SULLE SERIE COL TERMINE GENERALE CONVERGENTE A ZERO (*)

In una Nota recente, inserita in questo stesso Rendiconto, il collega CIPOLLA ha dimostrato che:

Una serie a termini reali col termine generale convergente a zero o è regolare o ammette come valori limiti tutti i punti di un intervallo (limitato o no).

Questo teorema precisa così bellamente l'insieme dei valori limiti di una serie che mi è parso valesse la pena di vedere se in qualche modo esso poteva essere esteso alle serie a termini complessi.

Da ciò l'origine della breve ricerca che segue; nella quale si arriva al teorema richiesto mediante considerazioni che non mancano, sembra, di qualche interesse, indipendentemente dal risultato al quale conducono.

1. *Se un insieme (non vuoto) J di uno spazio S_r a r dimensioni ($r \geq 1$) (1) è chiuso e non concatenato, esso è sempre spezzabile nella somma di due insiemi chiusi privi di punti comuni e a distanza non nulla.*

Poichè J non è concatenato esistono almeno due punti A e B di J (necessariamente distinti) tali che, detto δ un conveniente numero positivo, non sia possibile considerare A e B come estremi di una poligonale coi vertici appartenenti tutti a J e coi lati minori tutti di δ.

Ciò posto, distribuiamo i punti di J in due insiemi J_1 e J_2, privi di punti comuni, attribuendo un punto X di J a J_1 o a J_2 secondo che è possibile o no considerare A ed X come estremi di una poligonale coi vertici appartenenti a J e coi singoli lati minori di δ.

(*) Rend. Reale Accad. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli (3) 23 (1917), pp. 114-121.

(1) Occorre appena avvertire che qui, conformemente a quanto si usa nella teoria generale degli insiemi di punti, S_r è l'insieme delle r—*ple* ordinate $(x_1\, x_2 \dots x_r)$ di numeri reali (finiti).

Poichè a J_1 appartiene almeno A e a J_2 appartiene almeno B, J_1 e J_2 sono entrambi non vuoti.

Ma essi sono anche chiusi.

E invero se P è un (eventuale) punto limite di J_1 (di J_2), P è anche un punto limite di J; quindi, una volta che J è chiuso, P è intanto un punto di J, cioè un punto di J_1 o di J_2. Ma poichè P è punto limite di J_1 (di J_2) vi sono punti di J_1 (di J_2) che distano da P per meno di δ, cioè P non è certo un punto di J_2 (di J_1); dunque P è un punto di J_1 (di J_2), e J_1 e J_2 sono, come volevasi, chiusi.

Ora è chiaro che la distanza di un punto di J_2 da un punto di J_1 non può essere mai inferiore a δ; quindi la distanza di J_1 e J_2 è $\geq \delta$, e basta spezzare J nella somma dei due insiemi J_1 e J_2 per avere uno spezzamento di J che risponda all'enunciato.

2. Dal teorema precedente segue subito che:

Se un insieme chiuso contiene più di un punto e non è spezzabile nella somma di due insiemi chiusi (non vuoti e) privi di punti comuni, esso è (necessariamente concatenato e quindi) *continuo.*

D'altra parte è chiaro che:

Se un insieme continuo è spezzabile nella somma di due insiemi chiusi (non vuoti e) privi di punti comuni, la distanza di questi due ultimi insiemi è necessariamente nulla.

Ma, per un teorema noto, se due insiemi chiusi non vuoti e privi di punti comuni hanno la distanza nulla, nessuno dei due può essere limitato, dunque possiamo dire più precisamente che:

Soltanto un insieme continuo non limitato può essere spezzabile nella somma di due insiemi chiusi non vuoti e privi di punti comuni; ma allora questi sono entrambi non limitati e la loro distanza è nulla.

Insiemi continui che presentino il caso contemplato da questo teorema non ne possono esistere che per $r > 1$ (²): ma se $r > 1$ essi esistono effettivamente.

Se in S_r, $(r > 1)$, γ è una linea ordinaria dotata di un asintoto, l'insieme dei punti di γ e dell'asintoto è continuo ed è spezzabile nel modo voluto (³).

(²) Si ricordi che un insieme continuo di un S_1 (o retta) o è la retta stessa, o è una semiretta, o è un segmento.

(³) Alcune delle osservazioni di questo n⁰ non ci sono affatto necessarie per procedere innanzi, ma ci siamo fermati ad esporle, perchè chiariscono i rapporti

3. In S_r abbiasi ora una successione di punti

$$A \equiv A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$$

tale che, indicata con δ_n la distanza dei punti A_n e A_{n+1}, si abbia

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0. \tag{1}$$

Chiamato *punto limite* di A un punto tale che in ogni suo intorno cadano infiniti punti di A (distinti o no, ma) con indici differenti, e J l'insieme (certo chiuso) dei punti limiti di A, si ha:

L'insieme J o è vuoto, o consta di un punto ed uno solo, o è continuo.

Poichè J è chiuso, per giustificare questa asserzione basta far vedere che J, se contiene più di un punto, non è spezzabile nella somma di due insiemi (non vuoti) chiusi, privi di punti comuni e a distanza non nulla.

Supponiamo, se è possibile, che ciò non sia; cioè supponiamo che J si spezzi nella somma di due insiemi J_1 e J_2 (non vuoti) chiusi e privi di punti comuni la cui distanza σ sia un numero positivo.

Si imaginino descritte le ipersfere che hanno per raggio $\frac{\sigma}{2}$ e per centri i singoli punti di J_1.

L'insieme K dei punti di queste ipersfere è, in sostanza, l'insieme di tutti e soli i punti dello spazio ambiente tali che per ciascun di essi la distanza da J_1 sia $\leq \frac{\sigma}{2}$; quindi K è chiuso, dotato di punti interni e di punti frontiera, ciascuno di questi punti frontiera essendo alla distanza $\frac{\sigma}{2}$ da J_1 ed essendo limite di punti interni a K.

reciproci delle due più comuni definizioni che sogliono darsi degli insiemi continui.

Un insieme è continuo secondo CANTOR quando contiene più di un punto ed è chiuso e concatenato; e questa è la definizione che abbiamo seguita nel testo. Altri invece (p. es. SCHÖNFLIES, STUDY, BROUWER, ...) un insieme chiuso, che contenga più di un punto, lo dicono continuo quando non è spezzabile nella somma di due insiemi chiusi (non vuoti e) privi di punti comuni.

Quanto è detto nel testo mostra che le due definizioni, a meno che non si facciano opportune convenzioni, contrariamente a quanto si trova affermato in qualche luogo [per es. SCHÖNFLIES, *Die Entwickelung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten*, Zweiter Teil, Teubner, 1908, pag. 118], non sono equivalenti.

Sia K_1 l'insieme dei punti delle ipersfere che hanno per raggio $\frac{\sigma}{4}$ e per centri i singoli punti di J_1; esso sarà un insieme della stessa natura di K e risulterà tutto *interno* a K.

Sia infine Δ l'insieme che resta dopo aver soppresso in K i punti *interni* di K_1.

Naturalmente, una volta che Δ risulta formato dai punti dello insieme chiuso K che appartengono all'insieme chiuso *complementare* all'insieme dei punti *interni* di K_1, Δ è anch'esso un insieme chiuso.

Poichè i punti di J_2 sono tutti *esterni* a K e quelli di J_1 sono *interni* a K_1, nessun punto di J appartiene a Δ; ma Δ è chiuso, dunque in Δ o non capita alcun punto di A o ve ne capita soltanto un numero finito.

Sia ν un numero naturale sì fatto che per $n > \nu$ A_n risulti non contenuto in Δ e inoltre risulti

$$\delta_n < \frac{\sigma}{4}.$$

Poichè K_1 ha fra i suoi punti interni dei punti di J, esiste un punto A_k di A con l'indice $k > \nu$ e interno a K_1; è chiaro poi che l'ipersfera Γ di centro A_k e raggio $\frac{\sigma}{4}$ risulta tutta interna a K.

Giacchè k è maggiore di ν è $\delta_k < \frac{\sigma}{4}$ e quindi il punto A_{k+1} è interno a Γ. Ma un punto di Γ o è interno a K_1 o appartiene a Δ, e, una volta che $k+1 > \nu$, A_{k+1} è certo non situato in Δ, dunque A_{k+1} è, al pari di A_k, interno a K_1.

Sul punto A_{k+1}, essendo sempre $k+1 > \nu$, si può ripetere lo stesso ragionamento che è stato fatto su A_k; e quindi si conclude che i punti di A, da A_k in poi, sono tutti interni a K_1.

Ma allora tutti i punti di J appartengono a K_1; mentre, per le ipotesi fatte, vi sono certo punti di J esterni a K_1, tali essendo tutti i punti di J_2.

L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra la proposizione enunciata.

4. Per procedere a una maggiore determinazione del teorema precedente nel caso che J sia vuoto, giova premettere le considerazioni che seguono.

α) Sia H un insieme di semirette o *raggi* di S_r uscenti tutti da uno stesso suo punto O.

Se x è un raggio di S_r uscente da O si dirà che x è un raggio limite di H se ogni *cono di rotazione* di S_r di *vertice* O e *asse* x (4) contiene infiniti raggi di H.

Si osservi che, se $r = 1$, H consta di un raggio e uno solo o di due raggi opposti, e quindi in tal caso non vi è luogo a parlare di raggi limiti di H. E si osservi pure che (per $r > 1$) x è un raggio limite di H quando, e solo quando, descritta una ipersfera di centro O, la traccia di x sulla frontiera dell'ipersfera è punto limite dell'insieme delle tracce sulla frontiera stessa dei raggi di H.

Di qua segue subito che se l'insieme H contiene infiniti raggi esso ammette certo qualche raggio limite.

L'insieme H si dirà *chiuso* se contiene ogni suo eventuale raggio limite; *concatenato* se, fissato a piacere un angolo ε e detti a e b due suoi raggi qualunque, è possibile trovare in H un numero finito di raggi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sì che gli angoli $ax_1, x_1x_2, \dots, x_nb$ risultino tutti inferiori ad ε; *continuo*, se contiene più di un raggio ed è chiuso e concatenato.

Distanza angolare o semplicemente *distanza* di due insiemi H e H' di raggi aventi la stessa origine sarà il limite inferiore dello angolo formato dal raggio corrente di H col raggio corrente di H'.

Un raggio uscente da O è *esterno* ad H se la sua distanza da H non è nulla, ed è invece *interno* ad H se è esterno all'insieme dei raggi uscenti da O e non appartenenti ad H.

Raggio frontiera di H è un raggio uscente da O che non sia nè interno, nè esterno ad H.

Riportandosi all'insieme delle tracce dei raggi di H sulla frontiera di un'ipersfera col centro nell'origine comune dei raggi stessi, si ha subito che H è continuo quando, e solo quando, contiene più di un raggio e non è spezzabile nella somma di due insiemi chiusi (non vuoti) e privi di raggi comuni.

β) Sia I un qualsivoglia insieme di punti di S_r e P un suo punto limite.

Se un raggio x uscente da P è tale che vi sono infiniti punti di I contenuti nel dominio comune a un qualsivoglia cono di rota-

(4) Un tal cono è l'insieme dei raggi di S_r uscenti da O e formanti con x un angolo non superiore a un angolo acuto non nullo prefissato. Se $r = 1$ esso non è altra cosa che lo stesso raggio x; se $r = 2$ esso è un angolo (convesso) bisecato da x.

zione col vertice P e l'asse x (5) e ad una qualsiasi ipersfera di centro P, si dirà che x è, *nel punto limite* P, *un raggio limite di* I.

Se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono n coni di rotazione col vertice P tali che ogni raggio di S_r uscente da P sia contenuto in uno almeno di essi, è chiaro che vi è almeno un cono γ_j, e sia γ_1, tale che descritta una ipersfera qualunque di centro P vi siano infiniti punti di I interni all'ipersfera e appartenenti a γ_1. Di qua, imitando un ragionamento classico, si deduce subito che I ha in P almeno un raggio limite.

Inoltre è chiaro che se l'insieme dei raggi limiti di I in P ha un raggio limite, questo è pure raggio limite di I in P, e quindi:

L'insieme dei raggi limiti di I in P è non vuoto e chiuso.

γ) Nel caso di un insieme non limitato, le considerazioni fatte in β) conducono spontaneamente a quelle che ora passiamo ad esporre e che appunto avremo occasione di applicare.

Dato in S_r un insieme di punti non limitato I e un raggio x di origine O si dirà che x è un *raggio asintotico* o un *asintoto* di I se descritti un cono di rotazione qualsivoglia di vertice O e asse x e una qualsivoglia ipersfera di centro O esistono sempre infiniti punti di I appartenenti al cono ed esterni all'ipersfera.

Si osservi che se x è un asintoto di I è tale ogni altro raggio di S_r equiverso ad x; e si osservi pure che, per una ragione analoga ad altra già addotta:

L'insieme dei raggi asintotici di I uscenti da un punto qualunque di S_r è non vuoto e chiuso (6).

5. Ciò premesso, diciamo A^* l'insieme dei punti distinti della successione A e facciamo vedere che:

Se J è vuoto (e quindi A^* non è limitato), l'insieme dei raggi asintotici di A^* uscenti da un punto qualunque di S_r o consta di un raggio ed uno solo o è continuo.

Sia H l'insieme dei raggi asintotici di A^* uscenti da un punto O, non appartenenti ad A^*, e suppongasi, se è possibile, che H contenga più di un raggio e non sia continuo.

(5) Il cono in discorso è concepito, qui, come l'insieme dei punti dei suoi raggi. Lo stesso dicasi per i casi analoghi del seguito.

(6) Questa proposizione può riguardarsi come caso particolare di quella che chiude β), se si attribuisce ad S_r un solo *punto all'infinito* e si rappresenta lo S_r così ampliato sulla frontiera di una ipersfera di S_{r+1} mediante una proiezione stereografica.

Allora H potrà spezzarsi nella somma di due insiemi H_1 e H_2 privi di elementi comuni, chiusi e a distanza non nulla.

Detta σ questa distanza e supposto $r > 1$, sia K l'insieme dei raggi uscenti da O aventi da H_1 una distanza non superiore a $\frac{\sigma}{2}$ e K_1 l'insieme dei raggi uscenti da O e aventi da H_1 una distanza non superiore a $\frac{\sigma}{4}$.

Gli insiemi K e K_1 saranno chiusi, dotati di raggi interni e raggi frontiera; K_1 sarà tutto interno a K e l'insieme Δ che resta dopo aver soppresso in K i raggi *interni* di K_1 sarà chiuso al pari di K e K_1.

È chiaro intanto che i raggi di Δ non possono contenere infiniti punti di A^*.

E infatti se vi fossero infiniti punti di A^* situati su raggi di Δ questi raggi o sarebbero infiniti o sarebbero in numero finito.

Nella seconda alternativa Δ conterrebbe almeno un raggio passante per infiniti punti di A^* e questo raggio, poichè A^* non ha punti limiti, sarebbe un raggio asintotico di A^*, mentre ciò è assurdo, una volta che Δ non contiene alcun raggio di H_1 o di H_2; e allo stesso assurdo si perverrebbe se valesse la prima alternativa, perchè allora l'insieme dei raggi di Δ contenenti punti di A^* avrebbe almeno un raggio limite e questo sarebbe un raggio di Δ e un raggio asintotico di A^*, una volta che A^* non ha punti limiti.

Adesso descriviamo un'ipersfera Γ di centro O e indichiamo con $\overline{K}$, $\overline{K}_1$ e $\overline{\Delta}$ gli insiemi dei punti appartenenti ai raggi di K, K_1 o Δ e non interni a Γ.

Si costruisca un triangolo rettangolo che abbia un angolo acuto eguale a $\frac{\sigma}{8}$ e l'ipotenusa eguale al raggio dell'ipersfera Γ; e sia τ la lunghezza del cateto opposto all'angolo uguale a $\frac{\sigma}{8}$. Allora ciascun punto di una qualsiasi ipersfera avente per centro un punto di $\overline{K}_1$ e per raggio τ appartiene a $\overline{K}_1$, a Γ o a $\overline{\Delta}$.

Poichè i punti di A^* appartenenti a Γ o a $\overline{\Delta}$ sono in numero finito, si potrà trovare un numero naturale ν tale che per $n > \nu$ il punto A_n di A risulti non contenuto in Γ o $\overline{\Delta}$ e la distanza δ_n fra A_n ed A_{n+1} risulti inferiore a τ.

Dopo ciò, badando che $\overline{K}_1$ contiene certo infiniti punti di A^*, un ragionamento analogo a quello sviluppato nel n^0 3 mostra che $\overline{K}_1$ contiene tutti i punti di A da un certo valor dell'indice in poi.

Ma questo è inconciliabile con l'ipotesi che vi siano raggi di H (quali son quelli di H_2) esterni a K_1; quindi, se $r > 1$, è assurdo supporre che H contenga più di un raggio e non sia continuo.

Resta da considerare il caso in cui sia $r = 1$; nel qual caso è da escludere che H possa consistere di due raggi opposti. Ora ciò è immediato.

Sia PQ un segmento dello S_1 ambiente non contenente punti di A e siano QQ' e PP' le due semirette che insieme con PQ completano lo S_1.

Se la semiretta QQ' contiene infiniti punti di A, detto ν un numero naturale tale che per $n > \nu$ risulti

$$\delta_n < \frac{1}{2} PQ,$$

basta considerare un punto A_k di A con $k > \nu$ appartenente a QQ' per dedurne che tutti i punti di A da A_k in poi appartengono a QQ'; e quindi resta dimostrato che nell'ipotesi attuale H consiste di un raggio ed uno solo.

6. Adesso consideriamo una serie a termini complessi col termine generale convergente a zero:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \tag{2}$$

e poniamo

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Se si rappresentano al solito modo i numeri complessi sopra un piano di Gauss e si dice A_n il punto corrispondente al numero s_n, alla serie (2) resta collegata una successione di punti

$$A \equiv A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

che soddisfa evidentemente alla condizione espressa dalla (1) del n⁰ 3; quindi l'insieme dei valori limiti (o punti limiti) J della serie (2) o è vuoto, o consta di un punto ed uno solo, o è continuo.

Nella prima alternativa l'insieme dei punti di A non è limitato e l'insieme H dei suoi raggi asintotici uscenti da un punto qualunque del piano o consta di un raggio ed uno solo o è continuo.

Se diciamo che la serie (2) è *regolare* quando J è formato da un punto ed uno solo o quando J è vuoto ed H consta di un solo raggio, e che è *semiregolare* quando J è vuoto ed H continuo, abbiamo il teorema:

Una serie a termini complessi col termine generale convergente a zero o è regolare o è semiregolare o ammette come valori limiti tutti i punti di un insieme continuo.

È questa la proposizione che volevamo stabilire e che contiene come caso particolare quella già citata del Prof. CIPOLLA.