ALCUNE QUESTIONI DI GEOMETRIA SOPRA UNA VARIETÀ ABELIANA QUALUNQUE(*)

Basta considerare la teoria delle corrispondenze algebriche situate sopra una curva algebrica dal punto di vista trascendente, per accorgersi subito che essa può essere estesa nelle sue linee generali alle varietà abeliane.

È appunto tale estensione l'oggetto dei primi due paragrafi di questa Nota; dai quali risulta che mentre in taluni casi ai teoremi per le curve rispondono per le varietà abeliane teoremi perfettamente analoghi, in altri fra i teoremi delle due teorie non vi è alcuna analogia.

La ragione intima delle simiglianze e delle differenze che intercedono tra le curve algebriche e le varietà abeliane, per quanto ha tratto alla teoria delle corrispondenze algebriche situate su di esse, è da ravvisare nel seguente fatto.

Il SEVERI dimostrò nel 1905, per via trascendente (1), che:

Se una serie algebrica ∞^1 *irriducibile di gruppi di punti situata sopra una curva algebrica irriducibile è tale che risultino equivalenti i gruppi di cui ciascuno è somma dei gruppi della serie passanti per un punto della curva, addirittura i gruppi della serie sono fra loro equivalenti;*

poi, nel 1906, valendosi di un notevole teorema geometrico di CASTELNUOVO, osservò (2), che nell'enunciato di questa sua propo-

(*) Atti Accad. Gioenia di Catania, (5) 11 (1918), n. 20.

(1) SEVERI, *Il teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie 3a, t. XII, pp. 55-79), n⁰ 1.

(2) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXV, Parte seconda, pp. 625-643), n⁰ 10.

sizione l'ipotesi della irriducibilità della serie poteva essere lasciata cadere.

Ebbene, imitando passo per passo il ragionamento trascendente di SEVERI si arriva facilmente a stabilire che:

Se una serie algebrica ∞^p *irriducibile di gruppi di punti situata sopra una varietà abeliana della dimensione* p *è tale che risultino appartenenti a una stessa* g_n^{n-1} *di* CASTELNUOVO (3) *i gruppi di cui ciascuno è somma dei gruppi della serie passanti per un punto della varietà, addirittura i gruppi della serie appartengono a una stessa* g_m^{m-1} *di* CASTELNUOVO;

ma qui non è più possibile sopprimere la condizione dell'irriducibilità della serie senza infirmare l'esattezza del teorema.

Infatti se il teorema valesse senza restrizioni si troverebbe facilmente che sopra una varietà abeliana l'inversa di una trasformazione a valenza zero (vedi più avanti il n^0 4) sarebbe anch'essa, se ad indice finito, a valenza zero, *anche se la trasformazione data fosse riducibile,* cioè spezzabile nella somma di più trasformazioni algebriche; e allora, con tutta facilità, si potrebbe dimostrare valida in generale la parte *b*) del teorema che qui al n^0 11 viene dimostrata per le sole trasformazioni univoche.

E tale validità generale di quella proposizione è evidentemente impossibile, perchè la relazione che intercede fra due trasformazioni di cui l'una sia l'inversa dell'altra è simmetrica, mentre non è simmetrica la relazione che passa tra una matrice quadrata e la trasposta della matrice aggiunta.

L'ultimo paragrafo di questa Nota risolve un problema sulle varietà abeliane impure che si presenta con grande frequenza a chiunque si occupi di geometria sopra una tale varietà.

Come è detto a suo luogo il problema in discorso può esser risoluto in due maniere differenti. Qui delle due vie se ne espone soltanto una; l'esposizione dell'altra viene rimandata a un lavoro ulteriore che ne indicherà applicazioni eleganti alla teoria delle superficie iperellittiche con infiniti fasci ellittici di curve ellittiche.

(3) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5a, vol. XIV, pp. 545-556, 593-598, 655-663), p. 556.

I.

LE TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE (4) SITUATE SOPRA UNA VARIETÀ ABELIANA

1. Sia V una varietà abeliana (5) della dimensione p e T una trasformazione algebrica di indice α situata su di essa.

Sia inoltre

$$\omega \equiv \| \omega_{j.r} \| \qquad (j=1,\dots,p\,;\ r=1,\dots,2p)$$

la matrice riemanniana cui appartiene V, e siano $u_1, u_2, \dots, u_p$ le variabili indipendenti delle funzioni abeliane che appartengono alla matrice ω e forniscono una rappresentazione parametrica di V.

Se per T al punto $P \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ di V corrispondono gli α punti

$$P^{(\mu)} \equiv \left(u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \dots, u_p^{(\mu)}\right) \qquad (\mu = 1, \dots, \alpha),$$

per un ragionamento ben noto (6) sarà, rispetto ad ω come modulo (7),

$$(1) \qquad \sum_{\mu}^{1..\alpha} u_j^{(\mu)} \equiv \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l + \gamma_j \qquad (j=1,\dots,p),$$

(4) Intendiamo per «trasformazioni algebriche», senz'altro, le trasformazioni algebriche *ad indice finito*, poichè di queste sole ci occupiamo nel presente lavoro. Però dalle nostre considerazioni non si intendono escluse le trasformazioni algebriche che pure essendo ad indice finito hanno per inverse delle trasformazioni algebriche ad indice infinito.

(5) Per la definizione di varietà abeliana che qui si intende adottata v. G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di* RIEMANN *e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916, 2° semestre), pp. 263-380], nota (13) a piè della pagina 269 e pag. 330-331.

(6) Cfr. A. HURWITZ, *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinert Correspondenzprincip* (Mathematische Annalen, Bd. 28 (1886), pp. 561-585), pag. 563.

(7) Due gruppi di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ li diciamo *congrui* rispetto a ω come *modulo* e scriviamo

$$\alpha_j \equiv \beta_j \qquad (j=1,2,\dots,p\,;\ \mathrm{mod}\ \omega)$$

quando si ha

$$\alpha_j - \beta_j = \sum_{r}^{1..2p} \varkappa_r\, \omega_{j,r} \qquad (j=1,2,\dots,p)$$

con le $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{2p}$ intere (relative).

dove le $\lambda_{j,l}$ e le γ_j sono delle costanti, e inoltre le $\lambda_{j,l}$ sono tali che esistono degli interi (relativi) $a_{r,s}$ per modo che si abbia

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a_{r,s}\, \omega_{j,s} \quad (j=1,\dots,p;\ r=1,\dots,2p). \tag{2}$$

Data T, il gruppo delle costanti $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ è individuato solo rispetto ad ω come modulo, ma invece le costanti $\lambda_{j,l}$ sono assolutamente individuate. E allora, come è noto [8], in virtù delle (2), anche gli interi $a_{r,s}$ sono univocamente determinati.

In base alle 2), la sostituzione

$$x_r \mid a_{r,1}\, x_s + \dots + a_{r,2p}\, x_{2p} \qquad (r = 1, \dots, 2p) \tag{3}$$

è una sostituzione riemanniana (della matrice ω, o come anche diremo) di V [9]; essa si dirà la sostituzione riemanniana di V *legata* a T.

2. Assegnata comunque una sostituzione riemanniana di V esisteranno su V trasformazioni algebriche legate ad essa?

Sia la (3) una qualunque sostituzione riemanniana di V e si considerino i numeri $\lambda_{j,l}$ determinati in modo univoco dai coefficienti della (3) mediante le (2).

Poi si faccia corrispondere al punto $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ di V il punto $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ per cui si ha

$$u'_j = \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l + \gamma_j \qquad (j = 1, \dots, p), \tag{4}$$

le γ_j essendo delle costanti arbitrariamente fissate.

Dico che per tal modo resta costruita su V una trasformazione univoca, algebrica, legata alla sostituzione (3) e che quindi la risposta alla domanda fatta più sopra è affermativa.

[8] Cfr. SEVERI, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, Bd. 74 (1913), pp. 515-544], p. 518.

[9] Cfr. loc. cit., [5] Parte I, n° 20. Veramente, data V, ω è individuata solo di fronte alla relazione di *equivalenza*, quindi le sostituzioni riemanniane di V secondo la dicitura adottata nel testo sono individuate solo di fronte al gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi su $2p$ variabili indipendenti; ma ciò non dà luogo, per i nostri scopi, ad alcun inconveniente.

Infatti, per dimostrare l'univocità e l'algebricità della trasformazione che sole hanno bisogno di essere giustificate, suppongasi, com'è lecito, che lo spazio cui appartiene V sia un S_{p+1} e, dette $X_1, \dots, X_{p+1}$ le coordinate del punto $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ scorrente su V, siano le

$$X_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_p) \qquad (i = 1, \dots, p+1)$$

le equazioni che dànno la rappresentazione parametrica di V mediante funzioni abeliane appartenenti alla matrice ω.

Le coordinate X'_j del punto $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ definito dalle (4), per l'ipotesi fatta sui numeri λ_{jl}, risultano funzioni abeliane di $u_1, u_2, \dots, u_p$ con $2p$ sistemi di periodi nei $2p$ sistemi di numeri forniti dalle colonne di ω; quindi, per un teorema classico di WEIERSTRASS (10), ciascuna delle X'_i è una funzione razionale delle f_i, cioè delle X_i.

3. Raccogliendo le osservazioni fatte nei n^i 1 e 2 abbiamo il seguente teorema:

Ad ogni trasformazione algebrica appartenente a V è legata una sostituzione riemanniana di V; ma a ciascuna sostituzione sì fatta sono legate infinite trasformazioni algebriche situate su V.

In altri termini:

Le trasformazioni algebriche di una varietà abeliana possono essere distribuite in infinite classi contenenti ciascuna infinite trasformazioni, corrispondentemente alle infinite sostituzioni riemanniane della varietà. Ciascuna classe è l'insieme delle trasformazioni algebriche legate a una stessa sostituzione riemanniana e può dirsi la classe legata a tale sostituzione.

4. La sostituzione

$$(5) \qquad x_r \mid \lambda x_r \qquad (r = 1, \dots, 2p;\ \lambda \text{ intero relativo qualunque})$$

comparisce sempre fra le sostituzioni riemanniane di V.

Le trasformazioni legate ad essa si diranno le *trasformazioni a valenza* $-\lambda$ (11).

(10) Vedi, per es., KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, Leipzig, 1903), pag. 117.

(11) In accordo con quanto è detto nella nota (9) si osservi, a giustificazione di questa definizione, che la sostituzione (5) è trasformata in sè da ogni sostituzione del gruppo ivi considerato, anzi da ogni sostituzione lineare omogenea propria sulle stesse variabili. Del resto veggasi quello che vien detto nel testo poco più sotto.

Se l'indice di moltiplicabilità (di ω, cioè) di V è nullo ([12]), le sostituzioni riemanniane di V sono tutte del tipo (5), e viceversa; dunque:

Le trasformazioni a valenza esauriscono tutte le possibili trasformazioni algebriche situate sopra una varietà abeliana quando, e solo quando, questa è ad indice di moltiplicabilità nullo.

Volendo, sarebbe facile assegnare delle trasformazioni a valenza situate sopra una varietà abeliana una definizione geometrica analoga a quella delle trasformazioni a valenza situate sopra una curva algebrica ([13]).

Come nell'una si fa ricorso alla nozione di serie lineare sopra una curva, così nell'altra basterebbe far ricorso alle g_n^{n-1} di una varietà abeliana definite dal CASTELNUOVO ([14]).

5. La classe delle trasformazioni a valenza zero, legata alla sostituzione nulla, si dirà la classe *nulla*.

Due classi legate a sostituzioni riemanniane opposte, S e $-S$, si diranno *opposte*; e se l'una si indica con C, l'altra si indicherà con $-C$.

La classe legata alla sostituzione riemanniana $S_1 + S_2$, somma delle due sostituzioni riemanniane S_1 ed S_2, si dirà *somma* delle classi C_1 e C_2 legate alle sostituzioni S_1 ed S_2 e si indicherà con $C_1 + C_2$; e la classe $C_1 - C_2$, *differenza* delle classi C_1 e C_2 sarà la somma di C_1 e $-C_2$.

Dopo ciò apparisce senz'altro che cosa sarà la classe multipla secondo un intero (relativo) α di una classe assegnata; e più in generale che cosa sarà la classe combinazione lineare (omogenea) delle classi $C_1, C_2, \ldots, C_m$ secondo gli interi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ che si indicherà con

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_m C_m .$$

([12]) Per la definizione dell'indice di moltiplicabilità di V, cioè di ω, v. loc. cit. ([5]), Parte I, n° 20.

([13]) La nozione di *valenza* per una corrispondenza algebrica sopra una curva algebrica è stata estesa recentemente dal ROSATI [*Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1917), pp. 5-22)] così, che, nel senso da lui stabilito, ogni tale corrispondenza è dotata di una o più valenze; ma è evidente che nel testo quella nozione viene adoperata nel senso più ristretto fissato dallo HURWITZ.

([14]) Loc. cit. ([3]).

Per le classi di trasformazioni conviene introdurre anche la nozione di prodotto definendo però, in vista di quanto sarà osservato tra poco, come *prodotto* $C_1 C_2$ delle classi C_1 e C_2, legate alle sostituzioni S_1 ed S_2, la classe legata alla sostituzione prodotto di queste *schierate in ordine inverso,* cioè alla sostituzione $S_2 S_1$.

6. L'utilità delle definizioni ora poste, manifesta per sè, viene messa in rilievo dalle seguenti osservazioni che si giustificano subito:

a) *La trasformazione somma di due trasformazioni appartenenti alle classi* C_1 *e* C_2 *appartiene alla classe* $C_1 + C_2$ (15);

quindi, in particolare:

b) *La trasformazione somma di due trasformazioni appartenenti a classi opposte è una trasformazione a valenza zero;*

e:

c) *La trasformazione somma di due trasformazioni a valenza, con le valenze* γ' *e* γ'', *è a valenza, e con la valenza* $\gamma' + \gamma''$;

d) *La trasformazione prodotto di due trasformazioni appartenenti alle classi* C_1 *e* C_2 *appartiene alla classe* $C_1 C_2$ (16);

da cui si trae in particolare che:

e) *La trasformazione prodotto di due trasformazioni a valenza con le valenze* γ' *e* γ'', *è a valenza, e con la valenza* $-\gamma' \gamma''$.

7. Più classi di trasformazioni si diranno *indipendenti* se non esiste una loro combinazione lineare, secondo interi non tutti nulli, che coincida con la classe nulla; *dipendenti* nel caso contrario.

Se le classi $C_1, C_2, \dots, C_\varrho$, sono indipendenti e sono tali che, detta C una qualsiasi classe di trasformazioni di V, si possano determinare degli interi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ sì che sia $\alpha \neq 0$ e

$$\alpha C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_\varrho C_\varrho \tag{6}$$

si dirà che le classi $C_1, \dots, C_\varrho$ costituiscono una *base* per le classi di trasformazioni di V.

(15) A questa proposizione potrebbe darsi forma più generale introducendo anche qui la nozione di trasformazione *virtuale*, parallelamente a quanto si usa nel caso delle curve; ma la considerazione delle *classi* di trasformazioni anzi che delle trasformazioni singole rende inutile, per gli scopi del testo, l'introduzione di enti virtuali.

(16) Per la dimostrazione di questo teorema cfr. loc. cit. (5), Parte II, n° 4.

Tale base si dirà poi *minima* se le $C_1, \dots, C_\varrho$ sono tali che nella (6) si può far risultare $\alpha = 1$ qualunque sia C; nel qual caso è chiaro che i coefficienti α_i della (6) sono poi individuati appena sia data C.

L'esistenza di basi e di basi minime per le classi di trasformazioni di V apparisce subito quando si pensi che per le sostituzioni riemanniane di V esistono infinite basi e infinite basi minime ([17]).

Il numero ϱ delle classi di trasformazioni di V costituenti una base o una base minima è il massimo numero di classi indipendenti, e si dirà il *numero-base* di V.

È chiaro che:

Il numero-base di una varietà abeliana eguaglia il suo indice di moltiplicabilità aumentato di 1 ([18]).

Esso è pertanto eguale ad 1 quando, e solo quando, le trasformazioni algebriche della varietà sono tutte a valenza.

8. Una trasformazione algebrica di V (o la classe a cui essa appartiene) si dirà *speciale* se è legata ad una sostituzione riemanniana di V non nulla ma a modulo nullo ([19]).

Ora V ammette sostituzioni riemanniane sì fatte quando, e solo quando, è impura, ossia è tale la matrice ω a cui appartiene, ([20]) dunque:

Una varietà abeliana ammette classi speciali di trasformazioni quando, e solo quando, è impura.

([17]) Loc. cit. ([5]), Parte I, n⁰ 20.

([18]) Questa proposizione assegna un significato geometrico notevole dell'indice di moltiplicabilità di una varietà abeliana. Avvertasi a questo proposito che le considerazioni del testo possono essere estese alle trasformazioni algebriche (con indice finito) di una varietà abeliana in un'altra. Ciò porta, in particolare, a introdurre un *numero-base* per le trasformazioni algebriche tra due varietà abeliane e a riconoscere che esso coincide col *carattere simultaneo* (v. loc. cit. ([5]), Parte I, n⁰ 3) delle matrici riemanniane a cui appartengono le due varietà.

Notisi che il numero-base qui accennato, a differenza di quello di cui si parla nel testo, può essere anche nullo. È tale quando le due varietà, cui si riferisce, (cioè le corrispondenti matrici riemanniane) *non sono vincolate*.

([19]) Per le curve algebriche le corrispondenze *speciali* sono state considerate per la prima volta dal ROSATI. V. la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere 2* [Annali di Matematica, serie 3ª, vol. XXV, pp. 1-32], § 2.

([20]) Loc. cit. ([5]), Parte I, n⁰ 32.

§ 2.

Le trasformazioni algebriche univoche situate sopra una varietà abeliana

9. Le trasformazioni della classe legata alla sostituzione riemanniana (3) di V che riescono univoche, se le $\lambda_{j,l}$ sono i numeri determinati mediante le (2) dai coefficienti della (3), sono tutte e sole quelle rappresentate dalle equazioni (4) o, ciò che fa lo stesso, dalle congruenze (mod ω)

$$u'_j \equiv \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l} u_l + \gamma_j \qquad (j = 1, \dots, p), \tag{7}$$

al variare delle costanti γ_j.

Di qua segue che:

In ciascuna classe di trasformazioni di V esistono infinite trasformazioni univoche. Una di esse è individuata quando sia assegnato il punto in cui deve portare un punto determinato di V, e quindi esse costituiscono una schiera continua ∞^p che può considerarsi come una varietà abeliana birazionalmente identica a V.

In particolare le schiere ∞^p di trasformazioni univoche di V, contenute nelle classi delle trasformazioni a valenza $+1$ o -1, sono le due schiere di trasformazioni birazionali di V in sè stessa della prima o della seconda specie.

10. Per approfondire lo studio delle trasformazioni algebriche univoche situate su V giova premettere la deduzione dalle (2) di alcune notevoli identità.

Indichiamo con A e Λ i determinanti $|a_{r,s}|$ e $|\lambda_{j,l}|$, e con $A_{r,s}$ e $\Lambda_{j,l}$ gli aggiunti di $a_{r,s}$ e $\lambda_{j,l}$ nei determinanti stessi.

Moltiplichiamo la (2), membro a membro, per $A_{r,t}$ e sommiamo rispetto ad r. Otteniamo:

$$\sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t} \lambda_{j,l} \omega_{l,r} = \sum_{r,s}^{1..2p} A_{r,t} a_{r,s} \omega_{j,s};$$

ma è

$$\sum_{r,s}^{1..2p} A_{r,t} a_{r,s} \omega_{j,s} = \sum_{s}^{1..2p} \omega_{j,s} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t} a_{r,s} = A\omega_{j,t},$$

dunque:

$$A\omega_{j,t} = \sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t} \lambda_{j,l} \omega_{l,r}. \tag{8}$$

Adesso moltiplichiamo la (8), membro a membro, per $\Lambda_{j,k}$ e sommiamo rispetto a j.

Risulterà

$$A \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} = \sum_{j,l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} ;$$

ma

$$\sum_{j,l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{l,r} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l} = \Lambda \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{k,r} ,$$

dunque è infine:

$$A \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} = \Lambda \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{k,r} . \tag{9}$$

11. Adesso consideriamo sulla nostra varietà una trasformazione algebrica univoca T legata alla sostituzione riemanniana (3) e siano le (7) le congruenze che la rappresentano analiticamente.

Se la sostituzione (3) *è propria* (ossia è $A \neq 0$ e quindi $A > 0$) [21], *l'inversa di T è una trasformazione (algebrica)*

a) *ad indice finito ed eguale ad A* [22],

b) *legata alla sostituzione trasposta dell'aggiunta della* (3).

Dim. di a). Supponiamo assegnati nella (7) i valori delle u'_j e facciamo vedere che A è il numero delle soluzioni $(u_1, u_2, \dots, u_p)$, che esse ammettono, incongrue rispetto ad ω.

Le (7) possono scriversi, indicando con le $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ delle indeterminate intere,

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l = u'_j - \gamma_j + \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t} \qquad (j = 1, \dots, p)$$

e queste, siccome $A \neq 0$ e quindi anche $\Lambda \neq 0$ [23], equivalgono alle equazioni

$$u_k = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k} (u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} \qquad (k = 1, \dots, p),$$

[21] Cfr., loc. cit. [5], Parte I, n° 22.

[22] Per il caso $p = 2$ questa parte del teorema fu già dimostrata dallo HUMBERT; e il ragionamento dello HUMBERT, diverso da quello del testo, si estende subito al caso di $p > 2$.

[23] Veggasi al loc. cit. [5], Parte I, n° 22 l'identità (11) o, più generalmente, l'identità (10).

cioè, per le (9), alle equazioni

$$(10) \qquad u_k = \frac{1}{A}\sum_j^{1..p} A_{j,k}(u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{A}\sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}\, x_t\, \omega_{k,r} \qquad (k = 1, \dots, p).$$

Si tratta di far vedere che, facendo variare comunque nelle (10) gli interi x_t, fra i sistemi di valori che si ottengono per le u_k quelli incongrui rispetto al modulo ω sono precisamente in numero di A.

Perchè due sistemi di interi per le x_t, x'_t e x''_t, diano luogo per le u_k, mediante le (10), a sistemi di valori congrui rispetto ad ω, occorre e basta che esistano degli interi $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$ per cui si abbia

$$\frac{1}{A}\sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}(x'_t - x''_t)\,\omega_{k,r} = \sum_r^{1..2p} a_r\,\omega_{k,r} \qquad (k = 1, \dots, p),$$

ossia

$$\frac{1}{A}\sum_t^{1..2p} A_{r,t}(x'_t - x''_t) = a_r \qquad (r = 1, \dots, 2p);$$

quindi occorre e basta che sia, rispetto al modulo A,

$$(11) \qquad \sum_t^{1..2p} A_{r,t}(x'_t - x''_t) \equiv 0 \qquad (r = 1, \dots, 2p).$$

Ora, per il nostro scopo, nelle (10) ciascuno degli interi x_t può esser calcolato rispetto al modulo A, e le soluzioni, incongrue rispetto ad A, delle congruenze (11) nelle $2p$ incognite $(x'_t - x''_t)$ sono in numero di A^{2p-1} [24], dunque i sistemi di valori per le u_k, incongrui rispetto a ω forniti dalle (10) al variare degli interi x_t, sono appunto

$$\frac{A^{2p}}{A^{2p-1}} = A.$$

Dim. di b). Stabilito che l'indice dell'inversa di T è A, diciamo $P_\mu \equiv (u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \dots, u_p^{(\mu)})$ $(\mu = 1, \dots, A)$ i punti trasformati in T^{-1} del punto $P' \equiv (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ e il valore di $u_k^{(\mu)}$ sia quello che si ottiene dalle (10) ponendovi $x_t = x_t^{(\mu)}$.

[24] Vedi, per es., loc. cit. [10], pag. 59.

Sarà

$$\sum_{\mu}^{1..A} u_k^{(\mu)} = \frac{A}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k} (u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mu}^{1..A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}\, x_t^{(\mu)}\, \omega_{k,r} \qquad (k = 1, \dots, p),$$

ossia, posto

$$\gamma'_k = -\frac{A}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \gamma_j + \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mu}^{1..A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}\, x_t^{(\mu)}\, \omega_{k,r}$$

e

$$\lambda'_{k,j} = \frac{A}{\Lambda} \Lambda_{j,k}\,, \tag{12}$$

sarà :

$$\sum_{\mu}^{1..A} u_k^{(\mu)} = \sum_{j}^{1..p} \lambda'_{k,j}\, u'_j + \gamma'_k \qquad (k = 1, \dots, p);$$

dove, occorre appena avvertirlo, sono indipendenti dalle u'_j, non solo le $\lambda'_{k,j}$ ma anche le γ'_k, perchè gli A sistemi di interi $x_t^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \dots, A)$ sono indipendenti dalle u'_j.

Sia ora

$$x_r \mid a'_{r,1}\, x_1 + \dots + a'_{r,2p}\, x_{2p} \qquad (r = 1, \dots, 2p)$$

la sostituzione riemanniana legata a T^{-1}.

Sarà

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda'_{k,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a'_{r,s}\, \omega_{k,s} \quad (k = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p),$$

cioè, per le (12),

$$\frac{A}{\Lambda} \sum_{l}^{1..p} \Lambda_{l,k}\, \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a'_{r,s}\, \omega_{k,s} \quad (k = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p).$$

Ma, per le (9),

$$\frac{A}{\Lambda} \sum_{l}^{1..p} \Lambda_{l,k}\, \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} A_{s,r}\, \omega_{k,s}\,,$$

dunque infine

$$\sum_{s} A_{s,r}\, \omega_{k,s} = \sum_{s} a'_{r,s}\, \omega_{k,s} \quad (k = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p);$$

cioè, come volevasi, per $r, s = 1, \dots, 2p$,

$$a'_{r,s} = A_{s,r}\,.$$

12. Il teorema or ora stabilito è completato da quest'altro:

Se la sostituzione (3) *è impropria* (ossia è $A = 0$), *l'inversa di T è ad indice infinito.*

E infatti, se è $A = 0$, è pure $\Lambda = 0$, quindi le p forme lineari nelle u_j

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l \qquad (j = 1, \dots, p)$$

non sono indipendenti.

Ma allora, riguardando T come rappresentata dalle equazioni (4), si ha che, qualunque siano le u_j, le u'_j soddisfanno ad una (almeno) relazione lineare a coefficienti costanti. Ciò significa che il luogo dei trasformati mediante T dei punti di V è una varietà (contenuta in V) di dimensione inferiore a quella di V, e che quindi l'inversa di T non può essere una trasformazione ad indice finito.

Avremo occasione altrove di caratterizzare in modo più preciso l'inversa di T nell'ipotesi che sia $A = 0$.

Qui basti accennare che quando è $A = 0$ e la caratteristica (necessariamente pari) [25] del determinante A è $2q$ $(0 \leq q < p)$, il luogo dei trasformati mediante T di tutti i punti di V è una varietà abeliana della dimensione q, e i punti di V rispondenti in T^{-1} a un punto di quest'ultima varietà riempiono una varietà abeliana della dimensione $p - q$ variabile in una totalità, sempre abeliana, della dimensione q.

Nel caso estremo in cui sia $q = 0$ tutti i punti di V hanno per trasformato in T un medesimo punto.

13. Dalle proposizioni dei numeri 11 e 12 si raccoglie che:

Una trasformazione algebrica univoca situata sopra una varietà abeliana è dotata di inversa con indice finito quando e solo quando la classe a cui appartiene è non nulla e non speciale.

14. Torniamo a considerare la trasformazione T del n° 11, supponendo ancora $A \neq 0$. Allora T dà luogo su V a una corrispondenza $(A, 1)$.

Ebbene *se il numero delle coincidenze di questa corrispondenza è finito, esso è dato dal determinante*

$$| a_{r,s} - \delta_{r,s} |$$

dove è $\delta_{r,s} = 1$ o $\delta_{r,s} = 0$ secondo che è $r = s$ o $r \neq s$.

[25] Loc. cit. [5], Parte I, n° 14.

Perchè il punto $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ sia un punto unito per la nostra corrispondenza occorre e basta che sia, indicando con le $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ dei convenienti interi,

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l} u_l = u_j - \gamma_j + \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t}\,;$$

ossia, col significato del simbolo $\delta_{j,l}$ or ora stabilito:

$$(13) \quad \sum_{l}^{1..p} (\lambda_{j,l} - \delta_{j,l}) u_l = -\gamma_j + \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t}\,.$$

Ora supponiamo che il determinante $|a_{r,s} - \delta_{r,s}|$ sia diverso da zero. Allora è tale anche il determinante $|\lambda_{j,l} - \delta_{j,l}|$, perchè quello non è che la *norma* di questo ([26]); quindi, per un ragionamento analogo a quello sviluppato nel n. 11, il numero delle soluzioni $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ delle (13), incongrue rispetto ad ω, è finito ed è eguale al valore di $|a_{r,s} - \delta_{r,s}|$.

Supponiamo invece che dei nostri due determinanti uno, e quindi anche l'altro, sia nullo. Allora le (13) o sono incompatibili o sono linearmente dipendenti. Nella prima ipotesi il numero delle coincidenze della corrispondenza considerata è nullo; nella seconda è infinito: dunque sta sempre che, quando il numero delle coincidenze è finito, esso è dato dal determinante $|a_{r,s} - \delta_{r,s}|$.

Notisi che *codesto numero può essere infinito solo quando sia*

$$|a_{r,s} - \delta_{r,s}| = 0,$$

cioè quando l'equazione caratteristica della sostituzione riemanniana a cui è legata la trasformazione T ammetta la radice 1.

Ora la presenza di questa radice, se la sua molteplicità (necessariamente pari) è inferiore a $2p$, indica che la matrice ω è impura ([27]); d'altronde se ω è pura e l'equazione caratteristica di una sua sostituzione riemanniana ammette la radice 1 con la molteplicità $2p$, questa sostituzione è necessariamente la sostituzione identica ([28]), e quindi una trasformazione univoca legata a tale sostitu-

([26]) Loc. cit. ([23]).

([27]) Loc. cit. ([5]) Parte I, n° 23 e n° 32.

([28]) Le omografie riemanniane di una matrice pura sono tutte generali. Vedi: G. Scorza: *Il rango di una matrice di Riemann* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVI, (1917, 2° semestre), pp. 177-182], n° 5 e Rosati, loc. cit. ([13]), n° 10.

zione è una trasformazione birazionale di 2ª specie, che è o identica o priva di punti uniti; dunque:

Una varietà abeliana che possegga una corrispondenza algebrica $(A, 1)$ *con infiniti punti uniti e diversa dall'identità è necessariamente impura.*

Sopra una maggiore determinazione di quest'ultimo teorema ritorneremo nel lavoro cui è stato alluso più sopra.

Qui basti osservare i seguenti corollari delle proposizioni stabilite:

a) *L'inversa di una trasformazione univoca a valenza* γ *non nulla, situata sopra una varietà abeliana della dimensione* p, *ha l'indice* γ^{2p} *e la valenza* γ^{2p-1};

b) *La corrispondenza algebrica* $(\gamma^{2p}, 1)$ *generata sopra una varietà abeliana di dimensione* p *da una trasformazione univoca a valenza non nulla* γ *o è identica (e in tal caso è necessariamente* $\gamma = -1$) *o possiede* $(\gamma + 1)^{2p}$ *coincidenze,*

15. Dalle osservazioni fatte risulta che una varietà abeliana possiede sempre infinite corrispondenze algebriche $(\nu, 1)$ con un indice eguale all'unità; esse sono tutte e sole quelle generate dalle trasformazioni univoche ciascuna delle quali sia dotata di inversa a indice finito.

Come si caratterizza l'insieme dei valori (interi, positivi) che assume l'indice ν *di queste corrispondenze per una assegnata varietà abeliana?*

La risposta a questa domanda è immediata.

Diciamo ϱ il numero base della nostra varietà abeliana V e siano

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\varrho)}$$

le matrici di ϱ sostituzioni riemanniane costituenti, per l'insieme delle sostituzioni riemanniane di V, una base minima.

Allora la matrice di ogni altra sostituzione riemanniana di V è una matrice del tipo

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_\varrho A^{(\varrho)} \tag{14}$$

con le $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ intere, e inversamente; d'altronde il modulo della sostituzione la cui matrice è la (14), cioè il determinante

$$| x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_\varrho A^{(\varrho)} |, \tag{15}$$

se è diverso da zero, fornisce il valore dell'indice ν delle corrispondenze $(\nu, 1)$ generate dalle trasformazioni univoche che son legate alla sostituzione stessa; dunque, se indichiamo con

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho)$$

la forma, di grado $2p$ nelle $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$, a coefficienti interi rappresentata dal determinante (15), possiamo dire che:

Per la varietà abeliana V l'insieme dei valori assunti dall'indice ν è l'insieme dei numeri interi positivi rappresentabili con la forma $f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho)$, in cui il grado è il doppio della dimensione di V e il numero delle variabili è il numero base di V.

Notisi che:

a) *La forma f è annullantesi o no secondo che V è impura o pura;*

b) *Tra i numeri interi rappresentabili con la forma f comparisce sempre l'unità, qualunque sia V;*

c) *La forma f è, in ogni caso, una forma semidefinita positiva, ossia si ha qualunque siano i valori reali attribuiti alle $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\varrho) \geq 0 \text{ (29)}.$$

Da *b*), d'accordo col teorema *a*) del n. 14, segue che, se per V è $\varrho = 1$, è

$$f = x_1^{2p} \text{ (30)}.$$

(29) Che questa diseguaglianza sussista per le $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ *razionali* qualunque segue dal teorema che chiude il n° 22 della Parte I della Memoria citata in (5); e allora essa è valida anche per le $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ *reali* qualunque. Da ciò risulta che il teorema ora invocato, concernente le omografie *riemanniane* di una matrice di Riemann, sussiste per tutte le omografie *reali* della matrice; il qual fatto discende anche dall'osservazione che i ragionamenti di quel n° 22 possono ripetersi tutti tali e quali per una qualsiasi omografia *reale* di una matrice riemanniana.

(30) La connessione del problema esaminato in questo n° con la ricerca delle involuzioni situate sopra una varietà abeliana e birazionalmente identiche ad essa è manifesta. Vedi per il caso $p = 1$ la mia Nota: *Sulle curve ellittiche singolari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVII, (1918, 1° semestre) pp. 171-175], le cui considerazioni, come mostrerò altrove, possono essere estese anche a casi in cui sia $p > 1$.

II.

Un problema sulle varietà abeliane con sistemi complementari di varietà abeliane.

16. Supponiamo ora che la matrice ω cui appartiene la varietà abeliana V sia impura e che due sistemi regolari di integrali (semplici di 1ª specie) riducibili di V complementari siano quelli generati dagli integrali $u_1, u_2, \dots, u_q$ e $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$, rispettivamente.

Allora applicando, ove occorra, ad ω un'operazione B unimodulare (con che non viene alterata affatto la rappresentazione parametrica di V che si suppone data), si può imaginare, senza venir meno alla generalità, che la matrice ω abbia la forma [31]

$$(16)\qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \dots & \omega_{2,2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{q,1} & \omega_{q,2} & \dots & \omega_{q,2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{q+1,1} & \omega_{q+1,2} & \dots & \omega_{q+1,2q} & \omega_{q+1,2q+1} & & \dots & \omega_{q+1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \dots & \omega_{p,2q} & \omega_{p,2q+1} & & \dots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| ;$$

quindi basta guardare alla rappresentazione parametrica di V per dedurre che l'insieme dei punti di V per cui è

$$(17)\qquad u_1 = c_1, \; u_2 = c_2, \; \dots, \; u_q = c_q,$$

le $c_1, c_2, \dots, c_q$ essendo q costanti arbitrariamente assegnate, è una varietà abeliana della dimensione $p - q$ appartenente alla

[31] Vedi, per es., loc. cit. (5), Parte I, n° 40.

matrice riemanniana

$$(18)\qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{q+1,2q+1} & \omega_{q+1,2q+2} & \dots & \omega_{q+1,2p} \\ \omega_{q+2,2q+1} & \omega_{q+2,2q+2} & \dots & \omega_{q+2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,2q+1} & \omega_{p,2q+2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| .$$

Sorge così, al variare delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_q$, un sistema di ∞^q varietà abeliane della dimensione $p-q$ situato su V ([32]).

Un altro sistema dello stesso tipo, e cioè un sistema ∞^{p-q} di varietà abeliane della dimensione q, si otterrà considerando su V le varietà, ciascuna delle quali sia l'insieme dei punti di V per cui si ha

$$(19)\qquad u_{q+1} = \gamma_{q+1}, \; u_{q+2} = \gamma_{q+2}, \dots, u_p = \gamma_p,$$

le $\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_p$ essendo anch'esse delle costanti.

Diciamo *complementari*, per una ragione ovvia, i due sistemi ∞^q e ∞^{p-q} di varietà che così sorgono su V e *proponiamoci di determinare il numero dei punti comuni a una varietà generica dell'un sistema e una varietà generica dell'altro.*

Tale numero, che come risulterà tra poco, è sempre necessariamente finito, può esser determinato in due maniere differenti.

Di codeste due maniere esporremo altrove quella che conduce all'enunciato più elegante e che mette in rilievo il significato geometrico di un importante *carattere aritmetico simultaneo* di due assi complementari di una matrice riemanniana impura; ma anche quella che ora passiamo ad esporre è da tener presente, non ostante la complicazione dell'enunciato a cui perviene, perchè vi sono problemi in cui dei due enunciati è proprio quest'ultimo quello che ha maggior valore euristico ([33]).

([32]) Come è noto, questo sistema ∞^q è a sua volta, considerato come totalità dei suoi elementi, una varietà abeliana della dimensione q.

([33]) Per esempio esso si presta assai bene alla risoluzione del seguente problema: *Determinare le (matrici riemanniane cui appartengono le) superficie iperellittiche con due fasci ellittici di curve ellittiche tali che la curva generica dell'un fascio sechi quella generica dell'altro in un numero di punti assegnato.*

17. Supponiamo che la matrice $\bar{\omega}$ cui appartiene V abbia la forma (16).

Allora se

$$\left\| \begin{matrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \dots & \tau_{1,2q'} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \dots & \tau_{2,2q'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{q',1} & \tau_{q',2} & \dots & \tau_{q',2q'} \end{matrix} \right\| \qquad (q' = p - q) \tag{20}$$

è la matrice (riemanniana) costituita da $2q'$ sistemi di periodi ridotti primitivi degli integrali $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$, esistono $4q'p$ interi $h_{j,s}$ $(j = 1, \dots, 2q'; \;\; s = 1, \dots, 2p)$ per cui si ha:

$$\omega_{q+\mu,s} = h_{1,s}\,\tau_{\mu,1} + h_{2,s}\,\tau_{\mu,2} + \dots + h_{2q',s}\,\tau_{\mu,2q'} \tag{21}$$

$$(\mu = 1, \dots, q';\; s = 1, \dots, 2p).$$

Indichiamo con H il determinante di ordine $2q'$ formato dalle ultime $2q'$ colonne della matrice $\| h_{j,s} \|$ e, in H, diciamo $H_{l,2q+m}$ l'aggiunto dell'elemento $h_{l,2q+m}$ $(l, m = 1, \dots, 2q')$.

Le $2q'$ equazioni lineari nelle $\tau_{\mu,1}, \tau_{\mu,2}, \dots, \tau_{\mu,2q'}$, che si ricavano dalla (21) facendo variare s da $2q+1$ a $2p$, sono certo risolubili rispetto alle dette quantità, perchè altrimenti esisterebbero dei numeri (interi) non tutti nulli $k_1, k_2, \dots, k_{2q'}$ per cui risulterebbe

$$k_1\,\omega_{q+\mu,2q+1} + k_2\,\omega_{q+\mu,2q+2} + \dots + k_{2q'}\,\omega_{q+\mu,2p} = 0$$

$$(\mu = 1, \dots, q'),$$

mentre ciò, data la forma (16) di ω, non è possibile [34], dunque è $H \neq 0$ e si ha

$$\tau_{\mu,l} = \frac{1}{H} \sum_{m}^{1..2q'} H_{l,2q+m}\,\omega_{q+\mu,2q+m} \tag{22}$$

$$(\mu = 1, \dots, q';\; l = 1, \dots, 2q').$$

Adesso poniamo

$$a_{m,j} = \sum_{l}^{1..2q'} h_{l,j}\,H_{l,2q+m} \tag{23}$$

$$(m = 1, \dots, 2q';\; j = 1, \dots, 2q),$$

[34] Loc. cit. [8].

cioè indichiamo con $a_{m,j}$ il determinante che risulta da H sostituendo gli elementi $h_{1,j}, h_{2,j}, \dots, h_{2q',j}$ agli elementi della $m.^a$ colonna, e indichiamo con t e, se $t > 0$, con $e_1, e_2, \dots, e_t$ la caratteristica e i divisori elementari della matrice $\| a_{m,j} \|$ ([35]).

Allora se s_i è il massimo comun divisore di H ed e_i, *il numero N dei punti comuni alle due varietà V' e V'' di V rappresentate l'una dalle equazioni* (17) *e l'altra dalle equazioni* (19) *è dato da $N = 1$ se $t = 0$, mentre se $t > 0$ è dato da*

$$N = \frac{|H|^t}{s_1 s_2 \dots s_t}. \tag{24}$$

Infatti supponiamo, come è lecito, che V appartenga ad un S_{p+1} e siano le

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(u_1, \dots, u_p) \\ X_2 &= f_2(u_1, \dots, u_p) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ X_{p+1} &= f_{p+1}(u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \tag{25}$$

le sue equazioni parametriche, mediante funzioni abeliane appartenenti alla matrice ω.

Allora le equazioni parametriche di V' saranno le

$$X_\nu = f_\nu(c_1, c_2, \dots, c_q, u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p) \tag{26}$$
$$(\nu = 1, \dots, p+1);$$

e quelle di V'' saranno le

$$X_\nu = f_\nu(u_1, u_2, \dots, u_q, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_p) \tag{27}$$
$$(\nu = 1, \dots, p+1)$$

inoltre le funzioni di $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$ che compariscono nei secondi membri delle (26) saranno funzioni abeliane appartenenti alla matrice riemanniana (18).

([35]) Per la definizione di questi divisori elementari vedi, per es., KRAZER, loc. cit. ([10]), pp. 55-56.

Perchè un punto $(u_1, u_2, \dots, u_q, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_p)$ di V'' coincida con un punto $(c_1, c_2, \dots, c_q, u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p)$ di V' occorre e basta che per quest'ultimo sia

$$(28) \qquad u_{q+\mu} = \gamma_{q+\mu} + \sum_r^{1..2p} x_r \, \omega_{q+\mu,r} \qquad (\mu = 1, \dots, q')$$

con le $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ intere; quindi i punti comuni a V' e V'' sono tanti, quanti sono i sistemi di valori per le $u_{q+\mu}$, incongrui rispetto alla matrice (18) come modulo, forniti dalle equazioni (28) al variare degli interi $x_1, \dots, x_{2p}$ in tutte le maniere possibili.

Poichè codesti sistemi di valori hanno da esser considerati rispetto alla matrice (18) come modulo, è inutile tener conto nelle (28) dei termini a secondo membro che provengono dal fare $r = 2q+1, \ 2q+2, \dots, 2p$; quindi esse possono scriversi più semplicemente

$$(29) \qquad u_{q+\mu} = \gamma_{q+\mu} + \sum_j^{1..2q} x_j \, \omega_{q+\mu,j} \qquad (\mu = 1, \dots, q').$$

Per le (21) e le (22) si ha

$$\sum_j^{1..2q} x_j \, \omega_{q+\mu,j} = \sum_j^{1..2q} \sum_l^{1..2q'} x_j \, h_{l,j} \, \tau_{\mu,l} = \frac{1}{H} \sum_j^{1..2q} \sum_{l,m}^{1..2q'} x_j \, h_{l,j} \, H_{l,2q+m} \, \omega_{q+\mu,2q+m},$$

dunque, per le (23), posto

$$(30) \qquad y_m = \sum_j^{1..2q} a_{m,j} \, x_j \qquad (m = 1, \dots, 2q'),$$

le (29) equivalgono alle

$$(31) \qquad u_{q+m} = \gamma_{q+\mu} + \frac{1}{H} \sum_m^{1..2q'} y_m \, \omega_{q+\mu,2q+m} \qquad (\mu = 1, \dots, q').$$

Dalle (31) apparisce che due sistemi di valori (interi) per le x_j, x_j' e x_j'', dànno luogo mediante le (29) a due sistemi di valori per le $u_{q+\mu}$, congrui rispetto alla matrice (18), quando e solo quando essi soddisfanno rispetto al modulo $|H|$, alle $2q'$ congruenze

$$(32) \qquad \sum_j^{1..2q} a_{m,j} \, (x_j' - x_j'') \equiv 0 \qquad (m = 1, \dots, 2q').$$

Di qua risulta che nelle (29) gli interi x_j (i quali sono in numero di $2q$) possono esser calcolati rispetto al modulo $|H|$; d'altronde il numero delle soluzioni incongrue delle congruenze (32) nelle $2q$ incognite $(x'_j - x''_j)$ è dato da H^{2q} se $t = 0$, mentre se $t > 0$ è dato da [36]

$$s_1 \cdot s_2 \dots s_t \; |H|^{2q-t}$$

(dove naturalmente occorre prendere H in valore assoluto se t è dispari); dunque concludendo, il numero dei punti comuni a V' e V'' è finito ed è dato come volevasi da $N = \frac{H^{2q}}{H^{2q}} = 1$ se $t = 0$ o, se $t > 0$, da

$$N = \frac{H^{2q}}{s_1 \, s_2 \dots s_t \, |H|^{2q-t}} = \frac{|H|^t}{s_1 \, s_2 \dots s_t}.$$

Osservazione 1ª. Quando è $N = 1$ la varietà V può considerarsi come la varietà delle coppie di punti che si ottengono accoppiando ciascun punto di una varietà abeliana di dimensione q con ciascun punto di una varietà abeliana della dimensione $p - q$; quindi V può imaginarsi come appartenente a una matrice riemanniana composta mediante due matrici riemanniane aventi l'una il genere q e l'altra il genere $p - q$.

Osservazione 2ª. Quando è $t > 0$, nella serie di interi

$$e_1, e_2, \dots, e_t$$

ciascun termine è divisibile per ciascuno di quelli che lo precedono [37]; quindi lo stesso sta per la serie di interi

$$s_1, s_2, \dots, s_t$$

una volta che s_i è il massimo comune divisore di H ed e_i.

Ma allora nella serie di *interi*

$$\frac{H}{s_1}, \frac{H}{s_2}, \dots, \frac{H}{s_t},$$

(36) Vedi, per es., KRAZER, loc. cit. (10), pag. 57.
(37) Loc. cit. (35).

il cui prodotto è uguale (in valore assoluto) ad N, ciascun termine è divisibile per tutti quelli che lo seguono.

Da ciò si deduce che se il valore assoluto di $\frac{H}{s_t}$ si indica con q_t e il valore assoluto del quoziente di $\frac{H}{s_i}$ per $\frac{H}{s_{i+1}}$ $(i=1, 2, \dots, t-1)$ si indica con q_i, gli interi $q_1, q_2, \dots, q_t$ sono legati ad N dalla relazione

$$N = q_1 q_2^2 q_3^3 \dots q_t^t.$$

Si vede pertanto che se N e t sono dati, il numero delle ipotesi differenti che possono esser fatte su $q_1, q_2, \dots, q_t$ è assai ristretto.

Per es. se N è un numero privo di divisori quadrati diversi da 1 è necessariamente

$$q_1 = N, \ q_2 = q_3 = \dots = q_t = 1.$$