SUGLI INTEGRALI ABELIANI RIDUCIBILI (*)

NOTA I

Due (¹) sono i teoremi classici sugli integrali abeliani (²) riducibili a cui han condotto e nei quali si raccolgono ricerche ben note di WEIERSTRASS, PICARD e POINCARÉ. L'uno (che dal nome di chi gli dette la più ampia portata diremo *teorema* di POINCARÉ) afferma che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema di q integrali (semplici, di 1ª specie) riducibili con $2q$ periodi ridotti, ammette anche un sistema di $p-q$ integrali riducibili con $2(p-q)$ periodi ridotti, i due sistemi costituendo insieme un sistema di p integrali linearmente indipendenti: l'altro stabilisce che se una varietà algebrica ammette μ integrali ellittici linearmente dipendenti ($\mu \geq 3$) ne ammette senz'altro un'infinità discontinua.

Di questo secondo teorema il SEVERI ha dato recentemente (³) una elegante dimostrazione geometrica e un'ampia generalizzazione, facendo ricorso al primo, a un risultato di CASTELNUOVO e a due sue notevoli osservazioni sul sistema congiungente e sul sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica; quanto al primo è ormai classica la bella dimostrazione geometrica che ne dette il CASTELNUOVO nelle sue ricerche sugli integrali semplici delle superficie algebriche irregolari (⁴).

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, serie 5ª, vol. XXIV (1º sem. 1915), pp. 412-18.

(¹) Avevo già spedito (16 febbraio u. s.) il manoscritto di questo lavoro al prof. CASTELNUOVO per la presentazione all'Accademia, quando ho saputo che il prof. ROSATI stava preparando una Nota sullo stesso argomento, procedendo in un modo che presenta qualche punto di contatto col mio. La sua Nota esce contemporaneamente a questa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

(²) Qui adoperiamo la frase integrali abeliani in un senso un po' più generale dell'ordinario, come risulta chiaramente dal contesto del discorso.

(³) SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 1º sem. pp. 581 e 641).

(⁴) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XIV, 1905, pp. 545, 593, 655), pag. 596.

Nel considerare le conseguenze a cui conduce il teorema di POINCARÉ per le funzioni abeliane a un numero qualunque di variabili semplicemente singolari, ho visto che, per far perdere ad esse un certo apparente aspetto di poca plausibilità, occorreva stabilire un legame fra quel teorema e le relazioni bilineari a coefficienti interi che legano i periodi di due integrali semplici di 1ª specie appartenenti a una stessa varietà algebrica qualsiasi.

Utilizzando l'idea che mi ha condotto già, per via rapida e spontanea, al teorema di HUMBERT sulle funzioni iperellittiche singolari (5) e che, come mostrerò altrove, porta anche alla sua completa generalizzazione, mi sono imbattuto così in un procedimento che non solo fornisce con tutta chiarezza l'espressione di quel legame quanto mai intimo e semplice, ma ritrova il teorema di POINCARÉ e le due osservazioni del SEVERI per una via agevole e piana: anzi, essa potrebbe dirsi al tutto elementare se in un punto (che, per altro, è essenziale) non fosse necessario far ricorso al teorema di esistenza delle funzioni abeliane nella forma che gli detti due anni fa (6).

Partendo da un determinato sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana della assegnata varietà algebrica di irregolarità superficiale p, rappresento omograficamente il sistema lineare dei suoi integrali semplici di 1ª specie sui punti di un S_{p-1} imaginario immerso in un S_{2p-1} reale; cerco di caratterizzare gli spazi rispondenti ai sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti alla varietà, e trovo che essi sono gli S_{q-1} $(0 < q < p)$ dell'S_{p-1} per cui passano (eventualmente) degli S_{2q-1} *razionali* dello spazio ambiente.

Da questo punto di vista, le relazioni bilineari fra i periodi degli integrali si traducono subito in sistemi nulli *razionali* che hanno uno spazio unito (o *totale*) in quell'S_{p-1} e nello spazio imaginario coniugato $\overline{S}_{p-1}$; e poichè di quelle relazioni, qualunque sia la varietà considerata, ne esiste sempre almeno una, restano collegati al prescelto sistema primitivo di cicli lineari uno o infiniti sistemi nulli razionali, costituenti in ogni caso una totalità assimilabile a quella dei punti razionali di un conveniente spazio lineare (di dimensione $\leq p^2 - 1$).

(5) SCORZA, *Sulle funzioni iperellittiche singolari* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 2º sem., pag. 566).

(6) SCORZA, *Sul teorema di esistenza delle funzioni abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXVI, 1913, 2º semestre).

Tra questi sistemi nulli chiamo ***principali*** quelli che provengono dalle relazioni bilineari soddisfacenti alla nota diseguaglianza di RIEMANN e dimostro, come di dovere, che questa nozione (com'è facile prevedere *a priori*) ha carattere invariante rispetto al cangiamento del sistema primitivo di cicli lineari.

Ciò posto, si vede subito che se tra quei sistemi nulli ve n'è uno singolare di specie $2q$, il suo S_{2q-1} singolare dà luogo per la varietà all'esistenza di un sistema regolare di q integrali riducibili con $2q$ periodi ridotti.

L'utilizzazione di questo fatto, che poi risulta invertibile, e della corrispondenza stabilita da un sistema nullo fra gli S_{2q-1} e gli $S_{2(p-q)-1}$ dello spazio ambiente, conduce allora, con qualche altra osservazione nuova, al teorema di POINCARÉ e fornisce il legame richiesto fra la presenza di sistemi regolari riducibili e le particolarità delle relazioni bilineari a cui soddisfano i periodi degli integrali (semplici di 1ª specie) appartenenti alla varietà algebrica considerata.

Precisamente, la presenza di un sistema regolare di integrali riducibili è rivelata dall'abbassarsi della *caratteristica* di qualcuna di quelle relazioni bilineari, la caratteristica di una relazione bilineare generica essendo data sempre dal doppio dell'irregolarità della varietà.

1. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_p$ p integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_p, di irregolarità superficiale p (che, volendo, si può supporre una varietà di JACOBI o di PICARD), e sia

$$\text{(I)} \qquad \left| \begin{array}{cccc} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdots & \omega_{p,2p} \end{array} \right|$$

la tabella dei loro periodi corrispondenti a un determinato sistema primitivo di $2p$ cicli lineari della riemanniana di V_p.

In uno spazio Σ a $2p-1$ dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, diciamo ω_j $(j = 1, 2, \ldots p)$ il punto che ha per coordinate

$$\text{(1)} \qquad \omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \ldots, \omega_{j,2p},$$

e $\overline{\omega}_j$ il punto che ha per coordinate le quantità complesse coniugate delle (1)

$$\overline{\omega}_{j,1}\,,\,\overline{\omega}_{j,2}\,,\,\dots\,,\,\overline{\omega}_{j,2p}\,.$$

Poi indichiamo con τ lo spazio determinato dai punti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ e con $\overline{\tau}$ quello che congiunge i punti $\overline{\omega}_1\,, \overline{\omega}_2\,, \dots\,, \overline{\omega}_p$.

Poichè il determinante formato con le coordinate dei punti ω_j e $\overline{\omega}_j$ si riduce, a meno di un fattore numerico (non nullo), a quello formato con le parti reali e i coefficienti dell'imaginario i degli elementi della (I) [7], esso è, per un noto teorema [8], diverso da zero e quindi i due spazi τ e $\overline{\tau}$ sono due S_{p-1} (imaginari coniugati) indipendenti [9].

2. Si osservi che lo spazio τ fornisce coi suoi punti una rappresentazione omografica del sistema lineare ∞^{p-1} degli integrali semplici di 1ª specie di V_p, appena si faccia corrispondere a uno di questi integrali (determinato, naturalmente, a meno di una costante *moltiplicativa* e di una costante *additiva*) il punto di τ che ha per coordinate i suoi $2p$ periodi relativi al fissato sistema primitivo di cicli lineari di V_p.

La posizione di τ (e quindi di $\overline{\tau}$) in Σ dipende dunque non dalla scelta degli integrali $u_1\,, u_2 \dots u_p$, ma da quella del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p. E, per fatti ben noti, il mutamento di quest'ultima scelta porta soltanto a cambiare τ e $\overline{\tau}$ con due spazi di Σ che possano dedursi da essi con una omografia rappresentata da una sostituzione lineare a coefficienti interi di modulo ± 1; cioè, come diremo, con una omografia unimodulare razionale.

Ogni sistema lineare A, di dimensione $q-1$, di integrali semplici di 1ª specie di V_p si riflette in uno spazio lineare α di τ, avente la stessa dimensione.

(7) Scorza, loc. cit. (5), n. 4, nota (7) a pie' di pagina.

(8) Vedi per es. Krazer, *Lehrburch der Thetafunktion* (Teubner, 1903), pag. 111.

(9) Dal fatto che lo spazio τ è imaginario e indipendente da $\overline{\tau}$ segue subito il lemma che Severi stabilisce nel n. 2 della sua Memoria: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* (Mathematische Annalen, Bd. 74, 1913, pag. 515) generalizzando una osservazione di Klein-Fricke (*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, 1892, Bd. II, pag. 540).

Diremo che α è l'*imagine* di A, e lo spazio $\overline{\alpha}$ di $\overline{\tau}$, imaginario coniugato di α, si dirà l'*imagine coniugata* di A.

3. Per quanto si tratti di cose semplici e note, rammentiamo, per la chiarezza dell'esposizione, che un S_k di Σ si dice *razionale*, se coincide con Σ o, altrimenti, se i mutui rapporti delle sue coordinate, definite nel solito modo della geometria proiettiva iperspaziale, sono numeri razionali; di guisa che, in questo secondo caso, le sue coordinate si possono sempre supporre a dirittura intere.

Un S_k che contenga $k+1$ punti indipendenti razionali, o che appartenga a $2p-1-k$ iperpiani razionali indipendenti è un S_k razionale; viceversa, un S_k razionale contiene sempre un tal gruppo di punti razionali (se $k>0$ ne contiene, anzi, infiniti) e sta sempre in tal gruppo di iperpiani razionali (anzi in infiniti, se $k<2p-2$).

Evidentemente lo spazio congiungente e lo spazio intersezione di due spazi razionali di Σ sono anch'essi degli spazi razionali (10).

Un sistema nullo dello spazio Σ, rappresentato da un'equazione del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, y_r\, x_s = 0,$$

(dove le x e le y sono le coordinate di due punti qualunque di Σ coniugati rispetto al sistema nullo, e le $a_{r,s}$ sono gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$), si dirà *razionale* se i mutui rapporti delle $a_{r,s}$ sono numeri razionali, cioè se le $a_{r,s}$ si possono supporre numeri interi.

Lo spazio polare di un S_h razionale rispetto a un sistema nullo razionale è, evidentemente, razionale; e un sistema nullo razionale di Σ, che sia singolare di specie h (dove h è necessariamente pari, una volta che Σ ha dimensione dispari) (11), avrà, naturalmente, per spazio singolare (o *centro* o *asse*) un S_{k-1} razionale.

Infine un sistema nullo di un S_k razionale di Σ si dirà razionale se si può concepire come indotto in S_k da un sistema nullo razionale di Σ.

(10) Cfr. ROSATI, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXII, 1913, 2° sem., pag. 431), n. 7.

(11) Vedi per es. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1902), pag. 105.

4. Se i punti di un S_k di Σ sono a due a due coniugati rispetto a un determinato sistema nullo di Σ, cioè, se il complesso lineare, che il sistema nullo definisce, contiene tutte le rette di S_k, diremo col KANTOR ([12]), che il sistema nullo o il relativo complesso lineare ha in S_k uno *spazio totale.*

Ricordiamo, a questo proposito, che se un sistema nullo (o complesso lineare) di Σ ha per centro o asse un S_{2l-1}, i suoi spazi totali sono tutti e soli quelli contenuti negli spazi totali di dimensione massima. Questi ultimi sono della dimensione $p+l-1$ e ognuno di essi passa per il centro del sistema nullo (o complesso lineare) considerato ([13]).

5. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se la varietà V_p ammette un sistema A, ∞^{q-1}, di integrali riducibili con $2q$ periodi ridotti, l'S_{2q-1} congiungente le imagini α e $\overline{\alpha}$ di A è uno spazio razionale.

E infatti se, per fissar le idee, q integrali indipendenti del sistema A sono appunto gli integrali $u_1, u_2, \dots, u_q$, indicando con $\Omega_{j,k}$ $(k=1,2,\dots,2q)$ i periodi ridotti dell'integrale u_j $(j=1,2,\dots,q)$, esistono, per definizione, dei numeri interi $h_{l,k}$ $(l=1,2,\dots,2p;\ k=1,2,\dots,2q)$ per cui si ha:

$$\omega_{j,l}=\sum_{k=1}^{k=2q} h_{l,k}\,\Omega_{j,k} \qquad (j=1,2,\dots,q;\ l=1,2,\dots,2p). \tag{2}$$

Ma allora sarà pure, indicando con $\overline{\Omega}_{j,k}$ la quantità complessa coniugata di $\Omega_{j,k}$,

$$\overline{\omega}_{j,l}=\sum_{k=1}^{k=2q} h_{j,k}\,\overline{\Omega}_{j,k} \qquad (j=1,2,\dots,q;\ l=1,2,\dots,2p). \tag{3}$$

Or si considerino in Σ i $2q$ punti razionali aventi per coordinate gli elementi delle singole righe della matrice

$$\left|\begin{matrix} h_{1,1}, & h_{2,1}, & \dots, & h_{2p,1} \\ h_{1,2}, & h_{2,2}, & \dots, & h_{2p,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1,2q}, & h_{2,2q}, & \dots, & h_{2p,2q} \end{matrix}\right|; \tag{4}$$

([12]) KANTOR, *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen* (Crelle's Journal, vol. 118, an. 1897).

([13]) PALATINI, *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLI, 1903), n. 2.

in virtù delle (2) e (3) lo spazio che li congiunge contiene i punti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \dots, \overline{\omega}_q$, quindi esso coincide con l'S_{2q-1} congiungente gli spazi α ed $\overline{\alpha}$, e questo è, come volevasi, uno spazio razionale.

OSSERVAZIONE. — Il ragionamento fatto esclude evidentemente che la caratteristica della matrice (4) possa essere inferiore a $2q$ e quindi esclude, in particolare, che gli elementi di una sua riga possano essere tutti nulli.

Ciò dimostra, incidentalmente, il teorema ben noto che un sistema lineare completo di integrali riducibili non può avere dimensione superiore alla metà del numero dei periodi ridotti, diminuito di 2 [14].

Col SEVERI [15], un sistema come il sistema A del teorema precedente si dirà un *sistema regolare* di integrali riducibili.

6. Il ragionamento del numero precedente è senz'altro invertibile, e quindi:

Se esiste in Σ un S_{2q-1} razionale ($q < p$) appoggiato a τ secondo un S_{q-1} α (e quindi anche a $\overline{\tau}$ secondo l'S_{q-1} $\overline{\alpha}$ imaginario coniugato di α), α è l'imagine di un sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p.

Per brevità di discorso, l'S_{2q-1} razionale che in virtù delle osservazioni fatte vien collegato biunivocamente a un sistema regolare A di integrali riducibili di V_p si dirà l'*asse* di A e si indicherà con A_1.

7. Se L ed M sono, rispettivamente, il sistema lineare intersezione e il sistema lineare congiungente di due sistemi regolari A e B di integrali riducibili di V_p, le imagini λ e μ di L ed M sono, rispettivamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente delle imagini α e β di A e B; inoltre, attesa l'indipendenza di τ e $\overline{\tau}$, è chiaro che lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi A_1 e B_1 di A e B sono, rispettivamente, gli spazi congiungenti λ e μ con i loro spazi imaginari coniugati $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$.

(14) CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales scientifiques de l'École normale superieure, tom. XXII, 1906, pag. 339), n. 1; SEVERI, *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 338.

(15) SEVERI, loc. cit. (3), pag. 582.

Ma poichè A e B son razionali, tali son pure lo spazio secondo cui si intersecano e quello a cui appartengono, dunque:

Il sistema intersezione e il sistema congiungente di due sistemi regolari di integrali riducibili di V_p sono anch'essi dei sistemi regolari [16]*, e i loro assi sono, ordinatamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi dei due sistemi dati.*

Di qua segue che:

Due sistemi regolari distinti di integrali riducibili di V_p sono certo indipendenti se nessuno dei due contiene un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria.

(16) SEVERI, loc. cit. (3), pp. 581 e 585.