SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE CON INFINITI SISTEMI REGOLARI DI INTEGRALI RIDUCIBILI (*)

In una Nota predente [1] abbiamo dedotto, per via quasi incidentale, una proposizione relativa alle varietà algebriche con un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, che caratterizza nettamente il numero di codesti sistemi e la loro configurazione.

Questo nuovo lavoro è dedicato allo studio della configurazione dei sistemi regolari di una varietà algebrica nell'ipotesi che essi siano infiniti, e si dà, a proposito di essa, una prima catena di teoremi generali.

Grazie al teorema di SEVERI sul sistema congiungente due sistemi regolari di integrali riducibili, è chiaro che, nell'esame di una varietà algebrica contenente infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, giova fissar l'attenzione su quelli, fra di essi, che non contengano sistemi regolari di dimensione inferiore alla propria, o, come diciamo, che siano *puri*: essi appariscono, infatti, come gli elementi primi con cui possono comporsi tutti gli altri.

L'osservazione, come si vede, è molto semplice; ma sembra, anche, assai feconda, poichè conduce a introdurre, per lo studio della configurazione dei sistemi regolari di una varietà algebrica che ne contenga infiniti, una serie di *caratteri* che sono altrettanti numeri interi.

Noi dimostriamo, infatti, che il sistema degli integrali di una tale varietà algebrica può considerarsi, in infiniti modi diversi, come il sistema congiungente di un conveniente numero di sistemi regolari

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XXIV, serie 5ª, 2º sem., fasc. 12º, 1916.

(1) SCORZA, *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (2º sem. 1915), pp. 445-453].

puri indipendenti; *ma, comunque si proceda, restan sempre gli stessi, il numero di codesti sistemi puri, le loro dimensioni e i loro indici di singolarità.*

1. Un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali (semplici, di 1ª specie) con $2q$ periodi di una varietà algebrica di irregolarità superficiale $\geq q$, si dirà *puro* o *impuro*, secondo che non contiene o contiene sistemi lineari ∞^{r-1} di integrali con $2r$ periodi, essendo $r < q$.

Da questa definizione segue subito che:

Un sistema lineare impuro di integrali contiene sempre qualche sistema puro; ed è poi chiaro che:

Se di due sistemi regolari di integrali riducibili, appartenenti a una stessa varietà algebrica, uno è puro e l'altro è impuro, essi o sono indipendenti o si appartengono; se invece sono entrambi puri, essi o sono indipendenti o coincidono ([2]).

2. Due sistemi lineari ∞^{q-1} di integrali con $2q$ periodi, aventi lo stesso indice di singolarità, si diranno *isomorfi*, se sono entrambi puri; oppure se sono entrambi impuri e può stabilirsi una tale trasformazione omografica del primo nel secondo, che l'insieme dei sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti al primo si rifletta nell'insieme analogo del secondo, due sistemi regolari omologhi riuscendo sempre (di egual dimensione e) di eguale indice di singolarità.

Evidentemente, *sistemi di integrali isomorfi ad uno stesso sono isomorfi tra di loro; ed allorchè due sistemi impuri sono isomorfi, in ogni omografia, che ne metta in luce l'isomorfismo, risultano isomorfi i sistemi regolari omologhi di integrali riducibili.*

3. La prima osservazione del n. 1 può essere precisata. Si ha, cioè che:

Un sistema lineare impuro di integrali può sempre considerarsi come il sistema congiungente un certo numero di sistemi regolari puri indipendenti di integrali riducibili.

Per fissar le idee, possiamo supporre, com'è lecito, che il sistema lineare impuro considerato sia quello, H, di tutti gli integrali di una varietà algebrica V; cosicchè V conterrà, per ipotesi, qualche sistema regolare puro di integrali riducibili. Sia, uno di questi, il sistema A, e sia A' un complementare di A su V.

([2]) Cfr. SCORZA, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, sarie 5ª, vol. XXIV (1º sem. 1915) pp. 412-418 e pp. 645-654], pag. 418.

Siccome H è il sistema congiungente A con A', se A' è puro il teorema è dimostrato; se no, sia B un sistema puro contenuto in A', e B' un complementare di B in A'.

Siccome A' è il sistema congiungente B con B', H risulta il sistema congiungente dei sistemi indipendenti A, B e B', ove A e B sono già dei sistemi puri.

Ora, se B' è puro, il teorema è dimostrato; se no, si applicherà a B' il discorso fatto già per H e per A'. Siccome il procedimento non può essere illimitatamente proseguito, si finirà per trovare che H è il sistema congiungente di un certo numero di sistemi regolari puri indipendenti $A, B, C, \dots, L$, e allora il teorema sarà dimostrato.

4. Un gruppo di sistemi puri di un sistema impuro H, che siano indipendenti e che abbiano H quale sistema congiungente — tale è ad es., per il sistema H del n. 3, il gruppo $A, B, C, \dots, L$ ivi trovato —, si dirà un *gruppo fondamentale* (di sistemi puri) di H.

Per estensione si dirà poi *gruppo fondamentale di un sistema puro* il sistema medesimo.

In ciascun gruppo fondamentale di un sistema impuro H, un sistema qualunque del gruppo e il sistema congiungente tutti gli altri sono fra loro complementari; quindi *ogni gruppo fondamentale di H può essere ottenuto col procedimento adoperato più sopra, e ogni sistema puro di H fa parte di qualche suo gruppo fondamentale.*

Gruppo fondamentale di una varietà algebrica è poi un gruppo fondamentale del sistema totale dei suoi integrali.

5. Un sistema lineare di integrali, o, ciò che in sostanza è lo stesso, una varietà algebrica, può avere più gruppi fondamentali; e anzi, se ne ha più di uno, ne ha infiniti (n. 6).

Ora il risultato finale a cui miriamo consiste nel dimostrare che in questa seconda alternativa *i vari gruppi fondamentali della varietà risultano tutti costituiti di uno stesso numero di sistemi puri, quelli di un gruppo essendo inoltre isomorfi rispettivamente a quelli di ogni altro.*

6. Sia V_p una varietà algebrica, di irregolarità superficiale p e indice di singolarità k, dotata di sistemi regolari di integrali riducibili, e siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ i sistemi puri di un suo gruppo fondamentale; siano poi $q_j - 1$ e k_j la dimensione e l'indice di

singolarità del sistema A_j. *Allora si ha in primo luogo,*

$$(1) \qquad q_1 + q_2 + \dots + q_n = p,$$

e, in secondo luogo,

$$(2) \qquad k_1 + k_2 + \dots + k_n + n - 1 \leq k,$$

dove vale il segno superiore o l'inferiore, secondo che è infinito o finito l'insieme dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p.

Siccome la (1) è conseguenza immediata della definizione di gruppo fondamentale, occupiamoci soltanto della (2), e diciamo $A^{(j)}$ il sistema congiungente i sistemi puri $A_1, A_2 \dots, A_j$, e $k^{(j)}$ il suo indice di singolarità. Naturalmente, $A^{(n)}$ sarà il sistema totale degli integrali di V_p; e $A^{(1)}$, $k^{(1)}$ e $k^{(n)}$ saranno, rispettivamente, la stessa cosa che A_1, k_1 e k.

Nel sistema $A^{(j)}$, per $j \geq 2$, A_j e $A^{(j-1)}$ sono fra loro complementari; quindi essi hanno in $A^{(j)}$ uno stesso coefficiente di immersione. Diciamolo $\lambda^{(j)}$.

Per quanto abbiamo stabilito altrove, sarà, successivamente [3],

$$k_1 + k_2 + 1 = k^{(2)} - \lambda^{(2)}; \; k^{(2)} + k_3 + 1 = k^{(3)} - \lambda^{(3)}; \dots ;$$

$$k^{(n-1)} + k_n + 1 = k - \lambda^{(n)};$$

e quindi

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n + n - 1 = k - \sum_{j=2}^{j=n} \lambda^{(j)}.$$

Siccome ciascuna $\lambda^{(j)}$ è positiva o nulla, segue che nella (2) vale il segno superiore o l'inferiore, secondo che una almeno o nessuna delle $\lambda^{(j)}$ è diversa da zero.

Nel primo caso, uno almeno dei sistemi $A^{(j)}$ (e precisamente quello per cui è diversa da zero la $\lambda^{(j)}$ corrispondente) contiene infiniti sistemi regolari riducibili, e quindi la stessa cosa può dirsi per la varietà V_p.

Nel secondo caso, A_n e $A^{(n-1)}$ risultano isolati su V_p; poi A_{n-1} e $A^{(n-2)}$ risultano isolati entro $A^{(n-1)}$, e quindi anche su V_p; e via

[3] SCORZA, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (2º sem. 1915), pp. 393-400], n. 5.

dicendo ([4]). Ma allora $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono tutti isolati su V_p, e V_p contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili; i quali, come sappiamo, sono dati tutti dai sistemi A_j e da quelli (impuri) che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., a $n-1$ a $n-1$.

Con ciò è stabilito il teorema enunciato; e si vede, anzi, che *la nostra V_p contiene uno, ed uno solo, gruppo fondamentale di sistemi puri quando, e solo quando, non contiene che un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili.*

7. *Se A è un sistema regolare di integrali riducibili appartenente a una varietà algebrica V, ed A' e A'' sono due suoi diversi complementari su V, A' e A'' sono isomorfi.*

Supponiamo introdotta la solita rappresentazione geometrica del sistema degli integrali di V, per modo da poter parlare di sistemi nulli di V, di assi di A, A', A'', ecc. ([5]). Siccome A' e A'' sono complementari ad A, è possibile in infiniti modi scegliere due sistemi nulli (non singolari) φ' e φ'' di V, dei quali l'uno, φ', porti l'asse A'_1, di A', in quello di A, e l'altro, φ'', l'asse di A in quello, A''_1, di A''. Ma allora il prodotto $\varphi' \varphi''$ è una omografia *razionale*, che muta in sè tanto l'imagine quanto l'imagine coniugata del sistema totale degli integrali di V, e che trasforma l'asse A'_1 nell'asse A''_1, ogni spazio razionale contenuto in A'_1 in uno spazio razionale contenuto in A''_1, e ogni sistema nullo razionale di A'_1 (o di uno spazio razionale subordinato ad A'_1) in un sì fatto sistema nullo di A''_1 (o di uno spazio razionale subordinato ad A''_1). Tanto basta, evidentemente, per concludere che A' e A'' sono isomorfi ([6]).

8. Ciò posto dimostriamo che:

Se una varietà algebrica contiene sistemi regolari di integrali riducibili, ma è priva di sistemi regolari isolati, i suoi sistemi regolari puri sono tutti isomorfi tra di loro: cioè, hanno tutti la stessa dimensione e lo stesso coefficiente di regolarità.

Sia V la varietà algebrica considerata, la quale, come è chiaro, contiene certo infiniti sistemi regolari puri; e supponiamo, se è possibile, che questi sistemi puri non siano tutti isomorfi tra di loro,

([4]) Loc. cit. ([1]).

([5]) Si tengano presenti le Note citate in ([2]) e ([3]).

([6]) Se i sistemi A' e A'' sono puri, il teorema del testo si riduce al teorema IV della Nota citata in ([3]) e ivi dimostrato per via diversa da quella attuale.

o perchè non hanno tutti la stessa dimensione, o perchè, pur avendo una stessa dimensione, non hanno tutti lo stesso indice di singolarità.

In ogni caso sia A un sistema puro di V, tale che non esistano su V sistemi puri di dimensione inferiore a quella di A.

Ciascun sistema puro A_1 di V, non isomorfo ad A, non potrà essere indipendente da un qualsiasi complementare di A : poichè o A_1 ha dimensione superiore a quella di A e allora l'affermazione fatta è senz'altro evidente; o A_1 ha la stessa dimensione di A, ma non lo stesso indice di singolarità, e allora (n. 7) non può avere con A uno stesso complementare. Segue (n. 1) che ciascun complementare di A contiene tutti i sistemi puri di V non isomorfi ad A.

Chiamiamo B il sistema regolare di integrali riducibili, di dimensione minima, che, in base a quanto è stato detto, contiene tutti i sistemi puri di V non isomorfi ad A ; per la definizione stessa di B sarà impossibile che V contenga altri sistemi isomorfi a B. Ma ciò è assurdo, perchè, in virtù dell'ipotesi, B non è isolato su V, e quindi esistono su V infiniti sistemi aventi con B uno stesso complementare, cioè infiniti sistemi regolari isomorfi a B ; dunque, come volevasi, è assurdo supporre che V contenga sistemi puri non isomorfi ad A.

Possiamo pertanto asserire che:

Se una varietà algebrica contiene sistemi regolari di integrali riducibili, ma nessuno di questi è isolato, i suoi gruppi fondamentali di sistemi puri sono infiniti, ma contengono tutti lo stesso numero di sistemi, e questi sono tutti isomorfi tra di loro. La dimensione di ognuno di questi sistemi puri, aumentata di 1, è, poi, un divisore dell'irregolarità superficiale della varietà ; per modo che, se quest'ultima è un numero primo, i sistemi puri in discorso si riducono a integrali ellittici.

Con questo il teorema preannunciato nel n. 5 resta stabilito per le varietà contenenti sistemi regolari di integrali riducibili, ma prive di sistemi regolari isolati.

9. Adesso supponiamo che V sia una varietà algebrica dotata di sistemi regolari di integrali riducibili, tra i quali ve ne siano di quelli isolati, e indichiamo con

$$A_1\,, A_2\,, \dots\,, A_n \qquad (n \geq 2) \tag{3}$$

un gruppo fondamentale di sistemi puri di V.

I sistemi regolari isolati di V sono, per quanto sappiamo, in numero finito e, detti, fra di essi, $B_1\,, B_2\,, \dots\,, B_m$ quelli che non contengono sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, i sistemi regolari isolati di V sono forniti tutti da $B_1, B_2, \dots, B_m$ e dai sistemi regolari che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., a $m-1$ a $m-1$. Si ricordi, poi, che il sistema congiungente $B_1, B_2, \dots, B_m$ è il sistema di tutti gli integrali di X: e quindi *il* complementare, ad es., di B_1 su V, è il sistema B'_1 congiungente $B_2, B_3, \dots, B_m$ (7).

Siccome B_1 e B'_1 sono isolati su V, ognuno dei sistemi A_j, essendo puro, dovrà o appartenere a B_1 o appartenere a B'_1 (8); quindi il gruppo fondamentale (3) si spezzerà in gruppi parziali, poniamo

$$A_1, A_2, \dots, A_{n_1} \qquad \text{e} \qquad A_{n_1+1}, \dots, A_n \qquad (n_1 \geq 1),$$

dei quali l'uno sarà formato dai sistemi A_j situati in B_1, e l'altro dai sistemi A_j situati in B'_1. Di più, il primo sarà un gruppo fondamentale di sistemi puri di B_1, e l'altro sarà un gruppo fondamentale di sistemi puri di B'_1.

Ora si consideri in B'_1 *il* complementare di B_2 che è il sistema B'_2 congiungente $B_3, B_4, \dots, B_m$; in B'_2 *il* complementare di B_2, e così via; e si ripeta a volta a volta il ragionamento fatto. Si troverà, alla fine, che il gruppo fondamentale (3) si spezza in m gruppi parziali, diciamo

$$(4) \qquad A_1, A_2, \dots, A_{n_1};\ A_{n_1+1}, \dots, A_{n_1+n_2};\ \dots;\ A_{n_{m-1}+1}, \dots, A_n$$

che costituiscono, ordinatamente, altrettanti gruppi fondamentali di sistemi puri di $B_1, B_2, \dots, B_m$.

Ma ciascun sistema B_j non contiene sistemi regolari isolati di V di dimensione inferiore alla propria, cioè non contiene sistemi regolari che siano isolati in esso, dunque un gruppo parziale (4) o contiene un solo sistema puro, e allora coincide col corrispondente sistema B_j; o è formato di sistemi puri, tutti isomorfi tra di loro, e in tal caso il numero dei suoi sistemi, la loro dimensione comune e il loro comune indice di singolarità dipendono soltanto dal corrispondente sistema B_j.

Segue che o i sistemi B_j sono tutti puri, e allora $m = n$, i sistemi B_j coincidono coi sistemi A_j, e V ammette un solo gruppo fondamentale; o fra i sistemi B_j ve n'è almeno uno impuro, e allora V ammette infiniti gruppi fondamentali distinti, ma questi conten-

(7) Vedi la Nota citata in (1), pag. 61.

(8) Loc. cit. (1), pag. 61.

gono tutti lo stesso numero di sistemi puri, i sistemi di uno risultando rispettivamente isomorfi a quelli di qualsiasi altro.

Dalle cose dette qui e nel num. precedente ricaviamo il seguente teorema generale:

Una varietà algebrica dotata di infiniti sistemi regolari di integrali riducibili ammette infiniti gruppi fondamentali distinti di sistemi puri. Due qualunque di questi gruppi contengono però lo stesso numero di sistemi puri, e i sistemi dell'uno sono ordinatamente isomorfi a quelli dell'altro.

Inoltre è chiaro che:

Se una varietà algebrica ammette infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, in ogni suo gruppo fondamentale appariscono almeno due sistemi puri isomorfi;

e quindi:

Se in un gruppo fondamentale di una varietà algebrica non compaiono sistemi puri isomorfi, il gruppo è unico e la varietà contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili.

10. Precise norme accademiche ci hanno costretti a rimandare a un lavoro, che sarà pubblicato altrove, alcune semplici considerazioni, le quali fanno riconoscere che nel teorema del n. 6 è implicitamente contenuta la generalizzazione completa di un notevole teorema del sig De Franchis (9); in esso saranno pure ulteriormente studiate le varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, ma prive di sistemi regolari isolati, su cui ormai si concentra tutto l'interesse delle nostre ricerche.

In particolare vi si troverà dimostrato che:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale p (>1), *priva di sistemi regolari isolati, ma dotata di (infiniti) integrali ellittici, non può presentare che due aspetti differenti; e cioè:*

a) o ha l'indice di singolarità $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$, *e allora i suoi integrali ellittici, nessuno dei quali è a moltiplicazione complessa, costituiscono, secondo la nomenclatura del sig.* Severi, *una configurazione normale;*

b) o ha l'indice di singolarità p^2-1, *e allora ogni suo integrale (semplice di 1ª specie) è approssimabile mediante i suoi integrali ellittici; questi ultimi risultando tutti a moltiplicazione complessa.*

(9) De Franchis, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII (2º sem. 1914), pag. 192].