SOPRA ALCUNE NOTEVOLI MATRICI RIEMANNIANE (*)

Nella teoria delle matrici riemanniane di genere superiore a 2 il numero degli esempi concreti ben conosciuti è così scarso, che non mi pare inutile indicare qui un teorema atto a fornire esempi notevolissimi di matrici di Riemann di genere qualunque.

1. — Sia

$$a_0\, x^{2p} + a_1\, x^{2p-1} + \dots + a_{2p-1}\, x + a_{2p} = 0 \tag{1}$$

un'equazione di grado $2p$ a coefficienti interi, priva di radici multiple, con le radici tutte imaginarie e aventi tutte per modulo la radice quadrata di uno stesso numero razionale (positivo) σ.

Allora si può dimostrare che:

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ *sono* p *radici distinte della* (1), *di cui due non siano mai imaginarie coniugate, la matrice*

$$\omega \equiv \| \, 1 \, , \alpha_j \, , \alpha_j^2 \, , \dots \, \alpha_j^{2p-1} \, \| \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

è una matrice riemanniana di genere p, *per i cui indici di singolarità e moltiplicabilità* k *e* h (1) *si ha*

$$k \geqq p - 1 \, , \qquad h \geqq 2p - 1 \, ,$$

in queste relazioni valendo insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori.

(*) Atti Reale Acc. d. Scienze di Torino, 53 (1918), pp. 1008-1014.

(1) Per la definizione di matrice riemanniana e dei suoi caratteri che qui si considerano vedi la mia Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di* Riemann *e ad alcune sue applicazioni* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLI, 1916), Parte I, n^i 5 e 6.

2. — Cominciamo dal far vedere che:

La matrice ω ammette almeno p forme riemanniane [2] *alternate indipendenti.*

Poichè il prodotto di due radici coniugate della (1) è sempre uguale a σ, le radici della (1) coincidono con quelle dell'equazione che si ricava da essa ponendo $\frac{\sigma}{x}$ al posto di x e poi riducendo a forma intera.

Di qua si trae, indicando con ε un numero opportuno,

$$a_n = \varepsilon\, \sigma^n\, a_{2p-n} \qquad (n = 0\,, 1\,, \ldots\,, 2p).$$

Ma è, per le ipotesi fatte,

$$\frac{a^{2p}}{a_0} = \sigma^p\,;$$

dunque si ha

$$\varepsilon = \frac{1}{\sigma^p}\,,$$

ed

$$a_n = \sigma^{n-p}\, a_{2p-n}.$$

Dopo ciò, l'equazione (1) che, divisa per x^p, diviene

$$a_0\, x^p + a_1\, x^{p-1} + \ldots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{2p}}{x^p} = 0,$$

può scriversi

$$(2) \quad a_{2p}\left(\frac{x^p}{\sigma^p} + \frac{1}{x^p}\right) + a_{2p-1}\left(\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p-1}} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \ldots + a_{p+1}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x}\right) + a_p = 0.$$

Ora è

$$\frac{x^j}{\sigma^j} + \frac{1}{x^j} = \left(\frac{x^{j-1}}{\sigma^{j-1}} + \frac{1}{x^{j-1}}\right)\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{x^{j-2}}{\sigma^{j-2}} + \frac{1}{x^{j-2}}\right),$$

dunque, mediante la sostituzione

$$(3) \qquad \frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x} = y,$$

l'equazione (2) si può trasformare in un'equazione in y di grado p a coefficienti interi.

[2] Loc. cit., [1], I, n° 4.

Indichiamo questa equazione con

$$(4) \qquad b_0 y^p + b_1 y^{p-1} + \dots + b_{p-1} y + b_p = 0,$$

e le sue radici con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$.

Allora le coppie di radici coniugate della (1) si otterranno risolvendo le p equazioni

$$\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, p),$$

ossia le p equazioni quadratiche

$$(5) \qquad x^2 - \sigma\beta_j x + \sigma = 0,$$

e si può supporre di aver scelte le denominazioni delle radici della (4) in tal maniera che fra le equazioni (5) quella rispondente alla radice β_j abbia per radici la radice α_j dell'equazione (1) e la radice ad essa coniugata $\overline{\alpha}_j$ (3).

Ciò posto, consideriamo gli elementi della riga j^{ma} della matrice ω come le coordinate proiettive omogenee di un punto A_j in uno spazio Σ a $2p-1$ dimensioni, e diciamo $\overline{A}_j$ il punto imaginario coniugato di A_j.

Poichè la (1) è a radici tutte distinte, si vede subito che i $2p$ punti A_j e $\overline{A}_j$ risultano indipendenti; quindi i due spazi a $p-1$ dimensioni, τ e $\overline{\tau}$, congiungenti l'uno i p punti A_j e l'altro i p punti $\overline{A}_j$, risultano due spazi imaginari coniugati indipendenti.

Adesso si consideri, entro la totalità lineare $\infty^{p(2p-1)-1}$ di tutti i sistemi nulli dello spazio Σ, quella, pure lineare, che diremo μ, dei sistemi nulli rispetto a ciascun dei quali risultino coniugate le $2p(p-1)$ coppie di punti del tipo:

$$(6) \qquad (A_j A_l), \qquad (A_j \overline{A}_l), \qquad (\overline{A}_j \overline{A}_l) \qquad (j \neq l).$$

Si verifica subito (per es., prendendo per un momento i punti A_j e $\overline{A}_j$ come vertici della piramide fondamentale delle coordinate in Σ) che la totalità μ ha la dimensione $p-1$; ed è poi chiaro

(3) Occorre appena avvertire che il ragionamento del testo è perfettamente analogo ad uno ben noto della teoria delle equazioni reciproche; e che le radici della (4) riescono tutte reali.

che due punti qualunque di τ, o di $\bar{\tau}$, risultano coniugati rispetto ad ogni sistema nullo di μ.

Si concepisca un sistema nullo di Σ come un punto di uno spazio lineare Σ' a $p(2p-1)-1$ dimensioni, riguardando come coordinate proiettive omogenee di questo punto in Σ' i $p(2p-1)$ coefficienti che compariscono nell'equazione del connesso di punti definito dal sistema nullo; allora la totalità lineare μ si riflette in uno spazio lineare μ' di Σ' di dimensione $p-1$, e, in base a considerazioni ben note ([4]), l'affermazione fatta a principio di questo n^0 sarà dimostrata appena si sia fatto vedere che μ' è uno spazio *razionale* di Σ', cioè che i mutui rapporti delle coordinate proiettive omogenee di μ' sono numeri razionali.

Per questo si osservi che i sistemi nulli di Σ aventi una coppia di punti coniugati in *una*, comunque fissata, delle $2p(p-1)$ coppie (6) costituiscono una totalità lineare, della dimensione $p(2p-1)-2$, riflettentesi in un iperpiano di Σ', e che μ' è l'intersezione dei $2p(p-1)$ iperpiani indipendenti di Σ', che così si ottengono in corrispondenza alle $2p(p-1)$ coppie (6); quindi i mutui rapporti delle coordinate di μ' sono intanto funzioni razionali a coefficienti interi delle radici dell'equazione (1).

Poichè l'insieme di coppie (6) è simmetrico rispetto ai punti di ciascuna delle coppie di punti imaginari coniugati $(A_j \bar{A}_j)$, questi mutui rapporti dipendono simmetricamente delle radici di ciascuna delle p equazioni quadratiche (5), quindi essi sono pure funzioni razionali a coefficienti interi delle radici dell'equazione (4).

Ma l'insieme di coppie (6) è anche simmetrico rispetto all'insieme delle p coppie di punti $(A_j \bar{A}_j)$, dunque queste funzioni delle radici dell'equazione (4) sono funzioni simmetriche dalle radici stesse, e i nostri mutui rapporti, una volta che i coefficienti della (4) sono numeri interi, sono, come volevasi, dei numeri razionali.

Notisi che, se $p > 1$, la totalità lineare μ contiene p sistemi nulli indipendenti, reali, degeneri, dotati ciascuno di un asse a $2p-3$ dimensioni. Questi assi sono gli spazi congiungenti a $p-1$ a $p-1$ le p coppie di punti imaginari coniugati $(A_j \bar{A}_j)$.

3. — Dimostriamo in secondo luogo che:

La matrice ω è riemanniana,

facendo vedere che:

([4]) Cfr. loc. cit., ([1]), I, § 2.

Essa possiede delle forme riemanniane alternate principali [5].

Poichè la cosa è evidente se $p = 1$, possiamo supporre $p > 1$, cioè possiamo supporre che la totalità μ considerata nel n[0] precedente sia infinita.

Allora, poichè entro l'insieme dei sistemi nulli reali di μ i sistemi razionali costituiscono un insieme dovunque denso, per dimostrare che ω possiede forme riemanniane alternate principali, basta far vedere che μ contiene sistemi nulli reali in ciascun dei quali non riescono mai coniugati un punto di τ e il punto imaginario coniugato di $\overline{\tau}$ [6].

Per l'osservazione che chiude il n[0] 2, ciò potrebbe essere dedotto in modo immediato dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che ho sviluppata in una mia Memoria del 1915 [7]; ma è forse più comodo per il lettore procedere nel modo che ora sarà indicato.

Si ponga, con le $\xi_{j,r}$ e $\eta_{j,r}$ reali,

$$\alpha_j^{r-1} = \xi_{j,r} + i\eta_{j,r} \qquad (i = \sqrt{-1}\,;\ j = 1, \dots, p\,;\ r = 1, \dots, 2p),$$

e si eseguisca nello spazio Σ la trasformazione *reale* [8] di coordinate in cui le antiche coordinate x_r $(r = 1, \dots, 2p)$ sono legate alle nuove x'_r mediante le formule

$$x_r = \sum_j^{1..p} (\xi_{j,r}\, x'_{2j-1} + \eta_{j,r}\, x'_{2j}).$$

Le nuove coordinate del punto A_l sono tutte nulle, tranne la x'_{2l-1} e la x'_{2l}, date rispettivamente da

$$x'_{2l-1} = 1 \qquad \text{e} \qquad x'_{2l} = i,$$

e quindi lo spazio a $2p - 3$ dimensioni, congiungente tutti i punti A_l diversi da A_j e tutti i punti $\overline{A}_l$ diversi da $\overline{A}_j$, sarà rappresen-

(5) Loc. cit., (1), I, n[0] 5.

(6) Cfr. loc. cit., (1), I, n[0] 12.

(7) SCORZA, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [« Memorie della Società ital. delle Scienze (detta dei XL) », serie 3[a], t. XIX].

(8) È la trasformazione di coordinate che si utilizza anche nel n[0] 53 della Memoria cit. in (7).

tato, nel nuovo sistema di coordinate, dalle equazioni:

$$x'_{2j-1} = 0, \qquad x'_{2j} = 0.$$

Ma allora il sistema nullo di μ avente questo spazio come asse sarà rappresentato (come connesso di punti), nel nuovo sistema di coordinate, dall'equazione

$$x'_{2j-1}\, y'_{2j} - x'_{2j}\, y'_{2j-1} = 0$$

dove le y'_r sono, al pari delle x'_r, coordinate correnti di punto; e la totalità μ, indicando con le $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ dei parametri indeterminati, sarà rappresentata dall'equazione

$$\sum_j^{1..p} \lambda_j \,(x'_{2j-1}\, y'_{2j} - x'_{2j}\, y'_{2j-1}) = 0. \tag{7}$$

Indicando con $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_p$ dei numeri non tutti nulli e con $\overline{\varrho_j}$ il numero imaginario coniugato di ϱ_j, le nuove coordinate di un punto di τ sono della forma

$$x'_{2j-1} = \varrho_j \qquad x'_{2j} = \varrho_j\, i \qquad\qquad (j = 1, \dots, p);$$

e per conseguenza quelle del punto imaginario coniugato di $\overline{\tau}$ sono date da

$$x'_{2j-1} = \overline{\varrho_j} \qquad x'_{2j} = -\, \overline{\varrho_j}\, i \qquad\qquad (j = 1, \dots, p),$$

o, come possiamo anche supporre, da

$$x'_{2j-1} = \overline{\varrho_j}\, i \qquad x'_{2j} = \overline{\varrho_j} \qquad\qquad (j = 1, \dots, p).$$

Ora il primo membro della (7) per

$$x'_{2j-1} = \varrho_j, \qquad x'_{2j} = \varrho_j\, i, \qquad y'_{2j-1} = \overline{\varrho_j}\, i, \qquad y'_{2j} = \overline{\varrho_j}$$

diventa

$$2 \sum_j^{1..p} \lambda_j\, \varrho_j\, \overline{\varrho_j}\,;$$

dunque perchè la (7) rappresenti un sistema nullo soddisfacente alla condizione posta più sopra basta supporre che in essa le λ_j siano reali, non nulle e tutte dello stesso segno.

4. — Da quanto è stato detto nei n[i] 2 e 3 risulta che ω è una matrice riemanniana (di genere p), con le imagini τ e $\bar{\tau}$ (9) nello spazio rappresentativo Σ, e che per il suo indice di singolarità k si ha

$$k \geq p - 1. \tag{8}$$

Adesso si indichi con h l'indice di moltiplicabilità di ω, e si ricordi (10) che $h - k$ è il massimo numero di polarità razionali indipendenti di Σ in ciascuna delle quali riescono coniugati due punti qualunque di τ (e di $\bar{\tau}$).

Intanto, ragionando come nel n[0] 2, si riconosce che esistono p polarità razionali indipendenti di Σ in ciascuna delle quali riescono coppie di punti coniugati le $p(p + 1)$ coppie di punti (distinti o no)

$$(A_j\, A_l) \qquad \text{e} \qquad (\bar{A}_j\, \bar{A}_l)$$

e le $p(p - 1)$ coppie di punti

$$(A_j\, \bar{A}_l) \qquad\qquad (j \neq l),$$

e in ciascuna di codeste polarità riescono coniugati due punti qualunque di τ (e di $\bar{\tau}$), dunque deve essere

$$h - k \geq p. \tag{9}$$

Di qua e dalla (8) si trae, come volevasi,

$$h \geq 2p - 1\,. \tag{10}$$

5. — Resta ora da far vedere che nella (8) e nella (10) valgono insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori, ossia che se delle due uguaglianze

$$k = p - 1 \qquad \text{e} \qquad h = 2p - 1$$

ne sussiste una, sussiste anche l'altra.

Sia in primo luogo $k = p - 1$.

Allora ω non ammette sistemi nulli riemanniani all'infuori di quelli contenuti nella totalità μ e quindi, se $p > 1$, non ammette altri pseudo-assi (11) (o, eventualmente, assi) di dimensione 1 all'in-

(9) Cfr. loc. cit., (1), I, n[0] 9.

(10) Loc. cit., (1), nota (22), a piè di pagina.

(11) Loc. cit., (1), I, § 12.

fuori delle p rette congiungenti le p coppie di punti $A_j \overline{A}_j$. Segue che ogni omografia riemanniana di ω deve lasciar fermi questi pseudo-assi o scambiarli fra di loro. D'altronde si vede subito [12] che essa non può scambiarli fra di loro, quindi essa ha necessariamente $2p$ punti uniti nei $2p$ punti A_j e $\overline{A}_j$.

Se $p = 1$ non si può parlare di pseudo-assi (o assi) di ω; ma, in tal caso, la conclusione a cui siamo pervenuti è evidente *a priori.*

Da essa si trae

$$h \leq 2p - 1\,;$$

e quindi, confrontando con la (10), si ha, come volevasi,

$$h = 2p - 1.$$

Sia, in secondo luogo, $h = 2p - 1$.

Allora la (9) dà

$$k \leq p - 1,$$

e quindi, confrontando con la (8), si ha pure

$$k = p - 1.$$

6. — A complemento del teorema del n⁰ 1, oramai dimostrato, giova tener presenti le osservazioni che seguono:

I. *Se la matrice ω è pura* [13], *per essa si ha certo $k = p - 1$ e $h = 2p - 1$.*

E infatti, se ciò non fosse, sarebbe $h > 2p - 1$ e ω sarebbe, contro l'ipotesi, impura [14].

II. *Se la matrice ω è dotata di assi isolati* [15], *l'equazione* (1) *è riducibile nel corpo dei numeri razionali;*

per modo che:

III. *Se l'equazione* (1) *è irriducibile nel corpo dei numeri razionali, la matrice ω o è pura o è impura ma priva di assi isolati.*

(12) Loc. cit., (1), II, n⁰ 11.
(13) Loc. cit., (1), I, n⁰ 32.
(14) Loc. cit., (1), I, n⁰ 42.
(15) Loc. cit., (1), I, n⁰ 41.

Suppongasi infatti che ω ammetta degli assi isolati (cosicchè è certo $p > 1$).

Allora le omografie riemanniane di ω debbono mutare in sè ciascuno di questi assi ([16]). Ma fra codeste omografie quella risultante dal prodotto di un sistema nullo riemanniano generico di ω contenuto nel sistema μ per l'inversa di un altro sistema nullo sì fatto non ammette altri punti uniti che quelli delle p rette $A_j \overline{A}_j$, dunque ciascun asse isolato di ω è uno spazio congiungente un certo numero delle p coppie di punti coniugati $A_j \overline{A}_j$.

Supponiamo, per fissar le idee, che un asse di ω sia lo spazio, della dimensione $2q - 1$, congiungente i punti $A_1, A_2, \ldots, A_q$ e $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_q$.

Le coordinate di questo spazio sono i minori di ordine $2q$ estratti dalla matrice

$$(11) \qquad \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . & . & . & \alpha_1^{2p-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_q & \alpha_q^2 & . & . & . & \alpha_q^{2p-1} \\ 1 & \overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_1^2 & . & . & . & \overline{\alpha}_1^{2p-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \overline{\alpha}_q & \overline{\alpha}_q^2 & . & . & . & \overline{\alpha}_q^{2p-1} \end{array} \right\| ,$$

dunque, poichè il nostro spazio è un asse di ω, i mutui rapporti di questi minori debbono essere numeri razionali.

Si considerino fra questi minori quello formato dalle prime $2q$ colonne e quelli, in numero di $2q$, che si ottengono sostituendo in esso, successivamente, la $(2q+1)^{\text{ma}}$ colonna di (11) alle colonne $1^{\text{a}}, 2^{\text{a}}, \ldots, 2q^{\text{ma}}$. I rapporti di questi $2q$ minori a quello formato dalle prime $2q$ colonne sono, a meno, per alcuni di essi, del segno, le somme dei prodotti a t a t ($t = 1, 2, \ldots, 2q$) dei $2q$ numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_q$ ([17]), dunque queste somme sono numeri razionali e l'equazione (1) si spezza, nel corpo dei numeri razionali, in una equazione di grado $2q$, avente per radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_q$, e una equazione di grado $2(p-q)$, avente per radici $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p, \overline{\alpha}_{q+1}, \ldots, \overline{\alpha}_p$.

([16]) Loc. cit., ([1]), nota ([60]), a piè di pagina.

([17]) Vedi, per es., PASCAL, *I determinanti* (Hoepli, Milano, 1897), pagine 171 e 172.

Notisi che se l'equazione (1) è riducibile nel corpo dei numeri razionali, poichè le sue radici sono, per ipotesi, tutte imaginarie, le equazioni di grado inferiore a $2p$ in cui essa si spezza sono tutte di grado necessariamente pari; e allora, basta ricordare il teorema sul determinante di VANDERMONDE generalizzato ([18]) di cui or ora è stato invocato un caso particolare, per dedurre che:

IV. *Se l'equazione* (1) *è riducibile nel corpo dei numeri razionali, la matrice ω è certo dotata di assi, cioè impura.*

Infine è utile rilevare esplicitamente che le proprietà della matrice ω dipendono non solo da quelle dell'equazione (1), ma anche dal modo come fra le sue radici si scelgono le p radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ a due a due non coniugate.

Per es., se l'equazione (1) è l'equazione alle radici primitive settime dell'unità

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

cosicchè nel caso attuale è $p = 3$, e una sua radice si indica con α, prendendo, per costruire ω, una volta la terna di radici $(\alpha, \alpha^2, \alpha^4)$ e un'altra la terna di radici $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$, si ottiene, nel primo caso, una matrice riemanniana impura a indici massimi, nel secondo caso, una matrice riemanniana *pura* con l'indice di singolarità 2 e l'indice di moltiplicabilità 5.

Di queste due affermazioni la prima risulta da una mia Nota precedente ([19]), l'altra si troverà stabilita in un lavoro di prossima pubblicazione della sig.na RACITI, laureanda dell'Università di Catania.

Del resto sulle matrici riemanniane provenienti nel modo indicato in questa Nota dalle equazioni alle radici primitive dell'unità avrò forse occasione di ritornare in avvenire, per mostrare il legame strettissimo della loro teoria con la teoria gaussiana della divisione del cerchio.

Catania, 5 giugno 1918.

([18]) Loc. cit., ([17]), pag. 169.

([19]) SCORZA, *Sulla quartica di* KLEIN *e la quintica di* SNYDER (« Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania », serie 5ª, vol. X).