SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE CON SISTEMI REGOLARI ISOLATI DI INTEGRALI RIDUCIBILI (*)

Un sistema regolare di integrali (¹) riducibili appartenente a una varietà algebrica si dice *isolato* (su di essa), allorchè ammette uno ed un solo sistema regolare complementare; o, ciò che fa lo stesso, quando è nullo il suo *coefficiente di immersione* (²).

Se un sistema regolare è isolato, tale è pure il suo complementare; quindi i sistemi regolari di una varietà algebrica, ove esistano, si distribuiscono in coppie di sistemi complementari.

Nell'ipotesi che una varietà algebrica contenga almeno una coppia di sistemi regolari complementari isolati, la totalità lineare di dimensione minima contenente i *sistemi nulli* della varietà ha una struttura particolarmente semplice, e ciò permette di descrivere con sufficiente chiarezza la distribuzione di tutti i sistemi regolari appartenenti alla varietà.

Precisamente si trova che:

Se una varietà algebrica possiede due sistemi regolari complementari isolati di integrali riducibili, ogni altro sistema regolare della varietà (eventualmente esistente) o appartiene ad uno dei due sistemi in discorso, o congiunge un sistema appartenente all'uno con un sistema appartenente all'altro.

Di qua si ricava agevolmente che una varietà algebrica non può possedere infiniti sistemi regolari isolati di integrali riducibili; anzi si dimostra che, *se p è l'irregolarità superficiale di una varietà algebrica, il numero dei suoi sistemi regolari isolati di integrali ridu-*

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XXIV, serie 5ª, 2⁰ sem. 1915, fasc. 10⁰, pp. 445-453.

(¹) Secondo il solito, per brevità di discorso, diciamo, « integrali » senz'altro, al posto di « integrali semplici di 1ª specie ».

(²) Cfr. Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV (2⁰ sem. 1915), pp. 393-400].

cibili è necessariamente finito e del tipo $2^n - 2$, ove l'intero n non supera p, e sta ad indicare il numero dei sistemi regolari isolati che non provengono dal congiungere sistemi regolari isolati di dimensione inferiore.

Questo teorema dà poi luogo a conseguenze speciali ed interessanti per le varietà algebriche contenenti soltanto un insieme finito di sistemi regolari di integrali riducibili.

1. In uno spazio lineare Σ a $2p-1$ dimensioni siano dati due spazî duali indipendenti A_1 e A'_1, dei quali A_1 abbia la dimensione $2q-1$ e A'_1 la dimensione $2q'-1=2(p-q)-1$, essendo $0<q<p$ (e quindi $p>1$ e $0<q'<p$). Si abbiano poi, sempre in Σ, k_1+1 sistemi nulli, linearmente indipendenti, aventi per asse A_1, e k'_1+1 sistemi nulli, linearmente indipendenti, aventi per asse A'_1. Questi $k_1+k'_1+2$ sistemi nulli risultano, allora, tutti, linearmente indipendenti, e quindi determinano un sistema lineare $\infty^{k_1+k'_1+1}$.

Ebbene:

Un sistema nullo di questa totalità lineare $\infty^{k_1+k'_1+1}$, che risulti singolare, o ha per asse uno spazio appartenente a uno dei due spazî A_1 e A'_1, o ha per asse lo spazio congiungente due spazî appartenenti rispettivamente ad A_1 e A'_1.

Infatti stabiliamo in Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee, prendendo i vertici $1, 2, \dots, 2q$ della piramide fondamentale nello spazio A_1 e i vertici $2q+1, 2q+2, \dots, 2p$ della piramide stessa nello spazio A'_1.

L'equazione di un sistema nullo qualunque della nostra totalità sarà rappresentato da un'equazione del tipo

$$(1) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2q} a_{r,s}\, x_r\, y_s + \sum_{r,s}^{1\dots 2q'} a'_{r,s}\, x_{2q+r}\, y_{2q+s} = 0\,,$$

dove

$$(2) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2q} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0$$

e

$$(3) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2q'} a'_{r,s}\, x_{2q+r}\, y_{2q+s} = 0$$

saranno le equazioni di due sistemi nulli aventi uno spazio singolare in A'_1 e A_1, rispettivamente.

Detti D_1 e D'_1 i determinanti emisimmetrici $|a_{r,s}|$ e $|a'_{r,s}|$, il modulo D dell'equazione (1) è un determinante emisimmetrico, il cui valore è dato dal prodotto $D_1 D_1'$, e la cui caratteristica è uguale alla somma delle caratteristiche di D_1 e D_1'.

Siano $2(q-l)$ e $2(q'-m)$ le caratteristiche rispettive, necessariamente pari, dei determinanti D_1 e D_1', e quindi $2(q+q'-l-m)=$ $=2(p-l-m)$ quella di D.

Allora la (2) è, *nello spazio* A_1, l'equazione di un sistema nullo dotato di un S_{2l-1}-asse, cioè, *nello spazio* Σ, l'equazione di un sistema nullo avente per asse uno spazio B_1' a $2(q'+l)-1$ dimensioni proiettante da A_1' un S_{2l-1} di A_1; e, allo stesso modo, la (3) è, in Σ, l'equazione di un sistema nullo avente per asse uno spazio B_1 a $2(q+m)-1$ dimensioni, proiettante da A_1 un S_{2m-1} di A_1'.

I due spazî B_1 e B_1', *appartenenti*, com'è chiaro, a Σ, si tagliano in uno spazio della dimensione $2(l+m)-1$; e questa loro intersezione è lo spazio congiungente l'S_{2l-1}, secondo cui B_1' taglia A_1, con l'S_{2m-1}, secondo cui B_1 taglia A_1'.

D'altro canto, ogni punto comune a B_1 e B_1' è un punto singolare per il sistema nullo rappresentato dalla (1): dunque, una volta che questo ha per asse proprio un $S_{2(l+m)-1}$, l'asse in discorso coincide con l'intersezione degli spazî B_1 e B_1'.

Ma allora l'asserzione fatta è pienamente stabilita. Infatti il sistema nullo (1) non è singolare, se non a patto che sia diverso da zero almeno uno dei due numeri l ed m; se, di essi, uno solo è diverso da zero, l'asse del nostro sistema nullo è contenuto in A_1 o A_1'; se, invece, quei due numeri sono entrambi diversi da zero, l'asse del nostro sistema nullo congiunge uno spazio contenuto in A_1 con uno spazio contenuto in A_1'.

Naturalmente, poichè può essere $l=q$ od $m=q'$, senza che mai si abbia insieme $l=q$ ed $m=q'$, può darsi che l'asse in discorso coincida con A_1 o con A_1', oppure che congiunga A_1 (o A_1') con uno spazio contenuto (in senso stretto) in A_1' (o A_1).

2. Sia ora V_p una varietà algebrica di irregolarità superficiale p, e siano A e A' due suoi sistemi regolari complementari isolati di integrali riducibili, delle dimensioni rispettive $q-1$ e $q'-1=$ $=p-q-1$, con $0<q<p$ (e quindi $p>1$ e $0<q'<p$).

Se diciamo k, $k^{(a)}$ e $k^{(a')}$ gl'indici di singolarità di V_p, A e A' rispettivamente, l'ipotesi che A e A' siano isolati si traduce nella eguaglianza [3]

$$k^{(a)}+k^{(a')}+1=k. \tag{4}$$

[3] Loc. cit. [2], teor. II).

Ora si supponga di avere introdotto, per l'insieme degli integrali di V_p, la solita rappresentazione geometrica ([4]), per modo che sia lecito parlare di sistemi nulli di V_p e di asse di un sistema lineare di integrali di V_p; e si dicano A_1 e A'_1, rispettivamente, gli assi di A e A'.

Siccome gl'indici di singolarità di A e A' sono $k^{(\alpha)}$ e $k^{(\alpha')}$, fra i sistemi nulli di V_p ve ne sono $k^{(\alpha')}+1$, linearmente indipendenti, che hanno per asse A_1, e $k^{(\alpha)}+1$, linearmente indipendenti, che hanno per asse A'_1 ([5]); infine, l'insieme dei sistemi nulli di V_p, grazie alla (4), è fornito dal sistema lineare ∞^k determinato da questi $k^{(\alpha)}+k^{(\alpha')}+2$ sistemi nulli che risultano tutti linearmente indipendenti.

Ma, allora, basta ricordare che per ogni sistema regolare di integrali riducibili di V_p esiste almeno un sistema nullo di V_p, che ha per asse l'asse del sistema regolare, e tener presente l'osservazione del n. 1, per concludere che:

O la nostra varietà V_p non contiene altri sistemi regolari di integrali riducibili, all'infuori dei sistemi complementari e isolati A e A'; o, se ne contiene altri, fra questi ve ne sono certamente di quelli che appartengono ad A o A'. In questa seconda alternativa i sistemi regolari di V_p son forniti tutti dai sistemi contenuti in A o A', e dai sistemi congiungenti quelli contenuti in A con quelli contenuti in A'.

Beninteso, quando diciamo che un sistema regolare è contenuto, per es., in A, non escludiamo che esso possa coincidere con A; ma quando parliamo del sistema congiungente due sistemi contenuti in A e A', è da intendere che almeno una volta l'aggettivo «contenuto» sia adoperato in senso stretto, se si vuole che quel sistema non coincide col sistema di tutti gli integrali di V_p.

OSSERVAZIONE I. — Se la nostra varietà V_p contiene dei sistemi regolari indipendenti da A, è chiaro, per il teorema dimostrato, che ognuno di questi giace in A'; e quindi A è indipendente non solo da ciascun di essi, ma addirittura dal sistema che li congiunge.

Ma allora:

Se una varietà algebrica contiene dei sistemi regolari di integrali riducibili $B_1, B_2, \dots, B_n$, e poi un sistema regolare A indipendente da ciascuno di quelli, ma non dal sistema che li congiunge (il sistema

([4]) SCORZA, *Sugli integrali abeliani riducibili*, Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5a, vol. XXIV (1° sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654]: Nota I, nn. 1, 2, 6; Nota II, n. 9.

([5]) Loc. cit. ([2]), teor. III).

A non è certo isolato su di essa e quindi) *la varietà contiene infiniti sistemi regolari della stessa dimensione di* A.

Questa proposizione coincide, in sostanza, con quella che ottenne qualche tempo fa il SEVERI, come generalizzazione del classico teorema di POINCARÉ sulle varietà algebriche con integrali ellittici linearmente dipendenti [6], poichè la maggiore generalità del suo enunciato è soltanto apparente.

OSSERVAZIONE II. — Se il sistema A della solita varietà V_p contiene un sistema regolare C, ogni complementare di C *entro* A è congiunto ad A' da un complementare di C su V_p; e viceversa si vede subito, per il teorema dimostrato più sopra, che ogni complementare di C su V_p contiene A' e sega A in un sistema regolare che è complementare a C entro A; dunque:

Gli eventuali sistemi regolari isolati su V_p, *e contenuti in* A, *sono tutti e soli i sistemi regolari contenuti in* A *e ivi isolati.*

Più generalmente si riconosce che:

Gli eventuali sistemi regolari isolati su V_p, *e congiungenti un sistema contenuto in* A *con un sistema contenuto in* A', *sono tutti e soli quelli che congiungono un sistema isolato in* A *con un sistema isolato in* A' [7].

3. Dimostriamo, ora, che:

Se una varietà algebrica V_p, *di irregolarità superficiale* p *e indice di singolarità* k, *contiene dei sistemi regolari isolati di integrali riducibili, è sempre possibile determinare su* V_p n *sistemi regolari isolati indipendenti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *tali che nessuno di essi contenga sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, e tali che, detti* $q_j - 1$ *e* k_j *la dimensione e l'indice di singolarità di* A_j, *si abbia*

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = p,$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n + n - 1 = k.$$

E infatti, consideriamo tra i sistemi regolari isolati di V_p quelli di dimensione minima; sia A_1 uno di questi, con la dimensione

(6) SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, Note I e II [Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIII (1º sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651]; Nota II, n. 4.

(7) Queste osservazioni potrebbero essere facilmente estese dimostrando, ad es., che *il coefficiente d'immersione su* V_p *di un sistema regolare* C *congiungente un sistema regolare* C_1 *di* A *con un sistema regolare* C_2 *di* A' *è la somma dei coefficienti di immersione di* C_1 *su* A *e di* C_2 *su* A'.

$q_1 - 1$ e l'indice di singolarità k_1, e sia A_1' *il* suo complementare con la dimensione $q_1' - 1$ e l'indice di singolarità k_1'. Sarà, evidentemente,

$$q_1 + q_1' = p \quad \text{e} \quad k_1 + k_1' + 1 = k\,.$$

Se A_1' non contiene sistemi regolari isolati (su V_p, o, ciò che fa lo stesso, entro A_1') di dimensione inferiore alla propria, il teorema è già dimostrato; se no, tra i sistemi regolari isolati contenuti in A_1' si considereranno quelli di dimensione minima, e si dirà A_2 uno di questi, e A_2' *il* suo complementare in A_1'.

Indicate con $q_2 - 1$ e $q_2' - 1$ le dimensioni di A_2 e A_2', e detti k_2 e k_2' i loro indici di singolarità, sarà:

$$q_2 + q_2' = q_1' \quad \text{e} \quad k_2 + k_2' + 1 = k_1'\,,$$

cioè

$$q_1 + q_2 + q_2' = p \quad \text{e} \quad k_1 + k_2 + k_2' + 2 = k\,.$$

Ora, o A_2' non contiene sistemi regolari isolati (su V_p, o, ciò che fa lo stesso, entro A_2') di dimensione inferiore alla propria, e allora il teorema è dimostrato; o ciò non è, e allora si applicherà ad A_2' il procedimento adoperato già per V_p e A_1'.

Siccome $p > q_1' > q_2' \dots$, questo procedimento non può essere illimitatamente proseguito: quindi esso deve arrestarsi, il che val quanto dire che si perviene a dimostrare il nostro teorema in ogni caso.

4. La proposizione ora stabilita può essere ulteriormente precisata.

Facciamo vedere infatti che:

Se per la varietà V_p e i sistemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ valgono le ipotesi e le proprietà del teorema del n. 3, *i sistemi regolari isolati di V_p diversi da $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono tutti e soli i sistemi congiungenti $A_1, A_2, \dots, A_n$ a due a due, a tre a tre, ..., a $n-1$ a $n-1$.*

E infatti, grazie all'indipendenza dei sistemi A_j e alla relazione

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = p\,,$$

il sistema A_1' congiungente $A_2, A_3, \dots, A_n$ è complementare ad A_1 su V_p; quindi A_1' è, al pari di A_1, isolato su V_p.

Allo stesso modo, entro A_1', il sistema A_2' congiungente $A_3, \dots, A_n$ è complementare ad A_2; ma allora A_2' è isolato entro A_1' al pari di A_2, cioè A_2' è isolato su V_p.

Così continuando e poi scambiando l'ufficio dei sistemi A_j, si dimostra che ogni sistema congiungente $n-1$, $n-2$, ..., tre o due sistemi A_j è isolato su V_p.

Viceversa, sia B un qualsiasi sistema regolare isolato appartente a V_p, e diverso da $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Siccome A_1 è isolato su V_p e non contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, il sistema B, essendo anch'esso isolato, o contiene A_1 o è indipendente da A_1 e giace in A'_1 (n. 2). Nella prima alternativa, B (che è diverso da A_1) congiunge A_1 con un sistema regolare B_1 situato in A'_1 e isolato tanto su V_p quanto su A'_1; quindi, tanto nella prima alternativa, quanto nella seconda, sarà dimostrato che B è il sistema congiungente un certo numero di sistemi A_j, se facciamo vedere che *entro* A'_1 ogni sistema regolare isolato diverso da $A_2, \ldots, A_n$ congiunge un certo numero di questi sistemi.

Ora, entro A'_1 i sistemi $A_2, A_3, \ldots, A_n$ godono delle stesse proprietà di cui godono $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su V_p; quindi, ripetendo il ragionamento fatto un sufficiente numero di volte, si vede che tutto si riduce a dimostrare che entro il sistema A'_{n-2}, congiungente A_{n-1} e A_n, non esistono sistemi regolari isolati diversi (da A'_{n-2} e) da A_{n-1} e A_n.

Ora ciò è evidentemente, perchè A_{n-1} e A_n sono complementari isolati entro A'_{n-2} e nessuno di essi contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria; dunque l'asserto è dimostrato.

Di qua segue:

1⁰) *che i sistemi* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *possono essere scelti su* V_p *in un sol modo, se hanno da soddisfare alle condizioni del teorema del n.* 3;

2⁰) *che il numero totale dei sistemi regolari isolati di* V_p *è dato da*

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2,$$

dove, grazie al fatto che ciascunc dei numeri q_j *è almeno ugualc ad* 1, n *è un numero non superiore a* p.

Ma allora possiamo enunciare il seguente teorema:

Una varietà algebrica V_p *di irregolarità superficiale* p (>1), *e indice di singolarità* k, *o non contiene sistemi regolari isolati di integrali riducibili o ne contiene un numero finito. In questa seconda alternativa, il loro numero totale è della forma* $2^n - 2$ *con* $1 < n \leq p$, *e i sistemi stessi son forniti:*

a) *da certi* n *sistemi regolari indipendenti* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *con le dimensioni* $q_j - 1$, *e gli indici di singolarità* k_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ *legati dalle relazioni*

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = p$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n + n - 1 = k;$$

b) *e poi dai sistemi regolari* (*tutti distinti*) *che congiungono quei sistemi* A_j *a due a due, a tre a tre, ..., a* $n - 1$ *a* $n - 1$;

quindi ognuno dei sistemi A_j *non contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria.*

In esso è contenuto come caso particolare la seguente proposizione:

Se una varietà algebrica V_p, *di irregolarità superficiale* p (> 1) *e indice di singolarità* k, *contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, il loro numero totale è della forma* $2^n - 2$ *con* $n \leq p$, *e i sistemi stessi, nell'ipotesi che sia* $n > 1$, *cioè che quel numero non sia nullo, sono dati:*

a) *da certi* n *sistemi regolari indipendenti* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *con le dimensioni* $q_j - 1$ *e gl'indici di singolarità* k_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ *legati dalle relazioni*

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = p$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n + n - 1 = k;$$

b) *e poi dai sistemi regolari* (*tutti distinti*) *che congiungono quei sistemi* A_j *a due a due, a tre a tre, ..., a* $n - 1$ *a* $n - 1$;

quindi ognuno dei sistemi A_j *non contiene sistemi regolari di integrali riducibili di dimensione inferiore alla propria.*

In una Nota successiva faremo vedere come questo teorema rientri in uno più generale, che dà un criterio per distinguere le varietà con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili da quelle che ne contengono soltanto un numero finito.

Qui ci contenteremo di fissare soltanto le seguenti osservazioni.

Il massimo valore del numero n che appare nei due ultimi teoremi è p, ed è $n = p$ quando e solo quando i sistemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ si riducono a p integrali ellittici. Questo caso, come si dimostra subito valendosi di un teorema del DE FRANCHIS [8], può realmente

[8] DE FRANCHIS, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVIII (2° sem. 1914), pag. 192].

verificarsi; e allora il numero totale dei sistemi regolari esistenti è $2^p - 2$; dunque:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale p, che contenga soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, non ne può contenere, al più, che $2^p - 2$, questo numero potendo essere effettivamente raggiunto.

Siccome, nell'ultimo teorema dimostrato, il sistema A_j ha la dimensione $q_j - 1$ e non contiene sistemi regolari di dimensione inferiore alla propria, deve essere $k_j \leq 2q_j - 2$ (9); quindi si ha:

$$k \leq 2(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) - 2n + n - 1 ,$$

cioè

$$k \leq 2p - n - 1 .$$

Ma, evidentemente, $n \geq 2$: dunque, infine,

$$k \leq 2p - 3 .$$

Di qua segue che:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p non contiene che un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, il suo indice di singolarità non può superare $2p - 3$;

e inoltre che:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ha l'indice di singolarità $2p - 2$ e contiene qualche sistema regolare di integrali riducibili, ne contiene senz'altro infiniti (10).

Queste ultime due proposizioni dànno, per $p = 2$, dei teoremi ben noti, dovuti al sig. HUMBERT.

(9) SCORZA, *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*, Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5a, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 279-284 e pp. 333-338]: Nota II, n. 6.

(10) Si ricordi che per il teorema, cui si riferisce la cit. (9), ove l'indice di singolarità fosse $\geq 2p - 1$, la varietà ammetterebbe senz'altro infiniti sistemi regolari di integrali riducibili.