DEDUZIONE DI UN TEOREMA DEL PROF. CAPELLI DALLA TEORIA DELLE INVOLUZIONI RETTILINEE DI SPECIE QUALUNQUE (*)

Quante volte nelle mie lezioni ho voluto svolgere con una certa completezza il problema della ricerca dei punti comuni a due curve algebriche piane, ho dovuto constatare, con un certo rammarico, che o mi toccava presumere come noti teoremi algebrici che raramente si ha il tempo di esporre nei nostri corsi di algebra, o mi toccava far delle digressioni più o meno ingombranti.

Ciò mi ha spinto recentemente a vedere se qualcuno di quei teoremi non poteva esser riattaccato alla teoria delle involuzioni (di ordine e specie qualunque) situate sopra una retta, che spesso premetto allo studio delle curve algebriche piane, e mi pare che, ad es., il classico teorema del CAPELLI sulla caratteristica della matrice di SYLVESTER si lasci dedurre agevolmente da quell'ordine di idee.

Siano

$$f \equiv a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n \text{ e } \varphi \equiv \alpha_0 x_1^m + \alpha_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + \alpha_m x_2^m$$

due forme binarie degli ordini m ed n di cui una almeno non sia identicamente nulla. Allora il teorema di CAPELLI [1] asserisce che:

(*) Giorn. di Mat. di Battaglini (3) 8 (1917), pp. 281-82. La breve Nota è tratta da una lettera ad Eugenio Bertini, a Pisa.

[1] CAPELLI, *Sulla matrice di Sylvester per la risultante di due funzioni intere* (Rend. dei Circ. Mat. di Palermo, t. XXIII, pag. 130-136). Altre dimostrazioni di questo teorema sono state date dal PICK, dal NICOLETTI (Ibid., t. XXVI, pag. 360-362 e t. XXVIII, pag. 29-32) e dal LEVI, *Introduzione alla analisi matematica* (Parma, 1916) pag. 239. Soltanto le dimostrazioni del NICOLETTI e del LEVI presentano qualche punto di contatto con quella che qui viene esposta.

Le forme f e φ hanno un massimo comun divisore di grado σ ($\sigma \geq 0$) quando e solo quando la nota matrice di Sylvester costruita coi loro coefficienti ha per caratteristica $m + n - \sigma$.

Per dimostrarlo, mi limiterò al solo caso che non sia ovvio, cioè a quello in cui nessuna delle due forme f e φ è identicamente nulla.

Interpretiamo le x_1, x_2 come coordinate omogenee di punto sopra una retta e diciamo G_n ed H_m i gruppi di n ed m punti della retta rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$f = 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi = 0.$$

Siano poi A e B i punti con le coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Gli m gruppi di $m - 1$ punti ciascuno

$$rA + sB \qquad (r+s=m-1;\, r=0,1,\ldots,m-1)$$

sono linearmente indipendenti, cioè determinano una involuzione *completa* I_{m-1}^{m-1}, di ordine e specie $m - 1$, quindi i gruppi

(1) $$G_n + rA + sB$$

determinano una involuzione I_{n+m-1}^{m-1}, con n punti fissi nei punti di G_n, i cui gruppi si ottengono aggiungendo G_n a tutti i possibili gruppi di $m - 1$ punti della retta.

Lo stesso dicasi per l'involuzione I_{n+m-1}^{n-1} generata dai gruppi

(2) $$H_m + tA + uB \qquad (t+u=n-1, t=0,1,\ldots,n-1).$$

Se i gruppi G_n ed H_m hanno σ punti comuni (e non più), con $\sigma \geq 0$, le involuzioni I_{n+m-1}^{m-1} ed I_{n+m-1}^{n-1} si *intersecano* nella $I_{n+m-1}^{\sigma-1}$ i cui gruppi si ottengono associando con un gruppo qualunque di ordine $\sigma - 1$ gli $m + n - \sigma$ punti che restano nel gruppo $G_n + H_m$ dopo avervi soppresso, una volta ciascuno, i σ punti comuni a G_n ed H_m; quindi le involuzioni I_{n+m-1}^{m-1} ed I_{n+m-1}^{n-1} sono *congiunte* da una involuzione di ordine $n + m - 1$ e specie

$$(n - 1) + (m - 1) - (\sigma - 1) = n + m - \sigma - 1.$$

Segue che degli $n + m$ gruppi (1) e (2), d'ordine $n + m - 1$, soltanto $n + m - \sigma$ sono linearmente indipendenti, e quindi $n + m - \sigma$ è la caratteristica della matrice formata con i coefficienti delle loro equazioni.

Ora codesta matrice è appunto quella a cui conduce il così detto *metodo dialitico* di Sylvester, dunque etc.