Sur la transformation des fonctions automorphes de plusieures variables.

(Résumé d'un mémoire publié en langue polonaise).

Par

K. Abramowicz.

Nous nous proposons d'étendre aux fonctions automorphes de plusieures variables les idées de Poincaré [1]) sur la transformation des fonctions fuchsiennes. On a la première généralisation: Etant n fonctions automorphes indépendantes

$$f_i(y_1, y_2, \dots y_n), \quad i = 1, 2, \dots n,$$

appartenant au groupe hyperfuchsien G de variables $y_1, y_2, \dots y_n$ on cherchera le groupe continu Γ de substitutions linéaires

(1) $$(Y_1, Y_2, \dots Y_n) = T(y_1, y_2, \dots y_n),$$

telles que les fonctions transformées $f_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ soient liées avec les fonctions données $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$ par les n relations algébriques

(2) $$R_i(f_i(Y), f_1(y), \dots f_n(y)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n$$

Dans le problème posé les relations *linéaires* (1) entre les deux systèmes de variables

(3) $$Y_1, Y_2, \dots Y_n, y_1, y_2, \dots y_n$$

doivent entraîner les relations algébriques (2) entre les fonctions $f_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ et $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$. Mais on peut demander, si des relations *non linéaires* entre les systèmes (3) ne peuvent pas con-

[1]) Oeuvres, t. II, p. 508.

duire aux relations algébriques (2) entre les fonctions correspondantes $f_i Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ et $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$. En observant que les fonctions $f_i(Ty)$ appartiennent au groupe $T^{-1}GT$, nous nous proposons le problème plus général:

Etant données $2\,n$ fonctions indépendantes

$$F_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n), f_i(y_1, y_2, \dots y_n), \quad i = 1, 2, \dots n$$

appartenant respectivement aux groupes hyperfuchsiens G_F et G_f de variables $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ et $y_1, y_2, \dots y_n$, on demande quelles relations algébriques

$$\phi_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n, y_1, y_2, \dots y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n \tag{4}$$

linéaires par rapport à $y_1, y_2, \dots y_n$ peuvent exister entre les variables Y et y pour que les fonctions $f_i(y)$ et $F_i(Y)$ soient liées par les n relations algébriques

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \dots f_n) = 0.$$

Les variables Y et y étant liées par les relations (4) on désigne par D_Y et D_y les domaines fondamentaux de groupes G_F et G_f. On aura les propriétés suivantes:

1) Etant $(c_1, c_2, \dots c_n)$ et $(C_1, C_2, \dots C_n)$ deux points liées par les relations (4) il existe dans le domaine D_y une infinité de points $S(c)$ équivalents au (c), tels que le point $(y_1, y_2, \dots y_n)$ décrivant une courbe joignant les points $S(c)$ et (c) le point correspondant (Y) du domaine D_Y en sortant du point (C) arrive au point (Y) pour lequel on a

$$F_i(Y) = F_i(C).$$

2) Les Y et y étant liées par les relations (4) les groupes hyperfuchsiens G_F et G_f contiennent les sous-groupes infinis isomorphes G'_F et G'_f dont les substitutions correspondantes laissent invariables les relations $\phi_i = 0$.

On déduit de ces propriétés le théorème suivant:

Si le groupe hyperfuchsien G'_f ne contient aucun sous-groupe à l'indice fini laissant invariable un hyperplan de l'espace $(y_1, y_2, \dots y_n)$, alors la condition nécessaire d'existence de n relations algébriques

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \dots f_n) = 0 \tag{5}$$

entre les n fonctions $f_1, f_2, \dots f_n$ appartenant au groupe hyperfuchsien G_f et n fonctions $F_1, F_2, \dots F_n$ appartenant au groupe G_F, consiste dans ce que les relations $\phi = 0$ soient linéaires par rapport à Y et y.

Si l'on désigne ces relations linéaires par le symbole $(Y) = T(y)$ on trouve encore qu'il est nécessaire pour existence de relations (5) que les groupes G_f et $T^{-1}G_F T$ aient un sous-groupe commun d'indice fini par rapport à ces groupes.

Nous posons ensuite $G_F = G_f = G$, $F_i = f_i$ et nous supposons que le polyèdre fondamental du groupe G ni sa frontière n'aient aucun point commun avec la frontière du domaine fondamental D. Nous nous proposons de déterminer le groupe continu Γ de substitutions linéaires

$$(Y_1, Y_2, \dots Y_n) = T(y_1, y_2, \dots y_n)$$

et le groupe hyperfuchsien G possedant la propriété que les n fonctions indépendantes appartenant au groupe G et les n fonctions transformées $f_i(Ty)$ soient liées par les n relations algébriques (5); les hypothèses faites sur le polyèdre fondamental suffisent[1]) pour l'existence de relations (5).

En désignant par g le sous-groupe d'indice fini de groupes G et $T^{-1}GT$ composé de substitutions

$$X_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots n+1, \tag{6}$$

où $X_r = Y_r X_{n+1}$, $x_r = y_r x_{n+1}$ $(r = 1, 2, \dots n)$ on déduit de la continuité du groupe Γ les propriétés suivantes:

1) on a l'égalité $V = T^{-1}VT$ pour chaque substitution V du groupe g,

2) les substitutions T appartiennent au groupe hyperfuchsien continu,

3) les substitutions T laissent invariable chaque espace de l'ensemble E_p, si l'on désigne par E_p l'ensemble de tous les espaces fondamentaux à p dimensions appartenant aux substitutions (6) du groupe g,

4) l'ensemble E_p contient un nombre fini d'espaces à p dimensions,

5) on peut se borner aux groupes g dont chaque substitution (6) laisse invariable tous les espaces de l'ensemble E_p; en effet, on

---

[1]) Girand: Leçons sur les fonctions automorphes, § 31.

observe que les substitutions du groupe g ne peuvent que permuter ces espaces, car si la substitution V_i appliquée à l'espace S_p donnait l'espace $V_i(S_p) = S'_p$, la substitution $V_i V_j V_i^{-1}$, dans laquelle V_j a l'espace fondamental S_p, donnerait $V_i V_j V_i^{-1}(S'_p) = S'_p$; le groupe g contiendrait alors un sous-groupe d'indice fini dont chaque substitution laisserait invariable les espaces de l'ensemble E_p

Si l'on laisse de côté les cas, où après la transformation convenable le nombre de variables de groupes g ou Γ pourrait être réduit, on obtient le résultat suivant:

Si le groupe continu Γ de substitutions T après une transformation convenable $Q^{-1}\Gamma Q$ est composé de substitutions

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}, \dots a_{1,n-1}, a_1, -a_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n-1,1} \dots a_{n-1,n-1}, a_{n-1} - a_{n-1} \\ b_1, \dots b_{n-1}, a, \theta - a \\ b_1, \dots b_{n-1}, b, \theta - b \end{array}\right|$$

où $\theta^0(a-b) = 1$ et

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a_{is}^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a_{ir}^0 = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \dots n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_i^0 + aa^0 - bb^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{ir}^0 + b_r^0(a-b) = 0,$$

on aura n relations algébriques de la forme

$$R_i(f_i(Ty), f_1(y), \dots f_n(y)) = 0$$

entre les n fonctions f_i appartenant au groupe hyperfuchsien G qui contient (comme sous-groupe d'indice fini) le groupe g composé de substitutions (6) laissant invariable le point unique $y_i = 0$, $y_n = 1$ ou l'hyperplan $y_n = 1$ et échangeables avec les substitutions T.

En effet, les groupes G et $T^{-1}GT$ contiendront un sous-groupe d'indice fini, parce que le groupe g, en vertu de l'égalité $g = T^{-1}gT$, sera contenu dans $T^{-1}GT$.