e siano M ed N due suoi assi isolati complementari con gli indici di moltiplicabilità h_1 ed h_2.

Sarà (92)

$$h = h_1 + h_2 + 1,$$

e il sistema lineare delle omografie non nulle di ω sarà il sistema congiungente il sistema lineare ∞^{h_1} delle omografie singolari non nulle di ω, aventi per primo asse N (o uno spazio contenente N) e secondo asse M (o uno spazio contenuto in M), col sistema lineare ∞^{h_2} delle omografie singolari non nulle di ω, aventi per primo asse M (o uno spazio contenente M) e secondo asse N (o uno spazio contenuto in N).

Se A^* e B^* sono due qualunque omografie, appartenenti l'una al sistema ∞^{h_1} e l'altra al sistema ∞^{h_2}, si ha:

$$A^* B^* = B^* A^* = 0,$$

(92) Loc. cit. (1), I, n^0 41.

quindi nell'algebra $[\omega]$ è possibile scegliere $h_1 + h_2 + 2$ elementi indipendenti

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(h_1)} \tag{4}$$

e

$$A_0, A_1, \dots, A_{h_2}, \tag{5}$$

si che risulti

$$A^{(j)} A_l = A_l A^{(j)} = 0, \tag{6}$$

per $j = 0, 1, \dots, h_1$, ed $l = 0, 1, \dots, h_2$.

Segue che l'algebra $[\omega]$ è la somma diretta di due algebre razionali, degli ordini $h_1 + 1$ e $h_2 + 1$ (equivalenti a quelle connesse con gli assi M ed N), e quindi è, come volevasi, riducibile.

Suppongasi, inversamente, che l'algebra $[\omega]$ sia riducibile e che essa sia la somma diretta di due algebre razionali $[\omega]_1$ e $[\omega]_2$ con gli ordini $h_1 + 1$ e $h_2 + 1$, essendo

$$h = h_1 + h_2 + 1.$$

Supposto che due gruppi di unità per $[\omega]_1$ e $[\omega]_2$ siano dati, rispettivamente, da (4) e (5), per queste unità sussisteranno le relazioni (6).

Le omografie riemanniane di ω, rispondenti agli elementi (4) e (5), saranno, per le (6), tutte degeneri, senza che, beninteso, alcuna di esse sia nulla. E inoltre, sempre per le (6), il primo asse dell'omografia rispondente a uno qualunque degli elementi (4) deve contenere lo spazio C_0 congiungente i secondi assi delle omografie rispondenti agli elementi (5), e il primo asse dell'omografia rispondente a uno qualunque degli elementi (5) deve contenere lo spazio $C^{(0)}$ congiungente i secondi assi delle omografie rispondenti agli elementi (4).

Gli spazi C_0 e $C^{(0)}$ sono evidentemente due assi di ω; inoltre ciascuna omografia rispondente a un elemento di $[\omega]_1$ ha per primo asse uno spazio contenente C_0 e per secondo asse uno spazio contenuto in $C^{(0)}$; mentre ciascuna omografia di $[\omega]_2$ ha per primo asse uno spazio contenente $C^{(0)}$ e per secondo asse uno spazio contenuto in C_0.

Essendo

$$[\omega] = [\omega]_1 + [\omega]_2,$$

l'omografia riemanniana corrente di ω può pensarsi come appartenente a un fascio di omografie determinato da un'omografia rispondente a un elemento di $[\omega]_1$ e da una omografia rispondente a un elemento di $[\omega]_2$; e quindi l'omografia corrente di ω (riemanniana o no) muta in sè ciascuno degli spazi C_0 e $C^{(0)}$.

Segue che C_0 e $C^{(0)}$ sono due assi isolati di ω; con che l'asserto è pienamente giustificato.

10. Nei ragionamenti ora fatti è implicitamente contenuto il seguente teorema:

Se la matrice riemanniana ω è composta mediante le matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ e queste sono a due a due non vincolate, l'algebra razionale connessa con ω è la somma diretta di n algebre razionali equivalenti a quelle connesse con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Risulta inoltre facilmente che:

Se ω è impura, in corrispondenza a ciascun sistema di t assi complementari di ω (isolati o no), l'algebra $[\omega]$ possiede una sotto-algebra, riducibile nella somma diretta di t algebre razionali, che è propria o no, secondo che in quel sistema compariscono o no almeno due assi vincolati.

Alla luce di questo teorema, l'unicità della decomposizione di un'algebra dotata di modulo in una somma diretta di algebre irriducibili fa riscontro, nel caso attuale, alla unicità, per una matrice riemanniana dotata di assi isolati, del gruppo di assi complementari isolati ciascun dei quali o è puro, o è impuro ma privo di assi isolati (93).

11. *Perchè l'algebra $[\omega]$ sia primitiva, occorre e basta che la matrice ω sia pura.*

Infatti se ω è pura, un'omografia riemanniana di ω, che non sia nulla, è necessariamente non degenere (94); e quindi un prodotto di elementi di $[\omega]$, nessuno dei quali sia nullo, è certo diverso da zero, ossia l'algebra $[\omega]$ è primitiva.

D'altro canto se ω è impura, basta considerare due assi complementari M ed N di ω e poi due omografie riemanniane di ω, aventi l'una per primo asse M e secondo asse N e l'altra per primo asse N e secondo asse M, per avere due omografie riemanniane di ω non nulle e a prodotto nullo; dunque se ω è impura, $[\omega]$ non è primitiva. Val quanto dire che se $[\omega]$ è primitiva, ω è, come volevasi, pura.

(93) Loc. cit. (1), I, n° 49.

(94) Loc. cit. (1), I, n° 32.

12. *Perchè l'algebra* $[\omega]$ *sia semplice, occorre e basta che la matrice* ω *sia priva di assi isolati.*

Se ω è pura, $[\omega]$ è primitiva e quindi è certo semplice.

Supponiamo dunque ω impura ma priva di assi isolati e i suoi assi puri siano tutti del genere q, per modo che sarà

$$\frac{p}{q} = n,$$

con n intero e maggiore di 1 (95).

Dico che $[\omega]$ non ammette elementi eccezionali e che quindi $[\omega]$ è, intanto, semi-semplice.

Si supponga infatti, se è possibile, che $[\omega]$ contenga elementi eccezionali, nel qual caso essa conterrà anche elementi eccezionali di grado 1, e sia A uno di questi ultimi elementi.

L'omografia riemanniana A^* di ω rispondente ad A avrà per primo e secondo asse due assi M ed N di ω ed M conterrà N, una volta che il quadrato di A^* ha da esser nullo. Poi se N è lo spazio congiungente t assi puri indipendenti di ω $(1 \leq t < n)$, M sarà lo spazio congiungente $n - t$ assi puri indipendenti di ω, poichè la somma delle dimensioni di M ed N deve uguagliare $2p - 2$.

Ciò posto si dica M_1 un asse, congiungente $n - t$ assi puri indipendenti di ω, indipendente da N, e sia B^* un'omografia riemanniana non degenere di ω atta a portare M_1 in M (96).

(95) Loc. cit. (1), I, n⁰ 47.

(96) Si supponga che gli assi M ed M_1 si taglino in un asse P e si dicano M' ed M'_1 due assi complementari a P in M ed M_1, rispettivamente. Poi sia Q un asse complementare a quello congiungente M ed M_1. Naturalmente qualcuno degli assi P e Q può mancare; ma in tal caso il ragionamento che ora faremo non ne resterebbe che semplificato.

Salvo a sostituire ad ω, ove occorra, una matrice isomorfa si può supporre che sia

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 \end{Vmatrix},$$

le matrici di RIEMANN $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ avendo per spazi rappresentativi gli assi M', P, M'_1, Q [cfr. loc. cit. (1) I, n⁰ 38]; inoltre le matrici ω_1 e ω_3 saranno isomorfe (ibid., I, n⁰ 50).

Si dicano ora C, D, E tre matrici, a elementi razionali, rispondenti, rispet-

Il prodotto B^*A^* è un'omografia riemanniana degenere di ω avente per primo asse M_1 e secondo asse N, quindi, essendo M_1 indipendente da N, nessuna potenza di questo prodotto può essere nulla.

Segue che gli elementi di ω rispondenti al prodotto B^*A^* non sono pseudonulli, mentre se A fosse eccezionale, ogni tale elemento dovrebbe esser pseudonullo.

Dimostrato che $[\omega]$ è semi-semplice, si trova subito che essa è a dirittura semplice.

E infatti se $[\omega]$ fosse semi-semplice ma non semplice, $[\omega]$ sarebbe riducibile (I, n^0 96) e quindi ω (n^0 9) ammetterebbe, contro l'ipotesi, assi isolati.

Con tutto ciò resta stabilito che se ω è priva di assi isolati l'algebra $[\omega]$ è semplice.

D'altro canto se ω è dotata di assi isolati, $[\omega]$ è riducibile e quindi certo non semplice, dunque sta pure che se $[\omega]$ è semplice, ω è priva di assi isolati.

13. *Perchè l'algebra $[\omega]$ sia semi-semplice, ma non semplice, occorre e basta che ω possegga assi isolati.*

Se $[\omega]$ è semi-semplice ma non semplice, è chiaro intanto che ω possiede degli assi isolati.

Inversamente suppongasi che ω possegga assi isolati e quindi sia isomorfa a una matrice composta con t matrici riemanniane

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t,$$

a due a due non vincolate, e ciascuna priva di assi isolati.

tivamente, a un'omografia riemanniana di ω_2 (nell'ambiente P), a un'omografia riemanniana simultanea di ω_1 e ω_3 (fra gli spazi M' ed M'_1) e ad un'omografia riemanniana di ω_4 (nell'ambiente Q).

La matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{Vmatrix}$$

risponde a un'omografia riemanniana di ω che tiene fermo lo spazio P e scambia fra loro gli spazi M' ed M'_1, cioè che scambia fra loro gli spazi M ed M_1. Di qua l'affermazione del testo.

Le algebre razionali connesse con le matrici ω sono tutte semplici; e quindi $[\omega]$, che è la somma diretta di algrbre equivalenti ad esse, sarà semi-semplice ma non semplice.

14. Giova raccogliere le osservazioni fatte nel seguente teorema complessivo:

L'algebra razionale connessa con una matrice riemanniana è in ogni caso semi-semplice. È a dirittura semplice se, e soltanto se, la matrice è priva di assi isolati; primitiva, se, e soltanto se, la matrice è pura.

Da esso si deduce (I, n⁰ 137) che:

Anche le algebre reali o complesse connesse con le matrici riemanniane sono tutte semi-semplici.

Più tardi saranno indicate alcune maggiori determinazioni di quest'ultimo teorema.

§ 3.

Gli automoduli dell'algebra $[\omega]$.

15. I teoremi del § prec. sono, per la teoria delle matrici riemanniane, di importanza essenziale; ma essi hanno valore anche per la teoria delle algebre a più unità, in quanto forniscono per questa un campo nuovo e vasto di esemplificazioni concrete interessantissime.

Da questo punto di vista non sarà inutile indicare la bella relazione che viene ad intercedere tra le proprietà degli assi di ω, nel caso che ω sia impura, e quelle degli automoduli della corrispondente algebra razionale (non primitiva).

16. Suppongasi che l'algebra $[\omega]$ possegga un automodulo A; l'omografia riemanniana A^* di ω corrispondente ad A sarà non nulla e coinciderà con tutte le sue potenze.

Viceversa, se per un'omografia riemanniana A^* di ω si ha

$$A^* \neq 0, \qquad A^* = A^{*2}$$

è chiaro che tra gli infiniti elementi di $[\omega]$ corrispondenti ad A^* vi è *un* automodulo di $[\omega]$.

Infatti se A_1 è uno di quegli elementi, deve essere, indicando con α un conveniente numero razionale non nullo,

$$A_1 \neq 0, \qquad A_1^2 = \alpha A_1;$$

e, se si pone

$$A = k\, A_1 ,$$

con k numero razionale, perchè A risulti un automodulo di $[\omega]$ occorre e basta che sia

$$k = \frac{1}{\alpha} .$$

Se in generale diciamo che un'omografia è un *automodulo* se non è nulla e coincide col suo quadrato, abbiamo che:

Gli automoduli di $[\omega]$ corrispondono biunivocamente agli automoduli del gruppo di moltiplicabilità di ω.

17. Ricordando che ciascun automodulo di $[\omega]$ diverso dal modulo è un divisore dello zero, si ha subito che ciascun automodulo del gruppo di moltiplicabilità diverso dall'omografia identica è un'omografia (non nulla ma) degenere.

L'equazione minima di tale ultima omografia (di grado 1 e rango 2), essendo

$$\xi\,(\xi - 1) = 0 ,$$

è a radici distinte; quindi l'omografia è regolare [97], e i suoi due assi sono due spazi indipendenti, *congiunti* dallo spazio ambiente. Inoltre l'omografia induce nel suo secondo asse un'omografia identica e quindi porta ciascun punto X dello spazio ambiente esterno al suo primo asse, nel punto X' che dà la proiezione di X dal primo asse sul secondo.

Siccome l'algebra $[\omega]$ ammette automoduli diversi dal modulo quando, e solo quando, non è primitiva, si ha che:

Il gruppo di moltiplicabilità di ω contiene automoduli non identici quando, e solo quando, ω è impura.

Aggiungasi che, com'è ben chiaro, se ω è impura, per ogni coppia di assi complementari di ω si ha uno, e un solo, automo-

[97] Si suol dire che un'omografia è *generale*, anche se degenere, quando la funzione caratteristica della matrice ad essa rispondente è a divisori elementari tutti lineari; ma non sembra questa una nomenclatura molto felice. Pare strano, invero, che si abbia a dir *generale*, per es., l'omografia nulla!

Perciò abbiamo preferito di chiamar regolari le omografie in discorso.

Si ricordi infine [vedi per es. C. ROSATI, loc. cit. ([13])] che un'omografia è regolare quando, e solo quando, la sua equazione minima è a radici distinte.

dulo che abbia in uno assegnato dei due assi il suo primo asse e nell'altro il secondo; quindi:

Se ω è impura, vi è corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate di assi complementari e gli automoduli non identici del suo gruppo di moltiplicabilità.

18. La matrice ω sia impura ed A sia un automodulo di $[\omega]$ diverso dal modulo. Sia inoltre A^* l'automodulo corrispondente del gruppo di moltiplicabilità col primo asse M e il secondo asse N.

L'algebra

$$A\,[\omega]\,A$$

è una sotto-algebra propria di $[\omega]$ avente in A il suo modulo.

Ad essa risponde nel gruppo di moltiplicabilità della matrice, che indicheremo con G, il sottogruppo proprio

$$A^*\,G\,A^*\,,$$

che è facile caratterizzare.

Infatti una sua omografia è

$$A^*\,X^*\,A^*\,,$$

se X^* è un'omografia riemanniana qualunque di ω; e questa ha per primo asse M, o un asse di ω contenente M, e per secondo asse N, o un asse di ω contenuto in N.

In ogni caso essa induce in N un'omografia, che è un'omografia riemanniana dell'asse N.

Ora si vede subito che facendo variare X^* si può ottenere che l'omografia indotta in N sia una qualunque omografia riemanniana di N.

Infatti se B^* è una di queste, si dica X^* l'omografia riemanniana di ω il cui primo asse M' è M o lo spazio congiungente M col primo asse di B^*, secondo che B^* è non degenere o degenere, e che porta ciascun punto Y dello spazio esterno ad M', nel punto in cui è portato da B^* ciascun punto dell'intersezione di N con lo spazio congiungente M' e Y; intersezione che è di dimensione nulla o positiva, secondo che B^* non è od è degenere. Scelta l'omografia X^* a questo modo si avrà evidentemente che il prodotto.

$$A^*\,X^*\,A^*$$

subordina in N l'omografia B^*.

Insomma:

Il sottogruppo $A^* G A^*$ è costituito dalle omografie singolari del gruppo di moltiplicabilità che hanno, per primo asse, un asse di ω contenente M, e, per secondo asse, un asse di ω contenuto in N. Esso è oloedricamente isomorfo al gruppo di moltiplicabilità dell'asse N e la sua trasformazione identica è (non l'omografia identica, ma) l'automodulo A^* avente per primo asse M e secondo asse N.

Val quanto dire che:

L'algebra

$$A\,[\omega]\,A$$

è equivalente all'algebra razionale connessa con l'asse N.

Quest'ultima è primitiva quando e solo quando N è un asse puro, dunque:

Se ω è impura, gli automoduli primitivi dell'algebra $[\omega]$ corrispondono biunivocamente agli automoduli del gruppo di moltiplicabilità che abbiano per secondo asse un asse puro della matrice.

19. Sia ω impura, sia I il modulo di $[\omega]$ e l'eguaglianza

$$I = A_1 + A_2 + \dots + A_n \qquad (n \geq 2)$$

dia una decomposizione di I in una somma di automoduli primitivi per i quali si abbia

$$A_j\, A_l = 0 \qquad (j, l = 1, \dots, n;\, j \neq l); \tag{7}$$

o, come anche diremo per brevità di discorso, una *decomposizione normale* di I.

Siano inoltre M_j ed N_j il primo e il secondo asse dell'automodulo A_j^* del gruppo di moltiplicabilità rispondente ad A_j.

Gli assi N_j sono altrettanti assi puri di ω; poi in virtù della (7), ciascun asse M_l conterrà tutti gli spazi N_j, ad eccezione dello spazio N_l, dal quale, anzi, è indipendente; quindi gli assi N_j sono indipendenti, una volta che ciascun di essi non ha punti comuni con lo spazio congiungente gli altri.

Intanto lo spazio congiungente gli assi N_j non può essere che lo spazio ambiente, ossia lo spazio rappresentativo della matrice, perchè altrimenti la somma degli elementi A_j risponderebbe, non all'omografia identica, ma ad una omografia riemanniana di ω degenere avente per secondo asse uno spazio contenuto in quello spazio congiungente; dunque

$$N_1, N_2, \dots, N_n$$

è per ω un gruppo fondamentale di assi puri.

Viceversa si vede subito che ciascun gruppo fondamentale di assi puri di ω dà luogo a una decomposizione normale di I.

Infatti in corrispondenza a un tal gruppo, costituito, poniamo, da n assi puri dei generi $q_1, q_2, \dots, q_n$ (cosicchè $p = q_1 + q_2 + \dots + q_n$), sostituendo ad ω, ove occorra una matrice isomorfa, si può pensare ω come composta mediante n matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ dei generi $q_1, q_2, \dots, q_n$ [98]; cosicchè si ha

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \omega_n \end{Vmatrix}.$$

Poste le cose a questo modo, l'affermazione fatta si giustifica osservando che la matrice identica d'ordine $2p$ è la somma delle n matrici dello stesso ordine, delle quali una ha eguali a 1 i primi $2q_1$ elementi principali e i rimanenti elementi tutti nulli; un'altra ha eguali a 1 i successivi $2q_2$ elementi principali e i rimanenti elementi tutti nulli, e così via via.

Si conclude che:

Vi è corrispondenza biunivoca tra le decomposizioni normali del modulo di $[\omega]$ *e i gruppi fondamentali di assi puri di* ω. *Una tale decomposizione è dunque unica, se* ω *possiede soltanto un numero finito di assi; può essere invece effettuata in infinite maniere distinte, se* ω *possiede infiniti assi. Ma in tal caso per le varie decomposizioni è costante il numero degli automoduli primitivi, che occorrono a costituirle.*

Di qua, ricordando ciò che è detto nel § 15 della Parte Prima, discende il bel teorema [99]:

Se una matrice riemanniana di genere p è impura ma priva di assi isolati e se il genere e l'indice di moltiplicabilità di un suo

(98) Loc. cit. (1), I, n° 38.

(99) La formula (40), pag. 305 della Memoria citata in (1), non è che l'interpretazione aritmetica di questo teorema.

qualunque asse puro sono q *e* h_1, *l'algebra razionale ad essa corrispondente è il prodotto diretto di un'algebra primitiva di ordine* $h_1 + 1$ *e di un'algebra regolare di ordine* $\left(\frac{p}{q}\right)^2$.

In particolare, osservando che il modulo di un'algebra regolare di ordine n^2 ammette una decomposizione normale con n termini, si ha che:

L'algebra razionale connessa con una matrice riemanniana è regolare quando, e solo quando, la matrice è pura e ad indici nulli, o impura, ma priva di assi isolati, e con gli assi puri ad indici nulli.

§ 4.

Teoremi fondamentali per le matrici pure.

24. Poniamoci nell'ipotesi che ω sia pura e del rango ϱ e quindi $[\omega]$ primitiva e del rango ϱ.

Poichè l'ordine di $[\omega]$ è $h + 1$, sarà (I, n⁰ 143)

$$h + 1 = \varrho\varrho',$$

con ϱ' intero e divisore di ϱ, e quindi

$$h + 1 \leq \varrho^2.$$

Inoltre, se A^* è un'omografia riemanniana di rango ϱ_a, sarà ϱ_a un divisore di ϱ ($\leq \varrho$), e l'equazione minima di A^* sarà un'equazione a coefficienti razionali, irriducibile nel corpo dei numeri razionali.

Tale equazione minima, appunto perchè irriducibile, è certo priva di radici multiple, dunque A^* è un'omografia regolare.

Aggiungasi che l'equazione caratteristica di A^*,

$$D(\xi) = 0,$$

è un'equazione a coefficienti razionali di grado $2p$, le cui radici distinte sono tutte e sole quelle dell'equazione minima

$$f(\xi) = 0$$

di A^* [100] ; cosicchè, essendo questa irriducibile, il polinomio $D(\xi)$ è una potenza di $f(\xi)$ e le radici di $D(\xi) = 0$ hanno tutte la molteplicità $\frac{2p}{\varrho_a}$.

Di qua segue, in primo luogo, che ϱ_a è un divisore di $2p$; e siccome A^* può essere scelta in modo che sia $\varrho_a = \varrho$, anche ϱ è un divisore di $2p$.

In secondo luogo risulta che, posto

$$\frac{2p}{\varrho_a} = \nu + 1,$$

ν è la dimensione comune degli spazi fondamentali di A.

Raccogliendo tutto quanto è stato detto si hanno i seguenti importantissimi teoremi :

a) Le omografie riemanniane di una matrice riemanniana pura sono tutte regolari e ciascuna di esse ha per spazi fondamentali spazi di una stessa dimensione ;

b) Se un'omografia di RIEMANN *di una matrice riemanniana pura è del rango ϱ_a e a spazi fondamentali di dimensione ν, ϱ_a è un divisore comune del rango della matrice e del doppio del genere p di questa, ed è inoltre*

$$(\nu + 1)\,\varrho_a = 2p ;$$

c) Il rango di una matrice riemanniana pura è un divisore comune del doppio del genere e dell'indice di moltiplicabilità aumentato di 1 ;

d) Se una matrice riemanniana è pura, il quoziente della divisione dell'indice di moltiplicabilità aumentato di 1 per il rango è un divisore del rango ;

e) Se una matrice riemanniana è pura e del rango ϱ, il suo indice di moltiplicabilità non supera $\varrho^2 - 1$.

Infine dal teorema del n⁰ 47 della Parte I, badando che $[\omega]$ è una sotto-algebra dell'algebra regolare di ordine $4p^2$ costituita da tutte le matrici di ordine $2p$ a elementi razionali, si deduce che :

f) Se una matrice riemanniana di genere p è pura, il suo indice di moltiplicabilità aumentato di 1 dà un intero che è un divisore di $4p^2$.

(100) Vedi, per es., C. ROSATI, loc. cit. (13).

Naturalmente, per un teorema noto ([101]), questo intero sarà pure non superiore a $2p$.

21. L'equazione minima dell'algebra $[\omega]$ è un'equazione del grado ϱ, in cui il coefficiente del termine di grado ϱ è l'unità, e gli altri coefficienti sono funzioni razionali intere a coefficienti razionali di $h+1$ indeterminate razionali $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_h$. Essa diventa poi l'equazione minima di $[\omega]'$ o di $[\omega]''$, se si suppone che in essa le $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_h$ siano, rispettivamente, delle indeterminate reali o complesse.

Se ω è pura, l'equazione minima di $[\omega]$ è certo irriducibile nel corpo delle funzioni razionali di $\xi_0, \dots, \xi_h$ a coefficienti razionali; ma ciò non porta che essa sia irriducibile anche nel corpo delle funzioni razionali di $\xi_0, \dots, \xi_h$ a coefficienti complessi. Porta soltanto che se l'irriducibilità dell'equazione minima in questo corpo più vasto viene meno, i fattori irriducibili del suo primo membro sono tutti distinti [e, come sappiamo (I, n^0 143), tutti dello stesso grado].

Segue che l'equazione minima dell'omografia corrente di ω, riemanniana o no, se ω è pura, è priva di radici multiple, e quindi:

L'omografia corrente di una matrice riemanniana pura è regolare.

Aggiungasi che:

Tale omografia è pure a spazi fondamentali della stessa dimensione;

perchè la sua equazione caratteristica ha per primo membro una potenza del primo membro della sua equazione minima.

Notisi espressamente che se si parla di omografie qualunque di ω e non soltanto di quelle riemanniane questi ultimi teoremi stanno solo per l'omografia *corrente* o *generica.*

22. Sarà bene indicare qualche utile corollario delle proposizioni del n^0 20.

Intanto se ω è pura e ϱ è un numero primo, per d) sarà

$$h+1=\varrho\varrho',$$

con $\varrho'=1$ o $\varrho'=\varrho$; dunque:

Se il rango ϱ di una matrice riemanniana pura è un numero primo, l'indice di moltiplicabilità è dato da $\varrho-1$ o ϱ^2-1.

Si supponga sempre ω pura e sia S una sua sostituzione riemanniana intera (modulare) ([102]) periodica, col rango ϱ', essendo ϱ' un divisore di ϱ ($\leq \varrho$).

([101]) Loc. cit. ([1]), I, n^0 42.

([102]) Cfr. loc. cit. ([1]), I, n^0 25.

Le radici distinte dell'equazione caratteristica di S sono radici dell'unità e sono anche radici dell'equazione minima di S che è a coefficienti interi, irriducibile nel corpo dei numeri razionali e del grado ϱ'. Segue che quelle radici debbono appartenere tutte a uno stesso esponente r_1, e poi, che deve essere, indicando con φ la nota funzione indicatrice di EULER,

$$\varphi(r_1) = \varrho'$$

ed

$$m\,\varphi(r_1) = 2p\,,$$

con m intero.

Se $\varrho' = 1$, la matrice di S è la matrice identica I d'ordine $2p$ o la sua opposta $-I$; se $\varrho' > 1$, essendo anche $\varrho' = \varphi(r_1)$, ϱ' è necessariamente pari. Quindi è pari ϱ ed è pari $h+1$, ossia h è dispari.

Si conclude che:

Se una matrice riemanniana pura ammette sostituzioni riemanniane intere (modulari) periodiche diverse dalla sostituzione identica I e dalla opposta $-I$, il suo rango è pari e il suo indice di moltiplicabilità è dispari;

quindi:

Se una varietà abeliana pura ammette trasformazioni birazionali periodiche in sè stessa, che non siano nè di 1ª nè di 2ª specie, è pari il suo numero-base ([103]) *ed è pari inoltre il rango della matrice di* RIEMANN *cui essa è legata.*

23. A proposito delle sostituzioni riemanniane intere (modulari) periodiche di una matrice riemanniana qualunque, pura o no, non sarà male avvertire che una nostra osservazione precedente può essere ora completata.

Se il rango della sostituzione a periodo n, considerata nel n° 25 della nostra Memoria di Palermo del 1916, è ϱ', e l'indice di moltiplicabilità della matrice a cui si riferisce è h, accanto all'eguaglianza ivi scritta

$$m_1\,\varphi(r_1) + \dots + m_t\,\varphi(r_t) = 2p\,, \tag{8}$$

([103]) A proposito di questo *numero-base* vedi G. SCORZA, *Alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque* [Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania, Serie Vª, vol. XI (1918), Memoria XX], n° 7.

vi è da tener conto di queste altre

(9) $$n_1 \varphi(r_1) + \dots + n_t \varphi(r_t) = h + 1,$$

(10) $$\nu_1 \varphi(r_1) + \dots + \nu_t \varphi(r_t) = \varrho',$$

dove le n_j e ν_j sono dei convenienti interi positivi.

Come la (8) fu trovata considerando l'equazione caratteristica della sostituzione e le sue radici, la (9) e la (10) si dimostrano ragionando in maniera analoga sulle equazioni fondamentali e sull'equazione minima della sostituzione considerata come elemento di un'algebra razionale di ordine $h + 1$.

§ 5.

Il rango di una matrice riemanniana composta.

24. La matrice ω sia composta mediante le matrici riemanniane ω_1 e ω_2, dei generi p_1 e p_2, con gli indici di singolarità k_1 e k_2, gli indici di moltiplicabilità h_1 e h_2 e il carattere simultaneo λ.

Sarà

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{Vmatrix}, \qquad p = p_1 + p_2,$$

$$k = k_1 + k_2 + \lambda + 1,$$

$$h = h_1 + h_2 + 2\lambda + 1 \text{ [104]}.$$

Nello spazio rappresentativo di ω i due spazi opposti M ed N della piramide fondamentale delle coordinate le cui equazioni sono date, rispettivamente, da

$$x_{2p_1+1} = x_{2p_1+2} = \dots = x_{2p} = 0,$$

e

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2p_1} = 0,$$

saranno due assi complementari di ω che potranno riguardarsi come

[104] Loc. cit. [1], I, § 5.

spazi rappresentativi di ω_1 e ω_2. Le imagini di ω_1 e ω_2 saranno poi gli S_{p_1-1} e gli S_{p_2-1} secondo cui M ed N si appoggiano a τ e $\overline{\tau}$.

Se

$$A = \| a_{r,s} \| \qquad (r\,,\, s = 1\,, \ldots, 2p\,)$$

è un elemento di $[\omega]$, posto

$$\begin{aligned} A_1 &= \| a_{r_1,s_1} \| \\ B_1 &= \| a_{r_1,s_2} \| \qquad (r_1\,,\, s_1 = 1\,, \ldots, 2p_1\,; \\ B_2 &= \| a_{r_2,s_1} \| \qquad r_2, s_2 = 2p_1 + 1\,, \ldots, 2p), \\ A_2 &= \| a_{r_2,s_2} \| \end{aligned}$$

sarà

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{Vmatrix} \tag{11}$$

e poi A_1, A_2 saranno elementi delle algebre razionali $[\omega_1]$ e $[\omega_2]$ connesse con ω_1 e ω_2; mentre B_1 e B_2 saranno matrici rispondenti ad omografie riemanniane simultanee di ω_1 e ω_2.

Gli elementi A di $[\omega]$, rispondenti a omografie riemanniane di ω aventi in M uno spazio unito, sono tutti e solo quelli che si ottengono dalla (11) supponendovi $B_2 = 0$; dunque coteste omografie, esclusa quella nulla, determinano una totalità lineare della dimensione

$$h_1 + h_2 + \lambda + 1 = h - \lambda.$$

Tale totalità $\infty^{h-\lambda}$ è la totalità delle omografie non nulle di ω, riemanniane o no, che hanno in M uno spazio unito.

Infatti le omografie non nulle di ω costituiscono un sistema lineare ∞^h determinabile mediante $h+1$ omografie riemanniane linearmente indipendenti; inoltre lo spazio M è *razionale.* Quindi entro quel sistema ∞^h il sistema lineare delle omografie aventi in M uno spazio unito è razionale, ed è pertanto determinabile mediante omografie *riemanniane* linearmente indipendenti.

25. Sia ora

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$$

l'elemento corrente fra gli elementi di $[\omega]$ forniti dalla (11) per $B_2 = 0$.

Dico che *il rango di A è dato da*

$$\varrho_1 + \varrho_2 ,$$

se ϱ_1 e ϱ_2 sono i ranghi di ω_1 e ω_2.

Se $\lambda = 0$ (per modo che allora è necessariamente $B_1 = 0$), le matrici ω_1 e ω_2 non sono vincolate, $[\omega]$ è la somma diretta di due algebre equivalenti a $[\omega_1]$ e $[\omega_2]$ e quindi l'asserto è conseguenza immediata del teorema di STUDY (vedi I, n⁰ 127).

Se invece $\lambda > 0$, pongasi

$$A_1' = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_2' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}, \qquad B_1' = \begin{Vmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Al variare di A tra i considerati elementi di $[\omega]$, A_1' e A_2' descrivono due sotto-algebre di $[\omega]$, equivalenti ad $[\omega_1]$ e $[\omega_2]$, che indicheremo con (ω_1) e (ω_2); e B_1' descrive una sotto-algebra di $[\omega]$ che indicheremo con $(\omega_{1,2})$.

A proposito di queste sotto-algebre si ha evidentemente

$$(12) \begin{cases} (\omega_1)(\omega_2) = (\omega_2)(\omega_1) = 0 , \\ (\omega_{1,2})^2 = 0, \quad (\omega_1)(\omega_{1,2}) \leq (\omega_{1,2}), \quad (\omega_{1,2})(\omega_1) = 0, \quad (\omega_2)(\omega_{1,2}) = 0, \\ (\omega_{1,2})(\omega_2) \leq (\omega_{1,2}) , \end{cases}$$

quindi $(\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_{1,2})$, che è l'algebra costituita dai considerati elementi di $[\omega]$, è una sotto-algebra di $[\omega]$ per la quale $(\omega_{1,2})$ è una sotto-algebra invariante.

In virtù delle posizioni fatte è

$$A = A_1' + A_2' + B_1' ,$$

e quindi, badando alle (12), si riconosce subito che, se r è un intero positivo qualunque, si ha

$$A^r = A_1'^r + A_2'^r + B_{1,r}' ,$$

essendo $B_{1,r}'$ un conveniente elemento di $(\omega_{1,2})$.

Ora il modulo di $(\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_{1,2})$, cioè di $[\omega]$, è la somma dei moduli di (ω_1) e (ω_2), dunque se $\varphi(\xi)$ è una qualunque funzione razionale intera in ξ a coefficienti razionali, si ha

$$\varphi(A) = \varphi(A_1') + \varphi(A_2') + B_{1,\varphi}',$$

essendo $B_{1,\varphi}'$ un opportuno elemento di $(\omega_{1,2})$.

Ciò posto, si indichino con

$$f(\xi) = 0\,, \qquad f_1(\xi) = 0\,, \qquad f_2(\xi) = 0$$

le equazioni minime di A, A_1 e A_2, cioè le equazioni minime di A, A_1' e A_2', o di $(\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_{1,2})$, (ω_1) e (ω_2).

Sarà

$$f(A) = 0\,,$$

e quindi, indicando con $B_{1,f}'$ un conveniente elemento di $(\omega_{1,2})$,

$$f(A_1') + f(A_2') + B_{1,f}' = 0.$$

Ma, come è chiaro, la somma di tre elementi appartenenti rispettivamente ad (ω_1), (ω_2) e $(\omega_{1,2})$ non può esser nulla se non a patto che ciascuno dei tre elementi sia nullo, dunque, in particolare,

$$f(A_1') = 0\,, \qquad f(A_2') = 0,$$

ed $f(\xi)$ è divisibile per $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$, cioè per il prodotto $f_1(\xi) f_2(\xi)$; perchè ciascuno dei polinomi $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ è indipendente dai parametri indeterminati da cui dipende l'altro, nè i due polinomi possono avere fattori irriducibili comuni indipendenti da tutti quei parametri indeterminati, perchè allora un tal fattore dovrebbe esser comune ai polinomi cui si riducono $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$ quando tutti quei parametri si suppongono nulli, e dovrebbe essere ξ; mentre ciò è assurdo, perchè le algebre (ω_1) e (ω_2) sono dotate di modulo e quindi i termini noti di $f_1(\xi)$ ed $f_2(\xi)$ non possono essere identicamente nulli.

D'altronde, essendo

$$f_1(A_1') = 0\,, \qquad f_2(A_2') = 0\,,$$

si ha, indicando con B_{1,f_1}' e B_{1,f_2}' degli opportuni elementi di $(\omega_{1,2})$

$$f_1(A) = f_1(A_2') + B_{1,f_1}',$$

$$f_2(A) = f_2(A_1') + B_{1,f_2}',$$

ed è, pertanto, in virtù delle (12),

$$f_1(A)\, f_2(A) = 0\,;$$

dunque $f_1(\xi) f_2(\xi)$ è a sua volta divisibile per $f(\xi)$.

Segue che è

$$f(\xi) = f_1(\xi)\, f_2(\xi),$$

e che quindi il rango di A, cioè di $(\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_{1,2})$, è dato da

$$\varrho_1 + \varrho_2.$$

26. Consideriamo ora tutti gli assi di ω complementari ad N. Per un teorema noto ([105]) essi appartengono tutti alla varietà algebrica V degli ∞^t $(t \geq 0)$ spazi polari di N rispetto ai vari sistemi nulli (riemanniani o no) di ω.

Il valore della dimensione t sarà calcolato tra poco, e si troverà precisamente

$$t = \lambda\,;$$

ma intanto giova osservare che V è *la minima varietà algebrica a cui appartengano tutti gli assi di ω complementari ad N* ([106]).

E infatti dire che una varietà algebrica V' contiene gli assi di ω complementari ad N, val quanto dire che essa contiene gli assi di ω che sono polari di N rispetto a sistemi nulli riemanniani di ω e che inoltre sono indipendenti da N, cioè che sono polari di N rispetto a sistemi nulli riemanniani generici di ω. Segue che tale varietà deve contenere gli spazi polari di N rispetto ai sistemi nulli riemanniani di ω e quindi anche rispetto ai sistemi nulli reali di ω, ciascun dei quali può pensarsi come limite di sistemi nulli riemanniani.

Ma allora V' deve coincidere con V, perchè se no entro la totalità lineare dei sistemi nulli, reali o no, di ω esisterebbe una varietà algebrica non coincidente con essa e contenente la totalità dei sistemi nulli reali di ω; ciò che è manifestamente assurdo ([107]).

([105]) Loc. cit. ([1]), n. 41, c).

([106]) Intendiamo dire con questo che ogni varietà algebrica, a cui appartengano tutti gli assi di ω complementari ad N, contiene necessariamente V.

([107]) Allorchè in questo n^0 si parla dell'insieme dei sistemi nulli riemanniani di ω si intende escluso il sistema nullo *zero* o del tutto indeterminato. E la stessa osservazione si intenda fatta per qualche altra occasione analoga.

27. Ciascun asse di ω complementare ad N (e quindi isomorfo ad M) è polare di N rispetto ad infiniti sistemi nulli riemanniani di ω individuanti un sistema lineare della dimensione

$$k_1 + k_2 + 1 = k - \lambda \text{ (}^{108}\text{)}.$$

Ma ogni tale asse è uno spazio razionale, dunque, per una ragione analoga ad altra addotta più sopra, possiamo dire che i sistemi nulli di ω, riemanniani o no, rispetto a cui un asse complementare di N è polare di N, costituiscono un sistema lineare $\infty^{h-\lambda}$.

Ora si dica t' la dimensione della totalità lineare costituita dai sistemi nulli, riemanniani o no, di ω rispetto a cui N ha per spazio polare lo spazio corrente di V.

Per quanto or ora è stato detto è

$$t' \leq k - \lambda.$$

Ma se fosse $t' < k - \lambda$, gli assi di ω complementari ad N, per ognun dei quali la dimensione corrispondente a t' è proprio $k - \lambda$, apparterrebbero a una varietà algebrica situata su V ma non coincidente con V, ciò che è impossibile; dunque sarà $t' = k - \lambda$.

Ora è evidentemente

$$t = k - t',$$

dunque resta, come volevasi,

$$t = \lambda \text{ (}^{109}\text{)}.$$

28. Ciò posto, introduciamo l'ipotesi, di cui tra poco ci libereremo, che le matrici ω_1 e ω_2 siano pure (e quindi, se $\lambda > 0$, isomorfe), e torniamo a considerare l'asse M e le $\infty^{h-\lambda}$ omografie

([108]) Loc. cit. ([105]).

([109]) Di qua un significato geometrico notevole del *carattere di immersione* di un asse di una matrice riemanniana, che avevo rilevato fin dal 1915, ma che non avevo mai reso pubblico, perchè di esso non avevo mai avuto occasione di valermi. Ad esso intendevo alludere con le ultime parole introduttive della mia Nota: *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV, 2º semestre 1915, pp. 393-400].

non nulle di ω che hanno in M uno spazio unito, e che subordinano in M le omografie di ω_1. Tra queste l'omografia corrente è regolare, dunque per l'omografia corrente della totalità $\infty^{h-\lambda}$ M è lo spazio congiungente un certo numero (≥ 1) di suoi spazi fondamentali.

Dal fatto che le omografie non nulle di ω aventi uno spazio unito in un asse complementare ad N costituiscono un sistema lineare $\infty^{h-\lambda}$ segue, come più sopra, che lo stesso sta per lo spazio generico di V; e anche questo è per l'omografia corrente del sistema $\infty^{h-\lambda}$ corrispondente lo spazio congiungente un certo numero di spazi fondamentali.

Si ricava da ciò che l'omografia corrente di ω, se pure appartiene a più di uno dei sistemi $\infty^{h-\lambda}$ rispondenti ai vari spazi di V, non appartiene che a un numero finito di tali sistemi, e quindi la totalità delle omografie non nulle di ω aventi uno spazio unito in qualche spazio di V ha la dimensione

$$\lambda + (h - \lambda) = h\,,$$

cioè coincide con quella di tutte le omografie non nulle di ω.

Si osservi inoltre che l'insieme di queste omografie di ω è la *minima varietà algebrica contenente i sistemi lineari* $\infty^{h-\lambda}$ *di omografie rispondenti agli assi di* ω *complementari ad* N.

29. Il rango dell'elemento corrente dell'algebra complessa $[\omega]''$ connessa ad ω è il rango ϱ di ω; ma può darsi che in $[\omega]''$ esistano anche elementi di rango inferiore a ϱ.

A questi rispondono omografie di ω costituenti, ove si escluda l'omografia nulla, una varietà *algebrica* di dimensione inferiore ad h; e quindi è certo che cotesta varietà non contiene tutte le omografie *riemanniane* di ω aventi uno spazio unito in un asse (almeno) complementare ad N.

Fra quest'ultime quella corrente è pertanto del rango ϱ.

Ma essa è pure del rango $\varrho_1 + \varrho_2$, dunque

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2\,,$$

e:

Il rango di una matrice (riemanniana) composta con due matrici riemanniane pure è la somma dei ranghi di queste.

Se le due matrici in discorso non sono vincolate ogni omografia riemanniana della matrice composta è regolare e le dimensioni dei suoi spazi fondamentali o sono tutte eguali o si distribuiscono in due gruppi ciascuno formato di numeri eguali; se invece sono vincolate e quindi isomorfe, l'omografia riemanniana corrente della matrice composta è regolare e le dimensioni dei suoi spazi fondamentali sono tutte eguali.

30. Nel teorema or ora enunciato l'ipotesi che le matrici componenti fossero pure fu introdotta nel n⁰ 28 per poter affermare che l'omografia generica di ω_1 era regolare (e per questo sarebbe bastato anzi supporre che soltanto la matrice ω_1 fosse pura). In tutte le altre parti della dimostrazione essa non è minimamente intervenuta.

Ma ora l'affermazione in discorso può essere fatta anche per le matrici riemanniane composte con due matrici pure, dunque il teorema sussiste anche per le matrici composte con tre matrici riemanniane pure; dopo di che si riconosce che anche per queste matrici l'omografia riemanniana generica è regolare.

Segue, per induzione, che il teorema sussiste per una matrice composta con un numero qualunque di matrici riemanniane pure.

Intanto ogni matrice riemanniana composta può considerarsi come isomorfa a una matrice composta con matrici pure; quindi possiamo enunciare l'importante teorema generale:

Se una matrice (riemanniana) è composta con due o più matrici riemanniane (pure o no), il rango di quella è la somma dei ranghi di queste.

Il teorema può anche enunciarsi al modo che segue:

Il rango di una matrice riemanniana impura è la somma dei ranghi degli assi di un suo qualunque sistema di assi complementari.

Avvertasi che nei ragionamenti fatti sono implicitamente contenuti i teoremi:

a) *L'omografia generica di una qualunque matrice riemanniana è regolare;*

b) *Se una matrice riemanniana è impura ma priva di assi isolati, la sua omografia generica (riemanniana o no) è regolare e a spazi fondamentali aventi tutti una stessa dimensione. Inoltre se questa dimensione è ν, e p, ϱ sono il genere e il rango della matrice si ha*

$$(\nu + 1)\,\varrho = 2p.$$

31. Adesso possiamo estendere alle matrici impure, ma prive di assi isolati, i teoremi c), d) ed f) del n⁰ 20 riguardanti le matrici pure.

Si supponga infatti che ω sia impura, ma priva di assi isolati, e si dicano q, ϱ_1 ed h_1 il genere, il rango e l'indice di moltiplicabilità di un suo qualunque asse puro.

Posto $p = n\,q$, con n intero (≥ 2), si ha

$$h + 1 = n^2\,(h_1 + 1),$$

e

$$\varrho = n\,\varrho_1.$$

Ma è

$$h_1 + 1 = \varrho_1\,\varrho_2\,,$$

con ϱ_2 divisore di ϱ_1, dunque

$$h + 1 = n^2\,\varrho_1\,\varrho_2 = n\,\varrho\,\varrho_2\,,$$

dove $n\varrho_2$ è un divisore di ϱ.

Intanto ϱ è ancora un divisore di $2p$, per la proposizione *b*) del n^0 prec., dunque i teoremi *c*) e *d*) sono estendibili alle matrici impure prive di assi isolati.

E lo stesso sta per il teorema *f*) una volta che è

$$p = nq \qquad \text{ed} \qquad h + 1 = n^2\,(h_1 + 1).$$

In particolare si ha dunque :

Se una matrice riemanniana è priva di assi isolati, il suo indice di moltiplicabilità aumentato di 1 dà un intero che è un divisore del quadruplo del quadrato del genere.

Occorre appena avvertire che il teorema non è ulteriormente estendibile; per le matrici con assi isolati può non esser vero. Si pensi, ad es., a una matrice del genere 2 e del tipo IV).

32. È stato già osservato che l'omografia generica, riemanniana o no, di una matrice riemanniana è regolare. Facciamo vedere che:

Perché una matrice di Riemann *ammetta un'omografia riemanniana non regolare, occorre e basta che essa sia impura e possegga infiniti assi.*

Suppongasi che la matrice ω sia impura, ma dotata soltanto di un numero finito di assi.

I suoi assi puri (costituenti l'unico gruppo fondamentale di assi puri della matrice) sono isolati; quindi una qualunque omografia riemanniana di ω, diciamo α, deve lasciar fermo ciascuno di essi, subordinando in ciascuno di essi una (delle relative omografie riemanniane, e quindi una) omografia regolare. Ma cotesti assi sono anche complementari, dunque gli spazi fondamentali di α non possono non avere come spazio congiungente lo spazio rappresentativo di ω e α è regolare.

Si conclude, ricordando il teorema sulle omografie delle matrici pure or ora invocato, che se ω è pura, o impura, ma dotata soltanto di un numero finito di assi, ω non possiede omografie riemanniane irregolari.

Se invece ω è impura e possiede infiniti assi distinti, esistono per ω assi non isolati ossia a coefficiente d'immersione positivo; quindi ω ammette omografie riemanniane degeneri (non nulle) il cui primo asse contiene il secondo, cioè ammette omografie riemanniane non regolari, rispondenti a elementi pseudonulli dell'algebra $[\omega]$ di grado 1.

Con questo l'asserto è dimostrato ed è inoltre provato che:

L'algebra $[\omega]$ ammette elementi pseudonulli quando, e solo quando, ω è impura e ammette infiniti assi.

33. Le tre algebre connesse con la matrice ω hanno lo stesso ordine e lo stesso rango, quindi sono insieme potenziali, o insieme non potenziali; e si verifica la prima alternativa quando, e solo quando, è $h+1=\varrho$.

Se ω è impura ed è isomorfa a una matrice composta con le matrici riemanniane pure $\omega_1, \dots, \omega_n$, detti h_j e ϱ_j l'indice di moltiplicabilità e il rango di ω_j, è

$$\varrho = \sum_j^{1\dots n} \varrho_j\,, \qquad \varrho \leq h+1\,, \qquad \varrho_j \leq h_j + 1$$

e inoltre [110]

$$h+1 \geq \sum_j^{1\dots n} (h_j+1),$$

verificandosi qui il segno superiore o l'inferiore secondo che tra le matrici ω_j ve ne sono, o no, almeno due che siano vincolate. Dunque, perchè sia

$$\varrho = h+1,$$

[110] Vedi loc. cit. [1], n° 29, formula (22).

occorre e basta che sia, per ogni valore di j,

$$\varrho_j = h_j + 1,$$

e che le matrici ω_j siano a due a due non vincolate.

Si conclude che:

Se le algebre connesse con una matrice riemanniana sono potenziali, la matrice o è pura, o è impura, ma dotata soltanto di un numero finito di assi. E in questo secondo caso ogni suo asse (puro o no) è anch'esso ad algebra potenziale.

§ 6.

L'equazione minima dell'algebra $[\omega]$.

34. Le analogie che nei n[i] prec. si son venute manifestando tra le matrici riemanniane pure e quelle impure, ma prive di assi isolati, trovano la loro spiegazione migliore nell'importante teorema che segue:

L'equazione minima dell'algebra razionale connessa con una matrice riemanniana é irriducibile, nel corpo delle funzioni razionali a coefficienti razionali dei parametri indeterminati che essa contiene, quando, e solo quando, la matrice è priva di assi isolati.

Che l'equazione minima di $[\omega]$ sia riducibile nel corpo ora detto se ω possiede assi isolati è evidente per il teorema di Study (I, n° 127); quindi tutto sta a far vedere che se ω è priva di assi isolati, l'equazione minima di $[\omega]$ è, in quel corpo, irriducibile. E in questo caso si può anche supporre ω non pura, perchè, quando ω è pura, è a dirittura irriducibile nel corpo dei numeri razionali l'equazione minima di un qualunque elemento di $[\omega]$.

35. Cominciamo dal dimostrare che:

Se l'equazione minima di $[\omega]$ è riducibile (nel solito corpo), la matrice ω è impura e ogni sua omografia riemanniana lascia fermo qualche suo asse.

Sia

$$A = \alpha_0\, A^{(0)} + \dots + \alpha_h\, A^{(h)}$$

l'elemento corrente di $[\omega]$, con le coordinate $\alpha_0, \dots, \alpha_h$, e sia

$$f(\xi) = 0$$

la sua equazione minima, cioè l'equazione minima di $[\omega]$, la quale avrà per grado il rango di A, cioè di ω.

Se questa è riducibile, ed è

$$f(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi) \dots f_t(\xi)$$

con $f_1, \dots, f_t$ irriducibili, questi fattori [n^0 30, a)] sono tutti distinti; poi è

$$f_1(A) f_2(A) \dots f_t(A) = 0.$$

Gli elementi di $[\omega]$

$$f_1(A), \dots, f_t(A)$$

sono tutti non nulli e permutabili, quindi ciascun di essi è un divisore dello zero, e le omografie riemanniane di ω rispondenti ad essi sono tutte degeneri e non nulle.

Siano, ordinatamente, $M_1, \dots, M_t$ i primi assi ed $N_1, \dots, N_t$ i secondi assi di tali omografie. Siccome ciascuna di queste è permutabile con l'omografia riemanniana A^* di ω rispondente ad A, ognuna di esse è trasformata in sè da A^*; quindi A^* lascia fermo ciascuno degli assi $M_1, \dots, M_t$ ed $N_1, \dots, N_t$, ognuno dei quali è appunto un asse di ω.

Con questo l'asserto per l'omografia riemanniana corrente è stabilito.

Avvertasi inoltre che l'asse M_j è lo spazio congiungente gli spazi fondamentali di A^* corrispondenti alle radici della sua equazione caratteristica date dalle radici di $f_j(\xi) = 0$; e l'asse N_j è lo spazio congiungente gli spazi fondamentali corrispondenti alle radici dell'equazione caratteristica date dalle radici di $\dfrac{f(\xi)}{f_j(\xi)} = 0$; quindi le coordinate grassmanniane di un qualunque asse M_j o N_j sono funzioni razionali intere a coefficienti interi delle coordinate $\alpha_s, \dots, \alpha_h$ di A.

Ora si consideri un'omografia riemanniana qualunque di ω, B^*.

Se B^* è nulla, il teorema è evidente; supponiamo dunque che ciò non sia e si consideri il fascio determinato da B^* e da un'omografia riemanniana A^* di ω di rango ϱ.

Per l'omografia riemanniana corrente di questo fascio il teorema sussiste, quindi essa lascia fermo qualche asse di ω, e le coordinate di ciascuno di questi assi sono funzioni razionali intere a coefficienti razionali del parametro, diciamolo λ, che serve a fissare l'omografia nel fascio e il cui valore si può supporre razionale per ciascuna omografia riemanniana del fascio.

Se λ_0 è il valore di λ rispondente a B^*, può ben darsi che quelle funzioni per $\lambda = \lambda_0$ diventino tutte nulle; ma i loro mutui rapporti, riuscendo funzioni razionali di λ a coefficienti interi, per λ tendente a λ_0 hanno limiti determinati, razionalmente esprimibili mediante λ_0; e quindi ciascuno degli assi lasciati fermi dall'omografia riemanniana corrente del fascio, al tendere di λ a λ_0, tende verso un asse lasciato fermo da B^*; c. d. d.

36. Ed ora dimostriamo che:

Se la matrice ω è impura, ma priva di assi isolati, l'equazione minima di $[\omega]$ è, nel senso dichiarato, irriducibile.

Sia q il genere degli assi puri di ω e sia $p = n\,q$ con n intero e ≥ 2.

Si considerino $n+1$ assi puri di ω ad n ad n indipendenti

$$M_1\,,\ M_2\,,\ \ldots\,,\ M_{n+1}\,,$$

i quali sono degli S_{2q-1} che ad n ad n hanno come spazio congiungente lo spazio rappresentativo di ω; e si consideri inoltre la varietà di SEGRE [111], diciamo V, riempita dagli S_{n-1} appoggiati ciascuno in un punto ai singoli spazi M_j.

La varietà V è riempita semplicemente da due schiere di spazi lineari: di queste, una, diciamo Φ, è costituita dagli ∞^{2q-1} S_{n-1} in discorso; l'altra, e sia Ψ, è costituita da ∞^{n-1} S_{2q-1} e contiene gli $n+1$ spazi M_j. Due spazi distinti di una stessa schiera non hanno alcun punto comune, mentre due spazi di schiere diverse si tagliano in *un* punto; inoltre due spazi di una stessa schiera sono punteggiati proiettivamente dagli spazi dell'altra.

Le imagini τ e $\bar{\tau}$ di ω si appoggiano a ciascun asse M_j, e quindi a ciascuno S_{2q-1} di Ψ, secondo S_{q-1}; cosicchè tra questi S_{2q-1} sono assi (puri) di ω quelli, e quelli soltanto, che sono razionali.

(111) Per queste varietà vedi: C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo V (1891), pp. 192-204]; G. SCORZA, *Sulle varietà di* SEGRE [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV (1909), pp. 119-131].

Se α è lo S_{n-1} di Φ uscente da un punto razionale di M_1, α è razionale, perchè è l'unico S_{n-1} uscente da quel punto e appoggiantesi agli spazi razionali $M_2, \ldots, M_{n+1}$; quindi fra gli S_{2q-1} di Ψ sono assi di ω quelli, e quelli soltanto, che escono dai punti razionali di α.

Si considerino ora le ∞^{n^2-1} omografie (non nulle), formanti sistema lineare, che trasformano V in sè stessa e tengono fermo ciascuno spazio di Φ. Esse mutano in sè ciascuna imagine di ω e fra di esse risultano omografie riemanniane di ω tutte e sole quelle che subordinano omografie razionali su α e quindi su ogni altro S_{n-1} di Φ.

Sia σ_0 un'omografia razionale di α i cui spazi fondamentali siano n punti uniti reali ma non razionali, e tale che non risulti razionale nessuno degli spazi congiungenti questi punti a due a due, a tre a tre, ..., ad $n-1$ ad $n-1$; poi sia σ un'omografia razionale variabile di α tendente a σ_0 con n punti uniti razionali (tendenti agli n punti uniti di σ_0).

Se A_0^* ed A^* sono le omografie riemanniane di ω appartenenti al detto sistema ∞^{n^2-1} e subordinanti su α le omografie σ_0 e σ, al tendere di σ^* a σ_0, A^* tende ad A_0^*.

L'omografia A^* ha come spazi fondamentali n spazi di Ψ che risultano n assi (puri) di ω; ed A_0^* ha come spazi fondamentali n spazi di Ψ che sono reali, ma non razionali. Inoltre nessuno degli spazi congiungenti gli spazi fondamentali di A_0^* a due a due, a tre a tre, ..., ad $n-1$ ad $n-1$ risulta uno spazio razionale.

Se un asse N è lasciato fermo da A^*, l'omografia razionale subordinata in esso da A^* ha i suoi spazi fondamentali negli spazi fondamentali di A^*; quindi N deve appoggiarsi a qualcuno di questi ultimi spazi. Ma un asse puro di ω sta in ogni asse di ω che non sia indipendente da esso; dunque N contiene ogni spazio fondamentale di A^* cui si appoggi.

D'altronde se N non coincidesse con lo spazio congiungente gli spazi fondamentali di A^* situati in esso, N incontrerebbe lo spazio congiungente i rimanenti spazi fondamentali in uno spazio che risulterebbe unito in A^*, ma privo di punti uniti, ciò che è assurdo: dunque N coincide, o con uno spazio fondamentale di A^*, o con uno spazio congiungente due o più di questi spazi fondamentali.

Da ciò si raccoglie che i soli assi di ω lasciati fermi da A^* sono gli spazi fondamentali di A^* e gli spazi che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., ad $n-1$ ad $n-1$.

Quando A^* tende ad A_0^*, ciascun asse lasciato fermo da A^* tende a uno spazio tenuto fermo da A_0^*, ma non razionale; quindi l'equazione minima di $[\omega]$ non può essere riducibile, perchè altrimenti in virtù di quanto è detto nel n^0 35, qualcuno degli assi lasciati fermi da A^*, al tendere di A^* verso A_0^*, dovrebbe tendere verso un asse lasciato fermo da A_0^*.

37. Dal teorema ora dimostrato discende che (I, n^0 145):

L'algebra complessa connessa con una matrice riemanniana (pura, o impura ma) priva di assi isolati, o è regolare, o è la somma diretta di due o più algebre regolari (dello stesso ordine, e quindi) equivalenti.

Nel primo caso l'indice di moltiplicabilità della matrice eguaglia il quadrato del rango diminuito di 1.

§ 7.

Le forme hermitiane di una matrice di Riemann.

38. Sia

$$(13) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s$$

una forma di Riemann della matrice ω; i coefficienti $a_{r,s}$ saranno dunque numeri razionali; e se tanto le x_r, quanto le y_s, si riguardano come coordinate correnti di punto nello spazio Σ, l'equazione

$$(14) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0$$

rappresenta una reciprocità riemanniana di ω.

Diciamo α cotesta reciprocità.

Se le variabili z_j e v_j $(j = 1, \ldots, p)$ si riguardano come le coordinate in τ e $\overline{\tau}$, rispettivamente, dei punti di τ e $\overline{\tau}$ che, in Σ, hanno per coordinate

$$z_1\, \omega_{1,r} + \ldots + z_p\, \omega_{p,r}, \qquad v_1\, \overline{\omega}_{1,r} + \ldots + v_p\, \overline{\omega}_{p,r} \qquad (r = 1, \ldots, 2p),$$

la reciprocità indotta da α fra τ e $\overline{\tau}$, cioè quella in cui due punti di τ e $\overline{\tau}$ sono fra loro coniugati quando sono tali in α, è rappresentata dall'equazione

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} K_{j,l}\, z_j\, v_l = 0\,,$$

dove

$$K_{j,l} = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} \quad (^{112}). \tag{15}$$

Se la forma (13) è simmetrica, la (15) porge

$$K_{l,j} = \overline{K}_{j,l}\,;$$

se invece è alternata, la (15) dà

$$K_{l,j} = -\, \overline{K}_{j,l}\,.$$

Secondo che si verifica la prima o la seconda alternativa, poniamo

$$H_{j,l} = \frac{1}{2} K_{j,l} \qquad \text{oppure} \qquad H_{j,l} = \frac{i}{2} K_{j,l} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Allora sarà in ambedue i casi

$$H_{l,j} = \overline{H}_{j,l}\,,$$

e la forma

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} H_{j,l}\, z_j\, \overline{z}_l$$

nelle variabili z_j e nelle complesse coniugate risulterà una forma Hermitiana.

Essa si dirà la *forma Hermitiana* di ω rispondente alla sua forma di Riemann (13); e si dirà di *prima* o di *seconda specie* secondo che questa è alternata o simmetrica.

E chiaro che:

Ogni combinazione lineare omogenea secondo numeri razionali di forme Hermitiane di ω tutte di prima (seconda) specie, è ancora una sua forma Hermitiana della stessa specie;

([112]) Loc. cit. ([1]), n⁰ 24.

e che:

Il massimo numero di forme Hermitiane di prima specie di ω *linearmente indipendenti è* $k+1$; *mentre il numero analogo per quelle di seconda specie è* $h-k$ (113).

Una forma Hermitiana di ω di prima specie si dirà *principale* se è definita; o, ciò che è lo stesso, se è principale la forma di RIEMANN da cui trae origine.

39. Pongasi

$$\tau_{r,l} = \sum_{s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \omega_{l,s} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \ldots, 2p; \\ l = 1, \ldots, p \end{pmatrix},$$

cosicchè

$$\overline{\tau}_{r,l} = \sum_{s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \overline{\omega}_{l,s}.$$

Sarà

$$\sum_{r}^{1\ldots 2p} \tau_{r,l}\, \omega_{j,r} = 0,$$

$$\sum_{r}^{1\ldots 2p} \tau_{r,l}\, \overline{\omega}_{j,r} = \overline{K}_{j,l},$$

$$\sum_{r}^{1\ldots 2p} \overline{\tau}_{r,l}\, \omega_{j,r} = K_{j,l},$$

$$\sum_{r}^{1\ldots 2p} \overline{\tau}_{r,l}\, \overline{\omega}_{j,r} = 0;$$

quindi se si pone

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdots & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdots & \omega_{p,2p} \\ \overline{\omega}_{1,1} & \overline{\omega}_{1,2} & \cdots & \overline{\omega}_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\omega}_{p,1} & \overline{\omega}_{p,2} & \cdots & \overline{\omega}_{p,2p} \end{vmatrix}$$

e si eseguisce il prodotto per righe dei determinanti $|a_{r,s}|$ ed Ω, e poi si eseguisce il prodotto del determinante così ottenuto per Ω,

(113) Loc. cit. (1), annotazione (22).

moltiplicando colonne per righe, si trova che

$$|a_{r,s}|\ \Omega^2 = (-1)^p\ |K_{j,l}| \cdot |\overline{K}_{j,l}|. \tag{16}$$

Se la (13) è simmetrica, si ha dunque

$$|a_{r,s}|\ \Omega^2 = (-1)^p\ 2^{2p}\ |H_{j,l}|^2, \tag{17}$$

se invece è alternata, si ha

$$|a_{r,s}|\ \Omega^2 = 2^{2p}\ |H_{j,l}|^2. \tag{18}$$

Osservisi che essendo

$$\overline{\Omega} = (-1)^p\ \Omega\,,$$

e quindi

$$\Omega\ \overline{\Omega} = (-1)^p\ \Omega^2\,,$$

Ω^2 (che come è noto, non può esser nullo) è positivo se p è pari, negativo se p è dispari, cosicchè, per la (16), è in ogni caso

$$|a_{r,s}| \geqq 0.$$

40. Si supponga nel n⁰ 38 che l'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0$$

sia quella di una *qualsiasi* reciprocità involutoria π di Σ avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazi autopolari; cioè si supponga che gli elementi della matrice simmetrica o emisimmetrica $\| a_{r,s} \|$ siano legati agli elementi di ω mediante le relazioni

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \omega_{l,s} = 0 \qquad (j\,,\, l = 1\,, \dots\,, p), \tag{19}$$

e

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, \overline{\omega}_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} = 0 \qquad (j\,,\, l = 1\,, \dots\,, p). \tag{20}$$

E in corrispondenza alla forma bilineare

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s\,,$$

si costruisca sempre l'altra

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} H_{j,l}\, z_j\, v_l\,,$$

ponendo

$$H_{j,l} = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s}\,, \tag{21}$$

oppure

$$H_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} \tag{22}$$

secondo che $a_{r,s} = a_{s,r}$, oppure $a_{r,s} = -\, a_{s,r}$.

La totalità lineare ∞^{p^2-1} delle reciprocità involutorie (non nulle) di Σ di una determinata specie (polarità o sistemi nulli), aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazi autopolari, resta riferita omograficamente alla totalità lineare ∞^{p^2-1} delle reciprocità (non nulle) fra τ e $\overline{\tau}$, quando si faccia corrispondere ad ogni elemento della prima la reciprocità che esso induce fra τ e $\overline{\tau}$; dunque:

Se si assegnano arbitrariamente i p^2 numeri $H_{j,l}$ esiste una ed una sola matrice simmetrica (emisimmetrica) $\| a_{r,s} \|$ tale che i suoi elementi soddisfacciano nel tempo stesso alle (19), (20) *e* (21) [*alle* (19), (20) *e* (22)].

Ora si osservi che, se la reciprocità involutoria π ha due spazi autopolari in τ e $\overline{\tau}$, lo stesso accade per la reciprocità involutoria complessa coniugata $\overline{\pi}$, cioè per quella rappresentata dall'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \overline{a}_{r,s}\, x_r\, y_s = 0\,;$$

e che i numeri aventi per le $\overline{a}_{r,s}$ lo stesso significato che i numeri $H_{j,l}$ hanno per le $a_{r,s}$ sono i numeri $H'_{j,l} = \overline{H}_{l,j}$; quindi:

Se la forma simmetrica o alternata

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s \tag{23}$$

è a coefficienti reali, la forma

$$\sum_{j,l}^{1\ldots p} H_{j,l}\, z_j\, \overline{z}_l \tag{24}$$

risulta una forma di Hermite; *le due forme* (23) *e* (24) *si individuano a vicenda e la forma* (24) *può essere assegnata arbitrariamente.*

Di qua si trae una conseguenza che ci sarà utile in appresso. Si supponga che la matrice ω sia ad *indici massimi* (cioè che sia $k = p^2 - 1$ e $h = 2p^2 - 1$). Allora, fissata una qualsiasi reciprocità involutoria *reale* di Σ avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazi autopolari, esistono reciprocità involutorie *riemanniane* di ω infinitamente prossime ad esse e quindi:

Se la matrice ω è ad indici massimi, assegnata una qualsiasi forma di Hermite *in p variabili (e nelle complesse coniugate), esistono forme di* Hermite *della matrice, tanto di prima, quanto di seconda specie, infinitamente prossime ad essa.*

41. Si passi dalla matrice ω alla matrice riemanniana equivalente ω' mediante l'operazione A [114] definita dalle uguaglianze

$$\omega'_{j,r} = \sum_{m}^{1\ldots p} \lambda_{j,m}\, \omega_{m,r}. \tag{25}$$

La forma (13) sarà una forma di Riemann anche per la matrice ω'; e se essa è simmetrica o alternata, la forma Hermitiana di ω' ad essa corrispondente sarà data da:

$$H' = \sum_{j,l}^{1\ldots p} H'_{j,l}\, z_j\, \overline{z_l}$$

dove

$$H'_{j,l} = \frac{\eta}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, \omega'_{j,r}\, \overline{\omega'_{l,s}},$$

con $\eta = 1$, oppure $\eta = i$, secondo che la forma (13) è simmetrica o alternata.

Per le (25) si ha

$$H'_{j,l} = \sum_{m,n}^{1\ldots p} H_{m,n}\, \lambda_{j,m}\, \overline{\lambda_{l,m}};$$

quindi la forma H' è la trasformata di H mediante le sostituzioni lineari complesse coniugate

$$z_j \mid \lambda_{1,j}\, z_1 + \ldots + \lambda_{p,j}\, z_p, \quad \overline{z_j} \mid \overline{\lambda_{1,j}}\, \overline{z_1} + \ldots + \overline{\lambda_{p,j}}\, \overline{z_p}.$$

In altri termini:

Se la matrice riemanniana ω' è dedotta da una matrice riemanniana ω mediante un'operazione A definita dalla matrice

$$A = \| \lambda_{j,l} \| \qquad (j, l = 1, \ldots, p),$$

[114] Loc. cit. [1], I, n° 1.

le forme di HERMITE *di* ω' *di prima (seconda) specie si deducono da quelle della stessa specie di* ω *effettuando su di esse le sostituzioni lineari complesse coniugate rispondenti alle matrici* Λ_{-1} *e* $\overline{\Lambda}_{-1}$.

Segue che:

Applicando, ove occorra, a una matrice riemanniana un'operazione Λ, *con che le forme di* RIEMANN *restano inalterate, si può sempre supporre che la forma di* HERMITE *corrispondente a una determinata forma di* RIEMANN, *simmetrica o alternata, della matrice sia del tipo canonico*

$$\sum_j^{1\dots p} \varepsilon_j z_j \overline{z}_j ,$$

dove ciascuna ε_j *è uguale a* $0, +1$ *o* -1.

Naturalmente tra queste ε_j ve ne saranno $p-q$ nulle, se q è la caratteristica della considerata forma di HERMITE, e ve ne saranno t eguali a $+1$ e $q-t$ eguali a -1, se t è l'*indice di inerzia* della forma stessa.

In particolare, se la forma Hermitiana di cui si parla in questo teorema è principale, essa si potrà supporre data da

$$\sum_j^{1\dots p} z_j \overline{z}_j$$

o da

$$-\sum_j^{1\dots p} z_j \overline{z}_j ,$$

e delle due alternative si può far verificare quella che si vuole, disponendo del segno della forma di RIEMANN da cui essa trae origine.

42. A una forma f di RIEMANN, simmetrica o alternata, della matrice ω risponda la reciprocità riemanniana involutoria π di ω e la forma Hermitiana H con la caratteristica q e l'indice di inerzia t.

Si indicano subito i significati geometrici degli interi q e t per la reciprocità π.

Grazie a un'osservazione già fatta altrove si ha subito, intanto, che la caratteristica della forma f è $2q$; quindi:

La reciprocità involutoria π *non è, od è degenere secondo che si ha* $q=p$ *o* $q<p$; *e se è* $q<p$, *la reciprocità* π *ha per asse un* $S_{2(p-q)-1}$.

Questo asse è, naturalmente, un asse di ω; e quindi se ω è pura, è necessariamente $q=p$.

Poichè H ha la caratteristica q e l'indice di inerzia t, essa ridotta a forma canonica diventa

$$\sum_j^{1\ldots t} z_j \bar{z}_j - \sum_j^{t+1\ldots q} z_j \bar{z}_j ;$$

e quindi se t' è il minimo dei due interi t e $q-t$ e le z_j si interpretano come coordinate proiettive omogenee di un punto in un S_{q-1}, l'*iperquadrica* (115), rappresentata in questo S_{q-1} dall'equazione

$$\sum_j^{1\ldots t} z_j \bar{z}_j - \sum_j^{t+1\ldots q} z_j \bar{z}_j = 0, \tag{26}$$

contiene come spazi lineari di dimensione massima degli $S_{t'-1}$.

In particolare se $t' = 0$ essa non contiene alcun punto (nè reale, nè imaginario).

Se l'equazione (26) si interpreta come equazione di un'iperquadrica in un S_{p-1} ($q \leq p$), nel quale le coordinate correnti di punto siano le $z_1, z_2, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_p$ ed è $q < p$, questa iperquadrica risulterà degenere, avrà come spazio singolare un S_{p-q-1} e conterrà come spazi lineari di dimensione massima degli $S_{p-q+t'-1}$, passanti tutti per lo S_{p-q-1} singolare.

Ciò premesso, si consideri la reciprocità π_τ indotta da π fra τ e $\bar{\tau}$, la cui equazione si può supporre data da

$$\sum_j^{1\ldots t} z_j v_j - \sum_j^{t+1\ldots q} z_j v_j = 0.$$

In base a quanto è stato osservato, gli spazi lineari di dimensione massima di τ, tali che ciascun punto di uno di essi risulti coniugato in π_τ al punto imaginario coniugato di $\bar{\tau}$ sono degli $S_{p-q+t'-1}$.

Se α è uno di questi $S_{p-q+t'-1}$ ed $\bar{\alpha}$ è lo spazio imaginario coniugato di α contenuto in τ, ciascun punto di α è congiunto all'imaginario coniugato di $\bar{\alpha}$ da una retta reale che appartiene alla quadrica fondamentale di π, se π è una polarità, o al complesso lineare definito da π, se π è un sistema nullo.

(115) Molti geometri dicono *iperquadrica* per *quadrica di dimensione* > 2; qui la parola *iperquadrica* è adoperata nel senso di Segre. Vedi loc. cit. (14).

Sia allora A un punto qualunque di α, $\bar{A}'$ un punto qualunque di $\bar{\alpha}$ e $A\,\bar{A}'$ la retta che li congiunge. Detto $\bar{A}$ il punto, di $\bar{\alpha}$, imaginario coniugato ad A, e A' il punto, di α, imaginario coniugato ad $\bar{A}'$, le due rette AA' e $\bar{A}\,\bar{A}'$ sono due rette di α ed $\bar{\alpha}$ imaginarie coniugate, e ogni retta reale congiungente un punto dell'una con l'imaginario coniugato dell'altra appartiene alla quadrica o al complesso lineare definito da π. Ma allora *ogni* retta appoggiata ad $A\,A'$ e $\bar{A}\,\bar{A}'$, in particolare, la retta $A\,\bar{A}'$, appartiene a quella quadrica o a quel complesso.

Segue che lo $S_{2(p-q+t')-1}$ *reale* congiungente α ed $\bar{\alpha}$ sta su quella quadrica, o è totale per quel complesso lineare.

Insomma:

Gli spazi reali di dimensione massima, congiungenti uno spazio di τ con lo spazio imaginario coniugato di $\bar{\tau}$ e situati per intero sulla quadrica definita da π, o totali per il complesso lineare definito da π, sono degli $S_{2(p-q+t')-1}$ passanti tutti (se $q<p$) per l'asse di π ([116]).

43. Siano f_1 ed f_2 due forme di Riemann non degeneri della matrice ω, e siano l'una simmetrica e l'altra alternata. Siano poi H_1 e H_2 le corrispondenti forme di Hermite.

Se H_1 e H_2 differiscono soltanto per un fattore numerico (che risulta necessariamente reale), la polarità e il sistema nullo, riemanniani, di ω, π_1 e σ_2, rispondenti alle forme f_1 ed f_2, inducono fra τ e $\bar{\tau}$ la stessa reciprocità; quindi il prodotto $\pi_1\,\sigma_2^{-1}$ è un'omografia riemanniana di ω (involutoria), che, senza essere identica, subordina l'identità sulle imagini di ω. Ma allora ω è ad indici massimi ([117]).

Viceversa se ω è ad indici massimi, l'omografia involutoria avente per spazi fondamentali le imagini di ω risulta un'omografia riemanniana di ω e i prodotti di questa omografia per i singoli sistemi nulli riemanniani di ω dànno tutte le polarità riemanniane di ω; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due forme Hermitiane non degeneri di specie diversa di una matrice di Riemann *differiscano solo per un fattore numerico è che la matrice sia ad indici massimi; nel qual caso ogni forma Hermitiana di una specie è nel tempo stesso una forma Hermitiana dell'altra.*

([116]) Questa proposizione generalizza una bella ed utile osservazione dovuta al Rosati. Cfr. loc. cit. ([1]), annotazione ([23]).

([117]) Vedi loc. cit. ([1]), I, n⁰ 60.

Più generalmente:

Perchè due forme Hermitiane degeneri (ma non nulle), di specie diversa, di una matrice di Riemann *differiscano solo per un fattore numerico occorre e basta che la matrice ammetta un asse (almeno) ad indici massimi.*

44. Suppongasi che la sostituzione A:

$$x_r \mid a_{r,1}\, x_1 + \dots + a_{r,2p}\, x_{2p} \qquad (r = 1, \dots, 2p),$$

sia una sostituzione riemanniana principale di ω, cioè che muti in sè una forma riemanniana principale di ω.

In tal caso è noto che il determinante

$$\mid A \mid = \mid a_{r,s} \mid$$

risulta la potenza p^{ma} di un numero razionale positivo σ, e se

$$\Lambda = \| \lambda_{j,l} \|$$

è la matrice omologa ad A, le sostituzioni complesse coniugate

$$z_j \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\lambda_{1,j}\, z_1 + \dots + \lambda_{p,j}\, z_p), \quad \bar{z}_j \right| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\bar{\lambda}_{1,j}\, \bar{z}_1 + \dots + \bar{\lambda}_{p,j}\, \bar{z}_p) \quad (j=1,\dots,p)$$

mutano in sè la forma Hermitiana di ω rispondente a quella forma riemanniana principale [118].

Come è sempre lecito fare, si supponga che questa forma di Hermite sia la forma

$$\sum_j^{1\dots p} z_j\, \bar{z}_j\,;$$

allora le matrici

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Lambda_{-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Lambda$$

[118] Loc. cit. [1], I, n⁰ 24.

saranno *antiortogonali* ([119]), cioè sussisteranno le relazioni

(27) $$\sum_{m}^{1\ldots p} \lambda_{m,j}\, \overline{\lambda}_{m,l} = \sigma\, \varepsilon_{j,l}\,,$$

e

(28) $$\sum_{m}^{1\ldots p} \lambda_{j,m}\, \overline{\lambda}_{l,m} = \sigma\, \varepsilon_{j,l}\,,$$

dove $\varepsilon_{j,l}$ è 1 o 0, secondo che è $j = l$ o $j \neq l$.

Come è ben noto, le (27) implicano le (28), e reciprocamente.

§ 8.

Le matrici riemanniane non singolari.

45. *Il rango di una matrice riemanniana non singolare è 1 o 2.*

Supponiamo infatti che la nostra matrice ω sia non singolare, cioè supponiamo che sia $k = 0$.

Essa ammetterà, prescindendo da un fattore numerico, una sola forma Hermitiana non nulla, e questa, poichè risulterà necessariamente principale, potrà supporsi data dalla forma

$$\sum_{j}^{1\ldots p} z_j\, \overline{z}_j\,.$$

Inoltre la matrice ω, non essendo singolare, sarà senz'altro pura, quindi le sue (omografie e) sostituzioni riemanniane, non nulle, sono tutte non degeneri e principali.

Siano

$$A = \| a_{r,s} \| \qquad \text{e} \qquad I = \| \varepsilon_{r,s} \| \qquad (r, s = 1, \ldots, 2p)$$

un elemento non nullo e il modulo di $[\omega]$, per modo che $\varepsilon_{r,s}$ è 1 o 0, secondo che è $r = s$, o $r \neq s$.

([119]) Chiamiamo *anti-ortogonali*, per ragioni evidenti di opportunità, le matrici che altri autori dicono *unitarie*. Vedi per es.: L. Bieberbach, *Über einen Satz des Hrn. C. Jordan in der Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (1911), pp. 231-240].

Si dica

$$\Lambda = \| \lambda_{j,l} \|$$

la matrice omologa ad A e J la matrice omologa a I, ossia la matrice identica di ordine p. Infine si indichi con σ^p, essendo σ razionale e positivo, il determinante di Λ.

La matrice

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Lambda$$

è (n^0 44) antiortogonale, e quindi è

$$\sum_m^{1\dots p} \lambda_{m,j} \, \overline{\lambda}_{m,l} = \sigma \, \varepsilon_{j,l} \qquad (j, l = 1, \dots, p), \tag{29}$$

dove $\varepsilon_{j,l}$ è 1 o 0, secondo che $j = l$, o $j \neq l$.

Ciò posto, sia α un numero razionale tale che l'elemento

$$A + \alpha I$$

di $[\omega]$ risulti non nullo.

La matrice omologa ad $A + \alpha I$ sarà $\Lambda + \alpha J$; e quindi, se σ_α^p è il determinante di $A + \alpha I$, con σ_α razionale e positivo, la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}} (\Lambda + \alpha J)$$

sarà antiortogonale, ossia sarà

$$\sum_m^{1\dots p} (\lambda_{m,j} + \alpha \, \varepsilon_{m,j}) \, (\overline{\lambda}_{m,l} + \alpha \, \varepsilon_{m,l}) = \sigma_\alpha \, \varepsilon_{j,l} \, . \tag{30}$$

Di qua, tenendo conto della (29) si trae

$$\alpha \, (\lambda_{l,j} + \overline{\lambda}_{j,l}) = (\sigma_\alpha - \sigma - \alpha^2) \, \varepsilon_{j,l} \, ; \tag{31}$$

quindi, se, com'è lecito supporre, $\alpha \neq 0$, sarà

$$\lambda_{j,j} + \overline{\lambda}_{j,j} = \frac{\sigma_\alpha - \sigma - \alpha^2}{\alpha} \qquad (j = 1, \dots, p) \tag{32}$$

e

$$\lambda_{l,j} = - \, \overline{\lambda}_{j,l} \qquad (j, l = 1, \dots, p; j \neq l). \tag{33}$$

In virtù delle (32) le parti reali di $\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{p,p}$ sono tutte eguali a

$$\frac{\sigma_\alpha - \sigma - \alpha^2}{2\alpha},$$

quindi il valore, β, di questa funzione, che è razionale, è indipendente da α.

Ora le (31) equivalgono alla relazione

$$A + \bar{A}_{-1} = 2\,\beta\,J\,;$$

ma è

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,\bar{A}\right)_{-1},$$

ossia

$$\sigma\,A^{-1} = \bar{A}_{-1}\,,$$

dunque

$$A + \sigma\,A^{-1} = 2\,\beta\,J\,,$$

o, moltiplicando per A,

$$A^2 - 2\,\beta\,A + \sigma\,J = 0.$$

Segue che è pure

(34) $$A^2 - 2\beta\,A + \sigma\,I = 0\,,$$

e quindi A, come volevasi, ha rango 2 o 1.

46. Se il rango di ω è 1, per ω è non solo $k = 0$, ma anche $h = 0$; ossia ω è ad indici nulli.

Se invece il rango di ω è 2, per ω è $h = 1$, o $h = 3$ (n° 22).

Suppongasi che il rango di ω sia 2 e che nella (34) A sia appunto un elemento di $[\omega]$ di rango 2.

L'equazione

$$\xi^2 - 2\,\beta\xi + \sigma = 0$$

sarà l'equazione di A, e quindi dovrà essere irriducibile nel corpo dei numeri razionali.

Ciò porta intanto che le sue due radici ξ' e ξ'' sono certo distinte.

D'altronde entrambe queste radici [loc. cit. ([118])] hanno per modulo $\sqrt{\sigma}$, quindi dovendo esser distinte e aver per prodotto σ, non potranno esser reali.

Aggiungasi che le radici dell'equazione caratteristica della matrice A sono date dalle due radici p-ple ξ' e ξ'' e quelle dell'equazione caratteristica della matrice Λ sono date dalla radice t-pla ξ' (con $0 \leq t \leq p$) e dalla radice $(p - t)$-pla ξ'' (120); quindi l'omografia riemanniana A^* di ω rispondente ad A ha come spazi fondamentali due S_{p-1} imaginari coniugati, appoggiati all'imagine τ di ω, l'uno secondo un S_{t-1} e l'altro secondo un S_{p-t-1}.

Se è $t = 0$ o $t = p$, A^* subordina su ciascuna imagine di ω l'identità, e ω è ad indici massimi. Ma ciò è da escludere se $p > 1$, perchè altrimenti ω sarebbe singolare; dunque se $p = 1$ si può supporre $t = p = 1$ (e $p - t = 0$); e se $p > 1$ è necessariamente $0 < t < p$.

Ora dire che A è del rango 2, val quanto dire, nel caso attuale, che A^* è non nulla e non identica, dunque raccogliendo le osservazioni fatte abbiamo il seguente teorema:

Una matrice riemanniana non singolare ha l'indice di moltiplicabilità eguale a 0, 1 o 3. E quando quest'indice è positivo, ogni sua omografia riemanniana, non nulla e non identica, ha per spazi fondamentali due S_{p-1} imaginari coniugati, appoggiati all'imagine di ω l'uno secondo un S_{t-1} e l'altro secondo un S_{p-t-1}, dove se $p = 1$ si può supporre $t = 1$, mentre se $p > 1$ è necessariamente $0 < t < p$.

Questo teorema sarà più innanzi precisato e le matrici riemanniane non singolari con l'indice di moltiplicabilità positivo saranno tutte effettivamente costruite.

Intanto poichè le considerazioni già svolte mostrano che quest'ultime matrici sono del rango 2, sarà bene passare allo studio di tutte le matrici riemanniane del rango 2.

§ 9.

Le matrici riemanniane di rango 2.

47. *Una matrice riemanniana del rango 2 ha l'indice di moltiplicabilità eguale a 1 o a 3.*

Infatti suppongasi che per la matrice ω sia $\varrho = 2$.

Se ω è pura, il fatto che h è 1 o 3 segue subito dal n° 22.

(120) Loc. cit. (1), I, n° 22.

Se ω è impura e $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ $(n \geq 2)$ sono i ranghi degli assi di un suo gruppo fondamentale di assi puri,

$$M_1, M_2, \dots, M_n,$$

dovendo essere

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n = 2,$$

e ciascuna delle ϱ_j non inferiore a 1, sarà

$$n = 2, \ \varrho_1 = \varrho_2 = 1.$$

Da $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ segue che gli indici di moltiplicabilità (e di singolarità) di M_1 ed M_2 sono entrambi nulli; quindi M_1 ed M_2, o non sono vincolati, o sono vincolati ed isomorfi col carattere simultaneo eguale a 1.

Si deduce che l'indice di moltiplicabilità di ω è 1 o 3 (e, corrispondentemente, quello di singolarità è 1 o 2).

48. Supponiamo sempre ω di rango 2 e passiamo alla caratterizzazione precisa delle sue omografie riemanniane.

Se ω è pura, ogni omografia riemanniana di ω, non nulla e non identica, è [n⁰ 20, *b*)] ***biassiale*** ([121]) ed ha per assi due S_{p-1}.

Questi possono essere reali o imaginari coniugati.

Se sono reali, p è necessariamente pari, e ciascuno di essi si appoggia alle imagini di ω secondo spazi imaginari coniugati della dimensione $\frac{p}{2} - 1$; se sono imaginari coniugati, l'uno si appoggia all'imagine di ω secondo un S_{t-1} $(0 \leq t \leq p)$ e l'altro si appoggia all'imagine stessa secondo un S_{p-t-1}.

Qui poi, se $p = 1$, si può supporre $t = p = 1$; se no, deve essere necessariamente $0 < t < p$, perchè altrimenti (cfr. n⁰ 46) ω sarebbe ad indici massimi e non sarebbe pura.

Se $h = 1$ null'altro vi è da aggiungere, all'infuori del fatto che in tal caso gli assi delle omografie riemanniane, non nulle e non identiche, di ω, coincidono; invece:

Se $h = 3$ il genere p di ω é necessariamente pari, e gli assi delle omografie riemanniane di ω non nulle e non identiche appartengono tutti a una schiera ∞^1 di una V_p^p di SEGRE *razionale normale.*

([121]) Per brevità di discorso diciamo ***biassiale*** ogni omografia regolare con due soli spazi fondamentali; e questi spazi li chiamiamo gli *assi* dell'omografia.

E invero se $h = 3$ esistono nell'algebra $[\omega]$ terne di elementi differenti dal modulo tali che per essi sono soddisfatte relazioni del tipo delle (85) del n^0 147 della Parte Prima; quindi ω ammette terne di omografie riemanniane involutorie a due a due permutabili e azigetiche ([122]), formanti con l'identità un gruppo quadrinomio, e le quattro omografie di questo gruppo determinano il sistema lineare ∞^3 delle omografie non nulle di ω.

Le omografie di una tal terna, appunto perchè azigetiche, hanno per spazi fondamentali tre coppie di S_{p-1} di una V_p^p di Segre con una schiera ∞^1 di S_{p-1} e una schiera ∞^{p-1} di rette; quindi le omografie non nulle di ω sono quelle che trasformano in sè tale V_p^p, mutando in sè ciascuna retta di questa schiera e inducendo nella schiera ∞^1 di S_{p-1} il sistema di tutte le possibili proiettività non nulle.

Segue, come volevasi, che gli assi delle considerate omografie riemanniane di ω appartengono tutti alla schiera ∞^1 di S_{p-1} di questa V_p^p.

Aggiungasi che l'imagine di ω dovendo appoggiarsi agli S_{p-1} di questa schiera che sono assi di omografie riemanniane biassiali di ω, deve appoggiarsi a tutti i detti S_{p-1}; dunque la dimensione $t-1$ dello spazio comune all'imagine di ω con uno di tali S_{p-1} è costante al variare dello S_{p-1} nella schiera.

Da ciò si deduce che deve essere

$$t - 1 = p - t - 1 \,,$$

e quindi p è pari e $t = \frac{p}{2}$.

49. Le conclusioni a cui siamo pervenuti per il caso che ω sia pura non subiscono, nell'ipotesi che ω sia impura, che qualche leggera modificazione.

E infatti, se ω è impura, ed è $h = 1$, essa ha soltanto due assi (puri, complementari e) isolati, e le sue omografie riemanniane non degeneri e non identiche, sono tutte biassiali e hanno come spazi fondamentali gli assi della matrice (spazi, dunque, che stavolta sono razionali e quindi necessariamente reali, ma non necessariamente della stessa dimensione); se invece ω è impura ed è $h = 3$,

([122]) Vedi E. Study, *Gruppen zweiseitiger Kollineationen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1912), pp. 453-479], pag. 456 e formula (3) della pag. 457.

poichè un suo gruppo fondamentale di assi puri è costituito da due assi isomorfi, il genere p di ω sarà pari, ed ω ammetterà infiniti assi puri di genere $\frac{p}{2}$ e dimensione $p-1$.

Siano M_1, M_2, M_3 tre di questi assi a due a due indipendenti (e perchè siano tali basta che siano distinti), e sia V la V_p^p di Segre razionale normale riempita dalle rette che si appoggiano ad M_1, M_2, M_3.

Ragionando come nel n° 36 si riconosce che V_p^p contiene nella schiera di S_{p-1} determinata da M_1, M_2, M_3 infiniti assi di ω e che le ∞^3 omografie non nulle di ω sono le ∞^3 omografie che trasformano V in sè stessa, subordinando l'identità sopra ognuna delle rette di V_p^p appoggiate ad M_1, M_2, M_3 e, quindi, ad ogni S_{p-1} della schiera che li contiene.

Aggiungasi che:

La varietà V contiene tutti gli assi di ω;
perchè quando una matrice riemanniana è impura, ogni suo asse è spazio di punti uniti per qualche sua omografia riemanniana non identica.

50. Adesso siamo in grado di dimostrare che:

L'indice di singolarità di una matrice riemanniana a rango 2 è 0, 1 o 2.

E infatti se ω è del rango 2, per ω è $h=1$ o $h=3$. Ma $k \leq h$, dunque se $h=1$ è $k=0$, o $k=1$.

Se $h=3$ ed ω è impura, è stato già osservato che è $k=2$; dunque non resta da considerare se non l'ipotesi in cui sia $h=3$ ed ω pura.

Ebbene in tal caso k, o è 0, o è 2.

E infatti se fosse $k=1$, l'omografia riemanniana corrente di ω dovrebbe avere gli assi nei due pseudo-assi della matrice e sarebbe $h=1$, non $h=3$; e se fosse $k=3$ le omografie di ω si otterrebbero tutte moltiplicando a destra i sistemi nulli di ω per l'inversa di un suo sistema nullo fisso non degenere. Ma allora due S_{p-1} distinti e, del resto, qualunque della schiera della varietà di Segre contenente gli assi delle omografie (biassiali) di ω, essendo gli assi di infinite omografie biassiali di ω, sarebbero polari reciproci rispetto a quel sistema nullo fisso; ciò che è manifestamente assurdo una volta che di quegli S_{p-1} uno può esser tenuto fermo e l'altro può esser fatto variare.

51. I risultati a cui siamo pervenuti possono essere tutti invertiti nel senso che segue.

In primo luogo è stato già dimostrato nel § prec. che, se per ω è $k=0$ e $h>0$, è $\varrho=2$ e $h=1$, o $h=3$; in secondo luogo è chiaro, per un'osservazione fatta nel n⁰ precedente che, se per ω è $k=h=1$, si ha $\varrho=2$; e infine si vede subito che, se per ω è $k=2$ e $h=3$, è ancora $\varrho=2$.

E infatti, se $k=2$ ed $h=3$, le reciprocità involutorie di ω sono date da una rete di sistemi nulli e da una polarità, la quale, appunto perchè è unica, è mutata in sè da ciascuno dei sistemi nulli. Inoltre essa è (reale e) razionale, cioè riemanniana.

Aggiungasi che essa è pure non degenere, giacchè in caso contrario il suo asse risulterebbe un asse di ω trasformato in sè dai sistemi nulli principali di ω, e ciò è notoriamente impossibile ([123]).

Segue che i prodotti dei sistemi nulli di ω per l'inversa della polarità di ω dànno luogo a una rete di omografie di ω in cui l'omografia corrente è involutoria e in cui non è certo contenuta l'identità; e quindi il sistema lineare ∞^3 delle omografie non nulle di ω, essendo individuato dall'identità e da quella rete è un sistema di omografie generalmente biassiali, e ω è del rango 2.

Riassumendo, abbiamo il seguente teorema:

Le matrici riemanniane del rango 2 sono tutte e sole le matrici riemanniane per cui gli indici di singolarità e moltiplicabilità sono dati da

I) $k=0$ *e* $h=1$;

II) $k=0$ *e* $h=3$;

III) $k=h=1$; *o infine da*

IV) $k=2$ *e* $h=3$.

Quelle per cui valgono le alternative I) *o* II) *sono necessariamente pure, le altre invece possono essere tanto pure quanto impure.*

Avvertasi che una matrice riemanniana di genere 2 non singolare ha l'indice di moltiplicabilità necessariamente nullo; quindi:

Una matrice per la quale si presenti il caso I) *ha il genere diverso da* 2*;*

([123]) Cfr. loc. cit. ([1]), I, n⁰ 36.

e inoltre, badando anche a quanto è stato detto più sopra:

Una matrice, per la quale si presenti il caso II) *o il caso* IV), *è di genere pari* > 2 *o, rispettivamente,* ≥ 2.

L'omografia riemanniana corrente di una matrice di rango 2 e genere p è in ogni caso biassiale; però:

Se la matrice è del tipo I), *gli assi di quelle omografie sono due* S_{p-1} *fissi imaginari coniugati, appoggiati all'imagine della matrice l'uno secondo un* S_{t-1}, *l'altro secondo un* S_{p-t-1}, *dove, se* $p=1$, *si può supporre* $t=1$, *e, se* $p>1$, *è necessariamente* $0<t<p$;

Se la matrice è del tipo III), *gli assi di quelle omografie sono due spazi reali fissi coincidenti con gli pseudo-assi* (*o, a dirittura, assi*) *della matrice* ([124]); *e quindi se la matrice è pura,* p *è pari ed essi sono ancora due* S_{p-1};

Se la matrice è del tipo II), *o* IV), *gli assi dell'omografia, al variar di questa, variano sopra una* V_p^p *di* SEGRE *razionale normale la quale è priva, o dotata, di punti reali, secondo che si verifica la prima, o la seconda alternativa.*

Si osservi infatti, per giustificare quest'ultima asserzione, che se la matrice è del tipo II) la schiera di S_{p-1} della V_p^p contenente gli assi delle omografie contiene coppie di S_{p-1} imaginari coniugati separantisi armonicamente, corrispondentemente alle coppie di omografie involutorie della matrice fra loro permutabili, e quindi tale schiera non può contenere elementi reali. Invece, se la matrice è del tipo IV), la V_p^p contenendo gli pseudo-assi della matrice, contiene punti reali.

52. Dalle cose dette possiamo dedurre una conseguenza interessante.

Se una matrice riemanniana è singolare, è dotata di pseudo-assi; quindi, come si riconosce ricorrendo al prodotto di un sistema nullo reale della matrice avente per asse uno degli pseudo-assi per l'inversa di un sistema nullo reale ma non degenere, la matrice possiede necessariamente delle omografie reali degeneri, ma non nulle.

Ciò significa che l'algebra reale connessa con una matrice riemanniana singolare non è primitiva.

Suppongasi invece che la matrice non sia singolare.

([124]) Colgo l'occasione per avvertire che nella Nota citata in ([12]) *b*) alla riga 24 della pag. 181 invece di «*sono due* S_{p-1} *fissi*» deve leggersi «*sono due spazi fissi*.

Se ammettesse un'omografia reale degenere ma non nulla, la matrice avrebbe l'indice di moltiplicabilità positivo e i due assi di tale omografia sarebbero reali e sarebbero gli assi dell'omografia corrente (biassiale) del fascio individuato da tale omografia e dall'identità.

Invece cotesti assi sono necessariamente imaginari, perchè se la matrice è del tipo I) essi coincidono con gli assi fissi dell'omografia riemanniana corrente che sono imaginari coniugati; e se la matrice è del tipo II), essi, come limiti di spazi appartenenti alla varietà di SEGRE, collegata alla matrice nel senso dichiarato più sopra, appartengono a questa varietà e quindi non possono essere reali.

Si conclude che:

L'algebra reale connessa con una matrice riemanniana è primitiva quando, e solo quando, la matrice non è singolare.

A questo proposito, per quanto si tratti di cosa immediata, giova rilevare esplicitamente che:

L'algebra complessa connessa con una matrice riemanniana è primitiva, quando e solo quando, la matrice è ad indici nulli.

§ 10.

LE MATRICI RIEMANNIANE A RANGO MASSIMO.

53. È stato già osservato che per il rango ϱ di ω sussiste la diseguaglianza

$$\varrho \leq 2p.$$

Vogliamo caratterizzare le matrici per ciascuna delle quali il rango eguaglia il doppio del genere o, come diremo, le matrici a rango massimo.

54. *Se la matrice ω è composta mediante le matrici riemanniane $\omega_1, \dots, \omega_n$, perchè quella sia a rango massimo occorre e basta che tale sia ciascuna di queste.*

Infatti se p_j e ϱ_j sono il genere e il rango di ω_j, è

$$\varrho = \sum_j^{1\dots n} \varrho_j, \qquad p = \sum_j^{1\dots n} p_j,$$

$$\varrho \leq 2p, \qquad \varrho_j \leq 2p_j;$$

quindi, perchè sia

$$\varrho = 2p,$$

occorre e basta che sia, per ogni valor di j,

$$\varrho_j = 2p_j.$$

55. *Se la matrice* ω *è a rango massimo ed è pura, per essa è*

$$k = p - 1, \qquad h = 2p - 1.$$

Che sia $h = 2p - 1$ è evidente, perchè, essendo ω pura, $h + 1$ non deve superare $2p$ e deve esser divisibile per $\varrho = 2p$. Quindi l'algebra $[\omega]$ è un'algebra potenziale e l'omografia corrente di ω (riemanniana o no) ha soltanto $2p$ punti uniti, i quali non variano al variar di essa.

Di questi $2p$ punti siano $A_1, A_2, \dots, A_p$ quelli che cadono nell'imagine τ di ω, e $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_p$ quelli che cadono nell'imagine coniugata $\overline{\tau}$, essendo $\overline{A}_j$ il punto imaginario coniugato di A_j.

Siano inoltre σ e σ_1 due sistemi nulli generici di ω.

L'omografia $\sigma \sigma_1^{-1}$ è un'omografia di ω, quindi essa ha in ciascuno dei punti A_j e $\overline{A}_j$ un punto unito. Ciò significa che ciascuno dei punti A_j e $\overline{A}_j$ ha rispetto ai sistemi nulli di ω uno stesso iperpiano polare.

D'altronde l'omografia generica di ω trasforma un sistema nullo di ω in un altrettale sistema nullo, quindi dal fatto che essa in A_l, ad es., ha un punto unito, segue che essa ha pure un iperpiano unito nell'iperpiano polare di A_l rispetto ai singoli sistemi nulli di ω.

Ora quell'omografia non ha altri iperpiani uniti all'infuori di quelli che congiungono i $2p$ punti A_j e $\overline{A}_j$ a $2p - 1$ a $2p - 1$, dunque l'iperpiano polare di A_l deve contenere tutti i punti A_j ed $\overline{A}_j$ ad eccezione di uno. Ma l'iperpiano polare di A_l rispetto a un sistema nullo principale non può passare per $\overline{A}_l$, perchè il complesso lineare legato ad esso non può contenere la retta reale $A_l \overline{A}_l$ (125), quindi si conclude che l'iperpiano polare di A_l rispetto a ciascun sistema nullo di ω è l'iperpiano congiungente tutti i punti A_j e $\overline{A}_j$ ad esclusione di $\overline{A}_l$.

(125) Per l'osservazione di ROSATI ricordata in (116).

Allo stesso modo si vede che l'iperpiano polare di $\bar{A}_l$ rispetto a ciascun sistema nullo di ω è l'iperpiano congiungente tutti i punti A_j e $\bar{A}_j$ ad esclusione di A_l.

Intanto il massimo numero di sistemi nulli linearmente indipendenti, rispetto a cui ciascun punto A_j, o $\bar{A}_j$, ha per iperpiano polare quello che li contiene tutti tranne il punto imaginario coniugato, è p, dunque ha da essere

$$k \leq p - 1. \tag{35}$$

Se π è una polarità di ω, il prodotto $\pi\sigma^{-1}$ è un'omografia di ω; quindi anche rispetto a π ciascun punto A_j e $\bar{A}_j$ ha per iperpiano polare quello che è tale per esso rispetto a σ.

Di qua, ricordando che il massimo numero di polarità di ω linearmente indipendenti è $h - k$, si deduce, come più sopra,

$$h - k \leq p,$$

ossia

$$k \geq h - p = p - 1. \tag{36}$$

Paragonando le (35) e (36) si trae, come volevasi:

$$k = p - 1.$$

56. *Se la matrice ω è a rango massimo ed impura, ma priva di assi isolati, e il genere dei suoi assi puri è q, per essa è*

$$k = \frac{p^2}{q} - 1, \qquad h = 2\frac{p^2}{q} - 1.$$

Infatti se k_1 e h_1 sono i valori degli indici di singolarità e moltiplicabilità per un suo qualunque asse puro, poichè questo (n⁰ 54) è al pari di ω a rango massimo si ha

$$k_1 = q - 1, \qquad h_1 = 2q - 1;$$

ma è [126]

$$k = \frac{p}{q}k_1 + \frac{p(p-q)}{2q^2}h_1 + \frac{(p-q)(p+2q)}{2q^2},$$

$$h = \frac{p^2}{q^2}(h_1 + 1) - 1,$$

[126] Loc. cit. [1], I, n⁰ 47.

dunque è, appunto,

$$k = \frac{p^2}{q} - 1 \qquad \text{e} \qquad h = 2\frac{p^2}{q} - 1.$$

57. Esempi di matrici a rango massimo sono:

a) *le matrici a indici massimi;*

b) *le matrici costruite al modo che è indicato in una mia Nota di Torino* [127];

c) *le matrici riemanniane di genere* 2 *e del tipo* V), VI) *o* IX);

d) *le matrici riemanniane pure di genere* 3 *date da* [128]

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha \end{matrix} \right\|,$$

o

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^3 & \alpha^7 & \alpha^2 \end{matrix} \right\|,$$

dove α *é una radice primitiva settima o, rispettivamente, nona dell'unità;*

e) *la matrice riemanniana legata a una quintica di* SNYDER [129].

§ 11.

LE MATRICI RIEMANNIANE PURE IL CUI GENERE È UN NUMERO PRIMO.

58. Suppongasi che la nostra matrice ω sia pura e che il suo genere p sia un numero primo.

[127] G. SCORZA, *Sopra alcune notevoli matrici riemanniane* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1918), pp. 1008-1017].

[128] C. RACITI, *Sopra una classe di varietà abeliane a tre dimensioni* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1918-19), pp. 443-449].

[129] G. SCORZA, *Sulla quartica di* KLEIN *e la quintica di* SNYDER [Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, serie 5ª, vol. X (1917) memoria XVI].

Se è $p = 2$, è gia noto che per essa i caratteri k, h e ϱ non possono presentare che i seguenti casi:

I) $k = h = 0, \quad \varrho = 1;$

II) $k = h = 1, \quad \varrho = 2;$

III) $k = 1, \quad h = 3, \quad \varrho = 4;$

IV) $k = 2, \quad h = 3, \quad \varrho = 2;$

supponiamo quindi che p sia *primo e dispari.*

Il rango ϱ deve essere un divisore di $2p$ [n^0^ 20, c)], dunque ϱ è 1, 2, p, o $2p$.

Se è $\varrho = 1$, è $k = h = 0$.

Se è $\varrho = 2$, h (n^0 47) o è 1, o è 3. Ma non può essere 3, perchè p è dispari (n^0 51); dunque resta $h = 1$. Dopo ciò, k o è 0, o è 1; ma se fosse $k = 1$, essendo p dispari, ω sarebbe impura [130]; dunque è $k = 0$.

Se è $\varrho = p$, dovendo essere $h + 1$ divisibile per p e non superiore a $2p$, sarà $h + 1 = p$, o $h + 1 = 2p$. Ma $\dfrac{h+1}{\varrho}$ deve essere un divisore di ϱ, dunque resta, intanto, $h + 1 = p$, cioè $h = p - 1$.

Essendo $\varrho = p$, e p primo, ciascuna omografia di ω non nulla e non identica è del rango p ed ha come spazi fondamentali p rette indipendenti [n^0 20, b)]. Aggiungasi che, al variare dell'omografia, queste p rette non variano perchè, essendo $h + 1 = \varrho$, l'algebra $[\omega]$ è un'algebra potenziale.

Intanto da $\varrho = p > 2$ segue (§ 8) che non può essere $k = 0$, dunque k è positivo ed esistono omografie riemanniane non nulle e non identiche che sono il prodotto di un sistema nullo riemanniano della matrice per l'inversa di un sistema nullo riemanniano principale.

Basta considerare una di queste omografie e tener presente un bel teorema del Rosati [131], per dedurre che le p rette di cui sopra sono reali, e ciascuna di esse si appoggia alle imagini di ω in punti imaginari coniugati.

[130] Loc. cit. [1], I, n^0 81.
[131] Loc. cit. [13], n^0 15.

Ora si considerino gli S_{2p-3} che congiungono le dette rette a $p-1$ a $p-1$.

Essi sono assi di p sistemi nulli degeneri indipendenti; e nel sistema lineare ∞^{p-1} da essi individuato il sistema nullo corrente è un sistema nullo rispetto al quale ciascuna imagine di ω è autopolare. D'altronde questo sistema lineare è razionale, perchè simmetricamente definito rispetto alle radici dell'equazione minima di un'omografia riemanniana non nulla e non identica di ω, che è un'equazione a coefficienti razionali; dunque i suoi elementi sono sistemi nulli di ω ed è $k \geq p-1$ ([132]).

Ma è pure $k \leq h = p-1$, dunque resta $k = p-1$.

Se infine è $\varrho = 2p$, ω è a rango massimo, e quindi è $k = p-1$, $h = 2p-1$.

Riassumendo abbiamo che:

Per una matrice riemanniana pura il cui genere p sia un numero primo dispari, i caratteri k, h e ϱ sono dati da:

I) $k = h = 0, \quad \varrho = 1;$

II) $k = 0, \quad h = 1, \quad \varrho = 2;$

III) $k = h = p-1, \quad \varrho = p;$ *o, infine, da*

IV) $k = p-1, \quad h = 2p-1, \quad \varrho = 2p.$

59. La conoscenza dei caratteri k, h, ϱ per una matrice pura di genere primo permette di calcolare i caratteri stessi per ogni matrice impura priva di assi isolati con gli assi puri di genere primo.

Suppongasi infatti che la nostra matrice ω sia impura, priva di assi isolati e con gli assi puri di genere q, essendo q un numero primo.

Se $q = 2$, si ricade in un teorema noto; quindi potremo supporre q dispari.

([132]) A questa diseguaglianza si può pervenire anche altrimenti. Le p rette considerate nel testo sono p pseudo-assi di ω, dunque [loc. cit. ([1]), I, n° 77 f)] son tali anche i p S_{2p-3} che le congiungono a due a due. Sorgono così p sistemi nulli indipendenti di ω ed è $k \geq p-1$.

Detti k_1, h_1 e ϱ_1 i valori dei caratteri k, h e ϱ per ciascun asse puro di ω, si ha

$$k = \frac{p}{q} k_1 + \frac{p(p-q)}{2q^2} h_1 + \frac{(p-q)(p+2q)}{2q^2},$$

$$h = \frac{p^2}{q^2}(h_1 + 1) - 1.$$

$$\varrho = \frac{p}{q} \varrho_1 .$$

Ma per k_1, h_1 e ϱ_1 si hanno le quattro alternative:

$$k_1 = h_1 = 0, \qquad \varrho_1 = 1,$$

$$k_1 = 0, \qquad h_1 = 1, \qquad \varrho_1 = 2,$$

$$k_1 = h_1 = q - 1, \qquad \varrho_1 = q,$$

$$k_1 = q - 1, \qquad h_1 = 2q - 1, \qquad \varrho_1 = 2q;$$

quindi per k, h, ϱ si hanno, corrispondentemente, i quattro casi:

I) $\quad k = \dfrac{(p-q)(p+2q)}{2q^2}, \qquad h = \dfrac{p^2}{q^2} - 1, \qquad \varrho = \dfrac{p}{q};$

II) $\quad k = \dfrac{p^2}{q^2} - 1, \qquad h = 2\dfrac{p^2}{q^2} - 1, \qquad \varrho = 2\dfrac{p}{q};$

III) $\quad k = \dfrac{p(p+q)}{2q} - 1, \qquad h = \dfrac{p^2}{q} - 1, \qquad \varrho = p;$

IV) $\quad k = \dfrac{p^2}{q} - 1, \qquad h = 2\dfrac{p^2}{q} - 1, \qquad \varrho = 2p.$

60. Ponendo a riscontro il teorema del n^0 58 con quanto è detto al n^0 56 della Parte I della mia Memoria del 1916 si deduce la seguente proposizione, che dà la classificazione di tutte le matrici riemanniane di genere 3.

Una matrice riemanniana del genere 3 non può essere che di 22 tipi differenti. Di questi, 4 corrispondono a matrici pure, 18 a matrici impure.

I caratteri k, h e ϱ:

a) per le matrici pure sono dati da

$$k = h = 0\,, \qquad \varrho = 1\,;$$

$$k = 0\,, \qquad h = 1\,, \qquad \varrho = 2\,;$$

$$k = h = 2\,, \qquad \varrho = 3\,; \text{ o, infine, da}$$

$$k = 2\,, \qquad h = 5\,, \qquad \varrho = 6\,;$$

b) per le matrici impure con due assi soltanto, dei generi 1 e 2, sono dati da

$$k{=}h{=}1,\quad \varrho{=}2;\ k{=}h{=}2,\quad \varrho{=}3;\ k{=}2,\ h{=}4,\ \varrho{=}5;\ k{=}3,\ h{=}4,\ \varrho{=}3;$$

$$k{=}1,\ h{=}2,\ \varrho{=}3;\ k{=}2,\ h{=}3,\ \varrho{=}4;\ k{=}2,\ h{=}5,\ \varrho{=}6;\ k{=}3,\ h{=}5,\ \varrho{=}4;$$

c) per le matrici impure prive di assi isolati (ad assi puri ellittici) sono dati da

$$k = 5,\qquad h = 8,\qquad \varrho = 3\,;\qquad k = 8,\qquad h = 17,\qquad \varrho = 6\,;$$

d) per le matrici con un solo asse ellittico isolato (e infiniti altri assi ellittici non isolati) sono dati da:

$$k{=}3,\ h{=}4,\ \varrho{=}3;\ k{=}4,\ h{=}8,\ \varrho{=}5;\ k{=}3,\ h{=}5,\ \varrho{=}4;\ k{=}4,\ h{=}9,\ \varrho{=}6;$$

e) per le matrici con tre assi ellittici soltanto sono dati da:

$$k{=}2,\ h{=}2,\ \varrho{=}3;\ k{=}2,\ h{=}5,\ \varrho{=}6;\ k{=}2,\ h{=}4,\ \varrho{=}5;\ k{=}2,\ h{=}3,\ \varrho{=}4.$$

Di qua segue che:

I corpi di funzioni abeliane a tre variabili possono esser distribuiti in 22 tipi fondamentali;

e che:

Nello stesso numero di tipi possono esser distinte le curve algebriche di genere 3 ponendo a criterio della classificazione i valori che hanno per una tal curva i numeri base di HURWITZ *e* ROSATI.

Avvertasi pure per la sua bella eleganza l'enunciato:

Se una curva algebrica ha per genere un numero primo dispari p ed è priva di sistemi regolari di integrali (di 1^a specie) riducibili, *il massimo numero di corrispondenze indipendenti che essa contiene è 1, 2, p o 2p. Nel primo e terzo caso non esistono corrispondenze emisimmetriche, nel secondo e quarto il massimo numero di corrispondenze emisimmetriche indipendenti è, rispettivamente, 1 o p.*

Per una curva del genere 2, caso trattato già dal ROSATI, la prima parte dell'enunciato resta sostanzialmente la stessa; le alternative da quattro discendono a tre perchè allora le due alternative intermedie vengono a coincidere. La seconda muta al modo che segue da quanto è ricordato nel n^0 58.

§ 12.

LE MATRICI RIEMANNIANE PURE IL CUI RANGO È UN NUMERO PRIMO.

61. Per poter procedere alla classificazione che costituisce l'oggetto del presente paragrafo occorre premettere la dimostrazione di alcuni lemmi, per sè stessi interessanti.

a) Se uno pseudo-asse di una matrice riemanniana è puro, i sistemi nulli della matrice non del tutto indeterminati inducono tutti in esso uno stesso sistema nullo.

Infatti sia L lo pseudo-asse, appoggiato alle imagini della matrice secondo due spazi imaginari coniugati (indipendenti) τ_1 e $\overline{\tau}_1$; e detti, σ un sistema nullo principale della matrice, riemanniano o no, σ_1 un sistema nullo reale generico della matrice stessa, siano σ' e σ'_1 i sistemi nulli indotti da σ e σ_1 in L.

I sistemi nulli σ' e σ'_1 dello spazio L hanno in τ_1 e $\overline{\tau}_1$ due spazi autopolari; inoltre il complesso lineare individuato da σ' non contiene alcuna delle rette reali appoggiate a τ_1 e $\overline{\tau}_1$, perchè niuna di tali rette può appartenere al complesso lineare individuato da σ; dunque, per una immediata estensione di un ragionamento noto, se σ' e σ'_1 non coincidessero, esisterebbe nel fascio che essi determinano un sistema nullo reale singolare, cioè esisterebbe nel fascio determinato da σ e σ_1 un sistema nullo reale rispetto a cui L avrebbe come spazio polare uno spazio che sarebbe uno pseudo-asse della matrice appoggiato ad L, ma non passante per L. E questo contrasta con l'ipotesi che L sia puro, perchè L, essendo puro, non potrebbe contenere lo pseudo-asse che sarebbe costituito dalla sua intersezione con quello spazio polare.

Dalla proposizione dimostrata discende che:

b) Se uno pseudo-asse di una matrice riemanniana ha per pseudo-asse complementare uno pseudo-asse puro, esso è asse di un solo sistema nullo reale degenere della matrice.

La matrice ω sia pura e singolare e si consideri l'omografia riemanniana A^* di ω data dal prodotto

$$\sigma_1 \, \sigma^{-1},$$

dove σ è un sistema nullo riemanniano principale e σ_1 un sistema nullo riemanniano diverso da σ, ma del resto generico.

Gli spazi fondamentali di A^* sono tutti reali, e sono altrettanti pseudo-assi di ω; inoltre essi sono indipendenti, hanno tutti una stessa dimensione, hanno come spazio congiungente lo spazio rappresentativo di ω e il loro numero è il rango ϱ_α di A^*. Siccome A^*, per le ipotesi fatte, non è identica, ϱ_α è superiore a 1; inoltre [n^0 20, *b*)] ϱ_α è un divisore ($\leq \varrho$) del rango ϱ di ω.

Gli spazi congiungenti questi pseudo-assi a $\varrho_\alpha - 1$ a $\varrho_\alpha - 1$ sono anch'essi pseudo-assi di ω; quindi esistono almeno ϱ_α sistemi nulli reali di ω che li hanno per assi e che sono indipendenti, perchè $\varrho_\alpha - 1$ di essi hanno in comune punti singolari che non sono tali per il rimanente.

Segue che è

$$k \geq \varrho_\alpha - 1.$$

In altri termini:

c) Se una matrice riemanniana pura è singolare e del rango ϱ, per il suo indice di singolarità k si ha

$$k \geq \varrho_\alpha - 1,$$

con ϱ_α divisore di ϱ e

$$1 < \varrho_\alpha \leq \varrho.$$

62. Supponiamo ora che la matrice ω sia pura e che il suo rango ϱ sia un numero primo.

Se è $\varrho = 2$ sappiamo già che per essa è

$$k = 0, \qquad h = 1, \qquad p \neq 2; \ \textit{oppure}$$

$$k = 0, \qquad h = 3, \qquad p \ \textit{pari e} > 2; \ \textit{oppure}$$

$$k = h = 1; \ \textit{o infine}$$

$$k = 2, \qquad h = 3 \ \textit{e} \ p \ \textit{pari}.$$

Supponiamo dunque che ϱ sia un numero primo dispari.

Dovendo essere ϱ un divisore di $2p$, sarà intanto p un multiplo di ϱ, poniamo

$$p = \varrho\, t\,;$$

poi, per il n^0 22, sarà

$$h = \varrho - 1 \qquad \text{oppure} \qquad h = \varrho^2 - 1\,;$$

e, per la proposizione $c)$ del n^0 prec., sarà

$$k \geq \varrho - 1.$$

Se è $h = \varrho - 1$, essendo $k \leq h$, sarà a dirittura $k = \varrho - 1$; cosicchè non resta altro se non che calcolare il valore di k quando è $h = \varrho^2 - 1$.

Supponiamo dunque $h = \varrho^2 - 1$, e dimostriamo, intanto, che in tal caso:

La matrice ω ammette infiniti pseudo-assi puri della dimensione ν, essendo

$$\nu = \frac{2p}{\varrho} - 1.$$

L'algebra complessa connessa con ω è, nel caso attuale, regolare e del rango ϱ (I, n^0 143); poi l'omografia generica di ω, riemanniana o no, ha come spazi fondamentali ϱ spazi della dimensione ν, con

$$(\nu + 1)\,\varrho = 2p$$

ossia

$$\nu = \frac{2p}{\varrho} - 1.$$

Segue che un'omografia di ω può avere come spazi fondamentali spazi di dimensione maggiore o eguale a ν, ma non spazi di dimensione inferiore a ν.

Ora, dati due pseudo-assi complementari di ω, esistono infiniti sistemi nulli reali non degeneri di ω rispetto a cui i due pseudo-assi sono polari reciproci ([133]), e quindi esistono infinite omografie reali della matrice che hanno in essi gli spazi fondamentali;

([133]) Loc. cit. ([1]), n^0 77 d).

dunque nel caso nostro non possono esistere pseudo-assi di dimensione inferiore a ν, e gli eventuali pseudo-assi di dimensione ν sono necessariamente puri.

Ma, ragionando come nel n^0 prec., si riconosce subito che ω ammette gruppi di ϱ pseudo-assi complementari della dimensione ν, dunque ciascun di questi riesce puro e la matrice ammette intanto pseudo-assi puri della dimensione voluta.

Aggiungasi che di questi gruppi, trovati con la costruzione indicata nel n^0 prec., non ne può esistere uno solo, perchè altrimenti ognuno dei suoi spazi sarebbe lasciato fermo da ciascuna omografia di ω [134], e l'algebra $[\omega]''$, come si riscontrerebbe subito scrivendo le equazioni della omografia generica di ω nell'ipotesi che quegli spazi fossero spazi congiungenti vertici della piramide fondamentale delle coordinate, sarebbe non regolare, ma riducibile; dunque ne esistono infiniti, ed è dimostrato che la matrice ammette infiniti pseudo-assi puri di dimensione ν.

Ciascuno degli spazi che congiungono a $\varrho - 1$ a $\varrho - 1$ i ϱ pseudo-assi di uno dei gruppi considerati, risultando uno pseudo-asse di ω, non può avere punti comuni con uno pseudo-asse puro di $\bar{\omega}$ senza contenerlo per intero; d'altronde ciascuno di essi non può neppure contenere tutti gli pseudo-assi degli altri gruppi, dunque:

Esistono certo per ω gruppi di $\varrho + 1$ pseudo-assi puri della dimensione ν, a ϱ a ϱ indipendenti.

Consideriamo uno di questi gruppi e siano

$$L_1 , L_2 , \dots , L_{\varrho+1}$$

gli pseudo-assi che lo compongono.

Gli $S_{\varrho-1}$ ciascun dei quali si appoggia a ciascuno degli spazi L_j in un punto, riempiono una varietà di Segre V, la quale oltre la schiera ∞^ν di $S_{\varrho-1}$ costituita da cotesti spazi, che diremo Φ, conterrà una schiera, diciamo Ψ, di $\infty^{\varrho-1}$ S_ν. Naturalmente, gli spazi L_j apparterranno tutti alla schiera Ψ.

Sia α un $S_{\varrho-1}$ reale della schiera Φ e siano $A_1 , \dots , A_{\varrho+1}$ i punti (reali) in cui α si appoggia agli spazi $L_1 , \dots , L_{\varrho+1}$. Lo spazio congiungente due pseudo-assi di una matrice riemanniana, ove non coincida con lo spazio rappresentativo della matrice, è uno pseudo-

[134] Cfr. loc. cit. (1), II, n^0 11.

asse, e tale è pure lo spazio intersezione di due pseudo-assi, dunque gli S_ν di Ψ che si appoggiano ad α nei punti della rete di Möbius generata in α dai $\varrho+1$ punti A_j (a ϱ a ϱ indipendenti) sono tutti altrettanti pseudo-assi di ω [135]. Ma i vertici della rete costituiscono un insieme che ha per punti limiti tutti i punti reali di α, dunque ogni S_ν reale della schiera Ψ è uno pseudo-asse (puro) di ω.

Dico che:

a) Le omografie di ω sono tutte e sole le omografie che trasformano in sé la varietà V, tenendo fermo ciascuno $S_{\varrho-1}$ di Φ;

e che:

b) Gli pseudo-assi puri di ω sono tutti e soli gli S_ν di ω.

Infatti si prendano in α ϱ punti reali indipendenti $B_1, \dots, B_\varrho$ e siano $M_1, \dots, M_\varrho$ gli S_ν (reali) di Ψ che passano per essi e che riescono altrettanti pseudo-assi di ω.

Lo spazio M_1 e lo spazio congiungente $M_2, \dots, M_\varrho$ sono due pseudo-assi complementari di ω, quindi le omografie biassiali, che hanno in essi gli spazi fondamentali, riescono omografie di $\bar{\omega}$ che trasformano in sè α e ciascun altro $S_{\varrho-1}$ di Φ, subordinando in α le omologie col centro in B_1 e l'iperpiano nell'iperpiano $B_2, \dots, B_\varrho$. Ora l'insieme di tutte le omografie non nulle di α è il minimo sistema lineare contenente tutte le omologie reali regolari di α, dunque l'affermazione *a*) è dimostrata.

Dopo di che ne discende subito *b*), perchè ogni pseudo-asse puro di ω è spazio fondamentale per qualche sua omografia.

Dimostriamo adesso che:

Per l'indice di singolarità k di ω si ha

$$k = \frac{(\varrho-1)(\varrho+2)}{2}.$$

Tra gli pseudo-assi di ω, della dimensione

$$\nu(\varrho-1)+\varrho-2 = 2p-\nu-2,$$

che si ottengono congiungendo a $\varrho-1$ a $\varrho-1$ gli S_ν reali di

(135) Cfr. F. Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5a, vol. XXIII (1° semestre 1914), pp. 581-587 e 641-651] ove si trovano procedimenti dimostrativi di cui quello del testo non è che l'imitazione.

Ψ, e gli iperpiani reali di α vi è corrispondenza biunivoca; ma ciascuno di questi pseudo-assi, avendo per pseudo-assi complementari pseudo-assi puri, è asse di un solo sistema nullo reale degenere di ω, dunque vi è una corrispondenza biunivoca, diciamo T, tra i sistemi nulli reali di ω con assi della dimensione $2p - \nu - 2$ e gli iperpiani reali di α, e quindi anche tra i sistemi nulli di ω (reali o no) con assi della dimensione $2p - \nu - 2$ e gli iperpiani (reali o no) di α.

Agli iperpiani di α formanti un fascio reale, e quindi passanti per un $S_{\varrho-3}$ reale, corrispondono ∞^1 sistemi nulli di ω i cui assi passano tutti per uno $S_{2(p-\nu-1)}$ reale, N, che è uno pseudo-asse di ω, congiungente infiniti gruppi di $\varrho - 2$ pseudo-assi puri indipendenti.

Uno pseudo-asse N' complementare ad N è un $S_{2\nu+1}$, entro il quale esistono infiniti pseudo-assi puri di ω situati sopra una varietà di SEGRE con una schiera di ∞^1 S_ν e una schiera di ∞^ν rette, e gli S_ν di quella schiera sono le tracce su N' degli $S_{2p-\nu-2}$ passanti per N e assi di sistemi nulli di ω.

Si considerino tutti i sistemi nulli degeneri di ω, non del tutto indeterminati, aventi in N uno spazio singolare. Essi costituiscono una totalità lineare e segnano su N' una totalità lineare di sistemi nulli della stessa dimensione, entro la quale il sistema nullo generico è non degenere, e ogni sistema nullo degenere (reale, e quindi anche non reale) è a dirittura dotato di un asse della dimensione ν. Questi sistemi nulli degeneri sono ∞^1, dunque quelle totalità lineari sono delle reti; poi due di essi, distinti, determinano un fascio entro il quale esistono due sistemi nulli degeneri con assi della dimensione ν e nessun altro sistema nullo degenere (una volta che N' è della dimensione $2\nu + 1$), dunque entro la rete dei sistemi nulli di ω con l'asse passante per N', i sistemi nulli dotati di assi della dimensione $2p - \nu - 2$ costituiscono una varietà ∞^1 quadratica.

Ora si consideri la totalità lineare ∞^k dei sistemi nulli di ω, non del tutto indeterminati, ed entro questa la varietà dei sistemi nulli dotati di assi della dimensione $2p - \nu - 2$.

Questa è una varietà che mediante T si trova rappresentata sugli iperpiani di α in modo che ai fasci di iperpiani (reali o no) rispondono su di essa varietà ∞^1 quadratiche, dunque alle intersezioni della varietà con le totalità lineari ∞^{k-1} di sistemi nulli di ω rispondono in T quadriche-inviluppo.

Segue che è, intanto,

$$k \leq \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2}$$

Un gruppo di ϱ pseudo-assi puri complementari di ω dà luogo, come nel n^0 prec., a una totalità lineare di sistemi nulli di ω di dimensione $\varrho - 1 + \varepsilon$ (con $\varepsilon \geq 0$), e rispetto al sistema nullo generico di questa totalità ogni pseudo-asse del gruppo ha come spazio polare lo spazio congiungente gli altri.

Lo stesso sta naturalmente per ogni gruppo di ϱ S_ν indipendenti di Ψ, siano questi reali o no.

Intanto le ϱ-ple di S_ν di Ψ sono $\infty^{\varrho(\varrho-1)}$ e rispetto al sistema nullo generico di ω gli S_ν di Ψ si distribuiscono in $\infty^{\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}}$ ϱ-ple di S_ν, tali che ciascun S_ν di una ϱ-pla abbia per spazio polare lo spazio congiungente gli altri $\varrho - 1$, dunque è

$$k = \varrho(\varrho - 1) + \varrho - 1 + \varepsilon - \frac{\varrho(\varrho - 1)}{2} = \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2} + \varepsilon,$$

ossia è

$$k \geq \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2}.$$

Confrontando questa relazione con quella ottenuta più sopra si trova, come volevasi,

$$k = \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2}.$$

Raccogliendo le osservazioni fatte abbiamo il seguente teorema:

Se una matrice riemanniana pura ha per rango un numero primo dispari ϱ, i suoi caratteri k e h, o sono dati da

$$k = h = \varrho - 1,$$

o sono dati da

$$k = \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2}, \qquad h = \varrho^2 - 1.$$

In ogni caso il genere della matrice è un multiplo di ϱ.

Avvertasi che se il genere della matrice è ϱt, ed è

$$k = \frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2},$$

deve essere ([136])

$$\frac{(\varrho - 1)(\varrho + 2)}{2} \leq 2\varrho t - 2,$$

ossia

$$t \geq \frac{\varrho^2 + \varrho + 2}{4\varrho}.$$

Ma

$$\frac{\varrho^2 + \varrho + 2}{4\varrho} = \frac{\varrho}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\varrho},$$

inoltre $\varrho \geq 3$ e t è intero, dunque deve essere

$$t \geq \frac{\varrho + 3}{4}$$

se ϱ è della forma $4n + 1$,

$$t > \frac{\varrho + 1}{4},$$

se ϱ è della forma $4n + 3$.

§ 13.

Dimostrazione di alcuni lemmi.

63. Per alleggerire la discussione, che sarà esposta nei due paragrafi seguenti, premettiamo sotto forma di lemmi una parte delle considerazioni che ci occorreranno.

Dimostriamo in primo luogo che:

Se sopra una varietà algebrica V di dimensione $k\,(\geq 1)$ è dato un insieme numerabile di varietà algebriche, ciascuna di dimensione $\leq k - 1$, esistono su V infiniti punti esterni a ciascuna varietà dell' insieme.

([136]) Loc. cit. ([1]), I, n^0 42.

Qui prendiamo la frase «varietà algebrica» nella sua accezione più generale; tanto V, quanto ciascuna varietà dell'insieme, potrà essere irriducibile o riducibile; nè escludiamo che, se riducibile, sia costituita di varietà irriducibili a dimensioni non tutte eguali. In tale ultimo caso diciamo che la varietà è della dimensione t, se essa contiene tra le sue parti varietà irriducibili di dimensione t, ma non di dimensione superiore.

Per $k = 1$ il teorema è vero. Si pensi infatti rappresentata in modo reale la varietà V mediante una o più superficie riemanniane e punti staccati, il cui insieme si dirà F, secondo che V è irriducibile o riducibile. Su F si avrà un insieme numerabile di gruppi di punti, ciascuno contenente un numero finito di punti; ma dato sopra un piano di Gauss (un piano, cioè, su cui siano distesi i valori di una variabile complessa) un gruppo di punti in numero finito, è sempre possibile indicare un modo di numerarli *indipendente dal gruppo considerato* ([137]), quindi l'insieme dei punti dei gruppi assegnati su F è numerabile e su F esistono infiniti punti non appartenenti ad esso.

Per estendere il teorema al caso in cui sia $k > 1$ si potrà dunque procedere col metodo di induzione.

Sia

$$V^{(1)},\quad V^{(2)},\quad V^{(3)}, \ldots$$

l'insieme numerabile di varietà assegnato su V in una delle sue effettive numerazioni; e sia V_1 una delle parti irriducibili di V di dimensione K. Se nessuna delle varietà $V^{(i)}$, o soltanto un numero finito di esse, avessero punti comuni con V_1, il teorema sarebbe senz'altro verificato; converrà dunque supporre che le intersezioni di V_1 con le varietà $V^{(i)}$ costituiscano una successione infinita

$$W^{(1)},\quad W^{(2)},\quad W^{(3)}, \ldots$$

Senza venir meno alla generalità sarà lecito supporre che per nessuna coppia di valori distinti di i e j accada che $W^{(i)}$ stia per

([137]) Ci fermiamo a far questa osservazione per togliere ogni dubbio sulla numerabilità dell'insieme di punti che nel testo si considera. Si dice ordinariamente: *È numerabile ogni insieme numerabile di insiemi finiti*; ed: *È numerabile ogni insieme numerabile di insiemi numerabili*, ma l'una e l'altra proposizione, enunciate in questa forma così generale, implicano il postulato di Zermelo. Nel testo si vuole appunto far rilevare che nel caso considerato la prima delle due proposizioni in discorso può essere applicata senza far ricorso a cotesto postulato.

intero su $W^{(j)}$ o abbia su $W^{(j)}$, se riducibile, una delle varietà da cui è costituita, perchè, in caso contrario, la $W^{(i)}$, o una tale sua parte, potrebbe senza danno esser soppressa.

Tra le $W^{(i)}$ sia $W^{(l)}$ una varietà secata da altre varietà della stessa successione. L'insieme delle intersezioni sarà un insieme finito, o infinito, ma numerabile, di varietà algebriche aventi ciascuna una dimensione inferiore a quella di $W^{(l)}$. Ma $W^{(l)}$ ha dimensione inferiore a k, dunque una volta che per $W^{(l)}$ il teorema è da supporre vero, esisteranno su $W^{(l)}$ infiniti punti non situati su alcuna di quelle intersezioni. Val quanto dire che esisteranno punti di V_1 situati su $W^{(l)}$ e non su alcun'altra varietà $W^{(i)}$.

Siano A e B due punti di V_1 tali che delle varietà $W^{(i)}$ soltanto $W^{(1)}$ passi per A e soltanto $W^{(2)}$ passi per B, e sia γ una curva algebrica irriducibile situata su V_1 e passante per A e B. Nessuna delle varietà $W^{(i)}$ può secare γ in infiniti punti, e quindi contenere γ per intero, perchè altrimenti tale varietà passerebbe per A e per B, mentre per A passa soltanto $W^{(1)}$ e per B soltanto $W^{(2)}$; dunque su γ le varietà $W^{(i)}$ non possono segnare che un insieme, finito, o infinito, ma numerabile, di gruppi contenenti ciascuno un numero finito di punti. Segue che su γ, e quindi su V_1, esistono infiniti punti esterni a ciascuna delle varietà $W^{(i)}$, ossia su V infiniti punti non situati su alcuna delle varietà $V^{(i)}$.

Notisi che:

I punti di V_1, ciascun dei quali non è situato su alcuna varietà $V^{(i)}$, costituiscono su V_1 un insieme avente per punto limite ogni punto di V_1.

Se nessuna varietà $V^{(i)}$ o soltanto un numero finito di esse incontrano V_1, l'enunciato è evidente; supponiamo dunque che le intersezioni di V_1 con le varietà $V^{(i)}$ costituiscano una successione infinita

$$W^{(1)}, \quad W^{(2)}, \quad W^{(3)}, \ldots$$

Se $k = 1$ l'asserto si giustifica subito considerando la riemanniana di V_1, perchè un insieme di punti situato in un piano, ove sia numerabile, è privo di punti interni.

Se è $k > 1$, sia A un punto qualunque di V_1, B un punto di V_1 esterno a ciascuna varietà $W^{(i)}$, λ una curva algebrica irriducibile passante per A e B e situata su V_1.

Nessuna varietà $W^{(i)}$ può contenere λ, quindi A è su λ punto limite dell'insieme di punti di λ non situati su alcuna varietà $W^{(i)}$. Segue che A gode della proprietà analoga anche su V_1 ([138]).

61. Dimostriamo in secondo luogo che:

Data in uno spazio a dimensione dispari un'anticollineazione involutoria priva di punti uniti che trasformi in sè una quadrica non specializzata dell'ambiente, fra gli spazi lineari di questa di dimensione massima vi sono coppie di spazi indipendenti, omologhi nell'anticollineazione, tali che non esiste alcuna retta unita nell'anticollineazione appoggiata ad essi e appartenente alla quadrica ([139]).

Si dica φ l'anticollineazione di cui parla il teorema ed F^2 la quadrica non specializzata che φ trasforma in sè stessa.

Se lo spazio ambiente è un S_1 il teorema è evidentemente vero, ma è privo di valore; supponiamo dunque che l'ambiente sia un S_{2q-1} con $q > 1$, e quindi F^2 una quadrica non specializzata della dimensione $2(q-1)$, dotata di due sistemi continui $\infty^{\frac{q(q-1)}{2}}$ di spazi lineari della dimensione $q-1 \geq 1$.

Siccome φ è involutoria, sono uniti in φ tutti gli spazi che congiungono coppie di spazi omologhi o che siano intersezioni di spazi omologhi, e in ciascuno di essi φ subordina un'anticollineazione involutoria. Ricordando che un'anticollineazione involutoria situata in uno spazio di dimensione pari ammette sempre infiniti punti uniti, e che φ è priva di punti uniti, si deduce che gli spazi omologhi in φ o sono indipendenti, o si intersecano in uno spazio di dimensione dispari, e, in ogni caso, hanno come spazio congiungente uno spazio di dimensione dispari.

([138]) Non sarebbe difficile indicare lavori in cui casi particolari del teorema dimostrato in questo n⁰ del testo sono ammessi come evidenti senz'altro; nè si può negare che il teorema stesso sia di grande evidenza intuitiva. Ma non abbiamo creduto inutile darne esplicitamente una dimostrazione rigorosa, per l'ufficio essenziale che esso adempie nelle ricerche successive. Anche A. HURWITZ nella sua Memoria: *Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln* [Mathematische Annalen, Bd. 61 (1905), pp. 325-368] ha creduto necessario dimostrare formalmente, nel § 3, un teorema che è soltanto un caso particolare di quello del testo. Il ragionamento dello HURWITZ, totalmente diverso da quello del testo, non può estendersi al caso più generale quivi considerato.

([139]) Occorre appena avvertire che per tutto quanto segue nel presente n⁰ bisogna tener presente il classico lavoro del SEGRE citato in ([14]).

Intanto due S_{q-1} di F^2 si secano necessariamente in uno spazio di dimensione pari (≥ 0) se appartengono a sistemi differenti, quando q è pari, o se appartengono allo stesso sistema quando q è dispari, dunque φ cambia in sè ciascuno dei due sistemi di S_{q-1} di F^2, o muta l'un sistema nell'altro, secondo che q è pari o dispari.

Ciò posto, cominciamo dal supporre che sia $q = 2$, cioè che l'ambiente sia un S_3 e la quadrica F^2 un'ordinaria quadrica non specializzata.

L'anticollineazione φ trasformerà in sè ognuna delle due schiere e subordinerà in ciascuna di esse un'antinvoluzione.

Siccome φ è priva di punti uniti, non è possibile che ciascuna di queste antinvoluzioni, diciamole ψ_1 e ψ_2, sia dotata di rette unite; quindi tra di esse ve n'è almeno una, e sia ψ_1, che non possiede rette unite.

Ebbene, basta prendere due rette omologhe distinte dell'antinvoluzione ψ_2 (e di tali coppie di rette ne esistono certo infinite, perchè ψ_2, essendo un'antiproiettività, non può essere identica) per ottenere due rette di F^2 che siano omologhe in φ, sghembe tra di loro e tali che non esistano rette unite di φ appoggiate ad esse e appartenenti ad F^2.

Con questo il teorema per $q = 2$ è dimostrato ed è anzi provata per questo caso una proposizione più precisa di quella che è stata enunciata; poichè risulta da quanto si è detto che, se A ed A' sono due punti di F^2, omologhi in φ e tali che la retta AA', unita in φ, non riesca situata su F^2, tra le quattro rette di F^2 passanti per i punti A e A' è possibile sceglierne due, una per A e l'altra per A', sghembe fra di loro e omologhe in φ, tali che non esista alcuna retta unita di φ appoggiata ad esse e situata su F^2.

Ciò posto, per dimostrare il teorema quando l'ambiente è un S_{2q-1} con $q > 2$, procediamo per via induttiva, cioè ammettiamolo come vero per gli $S_{2q'-1}$ con $q' < q$.

È chiaro, intanto, che esistono su F^2 coppie di punti omologhi di φ congiunti da rette non situate su F^2.

Si consideri infatti un S_3 unito di φ non situato su F^2.

Questo taglia F^2 in una quadrica ordinaria f^2 che o non è specializzata, o è doppiamente specializzata, perchè il suo spazio doppio, risultando unito per φ, non può essere a dimensione pari. Nell'un caso e nell'altro esistono evidentemente nello S_3 delle rette che congiungono punti di f^2, cioè di F^2, omologhi in φ, e che non sono situate su f^2, cioè su F^2.

Siano dunque A e A' due punti di F^2 corrispondentisi in φ (e quindi distinti), tali che la retta $A A'$, unita in φ, non giaccia su F^2.

Lo S_{2q-3} polare di AA' rispetto ad F^2, che diremo μ, seca F^2 in una quadrica non specializzata f_μ^2 della dimensione $2q-4$; e siccome μ, al pari della retta $A A'$, è unito per φ, questa subordinerà nello spazio μ un'anticollineazione involutoria che muterà f_μ^2 in sè stessa.

Gli S_3, passanti per AA' e tangenti ad F^2 lungo rette, hanno come rette di contatto rette di f_μ^2; e se un S_3 unito di φ passa per AA' e tocca F^2 non può toccarla, per una ragione già addotta, che lungo una retta; dunque gli S_3 uniti per φ, passanti per AA' e tangenti ad F^2, sono tutti e soli quelli proiettanti dalla retta AA' le rette di f_μ^2 che risultano unite per φ.

Lo spazio μ non è altra cosa che l'intersezione degli iperpiani tangenti ad F^2 in A e A', ciascun dei quali seca F^2 in un S_0-cono quadrico della dimensione $2q-3$; quindi la quadrica f_μ^2 è l'intersezione di questi due coni, e gli S_{q-1} di F^2, che passano per A e A' e sono gli S_{q-1} dei due coni, si ottengono proiettando da A e A' gli S_{q-2} della quadrica f_μ^2.

Ebbene prendiamo su f_μ^2, come per ipotesi è lecito, due S_{q-2} indipendenti ξ e ξ', che siano omologhi in φ (cioè nell'anticollineazione involutoria che φ subordina nello spazio μ) e tali che nessuna delle rette unite in φ ed appoggiate ad essi (cioè congiungenti i loro punti omologhi) risulti situata su f_μ^2.

Siano B e B' due punti omologhi di ξ e ξ', e si consideri lo S_3 che congiunge le rette $A A'$ e $B B'$. Questo risulta unito per φ e, una volta che la retta $B B'$ non appartiene a f_μ^2, seca F^2 secondo una quadrica ordinaria non specializzata f_b^2, mutata in sè da φ (cioè dall'anticollineazione involutoria che φ subordina nel suo ambiente), le cui rette passanti per A ed A' sono AB e $A' B'$, $A B'$ e $A' B$. Queste due coppie di rette sono coppie di rette omologhe di φ e fra di esse, per quanto è stato detto più sopra, ne esiste una, e sia, per es., la coppia AB e $A' B'$, tale che fra le rette unite di φ appoggiate ad esse nessuna riesce situata su f_b^2, cioè su F^2.

Diciamo γ e γ' gli S_{q-1} di F^2 proiettanti ξ e ξ' da A ed A', X e X' due punti omologhi qualunque di ξ e ξ'; allorchè i punti X e X' descrivono ξ e ξ', le rette AX e $A'X'$ descrivono γ e γ'.

Detta f_x^2 la quadrica ordinaria non specializzata secondo cui lo S_3 congiungente $A\,A'$ con XX' seca F^2, è chiaro che, quando X e X' coincidono con B e B', f_x^2 coincide con f_b^2.

Su f_b^2 l'antivoluzione subordinata da φ nella schiera delle rette appoggiate ad $A\,B$ e $A'\,B'$ non contiene rette unite; quindi la forma Hermitiana (in due variabili e nelle loro complesse coniugate) che uguagliata a zero dà l'equazione da cui dipende la ricerca delle rette unite di tale antinvoluzione è definita, ossia è a discriminante negativo.

Quando X e X' lasciano la posizione B e B' per descrivere con continuità gli spazi ξ e ξ', il discriminante della forma Hermitiana relativa all'antinvoluzione subordinata da φ nella schiera delle rette di f_x^2 appoggiate ad AX e $A'\,X'$ varia con continuità e non *diviene mai nullo*, perchè la quadrica f_x^2 non degenera mai e l'antinvoluzione relativa non può mai divenir singolare; quindi esso resta costantemente negativo e su f_x^2 non esistono mai rette unite in φ e appoggiate ad $A\,X$ e $A'\,X'$.

Val quanto dire che su F^2 non esistono rette unite di φ appoggiate a γ e γ'; con che il teorema è pienamente dimostrato.

Qui vi è luogo a un'osservazione importante.

La corrispondenza φ è continua e subordina una corrispondenza continua nella varietà (algebrica) degli S_t dello S_{2q-1} ambiente ($t = 1, 2, \ldots, 2q - 2$). Ciò porta intanto che le rette unite di φ costituiscono un insieme chiuso. Ma è tale anche l'insieme delle rette di F^2; dunque è chiuso l'insieme delle rette unite di φ situate su F^2.

Ne consegue che se $q > 1$ e γ è un S_{q-1} di F^2 tale, che γ e il suo omologo γ' in φ soddisfanno alla condizione di cui parla il teorema, *ogni* S_{q-1} di F^2 appartenente allo stesso sistema di γ, e situato in un conveniente *intorno di* γ *sul detto sistema*, soddisfa, insieme col suo omologo in φ, alla stessa condizione.

§ 14.

Esistenza e costruzione delle matrici riemanniane non singolari con l'indice di moltiplicabilità positivo.

65. Per avviarci alla dimostrazione dell'esistenza effettiva di matrici riemanniane non singolari con l'indice di moltiplicabilità positivo (e quindi eguale a 1, o a 3), e alla loro costruzione effettiva, partiamo dalle osservazioni che seguono.

Supponiamo che per la nostra matrice ω sia appunto

$$k = 0\,, \qquad h = 1$$

e scartiamo, per semplicità di discorso, il caso in cui sia $p = 1$, visto che in tal caso l'esistenza di ω e la sua costruzione è chiara e ben nota.

Le omografie riemanniane di ω, non nulle e non identiche, saranno tutte biassiali e avranno gli stessi due assi. Questi poi saranno due S_{p-1} imaginari coniugati, diciamoli σ e $\overline{\sigma}$, dei quali σ si appoggia a τ secondo un S_{t-1} $(0 < t < p)$ e $\overline{\sigma}$ secondo un S_{p-t-1}, per modo che $\overline{\sigma}$ e σ si appoggeranno a $\overline{\tau}$ secondo lo S_{t-1} e lo S_{p-t-1} coniugati ai precedenti.

Senza venir meno alla generalità possiamo evidentemente supporre $t \geq p - t$, cioè $t \geq \dfrac{p}{2}$.

Il sistema nullo riemanniano principale di ω, che è nelle ipotesi attuali l'unico sistema nullo, non del tutto indeterminato, della matrice, e che diremo π, è trasformato in sè da ogni omografia riemanniana di ω; d'altronde, se una tale omografia non è identica, le radici della sua equazione caratteristica sono (imaginarie coniugate e quindi) diverse da ± 1, dunque entrambi gli spazi σ e $\overline{\sigma}$ sono autopolari in π.

Intanto gli spazi σ e $\overline{\sigma}$ possono esser riguardati come imagini di una matrice riemanniana Ω ad indici massimi; dunque π è un sistema nullo riemanniano tanto per ω quanto per Ω.

Salvo a sottoporre ω, in caso di bisogno, ad un'operazione A [140], possiamo imaginare che lo S_{t-1} $\sigma\tau$ sia lo spazio congiungente i t punti aventi per coordinate gli elementi delle prime t righe di ω, e lo S_{p-t-1} $\overline{\sigma}\tau$ sia lo spazio congiungente i $p - t$ aventi per coordinate gli elementi delle ultime $p - t$ righe di ω; quindi, sottoponendo ove occorra, anche Ω a un'operazione A, possiamo supporre che sia

$$\omega = \| \omega_{j,r} \| \qquad (j = 1, \ldots, p;\, r = 1, \ldots, 2p),$$

[140] Loc. cit. [1], I, n° 1.

e

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{t,1} & \omega_{t,2} & \dots & \omega_{t,2p} \\ \overline{\omega}_{t+1,1} & \overline{\omega}_{t+1,2} & \dots & \overline{\omega}_{t+1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\omega}_{p,1} & \overline{\omega}_{p,2} & \dots & \overline{\omega}_{p,2p} \end{matrix} \right\| .$$

Indichiamo con

$$(37) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s$$

la forma riemanniana alternata di ω, individuata a meno di un fattor numerico razionale, che corrisponde al sistema nullo π.

Giacchè π è nel tempo stesso un sistema nullo riemanniano di ω e di Ω sarà

$$(38) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \omega_{l,s} = 0 \qquad (j\,,\, l = 1\,, \dots, p)\,;$$

$$(39) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} = 0 \qquad \begin{matrix}(j = 1\,, \dots\,, t\,; \\ l = t+1\,, \dots, p).\end{matrix}$$

Si indichino ora con

$$H = \sum_{j,l}^{1\dots p} H_{j,l}\, z_j\, \overline{z}_l\,,$$

$$H' = \sum_{j,l}^{1\dots p} H'_{j,l}\, z_j\, \overline{z}_l$$

le forme Hermitiane (di prima specie) di ω e Ω rispondenti alla forma riemanniana (37).

Per $j\,, l = 1\,, \dots\,, t$ sarà

$$H_{j,l} = H'_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s}\,;$$

per $j = 1, \ldots, t$ ed $l = t + 1, \ldots, p$, in virtù delle (39) e (38), sarà

$$H_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} = 0\,,$$

$$H'_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \omega_{l,s} = 0\,;$$

dopo di che queste uguaglianze sussisteranno pure per $j = t+1, \ldots, p$ ed $l = 1, \ldots, t$; ed infine sarà, per $j, l = t + 1, \ldots, p$,

$$H_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{l,s} = -\frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,s}\, \overline{\omega}_{l,r} = -\, \overline{H'_{l,j}}\,.$$

Se, pertanto, si dicono ε_j ed ε'_j, rispettivamente, per $j = 1, \ldots, p$, i minori principali dei determinanti $|H_{j,l}|$ e $|H'_{j,l}|$, formati dall'incrocio delle prime j righe con le prime j colonne, si avrà

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1\,, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon'_2\,, \ldots, \varepsilon_t = \varepsilon'_t\,,$$

e per $n = 1, \ldots, p - t$

$$\varepsilon_{t+n} = (-1)^n\, \varepsilon'_{t+n}\,.$$

Supposto d'aver scelto opportunamente i segni delle $c_{r,s}$, la forma Hermitiana H è definita positiva, cioè sono positive tutte le ε_j; dunque delle ε'_j le prime t sono positive e quelle dalla $(t+1)^{\text{esima}}$ in poi sono, alternativamente, negative e positive.

D'altro canto la forma Hermitiana H' è equivalente all'altra [141]

$$\varepsilon'_1\, z_1\, \overline{z}_1 + \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}\, z_2\, \overline{z}_2 + \ldots + \frac{\varepsilon'_p}{\varepsilon'_{p-1}}\, z_p\, \overline{z}_p$$

dunque:

La forma H' (ha la caratteristica p e) l'indice di inerzia t.

66. Ciò premesso, per raggiungere lo scopo che ci siamo prefissi, cerchiamo di invertire le considerazioni fatte nel n° precedente.

[141]) Cfr. *Exstrait d'une lettre de Mr.* Hermite *de Paris à Mr.* Borchardt *de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 52 (1856), pp. 39-51], pag. 40.

Supposto l'intero p maggiore di 1, indichiamo con t un intero positivo inferiore a p ma non inferiore a $\frac{p}{2}$, diciamo Ω una matrice riemanniana di genere p a indici massimi con lo spazio rappresentativo Σ e le imagini σ e $\overline{\sigma}$, e prendiamo in σ un qualsivoglia S_{t-1} che indicheremo con ξ. Sia poi $\overline{\xi}$ lo spazio imaginario coniugato a ξ e situato in $\overline{\sigma}$.

Posto

$$\Omega = \| \Omega_{j,r} \| \qquad (i=1,\dots,p; r=1,\dots,2p),$$

possiamo supporre, senza venir meno alla generalità, che le prime t righe di Ω forniscano coi loro elementi le coordinate di t punti indipendenti dello spazio ξ.

Considemiamo ora la forma Hermitiana di caratteristica p e indice di inerzia t:

$$z_1 \overline{z}_1 + \dots + z_t \overline{z}_t - z_{t+1} \overline{z}_{t+1} - \dots - z_p \overline{z}_p . \tag{40}$$

Per quanto è stato detto nel n^0 40 esiste certo un sistema nullo Π di Σ reale (ma in generale non razionale) che ha in σ e $\overline{\sigma}$ due spazi autopolari e che induce fra σ e $\overline{\sigma}$ la reciprocità rappresentata da

$$z_1 v_1 + \dots + z_t v_t - z_{t+1} v_{t+1} - \dots - z_p v_p = 0, \tag{41}$$

se le z_j e le v_j si concepiscono come le coordinate in σ e $\overline{\sigma}$ dei punti di σ e $\overline{\sigma}$ che in Σ hanno le coordinate

$$z_1 \Omega_{1,r} + \dots + z_p \Omega_{p,r} , \qquad v_1 \overline{\Omega}_{1,r} + \dots + v_p \overline{\Omega}_{p,r} \quad (r=1,\dots,2p).$$

La (41), per

$$z_{t+1} = \dots = z_p = v_{t+1} = \dots = v_p = 0,$$

diviene

$$z_1 v_1 + .. + z_t v_t = 0,$$

ed a questa equazione è impossibile soddisfare con

$$v_1 = \overline{z}_1 , \dots , v_t = \overline{z}_t ,$$

senza supporre nulle tutte le $z_1 , \dots , z_t$, dunque non accade mai che un punto di ξ e il punto imaginario coniugato ad esso e situato in $\overline{\xi}$ siano coniugati nella nostra reciprocità. Il che val quanto dire che nessuna retta reale appoggiata a ξ e $\overline{\xi}$ appartiene al complesso lineare definito dal sistema nullo Π.

Intanto, siccome Ω è ad indici massimi, esistono (n⁰ 40) sistemi nulli *riemanniani* di Ω infinitamente vicini a Π, dunque:

Esiste certo un sistema nullo riemanniano di Ω, *e sia* π, *tale che ad esso risponde una forma Hermitiana* $\left(\textit{individuata a meno di un fattore numerico, positivo se } t > \frac{p}{2}\right)$, *con l'indice di inerzia* t, *e tale che nessuna delle rette reali appoggiate a* ξ *e* $\overline{\xi}$ *appartenga al complesso lineare da esso definito.*

Ebbene costruiamo lo spazio polare di ξ rispetto a π.

Esso risulterà un S_{2p-t-1} passante per σ, che secherà $\overline{\sigma}$ in un S_{p-t-1} ξ_1.

Se ξ_1 si appoggiasse a $\overline{\xi}$ in qualche punto, il complesso lineare definito da π conterrebbe le rette reali congiungenti questi punti coi relativi punti imaginari coniugati di ξ, dunque ξ_1 è indipendente da $\overline{\xi}$ e quindi ξ è indipendente dallo spazio imaginario $\overline{\xi}_1$ coniugato a ξ_1 e situato in σ.

Ciò posto, si considerino gli spazi τ e $\overline{\tau}$ congiungenti rispettivamente gli spazi ξ e ξ_1, $\overline{\xi}_1$ e $\overline{\xi}$. Essi saranno due S_{p-1} imaginari coniugati indipendenti ed è chiaro che essi risulteranno pure due spazi autopolari del sistema nullo π.

Dico che:

Gli spazi τ e $\overline{\tau}$ *sono imagini di una matrice riemanniana* ω (e quindi di infinite altre equivalenti ad essa), *per cui* π *è un sistema nullo principale.*

Infatti, salvo in caso ad assoggettare la matrice Ω ad un'operazione A, possiamo supporre non solo, come più sopra, che le prime t righe di Ω forniscano con i loro elementi le coordinate di t punti indipendenti di ξ, ma anche che le ultime $p-t$ righe siano formate dalle coordinate di $p-t$ punti indipendenti di $\overline{\xi}_1$.

Ciò posto, consideriamo la matrice

$$\omega = \| \omega_{j,r} \| = \left\| \begin{matrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \dots & \Omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_{t,1} & \Omega_{t,2} & \dots & \Omega_{t,2p} \\ \overline{\Omega}_{t+1,1} & \overline{\Omega}_{t+1,2} & \dots & \overline{\Omega}_{t+1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\Omega}_{p,1} & \overline{\Omega}_{p,2} & \dots & \overline{\Omega}_{p,2p} \end{matrix} \right\| ;$$

le sue righe sono formate dalle coordinate di t punti indipendenti di ξ e da quelle di $p-t$ punti indipendenti di ξ_1; quindi se dimostriamo che ω è una matrice riemanniana sarà poi chiaro che essa ha per imagini τ e $\overline{\tau}$.

Si dica

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s = 0,$$

con le $c_{r,s}$ razionali, l'equazione del sistema nullo π; la forma

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s \tag{42}$$

sarà intanto una forma riemanniana alternata di ω.

Sia

$$H' = \sum_{j,l}^{1\dots p} H'_{j,l}\, z_j\, \overline{z_l}$$

la forma Hermitiana di Ω rispondente alla sua forma riemanniana (42), e sia

$$H = \sum_{j,l}^{1\dots p} H_{j,l}\, z_j\, \overline{z_l}$$

la forma Hermitiana, per la quale è

$$H_{j,l} = \frac{i}{2} \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega_{l,s}}\,.$$

Poi si indichino con ε_j ed ε'_j $(j = 1, \dots, p)$ i minori principali dei determinanti $|H_{j,l}|$ ed $|H'_{j,l}|$, secondo cui si incrociano le loro prime j righe e le loro prime j colonne.

Sarà, come più sopra, per $j = 1, \dots, t$,

$$\varepsilon_j = \varepsilon'_j$$

e per $n = 1, \dots, p - t$

$$\varepsilon_{t+n} = (-1)^n\, \varepsilon'_{t+n}\,.$$

Siccome il complesso lineare definito dal sistema nullo π non contiene alcuna retta reale appoggiata a ξ, le forme Hermitiane

$$\sum_{j,l}^{1\dots t} H_{j,l}\, z_j\, \overline{z_l} = \sum_{j,l}^{1,\dots t} H'_{j,l}\, z_j\, \overline{z_l}$$

sono definite, e disponendo dei segni delle $c_{r,s}$, le possiamo supporre definite positive, dunque le prime t ε_j, ossia le prime t ε'_j, si possono supporre tutte positive.

Intanto se la forma H' si riduce a forma canonica, in questa t coefficienti debbono essere di un segno e gli altri $p-t$ debbono essere del segno contrario; ma una tale forma canonica è

$$\varepsilon'_1 z_1 \bar{z}_1 + \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1} z_2 \bar{z}_2 + \dots + \frac{\varepsilon'_t}{\varepsilon'_{t-1}} z_t \bar{z}_t + \frac{\varepsilon'_{t+1}}{\varepsilon'_t} z_{t+1} \bar{z}_{t+1} + \dots + \frac{\varepsilon'_p}{\varepsilon'_{p-1}} z_p \bar{z}_p,$$

dunque, una volta che le $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_t$ sono positive, sarà

$$\frac{\varepsilon'_{t+1}}{\varepsilon'_t} < 0, \ \frac{\varepsilon'_{t+2}}{\varepsilon'_{t+1}} < 0, \dots, \frac{\varepsilon'_p}{\varepsilon'_{p-1}} < 0,$$

e le

$$\varepsilon'_{t+1}, \varepsilon'_{t+2}, \dots, \varepsilon'_p$$

sono, alternativamente, positive e negative.

Segue che le

$$\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots, \varepsilon_p$$

sono tutte positive; e quindi, essendo tali anche le $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$, si conclude che ω è una matrice riemanniana avente in H una forma Hermitiana principale e in π un sistema nullo riemanniano principale.

67. I ragionamenti fatti nel n⁰ prec. assicurano che ogni eventuale matrice riemanniana ω di genere $p > 2$ non singolare e con l'indice di moltiplicabilità 1 è certo fornita dalla costruzione ora indicata, dunque per arrivare allo scopo cui miriamo ci resta da far vedere che:

Se è $p > 2$, è possibile nella costruzione precedente disporre dello spazio ξ in modo che la matrice ω ivi costruita risulti effettivamente non singolare e con l'indice di moltiplicabilità 1.

Per questo cominciamo dall'osservare che, salvo, in caso, a sostituire nella costruzione precedente ad Ω una matrice ad essa isomorfa, possiamo supporre che la matrice Ω sia della forma

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & \alpha \end{matrix} \right\|,$$

dove α è un numero imaginario quadratico.

Dopo ciò uno S_{t-1} di σ sarà lo spazio congiungente t punti le cui coordinate saranno del tipo

$$(43) \qquad \begin{cases} \lambda_{1,1}, & \lambda_{1,1}\alpha, & \lambda_{1,2}, & \lambda_{1,2}\alpha, & \ldots, & \lambda_{1,p}, & \lambda_{1,p}\alpha, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{t,1}, & \lambda_{t,1}\alpha, & \lambda_{t,2}, & \lambda_{t,2}\alpha, & \ldots, & \lambda_{t,p}, & \lambda_{t,p}\alpha. \end{cases}$$

Si dica ora

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \gamma_{r,s}\, x_r\, y_s$$

la forma riemanniana alternata corrente di Ω e Γ il sistema nullo riemanniano di Ω che essa individua.

Le coordinate grassmanniane dello spazio intersezione di $\overline{\sigma}$ con lo spazio polare, rispetto a Γ, dello S_{t-1} congiungente i punti con le coordinate (43) saranno certe funzioni razionali intere delle λ, delle γ, di α e $\overline{\alpha}$, omogenee rispetto alle λ ed omogenee rispetto alle γ che indicheremo con i simboli:

$$f_1(\lambda, \gamma, \alpha, \overline{\alpha}), \quad f_2(\lambda, \gamma, \alpha, \overline{\alpha}), \ldots .$$

Siccome si suppone $p > 2$ e $\frac{p}{2} \leq t < p$, sarà $t \geq 2$, e quindi la matrice delle $\lambda_{j,l}$ avrà almeno due righe.

Considerate in essa le due righe

$$\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,p},$$

$$\lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{2,p},$$

si ponga

$$\eta_{j,l} = \lambda_{1,j}\,\lambda_{2,l} - \lambda_{1,l}\,\lambda_{2,j}.$$

Ciò posto, si determinino le $\lambda_{j,l}$ così che:

a) la matrice $\| \lambda_{j,l} \|$ risulti di caratteristica t;

b) non sia

$$f_1(\lambda,\gamma,\alpha,\overline{\alpha}) : f_2(\lambda,\gamma,\alpha,\overline{\alpha}) : \ldots = f_1(\lambda,\gamma',\alpha,\overline{\alpha}) : f_2(\lambda,\gamma',\alpha,\overline{\alpha}) : \ldots,$$

con le γ e γ' coefficienti di due forme riemanniane alternate *essenzialmente distinte* di Ω;

c) non sussista fra le $\eta_{j,l}$ una relazione lineare omogenea a coefficienti non tutti nulli e appartenenti al corpo algebrico quadratico $(1, \alpha)$.

Che la cosa sia possibile è evidente.

Per accorgersene, basta riguardare le $\lambda_{j,l}$ come coordinate omogenee di punto in un S_{tp-1}, e osservare che le condizioni imposte ad esse equivalgono ad imporre a un punto di un tale spazio la condizione di non essere situato su nessuna varietà di un insieme numerabile di varietà algebriche, ciascuna di dimensione $\leq tp-2$; condizione che, per il lemma del n^0 63, può essere certamente soddisfatta.

Determinato per le $\lambda_{j,l}$ un sistema di valori tale che per esso risultino soddisfatte le condizioni a), b), e c) si considerino in σ i t punti le cui coordinate sono date dalle (43) dopo avervi posto per le $\lambda_{j,l}$ i valori di cotesto sistema.

Poichè è soddisfatta la a), lo spazio congiungente i detti t punti sarà un S_{t-1}.

Ebbene:

Se lo spazio ξ di cui si discorre nel n^0 66 si suppone coincidente con lo S_{t-1} così determinato, la matrice ω ivi costruita risulta non singolare.

Infatti sia

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} C_{r,s}\, x_r\, y_s \tag{44}$$

una qualunque forma riemanniana alternata della matrice ω in discorso, le cui prime t righe possono supporsi date dalle (42).

Indicato con $p_{r,s}$ il minore di 2^0 ordine formato con le colonne r^{ma} ed s^{ma} della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,1}\alpha & \ldots & \lambda_{1,p} & \lambda_{1,p}\alpha \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,1}\alpha & \ldots & \lambda_{2,p} & \lambda_{2,p}\alpha \end{matrix} \right\|,$$

risulta

$$p_{2j-1,2l-1} = \eta_{j,l}, \quad p_{2j-1,2l} = \alpha\, \eta_{j,l}, \quad p_{2j,2l-1} = \alpha\, \eta_{j,l}, \quad p_{2j,2l} = \alpha^2\, \eta_{j,l};$$

e quindi, una volta che la (44) è una forma riemanniana alternata di ω, ha da essere

$$\sum_{j,l}{}' \left[C_{2j-1,2l-1} + \alpha\,(C_{2j-1,2l} + C_{2j,2l-1}) + \alpha^2\, C_{2j,2l}\right] \eta_{j,l} = 0, \tag{45}$$

dove l'apice apposto al sommatorio sta ad indicare che la somma si intende estesa a tutte le combinazioni binarie (j, l) degli indici $1, \ldots, p$ per le quali è $j < l$.

In virtù della condizione c), la (45) non può sussistere se non supponendo che in questa siano nulli tutti i coefficienti delle $\eta_{j,l}$; dunque è

$$C_{2j-1,2l-1} + \alpha\,(C_{2j-1,2l} + C_{2j,2l-1}) + \alpha^2\, C_{2j,2l} = 0 \qquad (j < l;\; j, l = 1, \ldots, p). \tag{46}$$

Ma le (46) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la (44) sia una forma riemanniana alternata della matrice Ω, dunque le forme riemanniane alternate di ω vanno cercate fra quelle di Ω, cioè i sistemi nulli riemanniani di ω vanno cercati fra quelli di Ω.

Ora rispetto a un sistema nullo, che sia sistema nullo riemanniano di ω e Ω, lo spazio ξ ha per spazio polare lo spazio congiungente σ con lo spazio ξ_1, e questo è l'intersezione di $\overline{\sigma}$ con lo spazio polare di ξ rispetto a π, che è un sistema nullo riemanniano (di ω e) di Ω, dunque, in base alla condizione b), ω e Ω non possono avere sistemi nulli riemanniani comuni che siano indipendenti da π, e la matrice ω è effettivamente non singolare.

Quanto all'indice di moltiplicabilità di ω esso è certo positivo, perchè le omografie razionali biassiali aventi per assi σ e $\overline{\sigma}$ sono altrettante omografie riemanniane di ω; quindi, essendo ω non singolare, esso o è 1, o è 3.

Se p è dispari, o se, pur essendo p pari è $t \neq \frac{p}{2}$, il valore dell'indice in discorso è certo 1; se no, è 1 soltanto in generale, mentre in casi particolari può risultare eguale a 3.

L'effettiva possibilità di cotesti casi particolari risulta dalla discussione del paragrafo che segue ([142]).

([142]) Si osservi, in base alla discussione del testo, a quale circostanza curiosa resti collegato il fatto, posto in rilievo dallo Humbert, che *non esistono matrici di* Riemann *non singolari col genere 2 e l'indice di moltiplicabilità positivo.* Essa è semplicemente questa: l'intero 2 è l'unico intero > 1 che non sia spezzabile nella somma di due interi positivi di cui uno almeno sia maggiore di 1.

§ 15.

Ancora sull'argomento precedente.

68. È stato già osservato che, se per la matrice ω è

$$k=0\,,\qquad h=3\,,$$

il suo genere p è un intero pari, diciamo $2q$, con $q>1$.

Inoltre è stato dimostrato che le omografie riemanniane non nulle e non identiche di ω sono omografie biassiali aventi per assi coppie di S_{2q-1} imaginari coniugati appartenenti a una schiera di S_{2q-1} di una V_{2q}^{2q} di Segre, priva di punti reali, e appoggiati ciascuno alle imagini di ω secondo spazi a $q-1$ dimensioni. Infine abbiamo pur visto che ω ammette coppie di omografie involutorie permutabili.

Il ragionamento che ora sarà sviluppato per dimostrare l'esistenza effettiva di matrici riemanniane non singolari con l'indice di moltiplicabilità 3 è inspirato a queste osservazioni; le quali, appunto, non sono state richiamate, se non per indicare le linee direttive della dimostrazione.

69. In uno spazio Σ a $4q-1$ dimensioni ($q>1$), prendiamo due omografie involutorie razionali, aventi per assi due coppie di S_{2q-1} imaginari coniugati $(\sigma\,,\,\overline{\sigma})$ e $(\eta\,,\,\overline{\eta})$, che siano inoltre permutabili e azigetiche ([143]).

Resterà individuata una varietà di Segre, V_{2q}^{2q}, con una schiera ∞^1 di S_{2q-1}, cui appartengono σ, $\overline{\sigma}$, η e $\overline{\eta}$ e una schiera ∞^{2q-1} di rette, costituita da tutte e sole le rette che si appoggiano, per es., a σ, $\overline{\sigma}$ e η (e quindi anche a $\overline{\eta}$ e a tutti gli altri S_{2q-1} di V_{2q}^{2q}).

Aggiungasi che σ, $\overline{\sigma}$, η, e $\overline{\eta}$ sono due coppie di elementi, imaginari coniugati, della schiera di S_{2q-1}, separantisi armonicamente; quindi questa schiera non può contenere elementi reali e V_{2q}^{2q} è priva di punti reali.

Le coppie di spazi $(\sigma, \overline{\sigma})$, e $(\eta, \overline{\eta})$ possono riguardarsi come le coppie delle imagini di due matrici di Riemann a indici massimi, Ω, e Ω'; quindi le totalità lineari dei sistemi nulli (non indetermi-

([143]) Per questa denominazione vedi E. Study, loc. cit. ([122]).

nati), aventi due spazi autopolari in $\sigma, \bar{\sigma}$, o in $\eta, \bar{\eta}$, sono due totalità *razionali* della dimensione $p^2 - 1$.

Tra i sistemi nulli, aventi per spazi autopolari σ e $\bar{\sigma}$, quelli aventi uno spazio autopolare in η costituiscono una totalità lineare della dimensione

$$p^2 - 1 - \frac{p(p-1)}{2} = \frac{(p-1)(p+2)}{2} = (2q-1)(q+1).$$

Ora ciascuno di essi che non sia degenere trasforma V_{2q}^{2q} in una varietà di Segre W_{2q}^{2q} contenente $\sigma, \bar{\sigma}$ e η; quindi W_{2q}^{2q} coincide con V_{2q}^{2q} ed entro la schiera di S_{2q-1} di questa varietà ciascuno di quei sistemi nulli subordina l'identità.

Segue che, i sistemi nulli, non del tutto indeterminati, aventi in $\sigma, \bar{\sigma}, \eta$ e $\bar{\eta}$ altrettanti spazi autopolari costituiscono una totalità lineare L della dimensione

$$(2q-1)(q+1), \tag{47}$$

intersezione di totalità razionali, e quindi *razionale*.

Ciò posto, si consideri un S_{2q-1} reale appoggiato a σ e $\bar{\sigma}$ secondo S_{q-1} imaginari coniugati.

Essendo $q > 1$ e quindi

$$(q+1)(2q-1) > q(2q-1),$$

esistono certo in L dei sistemi nulli reali non degeneri aventi in quello S_{2q-1} uno spazio autopolare; cosicchè, se diciamo ν un sistema nullo *razionale* di L infinitamente prossimo a uno di tali sistemi, ν risulterà un sistema nullo riemanniano non degenere di Ω e Ω', e ad esso risponderanno per Ω forme Hermitiane di caratteristica $p = 2q$ e indice di inerzia q.

Indichiamo con α l'omografia involutoria razionale avente per assi η e $\bar{\eta}$ e formiamo il prodotto

$$\pi = \alpha\nu.$$

Esso sarà una polarità riemanniana di Ω' avente per quadrica fondamentale, F_{4q-2}^2, una quadrica *razionale*.

Rispetto ad F_{4q-2}^2 gli spazi σ e $\bar{\sigma}$ sono polari reciproci, poichè α li scambia fra di loro, mentre ν tiene fermo ciascun di essi; ma questi spazi sono indipendenti, dunque F_{4q-2}^2 segna su σ e $\bar{\sigma}$ due quadriche (imaginarie coniugate e) non degeneri, f^2_{2q-2} ed $\overline{f}^2_{2q-2}$. Ciascuna di queste quadriche poi contiene infiniti spazi della dimensione $q-1$, distribuiti in due sistemi continui differenti.

Sia a un S_{q-1} di f^2_{2q-2}; e sia a' lo S_{q-1} trasformato di a mediante α.

Siccome a è situato in σ, a' sta in $\overline{\sigma}$; inoltre siccome π trasforma a nella stella degli iperpiani passanti per $\overline{\sigma}$ e per a [144], il sistema nullo ν, che eguaglia il prodotto

$$\alpha^{-1}\,\pi = \alpha\pi,$$

trasforma a' nella detta stella di iperpiani.

Segue che ciascun punto di a è coniugato a ciascun punto di a' rispetto a ν; ma σ e $\overline{\sigma}$ sono autopolari rispetto a ν, quindi anche ciascun punto di a (di a') è coniugato rispetto a ν a ciascun altro punto di a (di a'), e lo S_{2q-1} τ congiungente a ed a' è, per ν, uno spazio autopolare.

Aggiungasi che τ, poichè a ed a' si corrispondono in α, si appoggia secondo spazi a $q-1$ dimensioni non solo a σ e $\overline{\sigma}$, ma anche a η e $\overline{\eta}$, e a ciascun altro S_{2q-1} di V^{2q}_{2q}.

L'omografia α trasforma π in π^{-1}, cioè F^2_{4q-2} in sè stessa, e scambia fra loro σ e $\overline{\sigma}$; dunque per α f^2_{2q-2} va in $\overline{f}^2_{2q-2}$ e lo spazio a' appartiene ad $\overline{f}^2_{2q-2}$.

Anche lo spazio $\overline{a}$ di $\overline{\sigma}$, imaginario coniugato ad a, appartiene ad $\overline{f}^2_{2q-2}$; e gli spazi a' ed $\overline{a}$ si corrispondono nell'anticollineazione di Σ che è data dal prodotto

$$\alpha C,$$

ove C è il *coniugio* di Σ.

Siccome α è (razionale, quindi) reale, è

$$C\alpha C = \alpha,$$

ossia

$$C\alpha = \alpha C;$$

quindi, essendo α e C involutorie, è tale anche $\alpha\, C$.

(144) L'iperpiano polare di un punto di a rispetto ad F^2_{4q-2} tocca la quadrica in quel punto e passa quindi per a.

Poichè lo spazio $\overline{\sigma}$ è unito in αC, αC subordina in $\overline{\sigma}$ un'anticollineazione involutoria φ. Questa muta in sè $\overline{f}^2_{2q-2}$ ed è priva di punti uniti.

Osservisi infatti, per giustificar quest'ultima asserzione, che se φ avesse un punto unito, questo dovrebbe esser portato da α e da C in uno stesso punto di σ; e per conseguenza sarebbe congiunto ad esso da una retta reale e situata sulla V^{2q}_{2q}; mentre questa è priva di punti reali.

Segue (cfr. n⁰ 64) che gli spazi a' ed $\overline{a}$, siccome sono omologhi in φ, o sono indipendenti, o si tagliano in uno spazio di dimensione dispari; quindi sopra $\overline{f}^2_{2q-2}$ a' ed $\overline{a}$ appartengono ad uno stesso sistema di S_{q-1}, o a sistemi differenti, secondo che q è pari o dispari.

70. Vediamo ora se è possibile disporre dello spazio a di f^2_{2q-2}, o, ciò che è lo stesso, dello spazio a' di $\overline{f}^2_{2q-2}$ così che:

1) lo spazio τ congiungente a ed a' risulti indipendente dallo spazio imaginario coniugato $\overline{\tau}$; e

2) il complesso lineare determinato dal sistema nullo ν non contenga alcuna delle rette appoggiate ad a e $\overline{a}$.

Perchè τ risulti indipendente da $\overline{\tau}$ occorre intanto e basta che sia a' indipendente da $\overline{a}$, dopo di che anche a è indipendente dallo spazio imaginario $\overline{a'}$ coniugato ad a' e situato in σ.

Suppongasi adesso che il complesso lineare determinato da ν contenga una retta reale appoggiata ad a e $\overline{a}$, cioè una retta congiungente un punto A di a con il punto imaginario coniugato $\overline{A}$ di $\overline{a}$. L'iperpiano polare di A rispetto a ν passerà allora per $\overline{A}$; ma se A' è il punto di a' omologo ad A in α, cotesto iperpiano è l'iperpiano polare di A' rispetto ad F^2_{4q-2}, e A' giace su F^2_{4q-2}; dunque la retta $A'\overline{A}$ giacerà su F^2_{4q-2}, cioè su $\overline{f}^2_{2q-2}$. Aggiungasi che i punti A' ed $\overline{A}$ sono omologhi in φ, e quindi la retta $A'\overline{A}$ sarà pure unita in φ.

Le considerazioni fatte sono invertibili, quindi per il lemma del n⁰ 64 è possibile soddisfare alle condizioni 1) e 2); basta prendere a' su $\overline{f}^2_{2q-2}$, così che a' ed $\overline{a}$ risultino indipendenti e che non esista su $\overline{f}^2_{2q-2}$ alcuna retta unita in φ e appoggiata ad a' e $\overline{a}$.

71. Si supponga di aver scelto a su f^2_{2q-2} così che risultino soddisfatte le condizioni 1) e 2) del n⁰ precedente.

Il sistema nullo ν ha in τ e $\overline{\tau}$ due spazi autopolari e il complesso lineare da esso definito non contiene alcuna delle rette reali appoggiate ad a e $\overline{a}$; quindi τ e $\overline{\tau}$ (cfr. il ragionamento del n⁰ 66) sono le imagini di una matrice riemanniana ω che ha in ν un sistema nullo riemanniano principale e altrettante omografie riemanniane in tutte le omografie razionali del sistema lineare ∞^3 individuato dall'identità, dalle omografie involutorie aventi per assi σ, $\overline{\sigma}$ e η, $\overline{\eta}$ e dal loro prodotto.

Dico che:

Se $q > 1$ si può ulteriormente disporre di a in modo da ottenere che ω risulti non singolare (e con l'indice di moltiplicabilità 3).

Suppongasi in primo luogo $q > 2$.

In tal caso non è possibile che due sistemi nulli riemanniani differenti ν' e ν'' della matrice Ω operino egualmente sugli S_{q-1} di un sistema di f^2_{2q-2}, perchè se ciò accadesse le reciprocità $\nu'_{\sigma\overline{\sigma}}$ e $\nu''_{\sigma\overline{\sigma}}$ indotte da ν' e ν'' fra σ e $\overline{\sigma}$ opererebbero egualmente non solo sugli S_{q-1} di f^2_{2q-2} di quel sistema, ma, a dirittura sui punti di f^2_{2q-2}, una volta che, essendo $q > 2$, per ciascun punto di f^2_{2q-2} passano infiniti S_{q-1} di quel sistema *congiunti* dall'iperpiano ivi tangente ad f^2_{2q-2}. Ma allora $\nu'_{\sigma\overline{\sigma}}$ e $\nu''_{\sigma\overline{\sigma}}$ non potrebbero esser distinte, e ν', ν'', contro l'ipotesi, coinciderebbero.

Inoltre non è possibile che esista in σ un sistema nullo, non del tutto indeterminato, che abbia spazi autopolari in ogni S_{q-1} di un sistema di f^2_{2q-2}, perchè se ciò fosse, essendo $q > 2$, in quel sistema nullo ciascun punto di f^2_{2q-2} avrebbe per omologo l'iperpiano tangente in esso ad f^2_{2q-2}, e il sistema nullo coinciderebbe con la polarità determinata da f^2_{2q-2}.

Ciò porta che quando $q > 2$ la nostra asserzione può esser giustificata imitando il procedimento del n⁰ 67.

Si ragioni infatti per lo spazio a come ivi si ragionava per lo spazio ξ.

Tutto si riduce a far vedere che si può scegliere lo spazio a su f^2_{2q-2} in modo da soddisfare con esso non solo alle condizioni 1) e 2) del n⁰ 70, ma anche alle condizioni analoghe alle a), b), c) del n⁰ 67, che diremo, per intenderci, le condizioni a'), b') e c').

Ora che in ciascun sistema di f^2_{2q-2} esistano degli S_{q-1} soddisfacenti alle condizioni a'), b'), c') è conseguenza immediata del lemma del n⁰ 63, quando si sia avvertito che affermare l'esistenza di tali S_{q-1} equivale ad affermare che sopra una certa varietà algebrica irriducibile V di uno spazio a $qp - 1$ dimensioni esistono punti non appartenenti ad alcuna varietà di un insieme numerabile di varietà algebriche, *nessuna delle quali*, in virtù delle considerazioni fatte più sopra, *passa per* V.

Segue, anzi, dall'osservazione finale del n^0 63, che in ciascun sistema di f^2_{2q-2} gli S_{q-1} soddisfacenti alle condizioni a'), b') e c') costituiscono un insieme avente per S_{q-1} limiti tutti gli S_{q-1} del sistema, e quindi per l'osservazione che chiude il n^0 64 esistono certo su f^2_{2q-2} degli S_{q-1} che soddisfanno non solo alle condizioni 1) e 2) del n^0 70, ma anche alle condizioni a'), b') e c').

Infatti se un S_{q-1} di f^2_{2q-2} soddisfa alle condizioni 1) e 2) del n^0 70, alle stesse condizioni soddisfanno tutti gli S_{q-1} dello stesso sistema abbastanza prossimi ad esso, e fra questi vi sono certo degli S_{q-1} soddisfacenti alle condizioni a'), b') e c').

Suppongasi in secondo luogo $q = 2$.

Anche qui la nostra asserzione può essere giustificata, in ultima analisi, col procedimento del n^0 67; ma stavolta f^2_{2q-2} è una quadrica ordinaria, e delle rette di ciascun suo sistema soltanto una passa per un punto assegnato della quadrica, quindi il ragionamento or ora delineato per il caso $q > 2$, non è immediatamente applicabile.

Procederemo dunque per una via leggermente diversa, la quale ha il vantaggio di porgere un esempio concreto di matrice riemanniana del genere 4 non singolare e con l'indice di moltiplicabilità 3.

Come matrici Ω e Ω' prendansi nel caso attuale le matrici:

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{matrix} \right\|$$

$$\Omega' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & i \end{matrix} \right\| \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

le cui imagini $(\sigma, \overline{\sigma})$ e $(\eta, \overline{\eta})$ sono le coppie di S_3 fondamentali delle due omografie involutorie permutabili azigetiche rappresentate nello

S_7 ambiente dalle equazioni

$$(48) \qquad x_1' = x_2\,,\; x_2' = -x_1\,,\; x_3' = x_4\,,\; x_4' = -x_3\,,\; x_5' = x_6\,,\; x_6' = -x_5\,,$$
$$x_7' = x_8\,,\; x_8' = -x_7\,,$$

e

$$(49) \qquad x_1' = x_3\,,\; x_2' = -x_4\,,\; x_3' = -x_1\,,\; x_4' = x_2\,,\; x_5' = x_7\,,\; x_6' = -x_8\,,$$
$$x_7' = -x_5\,,\; x_8' = x_6\,.$$

Le forme alternate che sono forme riemanniane di Ω e Ω' simultaneamente, d'accordo con la (47), sono date, al variare di A, $B, \ldots, L$ fra i numeri razionali, dall'espressione

$$\begin{gathered} A\,[(1,2)-(3,4)] + B\,[(1,3)+(2,4)] + C\,[(1,4)-(2,3)] + \\ + D\,[(5,6)-(7,8)] + E\,[(5,7)+(6,8)] + F\,[(5,8)-(6,7)] + \\ + G\,[(1,5)+(2,6)+(3,7)+(4,8)] + H\,[(1,6)-(2,5)-(3,8)+(4,7)] + \\ + I\,[(1,7)+(2,8)-(3,5)-(4,6)] + L\,[(1,8)-(2,7)+(3,6)-(4,5)], \end{gathered}$$

dove, secondo una convenzione solita, la scrittura (r, s) sta per il binomio

$$x_r\, y_s - x_s\, y_r\,;$$

e fra queste alla forma

$$(1,2)-(3,4)+(5,6)-(7,8)$$

risponde per Ω la forma Hermitiana

$$z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 - z_4 \bar{z}_4\,,$$

che è appunto a caratteristica 4 e con l'indice di inerzia 2.

Segue che come sistema nullo ν (cfr. n^0 69) può prendersi qui il sistema nullo rappresentato come connesso di punti dall'equazione

$$(50) \qquad (1,2)-(3,4)+(5,6)-(7,8) = 0,$$

o, come reciprocità involutoria, dalle equazioni

$$(51) \qquad \xi_1' = x_2\,,\; \xi_2' = -x_1\,,\; \xi_3' = -x_4\,,\; \xi_4' = x_3\,,\; \xi_5' = x_6\,,\; \xi_6' = -x_5\,,$$
$$\xi_7' = -x_8\,,\; \xi_8' = x_7\,,$$

dove le ξ' sono coordinate di iperpiano.

La polarità π è quivi la polarità rappresentata dalle equazioni

(52) $\xi'_1 = x_4, \xi'_2 = x_3, \xi'_3 = x_2, \xi'_4 = x_1, \xi'_5 = x_8, \xi'_6 = x_7, \xi'_7 = x_6, \xi'_8 = x_5$

e quindi la quadrica F^2_{4q-2}, cioè F^2_6, è qui la quadrica rappresentata dall'equazione

$$x_1x_4 + x_2x_3 + x_5x_8 + x_6x_7 = 0.$$

Un punto X di σ che abbia le coordinate

(52) $$\lambda_1, \lambda_1 i, \lambda_2, \lambda_2 i, \lambda_3, \lambda_3 i, \lambda_4, \lambda_4 i$$

giace su F^2_6 se è

(54) $$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = 0,$$

questa è dunque *in* σ, concependo le $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ come coordinate di X in σ, l'equazione della quadrica f^2_{2q-2}, che è, qui, una quadrica (ordinaria) f^2_2.

Lo spazio a è nel caso attuale una retta di f^2_2; se due punti distinti di essa sono dati dal punto X, con le coordinate (53), e dal punto Y con le coordinate

$$\mu_1, \mu_1 i, \mu_2, \mu_2 i, \mu_3, \mu_3 i, \mu_4, \mu_4 i,$$

lo spazio a' è qui la retta congiungente i punti con le coordinate

$$\lambda_2, -\lambda_2 i, -\lambda_1, \lambda_1 i, \lambda_4, -\lambda_4 i, -\lambda_3, \lambda_3 i$$

$$\mu_2, -\mu_2 i, -\mu_1, \mu_1 i, \mu_4, -\mu_4 i, -\mu_3, \mu_3 i$$

e sarà

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = 0$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_3\mu_4 = 0$$

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \lambda_3\mu_4 + \lambda_4\mu_3 = 0.$$

Se si suppone $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, queste tre condizioni equivalgono alle altre

$$\lambda_2 = -\lambda_3\lambda_4, \quad \mu_2 = -\mu_3\mu_4$$

$$\lambda_3\lambda_4 + \mu_3\mu_4 - \lambda_3\mu_4 - \lambda_4\mu_3 = 0;$$

quindi in base ai ragionamenti generali fatti nei n[i] precedenti si può assicurare che la matrice

$$(55)\qquad \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & i & -\lambda_3\lambda_4 & -\lambda_3\lambda_4 i & \lambda_3 & \lambda_3 i & \lambda_4 & \lambda_4 i \\ 1 & i & -\mu_3\mu_4 & -\mu_3\mu_4 i & \mu_3 & \mu_3 i & \mu_4 & \mu_4 i \\ -\lambda_3\lambda_4 & \lambda_3\lambda_4 i & -1 & i & \lambda_4 & -\lambda_4 i & -\lambda_3 & \lambda_3 i \\ -\mu_3\mu_4 & \mu_3\mu_4 i & -1 & i & \mu_4 & \mu_4 i & -\mu_3 & \mu_3 i \end{array} \right\|$$

è una matrice riemanniana (di genere 4) con un sistema nullo riemanniano principale in quello rappresentato dall'equazione (50), purchè in essa le $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ soddisfacciano alla relazione

$$(56)\qquad \lambda_3\lambda_4 + \mu_3\mu_4 - \lambda_3\mu_4 - \lambda_4\mu_3 = 0,$$

e inoltre la retta a sia una retta opportunamente scelta in una delle due schiere rigate di f_2^2.

Avvertasi per altro che tale scelta non impone alle $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ che condizioni esprimibili mediante disuguaglianze, e che queste disuguaglianze possono esser soddisfatte in una infinità (continua) di maniere distinte.

Resta ora a dimostrare che la matrice (55) è, *in generale*, non singolare.

Per questo procederemo in modo diretto alla maniera che segue.

Sia

$$(57)\qquad \sum_{r,s}^{1\dots 8} c_{r,s}\, x_r\, y_s$$

una forma riemanniana alternata della matrice (55).

Ponendo per le x_r gli elementi della prima riga della (55) e per le y_s gli elementi della seconda riga, si trova che le $c_{r,s}$ debbono soddisfare alla relazione:

$$[c_{1,3} - c_{2,4} + (c_{1,4} + c_{2,3})i](\lambda_3\lambda_4 - \mu_3\mu_4) + [c_{1,5} - c_{2,6} + (c_{1,6} + c_{2,5})i](\mu_3 - \lambda_3) +$$
$$+ [c_{1,7} - c_{2,8} + (c_{1,8} + c_{2,7})i](\mu_4 - \lambda_4) + [c_{3,5} - c_{4,6} + (c_{3,6} + c_{4,5})i]\lambda_3\mu_3(\mu_4 - \lambda_4) +$$
$$+ [c_{3,7} - c_{4,8} + (c_{3,8} + c_{4,7})i]\lambda_4\mu_4(\mu_3 - \lambda_3) + [c_{5,7} - c_{6,8} +$$
$$+ (c_{5,8} + c_{6,7})i](\lambda_3\mu_4 - \lambda_4\mu_3) = 0.$$

Ma questa relazione, date le ipotesi di generalità in cui ci siamo posti, deve ridursi alla (56) o deve essere identica, dunque, non potendo mai verificarsi, come è evidente, la prima alternativa, ha da essere

$$c_{1,3} - c_{2,4} + (c_{1,4} + c_{2,3})\,i = 0, \qquad c_{1,5} - c_{2,6} + (c_{1,6} + c_{2,5})\,i = 0,$$

$$c_{1,7} - c_{2,8} + (c_{1,8} + c_{2,7})\,i = 0, \qquad c_{3,5} - c_{4,6} + (c_{3,6} + c_{4,5})\,i = 0,$$

$$c_{3,7} - c_{4,8} + (c_{3,8} + c_{4,7})\,i = 0, \qquad c_{5,7} - c_{6,8} + (c_{5,8} + c_{6,7})\,i = 0\,;$$

ossia, una volta che le $c_{r,s}$ sono numeri (razionali, e quindi) reali, ha da essere:

$$c_{2,4} = c_{1,3}\,,\ c_{2,6} = c_{1,5}\,,\ c_{2,8} = c_{1,7}\,,\ c_{4,6} = c_{3,5}\,,\ c_{4,8} = c_{3,7}\,,\ c_{6,8} = c_{5,7}$$

$$c_{2,3} = -\,c_{1,4}\,,\ c_{2,5} = -\,c_{1,6}\,,\ c_{2,7} = -\,c_{1,8}\,,\ c_{4,5} = -\,c_{3,6}\,,$$

$$c_{4,7} = -\,c_{3,8}\,,\ c_{6,7} = -\,c_{5,8}\,.$$

Dopo ciò ponendo nella (57) per le x_r gli elementi della prima riga di (55) e per le y_s gli elementi della terza riga si trova che deve essere

$$c_{1,2} - c_{3,4} - c_{5,6} + c_{7,8} = 0$$

$$c_{1,3} = c_{1,4} = c_{5,7} = c_{5,8} = 0$$

$$c_{3,7} = -\,c_{1,5}\,,\ c_{3,8} = -\,c_{1,6}\,,\ c_{3,5} = -\,c_{1,7}\,,\ c_{3,6} = -\,c_{1,8}\,.$$

Analogamente, ponendo nella (57) per le x_r gli elementi della prima riga e per le y_s quelli della quarta riga di (55), si trovano per le $c_{r,s}$ le relazioni ulteriori:

$$c_{3,4} = -\,c_{1,2} \qquad c_{5,6} = -\,c_{7,8}$$

$$c_{1,5} = c_{1,6} = c_{1,7} = c_{1,8} = 0\,;$$

e infine, ponendo per le x_r gli elementi della seconda riga e per le y_s quelli della terza, si prova che deve essere

$$c_{1,2} = c_{5,6}\,.$$

Riassumendo, nella (57) è

$$c_{1,2} = c_{5,6} = -c_{3,4} = -c_{7,8}$$

e tutte le altre $c_{r,s}$ sono nulle, dunque la matrice (55) non ammette, in generale, che le forme riemanniane alternate fornite da

$$A\,[(1,2) - (3,4) + (5,6) - (7,8)],$$

al variare di A fra i numeri razionali, e la matrice (55) è, in generale, non singolare.

§ 16.

Il rango di una varietà abeliana. Le varietà abeliane non singolari.

72. Le teorie svolte in questa Memoria sono suscettibili di applicazioni numerose ed importanti; qui ci contenteremo di dedurne, a titolo di esemplificazione, alcune delle conseguenze più notevoli per la geometria sopra una varietà abeliana, con particolare riguardo alle varietà abeliane non singolari; rimandando, anche per questo, a un altro lavoro una trattazione compiuta.

73. È noto che le trasformazioni algebriche (ad indice finito) situate sopra una varietà abeliana V, di dimensione p, si distribuiscono in *classi*, corrispondentemente alle sostituzioni riemanniane intere di una qualunque delle matrici di Riemann (equivalenti) a cui la varietà appartiene; e che il *numero-base* σ della varietà, cioè il massimo numero di classi *indipendenti* di trasformazioni situato su di essa è uguale all'indice di moltiplicabilità di una qualunque di queste matrici aumentato di 1 [145].

Si indichi con C_0 la classe *nulla*, cioè quella contenente le trasformazioni a valenza zero, con C_1 la classe *identica*, cioè quella contenente le trasformazioni a valenza -1 (in particolare l'identità), e se j è un intero positivo e C è una classe qualunque di trasformazioni di V, si dica C^j la classe C, se $j = 1$, o la classe *prodotto* di j classi eguali a C, se $j > 1$.

(145) Per questo e per quanto segue veggasi la memoria citata in (103).

Ciò posto, le trasformazioni di V contenute nella classe C si diranno del *rango* r, se r è il minimo intero positivo per cui accade che sia

$$\alpha_0 C^r + \alpha_1 C^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} C + \alpha_r C_1 = C_0$$

con le $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ intere e $\alpha_0 \neq 0$.

Al variare di C su V, l'intero r può variare; ma esso non può mai superare il numero-base di V, dunque ammette un massimo, che indicheremo con ϱ e che diremo il *rango* della varietà V.

Il rango di una trasformazione algebrica di V è, si vede subito, il rango della sostituzione riemanniana intera che ad essa risponde per una qualunque delle matrici riemanniane cui appartiene V.

D'altronde ogni sostituzione riemanniana di una matrice di RIEMANN, ove sia moltiplicata per un conveniente intero, si muta in una sostituzione riemanniana intera della matrice stessa; dunque:

Il rango di una varietà abeliana è il rango di una qualunque delle matrici di RIEMANN *a cui essa appartiene.*

Di qua segue subito che:

Se la varietà abeliana V è pura, ossia è priva di congruenze abeliane di varietà abeliane, il rango ϱ è un divisore comune di σ e di $2p$, e l'intero $\frac{\sigma}{\varrho}$ è a sua volta un divisore di ϱ; poi l'intero σ è un divisore di $4p^2$, non superiore a $2p$.

Inoltre ogni trasformazione algebrica di V (ad indice finito) che non sia a valenza zero (cioè di rango nullo) ha per rango un divisore di ϱ $(\leq \varrho)$.

74. Nel caso che V sia pura, l'intero $\frac{2p}{\varrho}$ ha un significato geometrico che giova mettere in rilievo.

Sia

$$A_1, \dots, A_\sigma$$

una base minima per l'insieme H delle sostituzioni riemanniane intere di una matrice di RIEMANN, cui appartenga V; e sia

$$A = \xi_1 A_1 + \dots + \xi_\sigma A_\sigma,$$

dove le ξ_l sono indeterminate intere, l'elemento corrente di H.

L'equazione minima di A è del grado ϱ e diventa l'equazione minima dell'algebra razionale connessa con ω quando in essa si supponga che le ξ_l siano indeterminate non a dirittura intere, ma, soltanto, razionali; inoltre, se tale equazione minima è

$$F(\xi) = \xi^\varrho + f_1(\xi_1, \dots, \xi_\sigma)\,\xi^{\varrho-1} + \dots + f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma) = 0,$$

le f_j sono funzioni razionali intere a coefficienti interi dei loro argomenti.

Giacchè V è pura, e quindi è tale anche ω, la funzione caratteristica $\varDelta(\xi)$ di A è la potenza $\left(\frac{2p}{\varrho}\right)^{\text{esima}}$ di $F(\xi)$, dunque il determinante di A è dato da

$$[f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma)]^{\frac{2p}{\varrho}} \tag{58}$$

ed f_ϱ è una funzione omogenea di grado ϱ.

Ora le trasformazioni algebriche $(\nu, 1)$ $(\nu \geq 1)$ situate su V si distribuiscono, come è noto, corrispondentemente alle sostituzioni riemanniane intere di ω, in schiere continue ∞^p, ciascuna schiera essendo una varietà abeliana birazionalmente identica a V; e l'indice ν per le trasformazioni della schiera rispondente a una data sostituzione intera di ω è il determinante della sostituzione; dunque:

Se V è pura, i valori dell'indice ν per le trasformazioni algebriche $(\nu, 1)$ situate su di essa sono tutti e soli gli interi positivi del tipo

$$\lambda^{\frac{2p}{\varrho}},$$

essendo λ un intero rappresentabile mediante la forma

$$f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma).$$

E se ν è un intero positivo del tipo ora detto, le schiere ∞^p di trasformazioni algebriche $(\nu, 1)$ situate su V rispondono biunivocamente alle soluzioni intere dell'equazione:

$$[f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma)]^{\frac{2p}{\varrho}} = \nu. \tag{59}$$

Avvertasi che, per osservazioni già fatte altrove, la forma (58) è semidefinita positiva e atta, in ogni caso, a rappresentare l'unità; dunque:

La forma

$$f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma)$$

è atta a rappresentare almeno uno dei due numeri ± 1 *; e se* $\frac{2p}{\varrho}$ *è dispari (il che non può certo avvenire se* ϱ *non è pari), essa è pure una forma semidefinita positiva.*

75. Le considerazioni precedenti possono essere meglio precisate quando V sia una varietà abeliana non singolare, e quindi necessariamente pura.

L'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana non singolare è 0, 1 o 3; e il rango di una tal matrice è 1 o 2, secondo che quell'indice è nullo o positivo; dunque si ha intanto che:

La varietà abeliane non singolari possono essere distribuite in tre tipi fondamentali, dicendo:

del tipo I) *quelle che hanno per numero-base e per rango l'unità;*

del tipo II) *quelle che hanno il numero-base e il rango eguale a* 2*;*

del tipo III) *quelle che hanno per numero-base* 4 *e per rango* 2.

Avvertasi che, per quanto è noto a proposito delle matrici riemanniane non singolari:

Questi tre tipi di varietà abeliane sono tutti effettivamente realizzabili, ma per le varietà del tipo II) *la dimensione è un qualunque intero positivo diverso da* 2, *e per le varietà del tipo* III) *la dimensione è un qualunque intero pari non inferiore a* 4.

76. Manteniamo sempre per V le notazioni introdotte nel n° 74.

Se V è del tipo I), si ha $\sigma = \varrho = 1$, e la sostituzione A_1 che forma una base minima di H è la sostituzione identica o la sua opposta; quindi è

$$F(\xi) = \xi \mp \xi_1$$

ed

$$f_\varrho = \mp \xi_1.$$

Ne risulta che:

Sopra una varietà abeliana non singolare del tipo I) *e della dimensione* p *esistono schiere continue* ∞^p *di trasformazioni algebriche* $(\nu, 1)$ $(\nu \geq 1)$, *se, e soltanto se,* ν *è una potenza* $(2p)^{\text{ma}}$ *esatta; e per ogni tale valore di* ν *esistono sulla varietà due e due sole schiere continue di trasformazioni algebriche* $(\nu, 1)$.

Suppongasi invece che V sia del tipo II) o III).

Allora σ è 2 o 4, ma ϱ è in ogni caso 2; ed

$$f_\varrho(\xi_1, \dots, \xi_\sigma) = f_2(\xi_1, \dots, \xi_\sigma)$$

è una forma quadratica binaria o quaternaria a coefficienti interi.

Poi, essendo V non singolare, non solo l'algebra razionale, ma anche l'algebra reale connessa con la matrice ω è primitiva; quindi l'equazione minima di un qualsiasi elemento non nullo di una qualunque di quelle due algebre non può esser priva di termine noto; e la forma quadratica f_2 è definita.

Ma l'equazione minima di una sostituzione riemanniana di rango 2 di una matrice riemanniana singolare è a radici imaginarie coniugate, dunque f_2 è una forma definita positiva.

Segue che un'equazione della forma

$$(60) \qquad f_2(\xi_1, \ldots, \xi_\sigma) = \lambda \qquad (\lambda \text{ intero positivo})$$

non può ammettere, eventualmente, che un numero finito di soluzioni intere, perchè la (60) in uno spazio a σ dimensioni, per cui le $\xi_1, \ldots, \xi_\sigma$ siano, per es., coordinate cartesiane ortogonali, è l'equazione di una quadrica a punti reali rinchiudibile in un parallelotopo nel quale non capita che un numero finito di punti a coordinate intere.

Si ha così il teorema:

Sopra la varietà V, ove essa sia del tipo II) *o* III), *esistono schiere continue di trasformazioni algebriche* $(\nu, 1)$ $(\nu \geq 1)$, *se, e soltanto se, ν è la potenza p^{ma} di un intero rappresentabile mediante la forma quadratica definita positiva, binaria, o, rispettivamente, quaternaria*

$$f_2(\xi_1, \ldots, \xi_\sigma);$$

e per ogni tale valore di ν il numero di quelle schiere è finito ed eguaglia il numero delle rappresentazioni diverse di $\sqrt[p]{\nu}$ mediante la forma stessa.

In particolare si osservi che:

Il numero delle schiere continue di trasformazioni birazionali di una varietà abeliana non singolare in sè stessa è in ogni caso finito.

77. Al teorema ultimamente enunciato può darsi una forma molto più precisa; possiamo dimostrare infatti che:

Il numero N delle schiere continue di trasformazioni birazionali sopra una verietà abeliana non singolare non può essere che

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad o \quad 24;$$

potendosi verificare soltanto la prima o soltanto le prime tre alternative, se la varietà è del tipo I) *o* II), *rispettivamente.*

Se la varietà V è del tipo I) è noto ed è stato già osservato che $N=2$; supponiamo dunque che V sia del tipo II) o III).

Se V è del tipo II), per modo che $\sigma=2$, la forma quadratica

$$f_2(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$$

è una forma quadratica definita (positiva) atta a rappresentare l'unità; quindi se si pone

$$4ac - b^2 = D \qquad (D > 0),$$

essa è equivalente a una forma del tipo

$$\xi_1^2 + \frac{D}{4}\xi_2^2,$$

o del tipo

$$\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \frac{D+1}{4}\xi_2^2,$$

secondo che b è pari o dispari, ossia secondo che è $D \equiv 0$ o $D \equiv 3 \mod 4$.

Ora l'equazione

$$\xi_1^2 + \frac{D}{4}\xi_2^2 = 1 \qquad (D \equiv 0, \mod 4),$$

se $D \geq 8$, ammette le sole soluzioni intere

$$\xi_1 = \pm 1, \qquad \xi_2 = 0;$$

e, se $D=4$, ammette soltanto le 4 soluzioni intere

$$\xi_1 = \pm 1, \quad \xi_2 = 0; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1;$$

e l'equazione

$$\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \frac{D+1}{4}\xi_2^2 = 1 \qquad (D \equiv 3, \mod 4),$$

ossia

$$\left(\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2\right) + \frac{D}{4}\xi_2^2 = 1,$$

ammette, se $D \geq 7$, soltanto le soluzioni intere

$$\xi_1 = \pm 1, \quad \xi_2 = 0,$$

mentre, se $D = 3$, ammette le 6 soluzioni intere:

$$\xi_1 = \pm 1, \quad \xi_2 = 0; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1; \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -1;$$
$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 1;$$

dunque se V è del tipo II), il numero N è, per essa 2, 4 o 6.

Supponiamo infine che V sia del tipo III).

Alle N schiere continue di trasformazioni birazionali, che essa contiene, rispondono, per la matrice ω cui appartiene, N sostituzioni riemanniane intere formanti un gruppo.

Diciamo

$$M_1, M_2, \ldots, M_N \tag{61}$$

le matrici di queste sostituzioni e riguardiamole come N elementi dell'algebra *complessa* connessa con ω.

Siccome l'algebra *reale* connessa con ω è, questa volta, un'algebra reale primitiva di ordine 4, cioè l'algebra degli ordinari quaternioni, l'algebra complessa in discorso è equivalente all'algebra delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi complessi; dunque, in corrispondenza alle (61), esistono N sostituzioni lineari binarie, le cui matrici indicheremo con

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N, \tag{62}$$

che formano un gruppo isomorfo a quello costituito dalle sostituzioni aventi per matrici le (61), e tali che se μ_j è, fra le (62), la matrice corrispondente alla M_j delle (61), l'equazione minima di μ_j coincide con quella di M_j.

Quest'ultima è irriducibile nel corpo dei numeri razionali (perchè ω è pura), ha per radici radici dell'unità, perchè la sostituzione riemanniana corrispondente ad M_j, facendo parte di un gruppo d'ordine finito, è periodica, ed è del grado 1 o 2 — riuscendo del grado 1, soltanto se M_j coincide con la matrice identica (d'ordine $2p$) o con l'opposta —; dunque essa non può essere che una delle seguenti cinque equazioni:

$$\xi \pm 1 = 0; \tag{63}$$

$$\xi^2 + 1 = 0; \tag{64}$$

$$\xi^2 \pm \xi + 1 = 0. \tag{65}$$

Ciò significa che μ_j o è la matrice identica del 2^0 ordine, o è la sua opposta, o è una matrice avente per equazione caratteristica la (64) o una delle (65).

In ogni caso μ_j risulta a determinante 1, e le sostituzioni con le matrici (62) formano un gruppo di sostituzioni lineari binarie a determinante 1, in cui, come risulta dalle (63), (64) e (65), ogni sostituzione non identica ha il periodo 2, 3, 4 o 6.

Basta tener presenti i diversi tipi di gruppi d'ordine finito di sostituzioni lineari binarie a determinante 1 ([146]) per dedurre allora che il nostro gruppo, o è ciclico e dell'ordine 2, 4 o 6; o è diedrico e dell'ordine 8 o 12; o è tetraedrico e dell'ordine 24.

Si conclude che N è, come volevasi, 2, 4, 6, 8, 12 o 24.

78. I casi per N indicati come possibili dal teorema precedente sono tutti realizzabili; ma la dimostrazione di questo fatto, l'estensione dei teoremi fondamentali sulle curve ellittiche singolari ([147]) alle varietà abeliane non singolari del tipo II), e lo studio approfondito di quelle del tipo III) sono da rimandare a un lavoro ulteriore per non aumentar di troppo la mole di questa Memoria.

Giardini (Taormina), 30 settembre 1919.

([146]) Vedi, per es., F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Teubner, Leipzig, 1884), pag. 36 e seg.

([147]) Cfr. G. SCORZA, *Sulle curve ellittiche singolari* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVII, 1º semestre 1918, pp. 171-175). Occorre appena avvertire che quando, secondo l'uso, si distinguono le curve ellittiche in curve a modulo generale e curve singolari, si adopera la parola «singolare» in senso ben diverso da quello in cui la parola stessa è adoperata quando si dice che «*una varietà abeliana è singolare*», cioè legata a una matrice riemanniana singolare. Secondo quest'ultima nomenclatura *ogni* curva ellittica è una varietà abeliana (di dimensione 1) *non* singolare.