IL TEOREMA FONDAMENTALE PER LE FUNZIONI ABELIANE SINGOLARI (*)

Scopo precipuo di questa Memoria (¹) è l'estensione di un teorema classico (²) del sig. HUMBERT, riguardante la teoria delle funzioni iperellitiche singolari al caso di una funzione abeliana singolare con un numero qualunque di variabili indipendenti.

Quando, alcun tempo fa, mi posi questo problema, mi accorsi ben presto che non ne sarei venuto facilmente a capo, se avessi preso a modello i procedimenti escogitati dal sig. HUMBERT per il caso delle funzioni iperellittiche.

Come è noto, essi consistono nel definire, per una assegnata relazione singolare tra i periodi (la cui tabella si suppone già ridotta alla forma normale), un'espressione costruita coi coefficienti, che si mantiene inalterata per le trasformazioni dei periodi del prim'ordine, e nel dimostrare che essa ha un valore (intero) dotato sempre del medesimo segno, qualunque sia la relazione presa a considerare. A ciò si perviene cercando di ridurre la relazione singolare a una forma canonica semplice, e applicando il teorema di esistenza delle funzioni iperellittiche nell'aspetto classico che esso assume quando si supponga ridotta a tipo normale la tabella dei periodi.

Gli sviluppi del sig. HUMBERT, che in un punto ricorrono perfino al famoso teorema della progressione aritmetica di DIRICHLET, mi apparvero, per la loro stessa natura prevalentemente aritmetica,

(*) *Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL*, Serie 3ª, Tomo XIX, 1916, pp. 139-183.

(¹) Di essa ho già pubblicato un breve riassunto nella Nota: *Sur les fonctions abéliennes singulières* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tom. 160 (1-r sem. 1915), pp. 392-394).

(²) HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5me série, tom. XV (1899), pp. 233-350], n. 14.

del tutto inadatti a suggerire l'enunciato del teorema generale, e a indicarne la dimostrazione; e del resto i tentativi che feci per cercar di estendere le considerazioni del sig. HUMBERT, anche tenendo conto della forma perspicua e semplice data ad esse dai sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS (3), rimasero tutti infruttuosi.

Mi sembrò, allora, che fosse miglior partito indagar dapprima il vero fondamento del teorema del sig. HUMBERT, cercandolo nel suo legame col teorema di esistenza, che presentivo intimo e stretto; e trarre, poi, appunto di qui la guida più efficace per gli studi ulteriori.

Posta così la questione, la ricerca assunse subito un orientamento preciso, e i risultati, salvo le difficoltà di dettaglio, si lasciarono agevolmente intravedere e raggiungere.

Partendo dal teorema di esistenza per le funzioni iperellittiche, nella forma flessibile e maneggevole dovuta ai sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS (4), mi fu facile assegnarne un'interpretazione geometrica, in base alla quale il teorema del sig. HUMBERT veniva ridotto a una proposizione di natura affatto elementare (5); e allora vidi subito che, per eseguire l'estensione desiderata, occorreva rifarsi dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane a un numero qualunque di variabili, e che un primo passo verso questa interpretazione doveva già riconoscersi nel teorema col quale, due anni fa, generalizzai il bel risultato dei sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS (6).

La Memoria, che qui vien presentata al lettore, risponde appunto a questo programma e offre, se non mi inganno, insieme con le mie due Note sugli integrali abeliani riducibili (7), una nuova e stringente conferma del grande valore della geometria iperspaziale come mezzo di orientamento e di ricerca.

(3) BAGNERA e DE FRANCHIS, *Le nombre ϱ de* M. PICARD *pour le surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. XXX (2° sem. 1910), pp. 185-238], n. 8.

(4) Loc. cit. 3). n. 5.

(5) SCORZA, *Sulle funzioni iperellitiche singolari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5, vol. XXIII (2° sem. 1914), pp. 566-572].

(6) SCORZA, *Sul teorema di esistenza delle funzioni abeliane,* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI (2° sem. 1913), pp. 386-395].

(7) SCORZA, *Sugli integrali abeliani riducibili,* Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1° sem. 1915) pp. 412-418; e pp. 645-654].

La linea, secondo cui essa si svolge, è semplice e spontanea, sebbene qua e là gli sviluppi siano, per necessità di cose, alquanto complicati; e può esser descritta agevolmente con poche parole.

Si considerino le righe della tabella dei periodi di una funzione abeliana a p variabili indipendenti come le successioni delle coordinate proiettive omogenee di p punti di uno spazio lineare Σ a $2p-1$ dimensioni: in base al teorema di esistenza, codesti p punti saranno congiunti da uno spazio τ a $p-1$ dimensioni, indipendente dallo spazio imaginario coniugato $\overline{\tau}$, e inoltre esisterà in Σ un complesso lineare razionale γ contenente tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$, cioè avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali.

I complessi lineari di Σ, aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali, costituiscono un sistema lineare Λ ∞^{p^2-1}, che può rappresentarsi omograficamente sopra uno spazio lineare Σ' (della dimensione p^2-1), e la rappresentazione può supporsi fatta in modo che i complessi reali e imaginarî di Λ si riflettano rispettivamente sui punti reali e imaginarî di Σ'.

Fra i complessi di Λ ne esistono ∞^{p^2-2} dotati di una retta singolare (almeno); e a questa ∞^{p^2-2} risponde in Σ' un'ipersuperficie $F^{(1)}$ d'ordine p, dotata di una varietà $(p-1)$-pla, $F^{(p-1)}$, che è una particolare varietà di Segre.

I punti reali di $F^{(1)}$, costituenti un'infinità della dimensione *reale* p^2-2, si distribuiscono in due falde, aventi in comune solo i punti di $F^{(p-1)}$, delle quali una, quella che sarà detta la *prima falda*, gode di proprietà topologiche analoghe a quelle di un'ipersfera; in particolare è atta a distinguere i punti reali dello spazio ambiente, che non le appartengono, in un insieme di punti *interni*, e in un insieme di punti *esterni*.

Ciò posto, il risultato essenziale della nostra ricerca consiste nel fatto che:

Il punto Γ di Σ' rispondente al complesso γ di Λ è un punto interno alla prima falda di $F^{(1)}$.

Di qua, quello che abbiamo chiamato teorema fondamentale delle funzioni abeliane singolari si deduce come corollario immediato.

Tra le considerazioni che seguono, la parte indirizzata a stabilire le accennate proprietà topologiche dell'ipersuperficie $F^{(1)}$ potrà forse apparire troppo lunga e minuziosa.

Siccome codesta ipersuperficie si può considerare in infiniti modi come un monoide, si presenta spontanea l'idea che per lo studio delle sue proprietà topologiche giovi l'uso di una sua rappresentazione mediante il metodo della proiezione centrale; e, in realtà, fu questo appunto il mezzo a cui dapprima feci ricorso per intravedere il risultato finale e per iniziarne la dimostrazione.

Ma qualche particolare delle argomentazioni e, soprattutto, il desiderio di collegare le nuove proprietà della $F^{(1)}$ con quelle già conosciute delle varietà di SEGRE mi parvero consigliar l'abbandono di quella via per un'altra, più lunga, forse, ma più diretta, più intimamente legata alla natura dell'argomento e più adatta a mettere in luce chiara e piena i risultati.

Del resto, a conferma di una previsione fatta dal sig. SEGRE nel proemio di una sua Memoria conosciutissima e classica (8), parecchi indizi (9) fan pensare che per lo sviluppo ulteriore della teoria delle funzioni abeliane singolari è necessario avere delle proprietà di quell'ipersuperficie un possesso sicuro. Cosicchè non ci è parso inopportuno di dar qui un quadro possibilmente completo di quelle fra di esse che già cominciano a entrare in gioco.

§ 1.

I VARÎ ASPETTI ANALITICI DEL TEOREMA DI ESISTENZA

1. La condizione, necessaria e sufficiente, perchè il quadro di numeri

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\|$$

possa pensarsi come la tabella di $2p$ sistemi di periodi primitivi per una funzione abeliana a p variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_p$, fu enunciata, come è noto, da RIEMANN e WEIERSTRASS, e dimostrata per la prima volta da POINCARÉ e PICARD.

Essa è (10):

(8) SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [Matematische Annalen, Bd. 40, pp. 413-467].

(9) Si guardi, infatti, oltre che a questa Memoria, alle ricerche del sig. SEVERI e mie sugli integrali abeliani riducibili. Cfr. SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIII (1º sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651]; SCORZA, loc. cit. (7).

(10) Vedi, per es., KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, Leipzig, 1903), pag. 119 e pag. 127.

A) *che esista una forma bilineare alternata a coefficienti intieri*

$$(1) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s \qquad (c_{r,s}+c_{s,r}=0)$$

la quale si annulli facendovi

$$x_r=\omega_{j,r} \quad e \quad y_s=\omega_{k,s} \qquad (j,k=1,2,\dots,p);$$

B) *che, indicati con* $\Omega_r\,(r=1,2,\dots,2p)$ *i* $2p$ *periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque*

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\dots+\lambda_p u_p$$

delle variabili $u_1, u_2, \dots, u_p$, *corrispondenti ai* $2p$ *sistemi di periodi costituenti la tabella* (I), *e posto*

$$\Omega_r=\xi_r+i\eta_r \qquad (i=\sqrt{-1})$$

con le ξ_r *e* η_r *reali, la forma*

$$(2) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s$$

si mantenga sempre diversa da zero e sempre dello stesso segno, qualunque siano i valori (reali o no, ma non, naturalmente, tutti nulli) delle λ.

Si osservi che, poichè la forma bilineare (1) si annulla identicamente quando vi si faccia

$$x_r=\omega_{j,r} \quad \text{e} \quad y_s=\omega_{j,s} \qquad (j=1,2,\dots,p),$$

la condizione A) si traduce in un sistema di $\frac{1}{2}p(p-1)$ equazioni bilineari fra gli elementi delle $\frac{1}{2}p(p-1)$ coppie di righe della matrice (I).

2. Alla condizione B) possono darsi, come ho mostrato in un lavoro precedente ([11]), due altre forme che giova ricordare.

([11]) Loc. cit. ([6]).

In primo luogo (indicando, ora e in seguito, con $\overline{a}$ il numero complesso coniugato di un numero che sia stato indicato con a), da

$$\Omega_r = \xi_r + i\eta_r$$

si trae

$$\overline{\Omega}_r = \xi_r - i\eta_r ,$$

cioè

$$\xi_r = \frac{1}{2}(\Omega_r + \overline{\Omega}_r) \quad \text{e} \quad \eta_r = \frac{1}{2i}(\Omega_r - \overline{\Omega}_r) .$$

Ma allora, se si pone

$$(3) \qquad A_{j,k} = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{k.s} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, p),$$

per modo che

$$A_{k,j} = \overline{A}_{j,k} ,$$

si vede subito che la condizione B) può esser sostituita dall'altra:

B') *che la forma Hermitiana nelle variabili* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (*e nelle loro coniugate* $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_p$)

$$(4) \qquad \sum_{j,k}^{1\dots p} A_{j,k}\, \lambda_j\, \overline{\lambda}_k ,$$

sia definita (*positiva o negativa*).

In secondo luogo, si ponga

$$\omega_{j,r} = \alpha_{j,r} + i\beta_{j,r} , \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ reali, e si considerino i due determinanti

$$(5) \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} \dots & c_{1,2p} \\ c_{2,1} & 0 & c_{2,3} \dots & c_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2p,1} & c_{2p,2} & c_{2p,3} \dots & 0 \end{vmatrix} ,$$

e

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \dots & \alpha_{p,2p} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \dots & \beta_{p,2p} \end{vmatrix} .$$

dei quali il primo è, per quanto sappiamo, emisimmetrico.

Poi si indichi con

$$P_{j_1, j_2, \dots, j_{2h}}$$

lo pfaffiano del determinante emisimmetrico formato dagli elementi secondo cui si incrociano le righe e le colonne del determinante (5) aventi i numeri d'ordine $j_1, j_2, \dots, j_{2h}$; e con

$$\delta_{j_1, j_2, \dots, j_{2h}}$$

il minore che si ottiene da (6) considerando le righe

$$1^a, 2^a, \dots, h^{ma}, (p+1)^{ma}, \dots, (p+h)^{ma},$$

e le colonne

$$j_2^{ma}, j_2^{ma}, \dots, j_{2h}^{ma}.$$

Se si pone

$$(7) \qquad \Delta_h = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{j_1 \dots j_{2h}}^{1 \dots 2p} P_{j_1, j_2, \dots, j_{2h}} \cdot \delta_{j_1, j_2, \dots, j_{2h}}$$

$$(j_1 < j_2 < j_3 \dots < j_{2h}; \ h = 1, 2, \dots, p),$$

la condizione B) può essere ancora rimpiazzata dall'altra:

B″) *che le $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ siano tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte del medesimo segno.*

Il passaggio dalla B′) alla B″) si effettua scrivendo le condizioni perchè la forma Hermitiana (4) sia definita, e dimostrando che

$$(8) \qquad \Delta_h = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,h} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{h,1} & A_{h,2} & \dots & A_{h,h} \end{vmatrix}.$$

3. Nel caso $p = 1$, la condizione A) è identicamente soddisfatta, comunque si scelga la relativa forma bilineare (1), perchè in tal caso le righe della tabella (I) si riducono a una sola; e la condizione B″) si riduce a

$$\Delta_1 \neq 0,$$

cioè ad

$$\alpha_{1,1} \beta_{1,2} - \alpha_{1,2} \beta_{1,1} \neq 0,$$

che è appunto la classica condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione ellittica coi periodi $\omega_{1,1}$ e $\omega_{1,2}$.

Nel caso $p = 2$, la condizione B'') si traduce in

$$\Delta_2 > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_1 \neq 0 ;$$

ma, in virtù di

$$\Delta_2 = A_{1,1} A_{2,2} - A_{1,2} A_{2,1} = \Delta_1 A_{2,2} - A_{1,2} \bar{A}_{1,2} ,$$

dove $A_{1,2} \bar{A}_{1,2}$ non può esser negativo, la diseguaglianza $\Delta_2 > 0$ implica l'altra $\Delta_1 \neq 0$ [12], e quindi la B'') si riduce alla sola diseguaglianza

$$\Delta_2 > 0 .$$

Con ciò si ottiene il teorema di esistenza delle funzioni iperellittiche a due argomenti stabilito dai sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS [13], e si vede pure che:

Per $p \geq 2$ la condizione B'') *è soddisfatta quando (e solo quando) siano soddisfatte le $p - 1$ diseguaglianze*

$$(9) \qquad \Delta_2 > 0 , \ \Delta_1 \Delta_3 > 0 , \ \Delta_4 > 0 , \ \Delta_1 \Delta_5 > 0 , \ldots$$

delle quali l'ultima è

$$\Delta_p > 0 \quad o \quad \Delta_1 \Delta_p > 0$$

secondo che p è pari o dispari.

È questa la forma sotto cui la condizione B'') è enunciata nella nostra Nota di Palermo, ove è fatta appunto l'ipotesi $p \geq 2$.

4. Nell'enunciato originario del teorema di esistenza delle funzioni abeliane, riportato al n. 1, la condizione B) si riferisce al sistema dei periodi di una qualunque combinazione lineare omogenea

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$$

delle variabili $u_1 , u_1 , \ldots , u_p$ corrispondenti ai $2p$ sistemi di periodi della tabella (I); invece la condizione A) involge, almeno apparentemente, i sistemi di periodi di sole p tra queste combinazioni, e

[12] Loc. cit. [6], nota [5] a pie' di pagina.

[13] Loc. cit. [3], n. 5.

cioè di quelle che si ottengono facendo una delle λ uguale a 1 e tutte le altre eguali a zero.

Che, per altro, questa asimmetria sia soltanto apparente, è subito dimostrato.

Siano Ω_r e Ω'_r $(r = 1, 2, \dots, 2p)$ i $2p$ periodi delle due combinazioni lineari omogenee

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$$

$$\lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \dots + \lambda'_p u_p$$

delle variabili $u_1, u_2, \dots, u_p$ corrispondenti ai $2p$ sistemi di periodi della tabella (1).

Sarà

$$\Omega_r = \sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j \, \omega_{j,r},$$

e

$$\Omega'_s = \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \, \omega_{k,s}:$$

quindi

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} \, \Omega_r \, \Omega'_s = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} \sum_{j,k}^{1\dots p} c_{r,s} \, \omega_{j,r} \, \omega_{k,s} \, \lambda_j \, \lambda'_k .$$

Il coefficiente di $\lambda_j \lambda'_k$ nell'espressione del 2^0 membro è, in virtù di A), eguale a zero, per tutti i valori di j e k; dunque

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} \, \Omega_r \, \Omega'_s = 0:$$

cioè la forma bilineare (1) si annulla non solo facendovi

$$x_r = \omega_{j,r} \quad \text{e} \quad y_s = \omega_{k,s} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, p),$$

ma, più generalmente, facendovi (qualunque siano le λ e le λ')

$$x_r = \Omega_r \quad \text{e} \quad y_s = \Omega'_s .$$

Se per esprimere che una forma bilineare alternata a *coefficienti intieri* nelle due serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ e $y_1, y_2, \dots, y_{2p}$ si annulla quando per le x e per le y si pongono gli elementi di due righe qualunque della tabella (I), o, ciò che fa lo stesso, gli elementi di due righe che siano combinazioni lineari omogenee qualunque di quelle della (I), diciamo che gli elementi della (I) soddisfanno a una *relazione di* RIEMANN; e se una relazione di RIEMANN per gli elementi della (I) la diciamo *principale* quando i suoi coefficienti soddisfacciano alla condizione B) o B′) o B′) [14], il teorema di esistenza delle funzioni abeliane potrà essere enunciato brevemente così:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè il quadro (I) *possa pensarsi come la tabella di* $2p$ *sistemi di periodi primitivi per una funzione abeliana a* p *variabili indipendenti, è che i suoi elementi siano legati da una (almeno) relazione principale di* RIEMANN.

§ 2.

PROPRIETÀ DI INVARIANZA DELLE $A_{j,k}$ E DELLE Δ_h.

5. I coefficienti della forma Hermitiana (4), e le espressioni più sopra indicate con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$, godono di una proprietà di invarianza che giova metter subito in evidenza.

Si supponga di eseguire sui periodi $\omega_{j,r}$ una trasformazione lineare unimodulare (a coefficienti interi) per la quale si abbia

$$\omega_{j,r} = \sum_{s=1}^{s=2p} h_{r,s}\, \omega'_{j,s} \tag{10}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Posto

$$c'_{r,s} = \sum_{t,v}^{1\ldots 2p} c_{t,v}\, h_{t,r}\, h_{v,s}, \tag{11}$$

sarà evidentemente

$$c'_{r,s} + \bar{c}'_{s,r} = 0,$$

e le $c'_{r,s}$ saranno i coefficienti di una relazione di RIEMANN per il quadro formato con le $\omega'_{j,r}$.

Ebbene:

Se si indicano con $A'_{j,k}$ *e con* Δ'_j $(j, k = 1, 2, \ldots, p)$ *le espressioni formate con le* $c'_{r,s}$, *e le* $\omega'_{j,r}$ *come le* $A_{j,k}$ *e le* Δ_j *sono costruite con le* $c_{r,s}$ *e le* $\omega_{j,r}$ *si ha*

$$A'_{j,k} = A_{j,k} \quad e \quad \Delta'_j = \Delta_j.$$

[14] Abbiamo introdotta questa nomenclatura, che sembra utile e comoda, nella Nota II, già citata, sugli integrali abeliani riducibili.

E infatti, per quanto è detto nella nostra già citata Nota di Palermo, il fatto che

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} A_{1,1} & . & . & . & A_{1,j} \\ . & . & . & . & . \\ A_{j,1} & . & . & . & A_{j,j} \end{vmatrix}$$

è una pura conseguenza algebrica dell'altro che la forma bilineare (1) si annulla per

$$x_r = \omega_{j,r} \quad \text{e} \quad y_s = \omega_{k,s} \qquad (j\,,\, k = 1, 2, \ldots, p)\,,$$

e quindi anche (attesa la realtà delle $c_{r,s}$) per

$$x_r = \overline{\omega}_{j,r} \quad \text{e} \quad y_s = \overline{\omega}_{k,s}\,.$$

Ma allora potremo asserire, senz'altro, che si ha pure

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} A'_{1,1} & . & . & . & A'_{1,j} \\ . & . & . & . & . \\ A'_{j,1} & . & . & . & A'_{j,j} \end{vmatrix}\,,$$

e quindi tutto sarà dimostrato se riusciremo a far vedere che

$$A'_{j,k} = A_{j,k}\,.$$

Ora ciò è evidente, poichè dalle (10) risulta

$$\overline{\omega}_{j,r} = \sum_{s=1}^{s=2p} h_{r,s}\, \overline{\omega}'_{j,s}\,, \tag{12}$$

e quindi, per le (10) (e 12), e poi per le (11), sarà

$$A_{j,k} = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{k,s} = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s,t,v}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, h_{r,t}\, h_{s,v}\, \omega'_{j,t}\, \overline{\omega}_{k,v} =$$

$$= -\frac{1}{2i} \sum_{t,v}^{1\ldots 2p} c'_{t,v}\, \omega'_{j,t}\, \overline{\omega}_{k,v} = A'_{j,k}\,.$$

Dall'osservazione fatta segue in particolare [15] che:

[15] Loc. cit. [7], Nota II. n. 11.

La proprietà di una relazione di RIEMANN, *espressa col dire che essa è una relazione di* RIEMANN *principale, è una proprietà invariante rispetto alle trasformazioni lineari unimodulari dei periodi.*

6. Nella dimostrazione del numero precedente, ciò che gioca in modo essenziale è l'ipotesi della *realtà* delle $h_{r,s}$, che permette di dedurre le (12) dalle (10) e che, assicurando la realtà delle $c_{r,s}$, permette di poter asserire l'eguaglianza

$$\Delta'_j = \begin{vmatrix} A'_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & A'_{1,j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A'_{j,1} & \cdot & \cdot & \cdot & A'_{j,j} \end{vmatrix};$$

l'ipotesi che esse siano dei numeri interi occorre soltanto per poter dire che le $c'_{r,s}$ sono i coefficienti di una relazione di RIEMANN per il quadro di numeri formato con le $\omega'_{j,r}$.

Segue che:

La proprietà di invarianza, dimostrata nel numero precedente, sussiste di fronte a qualsiasi sostituzione lineare omogenea sulle $\omega_{j,r}$ *rappresentata da formule del tipo* (10) *a coefficienti* $h_{r,s}$ **reali.**

Questa osservazione sarà di importanza capitale per quel che avremo da dire in uno dei paragrafi successivi.

§ 3.

INIZIO DELL'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI ESISTENZA.

7. Supponiamo che la matrice (I) sia la tabella di $2p$ sistemi di periodi primitivi per un corpo di funzioni abeliane a p variabili indipendenti; allora gli elementi della (I) soddisfano a una (almeno) relazione di RIEMANN principale.

Supponiamo di continuare a indicare con le $c_{r,s}$ i coefficienti di questa relazione e di indicare sempre con

$$C\,,\ \Delta\,,\ \Delta_h\,,\ P_{j_1 j_2,\dots,j_{2h}}\,,\ \delta_{j_1,j_2,\dots,j_{2h}}$$

le espressioni costruite con le $c_{r,s}$ e le $\omega_{j,r}$ che così sono state chiamate nel § 1; di più supponiamo, d'ora innanzi, $p \geq 2$ (poichè, per $p = 1$, le considerazioni che seguono o perdono ogni interesse o non sussistono). Con questo vengono escluse dalla nostra ricerca le funzioni ellittiche: ma ciò è ben naturale, perchè per esse non vi ha luogo a interpretazioni geometriche interessanti del teorema di esistenza!

8. Indichiamo con Σ uno spazio lineare a $2p-1$ dimensioni (complesse), e distinguiamo al solito modo i punti di Σ in *reali* e *immaginari* fissando una determinata rappresentazione parametrica dei suoi punti mediante coordinate proiettive omogenee.

Poi indichiamo con ω_j $(j=1, 2, \ldots, p)$ il punto di Σ che ha per coordinate le

$$\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \ldots, \omega_{j,2p};$$

con $\overline{\omega}_j$ il punto imaginario coniugato di ω_j, cioè quello che ha per coordinate le

$$\overline{\omega}_{j,1}, \overline{\omega}_{j,2}, \ldots, \overline{\omega}_{j,2p},$$

e infine con τ e $\overline{\tau}$ gli spazî imaginarî coniugati congiungenti rispettivamente i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ e i punti $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_p$.

Dimostriamo in primo luogo che:

Gli spazî τ e $\overline{\tau}$ sono due S_{p-1} indipendenti, cioè sono, come si dice, due spazî imaginarî coniugati di specie p.

Infatti, in virtù delle ipotesi fatte, si ha

$$\Delta_p \neq 0; \tag{13}$$

ma

$$\Delta_p = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} P_{1,2,\ldots,2p}\, \delta_{1,2,\ldots,2p} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sqrt{C} \cdot \Delta: \tag{14}$$

quindi si ha, intanto,

$$\Delta \neq 0.$$

Ora [16],

$$\Delta = \frac{(-1)^p}{2^p\, i^p} \begin{vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p,2p} \\ \overline{\omega}_{1,1} & \overline{\omega}_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{\omega}_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\omega}_{p,1} & \overline{\omega}_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{\omega}_{p,2p} \end{vmatrix}; \tag{15}$$

[16] Loc. cit. [6], nota [7] a pie' di pagina.

dunque il determinante che comparisce nel secondo membro della (15) è diverso da zero, e i $2p$ punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_p$ sono indipendenti.

Ciò implica, come volevasi, che τ e $\overline{\tau}$ sono due S_{p-1} indipendenti.

9. Chiamiamo γ^* il sistema nullo *razionale* [17] di Σ rappresentato, alla solita maniera di PLÜCKER, dall'equazione bilineare

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s = 0\,, \tag{16}$$

cioè dall'equazione che lega le coordinate x_r e y_s di due punti coniugati rispetto ad esso, e γ il complesso lineare (*razionale*) definito da γ^*.

L'equazione di γ è la stessa equazione (16), purchè la si interpreti come una equazione tra i binomii

$$x_r\, y_s - x_s\, y_r\,,$$

che sono le coordinate plückeriane della retta congiungente il punto di coordinate x_r col punto di coordinate y_s.

In virtù della diseguaglianza (13) e dell'eguaglianza (14), si ha

$$C \neq 0\,;$$

dunque:

Il sistema nullo γ^* o, ciò che fa lo stesso, il complesso lineare γ, è privo di punti singolari.

Siccome l'equazione (16) è soddisfatta quando per le x_r e le y_s vi si pongano, rispettivamente, gli elementi di due righe, che siano due combinazioni lineari omogenee delle righe della tabella (I), possiamo dire che i punti di τ sono a due a due coniugati rispetto a γ^*, e che quindi ogni retta di τ appartiene a γ.

Attesa la realità dei coefficienti dell'equazione (16), γ e γ^* si comportano rispetto a $\overline{\tau}$ allo stesso modo che rispetto a τ; quindi:

Gli spazi τ e $\overline{\tau}$ sono due spazî autopolari per γ^* e due spazî totali per γ.

10. Nelle osservazioni del numero precedente è già contenuta l'interpretazione geometrica della prima parte del teorema di esi-

(17) Loc. cit. (7), Nota I, n. 3.

stenza delle funzioni abeliane; essa è dunque affatto semplice e immediata.

Meno semplice e alquanto riposta è invece quella della seconda parte, cioè della condizione B); la quale, com'è evidente *a priori*, non può che consistere in una proprietà di natura topologica.

Per arrivarvi, si presenta spontanea l'idea di considerare la totalità dei complessi lineari reali di Σ aventi due spazî totali in τ e $\overline{\tau}$, e di caratterizzare in essa la posizione di γ rispetto alla varietà di quelli, fra codesti complessi lineari, che posseggono spazî singolari.

È quanto appunto sarà fatto nelle pagine seguenti.

§ 4.

Le varietà di punti $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)}$.

11. Ricorrendo per un momento a una trasformazione di coordinate in Σ (trasformazione che sarà certo imaginaria), si può supporre che τ e $\overline{\tau}$ siano, nelle nuove coordinate x', gli spazî rappresentati rispettivamente dai due sistemi di equazioni

$$x'_{p+1} = 0, \; x'_{p+2} = 0, \ldots, x'_{2p} = 0$$

e

$$x'_1 = 0, \; x'_2 = 0, \ldots, x'_p = 0.$$

Allora, se

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a'_{r,s}\, x'_r\, y'_s = 0 \tag{17}$$

è, nelle nuove coordinate, l'equazione di un sistema nullo avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazî autopolari, l'equazione (17) deve diventare un'identità quando vi si faccia

$$x'_{p+1} = x'_{p+2} = \ldots = x'_{2p} = y'_{p+1} = y'_{p+2} = \ldots = y'_{2p} = 0,$$

oppure

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_p = y'_1 = y'_2 = \ldots = y'_p = 0.$$

Ciò porta che nella (17) possono esser diverse da zero soltanto le $a_{r,s}$, per le quali uno degl'indici è scelto nella successione

$$1, 2, \ldots, p$$

e l'altro è scelto nella successione

$$p+1\,,\,p+2\,,\ldots,\,2p\,;$$

quindi:

La dimensione del sistema lineare Λ, formato dai complessi lineari di Σ che hanno due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$, è p^2-1.

Il determinante $|a'_{r,s}|$ formato coi coefficienti dell'equazione (17), ove si ponga:

$$P=\begin{vmatrix} a'_{1,p+1} & a'_{1,p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{1,2p} \\ a'_{2,p+1} & a'_{2,p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{p,p+1} & a'_{p,p+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{p,2p} \end{vmatrix},$$

ha per valore P^2 e per caratteristica il doppio della caratteristica di P (18).

Ora P non è altra cosa che il modulo della reciprocità fissata tra gli spazî τ e $\bar{\tau}$ dall'equazione bilineare

$$\sum_{r=1}^{r=p}\ \sum_{s=p+1}^{s=2p} a'_{r,s}\,x'_r\,y'_s=0\,,$$

quando si interpretino le $(x'_1\,,\,x'_2\,,\ldots,\,x'_p)$ come coordinate correnti di punto in τ, e le $(y'_{p+1}\,,\,y'_{p+2}\,,\ldots,\,y'_{2p})$ come coordinate correnti di punto in $\bar{\tau}$; inoltre questa reciprocità è quella che si ottiene fra τ e $\bar{\tau}$ facendo corrispondere a ogni punto di τ l'iperpiano di $\bar{\tau}$ in cui $\bar{\tau}$ è tagliato dall'iperpiano polare di quel punto rispetto al sistema nullo (17): cioè, come diremo, quella *indotta* fra τ e $\bar{\tau}$ da questo sistema nullo. Dunque:

Facendo corrispondere a un complesso di Λ la reciprocità che il relativo sistema nullo induce tra τ e $\bar{\tau}$, si ottiene, fra Λ e la totalità (lineare) delle trasformazioni reciproche di τ in $\bar{\tau}$, una corrispondenza biunivoca omografica, per la quale alla varietà dei complessi di Λ dotati di un S_{2l-1} asse viene a corrispondere la varietà delle trasformazioni reciproche singolari di specie l.

(18) E infatti, se $|a'_{r,s}|$ ha per caratteristica il numero (necessariamente pari) $2p-2l$, esiste in $|a'_{r,s}|$ un minore principale non nullo d'ordine $2p-2l$. Esso è il quadrato di un conveniente minore d'ordine $p-l$ di P: dunque in P esiste intanto un minore non nullo d'ordine $p-l$.

Viceversa, un minore non nullo di P dà subito luogo a un minore non nullo di $|a'_{r,s}|$ d'ordine doppio: dunque la caratteristica di P è appunto $p-l$.

Nella qual proposizione è implicitamente contenuta l'altra:
Se un complesso lineare di Λ è dotato di un S_{2l-1}-asse, esso si appoggia a ciascuno degli spazî τ e $\overline{\tau}$ secondo un S_{l-1} (19).

Prima di procedere innanzi, ad evitare equivoci, sarà bene che stabiliamo esplicitamente di dire che un S_{2l-1} è *asse* o *centro* per un complesso lineare, quando esso è il luogo di tutti e soli i punti singolari del complesso; e di dire, invece, che un S_{2l-1} è *singolare* per un complesso quando lo S_{2l-1} appartiene al suo asse, senza coincidere eventualmente con esso. E analogamente, allorchè una trasformazione reciproca è singolare di specie l, chiameremo *centri* o *assi* della reciprocità gli S_{l-1} luogo dei punti singolari; mentre diremo suoi *spazî singolari* questi S_{l-1} o gli spazî ad essi subordinati.

12. Rappresentiamo omograficamente gli elementi del sistema Λ (o le relative reciprocità fra τ e $\overline{\tau}$) sui punti di uno spazio lineare Σ' a p^2-1 dimensioni; e supponiamo fin da ora, per quanto ciò interessi solo più tardi, di far la cosa in modo che i complessi lineari reali di Λ siano rappresentati dai punti reali di Σ', e quelli imaginarî dai punti imaginarî.

Allora entro Σ' si avranno $p-1$ varietà algegriche

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)},$$

delle quali la $F^{(l)}$ $(l=1, 2, \dots, p-1)$ rappresenterà coi suoi punti la totalità dei complessi di Λ dotati di un S_{2l-1} singolare, e (per $l>1$) sarà contenuta nelle $F^{(l-1)}, F^{(l-2)}, \dots, F^{(1)}$.

La determinazione della dimensione e dell'ordine di $F^{(l)}$ non offre alcuna difficoltà, quando si tenga presente quel che è detto nel numero precedente e si ricordi un noto risultato del sig. Segre (20).

Infatti $F^{(l)}$ si può riguardare come l'imagine della totalità delle reciprocità degeneri di specie $\geq l$, fra τ e $\overline{\tau}$, entro lo spazio Σ' che rappresenta, omograficamente, l'insieme di tutte le trasformazioni reciproche di τ in $\overline{\tau}$; e quindi, per il ricordato teorema del Segre, la sua dimensione è

$$p^2-l^2-1$$

(19) Cfr. loc. cit. (2), Nota II, n. 12, ove questa proposizione vien dedotta da un teorema del sig. Palatini; teorema richiamato nella Nota I al n. 4.

(20) Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. IX (2º sem. 1909), pp. 253-260], n. 2.

e il suo ordine è

$$\frac{(2l)_l\,(2l+1)_l \dots (p+l-1)_l}{(l)_l\,(l+1)_l\,(l+2)_l \dots (p-1)_l},$$

ove, al solito, è fatto uso della notazione definita da

$$m_n = \binom{m}{n}.$$

In particolare, $F^{(p-1)}$ ha la dimensione $2(p-1)$ e l'ordine $(2p-2)_{p-1}$, ed $F^{(1)}$ è un'ipersuperficie di ordine p.

La varietà $F^{(p-1)}$ che, pel modo stesso com'è stata incontrata, rappresenta biunivocamente, senza eccezioni, le coppie di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$, è una *varietà di* SEGRE *di* 2ª *specie, con gl'indici eguali entrambi a* $p-1$ (²¹).

Essa ammette due schiere ∞^{p-1} di spazî a $p-1$ dimensioni: due spazî distinti appartenenti a una medesima schiera non hanno punti comuni; due spazî appartenenti a schiere diverse hanno a comune un punto, ed uno solo, cosicchè gli spazî di una medesima schiera sono punteggiati omograficamente da quelli dell'altra.

I punti di un S_{p-1} di queste schiere rappresentano le coppie di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ che si ottengono associando un iperpiano fisso di τ (o di $\overline{\tau}$) con un iperpiano variabile in $\overline{\tau}$ (o in τ).

Le varietà $F^{(p-2)}, F^{(p-3)}, \dots, F^{(1)}$ sono le varietà riempite, rispettivamente, dalle corde, dai piani bisecanti, ..., dagli S_{p-2} $(p-1)$-secanti della $F^{(p-1)}$; e le $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots, F^{(p-1)}$ sono, a loro volta, successivamente, le varietà dei punti doppî, tripli, ..., $(p-1)$-pli dell'ipersuperficie $F^{(1)}$ (²²).

La $F^{(1)}$ si dirà, per comodità di discorso, l'*ipersuperficie congiunta* alla varietà di SEGRE di 2ª specie $F^{(p-1)}$; e la $F^{(p-1)}$ si dirà il *nucleo* della $F^{(1)}$ e della successione

$$F^{(1)},\ F^{(2)}, \dots, F^{(p-2)}.$$

(²¹) SEGRE, loc. cit. (⁸); e inoltre, SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazî* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. V, 1891, pp. 192-204). Quanto alla nomenclatura quivi adoperata, cfr. SCORZA, *Sulle varietà di* SEGRE (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV, 1909, pp. 119-131), n. 1.

(²²) Loc. cit. ²⁰).

13. Passiamo ora a richiamare o stabilire alcune proprietà delle $F^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, p-1)$, che ci saranno utili per il seguito.

Fissiamo in ciascuno degli spazî τ e $\overline{\tau}$ una stella di iperpiani di dimensione k $(0 \leq k \leq p-2)$, cioè avente per sostegno un S_{p-k-2}, e associamo ciascun iperpiano della prima stella con ciascun iperpiano della seconda.

Alla totalità delle coppie di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$, così ottenuta, risponderà sulla $F^{(p-1)}$ una varietà di Segre (di 2ª specie, con gl'indici eguali a k se $k > 0$), la quale, al variare della scelta delle stelle di iperpiani fissate in τ e $\overline{\tau}$, descriverà una schiera della dimensione

$$2(k+1)(p-k-1).$$

Indicheremo questa schiera col simbolo $[k]$; la varietà corrente di $[k]$ si indicherà con $L^{(k)}$, e lo spazio di appartenenza di $L^{(k)}$ si chiamerà $\sigma^{(k)}$.

La schiera $[0]$ è la totalità dei punti di $F^{(p-1)}$; la schiera $[1]$ (per $p > 2$) è un sistema di $\infty^{4(p-2)}$ quadriche ordinarie non specializzate; la schiera $[2]$ (per $p > 3$) è un sistema di $\infty^{6(p-3)}$ V_4^6 di Segre, ecc.

Le schiere $[k]$ e $[p-k-2]$ si diranno *complementari*; e tali si diranno pure una $L^{(k)}$ e una $L^{(p-k-2)}$ se i sostegni delle stelle di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$, da cui proviene la prima, sono rispettivamente indipendenti dai sostegni delle stelle che dànno origine alla seconda.

Evidentemente:

La dimensione di una schiera eguaglia quella della schiera complementare;

Per $k+1$ punti generici di $F^{(p-1)}$ passa una, ed una sola varietà della schiera $[k]$;

Una $L^{(k)}$ ed una $L^{(k')}$, ove sia $k + k' \geq p-1$, si tagliano in generale in una $L^{(k+k'-p+1)}$;

e infine:

Le varietà della schiera $[h]$ di una qualsiasi $L^{(k)}$ appartengono alla schiera $[h]$ di $F^{(p-1)}$.

14. Siano α e $\overline{\alpha}'$ gli S_{p-k-2} di τ e $\overline{\tau}$, sostegni delle stelle di iperpiani che dànno origine a una varietà di $[k]$.

Lo spazio lineare a cui questa appartiene è della dimensione

$$(k+1)^2 - 1.$$

e non è altra cosa che l'imagine, entro Σ', della totalità delle reciprocità singolari fra τ e $\overline{\tau}$ di specie $\geq p - k - 1$ che hanno per centri spazî passanti per α e $\overline{\alpha}'$.

Segue che:

Gli spazî $\sigma^{(k)}$ cui appartengono le singole varietà $L^{(k)}$ son tutti situati sulla $F^{(p-k-1)}$.

Vediamo di invertire questo risultato con tutta precisione.

Sia P un punto di $F^{(p-k-1)}$ (e quindi di $F^{(p-k-2)}$, $F^{(p-k-3)}, \ldots, F^{(1)}$); allora due casi possono presentarsi, e cioè:

a) o $F^{(p-k-1)}$ è, tra le $F^{(l)}$ contenenti P, quella per cui l è massimo;

b) o tra le $F^{(l)}$ contenenti P quella per cui l è massimo è la $F^{(p-k+h-1)}$, dove $h > 0$.

Nella prima alternativa, P è imagine, in Σ', di una reciprocità singolare fra τ e $\overline{\tau}$ di specie $p - k - 1$, e quindi per P passa uno ed uno solo spazio $\sigma^{(k)}$.

Nella seconda alternativa P è imagine di una reciprocità degenere fra τ e $\overline{\tau}$ di specie $p - k + h - 1$, avente per centri, in τ e $\overline{\tau}$, due spazî β e $\overline{\beta}'$ di dimensione $p - k + h - 2$; quindi passano per P gli spazî di appartenenza di tutte le varietà $L^{(k)}$ di $[k]$, che provengono dalle stelle di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ aventi, per centri, degli S_{p-k-2} situati in β e $\overline{\beta}'$, rispettivamente. Tali spazî son dunque $\infty^{2h(p-k-1)}$ e, com'è chiaro, essi contengono, tutti, tutti e soli i punti dell'unico spazio $\sigma^{(k-h)}$ passante per P.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se per un punto P di $F^{(p-k-1)}$ la $F^{(l)}$, che lo contenga, di indice l più elevato, è la $F^{(p-k+h-1)}$ $(h \geq 0)$, per P passano $\infty^{2h(p-k-1)}$ spazî $\sigma^{(k)}$ e uno ed un solo spazio $\sigma^{(k-h)}$; quest'ultimo rappresentando la completa intersezione di quelli.

In particolare:

Per uno spazio $\sigma^{(k)}$ passano $\infty^{2(p-k-2)}$ spazî $\sigma^{(p-2)}$ che non hanno altri punti comuni all'infuori di quelli di $\sigma^{(k)}$.

Notisi, infine, che, se $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(k-1)}$ è la successione di varietà di cui è nucleo una $L^{(k)}$ (ordinate per dimensione decrescente), le $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(k-1)}$, $L^{(k)}$ appartengono rispettivamente alle $F^{(p-k)}$, $F^{(p-k+1)}, \ldots, F^{(p-1)}$.

§ 5.

Le varietà di iperpiani $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(p-1)}$.

15. Accanto alle varietà di punti $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)}$, giova considerare in Σ' anche le varietà di iperpiani $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(p-1)}$ a cui si perviene nel modo seguente.

Si fissi in τ un punto A, e in $\overline{\tau}$ un punto $\overline{A}'$: poi si considerino tutte le trasformazioni reciproche di τ in $\overline{\tau}$ che hanno in A e in $\overline{A}'$ una coppia di punti coniugati. Esse formano un sistema lineare di dimensione $p^2 - 2$, e quindi le loro immagini in Σ' riempiranno un iperpiano.

Al variare di A in τ e $\overline{A}'$ in $\overline{\tau}$, questo iperpiano descrive una varietà della dimensione $2p - 2$, che sarà appunto indicata con $\Phi^{(p-1)}$.

Gli iperpiani di $\Phi^{(p-1)}$ corrispondono biunivocamente, senza eccezioni, alle coppie di punti di τ e $\overline{\tau}$; e quelli rispondenti alle coppie formate da un punto fisso di τ (di $\overline{\tau}$), con un punto variabile in $\overline{\tau}$ (in τ), costituiscono un sistema lineare ∞^{p-1}, cioè una stella avente per sostegno un S_{p^2-p-1}. Segue che $\Phi^{(p-1)}$ contiene due schiere di sistemi lineari ∞^{p-1} di iperpiani, dotate delle stesse proprietà delle schiere di S_{p-1} di $F_{(p-1)}$, e quindi $\Phi^{(p-1)}$ è, come $F^{(p-1)}$, una *varietà di* Segre di 2ª specie con gl'indici eguali entrambi a $p-1$; solo che gli elementi di $\Phi^{(p-1)}$ sono iperpiani, mentre quelli di $F^{(p-1)}$ sono punti.

Le varietà $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(p-2)}$, cui sopra è stato accennato, saranno allora semplicemente quelle aventi per $\Phi^{(p-1)}$, lo stesso significato che $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-2)}$ hanno per $F^{(p-1)}$.

La schiera avente per $\Phi^{(p-1)}$ lo stesso significato che $[k]$ ha per $F^{(p-1)}$, si indicherà con $\{k\}$. La varietà corrente di $\{k\}$ si indicherà con $\lambda^{(k)}$; la stella di iperpiani cui appartiene $\lambda^{(k)}$ si chiamerà $s^{(k)}$, e il sostegno di questa stella si chiamerà $S^{(k)}$.

16. I legami più notevoli che intercedono fra le varietà $F^{(l)}$ e $\Phi^{(l)}$ $(l = 1, 2, \dots, p-1)$ risultano dalle considerazioni seguenti.

Sia α l'iperpiano di $\Phi^{(p-1)}$ rispondente alla coppia di punti A e $\overline{A}'$ di τ e $\overline{\tau}$, ed $L_1^{(p-2)}$ la $\overline{L}^{(p-2)}$ di $F^{(p-1)}$ rispondente alle stelle di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ aventi per centri A e $\overline{A}'$. L'intersezione completa di α con $F^{(p-1)}$ è costituita da due varietà di Segre — aventi per ordine comune la metà dell'ordine di $F^{(p-1)}$ —, delle quali una risponde alla totalità delle coppie di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ che si ottengono associando ciascun iperpiano di τ per A con ogni iperpiano di $\overline{\tau}$, e l'altra a quella delle coppie di iperpiani che risultano aggregando ciascun iperpiano di $\overline{\tau}$ per $\overline{A}'$ con ogni iperpiano di τ [23]. Ma allora, poichè queste due varietà si tagliano appunto in $L_1^{(p-2)}$, α tocca $F^{(p-1)}$ in tutti i punti di $L_1^{(p-2)}$.

Viceversa, poichè il doppio dell'ordine di $L_1^{(p-2)}$ supera l'ordine di ciascuna delle due nominate varietà di Segre, un iperpiano che tocchi $F^{(p-1)}$ in tutti i punti di $L_1^{(p-2)}$ contiene queste due varietà, e quindi coincide con α [24]; dunque:

Gli S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei punti di una $L^{(p-2)}$ stanno tutti in un iperpiano ed in uno solo, e $\Phi^{(p-1)}$ non è altra cosa che l'insieme degli iperpiani che per tal modo vengono a corrispondere alle singole varietà della schiera $[p-2]$.

Questo teorema ci condurrà subito a un altro che lo contiene come caso particolare.

Sia $\lambda_1^{(k)}$ una varietà di $\{k\}$; $s_1^{(k)}$ la stella a cui appartiene, ed $S_1^{(k)}$ il sostegno di $s_1^{(k)}$.

Gli iperpiani di $\lambda_1^{(k)}$ corrispondono alle coppie di punti di τ e $\overline{\tau}$ che si ottengono aggregando ogni punto di un certo S_k, β, di τ, con ogni punto di un certo S_k, $\overline{\beta}'$ di $\overline{\tau}$; quindi, se $L_1^{(p-k-2)}$ è la varietà di $[p-k-2]$ rispondente alle stelle di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ coi centri β e $\overline{\beta}'$, cioè la varietà di $[p-k-2]$ comune a tutte le varietà di $[p-2]$ che nascono dal considerare le coppie di stelle di iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ aventi per centri le coppie di punti di β e $\overline{\beta}'$, gli S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei singoli punti di $L_1^{(p-k-2)}$ stanno in ciascun iperpiano di $\lambda_1^{(k)}$.

Segue che lo spazio di appartenenza di questi S_{2p-2} o è $S_1^{(k)}$ o sta in $S_1^{(k)}$.

Come ora vedremo, questa seconda alternativa deve essere esclusa per ogni valore di k. Intanto essa non si verifica certo per $k=0$, in virtù di quanto è detto più sopra; e, evidentemente, non si verifica neppure per $k=p-2$, una volta che $s_1^{(k)}$ ha (come sistema di iperpiani) la dimensione $(k+1)^2-1$, e quindi $S_1^{(k)}$ è

(23) Gli S_{p^2-p-1}, a cui appartengono queste due varietà di Segre e le analoghe, forniscono centri delle due schiere di stelle ∞^{p-1} di $\Phi^{(p-1)}$.

(24) L'intersezione di α con $F^{(p-1)}$ *appartiene* ad α.

uno spazio della dimensione

$$p^2 - (k+1)^2 - 1\,,$$

cioè, per $k = p - 2$, della dimensione $2p - 2$.

Possiamo dire, pertanto, che:

I sostegni delle stelle $s^{(p-2)}$ *sono gli* S_{2p-2} *tangenti ad* $F^{(p-1)}$;

o, ciò che fa lo stesso,

Gli iperpiani di $\Phi^{(1)}$ *sono semplicemente gli iperpiani tangenti ad* $F^{(p-1)}$.

Adesso si torni a considerare la stella $s_1^{(k)}$, e si supponga che sia $k < p - 2$. Per il teorema che chiude il n. 14 applicato a $\Phi^{(p-1)}$, la stella $s_1^{(k)}$ sta in $\infty^{2(p-k-2)}$ stelle $s^{(p-2)}$ e rappresenta la loro completa intersezione; dunque gli $\infty^{2(p-k-2)}$ S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei punti di $L^{(p-k-2)}$ *appartengono* ad $S_1^{(k)}$, e possiamo enunciare il seguente teorema generale:

Gli S_{2p-2} *tangenti ad* $F^{(p-1)}$ *nei punti di una* $L^{(p-k-2)}$ $(0 \leq p \leq k - 2)$ *appartengono ad uno spazio a* $p^2 - (k+1)^2 - 1$ *dimensioni; e, al variare della* $L^{(p-k-2)}$ *entro la schiera* $[p - k - 2]$, *la stella di iperpiani che ha per sostegno questo spazio, descrive la totalità delle stelle* $s^{(k)}$, *cioè la varietà* $\Phi^{(p-k-1)}$ (25).

L'$S_{p^2-(k+1)^2-1}$, di cui si parla in questo teorema, si dirà lo *spazio tangente ad* $F^{(p-1)}$ *lungo la considerata* $L^{(p-k-2)}$.

17. A maggiore determinazione del teorema precedente, si osservi che:

Se per $k+1$ *punti* $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ *di* $F^{(p-1)}$ *passa una ed una sola* $L^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, *un iperpiano che contenga gli* S_{2p-2} *ivi tangenti ad* $F^{(p-1)}$ *contiene tutti gli spazî* S_{2p-2} *tangenti ad* $F^{(p-1)}$ *nei punti di questa* $L_1^{(k)}$;

il che val quanto dire che:

Gli S_{2p-2} *tangenti ad* $F^{(p-1)}$ *in* $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ *hanno come spazio di appartenenza lo* $S_{p^2-(p-k-1)^2-1}$ *tangente ad* $F^{(p-1)}$ *lungo* $L_1^{(k)}$.

Siccome il teorema è evidente per $p = 2$ e si stabilisce facilmente per $p = 3$, per dimostrarlo in generale si potrà supporre $p > 3$ e basterà far vedere che sussiste per $F^{(p-1)}$ se sussiste per le varietà di Segre di 2ª specie con gl'indici eguali tra loro ma inferiori a $p - 1$.

(25) Come $F^{(p-k-1)}$ è il luogo degli spazî $\sigma^{(k)}$, così $\Phi^{(p-k-1)}$ è l'insieme delle stelle $s^{(k)}$.

Supponiamo, in primo luogo, che sia $k < p - 2$; e sia π un iperpiano contenente gli S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei punti $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ di $L_1^{(k)}$.

Per $L_1^{(k)}$ passano infinite varietà della schiera $[p-2]$, poichè, in base all'ipotesi fatta sui punti $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$, basta che una $L^{(p-2)}$ passi per questi punti per contenere necessariamente tutta la $L_1^{(k)}$. Allorchè una $L^{(p-2)}$ passa per $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$, gli S_{2p-4} che la toccano in $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$, stanno tutti in π; quindi per l'ipotesi fatta, che il teorema sia vero per ogni $L^{(p-2)}$, appartengono a π gli S_{2p-4} tangenti alla $L^{(p-2)}$ in tutti i punti di $L_1^{(k)}$. Ora, gli S_{2p-4} tangenti alle varie $L_{(p-2)}$ per $L_1^{(k)}$ in un punto M di $L_1^{(k)}$ riempiono totalmente l'S_{2p-2} ivi tangente ad $F^{(p-1)}$ poichè è sempre possibile di obbligare una $L^{(p-2)}$ a passare per $L_1^{(k)}$ e per un punto di $F^{(p-1)}$ infinitamente vicino ad M in una direzione arbitraria; dunque π contiene, come volevasi, tutti gli S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei punti di $L_1^{(k)}$.

Nel caso in cui sia $k = p - 2$ questo ragionamento non può esser fatto; ma in tal caso soccorre l'osservazione che, in virtù di quanto ormai è acquisito, π contiene gli S_{2p-2} tangenti ad $F^{(p-1)}$ in tutti i punti delle $L^{(p-3)}$ di $L_1^{(p-2)}$ determinate dai punti $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ presi a $p-2$ a $p-2$; e quindi in tutti i punti delle quadriche della schiera [1] di $L_1^{(p-2)}$ (26), cioè in tutti i punti di $L_1^{(p-2)}$.

18. A precisare infine nettamente e compiutamente le mutue relazioni delle $F^{(l)}$ e delle $\Phi^{(l)}$, ricordiamo che quando una varietà $V_{k'}$ è il luogo degli S_k $(k+1)$-secanti di una V_h, gli spazî tangenti a $V_{k'}$ nei punti di un tale S_k coincidono tutti con lo spazio congiungente gli spazî tangenti a V_h nei punti di appoggio dell'S_k (27); quindi, una volta che $F^{(p-k-1)}$ è il luogo degli S_k $(k+1)$-secanti di $F^{(p-1)}$, abbiamo il teorema:

(26) Infatti ogni quadrica di tal fatta ha un punto comune con ciascuna delle $p-1$ $L^{(p-3)}$ di $L_1^{(p-2)}$ considerate, ed è $p - 1 > 2$ ecc.

(27) Questa utile osservazione, che si giustifica subito per via differenziale, è dovuta al sig. Terracini. Vedi la sua Nota *Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$-secanti ha dimensione minore dell'ordinario* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXI, 1911, (1° semestre), pp. 392-396], ove si trovano dei bei teoremi generali, di cui quelli trovati qui non sono che la conferma e, per il caso nostro particolare, la completa determinazione.

Gli spazî tangenti ad $F^{(p-1)}$ lungo la varietà $L^{(k)}$, cioè gli spazî $S^{(p-k-2)}$, toccano lungo i $\sigma^{(k)}$ delle relative $L^{(k)}$ la varietà $F^{(p-k-1)}$: quindi $\Phi^{(k+1)}$ è la varietà degli iperpiani tangenti ad $F^{(p-k-1)}$.

In particolare:

Gli iperpiani di $\Phi^{(p-1)}$ sono gli iperpiani tangenti di $F^{(1)}$: ognuno di essi tocca $F^{(1)}$ nei punti di uno spazio $\sigma^{(p-2)}$.

Con questo restano generalizzate alcune osservazioni precedenti, e restano perfettamente chiariti i rapporti mutui delle $F^{(l)}$ e $\Phi^{(l)}$; i quali, occorre appena avvertirlo, involgono simmetricamente le $F^{(l)}$ e $\Phi^{(l)}$.

19. *Se le due varietà $L_1^{(k)}$ ed $L_1^{(p-k-2)}$ delle schiere $[k]$ e $[p-k-2]$ sono complementari, lo spazio di appartenenza dell'una è indipendente dallo spazio tangente ad $F^{(p-1)}$ lungo l'altra; e viceversa.*

E infatti siano $\sigma_1^{(k)}$ lo spazio di appartenenza di $L_1^{(k)}$, ed $S_1^{(k)}$ lo spazio tangente ad $F^{(p-1)}$ lungo $L_1^{(p-k-2)}$. Poi sia $\lambda_1^{(k)}$ la varietà della schiera $\{k\}$ appartenente alla stella $s_1^{(k)}$ di sostegno $S_1^{(k)}$.

Se $\sigma_1^{(k)}$ si appoggia ad $S_1^{(k)}$, gli iperpiani di $\lambda_1^{(k)}$ hanno un punto almeno in comune situato su $\sigma_1^{(k)}$. Ciò significa che, se α ed $\overline{\alpha}'$ sono gli S_{p-k-2} sostegni delle stelle di τ e $\overline{\tau}$, che dànno origine ad $L_1^{(k)}$, e β e $\overline{\beta}'$ sono gli S_k di τ e $\overline{\tau}$ che dànno origine, concepiti come centri di stelle di iperpiani, ad $L_1^{(p-k-2)}$, e, concepiti come luoghi di punti, a $\lambda_1^{(k)}$, esiste almeno una reciprocità degenere fra τ e $\overline{\tau}$, avente per centri α e $\overline{\alpha}'$ o due spazî passanti per α ed $\overline{\alpha}'$, rispetto a cui un punto qualunque di β è coniugato a un punto qualunque di $\overline{\beta}'$; cioè rispetto a cui ciascun punto di β (di $\overline{\beta}'$) o ha per iperpiano omologo un iperpiano per $\overline{\beta}'$ (per β), o è addirittura singolare.

Ora una tale reciprocità esiste o non, secondo che una almeno o nessuna delle coppie di spazî α e β, $\overline{\alpha}'$ e $\overline{\beta}'$ è formata di spazî dipendenti (28), e le considerazioni fatte possono essere invertite; dunque $\sigma_1^{(k)}$ si appoggia o non ad $S_1^{(k)}$, secondo che $L_1^{(k)}$ ed $L_1^{(p-k-2)}$ non sono o sono complementari.

Nel ragionamento fatto si supponga in particolare che $L_1^{(k)}$ sia una $L_1^{(p-2)}$, ed $L_1^{(p-k-2)}$ un punto $L_1^{(0)}$ di $F^{(p-1)}$; allora α e $\overline{\alpha}'$ son punti, e β e $\overline{\beta}'$ sono iperpiani, di τ e $\overline{\tau}$; quindi se lo spazio di ap-

(28) Se per es., α e β hanno almeno un punto comune, esiste un iperpiano almeno di τ che passi per α e β; e allora, rispetto a una reciprocità degenere fra τ e $\overline{\tau}$ di specie $p-1$ che abbia per centri un tale iperpiano di τ e un iperpiano di $\overline{\tau}$ per $\overline{\beta}'$, ciascun punto di β è bene coniugato ad ogni punto di $\overline{\beta}'$.

partenenza $\sigma_1^{(p-2)}$ di $L_1^{(p-2)}$ si appoggia all'S_{2p-2}, $S_1^{(p-2)}$, tangente ad $F^{(p-1)}$ in $L_1^{(0)}$, la cosa può avvenire in due e due soli modi differenti, in quanto che, delle coppie di elementi α e β, $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}'$, una sola o ciascuna può essere costituita di elementi appartenentisi.

Se si presenta la prima alternativa, $\sigma_1^{(p-2)}$ taglia $S_1^{(p-2)}$ in un S_{p-2} non contenente $L_1^{(0)}$ ma situato in uno degli S_{p-1} di $F^{(p-1)}$ passanti per $L_1^{(0)}$; nella seconda alternativa, $L_1^{(p-2)}$ passa per $L_1^{(0)}$ e $\sigma_1^{(p-2)}$ taglia $S_1^{(p-2)}$ in un S_{2p-4} — nell'S_{2p-4} che tocca $L_1^{(p-2)}$ in $L_1^{(0)}$.

20. Si osservi che:

Per $k+1$ punti di $F^{(p-1)}$ passa una, ed una sola, $L^{(k)}$ quando, e solo quando, ognuno di essi è esterno allo $S^{(p-k-1)}$ tangente ad $F^{(p-1)}$ lungo la $L^{(k-1)}$ individuata dai rimanenti k.

E infatti, se $k+1$ punti determinano una ed una sola varietà $L^{(k)}$, k qualunque di essi determinano una ed una sola $L^{(k-1)}$; ed è sempre possibile condurre per ciascuno di essi una $L^{(p-k-1)}$ complementare alla $L^{(k-1)}$ determinata dai rimanenti k. Ed è poi evidente che, se un punto di $F^{(p-1)}$ sta nello $S^{(p-k-1)}$ tangente ad $F^{(p-1)}$ lungo la $L^{(k-1)}$ congiungente k punti dati ($k \leq p-2$), per quel punto passano gli infiniti $S^{(p-k-2)}$ contenenti questo $S^{(p-k-1)}$; e quindi per esso e per i k punti assegnati passano infinite $L^{(k)}$.

§ 6.

I sistemi di coni $[V_1]$, $[V_2]$, ..., $[V_{p-2}]$.

21. Per lo studio delle proprietà topologiche dell'ipersuperficie $F^{(1)}$, nei casi in cui sia $p>2$, è necessario ricorrere alla considerazione di alcuni sistemi di coni che ora passiamo ad esaminare. Come risulta da quel che verrà detto, essi possono essere definiti in più maniere: ma la proprietà che più interessa per i nostri scopi è quella che essi sono i sistemi delle polari miste rispetto ad $F^{(1)}$ dei varî gruppi di punti di $F^{(p-1)}$.

22. Sia A un punto di $F^{(p-1)}$, α l'S_{2p-2} ivi tangente ad $F^{(p-1)}$, e $V_1^{(\alpha)}$ la prima polare di A rispetto ad $F^{(1)}$. Supponiamo inoltre $p \geq 3$.

Poichè A è un punto $(p-1)$-plo di $F^{(1)}$, codesta prima polare, che è un'ipersuperficie d'ordine $p-1$, è semplicemente il cono osculatore di $F^{(1)}$ nel punto A; quindi $V_1^{(\alpha)}$ è intanto un cono avente per vertice α ([29]).

Per un noto teorema della teoria della polarità, $V_1^{(\alpha)}$ passa semplicemente per $F^{(2)}$, doppiamente per $F^{(3)}, \dots, (p-2)$ volte per $F^{(p-1)}$, ed è facile determinare in modo preciso le dimensioni e gli ordini delle sue varietà multiple (esistenti solo per $p > 3$) tenendo conto dell'osservazione che:

Entro lo spazio lineare costituito dagli S_{2p-1} della stella di Σ' avente per centro α, il cono $V_1^{(\alpha)}$ è l'ipersuperficie congiunta ad una varietà di Segre *di 2ª specie con gl'indici eguali a $p-2$.*

E infatti sia $\sigma_1^{(p-2)}$ lo spazio di appartenenza di una varietà $L_1^{(p-2)}$ di $[p-2]$ complementare al punto A (concepito come varietà $L^{(0)}$); per quanto sappiamo (n. 19), $\sigma_1^{(p-2)}$ sarà indipendente da α.

Le varietà $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}, \dots, H_1^{(p-3)}$, aventi per nucleo $L_1^{(p-2)}$, appartengono successivamente ad $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots, F^{(p-2)}$; inoltre $H_1^{(1)}$ ha l'ordine $p-1$.

Ma allora $V_1^{(\alpha)}$, che passa per $F^{(2)}$ ed ha l'ordine $p-1$, è semplicemente il cono proiettante $H_1^{(1)}$ da α; e le varietà multiple di $V_1^{(\alpha)}$ sono, successivamente, i coni proiettanti da α le varietà $H_1^{(2)}, H_1^{(3)}, \dots, H_1^{(p-3)}$ ed $L_1^{(p-2)}$.

Con ciò resta stabilita l'osservazione fatta e restano determinati, in virtù delle già citate formule del sig. Segre, gli ordini e le dimensioni dei coni multipli di $V_1^{(\alpha)}$.

Gli spazî di appartenenza $\sigma^{(h)}$ delle varietà della schiera $[h]$ di $L_1^{(p-2)}$ $(0 \leq h \leq p-3)$ sono proiettati da α secondo spazi, che entro la stella α, sono gli spazî di appartenenza delle varietà della schiera $[h]$ relativa al nucleo di $V_1^{(\alpha)}$. E questi, che per $h = p-3$, $p-4, \dots, 1, 0$ riempiono successivamente $V_1^{(\alpha)}$ e le sue varietà multiple, possono anche definirsi come quelli congiungenti α con gli spazî $\sigma^{(h+1)}$ di $F^{(p-1)}$ passanti per A.

Si osservi che il nucleo di $V_1^{(\alpha)}$, cioè il cono $(p-2)$-plo di $V_1^{(\alpha)}$, avente la dimensione $4p-5$ e l'ordine $(2p-4)_{p-2}$, può pure considerarsi come ottenuto proiettando da α la varietà $F^{(p-1)}$; solo che, in tal caso, uno stesso S_{2p-1} generatore del cono contiene ∞^2 punti di $F^{(p-1)}$, e cioè gli ∞^2 punti dell'*unica* (n. 20) quadrica della schiera $[1]$ di $F^{(p-1)}$ che congiunge il punto A col punto comune allo S_{2p-1} generatore e ad $L_1^{(p-2)}$.

([29]) Vedi, per es., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Spoerri, Pisa 1907), pag. 240.

23. Adesso sia B un ulteriore punto di $F^{(p-1)}$ non situato su α; e si supponga $p \geq 4$.

La polare mista $V_2^{(ab)}$ di A e B rispetto ad $F^{(1)}$ è la prima polare di B rispetto a $V_1^{(a)}$; quindi poichè B non è su α, $V_2^{(ab)}$ è una ipersuperficie ben determinata dell'ordine $p-2$; e poichè B è per $V_1^{(a)}$ un punto $(p-2)$-plo, $V_2^{(ab)}$ è il cono osculatore a $V_1^{(a)}$ lungo tutto l'S_{2p-1} generatore passante per B: in particolare il cono osculatore di $V_1^{(a)}$ nel punto B' ove questo S_{2p-1} si appoggia ad $L_1^{(p-2)}$.

Il vertice di $V_2^{(ab)}$ è l'S_{4p-5} tangente al cono $(p-2)$-uplo di $V_1^{(a)}$ lungo l'S_{2p-1} $\alpha BB'$, ossia l'S_{4p-5} congiungente α con l'S_{2p-4} tangente ad $L_1^{(p-2)}$ in B'. Siccome l'ufficio di A e B può essere invertito, questo S_{4p-5}, come contiene α, deve contenere anche l'S_{2p-2} tangente ad $F^{(p-1)}$ in B; quindi il vertice di $V_2^{(ab)}$ è l'$S^{(p-3)}$, $S_{ab}^{(p-3)}$ tangente ad $F^{(p-1)}$ lungo la quadrica $L_{ab}^{(1)}$ della schiera [1] congiungente A con B o B'.

D'altra parte $V_2^{(ab)}$ passa semplicemente per $F^{(3)}$, doppiamente per $F^{(4)}, \ldots, p-3$ volte per $F^{(p-1)}$; quindi, se $L_1^{(p-3)}$ è una varietà della schiera $[p-3]$ di $L_1^{(p-2)}$, complementare a B' su $L_1^{(p-2)}$, cioè una varietà della schiera $[p-3]$ di $F^{(p-1)}$ complementare ad $L_{ab}^{(1)}$ su $F^{(p-1)}$, proiettando da $S_{ab}^{(p-3)}$ $L_{ab}^{(p-3)}$ e le varietà dei suoi spazî secanti si riconosce, come prima:

1⁰) che $V_2^{(ab)}$ entro lo spazio lineare costituito dagli S_{4p-4} della stella avente per centro $S_{ab}^{(p-3)}$ è l'ipersuperficie congiunta a una varietà di Segre di 2ª specie con gl'indici eguali a $p-3$;

2⁰) che il cono $(p-3)$-plo di $V_2^{(ab)}$, avente la dimensione $6p-10$ e l'ordine $(2p-6)_{p-3}$, è il cono proiettante $L_1^{(p-3)}$ da $S_{ab}^{(p-3)}$; o, anche, il cono proiettante $F^{(p-1)}$ da $S_{ab}^{(p-3)}$ e contenente in ogni suo spazio generatore una varietà della schiera [2] passante per $L_{ab}^{(1)}$.

Di qui si raccoglie che:

Due punti qualunque della quadrica $L_{ab}^{(1)}$ o sono, rispetto ad $F^{(1)}$, a polare mista indeterminata, o hanno per polare mista costantemente il cono $V_2^{(ab)}$ proiettante da $S_{ab}^{(p-3)}$ l'ipersuperficie congiunta a una qualunque $L^{(p-3)}$ complementare ad $L_{ab}^{(1)}$; e l'uno o l'altro caso si presenta, secondo che essi non sono o sono atti a individuare la quadrica $L_{ab}^{(1)}$ nella schiera [1].

24. Adesso si prenda un punto C di $F^{(p-1)}$ esterno allo spazio $S_{ab}^{(p-3)}$ {per modo che (n. 20) A, B e C determinano *una* varietà della schiera [2] che li contenga}, e si ripetano i ragionamenti precedenti per caratterizzare la polare mista di A, B e C rispetto ad $F^{(1)}$.

È chiaro, allora, che con questo e con passi successivi analoghi si arriva al seguente teorema generale:

La polare mista di $k+1$ *punti di* $F^{(p-1)}$ *rispetto ad* $F^{(1)}$ *è indeterminata o determinata secondo che per essi passano infinite o una varietà della schiera* $[k]$. *Nella seconda alternativa, essa è l'iperpiano tangente ad* $F^{(p-1)}$ *lungo la* $L^{(k)}$ *che i punti determinano, se* $k=p-2$; *se no, è un cono* V_{k+1} *proiettante dallo spazio tangente ad* $F^{(p-1)}$ *lungo questa* $L^{(k)}$ *l'ipersuperficie congiunta a una qualunque varietà* $L^{(p-k-2)}$, *complementare a tale* $L^{(k)}$.

I coni che, in virtù di questo teorema, vengono a corrispondere alle singole varietà della schiera $[k]$ $(k \leq p-3)$, formano un sistema che sarà indicato con $[V_{k+1}]$.

25. Si noti che:

Gli iperpiani tangenti a un cono V_{k+1} *sono gli iperpiani di* $\Phi^{(p-1)}$ *passanti per lo spazio* $S^{(p-k-2)}$ *che ne rappresenta il vertice.*

§ 7.

Enunciato del teorema complessivo sulle proprietà topologiche di $F^{(1)}$.

26. Fin qui abbiamo considerato le $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)}$ dal punto di vista della geometria complessa: cioè non abbiamo fatto alcuna distinzione fra elementi reali ed elementi imaginarî. Adesso le considereremo dal punto di vista della geometria proiettiva reale; il che, data l'ipotesi fatta al principio del n. 12, significa che intendiamo considerare, entro Λ, soltanto le varietà di complessi lineari reali.

27. Se un complesso lineare di Σ ha due spazî totali in τ e $\overline{\tau}$, lo stesso avviene per il complesso (imaginario) coniugato; e se, dei due, uno è dotato di un asse, anche l'altro ha un asse della stessa dimensione. Quindi, per l'ipotesi fatta sulla corrispondenza omografica stabilita fra i complessi di Λ e i punti di Σ', le varietà $F^{(1)}$, $F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)}$ sono tutte reali, poichè ciascuna di esse è mutata in sè dal *coniugio* di Σ'.

Dire che una varietà è reale, non porta affatto, come è noto, che essa contenga punti reali; ma nel caso nostro è facile persuadersi che ognuna delle varietà $F^{(l)}$ contiene infiniti punti reali.

E infatti un punto della $F^{(p-1)}$ è reale, quando (e solo quando) risponda a due iperpiani di τ e $\overline{\tau}$ che siano imaginarî coniugati:

quindi $F^{(p-1)}$ contiene ∞^{2p-2} (30) punti reali, ed $F^{(l)}$ $(l \leq p-2)$ conterrà tutti i punti reali di ogni S_{p-l-1} che si appoggi ad $F^{(p-1)}$ in $p-l$ punti reali indipendenti.

28. Le due schiere di S_{p-1} di $F^{(p-1)}$ sono, com'è chiaro, imaginarie coniugate: quindi ogni S_{p-1} di $F^{(p-1)}$ è imaginario di specie $p-1$, cioè contiene un punto reale ed uno solo, quello in cui è tagliato dallo S_{p-1} imaginario coniugato.

Siccome la $F^{(p-1)}$ non possiede, come è noto (31), altri spazî lineari all'infuori di quelli subordinati agli S_{p-1} delle due schiere ora considerate, si conclude che $F^{(p-1)}$ non contiene S_h reali per $h > 0$.

La schiera $[k]$ delle varietà $L^{(k)}$ di $F^{(p-1)}$ (da considerarsi solo quando sia $p > 2$) è reale, cioè coincide con la schiera imaginaria coniugata; e se delle sue varietà se ne considera una che sia reale (cioè una che risponda a due S_{p-k-2} imaginarî coniugati di τ e $\bar{\tau}$), questa gode della stessa proprietà di $F^{(p-1)}$; ossia tutti i suoi S_k sono imaginarî di specie k.

In particolare, la $F^{(p-1)}$, se $p=2$, o le varietà reali della schiera [1], se $p > 2$, son tutte delle quadriche ordinarie con infiniti punti reali ellittici.

È stato osservato più sopra (n. 14) che per un punto $F^{(p-k-1)}$, che non stia su $F^{(p-k)}$ $(0 < k \leq p-2)$, passa uno ed un solo spazio $\sigma^{(k)}$ a cui appartenga una varietà $L^{(k)}$; ma allora, se quel punto è reale, tali sono $L^{(k)}$ e $\sigma^{(k)}$.

29. Siccome, d'ora innanzi, il punto di vista a cui ci atteniamo è quello della geometria proiettiva reale, ad evitare ripetizioni fastidiose stabiliamo, una volta per tutte, che, ove non si dichiari esplicitamente il contrario, gli enti introdotti nel discorso son da intendere come reali, e son da riguardare dal punto di vista della geometria proiettiva reale. Vogliamo con ciò dire che, se parliamo ad es. di un S_k, non solo è sottintesa la realità dell'S_k, ma è anche sottinteso che si riguarda S_k esclusivamente come insieme dei suoi punti reali. Allo stesso modo il simbolo $F^{(l)}$ rappresenterà, d'ora innanzi, solo l'insieme dei punti reali della varietà indicata finora con $F^{(l)}$; $[k]$ indicherà solo l'insieme delle varietà reali della schiera indicata fin qui con $[k]$; e lo stesso dicasi per $L^{(k)}$, $[V_{k+1}]$, ecc.

(30) La dimensione di questa infinità è da intendere in senso reale.

(31) Scorza, loc. cit. (21), n. 5.

30. In base alle convenzioni ora fissate, alcuni dei teoremi già visti assumono un aspetto un po' differente, che preme mettere in vista.

Così, diversamente da quando fu detto nel n. 19, ora possiamo asserire che:

Uno spazio $\sigma^{(p-2)}$ *si appoggia allo* S_{2p-2} *tangente ad* $F^{(p-1)}$ *in un suo punto, quando e solo quando la relativa* $L^{(p-2)}$ *passa per questo punto.*

E infatti, delle due alternative di cui si discorre alla fine del n. 19, adesso una va esclusa; poichè stavolta gli elementi considerati dal teorema essendo reali, i punti α e $\overline{\alpha}'$ e gli spazî β e $\overline{\beta}'$, di cui ivi si parla, sono coniugati, e quindi, se α appartiene a β, necessariamente $\overline{\alpha}'$ sta in $\overline{\beta}'$.

Per una ragione analoga possiamo dire d'ora innanzi, che:

Per due punti di $F^{(p-1)}$, *distinti o infinitamente vicini, passa sempre una ed una sola quadrica della schiera* [1];

o, più generalmente, che:

Per una $L^{(k-1)}$, *e per un punto di* $F^{(p-1)}$ *che non stia su di essa (ma che può esserle infinitamente vicino) passa sempre una ed una sola* $L^{(k)}$ $(0 < k \leq p-2)$.

31. Il risultato finale, a cui mirano le considerazioni dei due paragrafi successivi, è il seguente:

La totalità dei punti di $F^{(1)}$ *si può distinguere in due parti o* **falde**, *aventi in comune tutti e soli i punti di* $F^{(p-1)}$. *Fra queste, quella che diremo* **prima** *falda, e indicheremo con* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *è atta a dividere lo spazio ambiente* Σ' *in due regioni* R_i *ed* R_e *aventi in essa la frontiera comune e dotate delle seguenti proprietà:*

1) *ogni punto dello spazio ambiente, non situato su* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *fa parte di una ed una sola delle due regioni* R_i ed R_e;

2) *un segmento rettilineo, che abbia per estremi un punto di* R_i *e un punto di* R_e *non situati su* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *incontra* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *in un sol punto;*

3) *una retta, che passi per un punto di* R_i *non situato su* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *incontra* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *in due soli punti distinti e taglia* $F^{(1)}$ *in* p *punti (di cui due almeno sono distinti)* (32);

4) *dei due segmenti rettilinei determinati da due punti di* R_i, *uno è formato di punti tutti appartenenti ad* R_i;

(32) Perchè una parte dell'affermazione del testo non appaia oziosa si ricordi che qui si considerano le cose dal punto di vista reale.

5) *l'iperpiano tangente a* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *in un suo punto semplice non contiene punti di* R_i *non situati su* $\mathbf{F}_1^{(1)}$;

6) *una retta, la quale passi per un punto semplice di* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *e non stia nell'iperpiano ivi tangente ad* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *contiene punti di* R_i *non situati su* $\mathbf{F}_1^{(1)}$, *e quindi taglia* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *in un secondo punto.*

I punti di R_i o di R_e diversi da quelli di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ si diranno rispettivamente *interni* o *esterni* ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Per $p = 2$, la $F^{(1)}$ è la stessa cosa che la $F^{(p-1)}$, ed è una quadrica ordinaria a punti ellittici. Ciò porta che, nel caso $p = 2$, le due falde di $F^{(1)}$ coincidono, e il teorema enunciato è senz'altro evidente. Quindi per dimostrarlo in generale potremmo valerci del metodo in induzione matematica. Ma poichè la dimostrazione secondo questo metodo, presentata di colpo al lettore, riuscirebbe complicata e poco luminosa, preferiamo seguire una via leggermente diversa. Noi studieremo infatti i casi rispondenti ai più bassi valori di p, avendo cura di sceglierne tanti, quanti occorrono e bastano perchè il lettore venga ad aver sott'occhio, su esempî semplici e concreti, tutti i procedimenti dimostrativi che abbisognano per il ragionamento generale; e dopo ciò, *siccome avremo avuto la cautela di non valerci mai di considerazioni che valgano solo per i casi particolari esaminati,* l'estendibilità delle nostre argomentazioni sarà tanto manifesta che potremo addirittura esimerci dalla esposizione esplicita del ragionamento induttivo generale.

§ 8.

Il caso $p = 3$.

32. Per $p = 3$, la serie delle varietà $F^{(l)}$ si riduce alla $F^{(1)}$ e alla $F^{(2)}$; la $F^{(2)}$ è una V_4^6 di Segre, e lo spazio ambiente Σ' è un S_8. La serie dei sistemi di coni $[V_{k+1}]$ si riduce al solo sistema $[V_1]$, e ogni cono V_1 è un cono quadrico avente per vertice un S_4 tangente alla V_4^6 e proiettante da questo vertice una quadrica ordinaria a punti ellittici. Segue che:

Ogni cono V_1 *è atto a dividere lo spazio ambiente in due regioni.*

33. Per un punto di $F^{(1)}$, che non stia sulla $F^{(2)}$, passa uno ed un solo spazio $\sigma^{(1)}$, cioè uno ed un solo S_3 contenente una quadrica della schiera [1]; invece per un punto di $F^{(1)}$, che stia su $F^{(2)}$, di spazî $\sigma^{(1)}$ ne passano infiniti, ma in tal caso quel punto è comune a tutte le quadriche di [1] situate in essi.

In base a ciò, se poniamo in una *prima falda* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ ogni punto di $F^{(1)}$ che o stia su $F^{(2)}$ o sia interno alla quadrica di [1] il cui S_3 passa per esso, e in una *seconda falda* $\mathbf{F}_2^{(1)}$ ogni punto di $F^{(1)}$ che o stia su $F^{(2)}$ o sia esterno alla quadrica di [1] il cui S_3 passa per esso, i punti di $F^{(1)}$ saranno distinti precisamente in due falde aventi a comune solo i punti di $F^{(2)}$.

34. Sulle due falde della nostra $F^{(1)}$ si ha subito una serie di proposizioni semplici e interessanti.

a) *I punti di un S_4 tangente a $F^{(2)}$ appartengono tutti ad $\mathbf{F}_2^{(1)}$.*

E infatti sia A un punto di $F^{(2)}$, α l'S_4 ivi tangente ad $F^{(2)}$, e B un qualsiasi punto di α. Se $B \equiv A$, la cosa è evidente; se no, si tiri la retta AB che risulta tangente a $F^{(2)}$ in A, e si consideri *la* quadrica della schiera [1] che passa per A e per il punto infinitamente vicino ad A nella direzione AB (n. 30). La retta AB risulta tangente a questa quadrica in A; ma la quadrica è a punti ellittici: dunque B è esterno ad essa e il teorema è dimostrato.

Viceversa, se un punto di $F^{(1)}$ appartiene a $\mathbf{F}_2^{(1)}$, per esso passano dei piani tangenti a una quadrica di [1], cioè degli S_4 tangenti a $F^{(2)}$; dunque:

b) *La seconda falda di $F^{(1)}$ è il luogo degli S_4 tangenti a $F^{(2)}$* (33).

c) *Un qualsiasi cono del sistema $[V_1]$ contiene o include un qualunque punto di $\mathbf{F}_1^{(1)}$, e invece contiene o esclude un qualunque punto di $\mathbf{F}_2^{(1)}$.*

Sia α il vertice di un cono di $[V_1]$, cioè l'S_4 tangente a $F^{(2)}$ in un suo punto A.

Lo S_3 di una quadrica di [1], o si appoggia ad α, e allora la quadrica relativa passa per A (n. 30); o è indipendente da α, e allora il cono considerato proietta da α i punti della quadrica. Nella prima alternativa lo S_3 sta per intero in uno degli S_5 generatori del cono α; nella seconda alternativa i punti dello S_3 non situati sulla quadrica (cioè non situati sulla $F^{(2)}$) sono interni od esterni al cono, secondo che tali sono rispetto alla quadrica: dunque, in base alla definizione delle due falde di $F^{(1)}$, la nostra asserzione è in ogni caso giustificata.

d) La $F^{(1)}$ contiene evidentemente infinite rette: ebbene, facciamo vedere che:

(33) Si ricordi, a scanso di equivoci, che ora facciamo distinzione tra elementi reali ed elementi imaginari. Se non facessimo ciò, *tutta* la $F^{(1)}$ sarebbe riempita dagli S_4 tangenti della $F^{(2)}$.

I punti di una retta di $F^{(1)}$ non possono appartenere tutti alla prima falda.

E infatti, se i punti di una retta di $F^{(1)}$ appartenessero tutti ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, rispetto a ciascun cono del sistema $[V_1]$, ognuno di questi punti dovrebbe o esser situato sul cono o essere interno al cono. Ciò non è possibile, se non a patto che r si appoggi al vertice di ciascuno di questi coni, cioè che r si appoggi ad ogni S_4 tangente di $F^{(2)}$. Siccome in un S_4, tangente a $F^{(2)}$, di punti della prima falda non c'è che il punto di contatto, i punti di r non potrebbero appartenere tutti ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$ se non a patto di assorbire i punti di $F^{(2)}$; ciò che è manifestamente assurdo.

E l'assurdo permane anche se si suppone che i punti di r appartengano ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, tranne un numero finito di essi.

e) Un S_5 che passi per lo S_4 α tangente a $F^{(2)}$ in un suo punto A, e che non sia un S_5 generatore del cono α del sistema $[V_1]$, taglia $F^{(1)}$, oltre che in α, in una V_4^2 che appartiene tutta ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$ o ad $\mathbf{F}_2^{(1)}$, secondo che quello S_5 è interno od esterno al cono α. E nella prima alternativa la V_4^2 non contiene rette, per modo che è atta a dividere in due regioni lo S_5 che la contiene.

Una retta del considerato S_5, che esca da A ma non stia in α, incontra necessariamente $F^{(1)}$ in un punto diverso da A, una volta che A è doppio per $F^{(1)}$ e la retta non sta sul cono osculatore di $F^{(1)}$ in A: dunque il nostro S_5 taglia $F^{(1)}$ in α e in una residua V_4^2 [34], il cui S_4 tangente in A non può essere che α.

Ciò posto, che i punti di questa V_4^2 esterni ad α siano tutti di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ o tutti di $\mathbf{F}_2^{(1)}$, secondo che il nostro S_5 è interno o esterno al cono α, è evidente in base al teorema c); e così è pur chiaro, in base a d), che nella prima alternativa la V_4^2 non contiene rette. Ma allora tutti i punti della V_4^2 sono di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ o di $\mathbf{F}_2^{(1)}$, poichè, quando V_4^2 non contiene rette, il solo punto che essa ha a comune con α è A, che sta su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, e per quanto si riferisce ad $\mathbf{F}_2^{(1)}$, sappiamo già che essa contiene *tutti* i punti di α.

35. Profittando della proposizione e) del n. precedente, possiamo valerci della prima falda di $F^{(2)}$ e del cono α, ivi considerato, per dividere in due insiemi i punti dello spazio ambiente non situati su $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

[34] Occorre appena avvertire che si è sentita la necessità di questo ragionamento, solo perchè qui si guardan le cose dal punto di vista reale.

Un punto P interno al cono α, e non situato su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, si dirà *interno* ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, se, condotto la S_5 che congiunge α con P, il punto P risulta interno alla V_4^2 secondo cui lo S_5 taglia $\mathbf{F}_1^{(1)}$. Ogni altro punto, non situato su $F_1^{(1)}$ e non interno ad essa nel senso ora fissato, si dirà *esterno* ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Indicheremo con $\mathbf{I}$ la totalità dei punti interni, e con $\mathbf{E}$ quella dei punti esterni ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Risulterà, tra poco, che le totalità $\mathbf{I}$ ed $\mathbf{E}$ non dipendono dalla scelta del cono α entro il sistema $[V_1]$, sebbene nella loro definizione il cono α intervenga in modo essenziale; dopo ciò, ci basterà aggiungere ad $\mathbf{I}$ ed $\mathbf{E}$ i punti di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ per avere, nel caso contemplato, le regioni R_i ed R_e di cui si parla nel teorema del n. 31.

Notisi che:

I punti di $\mathbf{F}_2^{(1)}$ *non situati su* $F^{(2)}$ *son tutti punti di* $\mathbf{E}$.

36. Cominciamo dal dimostrare che:

Se M *è un punto di* $\mathbf{I}$, M *è interno ad ogni cono del sistema* $[V_1]$.

Supponiamo, se è possibile, che il cono di $[V_1]$, avente per vertice lo S_4 β tangente a $F^{(2)}$ in un suo punto B, diverso da A, passi per M.

Intanto lo S_5 αM non può giacere per intero sul cono β, perchè, se ciò fosse, al cono β apparterrebbe lo spazio congiungente α e β che è (nn. 17 e 30) un S_7; quindi è possibile tirare per M e in αM una retta r che si appoggi ad α in un punto Q diverso da A e che non stia in un S_5 generatore del cono β.

Poichè, per ipotesi, M è un punto di $\mathbf{I}$, la retta r taglia in due punti distinti (N e P) la V_4^2 di $\mathbf{F}_2^{(1)}$ situata nello S_5 αM; e poichè Q appartiene ad α ma è diverso da A, Q è diverso da N e P ed è separato da M mediante N e P.

Ciò posto, è assurdo supporre che per M passi β, poichè in tal caso, una volta che r non sta in un S_5 generatore del cono β, i punti di r diversi da M sarebbero tutti interni o tutti esterni al cono β mentre Q non può essere interno, ed N e P non possono essere esterni ad esso; ed è pure assurdo supporre che per M passi soltanto un S_5 generatore del cono β.

Infatti, in questa seconda ipotesi, o r sta nell'iperpiano tangente al cono β lungo l'S_5 βM, o r non sta in questo iperpiano e quindi taglia il cono β in M e in un punto ulteriore T.

Nella prima alternativa, poichè r è fuori di βM, i punti N e P risulterebbero esterni al cono β, mentre, essendo di $\mathbf{F}_1^{(1)}$, ciascuno di essi o dovrebbe stare sul cono β, o dovrebbe essere interno ad esso; nella seconda alternativa, dei due segmenti in cui M e T dividono r, quello contenente, oltre gli estremi, soltanto punti interni al cono β, dovrebbe contenere N e P, e l'altro dovrebbe contenere Q, e quindi, anche supponendo che T coincidesse con *uno* dei punti N o P o Q, sarebbe impossibile che Q fosse separato da M mediante N e P.

Dimostrato che nessun cono di $[V_1]$ può passare per M, facciamo vedere che M non è esterno ad alcuno di essi.

Sia, come prima, r una retta per M che incontri la prima falda $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in N e P.

Siccome ciascuno dei punti N e P rispetto a ciascun cono di $[V_1]$ o sta sul cono o è interno ad esso, dei due segmenti che N e P determinano su r, rispetto a ciascun cono di $[V_1]$, *uno* è formato (tranne, se mai, qualche estremo) di punti tutti interni al cono. Tale segmento, una volta che un cono, comunque variabile entro il sistema $[V_1]$, non può *mai* venire a passare per r, cioè per M, per evidenti ragioni di continuità, è sempre il medesimo; dunque, poichè esso, per il cono α, coincide col segmento NMP, coinciderà con NMP per ogni cono di $[V_1]$.

E ciò dimostra appunto che M è interno ad ogni cono del sistema $[V_1]$.

37. Dimostriamo in secondo luogo, che:

Se M è un punto di $\mathbf{E}$, *esiste qualche cono di $[V_1]$ che contiene M o esclude M.*

Se M è esterno al cono α o sta sul cono α, la cosa è evidente; supponiamo dunque che M sia interno al cono α.

Congiungiamo M col punto di contatto A di α; la retta MA (che non sta in α) incontra la ($F^{(1)}$, cioè la) falda $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in A e in un punto ulteriore B, diverso da A; e dei due segmenti determinati da A e B su di essa, quello che non contiene M è formato, all'infuori di A e B, di punti appartenenti tutti ad $\mathbf{I}$. Sia questo il segmento ANB.

Siccome B sta sulla $F^{(1)}$, ma non sulla $F^{(2)}$ (giacente tutta sul cono α), per B passa l'S_3 di una sola quadrica di [1]: siano D un punto di questa quadrica, e δ l'S_4 ivi tangente a $F^{(2)}$. Il cono di $[V_1]$, che ha per vertice δ, contiene il punto A (in quanto A giace sulla $F^{(2)}$) e contiene B, perchè contiene tutto l'S_3 della quadrica considerata in un suo S_5 generatore; d'altro canto ogni punto di ANB, diverso da A e B, è interno ad esso, per quanto è stato dimostrato nel numero precedente: dunque M è, come volevasi, esterno al cono δ.

38. Dai ragionamenti fatti nei nn. 36 e 37 segue che:

La totalità di punti **I** *è l'insieme di tutti e soli i punti interni a ciascun cono del sistema* $[V_1]$,

e quindi resta stabilita la preannunciata indipendenza di **I** e di **E** dalla scelta del cono α entro il sistema $[V_1]$.

39. Adesso, indichiamo con

$$F = 0$$

l'equazione della $F^{(1)}$; con

$$G_1 = 0$$

l'equazione di un qualsiasi cono del sistema $[V_1]$, e con

$$\mu = 0$$

l'equazione di un iperpiano tangente a questo cono e quindi appartenente a $\Phi^{(2)}$ (35). Questo iperpiano non contiene punti interni al cono, e quindi non contiene neppure punti di **I**.

Se per i punti interni al cono si ha (come possiamo supporre)

$$G_1 > 0,$$

e per i punti esterni

$$G_1 < 0,$$

i punti di **I** saranno tutti e soli quei punti dello spazio ambiente per cui G_1 risulta positiva, e μF (36) ha un segno determinato; cioè, per es., come possiamo ben supporre, tutti e solo quelli per cui si ha

$$G_1 > 0 \quad \text{e} \quad \mu F > 0\,.$$

Di qua, attesa l'algebricità di G_1 e μF, segue che **I** è un *campo* ad 8 dimensioni, cioè un sistema di punti tale che, se P è un suo

(35) Se A è il punto di contatto di $F^{(2)}$ col vertice del cono, e B è un punto diverso da A della quadrica secondo cui l'iperpiano tocca $F^{(2)}$, il cono e l'iperpiano sono le polari rispetto ad $F^{(1)}$ del punto A e della coppia di punti A e B.

(36) Si considera l'espressione μF e non la sola F, perchè la prima è di grado pari, mentre la seconda è di grado dispari nelle coordinate correnti e quindi in un punto, per cui non sia $\mu F = 0$, μF ha un segno determinato quando siano fissati i coefficienti di μ ed F, mentre F ha un segno dipendente non solo dai suoi coefficienti ma anche dal fattore di proporzionalità, a meno del quale son determinate le coordinate del punto.

punto qualunque, appartengono ad esso tutti i punti interni a una conveniente V_7^2 priva di rette che contenga P nel suo interno.

Allora, anche $\mathbf{E}$ è un campo sì fatto, e la *frontiera comune di* $\mathbf{I}$ *ed* $\mathbf{E}$ *è data dalla prima falda* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *di* $F^{(1)}$.

40. A proposito dei punti di $\mathbf{I}$ ed $\mathbf{E}$ vale la serie di proposizioni che ora passiamo a stabilire.

a) Un segmento rettilineo che congiunga un punto di $\mathbf{I}$ *con un punto di* $\mathbf{E}$ *contiene un punto di* $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Questo teorema, come mostra una facile applicazione del postulato di DEDEKIND, è conseguenza immediata del fatto che $\mathbf{I}$ ed $\mathbf{E}$ sono campi privi di punti comuni, e che un punto, il quale non sia nè di $\mathbf{I}$ nè di $\mathbf{E}$, è un punto di $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

b) Una retta la quale passi per un punto di $\mathbf{I}$ *ha in comune con* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *due punti e due punti soltanto, e questi la dividono in due segmenti di cui uno (tolti gli estremi) è formato di punti appartenenti tutti ad* $\mathbf{I}$, *e l'altro (tolti gli estremi) di punti tutti situati in* $\mathbf{E}$.

Siano P un punto di $\mathbf{I}$, ed r una retta passante per esso. Fissato in $[V_1]$ un cono α, la retta r o taglia il cono in due punti distinti o si appoggia al suo vertice α, ma in ogni caso contiene punti di $\mathbf{E}$. Ciò è evidente nella prima alternativa, poichè allora r contiene punti esterni al cono α; e nella seconda si vede pure subito considerando l'S_5 che contiene r ed α, e la V_4^2 in cui questo S_5 taglia $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Se Q è un tal punto di $\mathbf{E}$, dei due segmenti determinati da P e Q su r, ciascuno contiene un punto almeno della prima falda di $F^{(1)}$, e quindi r contiene intanto due punti (distinti) — diciamoli M ed N — di $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Che non possa contenerne altri, può dimostrarsi, *con metodo adatto alla generalizzazione,* nel seguente modo.

Per ciascuno dei punti M ed N passa uno spazio $\sigma^{(1)}$ (almeno), cioè un S_3 contenente una quadrica della schiera $[1]$; chiamiamo $\sigma_m^{(1)}$ quello (o uno di quelli) per M, e $\sigma_n^{(1)}$ quello (o uno di quelli) per N.

Le quadriche di $[1]$ che essi contengono son certo distinte, perchè altrimenti coinciderebbero $\sigma_m^{(1)}$, e $\sigma_n^{(1)}$ e la retta r, venendo a stare per intero sulla $F^{(1)}$, non potrebbe contenere punti di $\mathbf{I}$; quindi esse hanno un punto comune, ed uno solo. Diciamolo L. Se λ è l'S_4 tangente in L alla $F^{(2)}$, il cono λ del sistema $[V_1]$ passa per M ed N, racchiude il segmento MPN ed esclude il segmento MQN. In quest'ultimo vi sono dunque certo punti di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ diversi da M ed N. Nè possono esservene nel segmento MPN, perchè ove ve ne fosse un altro, T, il segmento MPT escluderebbe N, oppure NPT escluderebbe M, e ciò è assurdo, come si vede subito ripetendo per M e T o per N e T il ragionamento fatto per M ed N e il segmento MQN.

Tanto basta per dimostrare la nostra proposizione. Da essa discende poi l'altra:

c) *Se A e B sono due punti di* **I**, *dei due segmenti rettilinei determinati da A e B uno (solo) è costituito di punti tutti appartenenti ad* **I**.

d) *Se μ è l'iperpiano tangente a $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in un punto M non situato su $F^{(2)}$, μ non contiene punti di* **I**.

E infatti μ (che è, dopo tutto, un *qualunque* iperpiano di $\Phi^{(2)}$) tocca $F^{(1)}$ in tutti i punti dell'unico spazio $\sigma^{(1)}$ passante per M, e contiene tutti gli S_4 tangenti a $F^{(2)}$ nei punti della quadrica di [1] situata in questo spazio $\sigma^{(1)}$. Ma allora μ tocca i coni di $[V_1]$ che hanno per vertici questi S_4 (n. 25), e basta questo per concludere che μ non può contenere punti di **I**.

e) *Una retta la quale passi per un punto di* **I** *ha in comune con $F^{(1)}$ tre punti (di cui due almeno sono distinti).*

Ciò è conseguenza immediata di *b*) e del fatto che $F^{(1)}$ ha l'ordine 3; ma, per quanto è stato detto alla fine del n. 31, giova anche qui, come in *b*), dimostrare l'asserto con metodo adatto alla generalizzazione.

Sia, dunque P un punto di **I** ed r una retta per esso.

Poichè r ha punti comuni con $\mathbf{F}_1^{(1)}$, esiste almeno uno spazio $\sigma^{(1)}$ a cui essa si appoggia.

Sia questo lo spazio $\sigma_1^{(1)}$ e sia ν lo spazio congiungente $\sigma_1^{(1)}$ ed r; ν è certo distinto da $\sigma_1^{(1)}$ (una volta che r, contenendo P, non può giacere in $\sigma_1^{(1)}$, cioè su $F^{(1)}$) ed è un S_4; anzi è lo S_4 congiungente $\sigma_1^{(1)}$ con P.

La proiezione di $F^{(2)}$ da $\sigma_1^{(1)}$ sopra un S_4 dello spazio ambiente indipendente da $\sigma_2^{(1)}$ risulta generalmente biunivoca [37]; e poichè nello spazio rappresentativo i punti eccezionali sono tutti compresi nello S_3 secondo cui esso è tagliato dall'iperpiano tangente ad $F^{(2)}$ nei punti della quadrica di [1] appartenente a $\sigma_1^{(1)}$, dal fatto che ν, al pari di P, non giace in questo iperpiano, si deduce che ν taglia $F^{(2)}$ in un punto ulteriore A, esterno alla quadrica $L_1^{(1)}$ di $F^{(2)}$ situata in $\sigma_1^{(1)}$.

(37) Cfr. Scorza, loc. cit. (21).

Ma allora $F^{(1)}$ segna su ν una V_3^3 spezzata in $\sigma_1^{(1)}$ e nella V_3^2 proiettante da A la quadrica $L_1^{(1)}$; cioè, in $\sigma_1^{(1)}$ e nel cono quadrico segnato su ν dal cono di $[V_1]$, che ha per vertice lo spazio tangente ad $F^{(2)}$ nel punto A. Ma allora, poichè r sta in ν e passa per P, e poichè P è interno a questo cono $[V_1]$, r taglia quella V_3^2, cioè $F^{(1)}$, in tre punti.

f) Se una retta r contiene un punto M di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ non situato su $F^{(2)}$, e non giace nell'iperpiano ivi tangente ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, r penetra nell'interno di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ e ne contiene quindi un punto ulteriore.

Si consideri un cono di $[V_1]$, certo esistente, di equazione

$$G_1 = 0,$$

rispetto a cui M sia un punto interno; e si supponga che in M si abbia

$$G_1 > 0.$$

Poi si indichino, al solito, con

$$F = 0 \quad \text{e} \quad \mu = 0$$

le equazioni di $F^{(1)}$ e di un iperpiano tangente al cono considerato.

Allora in un intorno di M su r, che contenga M nel suo *interno* e che sia tutto interno al cono $G_1 = 0$, si ha costantemente

$$G_1 > 0,$$

mentre μF cambia segno, una volta che r in M *non* tocca $F^{(1)}$. Ma allora, se per i punti di $\mathbf{I}$ si ha

$$\mu F > 0,$$

basta prendere un punto di r, appartenente a quell'intorno, per cui si abbia

$$\mu F > 0,$$

per avere un punto di r appartenente ad $\mathbf{I}$.

41. Le proposizioni, stabilite nel n. precedente, mostrano, come appunto era stato enunciato, che basta definire R_i ed R_e come gli insiemi di punti che nascono da $\mathbf{I}$ ed $\mathbf{E}$ mediante l'aggiunta dei punti di $\mathbf{F}_1^{(1)}$, per riconoscere l'esattezza del teorema del n. 31 nel caso in cui sia $p = 3$.

§ 9.

Il caso $p = 4$.

42. Qui la serie delle $F^{(l)}$ si riduce alla serie $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}$; lo spazio ambiente Σ è un S_{15}, la $F^{(1)}$ è una V_{14}^{4}, la $F^{(2)}$ è una V_{11}^{20}, e la $F^{(3)}$ è una V_{6}^{20} di Segre.

La V_{14}^{4} è riempita semplicemente degli spazî $\sigma^{(2)}$, cioè dagli S_8 cui appartengono le V_{4}^{6} della schiera [2]; e V_{11}^{20} dagli spazî $\sigma^{(1)}$, cioè dagli S_3 delle quadriche di [1].

Ogni quadrica di [1] è una quadrica a punti ellittici, e l'ipersuperficie congiunta a una qualsiasi V_{4}^{6} di [2] è un'ipersuperficie per cui vale ormai il teorema fondamentale del n. 31.

Ma allora:

Ogni cono del sistema $[V_2]$ *proietta dal suo vertice (che è un* S_{11}*) una quadrica ordinaria a punti ellittici, ed è atto a dividere in due regioni lo spazio ambiente;*

e inoltre:

Ogni cono del sistema $[V_1]$ *(avente per vertice un* S_6*) consta di due falde, delle quali una, quella che diremo la prima, è atta a dividere in due regioni lo spazio ambiente.*

Non occorre che ci fermiamo ad enunciare le proprietà di cui godono i punti delle due regioni determinate dalla prima falda di un cono di $[V_1]$, poichè queste si deducono immediatamente da quelle della prima falda della V_{7}^{3} da cui il cono nasce per proiezione da un S_6: piuttosto osserveremo che un tal cono è dotato di una V_{11}^{6} doppia; che è riempito semplicemente da ∞^4 S_{10} passante per il suo vertice; che, in ognuno di questi S_{10}, la V_{11}^{6} doppia ha un cono quadratico V_{9}^{2} avente per vertice il vertice del cono considerato e atto a dividere l'S_{10} ambiente in due regioni; e che, infine, un punto di uno di questi S_{10}, non situato sulla V_{11}^{6} doppia, appartiene alla prima o alla seconda falda del nostro cono, secondo che è interno od esterno alla relativa V_{9}^{2}. Con questo, noi non facciamo altro se non ricordare che entro la stella di vertice α, concepita come totalità di S_7, il cono α è l'ipersuperficie congiunta a una varietà di Segre di 2ª specie con gl'indici eguali a 2; e allora i coni V_{9}^{2} e gli S_{10} sopra nominati non sono altra cosa che le varietà della schiera [1] e gli spazî $\sigma^{(1)}$ di una varietà di Segre.

43. Ciò posto, cominciamo dal dividere $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$ in due falde ciascuna, procedendo nel modo che segue.

Un punto P di $F^{(1)}$ non stia sulla $F^{(2)}$, per modo che per P passi uno ed un solo spazio $\sigma^{(2)}$. Ebbene: noi attribuiremo P alla prima falda, $\mathrm{F}_1^{(1)}$, o alla seconda falda, $\mathrm{F}_2^{(1)}$, di $F^{(1)}$, secondo che P è interno o esterno alla prima falda della V_7^3 congiunta alla $L^{(2)}$ contenuta in quello spazio $\sigma^{(2)}$.

Notisi che la V_7^3 in discorso appartiene tutta a $F^{(2)}$, e quindi P, per l'ipotesi fatta su di esso, non può essere che interno o esterno alla sua prima falda.

Se P è un punto di $F^{(1)}$ situato sulla $F^{(2)}$, ma non sulla $F^{(3)}$, per P passa un solo spazio $\sigma^{(1)}$ contenente una quadrica $L^{(1)}$, e P non sta sulla quadrica. Ebbene, in tal caso diremo che P appartiene alla prima o alla seconda falda di $F^{(1)}$ oppure di $F^{(2)}$, secondo che questa quadrica include o esclude P.

Si osservi che questa volta passano per P infiniti spazî $\sigma^{(2)}$; che lo spazio $\sigma^{(1)}$ considerato sta in ognuno di questi $\sigma^{(2)}$, appartenendo per ciascuno di essi alla V_7^3 congiunta alla relativa $L^{(2)}$; e che P appartiene alla prima o seconda falda di $F^{(1)}$ ed $F^{(2)}$, secondo che appartiene alla prima o alla seconda falda di *ciascuna* di queste V_7^3.

Infine, se P è un punto di $F^{(1)}$ situato (sulla $F^{(2)}$ e) sulla $F^{(3)}$, attribuiremo P tanto alla prima quanto alla seconda falda di $F^{(1)}$ ed $F^{(2)}$.

Segue che:

Se si imagina $F^{(1)}$ come descritta da uno spazio variabile $\sigma^{(2)}$, la prima e la seconda falda di $F^{(1)}$ sono descritte rispettivamente dalle regioni R_i ed R_e in cui $\sigma^{(2)}$ è diviso dall'ipersuperficie congiunta alla relativa $L^{(2)}$; e la prima e seconda falda di $F^{(2)}$ sono descritte rispettivamente dalla prima e seconda falda di questa ipersuperficie. Che se poi si riguarda $F^{(2)}$ come la varietà descritta da uno spazio mobile $\sigma^{(1)}$, le due falde di $F^{(2)}$ sono descritte dalle regioni R_i ed R_e determinate in $\sigma^{(1)}$ dalla relativa $L^{(1)}$.

Notisi che:

Ciascuna falda di $F^{(2)}$ appartiene alla falda omonima di $F^{(1)}$.

44. Ecco le proposizioni sulle due falde di $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$ analoghe, per il caso $p = 4$, a quelle che, per il caso $p = 3$, furono raccolte nel n. 34. Di esse si tralasciano le dimostrazioni quando siano del tutto identiche a quelle esposte nel n. in discorso.

a) *I punti di un S_6 tangente alla $F^{(3)}$ appartengono tutti alla seconda falda di $F^{(2)}$ e di $F^{(1)}$.*

Questo teorema, per i punti della seconda falda di $F^{(2)}$, è invertibile; quindi:

b) La seconda falda di $F^{(2)}$ è il luogo dei punti degli S_6 tangenti a $F^{(3)}$.

c) La prima falda di un qualsiasi cono del sistema $[V_1]$ contiene o include qualunque punto di $\mathbf{F}_1^{(1)}$, e invece contiene o esclude qualunque punto di $\mathbf{F}_2^{(1)}$.

Infatti, sia α il vettore di un cono del sistema $[V_1]$, per modo che α è l'S_6 tangente alla $F^{(3)}$ in un suo punto A; poi siano $L_1^{(2)}$ una varietà della schiera [2], e $\sigma_1^{(2)}$ l'S_8 a cui appartiene. Al variare di $L_1^{(2)}$ entro [2], lo spazio $\sigma_1^{(2)}$ descrive la totalità dei punti di $F^{(1)}$.

Se $\sigma_1^{(2)}$ non si appoggia ad α, il cono α di $[V_1]$ può ritenersi come ottenuto proiettando da α la V_7^3 congiunta a $L_1^{(2)}$; quindi è senz'altro evidente che i punti delle due falde di $F^{(1)}$ situati in $\sigma_1^{(2)}$ si comportano, rispetto alla prima falda del cono α, nel modo voluto.

Se invece $\sigma_1^{(2)}$ si appoggia ad α, secondo l'S_4 tangente a $L_1^{(2)}$ in A (nn. 19 e 30), $\sigma_1^{(2)}$ sta in un S_{10} del cono α contenente una V_9^2 della sua V_{11}^6 doppia, cioè una varietà della schiera [1] del suo nucleo; e tale V_9^2 segna su $\sigma_1^{(2)}$ un cono del sistema $[V_1]$ per la V_7^3 congiunta a $L_1^{(2)}$, cioè il cono quadrico V_7^2 di questo sistema avente per vertice l'S_4 tangente a $L_1^{(2)}$ in A.

Ora, un punto di $\sigma_1^{(2)}$ è della prima o della seconda falda di $F^{(1)}$, secondo che, rispetto a questa V_7^3 appartiene alla regione R_i o alla regione R_e: quindi un punto di $\sigma_1^{(2)}$, che appartenga alla prima falda di $F^{(1)}$, appartiene al cono V_7^2 considerato, o è interno ad esso; mentre un punto di $\sigma_1^{(2)}$ che appartenga alla seconda falda di $F^{(1)}$, può comportarsi, rispetto a questo cono, in un modo qualunque. Nel primo caso, il punto di $\sigma_1^{(2)}$, di cui si discorre, appartiene al cono V_9^2 o è interno ad esso, e quindi appartiene alla prima falda del cono α; nel secondo caso, il punto medesimo o giace sulla prima falda del cono α (ed, eventualmente, anche sulla seconda) o giace soltanto sulla seconda, cioè è esterno alla prima: quindi, qualunque ipotesi si faccia, la proposizione *c*) si verifica sempre.

Dalla proposizione ora dimostrata, applicando la *c*) del n. 34 ai singoli coni del sistema $[V_1]$, segue subito che:

c') Un punto della prima (seconda) falda di $F^{(1)}$ o appartiene o è interno (esterno) a un qualsiasi cono del sistema $[V_2]$.

d) I punti di una retta di $F^{(1)}$ non possono appartenere tutti ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$; anzi ve ne son sempre infiniti che appartengono ad $\mathbf{F}_2^{(1)}$.

Si dimostra come la *d*) del n. 34, considerando le *prime falde* dei coni V_1.

e) Un S_7 che passi per l'S_6 α tangente a $F^{(3)}$ in un suo punto A, e che non sia un S_7 generatore del cono α del sistema $[V_1]$, taglia $F^{(1)}$, oltre che in α (che sta su $F^{(2)}$ ed è quindi doppio per $F^{(1)}$), in una V_6^2 che appartiene per intero alla prima o seconda falda di $F^{(1)}$ secondo che quell'S_7 è interno o esterno alla prima falda del cono α. E nella prima alternativa, la V_6^2 non contiene rette, per modo che è atta a dividere in due regioni l'S_7 che la contiene.

45. Mediante la falda $\mathbf{F}_1^{(1)}$ di $F^{(1)}$ e la prima falda del cono α del sistema $[V_1]$, possiamo allora, valendoci della proposizione *e*) del n. precedente, dividere la totalità dei punti dell'S_{15} ambiente, non situati su $F_1^{(1)}$, in due insiemi **I** ed **E** procedendo allo stesso modo che nel n. 35.

In altri termini, un punto sarà di **I** quando è interno alla prima falda del cono α, e nell'S_7 che lo congiunge ad α è interno alla V_6^2 secondo cui l'S_7 taglia $\mathbf{F}_1^{(1)}$; sarà di **E** quando non appartenga ad **I** e non sia situato su $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Per dimostrare che l'insieme **I** è indipendente dalla scelta del cono α entro il sistema $[V_1]$, si imiterà poi il procedimento dei nn. 36 e seg. con le modificazioni che ora verranno accennate.

46. *Un punto M di* **I** *è interno ad ogni cono del sistema* $[V_2]$.

Sia β il vertice di un cono di $[V_2]$; esso è, per quanto sappiamo, l'S_{11} a cui appartengono gli S_6 tangenti a $F^{(3)}$ nei punti di una quadrica $L_1^{(1)}$ della schiera [1].

Ora due casi possono presentarsi, e cioè:

1°) o $L_1^{(1)}$ passa per il punto di contatto A di α con $F^{(3)}$;

2°) o $L_1^{(1)}$ non passa per A.

Nel primo caso il cono β può considerarsi come il cono polare misto, rispetto a $F^{(1)}$, di A e di un punto di $L_1^{(1)}$ diverso da A, cioè come il cono polare di questo punto rispetto al cono α. Ma allora il teorema da dimostrare è evidente, perchè, in forza di quanto fu dimostrato nel n. 36, ogni punto interno alla prima falda del cono α è interno ai coni quadrici che osculano il cono α nei suoi punti doppî.

Nel secondo caso si supponga, se è possibile, che il cono β passi per M.

Nell'ipotesi attuale, $L_1^{(1)}$ non passa per A: quindi esiste una ed una sola varietà $L_1^{(2)}$ di [2] che congiunga $L_1^{(2)}$ con A (n. 30), e gli spazî β ed α *appartengono* ad un S_{14} (nn. 16 e 17). Segue che l'S_7 $M\alpha$ non giace per intero sul cono β, e quindi è possibile condurre per M una retta r che giaccia in $M\alpha$, ma non in un S_{12} generatore del cono β, e si appoggi ad α in un punto diverso da A.

Di qua, ragionando come al n. 36, si arriva ad un assurdo; dunque il cono β non può passare per M. E allora, procedendo sempre come al n. 36, si vede subito che M è interno ad ogni cono del sistema $[V_2]$.

47. I punti interni alla prima falda di un cono del sistema $[V_1]$ sono tutti e soli i punti interni ai coni del sistema $[V_2]$ che forniscono i coni quadrici osculatori del considerato cono di $[V_1]$: dunque, in virtù della proposizione precedente:

Un punto M di **I** *è interno alla prima falda di un qualsiasi cono di* $[V_1]$.

48. *Se M è un punto di* **E**, *esiste qualche cono del sistema $[V_1]$ tale che la sua prima falda passa per M, o esclude M, e quindi qualche cono di $[V_2]$ che passa per M o esclude M.*

Se M è esterno alla prima falda del cono α, o sta su di essa, il teorema è dimostrato; supponiamo dunque che sia interno a codesta falda.

La retta MA ha a comune con $\mathbf{F}_1^{(1)}$ il punto A e un punto ulteriore B diverso da A; e fra i due segmenti rettilinei determinati da A e B, quello, ANB, che esclude M, è formato di punti che, all'infuori di A e B, son tutti interni ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Siccome B sta sulla $F^{(1)}$, ma non sulla $F^{(2)}$, situata tutta sul cono α, per B passa l'S_8 di una sola varietà $L_1^{(2)}$ della schiera [2]. Siano D un punto di $L_1^{(2)}$, e δ l'S_6 ivi tangente a $F^{(3)}$. Il cono di $[V_1]$, avente per vertice δ, passa per A e B, e inoltre A e B appartengono alla sua prima falda, una volta che A e B sono della prima falda di $F^{(1)}$: dunque i punti di ANB, eccettuati A e B, son tutti interni alla prima falda del cono δ, ed M è invece esterno alla falda stessa [n. 40, b)].

49. Da quanto è detto nei nn. 47 e 48, segue che

L'insieme **I** *è l'insieme di tutti e soli i punti dell'S_{15} ambiente interni alle prime falde dei coni del sistema $[V_1]$; o anche l'insieme di tutti e soli i punti dello spazio ambiente interni a ciascun cono del sistema $[V_2]$;*

e quindi resta confermato che a determinare gli insiemi **I** ed **E** basta da sola la falda $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

50. Dopo ciò, indicate con

$$F=0\,,\ G_1=0\,,\ G_2=0\,,\ \mu=0$$

le equazioni di $F^{(1)}$, di un cono V_1, di un cono V_2 che sia un cono osculatore del primo, e di un iperpiano (di $\Phi^{(3)}$) che tocchi entrambi i coni [38], si vede subito che si può disporre del segno di F, di μG_1 e di G_2 in modo tale che **I** sia nettamente definito dalle disuguaglianze

$$F>0\,,\ \mu G_1>0\,,\ G_2>0\,;$$

e quindi:

Gli insiemi **I** *ed* **E** *sono due campi a 15 dimensioni, aventi per frontiera comune* $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Per codesti insiemi valgono proposizioni come le *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*) del n. 40, e si dimostrano in modo perfettamente analogo. Ciò è evidente per *a*), *c*), *d*); quanto a *b*), si osserverà che nella prima parte del ragionamento adoperato nel n. 40 bisognerà parlare di prima falda di un cono di $[V_1]$, anzi che semplicemente di un cono di $[V_1]$ {e lo stesso dicasi per *e*), ove si considererà inoltre uno spazio $\sigma_1^{(2)}$ al posto dello spazio $\sigma_1^{(1)}$}; mentre nella seconda, al posto del cono di vertice λ di $[V_1]$, ivi considerato, bisognerà introdurre un cono del sistema $[V_2]$ avente per vertice l'S_{11} contenente gli S_6 tangenti a $F^{(3)}$ nei punti della quadrica di [1] intersezione di due V_4^6 della schiera [2]; e quanto ad *f*), è chiaro quale sia la modificazione da introdurre nel ragionamento fatto al n. 40.

51. Dopo ciò il teorema del n. 31 per $p=4$ è dimostrato, e si vede senz'altro che esso è generalizzabile a qualsiasi valore di p, poichè ormai sono stati messi in opera tutti i procedimenti dimostrativi che occorrerebbero a questo scopo.

Tra i teoremi che potremmo enunciare fra p qualunque, analoghi a quelli che per $p=3,4$ sono stati esposti nei numeri precedenti, ci basterà tener conto solo del seguente:

L'insieme **I** *dei punti interni alla prima falda* $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *della* $F^{(1)}$ *è caratterizzabile, geometricamente, come l'insieme di tutti e soli i punti*

(38) In altri termini, è possibile scegliere su $F^{(3)}$ tre punti A, B, C (congiunti da una sola $L^{(2)}$) così che le ipersuperficie $G_1=0$, $G_2=0$ e $\mu=0$ siano rispettivamente le polari, rispetto da $F^{(1)}$, di A, della coppia di punti A e B e della terna di punti A, B e C.

interni alle prime falde dei coni dei sistemi $[V_1]$, *o* $[V_2]$,..., *o* $[V_{p-2}]$(39); *analiticamente, come l'insieme di tutti e soli i punti soddisfacenti, con le loro coordinate, a* $p-1$ *diseguaglianze del tipo*

$$(18) \qquad F>0\,,\ \mu G_1>0\,,\ G_2>0\,,\ \mu G_3>0\,,\dots,\ G_{p-2}>0$$

o del tipo

$$(19) \qquad \mu F>0\,,\ G_1>0\,,\ \mu G_2>0\,,\ G_3>0\,,\dots,\ G_{p-2}>0$$

secondo che p *è pari o dispari, essendo*

$$F=0$$

l'equazione di $F^{(1)}$,

$$\mu=0$$

l'equazione dell'iperpiano (di $\Phi^{(p-1)}$*) polare misto, rispetto a* $F^{(1)}$, *di* $p-1$ *punti* $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ *di* $F^{(p-1)}$ *congiunti da una sola* $L^{(p-2)}$,

$$G_j=0$$

il cono polare misto rispetto a $F^{(1)}$ *dei punti* $A_1, A_2, \dots, A_j$, *e i coefficienti dei polinomii* F, μ *e* G_j *essendo opportunamente fissati.*

§ 10.

Completa interpretazione geometrica del teorema di esistenza.

52. Adesso siamo in grado di risolvere la questione lasciata in sospeso nel n. 10 del § 3: cioè possiamo assegnare il significato geometrico delle disuguaglianze

$$(9) \qquad \Delta_2>0\,,\ \Delta_1\Delta_3>0\,,\ \Delta_4>0\,,\dots$$

Per arrivarvi nel modo più agevole, giova procedere nella maniera che ora verrà indicata.

(39) Beninteso, poichè un cono V_{p-2} è un cono quadrico, la sua prima falda è il cono stesso.

53. Sia

$$(20) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad\qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0)$$

l'equazione di un complesso lineare di Δ, ossia di un complesso lineare dello spazio Σ avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali; le $a_{r,s}$ potranno riguardarsi come coordinate di punto sovrabbondanti nello spazio Σ'.

Qui si suppone, in armonia a quanto fu stabilito nel n. 29, che le $a_{r,s}$ siano dei numeri reali; e inoltre si suppune che le x_r (e le y_s) siano le coordinate del punto corrente di Σ nel sistema di coordinate fissato al n. 8.

Per una trasformazione di coordinate di Σ, i coefficienti $a_{r,s}$ dell'equazione di un complesso lineare di Δ si mutano in nuovi coefficienti $a'_{r,s}$ legati ai primi da relazioni lineari omogenee: quindi, se riguardiamo ancora queste $a'_{r,s}$ come coordinate in punto sovrabbondanti in Σ', possiamo dire che ogni trasformazione di coordinate in Σ si riflette in una trasformazione delle coordinate sovrabbondanti $a_{r,s}$ di Σ' in nuove coordinate dello stesso tipo.

Per un tale mutamento di coordinate, le $p(p-1)$ relazioni lineari omogenee, che legano fra loro le coordinate sovrabbondanti $a_{r,s}$, subiscono una sostituzione lineare. Ebbene, è utile osservare la forma che queste relazioni assumono per la trasformazione *reale* di coordinate in Σ' in cui si riflette una certa notevole trasformazione *reale* di coordinate in Σ.

Sia quest'ultima la trasformazione rappresentata dalle formule

$$(21) \qquad x_r = \sum_{j=1}^{j=p} (\alpha_{j,r}\, x'_{2j-1} + \beta_{j,r}\, x'_{2j}) \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p),$$

dove le x'_r sono le nuove coordinate, e le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ sono, al solito, la parte reale e il coefficiente dell'imaginario i di $\omega_{j,r}$. Il modulo di tale trasformazione è

$$(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \Delta,$$

e quindi è, come deve essere, diverso da zero.

Le nuove coordinate del punto ω_j $(j=1,2,\dots,p)$ sono date da:

$$(22) \qquad \omega'_{j,1} = \omega'_{j,2} = \dots = \omega'_{j,2j-2} = \omega'_{j,2j+1} = \dots = \omega'_{j,2p} = 0,$$

$$\omega'_{j,2j-1} = 1, \quad \omega'_{j,2j} = i \qquad (i = \sqrt{-1}):$$

quindi le nuove coordinate della retta congiungente i punti ω_j e ω_k,

$$p'_{rs} = \omega'_{j,r}\,\omega'_{k,s} - \omega'_{j,s}\,\omega'_{k,r}$$

$$(j\,,\,k = 1\,,\,2\,,\dots,\,p\,;\ r\,,\,s = 1\,,\,2\,,\dots,\,2p\,;\ j < k\,,\,r < s),$$

sono tutte nulle tranne le quattro

$$p'_{2j-1,2k-1}\,,\quad p'_{2j,2k}\,,\quad p'_{2j,2k-1}\,,\quad p'_{2j-1,2k}$$

per cui si ha

$$p'_{2j-1,2k-1} = 1\,,\ p'_{2j,2k} = -1\,;\quad p'_{2j,2k-1} = i\,,\ p'_{2j-1,2k} = i\,.$$

Analogamente, per le nuove coordinrte $\overline{p}'_{r,s}$ della retta congiungente i punti $\overline{\omega}_i$ e $\overline{\omega}_k$, si ha

$$\overline{p}'_{2j-1,2k-1} = 1\,,\ \overline{p}'_{2j,2k} = -1\,;\quad \overline{p}'_{2j,2k-1} = -i\,,\ \overline{p}'_{2j-1,2k} = -i\,,$$

mentre tutte le altre sono nulle.

Di qua segue che, se

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a'_{r,s}\,x'_r\,y'_s = 0$$

è l'equazione nelle nuove coordinate di Σ di un complesso lineare di Δ, cioè se le $a'_{r,s}$ sono le nuove coordinate (sovrabbondanti) di Σ' in cui si mutano le $a_{r,s}$, per effetto delle (21), deve essere

(23) $$a'_{2j-1,2k-1} = a'_{2j,2k}\quad;\quad a'_{2j,2k-1} + a'_{2j-1,2k} = 0$$

$$(j\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,p\,;\,j < k).$$

Son queste le $p\,(p-1)$ relazioni richieste, che legano le coordinate sovrabbondanti $a'_{r,s}$.

54. Le espressioni indicate più sopra con

(24) $$C\,,\ P_{j_1,j_2,\dots j_{2h}}\,,\ \Delta\,,\ \delta_{j_1,j_2,\dots j_{2h}}\,,\ \Delta_h\qquad (h = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,p)$$

sono costruite con le sole $c_{r,s}$ o con le sole $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ o con le $c_{r,s}$ e le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$; cioè con le sole $c_{r,s}$ o con le sole $\omega_{j,r}$ o con le $c_{r,s}$ e le $\omega_{j,r}$. Per mettere in evidenza questo fatto sarà utile sostituire ai simboli (24), successivamente, questi altri:

(25) $C(c)\,,\ P_{j_1,j_2,\ldots,j_{2h}}(c)\,,\ \Delta(\omega)\,,\ \delta_{j_1,j_2,\ldots,j_{2h}}(\omega)\,,\ \Delta_h(c\,,\,\omega).$

Ciò posto, supponiamo che le $a_{r,s}$ abbiano sempre il significato stabilito nel numero precedente, e proponiamoci di caratterizzare geometricamente le p ipersuperficie di Σ' rappresentate dalle equazioni

(26) $$\Delta_h(a\,,\,\omega)=0 \qquad (h=1\,,2\,,\ldots,p),$$

ove $\Delta_h(a\,,\,\omega)$ sta naturalmente, a rappresentare ciò che diventa $\Delta_h(c\,,\,\omega)$ per la sostituzione di $a_{r,s}$ al posto di $c_{r,s}$.

La risposta a questa domanda è fornita dalla seguente proposizione:

Si indichi con A_j il punto di $F^{(p-1)}$ rispondente al complesso lineare di Λ il cui asse è l'S_{2p-3} che congiunge i punti $\omega_1\,,\omega_2\,,\ldots,\omega_{j-1},\omega_{j+1},\ldots,\omega_p$ e $\overline{\omega}_1\,,\overline{\omega}_2\,,\ldots,\overline{\omega}_{j-1}\,,\overline{\omega}_{j+1}\,,\ldots,\overline{\omega}_p$ $(j=2,3,\ldots,p)$; allora l'equazione (26), *per* $h=p$, *rappresenta la polare mista, rispetto a $F^{(1)}$, dei punti $A_p\,,A_{p-1}\,,\ldots,A_{h+1}$.*

Infatti, in virtù dell'identità (n. 8)

$$\Delta_p(a\,,\,\omega)=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}P_{1,2,\ldots,2p}(a)\,\Delta(\omega),$$

si ha, in primo luogo, che l'ipersuperficie rappresentata da

$$\Delta_p(a\,,\,\omega)=0$$

coincide con quella rappresentata dall'equazione

$$P_{1,2,\ldots,2p}(a)=0,$$

cioè con $F^{(1)}$.

In secondo luogo, supponiamo di effettuare in Σ la trasformazione di coordinate definita dalle (21) e quindi in Σ' la corrispondente trasformazione dalle coordinate $a'_{r,s}$.

In base all'osservazione del n. 6, si ha, identicamente,

$$\Delta_h(a\,,\,\omega)=\Delta_h(a',\,\omega');$$

ed è poi

$$\Delta_h(a'\,,\,\omega')=(-1)^{\frac{h(h-1)}{2}}\,\Sigma\,P_{j_1,j_2,\ldots,j_{2h}}(a')\,\delta_{j_1,j_2,\ldots,j_{2h}}(\omega').$$

Ora, per le (22),

$$\Delta(\omega') = \begin{vmatrix} 1\ 0 & 0\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\ 0 \\ 0\ 0 & 1\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\ 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0\ 0 & 0\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1\ 0 \\ 0\ 1 & 0\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\ 0 \\ 0\ 0 & 0\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\ 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0\ 0 & 0\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\ 1 \end{vmatrix};$$

dunque le $\delta_{j_1, j_2, \ldots j_{2h}}(\omega')$ con $2h$ indici, che sono estratte dalla matrice formata dalle prime h righe del determinante $\Delta(\omega')$ e dalle righe $(p+1)^{ma}$, $(p+2)^{ma}$, $(p+h)^{ma}$, sono tutte nulle, tranne quella con gl'indici $1, 2, \ldots, 2h$; per cui si ha:

$$\delta_{1,2,\ldots,2h}(\omega') = (-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)}$$

Segue che

$$\Delta_h(a', \omega') = P_{1,2,\ldots,2h}(a'):$$

e quindi, nelle nuove coordinate $a'_{r.s}$, l'equazione dell'ipersuperficie rappresentata da

$$\Delta_h(a, \omega) = 0$$

è semplicemente

$$P_{1,2,\ldots,2h}(a') = 0.$$

Ora,

$$P_{1,2,\ldots,2h}(a') \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1)$$

è la derivata mista $(p-h)^{ma}$ di

$$P_{1,2,\ldots,2p}(a')$$

rispetto ad $a'_{2p-1,2p}$, $a'_{2p-3,2p-2}, \ldots, a'_{2h+1,2h+2}$; dunque, osservando:

1°) che l'equazione della prima polare di un punto rispetto a un'ipersuperficie in un sistema di coordinate omogenee sovrabbondanti legate da relazioni *lineari* (omogenee) si scrive allo stesso modo che nel caso di un sistema di coordinate proiettive omogenee;

2⁰) che il gruppo di valori che si ha per le $a'_{r,s}$, ponendole tutte eguali a zero tranne la $a'_{2j-1,2j}$ $(j = 1, 2, \ldots p)$, è il gruppo delle coordinate di un punto di Σ', perchè per tal gruppo sono soddisfatte le relazioni (23);

3⁰) che il punto di Σ' che ha nulle tutte le coordinate $a'_{r,s}$ tranne la $a'_{2j-1,2j}$ è il punto di $F^{(p-1)}$ rispondente al complesso lineare di Λ il cui asse è l'S_{2p-2} congiungente i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_p$ e $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{j-1}, \overline{\omega}_{j+1}, \overline{\omega}_{j+1}, \ldots, \overline{\omega}_p$, cioè il punto A_j,

si conclude, come volevasi, che l'ipersuperficie rappresentata dall'equazione

$$\Delta_h(a, \omega) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p-1)$$

è la polare mista, rispetto ad $F^{(1)}$, dei punti $A_p, A_{p-1}, \ldots, A_{h+1}$.

55. E adesso indichiamo con Γ il punto di Σ' rispondente al complesso lineare γ; allora il significato geometrico delle disuguaglianze (9) è quello fornito dal seguente teorema:

Il punto Γ è un punto di Σ' interno alla prima falda $\mathrm{F}_1^{(1)}$ *dell'ipersuperficie $F^{(1)}$: ossia è un punto dell'insieme che più sopra è stato chiamato* **I**.

E infatti, in virtù di quanto è detto nel numero precedente e nel n. 51, è intanto chiaro che i punti di **I** son tutti e soli quei punti di Σ' per cui ciascuna delle espressioni

$$\Delta_2(a, \omega), \Delta_1(a, \omega)\,\Delta_3(a, \omega), \Delta_4(a, \omega), \Delta_1(a, \omega)\,\Delta_5(a, \omega), \ldots$$

è non nulla e ha un segno determinato; o (ciò che fa lo stesso, per l'osservazione del n. 6 e per quel che abbiamo visto nel numero precedente) tutti e soli quei punti di Σ' per cui ciascuna delle espressioni

$$(27) \qquad P_{1,2,3,4}(a'), P_{1,2}(a')\,P_{1,2,\ldots,6}(a'), P_{1,2,\ldots,8}(a'), P_{1,2}(a')\,P_{1,2,\ldots,10}(a'), \ldots$$

è diversa da zero e ha un segno determinato.

Segue che il nostro assunto sarà stabilito se riusciamo a far vedere che un tal segno è sempre quello positivo: e per questo, una volta che quando $p = 2$, in base a una nostra Nota già citata [40], tale circostanza si verifica realmente, ci basterà far vedere che la nostra affermazione è esatta per un valore di p, quando si ammetta come esatta per tutti i valori inferiori.

Consideriamo il punto A di Σ' le cui coordinate a'_{rs} sono tutte nulle tranne quelle date dalle seguenti uguaglianze:

$$a'_{1,2} = a'_{3,4} = \ldots = a'_{2p-3,2p-2} = \varrho \quad (\varrho \text{ reale e non nullo}).$$

Ricordando che

$$P_{1,2}(a') \equiv a'_{1,2}$$

$$P_{1,2,3,4}(a') \equiv a'_{1,2}\, a'_{3,4} + a'_{1,3}\, a'_{4,2} + a'_{1,4}\, a'_{2,3}$$

$$P_{1,2,3,4,5,6}(a') \equiv a'_{1,2}\, a'_{3,4}\, a'_{5,5} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{1,2,\ldots,2p}(a') \equiv a'_{1,2}\, a'_{3,4}\, a'_{5,6} \ldots a'_{2p-1,2p} + \ldots$$

è chiaro che per il punto A l'ultima delle espressioni (27) è nulla, mentre tutte le altre sono positive, una volta che nel punto A si ha:

$$P_{1,2,\ldots,2h}(a') = \varrho^h \quad (h = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, p-1).$$

Ciò significa, in primo luogo, che A è un punto di $F^{(1)}$, è in secondo luogo, *grazie all'ammissione fatta*, che A è interno alla prima falda del cono del sistema $[V_1]$ rappresentato dall'equazione

$$P_{1,2,\ldots,2p-2}(a') = 0\,; \tag{28}$$

e quindi A è un punto della prima falda di $F^{(1)}$.

L'equazione dell'iperpiano tangente ad $F^{(1)}$ in A è data da

$$a'_{2p-1,2p} = 0\,,$$

quindi il punto B di Σ' per cui sonò nulle le coordinate $a'_{r,s}$ tranne le

$$a'_{1,2}\,,\, a'_{3,4}\,,\, a'_{5,6}\,,\ldots,\, a'_{2p-3,2p-2}\,;\; a'_{2p-3,2p-1} = a'_{2p-2,2p}\,;\; a'_{2p-2,2p-1} = -\, a'_{2p-3,2p}$$

[40] Loc. cit. [5]).

che son date da:

$$a'_{1,2} = a'_{3,4} = a'_{5,6} = \dots = a'_{2p-3,2p-2} = \varrho\,,\ a'_{2p-3,2p-1} = \lambda\,,\ a'_{2p-3,2p-1} = \mu$$

$$(\varrho\,,\ \lambda\,,\ \mu \text{ reali e non nulli}).$$

è frattanto un punto di questo iperpiano.

Ora nel punto B si ha:

$$P_{1,2,\dots,2h}(a') = \varrho^h \qquad (h = 1\,,\,2\,,\dots,\,p-1),$$

e

$$P_{1,2,\dots,2p}(a') = -\,\varrho^{p-2}(\lambda^2 + \mu^2)\ ({}^{41}),$$

dunque B è interno alla prima falda del cono di $[V_1]$ rappresentato dalla (28), e in B è negativa la prima o la seconda delle espressioni

$$(29) \qquad P_{1,2,\dots,2p}(a')\quad,\quad P_{1,2}(a')\,P_{1,2,\dots 2p}(a)\,,$$

secondo che p è pari o dispari.

D'altro canto poichè B non sta su $F^{(1)}$ ed appartiene all'iperpiano tangente ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in A è certo che B è esterno ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, dunque tra i punti interni alla prima falda del cono rappresentato dall'equazione (28) quelli interni ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$ sono distinti, come volevasi, dal fatto che per essi risulta positiva la prima o la seconda delle espressioni (29) secondo che p è pari o dispari.

Con questo il nostro teorema è completamente dimostrato.

56. Per poter enunciare comodamente in forma geometrica il teorema di esistenza delle funzioni abeliane, estendiamo alla totalità dei complessi singolari (reali) di A la distinzione in due falde e la nomenclatura adoperata per $F^{(1)}$; allora possiamo dire che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il quadro di numeri (I) *possa pensarsi come la tabella di* 2p *sistemi di periodi primitivi di una funzione abeliana a* p (≥ 2) *variabili indipendenti è:*

1^0) *che le sue righe siano le successioni delle coordinate di* p *punti di un* S_{2p-1} *congiunti da un* S_{p-1}, τ, *imaginario di specie* p.

(41) Nel punto B i *termini di* $P_{1,2,\dots,2p}(a)'$ si annullano tutti, tranne i due dati da:

$$a'_{1,2}\,a'_{2,4}\dots a'_{2p-5,2p-4}\,(a'_{2p-3,2p-1}\,a'_{2p,2p-2} + a'_{2p-3,2p}\,a'_{2p-2,2p-1}).$$

2°) *che esista nell'S_{2p-1} considerato un complesso lineare razionale non singolare avente τ come spazio totale;*

3°) *che questo complesso sia interno alla prima falda della totalità dei complessi reali dell'S_{2p-1} dotati di retta singolare e aventi in τ uno spazio totale.*

§ 11.

Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari.

57. Allorchè un quadro di numeri può riguardarsi come la tabella di $2p$ sistemi di periodi primitivi di una funzione abeliana a p variabili indipendenti $u_1, u_2, \dots, u_p$, gli elementi del quadro soddisfano a una relazione di Riemann principale; e in generale non esistono altre relazioni di Riemann, principali o non, a cui essi soddisfacciano.

D'altro canto se gli elementi di un tal quadro soddisfanno a due relazioni di Riemann aventi l'una i coefficienti $c'_{r,s}$ e l'altra i coefficienti $c''_{r,s}$, essi soddisfanno anche alla relazione di Riemann avente i coefficienti $\lambda c'_{r,r} + \mu c''_{r,s}$, essendo λ e μ due intieri qualsivogliano, dunque:

L'insieme delle relazioni di Riemann *che legano gli elementi della tabella formata da $2p$ sistemi di periodi primitivi di una funzione abeliana a p variabili indipendenti è assimilabile a quello dei punti razionali di uno spazio lineare di dimensione $k \geq 0$ (e contiene sempre, necessariamente, almeno una relazione di* Riemann *principale).*

La dimensione k dello spazio che compare in questo teorema non può naturalmente superare quella di Σ'; si hanno dunque per k le limitazioni

$$0 \leq k \leq p^2 - 1.$$

Inoltre è chiaro che il valore di k è indipendente dalla scelta dei $2p$ sistemi di periodi primitivi, cioè è invariante di fronte alle trasformazioni lineari unimodulari eseguite sui periodi, ed è indipendente da ogni sostituzione lineare eseguita sulle variabili $u_1, u_2, \dots, u_p$; quindi k è un vero e proprio *carattere* della funzione abeliana considerata.

Se $k = 0$ la funzione abeliana in discorso si dirà *non singolare*; se $k > 0$ la funzione stessa si dirà *k volte singolare.* In ogni caso, poi, k si dirà il suo *indice di singolarità.*

58. Adesso sia $f(u_1, u_2, \dots, u_p)$ una funzione abeliana con l'indice di singolarità k *appartenente* alla tabella (I).

In relazione alla (I), imaginiamo introdotti: lo spazio Σ a $2p-1$ dimensioni, gli spazî τ e $\overline{\tau}$ e il sistema lineare Δ dei complessi lineari aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali. Poi, per maggiore comodità di rappresentazione, riferiamo omograficamente alla totalità dei punti di uno spazio lineare S a $p(2p-1)-1$ dimensioni la totalità di tutti i complessi lineari di Σ, fissando in S un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo corrispondere al complesso lineare di Σ, avente per equazione

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0\,,$$

il punto di S che ha per coordinate i coefficienti $a_{r,s}$ di questa equazione, per cui $r > s$.

Allora, entro S si avrà un'ipersuperficie F dell'ordine p, rispondente all'insieme dei complessi lineari singolari di Σ, e uno spazio lineare a p^2-1 dimensioni, rispondente al sistema Δ, sul quale F segnerà un'ipersuperficie dell'ordine p. Evidentemente si può supporre che quest'ultimo spazio e la relativa ipersuperficie siano lo spazio Σ' e l'ipersuperficie $F^{(1)}$ introdotti nelle pagine precedenti.

Infine, entro Σ' si avrà uno spazio lineare μ della dimensione k, che rappresenterà coi suoi punti il sistema dei complessi lineari di Δ determinato dai $k+1$ complessi lineari indipendenti di Σ, rispondenti a $k+1$ relazioni di Riemann indipendenti, a cui soddisfanno gli elementi della (I).

Com'è chiaro, lo spazio μ è *razionale* e contiene dei punti interni alla prima falda di $F^{(1)}$.

Ebbene, la considerazione è invertibile; e vale, quindi, il seguente

Teorema fondamentale. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè la tabella* (I) *sia la tabella dei periodi di una funzione abeliana a p variabili indipendenti con l'indice di singolarità k, è che, introdotti per essa gli spazi Σ, S, Σ' e l'ipersuperficie $F^{(1)}$, Σ' contenga un S_k razionale μ e nessun altro punto razionale al-*

l'infuori di quelli di μ, *e che* μ *contenga qualche punto interno alla prima falda di* $F^{(1)}$.

E infatti, poichè μ è razionale, o si riduce a un punto razionale se $k = 0$, o contiene un insieme di punti razionali dovunque denso; e quindi, se μ contiene punti interni alla prima falda di $F^{(1)}$, contiene anche punti razionali interni ad essa. Allora la verità di questo teorema è subito provata dalla proposizione del n. 56 e dalle definizioni del n. 57.

59. Il teorema del n. prec. generalizza nel modo più ampio il teorema del sig. HUMBERT per il caso delle funzioni iperellittiche semplicemente regolari, quando si riguardi quest'ultimo come un criterio per decidere dell'esistenza o meno di una tal funzione appartenente a una tabella assegnata: e sembra suscettibile di applicazioni importanti.

Infatti, se teniamo le notazioni precedenti e supponiamo soddisfatte le condizioni di esistenza, l'ipersuperficie F (o, ciò che fa lo stesso, la $F^{(1)}$) segna su μ un'ipersuperficie reale $M^{(1)}$ con punti reali, rappresentabile in S, nel sistema fissato di coordinate, con equazioni a coefficienti razionali, e dotata di due falde di cui una è atta a dividere la totalità dei punti reali di μ in due regioni. *Le particolarità proiettive di* $M^{(1)}$ *si tradurranno allora in particolarità analitiche del corpo di funzioni abeliane appartenente alla tabella* (I).

Per esempio, come ci proponiamo di far vedere in un altro lavoro, si ha in questa osservazione una utile guida per la classificazione delle varietà algebriche di irregolarità superficiale assegnata con sistemi regolari di integrali semplici di prima specie riducibili.

60. Abbiasi, infine, una funzione abeliana *semplicemente* (cioè, *una volta*) *singolare*, appartenente a una tabella che possiamo supporre coincidente con la tabella (I); e siano le $c'_{r,s}$ e le $c''_{r,s}$ i coefficienti di due relazioni distinte di RIEMANN che ne leghino i periodi.

Lo pfaffiano del determinante emisimmetrico $|\lambda c'_{r,s} + \mu c''_{r,s}|$, ove λ e μ sono due indeterminate, è un polinomio omogeneo di grado p in λ e μ, che possiamo indicare con

$$A_0\, \lambda^p + A_1\, \lambda^{p-1} \mu + \ldots + A_p\, \mu^p.$$

In questo, A_0 e A_p sono gli pfaffiani dei determinanti emisimmetrici $|c'_{r,s}|$ e $|c''_{r,s}|$; gli altri coefficienti sono poi degli invarianti simultanei delle forme bilineari

$$\sum_{r,s}^{1...2p} c'_{r,s}\, x_r\, y_s \quad \text{e} \quad \sum_{r,s}^{1...2p} c''_{r,s}\, x_r\, y_s\,.$$

Ebbene, grazie alla proprietà 3) della $\mathbf{F}_1^{(1)}$ enunciata nel teorema del n. 31, si ha subito che ([42]):

L'equazione

$$A_0\, \lambda^p + A_1\, \lambda^{p-1}\, \mu + \ldots + A_p\, \mu^p = 0\,, \tag{30}$$

di grado p nel rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$, *ha tutte le sue radici reali; e, di queste, due almeno sono distinte* ([43]).

La distinzione, che, in base a questo enunciato, viene stabilita fra due delle radici dell'equazione (30) e le rimanenti, è già caratterizzata, in modo geometrico, dalle considerazioni delle pagine precedenti; crediamo inutile trattenerci a dare ad essa una veste analitica.

Osserveremo, piuttosto, che, ove si ricordi l'identità (14) e si tengano presenti le forme Hermitiane rispondenti alle nostre due relazioni di Riemann nel senso chiarito nel § 1, in quest'ultimo teorema si trova contenuto, con una maggiore determinazione, un teorema noto della teoria di queste forme; che resta, quindi, stabilito, anche per via geometrica.

([42]) Cfr., per un ragionamento analogo, la Nota citata in ([5]) sulle funzioni iperellittiche singolari.

([43]) Questo teorema apparisce enunciato in forma incompleta nella Nota citata in ([1]). Allora non avevamo stabilito la parte 3) del teorema del n 31 nella maniera completa attuale; anzi, un errore di calcolo, insinuatosi in un esempio numerico che sviluppammo per il caso $p = 4$, ci fece credere che fosse impossibile raggiungere una tale compiutezza.