Quelques théorèmes sur les séries orthogonales

par

J. Marcinkiewicz (Wilno)

1. Cette note contient trois parties différentes. Dans la première je démontre certaines propriétés du système orthogonal de Haar. Dans la deuxième partie, je généralise un résultat concernant les séries lacunaires. Dans la dernière partie je donne un théorème général sur l'unicité de séries orthogonales.

2. Posons

$$\varphi_{n-1}(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1}$$

$$\psi_0(x) \equiv 1; \quad \psi_n(x) = \varphi_{n_1} \varphi_{n_2} \varphi_{n_3} \ldots \varphi_{n_\nu} \tag{2.2}$$

où

$$n > 0; \quad n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_\nu}, \quad n_1 > n_2 > n_3 > \ldots n_\nu. \tag{2.3}$$

Désignons encore par $H_{n,m}$ la fonction égale à $\sqrt{2^{n-1}}$ et $-\sqrt{2^{n-1}}$ dans les segments $(2(m-1)2^{-n}, (2m-1)2^{-n})$ et $((2m-1)2^{-n}, 2m2^{-n})$ et égale à zéro en dehors de ces deux intervalles. Les fonctions φ_n, ψ_n et $H_{n,m}$ sont respectivement les fonctions de Rademacher[1]) de Walsh[2]) et de Haar[3]).

Paley a démontré le suivant

Théorème[4]): *Soit*

$$f \in L^r \, (r > 1); \quad f = \sum a_\nu \psi_\nu \tag{2.4}$$

$$\Delta_0 = a_0; \quad \Delta_\nu = \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} a_\mu \psi_\mu, \quad \nu > 0. \tag{2.5}$$

---

[1]) Rademacher 10. [2]) Walsh 12. [3]) Haar 1. [4]) Paley 9.

On a

$$A_r \int_0^1 \{\sum_0^\infty \Delta_\nu^2\}^{r/2} dx \leqslant \int_0^1 |f|^r dx \leqslant B_r \int_0^1 \{\sum_0^\infty \Delta_\nu^2\}^{r/2} dx \tag{2.6}$$

où A_r et B_r sont des constantes positives.

Je vais démontrer un résultat analogue pour le système de Haar. On a le

Théorème 1.[1]) *Soit*

$$f \in L^r \, (r > 1) \tag{2.7}$$

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} a_{n,m} H_{n,m}. \tag{2.8}$$

On a

$$A_r \int_0^1 \{a_0^2 + \sum_{n,m} a_{n,m}^2 H_{n,m}^2\}^{r/2} dx \leqslant \int_0^1 |f|^r dx \leqslant B^r \int_0^1 \{a_0^2 + \sum_{n,m} a_{n,m}^2 H_{n,m}^2\}^{r/2} dx. \tag{2.9}$$

La démonstration est presque immédiate. En effet, posons

$$f = \Sigma \Delta_\nu; \quad \Delta_0 = c_0; \quad \Delta_\nu = \sum_{\mu = 2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} c_\mu \psi_\mu. \tag{2.10}$$

Si l'on développe les fonctions Δ_ν selon le système de Haar on obtient

$$\Delta_n = \sum_{m=1}^{2^{n-1}} a_{n,m} H_{n,m} \tag{2.11}$$

de sorte que

$$\Delta_n^2 = \sum_{m=1}^{2^{n-1}} a_{n,m}^2 H_{n,m}^2. \tag{2.12}$$

Les formules (2.6), (2.10) et (2.12) donnent (2.9).

Théorème 2. *Si la série*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} a_{n,m} H_{n,m}$$

représente une fonction de la classe L^r $(r > 1)$, il en est de même pour la série

$$\lambda_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \lambda_{n,m} a_{n,m} H_{n,m}$$

dès que la suite $\{\lambda_{n,m}\}$ est bornée.

---

[1]) Pour les relations mutuelles entre les théorèmes 1—5 voir Orlicz 1.

Théorème 3. *Désignons par H_ν les fonctions de Haar prises dans un ordre arbitraire. Soient*

$$f = \Sigma a_\nu H_\nu; \quad f \in L^r \, (r > 1). \tag{2.13}$$

La série (2.13) *converge fortement*[1]).

La démonstration de ces deux théorèmes résulte facilement de la formule (2.9). La même formule donne aussi le

Théorème 4. *Soient*

$$\begin{matrix} f \in L^p \, (p > 1); & f = \Sigma a_\nu H_\nu \\ g \in L^q \, (q > 1), & g = \Sigma b_\nu H_\nu \end{matrix} \qquad 1/p + 1/q = 1.$$

La série

$$\Sigma a_\nu b_\nu$$

converge absolument.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.

On a enfin le

Théorème 5. *Il est possible de choisir une suite croissante* $\{n_\nu\}$ *de nombres entiers de sorte que l'on ait*

$$\int_0^1 |S^*|^r dx \leqslant A_r \int_0^1 |f|^r dx \tag{2.14}$$

où

$$S^* = \max \left|\sum_1^{n_\nu} a_\mu H_\mu\right|; \quad f \in L^r; \quad f = \sum_1^\infty a_\nu H_\nu \qquad (r > 1).$$

Es effet, rangeons les fonctions $H_{n,m}$ comme il suit: $H_0, H_{1,1}, H_{2,1}, H_{2,2}, H_{3,1} \ldots$ et désignons les fonctions ainsi obtenues par $\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \ldots$ Choisissons la suite $\{n_\nu\}$ de sorte que le plus petit indice des fonctions $\bar{H}_\nu$ dans le groupe

$$\sum_{n_\nu}^{n_{\nu+1}} a_\mu H_\mu$$

surpasse le plus grand indice des fonctions $\bar{H}_\nu$ dans le groupe

$$\sum_{n_{\nu-2}}^{n_{\nu-1}} a_\mu H_\mu.$$

[1]) Cf. aussi J. Schauder 11.

D'après le théorème 1 on voit que les séries

$$\Sigma \Delta_{2\nu+1}; \quad \Sigma \Delta_{2\nu},$$

où l'on a posé

$$\Delta_\nu = \sum_{\mu=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} a_\mu H_\mu,$$

réprésentent des fonctions de la classe L^r. On a d'une façon évidente

$$\max_\nu |\sum_1^\nu \Delta_{2\mu+1}| \leqslant \max_\nu |S'_\nu|; \quad \max_\nu |\sum_1^\nu \Delta_{2\mu}| \leqslant \max_\nu |S''_\nu|$$

où S'_ν et S''_ν sont les sommes partielles des séries

$$\Sigma c'_\nu \bar{H}_\nu = \Sigma \Delta_{2\nu+1}; \quad \Sigma c''_\nu \bar{H}_\nu = \Sigma \Delta_{2\nu}.$$

On voit que tout revient à démontrer le

Lemme 1. *Soit*

$$f \epsilon L^r; \quad f = \Sigma a_\nu \bar{H}_\nu; \quad S_\nu = \sum_0^\nu a_\nu \bar{H}; \quad S^* = \max_\nu |S_\nu|.$$

On a

$$\int_0^1 |S^*|^r dx \leqslant A_r \int_0^1 |f|^r dx.$$

Ce lemme est sûrement connu, quoiqu'il soit difficile de dire s'il a été formulé explicitement dans la littérature. En tout cas, on peut l'obtenir d'un théorème de M.M. G. Hardy et J. Littlewood[1]) par le même raisonnement dont s'est servi Paley[2]) pour obtenir un résultat analogue relatif au système de Walsh. Je laisse les calculs au lecteur.

3. Dans une note anterieure[3]) j'ai démontré le

Théorème. *Soit donné un système orthogonal et normal dans l'intervalle* (0, 1) *satisfaisant à la condition suivante*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)| dx > 0. \tag{3.1}$$

---

[1]) Hardy et Littlewood 2. [2]) Paley 9, spéc. th. 1, p. 246.

[3]) Marcinkiewicz 3. Pour le théorème réciproque voir Marcinkiewicz 3, 4, 5 et 6.

On peut choisir une suite $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *de sorte que la convergence presque partout de la série*

$$\Sigma a_\nu \varphi_{n_\nu}(x) \tag{3.2}$$

entraîne la relation

$$\Sigma a_\nu^2 < \infty. \tag{3.3}$$

Dans la note présente je vais démontrer un théorème plus fort, à savoir le

Théorème 6. *Dans l'hypothèse* (3.1) *on peut choisir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *de sorte qu'une série quelconque* (3.2) *satisfaisant presque partout à la condition suivante*

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) > -\infty, \quad \text{où} \quad S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_{n_\nu}(x). \tag{3.4}$$

satisfasse aussi à la condition

$$\Sigma a_\nu^2 < \infty \tag{3.5}$$

La démonstration est basée sur deux lemmes.

Lemme 1. *Dans l'hypothèse* (3.1) *il est possible de définir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *extraite de la suite* $\{\varphi_n\}$, *un ensemble* K, *un système orthogonal et normal* $\{\psi_\nu\}$ *et une constante* a *de sorte que l'on ait*

$$|K| > 0, \tag{3.6}$$

$$\sum_k \left| \underset{x}{E}(\psi_k(x) \neq a\varphi_{n_k}(x))(x \in K) \right| < \infty, \tag{3.7}$$

$$\int_0^1 \psi_k \psi_{k'} dx = 0 \quad (k \neq k') \quad \psi_k(x) = 0, \quad x \in CK, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Pour chaque ensemble A, $|AK| > 0$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_A \psi_k^2(x)\, dx > 0. \tag{3.9}$$

On a enfin

$$\int_0^1 \psi_{ik}\psi_{i'k'} dx = \begin{cases} 1 & \textit{pour } (i,k) = (i',k') \\ 0 & \text{«} \quad (i,k) \neq (i',k') \end{cases} \tag{3.10}$$

où l'on a posé

$$\psi_{i,k} = \psi_i \psi_k \qquad (i < k).$$

Ce lemme est connu[1]).

[1]) Marcinkiewicz 3.

Lemme 2. *Les fonctions* $\{\psi_k\}$ *jouissant de propriétés* (3.6), (3.8), (3.9), (3.10), *il est possible de définir deux nombres positifs* ε *et* A *de sorte que l'on ait pour chaque ensemble* E, $|EK|>|K|-\varepsilon$ *et chaque suite* $\{a_\nu\}$

$$\int_E |\sum a_i\psi_i|\,dx \geqslant A\,(\sum a_i^2)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Ce lemme est aussi connu, je l'ai démontré dans un travail commun avec M. A. Zygmund[1]). Ce lemme y est formulé pour les fonctions dites indépendantes, mais la démonstration n'exige que les propriétés énoncées plus haut.

Maintenant il est facile de démontrer le théorème[2]). Supposons qu'une série quelconque

$$\sum a_\nu \varphi_{n_\nu} \tag{3.12}$$

où les fonctions $\{\varphi_{n_\nu}\}$ vérifient les conditions du lemme 1 satisfait à la condition (3.4). On conclut facilement que la série

$$\sum a_\nu \psi_\nu \tag{3.13}$$

satisfait aussi à la même condition. Il en résulte l'existence d'un nombre positif M tel que

$$S_n(x) \geqslant -M; \quad x \in E; \quad |EK| > |K|-\varepsilon; \qquad n=1,2,\ldots \tag{3.14}$$

où $S_n(x)$ désignent les sommes partielles de la série (3.13).

Supposons que

$$\sum a_\nu^2 = \infty. \tag{3.15}$$

D'après (3.11), on obtient

$$\int_E |S_n(x)|\,dx \geqslant A\,(\sum_1^n a_i^2)^{1/2} \tag{3.16}$$

D'autre part, en tenant compte de (3.14), on conclut

$$\int_E |S_n|\,dx \leqslant \int_E |S_n+M|\,dx + \int_E M\,dx = \int_E S_n\,dx + 2M|E| = \sum_1^n a_\nu \xi_\nu + 2M|E|$$

$$\xi_\nu = \int_E \psi_i\,dx.$$

Or, comme

$$\sum \xi_\nu^2 < \infty,$$

---

1) Marcinkiewicz et Zygmund 7, th. 2.

2) Comparer ici Zygmund 13.

on en déduit d'après (3.15)

$$\int_E |S_n|\, dx = o\left(\sum_1^n a_\nu^2\right)^{1/2},$$

ce qui est impossible en vertu de (3.16).

4. La théorie de l'unicité de séries orthogonales n'est développée que pour systèmes tout-à-fait particuliers. Je vais donner ici quelques théorèmes généraux.

Théorème 7. *Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthogonal, normal et complet dans l'intervalle $(0,1)$. Il est possible de construire une série non-nulle*

$$\sum a_\nu \varphi_\nu$$

et une suite $\{n_\nu\}$ de sorte que la suite des sommes partielles

$$S_{n_\nu}(x) = \sum_1^{n_\nu} a_\mu \varphi_\mu(x)$$

converge presque partout vers zéro.

Je vais donner deux démonstrations différentes de ce théorème. La première d'elles est très intuitive, la seconde a l'avantage de pouvoir être appliquée à la démonstration du

Théorème 8. *Supposons que le système $\{\varphi_n\}$ vérifie les conditions du théorème 7 ainsi que la condition suivante*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M; \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Il existe une série non-nulle et à coefficients tendant vers zéro,

$$\sum a_\nu \varphi_\nu$$

et une suite $\{n_\nu\}$ telle que la suite

$$S_{n_\nu}(x) = \sum_1^{n_\nu} a_\mu \varphi_\mu(x)$$

converge presque partout vers zéro.

Lemme 1. *Soient*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

n fonctions orthogonales et normales, ε un nombre positif et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelconques. Il existe une fonction f satisfaisant aux conditions suivantes

$$|\underset{x}{E}(f \neq 0)| < \varepsilon; \quad f \in L^2, \tag{4.1}$$

$$\int_0^1 f \varphi_i \, dx = a_i \qquad i=1, 2, 3, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Posons

$$s \int_{k/s}^{(k+1)/s} \varphi_i \, dx = \varphi_i^{(s)} \quad (k/s \leqslant x < (k+1)/s) \quad k=0, 1 \ldots s-1. \tag{4.3}$$

On a

$$\lim_s \int_0^1 (\varphi_i^{(s)} - \varphi_i)^2 \, dx = 0. \tag{4.4}$$

Il est facile de démontrer que les fonctions $\varphi_i^{(s)}$, $i=1, 2, \ldots, n$ sont linéairement indépendantes dès que s surpasse un certain nombre N. En effet, on conclut facilement de (4.4)

$$\int_0^1 \varphi_i^{(s)} \varphi_k^{(s)} \, dx \to \int_0^1 \varphi_i \varphi_k \, dx,$$

d'où il vient

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \ldots & a_{1,n}^{(s)} \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} & \ldots & a_{2,n}^{(s)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}^{(s)} & a_{n,2}^{(s)} & \ldots & a_{n,n}^{(s)} \end{vmatrix} \to 1,$$

où

$$a_{i,k}^{(s)} = \int_0^1 \varphi_i^{(s)} \varphi_k^{(s)} \, dx,$$

ou bien pour $n > N$

$$\Delta_s \neq 0,$$

ce qui équivaut à l'indépendance linéaire des fonctions $\varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \ldots, \varphi_n^{(s)}$. Il en résulte facilement l'existence d'un déterminant non-nul d'ordre n de la matrice

$$\begin{matrix} \xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \ldots, & \xi_{1,s} \\ \xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \ldots, & \xi_{2,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n,1}, & \xi_{n,2}, & \ldots, & \xi_{n,s} \end{matrix}$$

où l'on à posé

$$\xi_{i,k} = \xi_{i,k}(s) = \varphi_i^{(s)}((2k-1)/2s).$$

Supposons par exemple que

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \ldots, & \xi_{1,n} \\ \xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \ldots, & \xi_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n,1}, & \xi_{n,2}, & \ldots, & \xi_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

et soit $n/s < \varepsilon$.

On peut choisir les nombres $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ de sorte que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu \xi_{i\nu} = s a_i. \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

La fonction f égale à Δ_ν dans le segment $(\nu/s, (\nu+1)/s)$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ et à zéro en dehors de ces intervalles vérifie les relations

$$\int_0^1 f \varphi_i \, dx = a_i, \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Par une application facile de ce lemme, on obtient facilement le

Lemme 2. *Soient f une fonction de carré sommable, $\varepsilon > 0$, n un entier positif. Il existe une expression de la forme*

$$\Phi_{n,N} = \sum_{n+1}^{N} a_i \varphi_i,$$

satisfaisant à la condition suivante

$$\left| \underset{x}{E}(|f - \Phi_{n,N}| > \varepsilon) \right| < \varepsilon.$$

En effet, d'après le lemme 1, on peut modifier la fonction f dans un ensemble de mesure ne surpassant pas $\varepsilon/2$, de sorte que la fonction ainsi obtenue f^* soit orthogonale par rapport aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et de carré sommable. Soit

$$f^* = \sum_{n+1}^{\infty} a_i \varphi_i.$$

En tenant compte du fait bien connu que la suite des sommes partielles d'une série étant le développement d'une fonction de carré sommable, converge en moyenne vers cette fonction dès que le système est complet, on conclut facilement que pour N suffisamment grand, on a

$$|E(|f^*-\sum_{n+1}^{N} a_i\varphi_i|>\varepsilon)|<\varepsilon/2.$$

Or, comme les fonctions f et f^* ne diffèrent que dans un ensemble de mesure $\varepsilon/2$ au plus, on voit facilement que l'expression

$$\Phi_{n,N}=\sum_{n+1}^{N} a_i\varphi_i$$

vérifie toutes les conditions demandées.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème 7. En effet, d'après le lemme 2, on peut choisir une expression

$$\Phi_{n_1,n_2}=\sum_{n_1+1}^{n_2} a_i\varphi_i; \qquad n_1\geqslant 1$$

de sorte que l'on ait

$$|\underset{x}{E}(|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}|>\varepsilon_1)|<\varepsilon_1.$$

De même on peut choisir une expression Φ_{n_2,n_3} de la forme

$$\sum_{n_2+1}^{n_3} a_i\varphi_i$$

de sorte que la somme

$$|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}+\Phi_{n_2,n_3}|$$

surpasse ε_2 dans un ensemble de mesure ε_2 au plus. D'une façon générale, on peut choisir une expression

$$\Phi_{n_k,n_{k+1}}$$

satisfaisant à la condition suivante

$$|\underset{x}{E}(|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}+\ldots+\Phi_{n_k,n_{k+1}}|>\varepsilon_k)|<\varepsilon_k.$$

Si la série à terme général ε_k converge, la série

$$\Sigma\Phi_{n_k,n_{k+1}}$$

converge presque partout vert zéro.

La deuxième méthode de démonstration est basée sur le suivant

Lemme. *Le produit infini*

$$\prod_{\nu} (1 + a_\nu \sin 2\pi n_\nu x) \tag{4.5}$$

converge presque partout vers zéro dès que

$$a_\nu \to 0; \quad \sum a_\nu^2 = \infty; \quad n_\nu / n_{\nu+1} > 3. \tag{4.6}$$

Ce lemme est dû à M. A. Zygmund[1]).

Pour en tirer le théorème 7, supposons $n_1, n_2, \ldots, n_k$ définis et posons

$$P_k = \prod_{1}^{k} (1 + c_i \sin 2\pi n_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \; c_i > 0.$$

Soit m_k un nombre choisi de sorte que l'on ait

$$\left| \underset{x}{E}\left(\left| \sum_{m}^{\infty} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right| > \varepsilon_k \right) \right| < \varepsilon_k; \qquad m \geqslant m_k.$$

Soit $n_{k+1} > m_k$ suffisament grand pour que l'on ait

$$|b_i^{(k)}| \leqslant 2^{-(k+1)} m_k^{-1}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m_k$$

où

$$c_{k+1} \sin 2\pi n_{k+1} x \, P_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(k)} \varphi_i(x)$$

Il est évident que les suites $\{a_i^{(k)}\}$ $i = 1, 2, \ldots$ convergent. Je vais démontrer que la série

$$\sum_i a_i \varphi_i$$

où

$$a_i = \lim_k a_i^{(k)} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

vérifie les conditions du théorème. Dans ce but, il suffit de prouver que presque partout

$$\sum_{1}^{m_k} a_i \varphi_i - P_k \to 0.$$

---

[1]) Zygmund 13.

Or on a

$$\sum_{1}^{m_k} a_i\varphi_i - P_k = \sum_{1}^{m_k}(a_i - a_i^{(k)})\varphi_i - \sum_{m_k+1}^{\infty} a_i^{(k)}\varphi_i = A_k + B^k,$$

$$|\underset{x}{E}(|B_k| > \varepsilon_k)| < \varepsilon_k,$$

$$|a_i - a_i^{(k)}| \leqslant \sum_{s=k}^{\infty} |a_i^{(s)} - a_i^{(s+1)}| \leqslant 2^{-k} m_k^{-1}.$$

On peut en déduire le résultat demandé dès que

$$\sum_{\nu} \varepsilon_\nu < \infty.$$

Supposons maintenant

$$|\varphi_k(x)| \leqslant M; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Les formules

$$P_k \geqslant 0; \qquad \int_0^1 P_k(x)\,dx = 1$$

donnent d'une façon immédiate

$$|a_s^{(k)}| \leqslant M; \quad a_s = O(1).$$

Pour obtenir le résultat plus precis $a_s = o(1)$, on peut raisonner comme il suit.

On a

$$P_k = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i$$

où

$$\Phi_i = c_i \sin 2\pi\, n_i x\, P_{i-1}.$$

Supposons $n_\nu \leqslant s < n_{\nu+1}$, $k > \nu + 1$.

On a

$$a_s^{(k)} = \sum_{1}^{k} \int_0^1 \Phi_i \varphi_s\,dx = \sum_{i=1}^{\nu-1} \int_0^1 + \int_0^1 \Phi_\nu \varphi_s\,dx + \int_0^1 \Phi_{\nu+1}\varphi_s\,dx + \sum_{\nu+2}^{k} \int =$$

$$= A_k + B_k + C_k + D_k$$

$$|B_k| \leqslant c_\nu \cdot M; \quad |C_k| \leqslant c_{\nu+1} M; \quad |D_k| \leqslant 2^{-\nu}.$$

D'autre part, $n_{\nu-1}$ étant établi, on peut choisir n_ν de sorte que l'on ait pour $s > n_\nu$, $|A| < 2^{-\nu}$. Il s'ensuit

$$|a_s^{(k)}| \leqslant M|c_\nu| + M|c_{\nu+1}| + 2^{-(\nu-1)},$$
$$|a_s| \leqslant M|c_\nu| + M|c_{\nu+1}| + 2^{-(\nu-1)},$$

ce qui donne $a_s = o(1)$.

Travaux cités

1. A. Haar. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. Math. Ann. 69 (1910) p. 331—371.

2. G. Hardy et J. Littlewood. *A maximal theorem with function-theoretic applications*. Acta Math. 54 (1930) p. 81—116.

3. J. Marcinkiewicz. *Sur les séries orthogonales lacunaires*. Apparaîtra dans le t. 7 de Stud. Math.

4. J. Marcinkiewicz. *Sur la convergence des séries orthogonales*, Stud. Math. 6 (1936), p. 39—45.

5. J. Marcinkiewicz. *Sur la sommabilité des séries orthogonales* (en polonais). Wiadomości Matematyczne 44 (1937), p. 5—16.

6. J. Marcinkiewicz. *Sur les suites d'opérations linéaires*. Stud. Math. 7 (1937).

7. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund. *Sur les fonctions indépendantes*. Fund. Math. 29 (1937), p. 60—90.

8. W. Orlicz. *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen* (I), (II). Stud. Math. 4 (1933), p. 33—37 et 41—47.

9. R. Paley. *A remarkable series of orthogonal functions I*. Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), 241—264.

10. H. Rademacher. *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen orthogonalfunctionen*. Math. Ann. 87 (1922), 112—138.

11. J. Schauder. *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*. Math. Zeitschrift 28 (1928), 315—329.

12. J. Walsh. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. Math. Ann. 69 (1910), p. 331—371.

13. A. Zygmund. *On lacunary trigonometric series*. Trans. Americ. Math. Soc. 34_3 (1932), p. 435—446.