LE VARIETÀ ALGEBRICHE CON INDICE DI SINGOLARITÀ MASSIMO (*) (**)

Nota I

È noto, per un teorema classico di POINCARÉ, che, se una varietà algebrica contiene $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) integrali ellittici linearmente dipendenti, ne contiene senz'altro infiniti; ed è pur nota la dimostrazione geometrica estremamente elegante che di questo teorema ha dato il SEVERI, valendosi dell'osservazione che il sistema congiungente e il sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica sono anch'essi regolari (1). Anzi dalla dimostrazione del SEVERI risulta che, se quei $\mu + 1$ integrali ellittici sono a μ a μ indipendenti, l'infinità degli integrali ellittici, a cui essi dànno luogo — come dice il SEVERI — mediante operazioni interne di proiezione e sezione, è assimilabile a quella dei vertici di una *rete di Möbius* appartenente a un $S_{\mu-1}$.

Di qua non si è autorizzati a dedurre che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$ contiene $p + 1$ integrali ellittici, a p a p indipendenti, ad ogni suo integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente vicini degli integrali ellittici (2), poichè la totalità degli integrali semplici di 1ª specie di una tale varietà è assimilabile a quella dei punti reali e complessi di un S_{p-1} (reale), mentre i vertici di una rete di MÖBIUS appartenente a un S_{p-1}, presi insieme coi loro punti limiti, dànno una totalità assimilabile a quella dei punti reali di un S_{p-1} (reale).

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XXIV, serie 5ª, 2º sem., fasc. 6º - Roma, settembre 1915.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1915.

(1) SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXII (1º sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651].

(2) Vedi più innanzi (n. 2) per la definizione precisa di questa frase.

Comunque sia di ciò, sorge la questione di decidere se esistano o no delle varietà algebriche su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie siano infinitamente vicini degli integrali ellittici.

La risposta affermativa a questa domanda, insieme con la caratterizzazione precisa delle varietà per cui si verifica il fatto considerato, è fornita agevolmente dal metodo geometrico a cui già abbiamo avuto occasione di far ricorso per lo studio degli integrali abeliani riducibili (3).

Ecco in breve i risultati a cui siamo pervenuti, insieme col richiamo delle nozioni e dei teoremi atti a chiarirne la portata.

Una varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ ammette in generale una ed una sola relazione di RIEMANN (relativamente a un qualsiasi sistema primitivo di cicli lineari della sua riemanniana); ma può darsi che essa ne ammetta più di una, e allora ne ha infinite (4).

In ogni caso possiamo dire che V_p ha l'*indice di singolarità* k se fra le sue relazioni di RIEMANN ve ne sono $k+1$ indipendenti e non più, e dire che V_p è *non singolare* o k *volte singolare* secondo che si ha $k=0$ oppure $k>0$ (5).

Dato p, il numero k è assoggettato alla diseguaglianza

$$k \leq p^2 - 1 \text{ (6)}.$$

Allorchè V_p ammette una sola relazione di RIEMANN, ossia è non singolare, questa relazione è *principale* e di *caratteristica* $2p$ (7); d'altra parte la condizione necessaria e sufficiente perchè V_p contenga un sistema regolare di integrali semplici di 1ª specie riducibili è che fra le sue relazioni di RIEMANN ve ne sia qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$ (8); quindi:

Una varietà algebrica, contenente sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili, è necessariamente singolare.

In base a questa osservazione, le varietà richieste son da cercare fra quelle singolari.

(3) SCORZA, *Sugli integrali abeliani riducibili.* Note I e II [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV (1º sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654].

(4) Loc. cit. (3), Nota II, n. 8 e n. 10.

(5) SCORZA, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), in corso di stampa] n. 57.

(6) Loc. cit. (5).

(7) Loc. cit. (3), Nota II, n. 10.

(8) Loc. cit. (3), Nota II, n. 19.

Ebbene noi dimostreremo che:

Le varietà algebriche di irregolarità superficiale $p > 1$, su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente vicini degli integrali ellittici, sono tutte e sole quelle, effettivamente esistenti, per cui l'indice di singolarità è uguale a $p^2 - 1$;
nel qual teorema è implicito il fatto che $p^2 - 1$ *è non solo un limite superiore, ma addirittura un massimo per k.*

Un altro teorema, a cui saremo condotti spontaneamente dalle considerazioni che seguono e che, sebbene non si riconnetta in modo stretto con lo scopo principale di questa Nota, non ci sembra privo di importanza, è il seguente:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$, che sia almeno $2p - 1$ volte singolare, contiene infiniti sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili (9).

1. Fissiamo sulla riemanniana della varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ un sistema primitivo di $2p$ cicli lineari

$$l_1, l_2, \ldots, l_{2p},$$

e serviamocene (al modo che è indicato nei nn. 1 e 2 della nostra Nota I già citata) per rappresentare omograficamente gli integrali semplici di prima specie di V_p sui punti di un S_{p-1} imaginario, di specie p, di uno spazio reale Σ a $2p - 1$ dimensioni (10).

Diciamo τ quell'S_{p-1} e $\bar{\tau}$ lo spazio imaginario ad esso coniugato.

L'*imagine* e l'*imagine coniugata* di un sistema lineare ∞^{q-1} $(q < p)$ di integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno, rispettivamente, l'S_{q-1} di τ, in cui quel sistema si riflette, e l'S_{q-1} di $\bar{\tau}$ ad esso coniugato: l'*asse* del sistema sarà poi lo spazio a $2q - 1$ dimensioni, *necessariamente reale*, che ne congiunge le imagini (11).

(9) Di qua facendo $p = 2$ si trae la nota proposizione che una superficie iperellittica (di rango 1) tre volte singolare ammette infiniti integrali ellittici. Del resto per $p = 2$ questo teorema è contenuto nel precedente ed è da esso precisato.

(10) Il modo a cui si allude nel testo e che giova tener presente consiste nel fissare in Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee e nel far corrispondere ad ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p (determinato a meno di una costante additiva e di una costante moltiplicativa) il punto di Σ che ha per coordinate i periodi dell'integrale ai cicli $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$.

(11) Loc. cit. (3), Nota I, n. 2 e n. 6.

In particolare gli assi degli integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno le rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

A questo proposito è utile tener presente che la condizione necessaria e sufficiente, perchè un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali semplici di 1ª specie di V_p $(q < p)$ sia un sistema regolare di integrali riducibili, è che l'asse del sistema sia un S_{2q-1} razionale [12].

2. Siano adesso J un integrale semplice di 1ª specie di V_p, dotato al ciclo l_r del periodo Ξ_r $(r = 1, 2, \ldots, 2p)$, e G un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p. Allora diremo che J è un *integrale limite di* G, oppure che *a* J *sono infinitamente vicini degli integrali di* G, oppure che J *è approssimabile mediante integrali di* G, se, in corrispondenza di ogni numero positivo (non nullo) ε, possono trovarsi infiniti integrali di G tali che, detto I uno qualunque di essi e detto ξ_r il periodo di I al ciclo l_r, si abbia

$$|\Xi_r - \xi_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Se, in particolare, gli integrali di G sono tutti ellittici e J è un integrale limite di G, J sarà un integrale di V_p *approssimabile mediante integrali ellittici*, o un integrale di V_p a cui sono *infinitamente vicini degli integrali ellittici.*

Ciò posto, si ha subito che:

Se G *è un insieme di integrali semplici di 1ª specie di* V_p, *e* J *è un integrale limite di* G, *l'asse di* J *è retta limite per l'insieme di rette formato dagli assi degli integrali di* G.

E infatti diciamo Ξ_r e ξ_r, rispettivamente, i periodi al ciclo l_r $(r=1,2,\ldots,2p)$ dell'integrale J e di un integrale I di G; e poniamo

$$\Xi_r = H_r + iZ_r \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

e

$$\xi_r = \eta_r + i\zeta_r \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le H_r, Z_r, η_r e ζ_r reali.

L'asse di J è, per definizione, la retta congiungente il punto di Σ avente le coordinate

$$H_1 + iZ_1, H_2 + iZ_2, \ldots, H_{2p} + iZ_{2p}$$

(12) Loc. cit. (3), Nota I, n. 5 e n. 6.

col punto avente le coordinate

$$H_1 - iZ_1\,,\ H_2 - iZ_2\,, \ldots ,\ H_{2p} - iZ_{2p}:$$

cioè la retta le cui coordinate sono date da

$$P_{r,s} = H_r Z_s - H_s Z_r \quad (r\,, s = 1, 2, \ldots , 2p\,;\ r \neq s)\,;$$

e allo stesso modo l'asse di I è la retta le cui coordinate sono date da

$$p_{r,s} = \eta_r \zeta_s - \eta_s \zeta_r \quad (r\,, s = 1, 2, \ldots , 2p\,;\ r \neq s)\,.$$

Ora, per l'ipotesi fatta su J, l'integrale I può scegliersi in infiniti modi distinti in G, di guisa che risulti

$$|\,\Xi_r - \xi_r\,| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \ldots , 2p)\,,$$

essendo ε un numero positivo assegnato ad arbitrio; ossia di guisa che risulti

$$|\,H_r - \eta_r\,| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\,Z_r - \zeta_r\,| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, \ldots , 2p):$$

dunque I può scegliersi in G in infiniti modi distinti così che risulti

$$|\,P_{r,s} - p_{r,s}\,| < \varepsilon \quad (r\,, s = 1, 2, \ldots , 2p\,;\ r \neq s):$$

cioè, come volevasi, l'asse di J è retta limite per l'insieme degli assi degli integrali di G.

Inversamente è chiaro che:

Se una retta reale è retta limite per l'insieme degli assi di un insieme G di integrali semplici di 1ª specie di V_p, essa (è appoggiata a τ e $\overline{\tau}$ ed) è l'asse di un integrale limite di G.

Basta osservare infatti, in primo luogo, che, essendo algebrica la varietà delle rette appoggiate a τ e $\overline{\tau}$, appartiene ad essa ogni retta reale che sia limite di rette reali appoggiate a τ e $\overline{\tau}$; e in secondo luogo che le coordinate del punto di intersezione dello spazio τ con una retta appoggiata ad esso si esprimono razionalmente per mezzo (delle coordinate di τ e) delle coordinate della retta.

Ricordando poi l'effetto di un cambiamento del sistema primitivo di cicli lineari sui periodi degli integrali semplici di V_p, si vede subito che la nozione di integrale limite di un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p è indipendente dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari $l_1\,, l_2\,, \ldots ,\ l_{2p}$ sulla riemanniana di V_p.

3. I complessi lineari di Σ contenenti tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$ costituiscono un sistema lineare Λ della dimensione p^2-1 [13].

Un complesso di Λ che sia singolare di specie (necessariamente pari) $2q$ $(q=1, 2, \ldots, p-1)$ ha per asse un S_{2q-1} appoggiato a τ e $\overline{\tau}$ secondo spazî a $q-1$ dimensioni; viceversa, un tale S_{2q-1} è spazio singolare per un sistema lineare di $\infty^{(p-q)^2-1}$ complessi di Λ.

Adesso consideriamo la totalità (lineare) dei complessi lineari di Σ, che ha la dimensione $p(2p-1)-1$, e riferiamola omograficamente alla totalità dei punti di uno spazio lineare S della stessa dimensione, fissando in S un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo corrispondere al complesso lineare di Σ, avente per equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s}+a_{s,r}=0),$$

il punto di S che ha per coordinate i coefficienti $a_{r,s}$ di questa equazione per cui $r<s$.

Entro S si avranno:

a) un'ipersuperficie F dell'ordine p rispondente alla totalità dei complessi lineari singolari di Σ, e

b) uno spazio lineare Σ' della dimensione p^2-1 rispondente all'insieme dei complessi di Λ;

poi entro Σ' si avrà:

a') un'ipersuperficie $F^{(1)}$ d'ordine p intersezione di F con Σ', rappresentante la totalità dei complessi lineari singolari di Λ (di specie ≥ 2); e

b') una serie di varietà $F^{(2)}, F^{(3)}, \ldots, F^{(p-1)}$ rappresentanti gli insiemi dei complessi singolari di Λ di specie $\geq 4, \geq 6, \ldots, \geq 2p-2$.

Le $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)}$ sono, successivamente, le varietà dei punti doppî, tripli, ..., $(p-1)$-pli di $F^{(1)}$; $F^{(p-1)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie con gli indici eguali entrambi a $p-1$; ed $F^{(p-2)}, F^{(p-3)}, \ldots, F^{(1)}$ sono, ordinatamente, le varietà delle corde, dei piani trisecanti, ..., degli S_{p-2} $(p-1)$-secanti di $F^{(p-1)}$.

Lo spazio Σ' e le varietà $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)}$ sono reali; e i punti reali di $F^{(1)}$ si distribuiscono in due falde, delle quali una, quella che chiameremo la *prima falda,* è atta a dividere la totalità dei punti reali di Σ' in una regione di punti interni e in una regione di punti esterni.

[13] Per questa affermazione, e per altre che seguono nel presente numero, giova tener presente la Memoria citata nella nota [5].