L'intégration des fonctions sommables.

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

M. Denjoy, en se servant de „maximum" et de „minimum d'epaisseur", à défini à la riemanienne l'intégrale (A) d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b)[1]).

Il a établi que cette intégrale existe et se reduit à l'intégrale de M. Lebesgue pour la fonction sommable, il a supposé de plus que l'inverse est probable, c'est qui est encore un problème non resolu[2]).

Or l'étude de l'intégrale (A) que j'appelle *approximative* nous conduit aux *intégrales à densite* λ *près*. Ainsi sont appellées des intégrales qui s'obtiennent en partant des *bornes à densité* λ *près* et qui correspondent aux intégrales de Darboux.

Nous verrons que, pour une fonction sommable ces intégrales éxistent, sont égales entre elles et leur valeur commune est independante de λ. Ces sont des fonctions d'intervalle dont chacune est absolument continue en même temps que le produit de la borne correspondante par la longeur de l'intervalle.

De plus la continuité absolue de cette dernière fonction d'intervalle est une condition necessaire et suffisante de la sommabilité de $f(x)$.

Au moyen des intégrales à densité λ près nous pouvons définir des *intégrales extrêmes approximatives*.

---

[1]) A. Denjoy, Sur l'intégration riemanienne, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences t. 169, 1919, p. 220—1.

[2]) Dans la note, Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy, (Comptes Rendus, t. 185, 1927, p. 749—50), j'ai donné une démonstration incorrecte du th. inverse.

http://rcin.org.pl

Comme toute fonction sommable est approximativement intégrable, on en deduit une autre condition necessaire de sommabilité de $f(x)$: le produit d'un borne à densité λ près par la longeur de l'intervalle est à variation bornée pour toutes les valeurs de λ, les intervalles étant suffisamment petits.

Nous allons commencer par l'étude des propriétés des bornes à densité λ près et des fonctions approximativement continues.

I. Les bornes à densité λ prés.

1. Convenons d'appeler *densité moyenne*[1]) de l'ensemble mesurable E dans l'intervalle I, le rapport

$$\frac{|IE|}{|I|},$$

en désignant: par $|IE|$ la mesure de l'intersection de l'ensemble E et de l'intervalle I, par $|I|$ — la longeur de I.

Considérons une fonction $f(x)$ mesurable dans l'intervalle I et un nombre λ positif, inférieur à un.

Nous dirons que A est un *nombre bornant* inférieurement *à densité* λ *près* la fonction $f(x)$ sur I, quand la densité moyenne de l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < A]$$

est an plus égale à λ dans I, c'est-à-dire quand

$$|IE| \leqslant \lambda |I|.$$

De même B est un nombre bornant supérieurement à densité μ près $(0 < \mu < 1)$, si l'ensemble

$$E = E_x[f(x) > B]$$

vérifie la condition

$$|IE| \leqslant \mu |I|.$$

2. *Toute fonction mesurable presque partout finie est bornée* (inférieurement et supérieurieurement) *à densité* λ *près*, quelque soit λ positif et inférieur à un.

En effet supposons, par exemple, que $f(x)$ n'est pas bornée supérieurement à densité λ près dans I.

Alors il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que la densité moyenne de l'ensemble

[1]) H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, Annales Sc. de l'Ec. Normale Sup. t. 27, 1910, p. 406.

http://rcin.org.pl

$$E_n = E_x[f(x) > n]$$

est supérieure à λ dans I, quelque soit n entier positif, en d'autres termes

$$|IE_n| > \lambda\,|I|.$$

Soit maintenant

$$E_\infty = E_x[f(x) = +\infty].$$

Comme

$$E_\infty = E_1 E_2 E_3 \dots$$

et la suite de E_n est non croissante, nous avons

$$|IE_\infty| = \lim |IE_n| \geqslant \lambda |I| > 0,$$

donc $f(x)$ n'est pas presque partout finie dans I.

3. *Si $\lambda + \mu < 1$, le nombre A bornant inférieurement à densité λ près est au plus égal au nombre B bornant supérieurement à densité μ près.*

Posons:

$$E_1 = E_x[f(x) < A] \qquad E_2 = E_x[f(x) > B].$$

Lorsque $A > B$, tout point x de l'intervalle I appartient à l'un de ces ensembles au moins. Alors

$$|I| \leqslant |IE_1| + |IE_2| \leqslant (\lambda + \mu)|I|$$

et par suite

$$\lambda + \mu \geqslant 1,$$

contrairement à l'hypothèse.

Ainsi l'ensemble de nombres qui bornent $f(x)$ inférieurement à densité λ près est bornée supérieurement par un nombre tel que B.

Si $\lambda + \mu \geqslant 1$, nous avons la relation inverse

$$A \geqslant B.$$

4. Comme tout nombre inférieur à A jouit de la même propriété que A, l'ensemble de nombres bornants à densité λ près est le segment d'une coupure.

Nous allons voir que cet segment est fermé, c'est-à-dire qu'*il existe le plus grand des nombres A.*

Soit m le nombre fini déterminé par la coupure.

Tout nombre $m - \dfrac{1}{n}$ bornant inférieurement $f(x)$ à densité λ

http://rcin.org.pl

près dans I, nous avons, pour l'ensemble

$$E_n = E_x\left[f(x) < m - \frac{1}{n}\right],$$

la condition

$$|IE_n| \leqslant \lambda |I|.$$

Or l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < m]$$

est la réunion des ensembles E_n qui forment une suite non décroissante.

Par suite

$$|IE| = \lim_{n\to\infty} |IE_n| \leqslant \lambda |I|,$$

ce qui veut dire que m est un nombre bornant inférieurement à densité λ près $f(x)$ dans I.

5. Appelons *borne inférieure à densité* λ *près* de $f(x)$ dans I[1]), le plus grand des nombres A qui bornent inférieurement $f(x)$ dans I à densité λ près.

Comme cette borne est une fonction d'intervalle qui depend de f et de λ, nous allons la désigner par $m(f, I, \lambda)$ on brièvement par $m(f)$, $m(I)$ ou $m(\lambda)$ suivant que f, I ou λ est variable dans le raisonnement.

Le plus petit des nombres B qui bornent supérieurement à densité μ près sera borne superieure à densité μ près de $f(x)$ dans I, $M(f, I, \mu)$.

Des relations qui ont lieu entre les nombres bornants à densité λ près (I, 3) on deduit

$$m(\lambda) \leqslant M(\mu), \quad \text{pour } \lambda + \mu < 1,$$
$$m(\lambda) \geqslant M(\mu), \quad \text{„} \quad \lambda + \mu \geqslant 1.$$

6. Notre définition diffère de celle de M. Denjoy[2]) qui appelle *maximum d'épaisseur* de f sur I le plus grand nombre M tel que l'ensemble

$$E_x[f(x) \geqslant M]$$

ait sur I la densité (l'épaisseur) moyenne au moins égale à a et *minimum* d'épaisseur le plus petit nombre m tel que l'ensemble

---

[1]) Voir ma note: Sur les limites approximatives, Comptes Rendus, t. 180 (1925) p. 642.

[2]) loc. cit. p. 220; je les croyais équivalentes dans ma note: Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy.

http://rcin.org.pl

$$E_x[f(x) \leqslant m]$$

ait sur I une densité moyenne au moins égale à β, $a+\beta$ étant inférieur à 1.

L'ensemble

$$E = E_x[f(x) < M]$$

étant le complementaire de $E_x[f(x) \geqslant M]$, nous avons

$$|IE| \leqslant (1-a)|I|.$$

Alors le plus grand nombre M c'est la borne inférieure à densité $1-a$ près,

Le plus petit nombre m c'est la borne supérieure à densité $1-\beta$ près.

En désignant par M' et m' respectivement le maximum et le minimum d'epaisseur, on a alors, pour $a+\beta<1$,

$$m' = M(1-\beta) \leqslant m(1-\alpha) = M',$$

en vertu du dernier théorème de I, 3.

7. Comme un nombre bornant inférieurement à densité λ près borne *a fortiori* à densité μ près, quand μ est supérieur à λ, nous avons la relation

$$m(\lambda) \leqslant m(\mu),$$

pour

$$\lambda < \mu.$$

Ainsi la borne inférieure à densité λ *près est une fonction non decroissante* de λ.

Qnand λ décroit vers zéro, $m(\lambda)$ tend en décroissant vers la borne inférieure m_0 qu'on obtient en negligeant les ensembles de mesure nulle. Quand λ croit vers un, $m(\lambda)$ tend en croissant vers la borne supérieure analogue M_0.

Alors

$$m_0 = \lim_{\lambda \leftarrow 0} m(\lambda) \leqslant m(\lambda) \leqslant \lim_{\lambda \to 1} m(\lambda) = M_0.$$

La borne supérieure à densité λ près est une fonction non croissante de λ et on a

$$m_0 = \lim_{\lambda \leftarrow 1} M(\lambda) \leqslant M(\lambda) \leqslant \lim_{\lambda \to 0} M(\lambda) = M_0.$$

8. En tant que fonction d'intervalle la borne inférieure à densité λ près est semicontinue supérieurement, car c'est la fonction

http://rcin.org.pl

$\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ définie par M. Looman[1]), $(x_1, x_2,)$ étant l'intervalle I.

Or M. Looman à établi que Φ est semicontinue supérieurement par rapport au couple (x_1, x_2).

Comme, d'après les définitions des bornes, on a

$$M(f) = -m(-f),$$

nous voyons que la borne supérieure à densité λ près est une fonction semicontinue inférieurement de I, étant d'ailleur égale à la fonction semicontinue inférieurement $\phi(x_1, x_2, 1-\lambda)$ de M. Looman

9. Il est évident que le nombre bornant inférieurement (supérieurement) $f(x)$ à densité x près dans I, borne *à fortiori* de la même manière la fonction $g(x)$ au moins (au plus) égale à $f(x)$.

Il en vient que l'on a, pour $f \leqslant g$,

$$m(g) \leqslant m(f); \qquad M(f) \leqslant M(g).$$

Désignons par f^N la fonction $f(x)$ limitée supérieurement au nombre N, c'est à-dire soit

$$f^N = \min(f, N).$$

Or nous avons

$$m(f^N) = m(f), \text{ pour } m(f) \leqslant N,$$
$$m(f^N) = N \quad , \quad " \quad m(f) > N,$$

donc

$$m(f^N) = \min(m(f), N).$$

En posant

$$f_N = \max(f, N),$$

nous avons aussi

$$m(f_N) = \max(m(f), N).$$

En particulier, en posant $N = 0$, nous avons $m(f_0) + m(f^0) = \max(m(f), o) + \min(m(f), o) = m(f)$, f_0 étant ainsi la partie non négative et f_0 la partie non positive de la fonction f.

Les mêmes relations ont lieu pour la borne supérieure à densité λ près.

---

[1]) Sur les deux cathégories remarquables des fonctions de variable réelle, Fundamenta Math. t. V, 1924, p. 106, § 2.

http://rcin.org.pl

II. Les fonctions approximativement continues.

1. M. Denjoy a appelé $f(x)$ *approximativement continue* au point x_0 si, étant donné:

$$\epsilon > 0, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

on peut déterminer δ de manière que la densité moyenne de l'ensemble

$$E_x[|f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

soit nupérieure à $1 - \lambda$ sur l'intervalle I contenant x_0 de longeur inférieure à δ.

Or il resulte de cette définition que la densité moyenne des ensembles

$$E_x[f(x) < f(x_0) - \epsilon], \qquad E_x[f(x) > f(x_0) + \epsilon]$$

est inférieure à λ sur I.

On en déduit que, pour $\lambda < \frac{1}{2}$,

$$f(x_0) - \epsilon \leqslant m(f, I, \lambda) \leqslant M(f, I, \lambda) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Comme d'autre part les ensembles

$$E_x[f(x) > f(x_0) - \epsilon], \qquad E_x[f(x) < f(x_0) + \epsilon]$$

ont une densité moyenne dans I supérieure à $1 - \lambda$, nous avons, pour $\mu = 1 - \lambda \geqslant \frac{1}{2}$

$$f(x_0) - \epsilon < M(f, I, \mu) \leqslant m(f, I, \mu) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Par suite, quelque soit λ, *les bornes à densité λ près dans I d'une fonction approximativement continue ont pour limite la valeur de la fontion au point x_0*, l'intervalle I tendant vers son point x_0:

$$f(x_0) = \lim_{I \to x_0} m(f\, I, \lambda) = \lim_{I \to x_0} M(f, I, \lambda).$$

2. On en déduit qu'*une fonction approximativement continue pour toutes les valeurs de x est la limite des fonctions continues* [1].
En effet posons

$$\phi_n(x) = m\left(f, \left(x, x + \frac{1}{n}\right), \lambda\right), \qquad \Phi_n(x) = M\left(f, \left(x, x + \frac{1}{n}\right), \lambda\right).$$

---

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables p. 181 § 12 et H. Looman loc. cit.

http://rcin.org.pl

La fonction ϕ_n est, d'après le théorème de M. Looman, semicontinue supérieurement par rapport à x, tandis que Φ_n est semicontinue inférieurement.

Comme, pour $\lambda < \frac{1}{2}$,

$$\phi_n(x) \leqslant \Phi_n(x),$$

il existe, en vertu d'un théorème de M. Hahn[1]) une fonction continue intermédiaire $f_n(x)$.

Or, la fonction f étant approximativement continue,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$$

donc f est la limite de la suite de fonctions continues

$$f_1, f_2, f_3, \dots f_n, \dots$$

3. Quand l'intervalle I contenant le point x tend vers ce point, sa densité moyenne dans le plus petit voisinage symétrique de x contenant I est au moins égale à $\frac{1}{2}$.

Nous dirons que l'intervalle I (contenant ou non le point x) tend *régulièrement* vers x, lorsque cette densité est au moins égale à un nombre positif a, (*paramètre de régularité*)[2]) et nous ecrivons alors

$$I \underset{a}{\rightarrow} x.$$

Si a est inférieur à $\frac{1}{2}$, le point x peut être extérieur à l'intervalle I.

Nous allons voir qu'*une fonction approximativement continue au point x_0 est la limite commune des bornes à densité λ près dans I, l'intervalle I tendant régulièrement vers x_0 suivant un paramètre a quelconque.*

En effet soit V_{x_0} le plus petit voisinage symétrique de x_0 qui contient l'intervalle I tel que

$$|I| \geqslant a|V_{x_0}|.$$

La fonction $f(x)$ étant approximativement continue au point x_0, on a, en posant

$$E = E_x[f(x) < f(x_0) - \epsilon],$$

---

[1]) H. Hahn, Über halbstetige und unstetige Funktionen, Bericht Akad. Wien 129, 1912 p. 103.

[2]) H. Lebesgue, loc. cit. p. 390.

http://rcin.org.pl

la relation
$$|EV_{x_0}| \leqslant \lambda a |V_{x_0}|,$$
pour V_{x_0} suffisamment petit.

Comme l'intervalle I est contenu dans V_{x_0}
$$|EI| \leqslant |EV_{x_0}| \leqslant \lambda a |V_{x_0}| \leqslant \lambda |I|$$
la borne inférieure à densité λ près satisfait donc à l'inégalité
$$m(f, I, \lambda) \geqslant f(x_0) - \epsilon.$$
On obtient, par un raisonnement analogue,
$$M(f, I, \lambda) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Or, pour $\lambda + \mu < 1$,
$$m(f, I, \lambda) \leqslant M(f, I, \mu),$$
donc en faisant tendre $|V_{x_0}|$ vers zéro on a
$$f(x_0) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ a}} m(f, I, \lambda) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ a}} M(f, I, \mu),$$
λ et μ étant d'ailleurs quelconques.

4. Une fonction mesurable est, d'après un théorème de M. Denjoy, presque partout approximativement continue [1]). Or nous avons en tout point de continuité approximative
$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ a}} m(f, I, \lambda) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ a}} M(f, I, \lambda),$$
quelque soit λ.

Il en résulte qu'*une fonction mesurable presque partout finie est presque partout égale à la limite regulière de ses bornes à densité λ près*, quelque soit λ et paramètre de régularité a.

III. Les intégrales à densité λ près.

1. Soit $f(x)$ une fonction mesurable et presque partout finie dans un intervalle $K = (a, b)$.

Divisons cet intervalle au moyen d'un nombre limité de points en k intervalles partielles
$$I_1, I_1, \ldots, I_i, \ldots. I_k.$$

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables p. 170 § 5.

http://rcin.org.pl

Nous allons désigner pas $\underline{s}(f, K, \lambda)$ et $\overline{s}(f, K, \lambda)$ les limites extrêmes de la somme

$$\sum_{i=1}^{k} m(f, I_i, \lambda)\,|\,I_i\,|\,,$$

lorsque la *norme* de la division c'est-à-dire la longeur du plus grand des intervalles I_i, tend vers zéro.

Ces limites sont des intégrales extrêmes, au sens de M. Burkill[1]), de la fonction d'intervalle

$$g(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda)\,|\,I\,|$$

c'est-à-dire:

$$\underline{s}(f, \lambda, K) = \underline{\int_K} g(I), \qquad \underline{s}(f, \lambda, K) = \overline{\int_K} g(I).$$

Lorsque $\underline{s} = \overline{s}$, nous dirons que $f(x)$ est intégrable par défaut à densité λ près dans l'intervalle K et nous désignerons pas $s(f, K, \lambda)$ l'*intégrale par défaut à dénsité* λ *près*.

On définit de la même manière les *intégrales par excès à densité* λ *près* $\underline{S}$, $\overline{S}$ et S en partant de la fonction d'intervalle

$$G(f, I, \lambda) = M(f, I, \lambda)\,|\,I\,|\,.$$

Quand $s = S$, nous dirons que $f(x)$ est *intégrable à densité* λ *près*, en désignant l'intégrale par

$$(\lambda) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

2. *Toute fonction mesurable bornée est intégrable à densité* λ *près*.

Considérons une suite de divisions de l'intervalle (a, b).

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$$

dont les normes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Soient

$$a = x_0^n < x_1^n < x_2^n < \ldots < x_{i-1}^n < x_i^n < \ldots < x_K^n = b,$$

---

[1]) J. C. Burkill, Fonctions of Intervals, Proc of the. Lond. Math. Soc. 22 (2), 1923, p 279.

http://rcin.org.pl

les extremités des intervalles partiels de la division D_n. Définissons une fonction en echelle $f_n(x) = m(f, (x_{i-1}^n, x_i^n), \lambda)$, pour $x_{i-1} \leqslant K < x_i$.

En tout point x_0 de continuité approximative de $f(x)$, contenu dans l'intervalle (x_{i-1}^n, x^n) nous avons d'après *II*, 1,

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} m(f, (x_{i-1}^n, x_i^n), \lambda$$

donc presque partout (*II*, 4)

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

La fonction considérée étant bornée, les fonctions $f_n(x)$ sont uniformement bornées.

Par suite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Or l'intégrale de la fonction $f_n(x)$ est égale à la somme

$$\sum m(f, I_i^n, \lambda) |I_i^n|,$$

I_i^n étant l'intervalle (x_{i-1}^n, x_i^n).

Puisque cela a lieu quelque soit la suite choisie de D_n, nous avons

$$\int_a^b f(x) dx = s(f, K, \lambda).$$

De même

$$\int_a^b f(x) dx = S(f, K, \lambda),$$

donc $f(x)$ est intégrable à densité λ près et

$$\int_a^b f(x) dx = (\lambda) \int_a^b f(x) dx.$$

Ainsi, *l'intégrale lebesgienne d'une fonction mesurable bornée est égale à l'intégrale à densité λ près.*

En particulier une fonction approximativement continue bornée, étant limite des fonctions continues (II, 2), est intégrable à densité λ près, quelque soit le nombre positif λ inférieur à un.

http://rcin.org.pl

3. Soit $f(x)$ une fonction *non negative sommable.*

Toute fonction sommable étant presque partout finie, $f(x)$ est bornée à densité λ près (I, 2).

Soit m sa borne inférieure à densité λ près.

D'après la définition de m, l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < m]$$

vérifie la condition $|IE| \leqslant \lambda |I|$.

En posant

$$f_m = \min \{f, m\},$$

nous avons

$$m|I| \leqslant \int_{I-E} f_m dx + m \cdot |IE| \leqslant \int_I f dx + \lambda m |I|.$$

Par suite

$$g(I) = m|I| \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \int_I f(x) dx.$$

L'intégrale lebesgienne étant une fonction absolument continue d'intervalle, la fonction non négative d'intervalle $g(I)$ est aussi absolument continue, en d'autres termes la somme finie

$$g(I_1) + g(I_2) + \ldots g(I_n)$$

tend vers zéro en même temps que la longeur totale des intervalles, c'est-à-dire $|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n|$[1]).

En remplaçant la borne inférieure m par la borne supérieure M et l'ensemble $E_x[f(x) < m]$ par $E_x[f(x) < M]$, nous avons

$$|EI| \leqslant (1-\lambda)|I|.$$

Donc

$$M|I| \leqslant \int_I f(x) dx + (1-\lambda) M |I|$$

et par suite

$$G(I) = M|I| \leqslant \frac{1}{2-\lambda} \int_I f(x) dx.$$

La fonction $G(I)$ est donc aussi absolument continue.

---

[1]) On dirait mieux „absolument petite" puisque cette propriété ne définit la continuité que pour les fonctions additives.

http://rcin.org.pl

Ainsi, *si la fonction $f(x)$ est sommable et non négative, les fonctions $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont toutes les deux absolument continues.*

Si $f(x)$ est *sommable* et *non positive,* le théorème a aussi lieu. Nous avons en effet:

$$g(f) = -G(-f), \qquad G(f) = -g(-f),$$

en vertu des propriétés correspondantes de bornes a densité λ près (I, 8),

Par consequent, pour $f(x) \leqslant 0$, nous avons

$$|g(f, I_1) + \dots + g(f, I_n)| = G(-f, I_1) + \dots + G(-f, I_n),$$
$$|G(f, I_1) + \dots + G(f, I_n)| = g(-f, I_1) + \dots + g(-f, I_n),$$

donc les fonctions $g(f, I)$ et $G(f, I)$ sont aussi absolument continues.

Si $f(x)$ est une fonction *sommable quelconque*, nous pouvons la décomposer en deux fonctions f_0 et f^0 respectivement non negative et non positive.

Or, d'après I, 9,

$$m(f) = m(f_0) + m(f^0), \qquad M(f) = M(f_0) + M(f^0)$$

et par suite

$$g(f) = g(f_0) + g(f^0), \qquad G(f) = G(f_0) + G(f^0).$$

La somme de deux fonctions d'intervalles absolument continues étant absolument continue, nous voyons que *les fonctions $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont absolument continues quelque soit la fonction sommable $f(x)$.*

5. Lorsqu'une une fonction d'intervalle est absolument continue, ses intégrales extrêmes sont finies [1]).

Considérons les *dérivées extrêmes* de la fonction d'intervalle $g(I)$, c'est à-dire les limites extrêmes du quotient $\frac{g(I)}{(I)}$, l'intervalle I tendant régulièrement vers x, quelque soit le paramètre de régularité α.

Désignons ces dérivées par $\underline{D}_x g$ et $\overline{D}_x g$.

Par suite d'un théorème de M. Burkill [2]), si $g(I)$ est absolument continue, on a, pour $K = (a, b)$, les égalités:

[1]) J. C. Burkill, loc. cit. p. 287.

[2]) loc. cit. p. 309, th. 7, 6.

http://rcin.org.pl

$$\underline{\int}_K g(I) = \int_a^b D_x g dx, \qquad \int_a^b D_x g dx = \overline{\int}_K g(I).$$

Or dans notre cas

$$\frac{g(I)}{(I)} = m(f, I, \lambda).$$

Comme, pour toute fonction mesurable, nous avons presque partout

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x \\ a}} m(f, I, \lambda),$$

les deux dérivées extrêmes sont égales à $f(x)$ et nous avons

$$\underline{\int}_K g(I) = \overline{\int}_K g(I) = \int_a^b f dx.$$

Cela signifie que la fonction $g(I)$ est intégrable, $f(x)$ est donc intégrable à densité λ près et

$$\int_a^b f(x) dx = s(f, K, \lambda).$$

Le même raisonnement donne

$$\int_a^b f dx = S(f, K, \lambda),$$

alors la fonction $f(x)$ est intégrable à densité λ près et son intégrale est égale à l'intégrale lebesgienne.

6. Comme $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont absolument continues pour f sommable, *toute fonction sommable est intégrable à densité λ près.*

De plus l'intégrale à densité λ près d'une fonction sommable est independante de la valeur de la densité λ, puisqu'elle est égale à l'intégrale lebesgienne.

Notre derniere raisonnement montre aussi que la fonction $f(x)$ est toujours sommable, si $g(I)$ et $G(I)$ sont absolument continues. Or le reciproque etait etabli plus haut (III 3, 4), nous voyons donc que *la continuité absolue de fonctions $G(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ est une condition necessaire et suffissante de la sommabilité de $f(x)$.*

http://rcin.org.pl

IV. Intégrales approximatives.

1. Des propriétés des bornes à densité λ près on déduit les propriétés correspondantes des intégrales à densité λ près.

De la relation

$$m(\lambda) \leqslant M(\mu),$$

valable tant que $\lambda + \mu < 1$, nous déduisons, en formant les sommes et en passant aux limites, les inégalités:

$$\underline{s}(\lambda) \leqslant \begin{matrix} \underline{S}(\mu) \\ \overline{s}(\lambda) \end{matrix} \leqslant \overline{S}(\mu).$$

On voit de plus que les intégrales par défaut $\underline{s}(\lambda)$ et $\overline{s}(\lambda)$ sont de fonctions non décroissantes de λ et que les intégrales par excès $\underline{S}(\mu)$ et $\overline{S}(\mu)$ sont des fonctions non croissantes de μ.

2. Appellons *intégrale inférieure approximative* la limite de $\underline{s}(\lambda)$, λ tendant vers zéro, et écrivons

$$(A)\underline{\int_a^b} f dx = \lim_{\lambda \to 0} \underline{s}(f, K, \lambda).$$

Cette limite est finie quand s est bornée pour les valeurs suffisamment petites de λ.

L'intégrale superieure approximative sera

$$(A)\overline{\int_a^b} f dx = \lim_{\mu \to 0} \overline{S}(f, K, \mu).$$

3. Comme, en vertu de IV, 1, les intégrales $\overline{s}(\lambda)$ et $\overline{S}(\mu)$ sont toutes les deux au plus égales à l'intégrale supérieure approximative, quelque soient λ et μ, nous pouvons supposer que $\lambda + \mu \geqslant 1$ et nous aurons l'inégalité

$$\overline{S}(\mu) \leqslant \overline{s}(\lambda) \leqslant (A)\overline{\int_a^b} f dx.$$

Alors, si λ tend vers 1, μ tend vers zéro et

http://rcin.org.pl

$$\overline{\int_a^b} f dx = \lim_{\lambda \to 1} \overline{s}(f, K, \lambda).$$

Pour que l'intégrale supérieure approximative soit finie il faut que $\overline{s}$ soit bornée pour λ voisin de 1.

Ainsi *pour que les intégrales extrêmes approximatives soient finies, il faut et il suffit* que les intégrales par défaut $\underline{s}(\lambda)$ et $\overline{s}(\lambda)$ soient bornées pour toutes les valeurs de λ et par suite *que la fonction d'intervalle* $g(f, I, \lambda)$ *soit à variation bornée, pour* $0 < \lambda < 1$ *et les intervalles petits* [1]).

On obtient la même condition pour $G(f, I, \lambda)$.

4. La fonction $f(x)$, dont les intégrales extrêmes approximatives sont finies et égales, est dite *approximativement intégrable*. La valeur commune de ces intégrales sera l'intégrale approximative de $f(x)$ dans (a, b): $\int_a^b f dx$.

Comme, d'après IV 1 et 3,

$$(A) \underline{\int_a^b} f dx \leqslant \begin{matrix} \underline{S}(\lambda) \leqslant \overline{S}(\lambda) \\ \underline{s}(\lambda) \leqslant \overline{s}(\lambda) \end{matrix} \leqslant (A) \overline{\int_a^b} f dx,$$

l'égalité des intégrales extrêmes approximatives implique l'égalité de toutes les quatre intégrales à densité λ près. Une fonction approximativement intégrable est donc intégrable à densité λ près, quelque soit λ, compris entre 0 et 1. De plus

$$(A) \int_a^b f dx = s(\lambda) = S(\lambda) = (\lambda) \int_a^b f dx,$$

donc l'intégrale à densité λ près d'une fonction approximativement intégrable ne depend pas du nombre λ, car elle est égale à l'intégrale approximative.

Comme l'inverse résulte de la définition de l'intégrale approximative, nous voyons que *l'intégrabilité approximative est une con-*

[1]) Nous dirons que la fonction d'intervalle $g(I)$ est *à variation bornée* dans K quand la somme $g(I_1) + \dots + g(I_n)$ est bornée quelque soient les intervalles non empietants $I_1, I_2, \dots I_n$ formants une division de K.

http://rcin.org.pl

dition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale à densité λ *près existe et soit independante de* λ.

Toute fonction sommable est donc approximativement intégrable (III, 6).

5. Nous avons établi (IV, 3) que les intégrales extrêmes approximatives de $f(x)$ sont finies quand la fonction $g(f, I, \lambda)$ est à variation bornée, pour toutes les valeurs de λ comprises entre 0 et 1, et que cette condition est aussi nécessaire pour les intérvalles suffisamment petits.

Ainsi *pour que la fonction* $f(x)$ *soit sommable il faut que la fonction d'intervalle* $g(f, I, \lambda)$ *soit à variation bornée*, pour $0 < \lambda < 1$ et les intervalles petits.

On voit (III, 6) que la fonction d'intervalle $g(f, I, \lambda)$ est dans ce cas absolument continue, pour toutes les valeurs de λ, et à variation bornée pour les intervalles petits.

La fonction correspondante $G(f, I, \lambda)$ jouit de mêmes propriétés.

V. Les fonctions de plusieurs variables.

1. Lorsque x est un point $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'une espace à k dimensions, *l'intervalle I* est l'ensemble de tous les points dont chaque coordonnée x_i est comprise dans un intervalle linéaire (a_i, b_i) ouvert, fermé ou semi-ouvert.

L'étendue de l'intervalle I est le nombre

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_k - a_k)$$

qui remplace la longeur de l'intervalle linéaire.

Le *voisinage* symétrique d'un point $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ est intervalle V_x dont les projections sont

$$(x_i - h, x_i + h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Si les intervalles I_i, compris dans K, n'empietent pas et

$$|K| = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_n|,$$

nous dirons qu'ils constituent une *division* de K.

La *norme* de la division est la plus grande des dimensions des intervalles $I_1, I_2, \ldots I_n$.

2. Ces notions étant ainsi precisées, nous pouvont étendre les

http://rcin.org.pl

définitions des bornes à densité λ près et de la continuité approximative aux fonctions de plusieurs variables.

Il en est de même avec la définition de l'intégrale d'une fonction d'intervalle. Alors les définition des intégrales à densités λ près et des intégrales approximatives subsistent pour les fonctions de plusieurs variables.

3. Quand aux théorèmes de ce mémoire, ils subsistent également pourvu que l'on modifie la définition de l'intégrale d'une fonction d'intervalle, en exigeant que les rapports des dimensions des intervalles partiels d'une division soient uniformement bornées par deux nombres positives.

En effet dans la démonstration du théorème de M. Burkill, cité au III 5, il faut que la suite des intervalles partiels qui contiennent un point x tende régulièrement vers ce point, lorsque la norme de la division décroît vers zéro [1]).

Or cela a bien lieu lorsque la division vérifie la condition qu'on vient d'énoncer.

Ainsi nous arrivons à la conclusion que toutes les théorèmes démontrés dans ce mémoire peuvent être appliqués aux fonctions de plusieurs variables.

---

[1]) loc. cit. p. 310.

http://rcin.org.pl