312

1990

NAUKA
O WYZNACZNIKACH
Z ZASTOSOWANIAMI,

WYŁOŻONA W SPOSÓB PRZYSTĘPNY

DLA UCZNIÓW UNIWERSYTETÓW, SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH
I INNYCH ZAKŁADÓW WYŻSZYCH

PRZEZ

Dra A. ŻELEWSKIEGO.

Cena 1 złr. 80 cent.

KRAKÓW
KSIĘGARNIA S. A. KRZYŻANOWSKIEGO.
DRUK W. KORNECKIEGO.
1877.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

ROZDZIAŁ VII.

ROZDZIAŁ VIII.

ROZDZIAŁ IX.

ROZDZIAŁ X.

Przedmowa.

Jedném z najgłówniejszych narzędzi, używanych we wielu gałęziach matematyki, jest bez wątpienia wyznacznik. Znając jego główne zasady, można przy różnych badaniach matematycznych w łatwy sposób dojść do rezultatów pożądanych i pracom nadać elegancyą matematyczną, w skutek krótkiéj i zwięzłéj formy zewnętrznéj. Ponieważ wyznaczniki tak ważną odgrywają rolę w matematyce, a ich teorya, we wielu dziełach podana, w skutek użytéj krótkości młodym matematykom wielkie sprawia trudności, przeto podjąłem się téj pracy, aby naukę o wyznacznikach młodym matematykom przystępniejszą uczynić.

Badania francuzkiego matematyka Kramera, ogłoszone r. 1750 w dziele: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques*, dały początek teoryi o wyznacznikach. Po tym sławnym matematyku ma wielkie zasługi do téjże teoryi Bézout w swéj rozprawie: *Recherches sur le degré des équations resultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver les équations,* podanéj r. 1764 w *Histoire de l'Academie Royale des sciences.* U tych dwóch matematyków znajduje się najpierwéj nazwa „*resultante*“ i główne zasady wyznacznika, lecz bez dowodów.

Niemcy datują początki wyznacznika od r. 1693, dowodząc, iż Leibnitz w swym liście do L'Hospitala wzmianki robi o wyznaczniku.

W roku 1772 ogłosił Wandermonde pracę pod tytułem: *Mémoire sur l'équation.* Tu po raz pierwszy znajdujemy prawa o zmianie znaku i o znikaniu wyznacznika.

La Place zajmuje się wyznacznikami w pracy pod tytułem: *Recherches sur le calcul integral et sur le système du monde.* Lagrange w pracy swéj o ostrosłupach, umieszczonéj w *Nouveaux memoires de l'Academie Royale de Berlin*, 1775 r., używa wyznaczników trzeciego stopnia i wspomina o niektórych własnościach tych wyznaczników, które także zastósować można do wyznaczników stopni wyższych. Gauss, używając po raz pierwszy nazwy „*determinante*“, dowiódł w swych *Recherches aritmétiques* 1807 r., że iloczyn dwóch wyznaczników drugiego i trzeciego stopnia także jest wyznacznikiem odpowiednio drugiego i trzeciego stopnia. Największego postępu i rozwoju doznała teorya wyznaczników przez sławnego Koszego (Cauchy). Epokę téj teoryi stanowi jego praca pod tytułem: *Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquerir etc.* W roku 1841 ogłosił Jacobi swe ważne badania nad wyznacznikami, a jego dwie prace: *De formatione et proprietatibus determinantium* i *De determinantibus functionibus,* ustanowiły i ugruntowały, można powiedzieć, systematyczną teoryą wyznaczników. Późniéj nastąpił cały szereg prac znakomitych matematyków, których nazwiska tu podług narodowości podamy, a mianowicie: z angielskich: pp. Cayley, Sylvester, Boole, Salmon, Spottiswoode etc.; z francuzkich: pp. Hermite, Combescure, Painvin, Bertrand, Catalan i inni; z włoskich: pp. Brioschi, Betti, Bellavitis, Genocchi etc.; z niemieckich: pp. Clebsch, Arnhold, Kronecker, Kummer, Borchardt, Hesse, Joachimsthal i inni; z polskich: pp. Barczyński, Zajączkowski, Żmurka i Trzaska.

Z dzieł wykładowych przytoczymy tu kilka najznakomitszych. Po polsku napisał p. Trzaska „Krótkie wiadomości o wyznacznikach“, znajdujące się jako przypisek w pierwszym tomie dzieła bardzo obszernego pod tytułem: „Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastósowaniami przez W. Folkierskiego“. Jedno z najlepszych dzieł dotychczas znanych jest dzieło Brioskiego (Brioschi) pod tytułem: *La teorica dei determinanti, Pavia 1854*. To dzieło doznało wielu tłómaczeń, z których niemieckie ma tytuł: *Theorie der Determinanten und ihre hauptsaechlichsten Anwendungen von Dr. Francesco Brioshi, aus dem Italienischen übersetzt von Professor Schellbach, Berlin 1856, bei Dunker und Humbold*. Tłómaczenie francuzkie wyszło pod tytułem: *Théorie des déterminants et leurs principales applications, par F. Brioschi etc. traduit de l'italien par Eduarde Combescure etc. Paris, Mollet-Bachelier, 1856*. Znakomite dzieło jest także angielskiego matematyka Salmona pod tytułem: *Lessons introductory to the modern higher algebra, second edition, Dublin, Hodges, Smith and Co, 1866*. Tłómaczenie francuzkie tego dzieła ma tytuł: *Leçons d'algebre supérieur, par G. Salmon etc., traduit de l'anglais par Bazin etc., augmenté de notes par Hermite etc. Paris, Gautier-Villars, 1868*. Niemieckie tłómaczenie wyszło pod tytułem: *Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen von Georg Salmon, deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Leipzig, Teubner, 1863*. Nareszcie wspomnieć tu możemy o dziele niemieckiem, które także się odznacza dobrem wykończeniem, pod tytułem: *Theorie und Anwendung der Determinanten von Dr. Richard Baltzer etc., zweite Auflage, Leipzig, Hirzel, 1864*.

Kończąc te krótkie wiadomości historyczne, oddaję niniejszą książkę ku posłudze młodzieży, oddającéj się studyom matematycznym, i załączam do Czytelników prośbę, aby zechcieli zwracać moją uwagę na błędy i uchybienia, jakie się w méj pracy znaleźć mogą; z wielką wdzięcznością nie omieszkałbym z ich rad korzystać.

Pisałem we Wrocławiu dnia 5 Grudnia 1876.

Dr. Antoni Żelewski.

OMYŁKI DRUKU.

Str.	*wiersz*	*zamiast:*	*powinno być:*
1	4 i 5 od góry	iloczynu składającego	iloczynu, składającego
2	ostatni	eznacza	oznacza
6	20 od góry	$p.q$	p,q
20	10 od góry	$a_{11}a_{42}a_{23}a_{33}$	$a_{11}a_{42}a_{23}a_{34}$
20	6 od dołu	poziomych	poziomych.
21	14 od góry	Wyznacznik rozwinięty	Wyznacznik, rozwinięty
32	6 od dołu	$10x^2y^2$	$10z^2y^2$
37	2 od góry	odpowiednie	odpowiednio
44	12 od dołu	równanie	równania
52	3 od góry	A_{r3}	$(A_{p1})_{r3}$
53	9 od dołu	$+\begin{vmatrix} a_{31} a_{34} \\ a_{41} a_{44} \end{vmatrix} (A_{31})_{44}$	$+\begin{vmatrix} a_{31} a_{34} \\ a_{41} a_{44} \end{vmatrix} (A_{31})_{44} +$
56	2 od góry	odpowiednie	odpowiednio
86	8 od góry	odpowiednie	odpowiednio
86	3 od dołu	odpowiednie	odpowiednio
99	6 od góry	wya	wy-
108	7 od góry	$a_{p\infty}$	a_{pq}
124	7 od góry	głównemi	głównymi
124	ostatni	drugiemi	drugimi

ROZDZIAŁ I.

WSTĘP.

Objaśnienia grup i zepsuć porządku. — Twierdzenie o zepsuciach porządku w grupie lub przemianie. — Kilka oznaczeń. — Prawo o znakach iloczynu składającego się z czynników z podwójnemi wskaźnikami. — Twierdzenia o znakach iloczynu, skoro się dwa wskaźniki lub dwa czynniki przestawiają.

§ 1.

Objaśnienie 1. Pod grupą elementów danych rozumiemy układ elementów w jakimkolwiekbądź porządku.

Mając pewną liczbę elementów a, b, c, d, następujące grupy z nich złożyć możemy:

$$a, c, ab, ca, acd, abd, aacd, addcca, \text{etc.}$$

Objaśnienie 2. Grupa, wszystkie elementa dane w jakimkolwiekbądź porządku zawierająca, nazywa się przemianą. Np.

$$abcd, abdc, acbd, acdb, \text{etc.}$$

Objaśnienie 3. Grupy elementów podzielić możem na grupy dobrego i zepsutego porządku.

Grupy dobrego porządku są takie, w których elementa od lewéj do prawéj strony tak po sobie następują, iż nigdy element późniejszy przed wcześniejszym się nie znajduje. Np.

abcd, adeg, fhmo, 1234, 1457, 69, 178, 3579.

Skoro w grupach dobrego porządku którekolwiek elementa przestawiamy, to otrzymujemy z nich grupy zepsutego porządku. Np.

cadb, dgac, 3142, 6154.

§ 2.

Objaśnienie. Dwa elementa grupy tworzą zepsucie porządku, skoro pierwszy element jest wyższym lub późniejszym od drugiego. Grupa 3412 ma następujące cztery zepsucia porządku:

31, 32, 41, 42.

Grupa *fcdab* zawiera w sobie ośm zepsuć porządku:

fc, fd, fa, fb, ca, cb, da, db.

§ 3.

Twierdzenie. Jeżeli dwa elementa w jakiéjkolwiek przemianie miejsca swe zmieniają, wszystkie inne zaś na swych pozostają miejscach, natenczas różnica zepsuć porządku pierwszéj i drugiéj przemiany jest liczbą nieparzystą.

Dowód. Przemiana pierwsza ma być

$$AmBnC,$$

druga zaś, w któréj elementa m i n miejsca zmieniają,

$$AnBmC,$$

m jest niższym lub wcześniejszym elementem od n. Litera A oznacza grupę elementów stojących przed m, B grupę elementów pomiędzy m i n, C zaś grupę elementów po n następujących. Ponieważ liczba zepsuć porządku elementów w A pomiędzy sobą i z wszystkiemi elementami po A następującemi w obydwóch przemianach jest jedna i ta sama, i ponieważ to samo powiedzieć można o liczbie zepsuć porządku elementów w C pomiędzy sobą i z elementami aż do grupy A: przeto dowód nasz zależeć będzie li tylko od grup następujących:

$$mBn,\ nBm.$$

Jeżeli B się z b elementów składa, pomiędzy któremi b_1 elementów jest wyższych od m, b_2 elementów zaś wyższych od n, i jeżeli β oznacza liczbę zepsuć porządku w grupie B, natenczas mamy

$$b-b_1+\beta+b_2$$

zepsuć porządku w grupie mBn, ponieważ $b-b_1$ elementów w B jest niższych od m, β oznacza liczbę zepsuć porządku w B i b_2 elementów jest wyższych od n.

Grupa nBm ma zaś

$$b-b_2+1+\beta+b_1$$

zepsuć porządku, ponieważ n jest wyższym elementem od $b-b_2$ elementów w grupie B i od elementu m, β oznacza liczbę zepsuć porządku w B i b_1 elementów w B jest wyższych od m.

Różnica pomiędzy zepsuciami porządku w grupach

$$AmBnC \text{ i } AnBmC$$

być więc musi:

$$b-b_2+1+\beta+b_1-(b-b_1+\beta+b_2)$$

albo

$$2(b_1-b_2)+1$$

co widocznie jest liczbą nieparzystą.

§ 4.

Wniosek. Jeśli jakakolwiek przemiana danych elementów ma parzystą liczbę zepsuć porządku i w téj przemianie dwa elementa przestawiamy, to powstająca przemiana w skutek przestawienia mieć musi nieparzystą liczbę zepsuć porządku; odwrotnie zaś, jeśli pierwsza przemiana ma nieparzystą liczbę zepsuć porządku, to druga przemiana mieć musi parzystą liczbę. W przemianie 45312 mamy następujących ośm zepsuć porządku:

43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32.

Przestawiwszy elementa 5 i 1, odbieramy przemianę 41352, która ma pięć następujących zepsuć porządku:

41, 43, 42, 32, 52.

§ 5.

Zadanie. Z następujących elementów danych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, wynaleść wszystkie przemiany z tychże elementów się składające.

Rozwiązanie. Ustawiwszy wszystkie elementa w dobrym porządku, odbieramy pierwszą przemianę, z któréj wszystkie inne wydobyć możemy w sposób następujący: Od prawéj do lewéj strony poszukuje się element, niższy od elementu po jego prawéj stronie stojącego, na miejsce tego niższego elementu kładziemy z elementów po jego prawéj stronie stojących taki, który jest najpierw wyższym od niego, potém dostawiamy po prawéj stronie pozostałe elementa i element wyrugowany w dobrym porządku. Postępując w ten sposób daléj, przychodzimy nareszcie do ostatniéj przemiany, z któréj żadnéj innéj wydobyć nie można, ponieważ wszystkie elementa stoją w odwrotnym porządku od pierwszéj przemiany. Np.

1234567
1234576
1234657
1234675
1234756
1234765
. . . .
. . . .
. . . .
3276541

W przemianie na końcu stojącéj spotykamy od prawéj do lewéj strony na szóstém miejscu element 2, który niższym jest od elementu znajdującego się po prawéj stronie 7. Na miejsce elementu 2 kładziemy z elementów po prawéj stronie stojących wyższy element 4. Przemiana następująca rozpoczynać się więc będzie grupą 34. Dobrze uporządkowana grupa z reszty elementów jest 12567. Dostawiwszy do pierwszéj grupy drugą, otrzymujemy przemianę w kształcie następującym: 3412567.

Postępując daléj w ten sam sposób, przychodzimy nareszcie do ostatniéj przemiany 7654321.

Przemiany z dwóch, trzech, czterech danych elementów możemy tu podać.

12, 21.
123, 132, 213, 231, 312, 321.
1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

§ 6.

Twierdzenie. Jeżeli we wszystkich przemianach elementów danych jedne i te same dwa elementa miejsca swe zmieniają, to znów wszystkie przemiany powstają.

Dowód. Ponieważ dwa dowolne elementa przed zmienieniem swych miejsc we wszystkich przemianach różne mają położenia co do siebie i co do innych elementów, przeto ich położenia być muszą także różne we wszystkich przemianach po zmienieniu ich miejsc. Po zmienieniu miejsc nie mogą zatém żadne równe przemiany powstać. Mając więc przed zmianą miejsc wszystkie przestawienia, musimy je koniecznie po zmienieniu odebrać. Np.

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Skoro tu elementa 1 i 3 we wszystkich przemianach miejsca swe zmienią, to powstają znowu wszystkie przemiany w następującym porządku:

321, 312, 231, 213, 132, 123.

Przestawiwszy w tych przemianach elementa 1 i 2, mieć będziemy znowu wszystkie przemiany, i to:

312, 321, 132, 123, 231, 213.

§ 7.

Objaśnienie. Wyrażenie symboliczne a_{pq} ma oznaczać ilość, któréj wartość się zmienia, skoro wskaźniki p, q się zmieniają. Każdy z wskaźników p. q przyjąć może każdą z liczb następujących:

$$1, 2, 3, 4, \ldots n.$$

Wyrażenia a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{47}, a_{6n}, a_{n3}, a_{nn} przedstawiają zatém różne ilości. Tak samo mają różne wartości iloczyny następujące:

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}, \quad a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}.$$

§ 8.

Objaśnienie. Z iloczynu $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ można $1.2.3\ldots n$ różnych iloczynów utworzyć, przemieniając na wszystkie sposoby pierwsze lub drugie wskaźniki. Np.

$a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{11}a_{32}a_{23}$; $a_{21}a_{12}a_{33}$; $a_{21}a_{32}a_{13}$; $a_{31}a_{12}a_{23}$; $a_{31}a_{22}a_{13}$.
$a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{11}a_{23}a_{32}$; $a_{12}a_{21}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$; $a_{13}a_{21}a_{32}$; $a_{13}a_{22}a_{31}$.

Iloczyny, w ten sposób utworzone, można złączyć w jeden aggregat lub w sumę algebraiczną, skoro jakieś prawo ustanowimy, na mocy którego iloczynom pewne można udzielić znaki.

§ 9.

Prawo dla znaków.

Jeżeli iloczyn, składający się z n czynników z podwójnemi wskaźnikami, w aggregat lub w sumę algebraiczną wchodzi, to udzielamy mu znak dodatni, jeżeli ilość zepsuć porządku pierwszych i ilość zepsuć porządku drugich wskaźników razem wzięte tworzą liczbę parzystą; jeżeli zaś ta liczba jest nieparzystą, wtenczas iloczyn bierze znak odjemny. Zero uważa się naturalnie jako liczba parzysta.

Na mocy tego prawa być musi iloczyn

$$+a_{13}a_{44}a_{25}a_{31}a_{52}$$

dodatnim, ponieważ zepsucia porządku pierwszych wskaźników:

42, 43

i zepsucia drugich wskaźników:

31, 32, 41, 42, 51, 52

razem wzięte tworzą liczbę parzystą

$$2+6=8.$$

Iloczyn $+a_{13}a_{44}a_{35}a_{22}a_{51}$ jest także dodatni, ponieważ zepsucia porządku pierwszych i drugich wskaźników

43, 42, 32,
32, 31, 42, 41, 52, 51, 21

tworzą liczbę parzystą $3+7=10$.

Iloczyn zaś $-a_{13}a_{44}a_{25}a_{32}a_{51}$ jest odjemny, mamy bowiem dziewięć zepsuć porządku pierwszych i drugich wskaźników, więc liczbę nieparzystą, i to:

42, 43
32, 31, 42, 41, 52, 51, 21.

§ 10.

Wniosek. W skutek prawa paragrafu ostatniego można sześć iloczynów w § 8 utworzonych w następującą złożyć sumę algebraiczną:

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Na mocy tego samego prawa mamy także:

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

§ 11.

Twierdzenie. Jeżeli w iloczynie składającym się z n czynników z podwójnemi wskaźnikami dwa pierwsze lub dwa drugie wskaźniki miejsca swe zmieniają, to iloczyn zmienia znak swój. Dowód wynika z § 4 i z § 9.

§ 12.

Twierdzenie. Jeżeli w iloczynie z n czynnikami i z podwójnemi wskaźnikami dwa czynniki swe miejsca zmieniają, to natenczas iloczyn nie zmienia ani znaku ani wartości.

Dowód. W skutek przestawienia dwóch czynników przestawiają się dwa wskaźniki pierwsze i dwa wskaźniki drugie, przeto nie może na mocy § 4 i § 9 iloczyn znaku swego zmienić. Że wartość się zmienić nie może, rozumie się samo przez się.

ROZDZIAŁ II.

Definicya wyznacznika. — Pierwszy sposób rozwinięcia wyznacznika. — Równość wyznaczników w różny sposób rozwiniętych. — Twierdzenia o wyznacznikach, skoro wskaźniki się przestawiają.

§ 13.

Definicya. Wyznacznikiem nazywamy sumę algebraiczną z $1.2.3...n$ iloczynów powstających z iloczynu

$$a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn},$$

jeżeli z pierwszych albo z drugich wskaźników wszystkie urabiamy przemiany i tym iloczynom podług prawa § 9 udzielamy znaki.

§ 14.

Objaśnienie. Iloczyny, z których wyznacznik się składa, nazywamy wyrazami, czynniki zaś iloczynów nazywają się elementami wyznacznika.

Elementa

$$a_{pq} \text{ i } a_{qp}$$

albo szczegółowo

$$a_{24} \text{ i } a_{42}$$

nazwiemy elementami sprężonemi (elementa conjugata).

1*

Elementa z równemi wskaźnikami, jak a_{22}, a_{55}, a_{pp}, są główne elementa, a wyraz z głównych elementów złożony

$$a_{11}a_{22}a_{33}\ldots\ldots a_{nn}$$

jest głównym wyrazem wyznacznika.

Wyznacznik oznacza się najczęściéj w sposób następujący:

$$\Sigma(\pm a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}) \text{ albo } (a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}).$$

§ 15.

Sposób pierwszy rozwinięcia wyznacznika.

Najprzód piszemy główny wyraz wyznacznika, z którego potém wszystkie inne wyrazy wywodzimy, tworząc podług § 5 wszystkie przemiany z pierwszych lub drugich wskaźników i udzielając wyrazom znaki podług prawa § 9 im należyte.

Mamy zatém:

$$\Sigma(\pm a_{11}a_{22}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$$\Sigma(\pm a_{11}a_{22}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{aligned}\Sigma(\pm a_{11}a_{22}a_{33}) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + \\ & + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma(\pm a_{11}a_{22}a_{33}) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma(\pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \\ & + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - \\ & - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + \\ & + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - \\ & - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.\end{aligned}$$

§ 16.

Twierdzenie. Wyznacznik, utworzony w skutek przestawień pierwszych wskaźników, jest równy wyznacznikowi, utworzonemu za pomocą przestawień drugich wskaźników.

Wyznacznik, powstający w skutek przestawień pierwszych wskaźników, oznaczmy przez D, drugi wyznacznik zaś, który powstaje za pomocą przestawień drugich wskaźników przez $\triangle$. Jeżeli dwa elementa stopniowo w każdym wyrazie wyznacznika D tak długo przestawiamy, aż pierwsze wskaźniki się znajdują w dobrym porządku, wyraz żaden podług § 12 nie zmieni ani wartości ani znaku. Ponieważ przed przedstawieniami elementów w D się znajdowało $1 . 2 . 3 \ldots n$ różnych wyrazów, to i po przestawieniach tyle ich różnych być musi. W skutek przestawień pierwsze wskaźniki znajdują się w dobrym porządku, drugie wskaźniki muszą być zatém na wszelkie sposoby przemienione. Skoro wyrazy tak uszykujemy, iż przemiany drugich wskaźników podług prawa § 5 po sobie następują, to otrzymamy wyznacznik $\triangle$. Z tego wynika, iż jest

$$D = \triangle.$$

Przykład.

$$\begin{aligned}
D = {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} + \\
& + a_{31}a_{22}a_{13} = \\
= {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{12}a_{31}a_{23} - \\
& - a_{13}a_{22}a_{31} = \\
= {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\
& - a_{13}a_{22}a_{31} = \\
= {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
& - a_{13}a_{22}a_{31} = \triangle
\end{aligned}$$

§ 17.

Twierdzenie. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, powstałego z przemian pierwszych wskaźników, dwa te same pierwsze wskaźniki przestawiamy, wyznacznik zmienia znak swój, lecz zatrzymuje swą wartość.

Dowód. Wyznacznik, rozwinięty za pomocą przemian pierwszych wskaźników, oznaczymy przez D, a sumę wyrazów, która z D powstaje, jeżeli jedne i te same dwa pierwsze wskaźniki we wszystkich wyrazach zmieniamy i znaki wyrazów zatrzymujemy, przez $\triangle$. Z § 6 wynika, iż w $\triangle$ wszystkie przemiany pierwszych wskaźników się znajdują, przeto mamy w $\triangle$ te same wyrazy co w D, tylko w innym porządku. Ponieważ podług § 11 w skutek przestawienia dwóch wskaźników każdy wyraz swój znak zmienić powinien, zatém mają te same wyrazy w D i w $\triangle$ przeciwne znaki, tj.

$$D = -\triangle.$$

Przykład.

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Przestawiwszy pierwsze wskaźniki 2 i 3, otrzymamy:

$$\triangle = a_{11}a_{32}a_{23} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} - \\ - a_{21}a_{32}a_{13}.$$

Dając tym wyrazom porządek wyrazów w D, mieć będziemy:

$$\triangle = -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{12}a_{23} + \\ + a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Porównawszy wyrazy w D z wyrazami w $\triangle$, widzimy, iż jest

$$D = -\triangle.$$

§ 18.

Wniosek. Jeżeli w każdym wyrazie wyznacznika, powstałego w skutek przemian pierwszych wskaźników, naprzód dwa te same, potém znów inne dwa te same i t. d. pierwsze wskaźniki przestawiamy, i jeżeli takich przestawień jest parzysta liczba, to wyznacznik nie zmienia ani wartości ani znaku; skoro zaś ta liczba jest nieparzystą, to wyznacznik zmienia znak, ale nie swą wartość (zob. § 6 i § 11).

§ 19.

Wniosek 2. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, który za pomocą przemian drugich wskaźników powstaje, dwa te same drugie wskaźniki przestawiamy, wyznacznik nie zmienia swéj wartości lecz znak swój (zobacz § 16).

§ 20.

Wniosek 3. Jeżeli w każdym wyrazie wyznacznika, powstałego w skutek przemian drugich wskaźników, naprzód dwa te same, potém znów inne dwa te same i t. d. drugie wskaźniki przestawiamy, i jeżeli tych przestawień jest parzysta liczba, wyznacznik nie zmienia ani wartości ani znaku, skoro zaś ta liczba jest nieparzysta, to wyznacznik nie zmienia wartości lecz znak swój.

§ 21.

Twierdzenie. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, za pomocą pierwszych wskaźników wywodzonego, dwa te same drugie wskaźniki przestawiamy, wyznacznik nie zmienia wartości lecz znak swój.

Dowód. Wyznacznik, z powodu przemian pierwszych wskaźników utworzony, oznaczmy przez D, sumę algebraiczną wyrazów po przestawieniu dwóch tych samych drugich wskaźników we wszystkich wyrazach zaś przez $\triangle$.

W skutek przestawień powinne wszystkie wyrazy podług § 11 swe znaki zmienić, skoro więc po przestawieniu nie zmieniamy znaków przed wyrazami, to wszystkie wyrazy w $\triangle$ mają niewłaściwe znaki. Ponieważ w $\triangle$ wszystkie mamy przemiany pierwszych wskaźników, przeto mamy w $\triangle$ $(1.2..3....n)$ różnych wyrazów. Jeżeli teraz w każdym wyrazie takie dwa elementa przestawiamy, iż drugie wskaźniki dobrze będą uporządkowane, w skutek czego wyrazy ani znaków ani wartości na mocy § 12 nie zmieniają, natenczas musimy otrzymać znów $1.2.3\ldots.n$ różnych wyrazów. Ponieważ drugie wskaźniki dobrze są uporządkowane, przeto mieć musimy wszystkie przemiany pierwszych wskaźników. Zatém być musi

$$D = -\triangle.$$

Przykład.

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Przestawiwszy tu drugie wskaźniki 1 i 3, otrzymamy:

$$\triangle = a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{23}a_{12}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21} - \\ - a_{33}a_{22}a_{11}.$$

Jeżeli pierwszy z trzecim elementem w każdym wyrazie przestawimy, odbierzemy:

$$\triangle = a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33} - \\ - a_{11}a_{22}a_{33} = \\ = -(-a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + \\ + a_{11}a_{22}a_{33}).$$

Dając wyrazom porządek wyrazów w D, otrzymamy:

$$\triangle = -(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \\ + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}).$$

Zatém jest

$$\triangle = -D \text{ albo}$$
$$D = -\triangle.$$

§ 22.

Wniosek. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, powstającego w skutek przemian pierwszych wskaźników, kilka różnych par drugich wskaźników przestawiamy, i to w każdym wyrazie te same pary biorąc, i jeżeli tych par jest parzysta liczba, wyznacznik nie zmienia ani znaku ani wartości, jeżeli zaś ta liczba jest nieparzysta, wyznacznik nie zmienia wartości lecz znak swój (zobacz § 11).

§ 23.

Wniosek 2. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, powstającego w skutek przemian drugich wskaźników, dwa te same pierwsze wskaźniki przestawiamy, wyznacznik nie zmienia wartości lecz znak swój.

§ 24.

Wniosek 3. Jeżeli we wszystkich wyrazach wyznacznika, rozwiniętego za pomocą przemian drugich wskaźników, kilka różnych par pierwszych wskaźników przestawiamy, i to w każdym wyrazie te same pary biorąc, i jeżeli tych par jest parzysta liczba, wyznacznik nie zmienia ani znaku ani wartości, jeżeli zaś ta liczba jest nieparzysta, wyznacznik nie zmienia wartości, lecz znak swój.

§ 25.

Wniosek 4. Z ostatnich ośm paragrafów wynika nareszcie jeszcze następujące zdanie: Jeżeli w każdym wyrazie wyznacznika dowolną liczbę tych samych pierwszych i dowolną liczbę tych samych drugich wskaźników przestawiamy, wyznacznik wartości nie zmienia, znak zaś jego się zmienia lub nie, skoro pierwszy wyraz w skutek przestawień znak swój zmienia lub nie.

Przykład.

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Przestawiwszy z pierwszych wskaźników 1 i 2, z drugich zaś 2 i 3, otrzymamy:

$$a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{11}a_{33}a_{22} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Przestawmy teraz z pierwszych wskaźników 1 i 3, z drugich zaś 1 i 2.

$$a_{22}a_{33}a_{11} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21}$$

Nareszcie przestawmy z drugich wskaźników 2 i 3.

$$a_{23}a_{32}a_{11}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{33}a_{22}a_{11}+a_{33}a_{12}a_{21}+a_{13}a_{22}a_{31}-a_{13}a_{32}a_{21}.$$

Pierwszy wyraz ma w pierwszych wskaźnikach dwa zepsucia porządku 21, 31, w drugich zaś takich zepsuć trzy 32, 31, 21, w ogóle więc pięć. Znak pierwszego wyrazu musi być podług § 9 odjemny. Jeżeli w podobny sposób znaki wszystkich wyrazów określimy i sumę ostatnią przez $\triangle$ oznaczymy, otrzymamy:

$$-\triangle=\begin{cases}-(a_{23}a_{32}a_{11}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{33}a_{22}a_{11}+a_{33}a_{12}a_{21}+a_{13}a_{22}a_{31}-a_{13}a_{32}a_{21})\\ -a_{23}a_{32}a_{11}+a_{22}a_{12}a_{31}+a_{33}a_{22}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}\end{cases}$$

Przestawiwszy pierwszy element z trzecim, co zmiany znaków nie spowoduje, otrzymamy:

$$-\triangle=-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{32}a_{13}.$$

Uporządkowawszy wyrazy te tak jak w D, otrzymamy:

$$-\triangle=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}=D.$$

ROZDZIAŁ III.

Sposób drugi rozwinięcia wyznacznika. — Twierdzenia o zmianie znaku wyznacznika. — Różne sposoby wyrażenia wyznacznika. — Twierdzenia o głównych własnościach wyznacznika.

§ 26.

Objaśnienie. Najczęściéj jest w używaniu następujące wyrażenie wyznacznika podług Koszego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Elementa, stojące przy sobie, są elementami rzędów poziomych, elementa zaś, stojące pod sobą, są elementami rzędów pionowych. Pierwsze wskaźniki oznaczają miejsca rzędów poziomych, drugie wskaźniki zaś miejsca rzędów pionowych.

Wandermond oznacza wyznacznik przez

$$\frac{\alpha}{a}\left|\frac{\beta}{b}\right|\frac{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}\left|\frac{\gamma}{c}\right. \text{ lub } \frac{1}{1}\left|\frac{2}{2}\right|\frac{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}\left|\frac{n}{n}\right.$$

gdzie wskaźniki górne oznaczają rzędy poziome, wskaźniki zaś dolne rzędy pionowe. To znakowanie używa się często z powodu swéj zwięzłości w poszukiwaniach teoryi.

Bine używa wyrażenia

$$(a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n})$$

które uwydatnia same rzędy pionowe; gdy zaś chodzi o rzędy poziome, można pisać:

$$(a_{11}a_{21}a_{31}\ldots a_{n1})$$

Możemy tu jeszcze przytoczyć znakowanie cieniowo Silvestra (umbral notation), w którém ilość jest wyobrażona przez zestawienie dwóch głosek naprzykład a_α, i wtedy wyznacznik wyraża się przez

$$\begin{vmatrix} a_\alpha, & b_\alpha, & \ldots & c_\alpha \\ a_\beta, & b_\beta, & \ldots & c_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\lambda, & b_\lambda, & \ldots & c_\lambda \end{vmatrix} \quad \text{albo} \quad \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & \ldots & l \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots & \lambda \end{vmatrix}$$

Czasami będziemy używać krótkie wyrażenie Trzaskiego

$$W_n(a_{ik}).$$

Wyznaczniki dzielimy na wyznaczniki pierwszego, drugiego, trzeciego itd. stopnia; stopień wyznacznika zależy od ilości elementów głównego wyrazu.

§ 27.

Drugi sposób rozwinięcia wyznacznika.

Wyznacznik wyrażenia Koszego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

rozwija się w sposób następujący: Elementa pionowego rzędu mnożymy wszystkie z wyznacznikami $(n-1)^{go}$ stopnia, które otrzymujemy, opuszczając te rzędy pionowe i poziome, w których się zawsze pierwszy czynnik jako element znajduje. Iloczynowi pierwszemu, trzeciemu, piątemu etc. $(2p+1)^{mu}$ udzielamy znak dodatni; iloczynowi zaś drugiemu, czwartemu, szóstemu etc. $(2p)^{temu}$ znak odjemny. W ten sam sposób rozwijają się daléj wyznaczniki $(n-1)^{go}$ stopnia etc.

Dla lepszego pojęcia podamy tu rozwinięcia wyznaczników pierwszych czterech stopni.

(1) $|a_{11}| = a_{11}$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left\{a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\right\} -$$

$$- a_{21}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+ a_{31}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\right\} -$$

$$- a_{41}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})-a_{11}a_{32}(a_{23}a_{44}-a_{43}a_{24})+\\
&\qquad +a_{11}a_{42}(a_{23}a_{34}-a_{33}a_{24})-\\
&-a_{21}a_{12}(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})+a_{21}a_{32}(a_{13}a_{44}-a_{43}a_{14})-\\
&\qquad -a_{21}a_{42}(a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14})+\\
&+a_{31}a_{12}(a_{23}a_{44}-a_{43}a_{24})-a_{31}a_{22}(a_{13}a_{44}-a_{43}a_{14})+\\
&\qquad +a_{31}a_{42}(a_{13}a_{24}-a_{23}a_{14})-\\
&-a_{41}a_{12}(a_{23}a_{34}-a_{33}a_{24})+a_{41}a_{22}(a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14})-\\
&\qquad -a_{41}a_{32}(a_{13}a_{24}-a_{23}a_{14})=\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}-a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}+a_{11}a_{32}a_{43}a_{24}+\\
&\qquad +a_{11}a_{42}a_{23}a_{33}-a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}-\\
&-a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}+a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}+a_{21}a_{32}a_{13}a_{44}-a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}-\\
&\qquad -a_{21}a_{42}a_{13}a_{34}+a_{21}a_{42}a_{33}a_{14}+\\
&+a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}-a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}-a_{31}a_{22}a_{13}a_{44}+a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}+\\
&\qquad +a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}-a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}-\\
&-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}+a_{41}a_{12}a_{33}a_{24}+a_{41}a_{22}a_{13}a_{34}-a_{41}a_{22}a_{33}a_{14}-\\
&\qquad -a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}+a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}.
\end{aligned}
$$

§ 28.

Uwaga. Z wyznacznika w § 27 rozwiniętego wynika, iż sposób pierwszy rozwinięcia wyznacznika w § 15 ten sam wyznacznik nam rozwija, co sposób drugi w § 27. Tam bowiem jak i tu wskaźniki pierwsze są podług § 5 przemienione, wyrazy postępują po sobie w tym samym porządku i z tymi samymi znakami, które im podług § 9 należą.

§ 29.

Twierdzenie. Wartość i znak wyznacznika nie zmienia się, skoro elementom rzędów pionowych dajemy w tym samym porządku miejsca elementów rzędów poziomych

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Dowód. Jeżeli obydwa wyznaczniki w sposób drugi (§ 27) rozwijamy, otrzymujemy w jedném rozwinięciu wszystkie przemiany pierwszych wskaźników; w drugiém zaś wszystkie przemiany drugich wskaźników; obydwa wyznaczniki muszą być zatém równe podług § 16.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{32} \\ a_{23} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} a_{31} \\ a_{23} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} a_{31} \\ a_{22} a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

§ 30.

Twierdzenie. Wyznacznik rozwinięty podług elementów stojących w rzędach pionowych, jest równy wyznacznikowi rozwiniętemu podług elementów stojących w rzędach poziomych.

Dowód. W rozwinięciu pierwszego wyznacznika mamy wszystkie przemiany pierwszych wskaźników, w rozwinięciu zaś drugiego wszystkie przemiany drugich wskaźników; dla tego obydwa wyznaczniki muszą być równe podług § 16.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

§ 31.

Twierdzenie. Wyznacznik zmienia swój znak, nie zaś swą wartość, skoro się dwa rzędy pionowe przestawiają.

Dowód wynika z § 21.

Przykład.

$$-\begin{vmatrix} a_{13} a_{12} a_{11} \\ a_{23} a_{22} a_{21} \\ a_{33} a_{32} a_{31} \end{vmatrix} = -\left\{ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} a_{21} \\ a_{32} a_{31} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} a_{11} \\ a_{32} a_{31} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} a_{11} \\ a_{22} a_{21} \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= -\{ a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{23}a_{12}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21} - a_{33}a_{22}a_{11} \} =$$

$$= -a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{23}a_{12}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} + a_{33}a_{22}a_{11} =$$

$$= a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}) =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

§ 32.

Twierdzenie. Wyznacznik nie zmienia swéj wartości lecz znak swój, skoro się dwa rzędy poziome przestawiają. Dowód wynika z § 17.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

§ 33.

Twierdzenie. Jeżeli we wyznaczniku kilka rzędów pionowych lub kilka rzędów poziomych, albo też kilka rzędów pionowych i kilka poziomych w tym samym wyznaczniku przemieniamy, wyznacznik nie zmienia swéj wartości, znak jego zależy od znaku wyrazu, składającego się z elementów rzędu przekątnego, lub od znaku pierwszego wyrazu, czy ten jest, podług § 9, dodatnim lub odjemnym.

Dowód wynika z §§ 20, 22, 24 i 25).

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{21} \\ a_{21} a_{23} a_{22} \\ a_{31} a_{33} a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} a_{11} a_{12} \\ a_{23} a_{21} a_{22} \\ a_{33} a_{31} a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{23} a_{21} a_{22} \\ a_{13} a_{11} a_{12} \\ a_{33} a_{31} a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{23} a_{21} a_{22} \\ a_{33} a_{31} a_{32} \\ a_{13} a_{11} a_{12} \end{vmatrix}$$

§ 34.

Objaśnienie. Zamiast wyrażenia wyznacznika Koszego we formie kwadratu używa się bardzo często wyrażenie we formie sumy, gdzie się kładzie pierwszy wyraz wyznacznika. Z pierwszego wyrażenia wydobywamy drugie, biorąc wyraz składający się z elementów rzędu przekątnego. Np.

$$\begin{vmatrix} a_{31} a_{34} a_{32}\, a_{33} \\ a_{21} a_{24} a_{22}\, a_{23} \\ a_{41} a_{44} a_{42} a_{43} \\ a_{11} a_{14} a_{12}\, a_{13} \end{vmatrix} = \Sigma(\pm a_{31} a_{24} a_{42} a_{13})$$

Jeżeli wyznacznik we formule sumy jest danym, to z téj formuły łatwo ustawić możemy w następujący sposób formułę kwadratową.

Jeżeli dana formuła jest

$$\Sigma(\pm a_{31} a_{24} a_{42} a_{13})$$

to naprzód ustawiamy elementa dane w rzędzie przekątnym,

$$\begin{vmatrix} a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{24} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{42} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{13} \end{vmatrix}$$

potém wypełniamy miejsca próżne głoską (a) i dajemy téj zgłosce jako pierwsze wskaźniki te, które przy elementach rzędu przekątniego miejsca rzędów poziomych oznaczają,

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_{24} & a_2 & a_2 \\ a_4 & a_4 & a_{42} & a_4 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_{13} \end{vmatrix}$$

nareszcie dopisują się jako drugie wskaźniki takie, które przy elementach rzędu przekątnego miejsca rzędów pionowych wskazują. Zatém otrzymamy:

$$\Sigma(\pm a_{31}a_{24}a_{42}a_{13}) = \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}a_{32}a_{33} \\ a_{21}a_{24}a_{22}a_{23} \\ a_{41}a_{44}a_{42}a_{43} \\ a_{11}a_{14}a_{12}a_{13} \end{vmatrix}$$

Znak tego wyznacznika jest dodatnim, ponieważ wyraz złożony z elementów rzędu przekątnego jest dodatnim.

§ 35.

Uwaga. Niekoniecznie muszą być elementa dwoma wskaźnikami obdarzone, można bowiem drugie albo pierwsze wskaźniki opuścić, skoro się używa różnych zgłosek.

Przykłady.

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \quad \Sigma(\pm a_1 b_2) = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$(2) \; . \; . \; \Sigma(\pm a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + \\ + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{array}$$

$$(3) \quad \Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 d_4) = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} =$$

$$=a_1b_2c_3d_4-a_1b_2c_4d_3-a_1b_3c_2d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-$$
$$-a_2b_1c_3d_4+a_2b_1c_4d_3+a_2b_3c_1d_4-a_2b_3c_4d_1-a_2b_4c_1d_3+a_2b_4c_3d_1+$$
$$+a_3b_1c_2d_4-a_3b_1c_4d_2-a_3b_2c_1d_4+a_3b_2c_4d_1+a_3b_4c_1d_2-a_3b_4c_2d_1-$$
$$-a_4b_1c_2d_3+a_4b_1c_3d_2+a_4b_2c_1d_3-a_4b_2c_3d_1-a_4b_3c_1d_2+a_4b_3c_2d_1.$$

§ 36.

Uwaga. Wyznacznik można także jeszcze wyrazić, pisząc tylko wskaźnik i opuszczając zgłoskę, w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & \ldots, & 1n \\ 21, & 22, & 23, & \ldots, & 2n \\ 31, & 32, & 33, & \ldots, & 3n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n1, & n2, & n3, & \ldots & nn \end{vmatrix}$$

Zestawiwszy te wszystkie oznaczenia, otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 \\ a_2b_2c_2d_2 \\ a_3b_3c_3d_3 \\ a_4b_4c_4d_4 \end{vmatrix} = \Sigma(\pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = \Sigma(\pm a_1b_2c_3d_4) =$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = \frac{1|2|3|4}{a|b|c|d} = (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = (a_1b_2c_3d_4) = W_4(a_{ik})$$

§ 37.

Przykłady.

(1) Równanie linii prostéj przechodzącéj przez punkta $(x'y'$ i $(x''y'')$ jest, jak wiadomo:

$$(x'y''-x''y')-(xy''-x''y)+(xy'-x'y)=0$$

albo

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 0$$

albo nareście

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

(2) Aby linia prosta przez trzy przechodziła punkta, musi punkt trzeci $(x'''y''')$ takie mieć położenie, iż jego współrzędne zadosyć czynią równaniu przykładu pierwszego. Włożywszy więc $x'''y'''$ na miejsce xy, otrzymamy warunek dla trzech punktów, leżących w prostéj linii, w następujący sposób wyrażony:

$$\begin{vmatrix} 1 & x''' & y''' \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Przestawiwszy pierwszy rząd poziomy z drugim a potém drugi z trzecim, mieć będziemy:

$$\begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

(3) Jeżeli współrzędne wierzchołków trójkąta $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ są dane, i jeżeli powierzchnią trójkąta przez $\triangle$ oznaczymy, otrzymamy:

$$2\triangle = (x''y''' - x'''y'') - (x'y''' - x'''y') + (x'y'' - x''y') =$$

$$= \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix}$$

§ 38.

Twierdzenie. Skoro wszystkie elementa, znajdujące się po jednéj stronie rzędu przekątnego, równe są zeru, wyznacznik ogranicza się na jeden tylko wyraz z elementów rzędu przekątnego.

Dowód wynika z przykładu następującego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

§ 39.

Twierdzenie. Skoro wszystkie elementa rzędu pionowego albo rzędu poziomego oprócz jednego równe są zeru, wyznacznik równy jest iloczynowi z tego jednego elementu przez wyznacznik następującego niższego stopnia.

Dowód. Jeżeli element nieznikający jest a_{pq}, to przestawiamy rzędy poziome i pionowe tak, iż wyznacznik się rozpoczyna z elementem a_{pq}. Ponieważ takim sposobem robimy $(p-1)$ przestawień rzędów pionowych i $(q-1)$ przestawień rzędów poziomych, przeto musimy pomnożyć wyznacznik przez $(-1)^{p-1+q-1} = (-1)^{p+q-2} = (-1)^{p+q}$, aby wyznacznik zatrzymał znak mu należący. Zatém będzie:

$$W_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = (-1)^7 . \begin{vmatrix} a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ 0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Z powyższego przykładu wynika, iż iloczyn, na który wyznacznik się rozkłada, jest dodatnim, skoro $p+q$ jest liczbą parzystą, odjemnym zaś, skoro $p+q$ jest liczbą nieparzystą.

§ 40.

Wniosek. Z każdego wyznacznika można zrobić wyznacznik wyższego stopnia.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \ldots$$

§ 41.

Twierdzenie. Jeżeli dwa rzędy pionowe lub poziome są równe, wyznacznika wartość jest równa zeru.

Dowód. Rzędy równe możemy ustawić jako rzędy ostatnie i potém wyznacznik rozwijać.

Rozwijając wyznacznik, przychodzimy do takiego kształtu, gdzie wyrazy są iloczynami z dwóch czynników, z których drugi czynnik jest różnicą z dwóch równych iloczynów i zatém równy zeru. Ponieważ z téj przyczyny wyrazy takie znikają, przeto wyznacznik cały znika, t. j. jego wartość jest równa zeru.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{32} \\ a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{42} \end{vmatrix} = a_{11}a_{24}(a_{32}a_{42}-a_{42}a_{32})-$$

$$-a_{11}a_{34}(a_{22}a_{42}-a_{42}a_{22})+a_{11}a_{44}(a_{22}a_{32}-a_{32}a_{22})-$$
$$-a_{21}a_{14}(a_{32}a_{42}-a_{42}a_{32})+a_{21}a_{34}(a_{12}a_{42}-a_{42}a_{12})-$$
$$-a_{21}a_{44}(a_{12}a_{32}-a_{32}a_{12})+a_{31}a_{14}(a_{22}a_{42}-a_{42}a_{22})-$$
$$-a_{31}a_{24}(a_{12}a_{42}-a_{42}a_{12})+a_{31}a_{44}(a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12})-$$
$$-a_{41}a_{14}(a_{22}a_{32}-a_{32}a_{22})+a_{41}a_{24}(a_{12}a_{32}-a_{32}a_{12})-$$
$$-a_{41}a_{34}(a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12})=a_{11}a_{24}\,.\,0-a_{11}a_{34}\,.\,0+$$
$$a_{11}a_{44}\,.\,0-\text{ etc.}=0.$$

§ 42.

Twierdzenie. Każdy wyznacznik jest funkcyą linijną elementów dowolnego rzędu pionowego albo poziomego.

Przykład.

$$W_4 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{23} a_{24} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \end{vmatrix}$$

Jeżeli współczynniki elementów dowolnego rzędu przez wielkie zgłoski z dwoma wskaźnikami, odpowiedniemi elementom, oznaczymy, natenczas ostatni wyznacznik wyrazić możemy w sposób następujący:

$$W_4 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$$

albo

$$W_4 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

Znaki wyrazów tu nie są uwzględnione i łatwo je można wynaleść podług § 39.

Dla wyznacznika (n^{tego}) stopnia mamy:

$$(1) \,..\, W_n = a_{1q}A_{1q} + a_{2q}A_{2q} + a_{3q}A_{3q} + \ldots + a_{nq}A_{nq}$$

albo

$$(2) \,..\, W_n = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots\ldots + a_{pn}A_{pn}.$$

Zamiast wielkich zgłosek używają się często zgłoski greckie, dla tego mamy także·

$$W_n = a_{1q}\alpha_{1q} + a_{2q}\alpha_{2q} + a_{3q}\alpha_{3q} + \ldots + a_{nq}\alpha_{nq}$$

$$W_n = a_{p1}\alpha_{p1} + a_{p2}\alpha_{p2} + a_{p3}\alpha_{p3} + \ldots + a_{pn}\alpha_{pn}$$

§ 43.

Wniosek I. Z rozwinięcia wyznacznika w § 42 wynika, iż $a_{pq}A_{pq}$ sumę wszystkich wyrazów wyznacznika oznacza, które element a_{pq} w sobie zawierają. Jeżeli W_n oznacza wyznacznik (n^{tego}) stopnia, to A_{pq} oznacza wyznacznik $(n-1)^{\text{go}}$ stopnia, który z W_n otrzymujemy, opuszczając w W_n p^{ty} rząd poziomy i q^{ty} rząd pionowy. Wyznacznik A_{pq} składa się z wyrazów mających $(n-1)$ elementów, pomiędzy któremi element a_{pq} się nie znajduje.

Wyznacznik A_{pq} możemy nazwać pierwszoczęściowym wyznacznikiem, lub pierwszoniższym wyznacznikiem, albo też nareszcie podług Salmona pierwszym minorem.

§ 44.

Wniosek 2. Jeżeli r nie jest równe p i s nierówne q, natenczas następujące wynikają równania:

$$a_{r1}A_{p1}+a_{r2}A_{p2}+a_{r3}A_{p3}+\ldots+a_{rn}A_{pn}=0.$$
$$a_{1s}A_{1q}+a_{2s}A_{2q}+a_{3s}A_{3q}+\ldots+a_{ns}A_{nq}=0.$$

Skoro lewe strony tych równań w rzędy wyznacznika ustawiamy, pierwszy wyznacznik mieć będzie dwa równe rzędy poziome, drugi zaś dwa równe rzędy pionowe; z tego powodu oba wyznaczniki muszą być podług § 41 równe zeru.

Przykład.

$$W_3=a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\end{vmatrix}=0.$$

§ 45.

Wniosek 3. Jeżeli elementa są niezależne pomiędzy sobą, to podług § 42 następujące mamy relacye:

$$(1)\quad W_n = a_{p1}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p1}} + a_{p2}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p2}} + a_{p3}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p3}} + \ldots + a_{pn}\frac{\partial W_n}{\partial a_{pn}}$$

$$(2)\quad W_n = a_{1q}\frac{\partial W_n}{\partial a_{1q}} + a_{2q}\frac{\partial W_n}{\partial a_{2q}} + a_{3q}\frac{\partial W_n}{\partial a_{3q}} + \ldots + a_{nq}\frac{\partial W_n}{\partial a_{nq}}.$$

Jest bowiem:

$$(3)\quad \ldots\ A_{pq} = \frac{\partial W_n}{\partial a_{pq}}.$$

Tak samo jak w § 44 mamy także:

$$(4)\quad a_{r1}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p1}} + a_{r2}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p2}} + a_{r3}\frac{\partial W_n}{\partial a_{p3}} + \ldots + a_{rn}\frac{\partial W_n}{\partial a_{pn}} = 0.$$

$$(5)\quad a_{1s}\frac{\partial W_n}{\partial a_{1q}} + a_{2s}\frac{\partial W_n}{\partial a_{2q}} + a_{3s}\frac{\partial W_n}{\partial a_{3q}} + \ldots + a_{ns}\frac{\partial W_n}{\partial a_{nq}} = 0.$$

§ 46.

Twierdzenie. Jeżeli wszystkie elementa rzędu jednego są pomnożone jednym i tym samym czynnikiem, to i wyznacznik jest pomnożony tym czynnikiem.

Dowód wynika z § 42.

Przykłady.

$$(1)\ \ldots \begin{vmatrix} a_{11}, \alpha a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, \alpha a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, \alpha a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha a_{12}A_{12} + \alpha a_{22}A_{22} + \alpha a_{32}A_{32} \\ \alpha\{a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}\} \\ \qquad\quad \alpha \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

$$(2)\ \ldots \begin{vmatrix} \alpha a_{11}, & \beta a_{12}, & a_{13} \\ \alpha a_{21}, & \beta a_{22}, & a_{23} \\ \alpha a_{31}, & \beta a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 2, & 6, & 12 \\ 6, & 15, & 4 \\ 14, & 3, & 8 \end{vmatrix} = 2.3.4 \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 5, & 1 \\ 7, & 1, & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 24(10-1-12+9+14-105) \\ 24.(-85) \\ -2040 \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_1 c_1 \\ a_3 b_1 c_1 \end{vmatrix} = b_1 c_1 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b_1 c_1 . 0 = 0.$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} a_1 a_1 a_1 \\ a_2 a_2 a_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 . 0 = 0.$$

§ 47.

Wniosek. Mnożąc wszystkie elementa jednego rzędu jednym i tym samym czynnikiem i dzieląc wyznacznik przez tenże czynnik, nie zmieniamy wartości wyznacznika.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} a_1, & b_1 k, & c_1 \\ a_2, & b_2 k, & c_2 \\ a_3, & b_3 k, & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} a_1, & b_1 k, & c_1 \\ a_2, & b_2 k, & c_2 \\ a_3 k, & b_3 k^2, & c_3 k \end{vmatrix}$$

Na mocy tego prawa możemy następujący wyznacznik doprowadzić do bardzo pojedyńczego kształtu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ x, & 0, & xyz^2, & xy^2 z \\ y, & xyz^2, & 0, & x^2 yz \\ z, & xy^2 z, & x^2 yz, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \Bigg\{ -x \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ xyz^2, & 0, & x^2 yz \\ xy^2 z, & x^2 yz, & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ 0, & xyz^2, & xy^2 z \\ xy^2 z, & x^2 yz, & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-z\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ 0, & xyz^2, & xy^2z \\ xyz^2, & 0 & x^2yz \end{vmatrix}\Bigg\} = \frac{1}{x^2y^2z^2}\Bigg\{ -x^3y^2z^2\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ z, & 0, & x \\ y, & x, & 0 \end{vmatrix} + x^2y^3z^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-x^2y^2z^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}\Bigg\} = 0.\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Ostatni wyznacznik można przyprowadzić do iloczynu:

$$-(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

§ 48.

Twierdzenie. Jeżeli elementa jakiegokolwiek rzędu tworzą sumę z m elementów, wyznacznik można wyrazić przez sumę z m wyznaczników.

Dowód wynika z przykładu następującego:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \alpha_{12}+\beta_{12}+\gamma_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & \alpha_{22}+\beta_{22}+\gamma_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & \alpha_{32}+\beta_{32}+\beta_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha_{12}+\beta_{12}+\gamma_{12})A_{12}+(\alpha_{22}+\beta_{22}+\gamma_{22})A_{22}+(\alpha_{32}+\beta_{32}+\gamma_{32})A_{32}=$$

$$=\alpha_{12}A_{12}+\alpha_{22}A_{22}+\alpha_{32}A_{32}+\beta_{12}A_{12}+\beta_{22}A_{22}+\beta_{32}A_{32}+$$
$$+\gamma_{12}A_{12}+\gamma_{22}A_{22}+\gamma_{32}A_{32}=$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \beta_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \beta_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \gamma_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \gamma_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \gamma_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dla ćwiczenia przytoczymy tu kilka przykładów:

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1-\alpha_1 x, & b_1, & c_1 \\ a_2-\alpha_2 x, & b_2, & c_2 \\ a_3-\alpha_3 x, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ 49.

Twierdzenie. Wartość wyznacznika nie zmienia się, skoro do elementów jakiegokolwiek rzędu dodajemy elementa rzędu równoległego, pomnożone dowolnym czynnikiem.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1+pb_1 \\ a_2, & b_2, & c_2+pb_2 \\ a_3, & b_3, & c_3+pb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & pb_1 \\ a_2, & b_2, & pb_2 \\ a_3, & b_3, & pb_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \left\{\begin{array}{l} p\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ p\,.\,0 \end{array}\right. = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2-a_3 x, & b_2-b_3 x, & c_2-c_3 x \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \left\{\begin{array}{l} x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ x\,.\,0 \end{array}\right. =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a, & y-b \\ x_1-a, & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & x-a, & y-b \\ 1, & x_1-a, & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a-a, & b-b \\ 1, & x-a, & y-b \\ 1, & x_1-x, & y_1-b \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} - a\begin{vmatrix}1 & 1 & b\\ 1 & 1 & y\\ 1 & 1 & y_1\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & x_1 & 1\end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} - a\,.\,0 - b\,.\,0 - ab\,.\,0 = \begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}$$

ROZDZIAŁ IV.

O rozwiązaniu linijnych równań algebraicznych.

§ 50.

Zadanie. Z n równań, zawierających w sobie n zmiennych, wartości wszystkich zmiennych wynaleść.

Rozwiązanie. Równania dane niech będą kształtu następującego:

$$(1) \ldots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = u_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = u_n \end{cases}$$

Wyznacznik z współczynników lewéj strony równań jest:

$$(2) \ldots W_n = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aby z tych równań zmienną x_q wyrazić, pomnożymy równania jedno po drugiém odpowiednie z pierwszemi minorami

$$A_{1q},\ A_{2q},\ A_{3q},\ \ldots\ A_{nq}$$

wyznacznika W_n i dodajemy równania pomnożone, w skutek czego dla wartości zmiennéj następujące wynika równanie:

$$W_n x_q = u_1 A_{1q} + u_2 A_{2q} + u_3 A_{3q} + \ldots + u_n A_{nq}.$$

Mamy bowiem w dodanych równaniach podług § 42 i § 44 dla współczynników odpowiednich zmiennych następujące wartości:

$$a_{11}A_{1q} + a_{21}A_{2q} + a_{31}A_{3q} + \ldots + a_{n1}A_{nq} = 0.$$
$$a_{12}A_{1q} + a_{22}A_{2q} + a_{32}A_{3q} + \ldots + a_{n2}A_{nq} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1,q-1}A_{1q} + a_{2,q-1}A_{2q} + a_{3,q-1}A_{3q} + \ldots + a_{n,q-1}A_{nq} = 0$$
$$a_{1q}A_{1q} + a_{2q}A_{2q} + a_{3q}A_{3q} + \ldots\ a_{nq}A_{uq} = W_n$$
$$a_{1,q+1}A_{1q} + a_{2,q+1}A_{2q} + a_{3,q+1}A_{3q} + \ldots\ a_{n,q+1}A_{nq} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}A_{1q} + a_{2n}A_{2q} + a_{3n}A_{3q} + \ldots + a_{nn}A_{nq} = 0.$$

Równania zatem dla wartości wszystkich zmiennych być muszą:

$$(3)\ldots\begin{cases} W_n x_1 = u_1 A_{11} + u_2 A_{21} + u_3 A_{31} + \ldots + u_n A_{n1} \\ W_n x_2 = u_1 A_{12} + u_2 A_{22} + u_3 A_{32} + \ldots + u_n A_{n2} \\ W_n x_3 = u_1 A_{13} + u_2 A_{23} + u_3 A_{33} + \ldots + u_n A_{n3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_n x_n = u_1 A_{1n} + u_2 A_{2n} + u_3 A_{3n} + \ldots + u_n A_{nn} \end{cases}$$

Prawe strony tych równań możemy jako wyznaczniki napisać, skoro ilości $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n$ uważamy jako elementa rzędów w W_n opuszczonych. Pisać możemy więc:

$$(4) \ldots W_n x_1 = \begin{vmatrix} u_1 a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ u_2 a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ u_3 a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots \ldots \\ u_n a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$W_n x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} u_1 a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} u_2 a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} u_3 a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots \ldots \\ a_{n1} u_n a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$W_n x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} u_1 a_{14} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} u_2 a_{24} \ldots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} u_3 a_{34} \ldots a_{3n} \\ \ldots \ldots \\ a_{n1} a_{n2} u_n a_{n4} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$W_n x_n = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1,n-1}\, u_1 \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2,n-1}\, u_2 \\ a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3,n-1}\, u_3 \\ \ldots \ldots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{n,n-1}\, u_u \end{vmatrix}$$

Przykład. Jeżeli równania trzech płaszczyzn są dane w kształcie następującym:

$$(5) \ldots \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

to wartości współrzędnych punktu, w którym się płaszczyzny przecinają, będą:

$$(6) \ldots x = -\frac{\begin{vmatrix} d\, b\, c \\ d_1 b_1 c_1 \\ d_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\, b\, c \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}},\quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a\, d\, c \\ a_1 d_1 c_1 \\ a_2 d_2 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\, b\, c \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}},\quad z = -\frac{\begin{vmatrix} a\, b\, d \\ a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\, b\, c \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}}.$$

§ 51.

Uwaga. Zastanowiwszy się nad grupą równań

$$
(1)\ldots\begin{cases}
a_{11}z_1+a_{21}z_2+a_{31}z_3+\ldots+a_{n1}z_n=v_1\\
a_{12}z_1+a_{22}z_2+a_{32}z_3+\ldots+a_{n2}z_n=v_2\\
a_{13}z_1+a_{23}z_2+a_{33}z_3+\ldots+a_{n3}z_n=v_3\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+a_{3n}z_3+\ldots+a_{nn}z_n=v_n
\end{cases}
$$

spostrzegamy, iż podług § 29 wyznacznik, składający się z współczynników lewej strony tych równań, jest téj saméj wartości co wyznacznik 2. § 50, zatém mieć będziemy podług § 50 następujące równania:

$$
(2)\begin{cases}
W_nz_1=v_1A_{11}+v_2A_{12}+v_3A_{13}+\ldots+v_nA_{1n}\\
W_nz_2=v_1A_{21}+v_2A_{22}+v_3A_{23}+\ldots+v_nA_{2n}\\
W_nz_3=v_1A_{31}+v_2A_{32}+v_3A_{33}+\ldots+v_nA_{3n}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
W_nz_n=v_1A_{n1}+v_2A_{n2}+v_3A_{n3}+\ldots+v_nA_{nn}
\end{cases}
$$

Pomnożywszy te równania odpowiednie przez u_1, u_2, $u_3, \ldots u_n$ i dodawszy je do siebie, odbieramy, wzgląd mając na równania 3. § 50, następujące równanie:

$$(3)\ldots u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3+\ldots+u_nz_n=v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+\ldots+v_nx_n$$

to równanie wyraża związek zmiennych, znajdujących się w równaniach (1) i (1) § 50.

§ 52.

Wniosek. Równania (3) § 50 mają znaczenie dla wszystkich wartości ilości $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$; skoro te ilości znikają, tj. równe są zeru, to równania (3) § 50) biorą następujący kształt:

$$(1)\quad W_nx_q=0.$$

Ponieważ zmienne $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ nie są równe zeru, zatém być musi:

$$(2) \ldots W_n = 0.$$

albo

$$(3) \ldots \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3u} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie jest wynikiem rugowania wszystkich zmiennych z równań:

$$(4) \ldots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

i wyraża warunek współistnienia tych równań.

Przykład.

Warunek, aby cztery płaszczyzny następujące:

$$\begin{gathered} ax + by + cz + d + 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{gathered}$$

się przecinały w jednym punkcie, wyraża się za pomocą wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} a\, b\, c\, d \\ a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Z wyznacznika (3) wynikają następujące równania:

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=0 \\ a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+\ldots+a_{2n}A_{2n}=0 \\ a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+\ldots+a_{3n}A_{3n}=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+a_{n3}A_{n3}+\ldots+a_{nn}A_{nn}=0 \end{cases}$$

Z tych równań i z (4) wynika następująca proporcya:

$$(6)\quad x_1:x_2:x_3:\ldots:x_n=\begin{cases} A_{11}:A_{12}:A_{13}:\ldots:A_{1n} \\ A_{21}:A_{22}:A_{23}:\ldots:A_{2n} \\ A_{31}:A_{32}:A_{33}:\ldots:A_{3n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{n1}:A_{n2}:A_{n3}:\ldots:A_{nn} \end{cases}$$

§ 53.

Wniosek. Włożywszy w równania (§ 50, 1)

$$u_1=-a_{10}x_0,\ u_2=-a_{20}x_0,\ u_3=-a_{30}x_0,\ldots,\ u_n=-a_{n0}x_0$$

otrzymamy następujący system równań:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ a_{30}x_0+a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n0}x_0+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

Równania (§ 50, 4) zmieniają się w skutek tego podstawienia w następujące:

$$(2)\quad W_nx_1=-x_0\begin{vmatrix} a_{10}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{20}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{30}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n0}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix},\ W_nx_2=-x_0\begin{vmatrix} a_{11}a_{10}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{20}a_{23}\ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{30}a_{33}\ldots a_{3n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}a_{n0}a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$W_n x_3 = -x_0 \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{10} a_{14} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{20} a_{24} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{30} a_{34} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n0} a_{n4} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$W_n x_n = -x_0 \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1,\, n-1}\; a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2,\, n-1}\; a_{2n} \\ a_{31} a_{32} \dots a_{3,\, n-1}\; a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{n,\, n-1}\; a_{nn} \end{vmatrix}$$

albo:

(3)

$$\frac{x_0}{W_n} = -\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_{10} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{20} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{30} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n0} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} = -\frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{10} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{20} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{30} a_{33} \dots a_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} a_{n0} a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} = -$$

$$-\frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{10} a_{14} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{20} a_{24} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{30} a_{34} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n0} a_{n4} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} = \dots = -\frac{x_n}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12}\, a_{13} \dots a_{1,\, n-1}\; a_{10} \\ a_{21} a_{22}\, a_{23} \dots a_{2,\, n-1}\; a_{20} \\ a_{31} a_{32}\, a_{33} \dots a_{3,\, n-1}\; a_{30} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2}\, a_{n3} \dots a_{n,\, n-1}\; a_{n0} \end{vmatrix}}$$

Z tego wynika w skutek przestawień rzędów pionowych w wyznacznikach następująca proporcya:

$$(4) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} : -$$

$$-\begin{vmatrix} a_{10}a_{12}a_{13} \cdot\cdot a_{1n} \\ a_{20}a_{22}a_{23} \cdot\cdot a_{2n} \\ a_{30}a_{32}a_{33} \cdot\cdot a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n2}a_{n3} \cdot\cdot a_{nn} \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_{10}a_{11}a_{13} \cdot\cdot a_{1n} \\ a_{20}a_{21}a_{23} \cdot\cdot a_{2n} \\ a_{30}a_{31}a_{33} \cdot\cdot a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n1}a_{n3} \cdot\cdot a_{nn} \end{vmatrix} : -$$

$$-\begin{vmatrix} a_{10}a_{11}a_{12}a_{14} \cdot\cdot a_{1n} \\ a_{20}a_{21}a_{22}a_{24} \cdot\cdot a_{2n} \\ a_{30}a_{31}a_{32}a_{34} \cdot\cdot a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n4} \cdot\cdot a_{nn} \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{15} \cdot\cdot a_{1n} \\ a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{25} \cdot\cdot a_{2n} \\ a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}a_{35} \cdot\cdot a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n5} \cdot\cdot a_{nn} \end{vmatrix} : -$$

$$- \ldots : \pm \begin{vmatrix} a_{10}a_{11}a_{12} \cdot\cdot a_{1,n-1} \\ a_{20}a_{21}a_{22} \cdot\cdot a_{2,n-1} \\ a_{30}a_{31}a_{32} \cdot\cdot a_{3,n-1} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n1}a_{n2} \cdot\cdot a_{n,n-o} \end{vmatrix}$$

albo nareście:

$$(5) \ldots x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{10}a_{12}a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{20}a_{22}a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{30}a_{32}a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ a_{n0}a_{n2}a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : -$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11}a_{10}a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{20}a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31}a_{30}a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ a_{n1}a_{n0}a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{10}a_{14} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{20}a_{24} \cdots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{30}a_{34} \cdots a_{3n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\;\; \cdot \\ a_{n1}a_{n2}a_{n0}a_{n4} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : - \ldots : -$$

$$
-\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1,\,n-1}\, a_{10} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2,\,n-1}\, a_{20} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3,\,n-1}\, a_{30} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \ \cdot\ \ \ \ \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \ \cdot\ \ \ \ \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{n,\,n-1}\, a_{n0} \end{vmatrix}
$$

Jak widzimy, wyznaczniki (4) na nieparzystych miejscach są dodatnie, odjemne zaś na parzystych miejscach; ostatniego wyznacznika znak zależy od tego, czy ten wyznacznik zajmuje parzyste czy nieparzyste miejsce.

Téj proporcyi używamy wtenczas, kiedy mamy n równań z $(n+1)$ zmiennemi.

§ 54.

Zadanie. Równanie koła wynaleść, które przechodzi przez wierzchołki trójkąta, którego boki są wyrażone przez równanie następujące:

$$
(1)\quad \begin{cases} x_1 = x\, dost\alpha_1 + y\, wst\alpha_1 - p_1 = 0 \\ x_2 = x\, dost\alpha_2 + y\, wst\alpha_2 - p_2 = 0 \\ x_3 = x\, dost\alpha_3 + y\, wst\alpha_3 - p_3 = 0 \end{cases}
$$

Rozwiązanie. Równanie krzywéj drugiego stopnia, przechodzącéj przez wierzchołki trójkąta, być musi

$$
(2)\dots\ a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0
$$

ponieważ zadosyć mu się czyni każdą z następujących trzech wartości:

$$
(3)\dots\ x_1=0,\ x_2=0;\ x_1=0,\ x_3=0;\ x_2=0,\ x_3=0.
$$

Jeżeli równanie (2) w pełném znaczeniu rozwiniemy, otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
(4)\dots\ & a_{12}(x\, dost\alpha_1 + y\, wst\alpha_1 - p_1)(x\, dost\alpha_2 + y\, wst\alpha_2 - p_2) + \\
& a_{13}(x\, dost\alpha_1 + y\, wst\alpha_1 - p_1)(x\, dost\alpha_3 + y\, wst\alpha_3 - p_3) + \\
& a_{23}(x\, dost\alpha_2 + y\, wst\alpha_2 - p_2)(x\, dost\alpha_3 + y\, wst\alpha_3 - p_3) = 0
\end{aligned}
$$

albo

$$(5)\ldots$$

$$(a_{12}dost\alpha_1 dost\alpha_2+a_{13}dost\alpha_1 dost\alpha_3+a_{23}dost\alpha_2 dost\alpha_3)x^2+$$
$$+[a_{12}(dost\alpha_1 wst\alpha_2+wst\alpha_1 dost\alpha_2)+a_{13}(dost\alpha_1 wst\alpha_3+wst\alpha_1 dost\alpha_3)+$$
$$+a_{23}(dost\alpha_2 wst\alpha_3+wst\alpha_2 dost\alpha_3)]xy+$$
$$+(a_{12}wst\alpha_1 wst\alpha_2++a_{13}wst\alpha_1 wst\alpha_3+a_{23}wst\alpha_2 wst\alpha_3)y^2-$$
$$-[a_{12}(dost\alpha_1 p_2+dost\alpha_2 p_1)+a_{13}(dost\alpha_1 p_3+$$
$$+dost\alpha_3 p_1)+a_{23}(dost\alpha_2 p_3+dost\alpha_3 p_2)]x-$$
$$-[a_{12}(wst\alpha_1 p_2+wst\alpha_2 p_1)+a_{13}(wst\alpha_1 p_3+wst\alpha_3 p_1)+$$
$$+a_{23}(wst\alpha_2 p_3+wst\alpha_3 p_2)]y+$$
$$+a_{12}p_1 p_2+a_{13}p_1 p_3+a_{23}p_2 p_3=0.$$

Aby równanie to wyrażało koło, współczynniki znajdujące się przy x^2 i y^2 muszą być równe, a współczynnik znajdujący się przy xy być musi równy zeru. Z tego wynikają więc następujące dwa równania warunkowe:

$$(6)\ldots\left\{\begin{array}{l} a_{12}dost(\alpha_1+\alpha_2)+a_{13}dost(\alpha_1+\alpha_3)+a_{23}dost(\alpha_2+\alpha_3)=0 \\ a_{12}wst(\alpha_1+\alpha_2)+a_{13}wst(\alpha_1+\alpha_3)+a_{23}wst(a_2+a_3)=0 \end{array}\right\}$$

Z tych równań wynika za pomocą (1, 4, § 53):

$$(7)\ldots\ a_{12}:a_{13}:a_{23}=$$

$$=\begin{vmatrix} dost(\alpha_1+\alpha_3), & dost(\alpha_2+\alpha_3) \\ wst(\alpha_1+\alpha_3), & wst(\alpha_2+\alpha_3) \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} dost(\alpha_1+\alpha_2), & dost(\alpha_2+\alpha_3) \\ wst(\alpha_1+\alpha_2), & wst(\alpha_2+\alpha_3) \end{vmatrix} :$$

$$:\begin{vmatrix} dost(\alpha_1+\alpha_2), & dost(\alpha_1+\alpha_3) \\ wst(\alpha_1+\alpha_2), & wst(\alpha_1+\alpha_3) \end{vmatrix}=$$

$$=wst(\alpha_2-\alpha_1):wst(\alpha_1-\alpha_3):wst(\alpha_3-\alpha_2)$$

albo nareście

$$(8)\ldots a_{12}:a_{13}:a_{23}=wstA_3:wstA_2:wstA_1$$

gdzie A_1, A_2, A_3 oznaczają kąty tworzone przez boki trójkąta.

Równanie (2) zamienia się w skutek proporcyi (8) na następujące:

$$wst A_3 \,.\, x_1 x_2 + wst A_2 x_1 x_3 + wst A_1 x_2 x_3 = 0$$

które jest równaniem pożądaném.

ROZDZIAŁ V.

O minorach wyznacznika. Znaki minorów. Minory dopełniawcze. Przykład

§ 55.

Objaśnienie. Skoro we wyznaczniku W_n jeden rząd poziomy i jeden pionowy wypuszczamy, to otrzymujemy wyznacznik $(n-1)^{go}$ stopnia, o którym już mówiliśmy w § 43. Skoro w W_n opuszczamy dwa, trzy, cztery etc. rzędy poziome i pionowe, to pozostają wyznaczniki $(n-2)^{go}$, $(n-3)^{go}$, $(n-4)^{go}$ etc. stopnia, które nazwać możemy drugo-, trzecio-, czwarto- etc. niższemi wyznacznikami, albo drugo-, trzecio-, czwarto- etc. częściowemi wyznacznikami, albo nareście drugiemi, trzeciemi, czwartemi minorami.

Znakowanie pierwszych, drugich, trzecich etc. minorów jest następujące:

$$A_{pq}\,;\ (A_{pq})_{rs}\,;\ ((A_{pq})_{rs})_{uv}\,,$$

gdzie pierwsze wskaźniki oznaczają opuszczone rzędy poziome, drugie zaś opuszczone rzędy pionowe.

§ 56.

Uwaga. Jeżeli elementa są pomiędzy sobą niezależne, można z wyznacznika minory odebrać za pomocą różniczkowania. Znakować zatem możemy minory w następujący sposób:

$$\frac{dW_n}{da_{pq}},\quad \frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{rs}},\quad \frac{d^3W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{uv}},\quad \frac{d^4W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{uv}da_{ij}}$$

§ 57.

Wniosek. Ponieważ pierwszy minor A_{pq} nie tylko a_{pq}, lecz i żadnego z elementów p^{tego} rzędu poziomego i q^{tego} rzędu pionowego w sobie nie zawiera, zatém być musi:

$$(1)\ldots \frac{d^2W_n}{da^2_{pq}}=0,\ \frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{rq}}=0,\ \frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{ps}}=0,$$

$$\frac{d^3W_n}{da^3_{pq}}=0,\ \frac{d^3W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{uq}}=0,\ \frac{d^3W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{pv}}=0$$

$$\frac{d^3W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{us}}=0,\ \frac{d^3W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{rv}}=0$$

W ten sam sposób możemy więc oznaczyć minory i ich wartości w sposób następujący:

$$(2)\ (A_{pq})_{pq}=0,\ (A_{pq})_{rq}=0,\ (A_{pq})_{ps}=0,\ ((A_{pq})_{pq})_{pq}=0,$$

$$((A_{pq})_{rs})_{uq}=0,\ ((A_{pq})_{rs})_{pv}=0,\ ((A_{pq})_{rs})_{us}=0,\ ((A_{pq})_{rs})_{rv}=0.$$

§ 58.

Uwaga. Wskazniki minora z wskaźnikami elementów, znajdujących się w rzędzie przekątnym minora, tworzą prawo znaku tegoż minora i to podług § 9.

Przykład.

$$\frac{d^2W_5}{da_{35}da_{42}}=(A_{35})_{42}=-\begin{vmatrix} a_{11}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{51}a_{53}a_{54} \end{vmatrix}$$

Ten minor drugi wyznacznika piątego stopnia być musi odjemnym:

$$- a_{35} a_{42} a_{11} a_{23} a_{54},$$

ponieważ liczba zepsuć porządku w tym wyrazie jest nieparzystą, i to

32, 31, 42, 41, 54, 53, 52, 51, 21.

§ 59.

Uwaga. Na mocy (§§ 11, 12, 58) wynikają następujące równania:

$$(1)\quad (A_{pq})_{rs} = \begin{cases} -(A_{ps})_{rq} \\ -(A_{rq})_{ps} \\ +(A_{rs})_{pq} \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{d^2 W_n}{da_{pq}\, da_{rs}} = \begin{cases} -\dfrac{d^2 W_n}{da_{ps} da_{rq}} \\ -\dfrac{d^2 W_n}{da_{rq} da_{ps}} \\ +\dfrac{d^2 W_n}{da_{rs} da_{pq}} \end{cases}$$

$$(3)\quad ((A_{pq})_{rs})_{uv} = \begin{cases} -((A_{pq})_{rv})_{us} \\ -((A_{pq})_{us})_{rv} \\ -((A_{pv})_{rs})_{uq} \\ -((A_{uq})_{rs})_{pv} \\ -((A_{ps})_{rq})_{uv} \\ -((A_{rq})_{ps})_{uv} \\ +((A_{pq})_{uv})_{rs} \\ +((A_{rs})_{pq})_{uv} \\ +((A_{uv})_{rs})_{pq} \end{cases}$$

$$(4)\qquad \frac{d^3 W_n}{da_{pq}\, da_{rs}\, da_{ur}} = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{d^3 W_n}{da_{pq}\, da_{rr}\, da_{us}} \\ -\dfrac{d^3 W_n}{da_{pq}\, da_{us}\, da_{rr}} \\ -\dfrac{d^3 W_n}{da_{pr}\, da_{rs}\, da_{uq}} \\ -\dfrac{d^3 W_n}{da_{uq}\, da_{rs}\, da_{pr}} \\ -\dfrac{d^3 W_n}{da_{ps}\, da_{rq}\, da_{ur}} \\ -\dfrac{d^3 W_n}{da_{rq}\, da_{ps}\, da_{ur}} \\ +\dfrac{d^3 W_n}{da_{pq}\, da_{ur}\, da_{rs}} \\ +\dfrac{d^3 W_n}{da_{rs}\, da_{pq}\, da_{ur}} \\ +\dfrac{d^3 W_n}{da_{us}\, da_{rs}\, da_{pq}} \end{array}\right.$$

§ 60.

Twierdzenie. Pierwsze minory wyznacznika można wyrazić jako funkcye drugich minorów.

Przykład.

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l} A_{p1} = a_{r1}(A_{p1})_{r1} + a_{r2}(A_{p1})_{r2} + a_{r3}(A_{p1})_{r3} + \ldots + a_{rn}(A_{p1})_{rn} \\ A_{p2} = a_{r1}(A_{p2})_{r1} + a_{r2}(A_{p2})_{r2} + a_{r3}(A_{p2})_{r3} + \ldots + a_{rn}(A_{p2})_{rn} \\ A_{p3} = a_{r1}(A_{p3})_{r1} + a_{r2}(A_{p3})_{r2} + a_{r3}(A_{p3})_{r3} + \ldots + a_{rn}(A_{p3})_{rn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{pn} = a_{r1}(A_{pn})_{r1} + a_{r2}(A_{pn})_{r2} + a_{r3}(A_{pn})_{r3} + \ldots + a_{rn}(A_{pn})_{rn} \end{array}\right.$$

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} A_{1q} = a_{1s}(A_{1q})_{1s} + a_{2s}(A_{1q})_{2s} + a_{3s}(A_{1q})_{3s} + \ldots + a_{ns}(A_{1q})_{ns} \\ A_{2q} = a_{1s}(A_{2q})_{1s} + a_{2s}(A_{2q})_{2s} + a_{3s}(A_{2q})_{3s} + \ldots + a_{ns}(A_{2q})_{ns} \\ A_{3q} = a_{1s}(A_{3q})_{1s} + a_{2s}(A_{3q})_{2s} + a_{3s}(A_{3q})_{3s} + \ldots + a_{ns}(A_{3q})_{ns} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{nq} = a_{1s}(A_{nq})_{1s} + a_{2s}(A_{nq})_{2s} + a_{3s}(A_{nq})_{3s} + \ldots + a_{ns}(A_{nq})_{ns} \end{array}\right.$$

albo:

$$
(3)\ldots\begin{cases}
\dfrac{dW_n}{da_{p1}} = a_{r1}\dfrac{d^2W_n}{da_{p1}da_{r1}} + a_{r2}\dfrac{d^2W_n}{da_{p1}da_{r2}} + \ldots + a_{rn}\dfrac{d^2W_n}{da_{p1}da_{rn}} \\
\dfrac{dW_n}{da_{p2}} = a_{r1}\dfrac{d^2W_n}{da_{p2}da_{r1}} + a_{r1}\dfrac{d^2W_n}{da_{p2}da_{r2}} + \ldots + a_{rn}\dfrac{d^2W_n}{da_{p2}da_{rn}} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\dfrac{dW_n}{da_{pn}} = a_{r1}\dfrac{d^2W_n}{da_{pn}da_{r1}} + a_{r2}\dfrac{d^2W_n}{da_{pn}da_{r2}} + \ldots + a_{rn}\dfrac{d_2W_n}{da_{pn}da_{rn}}
\end{cases}
$$

$$
(4)\ldots\begin{cases}
\dfrac{dW_n}{da_{1q}} = a_{1s}\dfrac{d^2W_n}{da_{1q}da_{1s}} + a_{2s}\dfrac{d^2W_n}{da_{1q}da_{2s}} + \ldots + a_{ns}\dfrac{d^2W_n}{da_{1q}da_{ns}} \\
\dfrac{dW_n}{da_{2q}} = a_{1s}\dfrac{d^2W_n}{da_{2q}da_{1s}} + a_{2s}\dfrac{d^2W_n}{da_{2q}da_{2s}} + \ldots + a_{ns}\dfrac{d^2W_n}{da_{2q}da_{ns}} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\dfrac{dW_u}{da_{nq}} = a_{1s}\dfrac{d^2W_n}{da_{nq}da_{1s}} + a_{2s}\dfrac{d^2W_n}{da_{nq}da_{2s}} + \ldots + a_{ns}\dfrac{d^2W_n}{da_{nq}da_{ns}}
\end{cases}
$$

§ 61.

Rozwinięcie wyznacznika w sumę iloczynów, które są minorami wyznacznika.

$$(1)\ldots\quad W_n = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

Na mocy (§§ 57, 60) być musi:

$$
\begin{aligned}
(2)\quad W_n = {} & a_{p1}\left[a_{r2}(A_{p1})_{r2} + a_{r3}(A_{p1})_{r3} + \ldots\ldots + a_{rn}(A_{p1})_{rn}\right] + \\
& + a_{p2}\left[a_{r1}(A_{p2})_{r1} + a_{r3}(A_{p2})_{r3} + a_{r4}(A_{p2})_{r4} + \ldots + \right. \\
& \qquad \left. + a_{rn}(A_{p2})_{rn}\right] + \\
& + a_{p3}\left[a_{r1}(A_{p3})_{r1} + a_{r2}(A_{p3})_{r2} + a_{r4}(A_{p3})_{r4} + \ldots + \right. \\
& \qquad \left. + a_{rn}(A_{p3})_{rn}\right] + \\
& + a_{p4}\left[a_{r1}(A_{p4})_{r1} + a_{r2}(A_{p4})_{r2} + a_{r3}(A_{p4})_{r3} + \right. \\
& \qquad \left. + a_{r5}(A_{p4})_{r5} + \ldots + a_{rn}(A_{p4})_{rn}\right] + \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& + a_{pn}\left[a_{r1}(A_{pn})_{r1} + a_{r2}(A_{pn})_{r2} + a_{r3}(A_{pn})_{r3} + \ldots + \right. \\
& \qquad \left. + a_{r,n-1}(A_{pn})_{r,n-1}\right].
\end{aligned}
$$

W skutek (§ 58) pisać możemy to równanie w sposób następujący:

$$(3)\quad W_n = (a_{p1}a_{r2} - a_{p2}a_{r1})(A_{p1})_{r2} + (a_{p1}a_{r3} - a_{p3}a_{r1})(A_{r3} +$$
$$+ (a_{p1}a_{r4} - a_{p4}a_{r1})(A_{p1})_{r4} + \dots + (a_{p1}a_{rn} -$$
$$- a_{pn}a_{r1}(A_{p1})_{rn} +$$
$$+ (a_{p2}a_{r3} - a_{p3}a_{r2})(A_{p2})_{r3} + (a_{p2}a_{r4} - a_{p4}a_{r2})(A_{p2})_{r4} +$$
$$+ (a_{p2}a_{r5} - a_{p5}a_{r2}(A_{p2})_{r5} + \dots + (a_{p2}a_{rn} -$$
$$- a_{pn}a_{r2})(A_{p2})_{rn} +$$
$$+ (a_{p3}a_{r4} \quad a_{p4}a_{r3})(A_{p3})_{r4} + (a_{p3}a_{r5} - a_{p5}a_{r3})(A_{p3})_{r5} +$$
$$+ (a_{p3}a_{r6} - a_{p6}a_{r3})(A_{p3})_{r6} + \dots + (a_{p3}a_{rn} -$$
$$- a_{pn}a_{r3})(A_{p3})_{rn} +$$

. . . .

$$+ (a_{p,n-2}a_{r,n-1} - a_{p,n-1}a_{r,n-2})(A_{p,n-2})_{r,n-1} +$$
$$+ (a_{p,n-2}a_{rn} - a_{pn}a_{r,n-2})(A_{p,n-2})_{rn} +$$
$$+ (a_{p,n-1}a_{rn} - a_{pn}a_{r,n-1})(A_{p,n-1})_{rn}$$

To równanie nareszcie pisać możemy:

$$(4)\quad W_n = \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} \\ a_{r1} & a_{r2} \end{vmatrix} (A_{p1})_{r2} + \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p3} \\ a_{r1} & a_{r3} \end{vmatrix} (A_{p1})_{r3} + \dots +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{pn} \\ a_{r1} & a_{rn} \end{vmatrix} (A_{p1})_{rn} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p2} & a_{p3} \\ a_{r2} & a_{r3} \end{vmatrix} (A_{p2})_{r3} + \begin{vmatrix} a_{p2} & a_{p4} \\ a_{r2} & a_{r4} \end{vmatrix} (A_{p2})_{r4} + \dots +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p2} & a_{pn} \\ a_{r2} & a_{rn} \end{vmatrix} (A_{p2})_{rn} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p3} & a_{p4} \\ a_{r3} & a_{r4} \end{vmatrix} (A_{p3})_{r4} + \begin{vmatrix} a_{p3} & a_{p5} \\ a_{r3} & a_{r5} \end{vmatrix} (A_{p3})_{r5} + \dots +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p3} & a_{pn} \\ a_{r3} & a_{rn} \end{vmatrix} (A_{p3})_{rn} +$$

. . . .

$$+ \begin{vmatrix} a_{p,n-2}, & a_{p,n-1} \\ a_{r,n-2}, & a_{r,n-1} \end{vmatrix} (A_{p,n-2})_{r,n-1} + \begin{vmatrix} a_{p,n-2}, & a_{pn} \\ a_{r,n-2}, & a_{rn} \end{vmatrix} (A_{p,n-2})_{r,n} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{p,n-1}, & a_{pn} \\ a_{r,n-1}, & a_{rn} \end{vmatrix} (A_{p,n-1})_{rn}$$

Temu równaniu można dać następujące krótkie wyrażenia:

$$(5)\quad W_n = \Sigma \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix} (A_{pq})_{rs}$$

$$(6)\quad W_n = \Sigma \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix} \frac{d^2 W_n}{da_{pq} da_{rs}}$$

gdzie p, r dwie różne z następujących liczb $1, 2, 3, 4, \dots n$ brać mogą, na miejsca q, s zaś kładą się liczby wszystkich kombinacyi z n liczb kombinowanych po dwie liczby.

Przykład.

$$W_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} (A_{31})_{42} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} (A_{31})_{43} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} (A_{31})_{44}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} (A_{32})_{43} + \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} (A_{32})_{44} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} (A_{33})_{44}$$

Tu włożyliśmy na miejsca p, r liczby $3, 4$, na miejsca zaś q, s wszystkte kombinacye następujące: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Włożywszy na prawej stronie równania zamiast czynników drugich ich wartości, otrzymamy:

$$W_n = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Do równań (5) i (6) należą także następujące:

$$(7)\quad W_n = \Sigma \begin{vmatrix} a_{pq}a_{ps}a_{pv} \\ a_{rq}a_{rs}a_{rv} \\ a_{uq}a_{us}a_{uv} \end{vmatrix} .((A_{pq})_{rs})_{uv}$$

$$(8)\quad W_n = \Sigma \begin{vmatrix} a_{pq}a_{ps}a_{pv} \\ a_{rq}a_{rs}a_{rv} \\ a_{uq}a_{us}a_{uv} \end{vmatrix} \frac{d^3 W_n}{da_{pq}da_{rs}da_{uv}}$$

Rozwijając wyznacznik z tych wyrażeń, kładziemy na miejsca p, r, u trzy różne liczby z następujących: 1, 2, 3, 4, ... n, na miejsca zaś q, s, v kładą się odpowiednie liczby wszystkich kombinacyi trzeciej klasy z liczb 1, 2, 3, 4, ... n.

§ 62.

Uwaga. Każde dwa czynniki, tworzące iloczyny w rozwinięciu wyznacznika w (§ 61), nazywamy minorami dopełniawczemi; znak tych iloczynów zależy od wyrazu składającego się z elementów, które się znajdują w rzędach przekątnych minorów dopełniawczych.

§ 63.

Uwaga. Niektóre formuły, z których później korzystać będziemy, możemy tu przytoczyć.

Skoro w równaniu

$$(1)\quad A_{pq} = a_{r1}(A_{pq})_{r1} + a_{r2}(A_{pq})_{r2} + a_{r3}(A_{pq})_{r2} + \ldots + a_{rn}(A_{pq})_{rn}$$

po prawéj stronie w drugich czynnikach przestawimy drugie wskaźniki, otrzymamy na mocy (§ 59) następujące równanie.

$$(2)\quad -A_{pq} = a_{r1}(A_{p1})_{rq} + a_{r2}(A_{p2})_{rq} + a_{r3}(A_{p3})_{rq} + \ldots + a_{rn}(A_{pn})_{rq}.$$

Tak samo mamy:

$$(3)\quad -A_{pq} = a_{1s}(A_{1q})_{ps} + a_{2s}(A_{2q})_{ps} + a_{3s}(A_{3q})_{ps} + \ldots + a_{ns}(A_{nq})_{ps}$$

Podobnie jak w (§ 44), mamy równania następujące:

(4) $a_{s1}(A_{pq})_{r1} + a_{s2}(A_{pq})_{r2} + a_{s3}(A_{pq})_{r3} + \dots + a_{sn}(A_{pq})_{rn} = o.$

(5) $a_{1r}(A_{pq})_{1s} + a_{2r}(A_{pq})_{2s} + a_{3r}(A_{pq})_{3s} + \dots + a_{nr}(A_{pq})_{ns} = o.$

Za pomocą różniczkowania biorą te równania kształt następujący:

$$(6)\quad -\frac{dW_n}{da_{pq}} = a_{r1}\frac{d^2W_n}{da_{p1}da_{rq}} + a_{r2}\frac{d^2W_n}{da_{p2}da_{rq}} + a_{r3}\frac{d^2W_n}{da_{p3}da_{rq}} + \\ + \dots + a_{rn}\frac{d^2W_n}{da_{pn}da_{rq}}$$

$$(7)\quad -\frac{dW_n}{da_{pq}} = a_{1s}\frac{d^2W_n}{da_{1q}da_{ps}} + a_{2s}\frac{d^2W_n}{da_{2q}da_{ps}} + a_{3s}\frac{d^2W_n}{da_{3q}da_{ps}} + \\ + \dots + a_{ns}\frac{d^2W_n}{da_{nq}da_{ps}}$$

$$(8)\quad a_{s1}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{r1}} + a_{s2}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{r2}} + a_{s3}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{r3}} + \\ + \dots + a_{sn}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{rn}} = o$$

$$(8)\quad a_{1r}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{1s}} + a_{2r}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{2s}} + a_{3r}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{3s}} + \\ + \dots + a_{nr}\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{ns}} = o$$

§ 64.

Twierdzenie. $A_{pq}A_{rs} - A_{ps}A_{rq} = W_n \,.\, (A_{pq})_{rs}$

Dowód. Jeżeli równania

$$a_{11}A_{1s} + a_{21}A_{2s} + a_{31}A_{3s} + \dots + a_{n1}A_{ns} = o.$$
$$a_{12}A_{1s} + a_{22}A_{2s} + a_{32}A_{3s} + \dots + a_{n2}A_{ns} = o.$$
$$a_{13}A_{1s} + a_{23}A_{2s} + a_{33}A_{3s} + \dots + a_{n3}A_{ns} = o.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + a_{3s}A_{3s} + \dots + a_{ns}A_{ns} = W_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{1n}A_{1s}+a_{2n}A_{2s}+a_{3n}A_{3s}+\ldots+a_{nn}A_{ns}=o$$

jedno po drugiem pomnożymy odpowiednie z

$$(A_{pq})_{r1},\ (A_{pq})_{r2},\ (A_{pq})_{r3},\ldots(A_{pq})_{rn}$$

i rezultata do siebie dodamy, otrzymamy równanie następujące:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & A_{1s}[a_{11}(A_{pq})_{r1}+a_{12}(A_{pq})_{r2}+a_{13}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{1n}(A_{pq})_{rn}]+\\
&+A_{2s}[a_{21}(A_{pq})_{r1}+a_{22}(A_{pq})_{r2}+a_{23}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{2n}(A_{pq})_{rn}]+\\
&+A_{3s}[a_{31}(A_{pq})_{r1}+a_{32}(A_{pq})_{r2}+a_{33}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{3n}(A_{pq})_{rn}]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+A_{rs}[a_{r1}(A_{pq})_{r1}+a_{r2}(A_{pq})_{r2}+a_{r3}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{rn}(A_{pq})_{rn}]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+A_{ps}[a_{p1}(A_{pq})_{r1}+a_{p2}(A_{pq})_{r2}+a_{p3}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{pn}(A_{pq})_{rn}]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+A_{ns}[a_{n1}(A_{pq})_{r1}+a_{n2}(A_{pq})_{r2}+a_{n3}(A_{pq})_{r3}+\ldots+a_{nn}(A_{pq})_{rn}]=\\
&=W_n\,(A_{pq})_{rs}
\end{aligned}$$

W skutek (§ 63, 4), (§ 59, 1), (§ 60, 1), wynika z tego równania następujące:

$$\begin{aligned}
(2)\quad & A_{rs}\,.\,A_{pq}+A_{ps}[-a_{p1}(A_{p1})_{rq}-a_{p2}(A_{p2})_{rq}-a_{p3}(A_{p3})_{rq}-\\
&-\ldots-a_{pn}(A_{pn})_{rq}]=W_n\,(A_{pq})_{rs}
\end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned}
(3)\quad & A_{rs}\,.\,A_{pq}-A_{ps}[a_{p1}(A_{rq})_{p1}+a_{p2}(A_{rq})_{p2}+a_{p3}(A_{rq})_{p3}+\\
&+\ldots+a_{pn}(A_{rq})_{pn}]=W_n\,(A_{pq})_{rs}
\end{aligned}$$

albo nareszcie:

$$(4)\quad A_{pq}\,.\,A_{rs}-A_{ps}\,.\,A_{rq}=W_n\,.\,(A_{pq})_{rs}$$

Za pomocą różniczkowania bierze to równanie kształt następujący:

$$(5)\quad \frac{dW_n}{da_{pq}}\cdot\frac{dW_n}{da_{rs}}-\frac{dW_n}{da_{ps}}\cdot\frac{dW_n}{da_{rq}}=W_n\,.\,\frac{d^2W_n}{da_{pq}da_{rs}}$$

§ 65.

Przykład. Równanie cięcia ostrokręgowego z współrzędnemi trzylinijnemi niech będzie

$$(1)\ldots f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Jeżeli prosta, mająca równanie

$$(2)\ldots a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ma być styczną tego cięcia ostrokręgowego, warunki następujące muszą być wypełnione:

$$\frac{df}{dx_1} - a_1 = 0$$

$$\frac{df}{dx_2} - a_2 = 0$$

$$\frac{df}{dx_3} - a_3 = 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

albo:

$$(3)\ldots\begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 - \dfrac{a_1}{2} = 0 \\ a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 - \dfrac{a_2}{2} = 0 \\ a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 - \dfrac{a_3}{2} = 0 \\ a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

gdzie x'_1, x'_2, x'_3 są współrzędnemi, wspólnemi stycznéj i cięcia ostrokręgowego.

Skoro prosta (2) jest styczną do cięcia ostrokręgowego, być musi:

$$(4)\ldots\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli jeszcze inna linija prosta

$$(5) \ldots \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

ma być styczną tego samego cięcia ostrokręgowego, tak samo być musi:

$$(6) \ldots \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \alpha_1 \\ a_{12} a_{22} a_{23} \alpha_2 \\ a_{13} a_{23} a_{33} \alpha_3 \\ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dla obrachowania współrzędnych dwóch punktów, w których styczne się stykają z cięciem ostrokręgowém, użyjemy następujących wyznaczników:

$$(7) \ldots \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_1 \alpha_1 \\ a_{12} a_{22} a_{23} a_2 \alpha_2 \\ a_{13} a_{23} a_{33} a_3 \alpha_3 \\ a_1 \ a_2 \ a_3 \ 0 \ 0 \\ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0 \ 0 \end{vmatrix} = \triangle$$

$$(8) \ldots \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_1 \\ a_{12} a_{22} a_{23} a_2 \\ a_{13} a_{23} a_{33} a_3 \\ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0 \end{vmatrix} = D.$$

W skutek równań (4) i (6) wynika z wyznacznika (7) za pomocą różniczkowania:

$$(9) \ldots \begin{cases} a_{11}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_1} + a_{12}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_2} + a_{13}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_3} + a_1 D = 0 \\ a_{12}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_1} + a_{22}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_2} + a_{23}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_3} + a_2 D = 0 \\ a_{13}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_1} + a_{23}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_2} + a_{33}\dfrac{d\triangle}{d\alpha_3} + a_3 D = 0 \\ a_1 \dfrac{d\triangle}{d\alpha_1} + a_2 \dfrac{d\triangle}{d\alpha_2} + a_3 \dfrac{d\triangle}{d\alpha_3} = 0 \end{cases}$$

Z (3) i (9) wynika dla współrzędnych dotknięcia się pierwszéj stycznéj następująca proporcya:

$$(10) \ldots x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{d\triangle}{d\alpha_1} : \frac{d\triangle}{d\alpha_2} : \frac{d\triangle}{d\alpha_3}$$

W podobny sposób mamy dla współrzędnych dotknięcia się drugiéj stycznéj:

$$(11) \ldots x''_1 : x''_2 : x''_3 = \frac{d\triangle}{da_1} : \frac{d\triangle}{da_2} : \frac{d\triangle}{da_3}$$

Równanie cięciwy, przechodzącéj przez punkta, w których styczne dotykają krzywą, jak wiadomo, jest następujące:

$$(12) \ldots x_1(x'_2 x''_3 - x''_2 x'_3) + x_2(x'_3 x''_1 - x''_3 x'_1) + \\ + x_3(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2) = 0.$$

Włożywszy w to równanie wartości z (10) i (11), otrzymamy:

$$(13) \ldots x_1 \left(\frac{d\triangle}{d\alpha_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_3} - \frac{d\triangle}{da_2} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_3}\right) + x_2 \left(\frac{d\triangle}{d\alpha_3} \cdot \frac{d\triangle}{da_1} - \frac{d\triangle}{da_3} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_1}\right) + \\ + x_3 \left(\frac{d\triangle}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\triangle}{da_2} - \frac{d\triangle}{da_1} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_2}\right) = 0$$

W skutek (§ 64, 2) jest:

$$\frac{d\triangle}{d\alpha_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_3} - \frac{d\triangle}{da_2} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_3} = \triangle \cdot \frac{d^2\triangle}{d\alpha_2 da_3}$$

$$\frac{d\triangle}{d\alpha_3} \cdot \frac{d\triangle}{da_1} - \frac{d\triangle}{da_3} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_1} = \triangle \cdot \frac{d^2\triangle}{d\alpha_3 da_1}$$

$$\frac{d\triangle}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\triangle}{da_2} - \frac{d\triangle}{da_1} \cdot \frac{d\triangle}{d\alpha_2} = \triangle \cdot \frac{d^2\triangle}{d\alpha_1 da_2}$$

Za pomocą tych równań zmienia się równanie (13) w następujące:

$$(14) \quad \frac{d^2\triangle}{d\alpha_2 da_3} x_1 + \frac{d^2\triangle}{d\alpha_3 da_1} x_2 + \frac{d^2\triangle}{d\alpha_1 da_2} x_3 = 0.$$

albo:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & \alpha_1 \\ a_{12} & a_2 & \alpha_2 \\ a_{13} & a_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 & \alpha_1 \\ a_{22} & a_2 & \alpha_2 \\ a_{23} & a_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_1 & \alpha_1 \\ a_{23} & a_2 & \alpha_2 \\ a_{33} & a_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

albo nareszcie:

$$(16)\quad (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)\begin{vmatrix} a_2\alpha_2 \\ a_3\alpha_3 \end{vmatrix} -$$

$$-(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 \\ a_3\alpha_3 \end{vmatrix} +$$

$$+(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 \\ a_2\alpha_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Oznaczywszy przez x_1^0, x_2^0, x_3^0 współrzędne punktu przecięcia się stycznych, mieć będziemy za pomocą (§ 53):

$$(17)\;..\; x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ \alpha_2\alpha_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ \alpha_1\alpha_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2\alpha_2 \\ a_3\alpha_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 \\ a_3\alpha_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 \\ a_2\alpha_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Włożywszy te wartości w (16), otrzymamy:

$$(18)\;..\; (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)x_1^0 + (a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)x_2^0 + $$
$$+ (a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)x_3^0 = 0$$

albo:

$$(19)\;..\; \frac{df}{dx_1}x_1^0 + \frac{df}{dx_2}x_2^0 + \frac{df}{dx_3}x_3^0 = 0$$

To równanie pisać można także:

$$(20)\;..\; \frac{df}{dx_1^0}x_1 + \frac{df}{dx_2^0}x_2 + \frac{df}{dx_3^0}x_3 = 0$$

Ostatnie równanie wyraża prostą biegunową, której biegunem jest punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Wystawmy sobie drugie dwie linije:

$$(21)\;..\; \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \end{cases}$$

przecinające się w punkcie (x'_1, x'_2, x'_3), które są stycznemi cięcia ostrokręgowego. Prosta biegunowa, której biegunem jest punkt (x_1, x_2, x_3) musi mieć równanie następujące:

$$(22)\;..\; \frac{df}{dx'_1}x_1 + \frac{df}{dx'_2}x_2 = \frac{df}{dx'_3}x_3 = 0.$$

Z równania (20) i (22) wynika dla współrzędnych punktu przecięcia się tych dwóch prostych biegunowych (X_1, X_2, X_3) następująca proporcya:

$$(23) \ldots \quad X_1 : X_2 : X_3 = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_2^0} & \frac{df}{dx_3^0} \\ \frac{df}{dx'_2} & \frac{df}{dx'_3} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1^0} & \frac{df}{dx_3^0} \\ \frac{df}{dx'_1} & \frac{df}{dx'_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1^0} & \frac{df}{dx_2^0} \\ \frac{df}{dx'_1} & \frac{df}{dx'_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0, & a_{13}x_1^0 + x_{23}x_2^0 + a_{33}x_3^0 \\ a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, & a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 \end{vmatrix} : -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0, & a_{13}x_1^0 + a_{23}x_2^0 + a_{33}x_3^0 \\ a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, & a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0, & a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 \\ a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, & a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 \end{vmatrix}$$

Przyjąwszy współczynnik dowolny (k), mieć będziemy:

$$(24) \begin{cases} kX_1 = A(x_2^0 x'_3 - x'_2 x_3^0) + E(x'_1 x_3^0 - x_1^0 x'_3) + F(x_1^0 x'_2 - x'_1 x_2^0) \\ kX_2 = E(x_2^0 x'_3 - x'_2 x_3^0) + B(x'_1 x_3^0 - x_1^0 x'_3) + G(x_1^0 x'_2 - x'_1 x_2^0) \\ kX_3 = F(x_2^0 x'_3 - x'_2 x_3^0) + G(x'_1 x_3^0 - x_1^0 x'_3) + C(x_1^0 x'_2 - x'_1 x_2^0) \end{cases}$$

W tych równaniach jest:

$$A = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad B = a_{11}a_{33} - a_{13}^2, \quad C = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$E = a_{23}a_{12} - a_{12}a_{33}, \quad F = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}. \quad G = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}$$

Z (24) wynikają, skoro wprowadzimy oznaczenie

$$R = \begin{vmatrix} A & E & F \\ E & B & G \\ F & G & C \end{vmatrix}$$

następujące trzy równania:

(25)

$$\begin{cases} x^0_2 x'_3 - x'_2 x^0_3 = \dfrac{k}{R}\left\{(BC-G^2)X_1+(FG-EC)X_2+(EG-BF)X_3\right\} \\ x'_1 x^0_3 - x^0_1 x'_3 = \dfrac{k}{R}\left\{(FG-EC)X_1+(AC-F^2)X_2+(EF-AG)X_3\right\} \\ x^0_1 x'_2 - x'_1 x^0_2 = \dfrac{k}{R}\left\{(EG-BF)X_1+(EF-AG)X_2+(AB-E^2)X_3\right\} \end{cases}$$

Przyjąwszy oznaczenie

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{12} a_{22} a_{23} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix}$$

i przekonawszy się, iż jest

$$BC-G^2 = a_{11}P,\quad AC-F^2 = a_{22}P,\quad AB-E^2 = a_{33}P,$$
$$FG-EC = a_{12}P,\quad EG-BF = a_{13}P,\quad EF-AG = a_{23}P$$
$$R = P^2,$$

odbierzemy z (25) daleko prostsze równania kształtu następującego:

$$(26)\quad \begin{cases} x^0_2 x'_3 - x'_2 x^0_3 = \dfrac{k}{R}(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) \\ x'_1 x^0_3 - x^0_1 x'_3 = \dfrac{k}{R}(a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3) \\ x^0_1 x'_2 - x'_1 x^0_2 = \dfrac{k}{R}(a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3) \end{cases}$$

Równanie prostéj, przechodzącéj przez punkta biegunowe $(x^0_1 x^0_2 x^0_3)$, $x'_1 x'_2 x'_3)$, jest:

$$(x^0_2 x'_3 - x'_2 x^0_3)x_1 + (x'_1 x^0_3 - x^0_1 x'_3)x_2 + (x^0_1 x'_2 - x'_1 x^0_2)x_3 = 0.$$

Włożywszy w to równanie wartości z (26), mieć będziemy:

$$(27)\quad (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3)x_1 + (a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3)x_2 + \\ + (a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3) = 0.$$

To równanie oznacza prostą biegunową, któréj biegunem jest punkt $(X_1 X_2 X_3)$.

Ponieważ do każdego punktu na téj prostéj należy biegunowa, przechodząca przez punkt $(X_1 X_2 X_3)$, i odwrotnie do każdéj prostéj, przechodzącéj przez punkt $(X_1 X_2 X_3)$, należy punkt biegunowy, leżący na prostéj, (27), przeto nazywamy tę liniję (27) z jéj punktami i punkt $(X_1 X_2 X_3)$ z prostemi, przez ten punkt przechodzącemi, odwrotno-biegunowemi elementami.

ROZDZIAŁ VI.

Iloczyn wyznaczników. — Przekształcenie wyznaczników. — Podstawienia.

§. 66.

Twierdzenie. Iloczyn dwóch wyznaczników P i Q jest równy trzeciemu wyznacznikowi R, w którym element p^{go} rzędu poziomego i q^{go} rzędu pionowego składa się z sumy, której wyrazy są iloczynami z elementów p^{go} rzędu poziomego pierwszego wyznacznika, a q^{go} rzędu poziomego drugiego wyznacznika.

Dowód będziemy prowadzić na przykładzie specyalnym. Niech będzie:

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} b_{12}\, b_{12}\, b_{12} \\ b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \\ b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13}, & a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{23}, & a_{11} b_{31} + a_{12} b_{32} + a_{13} b_{33} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13}, & a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23}, & a_{21} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{23} b_{33} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12} + a_{33} b_{13}, & a_{31} b_{21} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{23}, & a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} \end{vmatrix}$$

Rozwinąwszy prawą stronę równania ostatniego za pomocą § 46 i 48, otrzymamy:

$$R = b_{11}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12}\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{22}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{32}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}\begin{vmatrix} a_{13}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{23}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{33}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{11}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}, & a_{21}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}, & a_{31}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{11}b_{23}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}, & a_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}, & a_{33}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{32}, & a_{31}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+b_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{12}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{22}, & a_{22}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{32}, & a_{32}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12}b_{23}\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{22}, & a_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}b_{21}\begin{vmatrix} a_{13}, & a_{11}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{23}, & a_{21}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{33}, & a_{31}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{13}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13}, & a_{12}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{23}, & a_{22}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{33}, & a_{32}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{13}b_{23}\begin{vmatrix} a_{13}, & a_{13}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{23}, & a_{23}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{33}, & a_{33}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Ponieważ podług § 41 w sumie ostatniéj pierwszy, piąty i dziewiąty wyraz jest równy 0, przeto otrzymamy:

$$R = b_{11}b_{22}b_{31}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{11} \\ a_{21} a_{22} a_{21} \\ a_{31} a_{32} a_{31} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{12} \\ a_{21} a_{22} a_{22} \\ a_{31} a_{32} a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{11}b_{22}b_{33}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + b_{11}b_{23}b_{31}\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{11} \\ a_{21} a_{23} a_{21} \\ a_{31} a_{33} a_{31} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{11}b_{23}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{12} \\ a_{21} a_{23} a_{22} \\ a_{31} a_{33} a_{32} \end{vmatrix} + b_{11}b_{23}b_{33}\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{13} \\ a_{21} a_{23} a_{23} \\ a_{31} a_{33} a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{12}b_{21}b_{31}\begin{vmatrix} a_{12} a_{11} a_{11} \\ a_{22} a_{21} a_{21} \\ a_{32} a_{31} a_{31} \end{vmatrix} + b_{21}b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} a_{11} a_{12} \\ a_{22} a_{21} a_{22} \\ a_{32} a_{31} a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{12}b_{21}b_{33}\begin{vmatrix} a_{12} a_{11} a_{13} \\ a_{22} a_{21} a_{23} \\ a_{32} a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + b_{12}b_{23}b_{31}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{11} \\ a_{22} a_{23} a_{21} \\ a_{32} a_{33} a_{31} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{12}b_{23}b_{32}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{12} \\ a_{22} a_{23} a_{22} \\ a_{32} a_{33} a_{32} \end{vmatrix} + b_{12}b_{23}b_{33}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{13} \\ a_{22} a_{23} a_{23} \\ a_{32} a_{33} a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\, b_{13}b_{21}b_{31}\begin{vmatrix} a_{13} a_{11} a_{11} \\ a_{23} a_{21} a_{21} \\ a_{33} a_{31} a_{31} \end{vmatrix} + b_{13}b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{13} a_{11} a_{12} \\ a_{23} a_{21} a_{22} \\ a_{33} a_{31} a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}b_{21}b_{33}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{33} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + b_{13}b_{22}b_{31}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}\end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}b_{22}b_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{32}\end{vmatrix} + b_{13}b_{22}b_{33}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

W tém rozwinięciu znów jest pierwszy, drugi, czwarty, szósty, siódmy, ósmy, jedenasty, dwunasty, trzynasty, piętnasty, siedemnasty i ośmnasty wyraz równy zeru, zatém mamy, przestawiwszy w dobry porządek rzędy pionowe, następującą wartość:

$$R = b_{11}b_{22}b_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - b_{11}b_{23}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} -$$

$$- b_{12}b_{21}b_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + b_{12}b_{23}b_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - b_{13}b_{22}b_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

albo:

$$R = [b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -$$

$$- b_{13}b_{22}b_{31}]\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

albo nareszcie:

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} \text{ t. j.}$$

$$R = P.Q.$$

§ 67.

Wniosek I. Iloczyn dwóch wyznaczników P i Q jest równy trzeciemu wyznacznikowi R, w którym element p^{go} rzędu poziomego i q^{go} rzędu pionowego składa się z sumy, któréj wyrazy są iloczynami z elementów p^{go} rzędu poziomego pierwszego wyznacznika P, a q^{go} rzędu pionowego drugiego wyznacznika Q.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{21} b_{31} \\ b_{12} b_{22} b_{32} \\ b_{13} b_{23} b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}, & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}, & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}, & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}, & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

§ 68.

Wniosek 2. Iloczyn dwóch wyznaczników P i Q jest równy trzeciemu wyznacznikowi R, w którym element p^{go} rzędu poziomego i q^{go} rzędu pionowego składa się z sumy, któréj wyrazy są iloczynami z elementów q^{go} rzędu poziomego pierwszego wyznacznika, a p^{go} rzędu poziomego drugiego wyznacznika.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}, & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}, & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} \\ a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

§ 69.

Wniosek 3. Iloczyn dwóch wyznaczników P i Q jest równy trzeciemu wyznacznikowi R, w którym element p^{go} rzędu poziomego i q^{go} rzędu pionowego składa się z sumy, któréj wyrazy są iloczynami z elementów q^{go} rzędu pionowego pierwszego wyznacznika, a p^{go} rzędu poziomego drugiego wyznacznika.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+a_{31}b_{13}, & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{32}b_{13}, & a_{13}b_{11}+a_{23}b_{12}+a_{33}b_{13} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{23}, & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{23}, & a_{13}b_{21}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{23} \\ a_{11}b_{31}+a_{21}b_{32}+a_{31}b_{33}, & a_{12}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{32}b_{33}, & a_{13}b_{31}+a_{23}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

§ 70.

Uwaga. Twierdzenia poprzednich czterech paragrafów możemy ogólnie wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \dots b_{2n} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \dots b_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ b_{n1} b_{n2} b_{n3} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \dots c_{2n} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \dots c_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ c_{n1} c_{n2} c_{n3} \dots c_{nn} \end{vmatrix}$$

gdzie c_{pq} którąkolwiek z następujących sum oznacza:

$$a_{p1}b_{q1} + a_{p2}b_{q2} + a_{p3}b_{q3} + \dots + a_{pn}b_{qn}$$

$$a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + a_{p3}b_{3q} + \dots + a_{pn}b_{nq}$$

$$a_{1p}b_{1q} + a_{2p}b_{2q} + a_{3p}b_{3q} + \dots + a_{np}b_{nq}$$

$$a_{1p}b_{q1} + a_{2p}b_{q2} + a_{3p}b_{q3} + \dots + a_{np}b_{qn}$$

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (4-6)(40-42) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1.5+2.6, & 1.7+2.8 \\ 3.5+4.6, & 3.7+4.8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17, & 23 \\ 39, & 53 \end{vmatrix} = 17.53-39.23=901--897=4$$

§ 71.

Wniosek. Iloczyn ilukolwiekbądź wyznaczników można wyrazić przez jeden wyznacznik, który rzędu danych wyznaczników nie przewyższa, i którego elementa są całkowitemi wymiernemi funkcyami elementów z wyznaczników danych.

Dowód. Jeżeli jeden z danych wyznaczników jest n^{go} rzędu, to wszystkie inne do n^{go} rzędu przyprowadzić możemy; potém tworzymy z iloczynu 1go i 2go wyznacznika podług znanych reguł jeden wyznacznik, z iloczynu tego i 3go danego wyznacznika tworzymy znów jeden i t. d., nareszcie przychodzimy przy ostatniém mnożeniu do ostatniego wyznacznika, który jest równy iloczynowi danych wyznaczników.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 q_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 y_1 & 0 & 0 \\ x_2 y_2 & 0 & 0 \\ 0 \; 0 & 1 & 0 \\ 0 \; 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1, & a_1 x_2 + b_1 y_2, & c_1, & d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1, & a_2 x_2 + b_2 y_2, & c_2, & d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1, & a_3 x_2 + b_3 y_2, & c_3, & d_3 \\ a_4 x_1 + b_4 y_1, & a_4 x_2 + b_4 y_2, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

§ 72.

Przekształcenie szczególnego rodzaju.

Niech będzie dany następujący system równań:

$$(1)\dots\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=u_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=u_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=u_3 \end{cases}$$

Wyznacznik tego systemu jest:

$$(2)\dots\quad P=\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

Zmienne x mają być następującemi funkcyami zmiennych y:

$$(3)\dots\quad \begin{cases} b_{11}y_1+b_{21}y_2+b_{31}y_3=x_1 \\ b_{12}y_1+b_{22}y_2+b_{32}y_3=x_2 \\ b_{13}y_1+b_{23}y_2+b_{33}y_3=x_3 \end{cases}$$

Wyznacznik tego systemu jest:

$$(4)\dots\quad Q=\begin{vmatrix} b_{11}b_{21}b_{31} \\ b_{12}b_{22}q_{32} \\ b_{13}b_{23}b_{33} \end{vmatrix}$$

Chcąc mieć u jako funkcye zmiennych y, kładziemy wartości z (3) w (1) i otrzymamy:

$$(5)\dots\quad \begin{cases} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13})y_1+(a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23})y_2+ \\ \qquad +(a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33})y_3=u_1 \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13})y_1+(a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23})y_2+ \\ \qquad +(a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33})y_3=u_2 \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13})y_1+(a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23})y_2+ \\ \qquad +(a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33})y_3=u_3 \end{cases}$$

Wyznacznik tego systemu oznaczywszy przez R, otrzymamy:

$$(6)\ldots\quad R = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \end{vmatrix}$$

gdzie ilości c następujące mają wartości:

$$(7)\ldots\quad \begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} \\ c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} \\ c_{13} = a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} \\ c_{22} = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} \\ c_{23} = a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} \\ c_{32} = a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} \\ c_{33} = a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{cases}$$

Ze systemu (5) wynika:

$$(8)\ldots\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{u_1 C_{11} + u_2 C_{21} + u_3 C_{31}}{R} = \dfrac{\begin{vmatrix} u_1 c_{12} c_{13} \\ u_2 c_{22} c_{23} \\ u_3 c_{32} c_{33} \end{vmatrix}}{R} \\ y_2 = \dfrac{u_1 C_{12} + u_2 C_{22} + u_3 C_{32}}{R} = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{11} u_1 c_{13} \\ c_{21} u_2 c_{23} \\ c_{31} u_3 c_{33} \end{vmatrix}}{R} \\ y_3 = \dfrac{u_1 C_{13} + u_2 C_{23} + u_3 C_{33}}{R} = \dfrac{\begin{vmatrix} c_{11} c_{12} u_1 \\ c_{21} c_{22} u_2 \\ c_{31} c_{32} u_3 \end{vmatrix}}{R} \end{cases}$$

Z § 66 wynika równanie następujące:

$$(9)\ldots\quad R = P \,.\, Q.$$

Wyznacznik systemu przekształconego R jest więc równy iloczynowi z wyznacznika P systemu pierwotnego i z wyznacznika Q, który się modułem przekształcenia nazywa.

§ 73.

Przekształcenie ogólnego rodzaju.

Jeżeli (n) linijnych funkcyi z (n) zmiennemi

$$(1)\ldots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_u = u_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = u_n \end{cases}$$

za pomocą następujących linijnych podstawień

$$(2)\ldots \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3 + \ldots + b_{n1}y_n = x_1 \\ b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + b_{32}y_3 + \ldots + b_{n2}y_n = x_2 \\ b_{13}y_1 + b_{23}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{n3}y_n = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + b_{3n}y_3 + \ldots + b_{nn}y_n = x_n \end{cases}$$

się przekształcają, wyznacznik funkcyi przekształconéj

$$(3)\ldots\quad R = \begin{vmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \ldots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \ldots c_{2n} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \ldots c_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ c_{n1}c_{n2}c_{n3} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

jest równy iloczynowi z wyznacznika funkcyi pierwotnych

$$(4)\ldots\quad P = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \quad \cdot \\ a_{u1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

i z wyznacznika podstawień

$$(5)\ldots\quad Q = \begin{vmatrix} b_{11} b_{21} b_{31} \ldots b_{n1} \\ b_{12} b_{22} b_{32} \ldots b_{n2} \\ b_{13} b_{23} b_{33} \ldots b_{n3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{1n} b_{2n} b_{3n} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

t. j. $$(6)\ldots\quad R = P \,.\, Q.$$

Elementa wyznacznika R mają następującą wartość:

$$(7)\ldots\quad c_{pq} = a_{p1} b_{q1} + a_{p2} b_{q2} + a_{p3} b_{q3} + \ldots + a_{pn} b_{qn}$$

W skutek przekształcenia zmieniają się równania systemu (1) w następujące:

$$(8)\ldots\quad \begin{cases} c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + c_{13} y_3 + \ldots + c_{1n} y_n = u_1 \\ c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + \ldots + c_{2n} y_n = u_2 \\ c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + \ldots + c_{3n} y_n = u_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \ldots + c_{nn} y_n = u_n \end{cases}$$

Z tego systemu wynika

$$(9)\ldots\quad R y_p = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \ldots c_{1,p-1}\, u_1\, c_{1,p+1} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \ldots c_{2,p-1}\, u_2\, c_{2,p+1} \ldots c_{2n} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \ldots c_{3,p-1}\, u_3\, c_{3,p+1} \ldots c_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1} c_{n2} c_{n3} \ldots c_{n,p-1} u_n c_{n,p+1} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

Nadmienić tu jeszcze możemy, że ilości u mogą także mieć wartości równe 0.

Skoro elementa wyznacznika Q są identycznie równemi z elementami wyznacznika P, wtenczas mamy:

$$(10)\ldots\quad R = P^2$$

Elementa wyznacznika R można odebrać z równania

$$a_{p1}^2 + a_{p2}^2 + a_{p3}^2 + \ldots + a_{pn}^2 = c_{pp},$$

dając wskaźnikowi p wszystkie liczby od 1 aż do n, i z równania

$$a_{p1}a_{q1} + a_{p2}a_{q2} + a_{p3}a_{q3} + \ldots + a_{pn}a_{qn} = c_{pq},$$

kładąc na miejsce pq wszystkie kombinacye drugiéj klasy z liczb 1, 2, 3, . . . n

§ 74.

Podstawienia ortogonalne.

Podstawienie nazywa się ortogonalne, skoro się zadosyć czyni warunkowi następującemu:

$$(1)\ldots\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2$$

Podstawiwszy w to równanie wartości z systemu następującego:

$$(2)\ldots\quad \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3 + \ldots + b_{n1}y_n \\ x_2 = b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + b_{32}y_3 + \ldots + b_{n2}y_n \\ x_3 = b_{13}y_1 + b_{23}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{n3}y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + b_{3n}y_3 + \ldots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}(3)\ldots\quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = {} & (q_{11}y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3 + \ldots + b_{n1}y_n)^2 + \\ & + (b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + b_{32}y_3 + \ldots + b_{n2}y_n)^2 + \\ & + (b_{13}y_1 + b_{23}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{n3}y_n)^2 + \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + (b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + b_{3n}y_3 + \ldots + b_{nn}y_n)^2 \end{aligned}$$

albo:

$$
\begin{aligned}
(4)\ldots\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2 = {} & y_1^2(b_{11}^2+b_{12}^2+b_{13}^2+\ldots+b_{1n}^2)+\\
& +y_2^2(b_{21}^2+b_{22}^2+b_{23}^2+\ldots+b_{2n}^2)+\\
& +y_3^2(b_{31}^2+q_{32}^2+b_{33}^2+\ldots+b_{3n}^2)+\\
& \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
& +y_n^2(b_{n1}^2+b_{n2}^2+b_{n3}^2+\ldots+b_{nn}^2)+\\
& +\Sigma 2y_py_q(b_{p1}b_{q1}+b_{p2}b_{q2}+b_{p3}b_{q3}+\ldots+b_{pn}b_{qn})
\end{aligned}
$$

gdzie na miejsca p q kładą się wszystkie kombinacye drugiéj klasy z liczb 1, 2, 3, . . . n.

Z tego równania widzimy, iż n^2 współczynników ortogonalnego podstawienia

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

następującym warunkom zadosyć czynić muszą:

$$
(5)\ldots\ \left\{
\begin{array}{l}
q_{p1}^2+b_{p2}^2+b_{p3}^2+\ldots+b_{pn}^2=1\\
b_{p1}b_{q1}+b_{p2}b_{q2}+b_{p3}b_{q3}+\ldots+b_{pn}b_{qn}=0
\end{array}
\right.
$$

W pierwszém równaniu jest $p = 1, 2, 3, \ldots n$, w drugiém równaniu kładą się na miejsca p q następujące kombinacye:

(12), (13), (14), . . (1n), (23), (24), (25), . . (2n), . . ($n-1$, n)

Współczynniki równania (4) są więc elementami kwadratu wyznacznika podstawienia ortogonalnego, t. j.

$$
(6)\ldots\ \begin{vmatrix}
b_{11}b_{12}b_{13}\ldots b_{1n}\\
b_{21}b_{22}b_{23}\ldots b_{2n}\\
b_{31}b_{32}b_{33}\ldots b_{3n}\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \cdot\\
b_{n1}b_{n2}b_{n3}\ldots b_{nn}
\end{vmatrix}^2
=
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{vmatrix}
=+1.
$$

Z tego równania wynika:

$$(7)\ldots\quad \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \ldots b_{2n} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \ldots b_{3n} \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ b_{n1} b_{n2} b_{n3} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

§ 75.

Wniosek. Z ostatnich dwóch paragrafów wynika, iż wyznacznik systemu, składającego się z n linijarnych funkcyi z n ilościami zmiennemi, niczém się nie różni lub tylko znakiem się różni od wyznacznika funkcyi przekształconych za pomocą podstawienia ortogonalnego.

§ 76.

Przekształcenie wyznacznika podług Hermita.

Za pomocą mnożenia wyznaczników można wyznaczniki przekształcać i wyznaczników przekształconych użyć w badaniach bardzo ważnych.

Jeżeli wyznacznik

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

pomnożymy z wyznacznikiem

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{21} & 0 & 0 & \ldots\ldots 0 \\ \alpha_2 & -a_{11} & a_{31} & 0 & \ldots\ldots 0 \\ \alpha_3 & 0 & -a_{21} & a_{41} & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_n & 0 & 0 & 0 & \ldots -a_{n-1,\,1} \end{vmatrix}$$

i przyjmiemy, iż nieznajome ilości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ zadosyć czynią następującym n równaniom:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \ldots + \alpha_n a_{n1} &= 1 \\
\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \ldots + \alpha_n a_{n2} &= 0 \\
\alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33} + \ldots + \alpha_n a_{n3} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \alpha_3 a_{3n} + \ldots + \alpha_n a_{nn} &- 0
\end{aligned}
$$

iloczyn równy będzie wyznacznikowi:

$$
J = \begin{vmatrix}
a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}, & a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}, & a_{32}a_{41} - a_{42}a_{31}, & \ldots a_{n-1,2}\,a_{n1} - a_{n2}a_{n-1,1} \\
a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}, & a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}, & a_{33}a_{41} - a_{43}a_{31}, & \ldots a_{n-1,3}\,a_{n1} - a_{n3}a_{n-1,1} \\
a_{14}a_{21} - a_{24}a_{11}, & a_{24}a_{31} - a_{34}a_{21}, & a_{34}a_{41} - a_{44}a_{31}, & \ldots a_{n-1,4}\,a_{n1} - a_{n4}a_{n-1,1} \\
a_{15}a_{21} - a_{25}a_{11}, & a_{25}a_{31} - a_{35}a_{21}, & a_{35}a_{41} - a_{45}a_{31}, & \ldots a_{n-1,5}\,a_{n1} - a_{nn}a_{n-1,1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1n}a_{21} - a_{2n}a_{11}, & a_{2n}a_{31} - a_{3n}a_{21}, & a_{3n}a_{41} - a_{4n}a_{31}, & \ldots a_{n-1,n}\,a_{n1} - a_{nn}a_{n-1,1}
\end{vmatrix}
$$

albo:

$$
J = \begin{vmatrix}
a_{12}\;\; a_{21} - a_{22}a_{11}, & a_{13}\;\; a_{21} - a_{23}a_{11}, & a_{14}\;\; a_{21} - a_{24}a_{11}, & \ldots\; a_{1n}\;\; a_{21} - a_{2n}a_{11} \\
a_{22}\;\; a_{31} - a_{32}a_{21}, & a_{23}\;\; a_{31} - a_{33}a_{21}, & a_{24}\;\; a_{31} - a_{34}a_{21}, & \ldots\; a_{2n}\;\; a_{31} - a_{3n}a_{21} \\
a_{32}\;\; a_{41} - a_{42}a_{31}, & a_{23}\;\; a_{41} - a_{43}a_{31}, & a_{34}\;\; a_{41} - a_{44}a_{31}, & \ldots\; a_{3n}\;\; a_{41} - a_{4n}a_{31} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1,2}a_{n1} - a_{n2}a_{n-1,1}, & a_{n-1,3}a_{n1} - a_{n3}a_{n-1,1}, & a_{n-1,4}a_{n1} - a_{n4}a_{n-1,1}, & \ldots a_{n-1,n}a_{n1} - a_{nn}a_{n-1,1}
\end{vmatrix}
$$

Ponieważ mamy

$$S = (-1)^{n-1} a_{21} a_{31} a_{41} \ldots a_{n-1,1}$$

zatém być musi

$$J = (-1)^{n-1} a_{21} a_{31} a_{41} \ldots a_{n-1,1} \cdot P$$

Jako szczegółowy przypadek takiego przekształcenia jest

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1-x_2}{a}, & \frac{y_1-y_2}{b} \\ \frac{x_2-x_3}{a}, & \frac{y_2-y_3}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a}.1-\frac{x_2}{a}.1, & \frac{y_1}{b}.1-\frac{y_2}{b}.1 \\ \frac{x_2}{a}.1-\frac{x_3}{a}.1, & \frac{y_2}{b}.1-\frac{y_3}{b}.1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}$$

§ 77.

Przekształcenie wyznacznika podług Sylwestera.

Twierdzenie. Wartość wyznacznika

$$(1)\ldots\quad \triangle = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} & 1 \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} & 1 \\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn} & 1 \\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ldots\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

jest równa wartości wyznacznika

$$(2)\ldots\quad H = \begin{vmatrix} A_{11}A_{12}A_{13}\ldots A_{1n} & 1 \\ A_{21}A_{22}A_{23}\ldots A_{2n} & 1 \\ A_{31}A_{32}A_{33}\ldots A_{3n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ A_{n1}A_{n2}A_{n3}\ldots A_{nn} & 1 \\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ldots\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

w którym jest:

$$(3)\dots\quad A_{pq}=a_{pq}+h_p+k_q$$

gdzie $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$; $k_1, k_2, k_3 \dots k_n$ są dwa szeregi całkiem dowolnych ilości.

Mnożąc bowiem wyznacznik $\triangle$ z wyznacznikiem następującym:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

i wykonując mnożenie podług rzędów poziomych, otrzymamy:

$$\pm\triangle=\begin{vmatrix} a_{11}+k_1, & a_{12}+k_2, & a_{13}+k_3, & \dots 1 \\ a_{21}+k_1, & a_{22}+k_2, & a_{23}+k_3, & \dots 1 \\ a_{31}+k_1, & a_{32}+k_2, & a_{33}+k_3, & \dots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+k_1, & a_{n2}+k_2, & a_{n3}+k_3, & \dots 1 \\ 1, & 1, & 1, & \dots 0 \end{vmatrix}$$

Pomnożywszy ten wyznacznik podług rzędów pionowych z następującym:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n & 0 \end{vmatrix} = \pm 1$$

otrzymamy nareszcie:

$$\triangle = H.$$

§ 78.

Niektóre wywodzenia z § 73, 6.

Jeżeli równanie

$$P \,.\, Q = R$$

różniczkujemy podług $a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}, \ldots a_{pn}$, otrzymamy ze względu na § 73, 7 następujące równania:

$$Q \,.\, \frac{dP}{da_{p1}} = \frac{dR}{dc_{p1}} b_{11} + \frac{dR}{dc_{p2}} b_{21} + \frac{dR}{dc_{p3}} b_{31} + \ldots + \frac{dR}{dc_{pn}} b_{n1}$$

$$Q \,.\, \frac{dP}{da_{p2}} = \frac{dR}{dc_{p1}} b_{12} + \frac{dR}{dc_{p2}} b_{22} + \frac{dR}{dc_{p3}} b_{32} + \ldots + \frac{dR}{dc_{pn}} b_{n2}$$

$$Q \,.\, \frac{dP}{da_{p3}} = \frac{dR}{dc_{p1}} b_{13} + \frac{dR}{dc_{p2}} b_{23} + \frac{dR}{dc_{p3}} b_{33} + \ldots + \frac{dR}{dc_{pn}} b_{n3}$$

. . . .

$$Q \,.\, \frac{dP}{da_{pn}} = \frac{dR}{dc_{p1}} b_{1n} + \frac{dR}{dc_{p2}} b_{2n} + \frac{dR}{dc_{p3}} b_{3n} + \ldots + \frac{dR}{dc_{pn}} b_{nn}$$

Pomnożywszy te równania odpowiednie z

$$\frac{dQ}{db_{q1}}, \frac{dQ}{db_{q2}}, \frac{dQ}{db_{n3}}, \ldots \frac{dQ}{db_{qn}}$$

i dodawszy je do siebie, otrzymamy:

$$(1)\ldots \quad \frac{dP}{da_{p1}}\frac{dQ}{db_{q1}} + \frac{dP}{da_{p2}}\frac{dQ}{db_{q2}} + \frac{dP}{da_{p3}}\frac{dQ}{db_{q3}} + \ldots + \frac{dP}{da_{pn}}\frac{dQ}{db_{qn}} = \frac{dR}{dc_{pq}},$$

ponieważ suma algebraiczna

$$b_{p1}\frac{dQ}{db_{q1}} + b_{p2}\frac{dQ}{db_{q2}} + b_{p3}\frac{dQ}{db_{q3}} + \ldots + b_{pn}\frac{dQ}{db_{qn}}$$

jest podług § 45 równa zeru albo równa wyznacznikowi Q, skoro p i q mają różne albo równe wartości.

Skoro elementa wyznacznika Q są identycznie równe z elementami wyznacznika P, wtenczas równanie (1) przybiera kształt następujący:

$$(2)\ldots\ \frac{dP}{da_{p1}}\frac{dP}{da_{q1}}+\frac{dP}{da_{p2}}\frac{dP}{da_{q2}}+\frac{dP}{da_{p3}}\frac{dP}{da_{q3}}+\ldots+\frac{dP}{da_{pn}}\frac{dP}{da_{qn}}=\frac{dR}{dc_{pq}}$$

Przypuściwszy jeszcze $p = q$, otrzymamy:

$$(3)\ldots\ \left(\frac{dP}{da_{p1}}\right)^2+\left(\frac{dP}{da_{p2}}\right)^2+\left(\frac{dP}{da_{p3}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dP}{da_{pn}}\right)^2=\frac{dR}{dc_{pp}}$$

Przykład.

Z wyznacznika

$$I^2=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}^2=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2, & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}, & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+a_{23}a_{13}, & a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2, & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}, & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22}+a_{33}a_{23}, & a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 \end{vmatrix}=R$$

wynika podług równania (3) następujące równanie:

$$\left(\frac{dP}{da_{31}}\right)^2+\left(\frac{dP}{da_{32}}\right)^2+\left(\frac{dP}{da_{33}}\right)^2=\frac{dR}{dc_{33}}$$

albo:

$$\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix}^2=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2, & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+a_{23}a_{13}, & a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 \end{vmatrix}$$

albo nareszcie:

$$(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})^2+(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})^2+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})^2=$$

$$=(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{12}^2)(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2)-(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23})^2$$

§ 79.

Różniczkując z równań systemu w § 78 następujące równanie:

$$(1)\dots\quad Q\frac{dP}{da_{pq}}=\frac{dR}{dc_{p1}}b_{1q}+\frac{dR}{dc_{p2}}b_{2q}+\frac{dR}{dc_{p3}}+\dots+\frac{dR}{dc_{pn}}b_{nq}$$

podług b_{rs}, otrzymamy:

$$\begin{aligned}(2)\dots\quad \frac{dP}{da_{pq}}\frac{dQ}{db_{rs}}=&\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{1r}}a_{1s}b_{1q}+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{2r}}a_{2s}b_{1q}+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{3r}}a_{3s}b_{1q}+\dots+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{nr}}a_{ns}b_{1q}+\\ &+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{1r}}a_{1s}b_{2q}+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{2r}}a_{2s}b_{2q}+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{3r}}a_{3s}b_{2q}+\dots+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{nr}}a_{ns}b_{2q}+\\ &+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{1r}}a_{1s}b_{3q}+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{2r}}a_{2s}b_{3q}+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{3r}}a_{3s}b_{3q}+\dots+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{nr}}a_{ns}b_{3q}+\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\\ &+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{1r}}a_{1s}b_{nq}+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{2r}}a_{2s}b_{nq}+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{3r}}a_{3s}b_{nq}+\dots+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{nr}}a_{ns}b_{nq}.\end{aligned}$$

Różniczkując równanie:

$$(3)\ldots\quad Q\frac{dP}{da_{ps}}=\frac{dR}{da_{p1}}b_{1s}+\frac{dR}{da_{p2}}b_{2s}+\frac{dR}{da_{p3}}b_{3s}+\ldots+\frac{dR}{da_{pn}}b_{ns}$$

podług b_{rq}, otrzymamy w podobny sposób równanie:

$$\begin{aligned}(4)\ldots\quad \frac{dP}{da_{ps}}\frac{dQ}{db_{rq}}=&\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{1r}}a_{1q}b_{1s}+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{2r}}a_{2q}b_{1s}+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{3r}}a_{3q}b_{1s}+\ldots+\frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{nr}}a_{nq}b_{1s}+\\&+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{1r}}a_{1q}b_{2s}+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{2r}}a_{2q}b_{2s}+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{3r}}a_{3q}b_{2s}+\ldots+\frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{nr}}a_{nq}b_{2s}+\\&+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{1r}}a_{1q}b_{3s}+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{2r}}a_{2q}b_{3s}+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{3r}}a_{3q}b_{3s}+\ldots+\frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{nr}}a_{nq}b_{3s}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{1r}}a_{1q}b_{ns}+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{2r}}a_{2q}b_{ns}+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{3r}}a_{3q}b_{ns}+\ldots+\frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{nr}}a_{nq}b_{ns}\end{aligned}$$

Odejmując to równanie od równania (2), otrzymamy:

$$(5)\ldots \quad \frac{dP}{da_{pq}}\frac{dQ}{db_{rs}} - \frac{dR}{da_{ps}}\frac{dQ}{db_{rq}} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1s} b_{1s} \\ a_{1q} b_{1q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{1r}} + \begin{vmatrix} a_{2s} b_{1s} \\ a_{2q} b_{1q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{2r}} + \begin{vmatrix} a_{3s} b_{1s} \\ a_{3q} b_{1q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{3r}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{ns} b_{1s} \\ a_{nq} b_{1q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p1}dc_{nr}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1s} b_{2s} \\ a_{1q} b_{2q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{1r}} + \begin{vmatrix} a_{2s} b_{2s} \\ a_{2q} b_{2q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{2r}} + \begin{vmatrix} a_{3s} b_{2s} \\ a_{3q} b_{2q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{3r}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{ns} b_{2s} \\ a_{nq} b_{2q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p2}dc_{nr}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1s} b_{3s} \\ a_{1q} b_{3q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{1r}} + \begin{vmatrix} a_{2s} b_{3s} \\ a_{2q} b_{3q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{2r}} + \begin{vmatrix} a_{3s} b_{3s} \\ a_{3q} b_{3q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{3r}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{ns} b_{3s} \\ a_{nq} b_{3q} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{p3}dc_{nr}} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1s} b_{ns} \\ a_{1q} b_{nq} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{1r}} + \begin{vmatrix} a_{2s} b_{ns} \\ a_{2q} b_{nq} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{2r}} + \begin{vmatrix} a_{3s} b_{ns} \\ a_{3q} b_{nq} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{3r}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{ns} b_{ns} \\ a_{nq} b_{nq} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{pn}dc_{ur}}$$

albo:

$$(6)\ldots \quad \frac{dP}{da_{pq}}\frac{dQ}{db_{rs}} - \frac{dP}{da_{ps}}\frac{dQ}{db_{rq}} = \Sigma_u\Sigma_v \begin{vmatrix} a_{us} b_{vs} \\ a_{uq} b_{vq} \end{vmatrix} \frac{d^2R}{dc_{pv}dc_{ur}}$$

gdzie u i v wszystkie liczby 1, 2, 3, 4,… n przyjąć muszą.

§ 80.

Jeżeli równania systemu następującego:

$$b_{11}\frac{dP}{da_{r1}}+b_{12}\frac{dP}{da_{r2}}+b_{13}\frac{dP}{da_{r3}}+\ldots+b_{1n}\frac{dP}{da_{rn}}=H_{r1}$$

$$b_{21}\frac{dP}{da_{r1}}+b_{22}\frac{dP}{da_{r2}}+b_{23}\frac{dP}{da_{r3}}+\ldots+b_{2n}\frac{dP}{da_{rn}}=H_{r2}$$

$$b_{31}\frac{dP}{da_{r1}}+b_{32}\frac{dP}{da_{r2}}+b_{33}\frac{dP}{da_{r3}}+\ldots+b_{3n}\frac{dP}{da_{rn}}=H_{r3}$$

. . . .

$$b_{n1}\frac{dP}{da_{r1}}+b_{n2}\frac{dP}{da_{r2}}+b_{n3}\frac{dP}{da_{r3}}+\ldots+b_{nn}\frac{dP}{da_{rn}}=H_{rn}$$

pomnożymy odpowiednie z

$$\frac{dQ}{db_{11}},\ \frac{dQ}{db_{21}},\ \frac{dQ}{db_{31}},\ldots\frac{dQ}{db_{n1}}$$

i dodamy je do siebie, otrzymamy jako rezultat:

$$Q\frac{dP}{da_{r1}}=H_{r1}\frac{dQ}{db_{11}}+H_{r2}\frac{dQ}{dq_{21}}+H_{r3}\frac{dQ}{db_{31}}+\ldots+H_{rn}\frac{dQ}{db_{n1}}$$

W podobny sposób otrzymujemy:

$$Q\frac{dP}{da_{r2}}=H_{r1}\frac{dQ}{db_{12}}+H_{r2}\frac{dQ}{db_{22}}+H_{s3}\frac{dQ}{db_{32}}+\ldots+H_{rn}\frac{dQ}{db_{n2}}$$

. . . .

$$Q\frac{dP}{da_{rn}}=H_{r1}\frac{dQ}{db_{1n}}+H_{r2}\frac{dQ}{db_{2n}}+H_{r3}\frac{dQ}{db_{3n}}+\ldots+H_{rn}\frac{dQ}{db_{nn}}$$

Skoro równania tego systemu odpowiednie przez a_{r1}, a_{r2}, a_{r3}, ... a_{rn} pomnożymy i do siebie dodamy, otrzymamy ze względu na równania następującego systemu:

$$a_{r1}\frac{dQ}{db_{11}} + a_{r2}\frac{dQ}{db_{12}} + a_{r3}\frac{dQ}{db_{13}} + \ldots + a_{rn}\frac{dQ}{db_{1n}} = K_{r1}$$

$$a_{r1}\frac{dQ}{db_{21}} + a_{r2}\frac{dQ}{db_{22}} + a_{r3}\frac{dQ}{bd_{23}} + \ldots + a_{rn}\frac{dQ}{db_{2n}} = K_{r2}$$

$$a_{r1}\frac{dQ}{db_{31}} + a_{r2}\frac{dQ}{db_{32}} + a_{r3}\frac{dQ}{db_{33}} + \ldots + a_{rn}\frac{dQ}{db_{3n}} = K_{r3}$$

. . . .

$$a_{r1}\frac{dQ}{db_{n1}} + a_{r2}\frac{dQ}{db_{n2}} + a_{r3}\frac{dQ}{db_{n3}} + \ldots + a_{rn}\frac{dQ}{db_{nn}} = K_{rn}$$

bardzo pojedyńcze równanie kształtu następującego:

$$(1)\ldots\ PQ = H_{r1}K_{r1} + H_{r2}K_{r2} + H_{r3}K_{r3} + \ldots + H_{rn}K_{rn}$$

Pomnożywszy równania tego samego drugiego systemu przez $a_{s1}, a_{s2}, a_{s3}, \ldots a_{sn}$ i dodawszy je do siebie, otrzymamy ze względu na system trzeci:

$$(2)\ldots\ O = H_{r1}K_{s1} + H_{r2}K_{s2} + H_{r3}K_{s3} + \ldots + H_{rn}K_{sn}$$

Ilości H_{pq}, K_{pq} są, jak się przekonać możemy z pierwszego i trzeciego systemu, wyznacznikami n^{go} stopnia.

§ 81.

Przykład. Szukając osi głównych powierzchni drugiego rzędu w analitycznéj geometryi, przychodzimy do równania trzeciego stopnia, które w kształcie wyznacznika możemy w następujący sposób wyrazić:

$$(1)\ldots\ f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & b-\lambda, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Bardzo ważną tu jest rzeczą dowieść, iż to równanie ma rzetelne pierwiastki. Dowód ten jest przez kilku sławnych matematyków podany, lecz bardzo pojedyńczo i z wielką zręcznością prowadzony przez Sylwestra za pomocą reguł o mnożeniu wyznaczników.

Pomnożywszy równanie (1) z wyznacznikiem $f(\lambda)$, otrzymamy:

$$(2)\ldots\ f(-\lambda).f(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & b-\lambda, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & c-\lambda \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a+\lambda, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & b+\lambda, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & c+\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+\beta^2+\gamma^2-\lambda^2, & \alpha\beta+\gamma(a+b), & \alpha\gamma+\beta(a+c) \\ \alpha\beta+\gamma(a+b), & b^2+\alpha^2+\gamma^2-\lambda^2, & \beta\gamma+\alpha(b+c) \\ \alpha\gamma+\beta(a+c), & \beta\gamma+\alpha(b+c), & c^2+\alpha^2+\beta^2-\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\lambda^2, & F, & E \\ F, & B-\lambda^2, & D \\ E, & D, & C-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

gdzie litery duże A, B etc. dla skrócenia wprowadzamy, co one wyrażają, widzimy z równania.

Rozwinąwszy wyznacznik, mieć będziemy:

$$(3)\ldots\ f(\lambda)f(-\lambda) = -\lambda^6 + (A+B+C)\lambda^4 -$$

$$-(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)\lambda^2 + \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$$

albo:

$$(4)\ldots\ -f(\lambda).f(-\lambda) = \lambda^6 - (a^2+b^2+c^2+2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2)\lambda^4 +$$

$$+[(ab-\gamma^2)^2+(ac-\beta^2)^2+(bc-\alpha^2)^2+2(a\alpha-\beta\gamma)^2+2(b\beta-\alpha\gamma)^2+$$

$$+2(c\gamma-\alpha\beta)^2]\lambda^2 - \begin{vmatrix} a & \gamma & \beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta & \alpha & c \end{vmatrix}$$

Używając krótkich wyrażeń, możemy to równanie pisać:

$$(5)\ldots\ -f(\lambda).f(-\lambda) = \lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N = 0.$$

Ilości L, M, N są, jak widzimy, wszystkie dodatnie.

Podstawiwszy

$$a = a_1 + \varkappa,\quad b = b_1 + \varkappa,\quad c = c_1 + \varkappa,\quad \lambda = \lambda_1 + \varkappa$$

otrzymamy:

$$(6)\ldots\ f_1(-\lambda_1) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda_1, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & b_1-\lambda_1, & \varkappa \\ \beta, & \alpha, & c_1-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

Równanie

$$(7)\ldots\ f_1(-\lambda_1) . f_1(\lambda_1) = 0$$

będzie więc kształtu następującego:

$$(8)\ldots\ \lambda_1^6 - L_1\lambda_1^4 + M_1\lambda_1^2 - N_1 = 0$$

gdzie współczynniki mają wartości dodatnie.

Na mocy reguły o znakach przez Kartezyusza żaden pierwiastek tego równania dla λ_1^2 nie może być odjemnym, t. j. nigdy być nie może:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1^2 \\ (\lambda-\varkappa)^2\end{matrix}\right\} = -\mu^2$$

Zatém i być nie może

$$\lambda = \varkappa + \mu\sqrt{-1}$$

Wszystkie trzy pierwiastki równania

$$f(-\lambda) = 0$$

muszą więc być rzetelne.

ROZDZIAŁ VII.

Wyznaczniki odwrotne. — Minory wyznacznika odwrotnego. Kilka przykładów. — Wyznacznik z pełnemi elementami głównemi, wyrażony za pomocą wyznaczników, których główne elementa są równe zeru. — Rozwinięcie wyznacznika, którego główne elementa są x.

---

§ 82.

Objaśnienie. Jeżeli z wyznacznika

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

inny wyznacznik

$$P^1 = \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \dots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \dots A_{2n} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \dots A_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ A_{n1} A_{n2} A_{n3} \dots A_{nn} \end{vmatrix}$$

w taki sposób tworzymy, iż elementowi a_{pq} w pierwszym wyznaczniku odpowiada element A_{pq} w drugim i elementa w drugim wyznaczniku są pierwszemi minorami wyznacznika W, to wtenczas nazywamy P^1 wyznacznikiem odwrotnym wyznacznika P.

§ 83.

Twierdzenie. Odwrotny wyznacznik n^{go} stopnia P^1 jest równy $(n-1)^{ej}$ potędze pierwotnego wyznacznika P, t. j.

$$(1)\dots\quad P^1 = P^{n-1}$$

Dowód. Jeżeli wyznaczniki P i P^1 ze sobą pomnożymy, otrzymamy trzeci wyznacznik, którego elementa rzędu przekątnego można otrzymać na mocy §§ 42 i 73 z następującego równania:

$$(2)\dots\quad a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \dots + a_{pn}A_{pn} = P$$

dając wskaźnikowi p liczby 1, 2, 3, . . . n.

Wszystkie inne elementa tego trzeciego wyznacznika wydobyć możemy z równania:

$$(3)\dots\quad a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + a_{p3}A_{q3} + a_{pn}A_{qn} = 0 \quad \text{(patrz § 44)}$$

kładąc na miejsca pq następujące kombinacye: 12, 13, 14, ... $1n$, 23, 24, 25, ... $2n$, 34, 35, 36 ... $3n$, ... $(n-1_1n)$ i odwrotne kombinacye: 21, 31, 41, ... $n1$, 32, 42, 52, ... $n2$, etc.

Na mocy tego objaśnienia mieć będziemy:

$$(4)\dots\quad P.P^1 = \begin{vmatrix} W & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W \end{vmatrix} = P^n$$

Zatém

$$(5)\ldots\quad P^1 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P^n}{P} \\ P^{n-1} \end{array} \right.$$

Przykład:

$$(6)\ldots\quad P_3 P_3^1 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, & a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}, & a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} \\ a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}, & a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}, & a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} \\ a_{31} A_{11} + a_{32} A_{12} + a_{33} A_{13}, & a_{31} A_{21} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{23}, & a_{31} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{33} A_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{vmatrix} = P_3^3$$

albo:

$$P_3^1 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P_3^3}{P_3} \\ P_3^2 \end{array} \right.$$

§ 84.

Twierdzenie. Każdy pierwszy minor wyznacznika odwrotnego jest równy $(n-2)$éj potędze wyznacznika pierwotnego, pomnożonéj przez odpowiedny element wyznacznika pierwotnego.

Dowód. Dając w równaniu § 83, 3 wskaźnikowi q liczby 1, 2, 3, ... n, otrzymamy:

$$\begin{array}{l} a_{p1} A_{11} + a_{p2} A_{12} + a_{p3} A_{13} + \ldots + a_{pn} A_{1n} = 0 \\ a_{p1} A_{21} + a_{p2} A_{22} + a_{p3} A_{23} + \ldots + a_{pn} A_{2n} = 0 \\ a_{p1} A_{31} + a_{p2} A_{32} + a_{p3} A_{33} + \ldots + a_{pn} A_{3n} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + a_{p3} A_{p3} + \ldots + a_{pn} A_{pn} = P \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p1} A_{n1} + a_{p2} A_{n2} + a_{p3} A_{n3} + \ldots + a_{pn} A_{nn} = 0 \end{array}$$

Na mocy § 50, 4 otrzymamy z tego systemu następujące równanie:

$$(1)\ldots\quad P^1 a_{pq} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \ldots\ldots A_{1,q-1} & 0 & A_{1,q+1} \ldots\ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \ldots\ldots A_{2,q-1} & 0 & A_{2,q+1} \ldots\ldots A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & A_{p-1,3} \ldots A_{p-1,q-1} & 0 & A_{p-1,q+1} \ldots A_{p-1,n} \\ A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} \ldots\ldots A_{p,q-1} & P & A_{p,q+1} \ldots\ldots A_{pn} \\ A_{p+1,1} & A_{p+1,2} & A_{p+1,3} \ldots A_{p+1,q-1} & 0 & A_{p+1,q+1} \ldots A_{p+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \ldots\ldots A_{n,q-1} & 0 & A_{n,q+1} \ldots\ldots A_{nn} \end{vmatrix}$$

albo

$$(2)\ldots\quad P^1 a_{pq} = P \cdot \frac{dP^1}{dA_{pq}}$$

W skutek § 83, 1 zmienia się to równanie w następujące:

$$P^{n-1} a_{pq} = P \cdot \frac{dP^1}{dA_{pq}} \text{ t. j.}$$

$$(3)\ldots\quad \frac{dP^1}{dA_{pq}} = P^{n-2} a_{pq}$$

§ 85.

Twierdzenie. Iloczyn wyznaczników odwrotnych P^1 i Q^1, należących do pierwotnych wyznaczników P i Q, jest równy wyznacznikowi odwrotnemu R^1, który należy do wyznacznika R, powstałego z iloczynu pierwotnych wyznaczników P i Q.

Dowód.

$$R^1 = \begin{cases} R_{n-1} \\ (P \cdot Q)^{n-1} \\ P^{n-1} \cdot Q^{n-1} \\ P^1 \cdot Q^1 \end{cases}$$

§ 86.

Uwaga. Zastanowiwszy się nad systemem równań następujących:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=0$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=0$$

łatwo się przekonać możemy, wypuszczając p^{te} równanie, iż podług §§ 52 i 53 następującą proporcyą pisać jesteśmy w stanie:

$$(1)\ldots\quad x_1:x_2:x_3:\ldots:x_n=A_{p1}:A_{p2}:A_{p3}:\ldots:A_{pn}$$

gdzie p oznacza liczby: 1, 2, 3, . . . n.

Wyraziwszy wartości tych stosunków za pomocą proporcyi:

$$(2)\ldots\quad x_{p1}:x_{p2}:x_{p3}:\ldots:x_{pn}=A_{p1}:A_{p2}:A_{p3}:\ldots:A_{pn}$$

i przekształciwszy za pomocą téj proporcyi wyznacznik

$$(3)\ldots\quad \triangle=\begin{vmatrix} x_{11}x_{12}\ldots x_{1n}\\ x_{21}x_{22}\ldots x_{2n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_{n1}x_{n2}\ldots x_{nn}\end{vmatrix}$$

otrzymamy:

$$(4)\ldots\quad \triangle=\pm\lambda P^{n-1}$$

gdzie λ jest ilością nieoznaczoną. Skoro jest $x_{pq}=1$, wtenczas mamy

$$(5)\ldots\quad \frac{1}{\lambda}=a_{1q}a_{2q}a_{3q}\ldots a_{nq}$$

W skutek takich operacyi rachunkowych łatwo można wyrazić powierzchnią trójkąta, skoro równania boków jego są dane, albo też objętość czworościanu, skoro równania czterech jego ścian są dane.

§ 86.

Twierdzenie. Każdy minor p^{go} stopnia, składający się z elementów A_{11}, A_{12}, A_{13} etc. wyznacznika odwrotnego P^1, jest równy iloczynowi z odpowiednio dopełniawczego minora wyznacznika pierwotnego P i z $(p-1)^{ej}$ potęgi wyznacznika pierwotnego P.

Dowód.

Jak wiadomo mamy:

$$A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}+\ldots+A_{n1}a_{n1}=P.$$

$$A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31}+\ldots+A_{n2}a_{n1}=0.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez A_{22}, drugie zaś przez A_{21} i odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy:

$$(1)\ldots \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{11} + \begin{vmatrix} A_{31} A_{32} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{31} + \begin{vmatrix} A_{41} A_{42} \\ A_{31} A_{22} \end{vmatrix} a_{41} + \ldots + \begin{vmatrix} A_{n1} A_{n2} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{n1} = PA_{22}$$

Podług § 60 mamy:

$$(2)\ldots \quad A_{22}=(A_{22})_{11}a_{11}+(A_{22})_{31}a_{31}+(A_{22})_{41}a_{41}+\ldots+(A_{22})_{n1}a_{n1}$$

Z równania (1) i (2) wynika:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{11} + \begin{vmatrix} A_{31} A_{32} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{31} + \begin{vmatrix} A_{41} A_{42} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{41} + \ldots + \begin{vmatrix} A_{n1} A_{n2} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} a_{n1} =$$

$$= P(A_{22})_{11}a_{11}+P(A_{22})_{31}a_{31}+P(A_{22})_{41}a_{41}+P(A_{22})_{51}a_{51}+\ldots+$$
$$+P(A_{22})_{n1}a_{n1}$$

Z tego równania otrzymamy za pomocą § 59:

$$(3)\ldots \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{vmatrix} = P.(A_{11})_{22} = P.\frac{d^2P}{da_{11}da_{22}}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} \\ A_{31} A_{32} \end{vmatrix} = P.(A_{21})_{32} = P.\frac{d^2P}{da_{21}da_{32}}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} \\ A_{41} A_{42} \end{vmatrix} = P.(A_{21})_{42} = P.\frac{d^2P}{da_{21}da_{42}}$$

. . . .

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} \\ A_{n1} A_{n2} \end{vmatrix} = P(A_{21})_{n2} = P.\frac{d^2P}{da_{21}da_{n2}}$$

W taki sposób dowiedliśmy naszego twierdzenia dla $p = 2$, teraz dowód prowadzić będziemy dla $p = 3$.

Skoro równania

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} + A_{41}a_{41} + A_{51}a_{51} + \ldots + A_{n1}a_{n1} = P$$

$$A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31} + A_{42}a_{41} + A_{52}a_{51} + \ldots + A_{n2}a_{n1} = 0$$

$$A_{13}a_{11} + A_{23}a_{21} + A_{33}a_{31} + A_{43}a_{41} + A_{53}a_{51} + \ldots + A_{n3}a_{n1} = 0$$

odpowiednie pomnożymy przez

$$\begin{vmatrix} A_{22} A_{32} \\ A_{23} A_{33} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} A_{21} A_{31} \\ A_{23} A_{33} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A_{21} A_{31} \\ A_{22} A_{32} \end{vmatrix}$$

i do siebie dodamy, otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{21} A_{31} \\ A_{12} A_{22} A_{32} \\ A_{13} A_{23} A_{33} \end{vmatrix} a_{11} + \begin{vmatrix} A_{41} A_{21} A_{31} \\ A_{42} A_{22} A_{32} \\ A_{43} A_{23} A_{33} \end{vmatrix} a_{41} + \begin{vmatrix} A_{51} A_{21} A_{31} \\ A_{52} A_{22} A_{32} \\ A_{53} A_{23} A_{33} \end{vmatrix} a_{51} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{n1} A_{21} A_{31} \\ A_{n2} A_{22} A_{32} \\ A_{n3} A_{23} A_{33} \end{vmatrix} a_{n1} = P.\begin{vmatrix} A_{22} A_{32} \\ A_{23} A_{33} \end{vmatrix} = P^2.(A_{22})_{33}$$

To równanie zmienia się za pomocą równania:

$$(A_{22})_{33} = ((A_{22})_{33})_{11}a_{11} + ((A_{22})_{33})_{41}a_{41} + ((A_{22})_{33})_{51}a_{51} + \ldots +$$
$$+ ((A_{22})_{33})_{n1}a_{n1}$$

w następujące:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{vmatrix} a_{11} + \begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{41} A_{42} A_{43} \end{vmatrix} a_{41} + \begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{51} A_{52} A_{53} \end{vmatrix} a_{51} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{n1} A_{n2} A_{n3} \end{vmatrix} a_{n1} =$$

$$= P^2((A_{22})_{33})_{11} a_{11} + P^2((A_{22})_{33})_{41} a_{41} + P^2((A_{22})_{33})_{51} a_{51} + \ldots +$$

$$+ P^2((A_{22})_{33})_{n1} a_{n1}.$$

Za pomocą § 59 wynika z tego równania:

$$(4) \ldots \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{vmatrix} = P^2((A_{11})_{22})_{33} = P^2 . \frac{d^3 P}{da_{11} da_{22} da_{33}}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{41} A_{42} A_{43} \end{vmatrix} = P^2((A_{21})_{32})_{43} = P^2 . \frac{d^3 P}{da_{21} da_{32} da_{43}}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{51} A_{52} A_{53} \end{vmatrix} = P^2((A_{21})_{32})_{53} = P^2 . \frac{d^3 P}{da_{21} da_{32} da_{53}}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \\ A_{n1} A_{n2} A_{n3} \end{vmatrix} = P^2((A_{21})_{32})_{n3} = P^2 . \frac{d^3 P}{da_{21} da_{32} da_{n3}}$$

§ 87.

Twierdzenie. Jeżeli wyznacznik pierwotny P równy jest jednostce, wtenczas wyznacznik odwrotny P^1 także jest równy jednostce, a minory wyznacznika odwrotnego są równe minorom dopełniawczym wyznacznika pierwotnego.

Dowód.

$$(1)\ldots\quad P^1 = \begin{cases} P^{n-1} \\ 1^{n-1} \\ 1 \end{cases}$$

Na mocy paragrafu poprzedniego mamy:

$$(2)\ldots\quad \begin{vmatrix} A_{pq} & A_{ps} \\ A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = \begin{cases} (A_{pq})_{rs} \,.\, P \\ (A_{pq})_{rs} \,.\, 1 \\ (A_{pq})_{rs} \end{cases}$$

albo:

$$(3)\ldots\quad A_{pq}A_{rs} - A_{rq}A_{ps} = (A_{pq})_{rs}$$

albo też za pomocą innego oznaczenia

$$\frac{dP}{da_{pq}} \cdot \frac{dP}{da_{rs}} - \frac{dP}{da_{rq}} \cdot \frac{dP}{da_{ps}} = \frac{d^2P}{da_{pq}da_{rs}}$$

§ 88.

Twierdzenie. Jeżeli wyznacznik pierwotny P równy jest zeru, wtenczas wyznacznik odwrotny P^1 także równy jest zeru, a elementa wyznacznika P^1, znajdujące się w dwóch tych samych rzędach poziomych i w dwóch różnych rzędach pionowych, tworzą proporcyą.

Dowód.

$$(1)\ldots\quad P^1 = \begin{cases} P^{n-1} \\ 0^{n-1} \\ 0 \end{cases}$$

$$(2)\ldots\quad \begin{vmatrix} A_{pq} & A_{ps} \\ A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = \begin{cases} P \,.\, (A_{pq})_{rs} \\ 0 \,.\, (A_{pq})_{rs} \\ 0 \end{cases}$$

albo:

$$A_{pq}A_{rs} - A_{rq}A_{ps} = 0$$

albo nareszcie:

$$(3)\dots\quad A_{pq} : A_{rq} = A_{ps} : A_{rs}$$

Za pomocą oznaczenia różniczkowego:

$$(4)\dots\quad \frac{dP}{da_{pq}} : \frac{dP}{da_{rq}} = \frac{dP}{da_{ps}} : \frac{dP}{da_{rs}}$$

Wnioski. Skoro pierwotny wyznacznik P równy jest zeru, to i minory wyznacznika odwrotnego P^1, które są wyznacznikami wyższego jak pierwszego stopnia, są także równe zeru. Np.:

$$(5)\dots\quad \begin{vmatrix} A_{pq} A_{pp} A_{pr} \\ A_{rq} A_{rp} A_{rr} \\ A_{sq} A_{sp} A_{sr} \end{vmatrix} = \begin{cases} ((A_{pq})_{rp})_{sr}\, P^2 \\ ((A_{pq})_{rp})_{sr} \,.\, 0 \\ 0 \end{cases}$$

Z równania (3) wynika:

$$(6)\dots\quad \frac{A_{pq}}{A_{rq}} = \frac{A_{ps}}{A_{rs}}$$

Dając wskaźnikowi q wartości 1, 2, 3, ... n, otrzymamy z ostatniego równania następującą proporcyą:

$$(7)\dots\quad \frac{A_{p1}}{A_{r1}} = \frac{A_{p2}}{A_{r2}} = \frac{A_{p3}}{A_{r3}} = \dots = \frac{A_{pn}}{A_{rn}}$$

albo:

$$(8)\dots\quad A_{p1} : A_{p2} : A_{p3} : \dots : A_{pn} = A_{r1} : A_{r2} : A_{r3} : \dots : A_{rn}$$

Tak samo jest:

$$(9)\dots\quad A_{1q} : A_{2q} : A_{3q} : \dots : A_{nq} = A_{1s} : A_{2s} : A_{3s} : \dots : A_{ns}$$

Z równania

$$\begin{vmatrix} A_{pp} A_{pq} \\ A_{qp} A_{qq} \end{vmatrix} = 0$$

wynika

$$\frac{A_{pq} \,.\, A_{qp}}{A_{pp}} = A_{qq}$$

Ponieważ p wartości 1, 2, 4, ... n brać może, przeto pisać możemy:

$$(10)\ldots\quad \frac{A_{1q}\cdot A_{q1}}{A_{11}}=\frac{A_{2q}A_{q2}}{A_{22}}=\frac{A_{3q}A_{q3}}{A_{33}}=\ldots=\frac{A_{nq}A_{qn}}{A_{nn}}$$

albo:

$$(11)\ldots\quad A_{1q}A_{q1}:A_{2q}A_{q2}:A_{3q}A_{q3}:\ldots:A_{nq}A_{qn}=A_{11}:A_{22}:A_{33}:\ldots:A_{nn}$$

§ 89.

Uwaga. Za pomocą minorów można w bardzo pojedyńczy sposób rozwinąć wyznacznik następujący:

$$W=\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}+x, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}+x, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}+x \end{vmatrix}$$

Oznaczywszy przez P wyznacznik, który powstaje z W, skoro x biorą wartość równą zeru, pisać możemy:

$$W=P+(A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44})x+$$
$$+[(A_{11})_{22}+(A_{11})_{33}+(A_{11})_{44}+(A_{22})_{33}+(A_{22})_{44}+(A_{33})_{44}]x^2+$$
$$+[((A_{11})_{22})_{33}+((A_{11})_{22})_{44}+((A_{11})_{33})_{44}+((A_{22})_{33})_{44}]x^3+x^4$$

albo:

$$W=P+\left\{\frac{dP}{da_{11}}+\frac{dP}{da_{22}}+\frac{dP}{da_{33}}+\frac{dP}{da_{44}}\right\}x+$$
$$+\left\{\frac{d^2P}{da_{11}da_{22}}+\frac{d^2P}{da_{12}da_{33}}+\frac{d^2P}{da_{11}da_{44}}+\frac{d^2P}{da_{22}da_{33}}+\frac{d^2P}{da_{22}da_{44}}+\frac{d^2P}{da_{33}da_{44}}\right\}x^2+$$
$$+\left\{\frac{d^3P}{da_{11}da_{22}da_{33}}+\frac{d^3P}{da_{11}da_{22}da_{44}}+\frac{d^3P}{da_{11}da_{33}da_{44}}+\frac{d^3P}{da_{22}da_{33}da_{44}}\right\}x^3+x^4$$

Wykonawszy rozwinięcie, otrzymamy:

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{24} \\ a_{41} a_{42} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \right\} x +$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} a_{33} a_{34} \\ a_{43} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} a_{24} \\ a_{42} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{14} \\ a_{41} a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \right\} x^2 +$$

$$+ [a_{11} + a_{22} + a_{44}] x^3 + x^4$$

Z tego przykładu z łatwością widzimy, jak postępować musimy, skoro W jest wyższego jak czwartego rzędu.

§ 90.

Przykłady.

Wyrażenie

$$(1)\ldots \quad f = \Sigma_{pq} a_{pq} x_p x_q = 0$$

gdzie p i q biorą wartości 1, 2, 3, ... n i gdzie zawsze jest $a_{pq} = a_{qp}$, ma oznaczać funkcyą drugiego rzędu z n odmiennemi. Różniczkując tę funkcyą podług odmiennych i rugując odmienne z równań:

$$(2)\ldots \quad \frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \frac{df}{dx_3} = 0, \ldots \frac{df}{dx_n} = 0$$

odbieramy:

$$(3)\ldots \quad I = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik P, w taki sposób otrzymany, nazywać będziemy rozstrzygnikiem (discriminante) funkcyi f.

Funkcya drugiego rzędu

$$(4)\ldots\quad F = \Sigma_{pq} A_{pq} z_p z_q = 0,$$

gdzie $A_{pq} = \frac{dP}{da_{pq}}$, jest funkcyą odwrotną funkcyi f.

Łatwo przekonać się możemy, iż funkcyą F przedstawić można w kształcie wyznacznika w sposób następujący:

$$(5)\ldots\quad F = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} z_1 \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} z_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} z_n \\ z_1 \; z_2 \; z_3 \ldots z_n \; 0 \end{vmatrix}$$

Jeżeli do wyznacznika P należący odwrotny wyznacznik znów przez P^1 oznaczymy, możemy na mocy § 84, 3, pisać:

$$(6)\ldots\quad f = \begin{cases} \sum\limits_{pq} a_{pq} x_p x_q \\ \frac{1}{P^{n-2}} \sum\limits_{pq} \frac{dP^1}{dA_{pq}} x_p x_q \end{cases}$$

Z tego wynika:

$$(7)\ldots\quad f = \frac{1}{P^{n-2}} \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \ldots A_{1n} x_1 \\ A_{21} A_{22} A_{23} \ldots A_{2n} x_2 \\ A_{31} A_{32} A_{33} \ldots A_{3n} x_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{n1} A_{n2} A_{n3} \ldots A_{nn} x_n \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \ldots x_n \; 0 \end{vmatrix}$$

Z równania (5)go i (6)go wynika naocznie odwrotność funkcyi f i F.

Niech będzie:

$$(8)\dots\begin{cases} z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ z_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ z_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

gdzie jest $a_{pq} = a_{qp}$.

Skoro te równania odpowiednio przez $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$ pomnożymy i do siebie dodamy, wtenczas otrzymamy ze względu na (1):

$$(9)\quad z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 + \dots + z_nx_n = f.$$

Wyznacznik (5) możemy przekształcić, mnożąc pierwszy, drugi, trzeci i t. d. n^{ty} rząd pionowéj przez $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ i odejmując pomnożone rzędy do ostatniego rzędu pionowego. Po takiéj operacyi nie zmienia się podług § 49 wartość wyznącznika i równanie (5) zmienia się za pomocą (9) na:

$$(10)\dots\; F = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & . \\ a_{n1} a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \\ z_1 \;\; z_2 & \dots & z_n & -f \end{vmatrix}$$

albo:

$$(11)\dots\; F = -P.f.$$

Ostatnie równanie używa się do rozwiązań wielu ważnych zadań geometrycznych.

§ 91.

Przykład. Równanie (1) w § 90 wyraża dla $n = 4$ powierzchnią drugiego rzędu. Rozwinąwszy lewą stronę tego równania, otrzymamy:

$$(1)\dots\ f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 +$$
$$2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

Równanie kuli z promieniem 1 jest:

$$(2)\dots\ \varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

Płaszczyzna styczna powierzchni drugiego rzędu w jakimkolwiekbądź punkcie będzie:

$$(3)\dots\ \frac{df}{dx_1'}x_1 + \frac{df}{dx_2'}x_2 + \frac{df}{dx_3'}x_3 + \frac{df}{dx_4'}x_4 = 0$$

Tę płaszczyznę możemy sobie wystawić jako płaszczyznę biegunową do kuli (2).

Płaszczyzna biegunowa kuli (2), mająca jako punkt biegunowy $(x_1'x_2'x_3'x_4')$ wyraża się przez równanie:

$$(4)\dots\ \frac{d\varphi}{dx_1''}x_1 + \frac{d\varphi}{dx_2''}x_2 + \frac{d\varphi}{dx_3''}x_3 + \frac{d\varphi}{dx_4''}x_4 = 0$$

albo:

$$(5)\dots\ x_1''x_1 + x_2''x_2 + x_3''x_3 - x_4''x_4 = 0$$

Skoro równanie (3) ma być identycznie równe równaniu (4), to być musi:

$$\frac{df}{dx_1'} = \frac{d\varphi}{dx_1''},\quad \frac{df}{dx_2'} = \frac{d\varphi}{dx_2''},\quad \frac{df}{dx_3'} = \frac{d\varphi}{dx_3''},\quad \frac{df}{dx_4'} = \frac{d\varphi}{dx_4'}$$

Rozwinąwszy te równania i dołączywszy do nich równanie (5), otrzymamy:

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' - x_1'' = 0$$
$$a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4' - x_2'' = 0$$
$$a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4' - x_3'' = 0$$
$$a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4' + x_4'' = 0$$
$$a_1''\ x_1' + a_2''\ x_2' + a_3''x_3' + a_4''\ x_4' + 0 = 0$$

Jeżeli z tych równań x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 wyrugujemy i zamiast $x''_1, x''_2, x''_3, x''_4$ położymy z_1, z_2, z_3, z_4, będziemy mieli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & z_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & z_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & z_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

To równanie przedstawia krzywą odwrotną biegunową krzywéj (1) (reciproke Polare).

§ 92.

Twierdzenie. Każdy wyznacznik z pełnemi elementami w rzędzie przekątnym można wyrazić przez wyznaczniki, których elementa w rzędach przekątnych są równe zeru.

Dowód. Wyznacznik n^{go} rzędu oznaczmy przez

$$(1) \ldots \quad W^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wyznacznik zaś, który z $W^{(n)}$ powstaje, skoro główne elementa znikają przez

$$(2) \ldots \quad W_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik $W^{(n)}$ możemy podzielić na n części, pierwszą część tworzą wyrazy, w których niema żadnego głównego elementu, w drugiéj części są wyrazy z li tylko jednym głównym elementem, w trzeciéj mają wyrazy po dwa główne elementa etc., ostatnia część ma jeden wyraz, zawierający w sobie wszystkie główne elementa.

Jeżeli zatém C_1, C_2, C_3 etc. oznaczają kombinacye do pierwszéj, drugiéj, trzeciéj etc. klasy z elementów głównych, jasną jest rzeczą, iż będzie

$$(3)\ldots\quad W^{(n)} = W_0^{(n)} + \Sigma C_1 W_0^{(n-1)} + \Sigma C_2 W_0^{(n-2)} + \ldots + \Sigma C_{n-2} W_0^{(n)} + C_n$$

Przykład.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + a_{11} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & 0 \end{vmatrix} + a_{44} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ a_{43} & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{24} \\ a_{42} & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{44} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{14} \\ a_{41} & 0 \end{vmatrix} + a_{22}a_{44} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix} + a_{33}a_{44} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{4}$$

Jeżeli $W^{(n)}$ oznacza wyznacznik, którego główne elementa są wszystkie x, otrzymamy, pisząc równanie (3) odwrotnie:

$$(4)\ldots\quad W^{(n)} = x^n + x^{n-2}\Sigma W_0^{(2)} + x^{n-3}\Sigma W_0^{(3)} + x^{n-4}\Sigma W_0^{(4)} + \ldots +$$

$$+ x\Sigma W_0^{(n-1)} + W_0^{(n)}$$

Przykład.

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & x \end{vmatrix} = x^3 + x\left\{\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 - x[a_{32}a_{23} + a_{31}a_{13} + a_{21}a_{12}] + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

ROZDZIAŁ VIII.

Wyznaczniki symetryczne i ich własności. — Wyznaczniki symetralne i ich własności.

Wyznaczniki symetryczne.

§ 93.

Objaśnienie. Wyznacznik, którego elementa sprężone są równe, t. j. $a_{pq} = a_{qp}$ nazywamy wyznacznikiem symetrycznym. N. p.

$$(1)\ldots\ P = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13}\ a_{14} \\ a_{12} a_{22} a_{23}\ a_{24} \\ a_{13} a_{23} a_{33}\ a_{34} \\ a_{14} a_{24} a_{34}\ a_{44} \end{vmatrix}$$

Wyznaczniki symetryczne dzielimy na wyznaczniki symetryczne z pełnym rzędem przekątnym i na wyznaczniki symetryczne z próżnym rzędem przekątnym.

Wyznacznik (1) jest symetryczny z pełnym rzędem przekątnym, wyznacznik zaś

$$(2)\dots\quad P = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

jest symetryczny z próżnym rzędem przekątnym.

§ 94.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznacznik P jest symetryczny, to jego odwrotny wyznacznik P^1 jest także symetryczny.

Dowód.

$$(1)\dots\quad P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \dots + a_{pn}A_{pn}$$

$$(2)\dots\quad P = a_{1p}A_{1p} + a_{2p}A_{2p} + a_{3p}A_{3p} + \dots + a_{np}A_{np}$$

Ponieważ mamy:

$$a_{p1} = a_{1p},\ a_{p2} = a_{2p},\ a_{p3} = a_{3p},\ \dots\ a_{pn} = a_{np}$$

przeto być musi, skoro odejmiemy drugie równanie od pierwszego:

$$(3)\dots\quad a_{p1}(A_{p1} - A_{1p}) + a_{p2}(A_{p2} - A_{2p}) + a_{p3}(A_{p3} - A_{3p}) + \dots + \\ + a_{pn}(A_{pn} - A_{np}) = 0$$

Elementa $a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}, \dots a_{pn}$ dowolne mogą przyjąć wartości, zatém wynika z ostatniego równania, iż być musi:

$$(4)\dots\quad A_{p1} = A_{1p},\ A_{p2} = A_{2p},\ A_{p3} = A_{3p},\ \dots\ A_{pn} = A_{np}$$

t. j. P^1 jest także wyznacznikiem symetrycznym.

§ 95.

Twierdzenie. Różniczka wyznacznika symetrycznego podług głównego elementu jest równa głównemu minorowi odpowiedniemu, różniczka zaś podług innego elementu równa jest podwójnemu minorowi odpowiedniemu, t. j.

$$\frac{dP}{da_{pp}} = A_{pp}, \quad \frac{dP}{da_{pq}} = 2\,A_{pq}$$

Dowód. Pierwsza część naszego twierdzenia jest jasna bez dowodu, ponieważ we wyrazach wyznacznika żaden główny element dwa lub trzy razy się nie znajduje, lecz tylko raz jako czynnik. Aby drugą część twierdzenia dowieść, możemy wyznacznik rozwinąć w sposób następujący:

$$(1)\ldots\; P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn} =$$

$$= a_{p1}[a_{1p}(A_{p1})_{1p} + a_{2p}(A_{p1})_{2p} + a_{3p}(A_{p1})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p1})_{np}] +$$

$$+ a_{p2}[a_{1p}(A_{p2})_{1p} + a_{2p}(A_{p2})_{2p} + a_{3p}(A_{p2})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p2})_{np}] +$$

$$+ a_{p3}[a_{1p}(A_{p3})_{1p} + a_{2p}(A_{p3})_{2p} + a_{3p}(A_{p3})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p3})_{np}] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ a_{pn}[a_{1p}(A_{pn})_{1p} + a_{2p}(A_{pn})_{2p} + a_{3p}(A_{pn})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{pn})_{np} +$$

Na mocy § 59 mamy

$$(A_{p2})_{1p} = (A_{1p})_{p2},$$

podług § 94 zaś

$$A_{p1} = A_{1p}.$$

Ponieważ w wyznaczniku symetrycznym minory sprężone taką mają własność, iż rzędy poziome pierwszego minora są te same co rzędy pionowe drugiego, przeto być musi:

$$(A_{p1})_{2p} = (A_{1p})_{p2} = (A_{p2})_{1p},$$

tak samo jest

$$(A_{p1})_{3p} = (A_{p3})_{1p}$$

a w ogóle

$$(A_{pq})_{rp} = (A_{pr})_{qp}$$

Zatém bierze równanie (1) kształt następujący:

$$
\begin{aligned}
P = {} & a_{p1}^2 (A_{p1})_{1p} + 2a_{p1}a_{2p}(A_{p1})_{2p} + 2a_{p1}a_{3p}(A_{p1})_{3p} + \ldots + 2a_{p1}a_{np}(A_{p1})_{np} + \\
& + a_{p2}^2 (A_{p2})_{2p} + 2a_{p2}a_{3p}(A_{p2})_{3p} + 2a_{p2}a_{4p}(A_{p2})_{4p} + \ldots + 2a_{p2}a_{np}(A_{p2})_{np} + \\
& + a_{p3}^2 (A_{p3})_{3p} + 2a_{p3}a_{4p}(A_{p3})_{4p} + 2a_{p3}a_{5p}(A_{p3})_{5p} + \ldots + 2a_{p3}a_{np}(A_{p3})_{np} + \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + a_{pn}^2 (A_{pn})_{np}
\end{aligned}
$$

Różniczkując to równanie podług a_{pq} i zważając na identyczność $a_{pq} = a_{qp}$, otrzymamy:

$$
\frac{dP}{da_{pq}} = \begin{cases}
2[a_{p1}(A_{p1})_{qp} + a_{p2}(A_{p2})_{qp} + a_{p3}(A_{p3})_{qp} + \ldots + a_{pn}(A_{pn})_{qp}] \\
2[a_{p1}(A_{qp})_{p1} + a_{p2}(A_{qp})_{p2} + a_{p3}(A_{qp})_{p3} + \ldots + a_{pn}(A_{qp})_{pn}] \\
2A_{qp} \\
2A_{pq}
\end{cases}
$$

§ 96.

Twierdzenie. Każdą całkowitą jednorodną funkcyą drugiego stopnia z n odmiennemi wyrazić można przez summę, składającą się z kwadratów linijnych funkcyi tychże samych odmiennych.

Dowód. Jeżeli odmienne oznaczymy przez

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; \ldots \; x_n$$

współczynniki zaś przez

$$a_{11}, \; a_{12}, \; a_{13}, \; \ldots \; a_{1n}, \; a_{22}, \; a_{23}, \; a_{24}, \; \ldots \; a_{2n} \; \ldots \; a_{n-1,n}, \; a_{nn},$$

to całkowita jednorodna funkcya drugiego stopnia będzie kształtu następującego:

$$
\begin{aligned}
(1) \ldots \; f = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \\
& + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + 2a_{35}x_3x_5 + \ldots + \\
& + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

Przyjąwszy $a_{pq}=a_{qp}$, możemy równaniu (1) dać bardzo krótkie wyrażenie:

$$(2)\ldots\ f=\sum_q\sum_p a_{pq}x_px_q$$

gdzie p i q przyjmują wartości: 1, 2, 3, . . . n.

Dla ułatwienia dowodu ma mieć f cztery odmienne. Rozwinąwszy f otrzymamy:

$$(3)\ldots\ f=\sum_p\sum_q a_{pq}x_px_q=$$

$$=\sum_p[a_{p1}x_px_1+a_{p2}x_px_2+a_{p3}x_px_3+a_{p4}x_px_4]=$$

$$+a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{14}x_1x_4+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+$$

$$+a_{23}x_2x_3+a_{24}x_2x_4+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2+a_{34}x_3x_4+$$

$$+a_{41}x_4x_1+a_{42}x_4x_2+a_{43}x_4x_3+a_{44}x_4^2=$$

$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+$$

$$+2a_{24}x_2x_4+a_{33}x_3^2+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2$$

Uszykowawszy (3) podług potęg odmiennéj x_1, pisać możemy:

$$(4)\ldots\ f=a_{11}x_1^2+2(a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)x_1+$$

$$+(a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+a_{33}x_3^2+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2)=$$

$$=a_{11}[x_1+\frac{a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4}{a_{11}}]^2+$$

$$+(a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+a_{33}x_3^2+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2)-$$

$$-\frac{(a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)^2}{a_{11}}$$

Oznaczywszy pierwszą część ostatniego rozwinięcia przez $X_1^2 . P_{s1}$, gdzie $P_{s1}=a_{11}$ wyraża wyznacznik symetryczny pierwszego rzędu, pisać możemy:

$$f = P_{s1} X_1^2 + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 + 2 \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{11}} x_2 x_3 +$$

$$+ 2 \frac{a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}}{a_{11}} x_2 x_4 + \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}} x_3^2 +$$

$$+ 2 \frac{a_{11} a_{34} - a_{13} a_{14}}{a_{11}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} a_{44} - a_{14}^2}{a_{11}} x_4^2$$

Włożywszy w to równanie:

$$P_{s0} = 1, \quad P_{s2} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

otrzymamy:

$$f = \frac{P_{s1}}{P_{s0}} X_1^2 + \frac{P_{s2}}{P_{s1}} x_2^2 + 2 \left\{ \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{P_{s1}} x_3 + \frac{a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}}{P_{s1}} x_4 \right\} x_2 +$$

$$+ \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{P_{s1}} x_3^2 + 2 \frac{a_{11} a_{34} - a_{13} a_{14}}{P_{s1}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} a_{44} - a_{14}^2}{P_{s1}} x_4^2$$

albo

$$f = \frac{P_{s1}}{P_{s0}} X_1^2 + \frac{P_{s2}}{P_{s1}} \left\{ x_2 + \frac{(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_3 + (a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}) x_4}{P_{s2}} \right\}^2 +$$

$$+ \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{P_{s1}} x_3^2 + 2 \frac{a_{11} a_{34} - a_{13} a_{14}}{P_{s1}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} a_{44} - a_{14}^2}{P_{s1}} x_4^2 -$$

$$- \frac{[(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_3 + (a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}) x_4]^2}{P_{s1} P_{s2}}$$

Kładąc w to równanie

$$X_2 = x_2 + \frac{(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_3 + (a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}) x_4}{P_{s2}}$$

otrzymamy:

$$f = \frac{P_{s1}}{P_{s0}} \cdot X_1^2 + \frac{P_{s2}}{P_{s1}} X_2^2 + \frac{P_{s3}}{P_{s2}} x_3^2 + 2 \cdot \frac{1}{P_{s2}} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{12} a_{22} a_{23} \\ a_{14} a_{24} a_{34} \end{vmatrix} x_3 x_4 + \frac{1}{P_{s2}} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{12} a_{22} a_{23} \\ a_{14} a_{24} a_{44} \end{vmatrix} x_4^2$$

albo:

$$f = \begin{cases} \dfrac{P_{s1}}{P_{s0}} X_1^2 + \dfrac{P_{s2}}{P_{s1}} X_2^2 + \dfrac{P_{s3}}{P_{s2}} \left\{ x_3 + \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{12} a_{22} a_{23} \\ a_{14} a_{24} a_{34} \end{vmatrix}}{P_{s3}} x_4 \right\}^2 + \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{12} a_{22} a_{24} \\ a_{14} a_{24} a_{44} \end{vmatrix}}{P_{s2}} x_4^2 - \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{12} a_{22} a_{23} \\ a_{14} a_{24} a_{34} \end{vmatrix}^2}{P_{s2} P_{s3}} x_4^2 \\ \dfrac{P_{s1}}{P_{s0}} \cdot X_1^2 + \dfrac{P_{s2}}{P_{s1}} X_2^2 + \dfrac{P_{s3}}{P_{s2}} \left\{ x_3 + \dfrac{A_{34}}{P_{s3}} x_4 \right\}^2 + \dfrac{P_{s3} A_{33} - A_{34}^2}{P_{s2} P_{s3}} x_4^2 \end{cases}$$

albo:

$$f = \frac{P_{s1}}{P_{s0}} X_1^2 + \frac{P_{s2}}{P_{s1}} X_2^2 + \frac{P_{s3}}{P_{s2}} X_3^2 + \frac{\begin{vmatrix} A_{33} A_{34} \\ A_{34} A_{44} \end{vmatrix}}{P_{s2} P_{s3}} x_4^2$$

Na mocy § 86 zmienia się to równanie w następujące:

$$f=\frac{P_{s1}}{P_{s0}}X_1^2+\frac{P_{s2}}{P_{s1}}X_2^2+\frac{P_{s3}}{P_{s2}}X_3^2+\frac{P_{s4}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{12}a_{22}\end{vmatrix}}{P_{s3}\,.\,P_{s2}}x_4^2$$

albo nareszcie:

$$f=\frac{P_{s1}}{P_{s0}}X_1^2+\frac{P_{s2}}{P_{s1}}X_2^2+\frac{P_{s3}}{P_{s2}}X_3^2+\frac{P_{s4}}{P_{s3}}x_4^2$$

gdzie jest:

$$P_{s0}=1,\ P_{s1}=a_{11},\ P_{s2}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{12}a_{22}\end{vmatrix},\ P_{s3}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\,a_{13}\\a_{12}a_{22}\,a_{23}\\a_{13}a_{23}\,a_{33}\end{vmatrix},\ P_{s4}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\,a_{13}a_{14}\\a_{12}a_{22}\,a_{23}a_{24}\\a_{13}a_{23}\,a_{33}a_{34}\\a_{14}a_{24}\,a_{34}a_{44}\end{vmatrix}$$

$$X_1=x_1+\frac{a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4}{a_{11}}$$

$$X_2=x_2+\frac{\begin{vmatrix}a_{11}\,a_{13}\\a_{12}\,a_{23}\end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix}a_{11}\,a_{14}\\a_{12}\,a_{24}\end{vmatrix}x_4}{P_{s2}}=x_2+\frac{(A_{23})_{44}x_3+(A_{23})_{34}x_4}{P_{s2}}$$

$$X_3=x_3+\frac{A_{34}}{P_{s3}}x_4$$

Wyznaczniki symetralne.

§ 97.

Objaśnienie. Wyznacznik, którego elementa sprężone mają równe wartości, ale przeciwne znaki, t. j. $a_{pq}=-a_{qp}$, nazywamy symetralnym. Jeżeli w wyznaczniku symetralnym wszystkie główne elementa, stojące w rzędzie przekątnym, są równe zeru, t. j. $a_{pp} = 0$, to nazywamy go wyznacznikiem symetralnym z próżnym rzędem przekątnym, jeżeli zaś a_{pp} nie jest równe zeru, nazywamy go wyznacznikiem symetralnym z pełnym rzędem przekątnym.

Wyznaczniki symetralne z próżnemi rzędami przekątnemi są następujące:

$$\begin{vmatrix} 0, & a_{12}, & -a_{13}, & -a_{14}, & a_{15}, \dots & -a_{1n} \\ -a_{12}, & 0, & a_{23}, & a_{24}, & -a_{25}, \dots & a_{2n} \\ a_{13}, & -a_{23}, & 0, & -a_{34}, & a_{35}, \dots & -a_{3n} \\ a_{14}, & -a_{24}, & a_{34}, & -0, & -a_{45}, \dots & a_{4n} \\ -a_{15}, & a_{25}, & -a_{35}, & a_{45}, & 0, \dots & -a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}, & -a_{2n}, & a_{3n}, & -a_{4n}, & a_{5n}, \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & a_{12}, & -a_{13}, & -a_{14} \\ -a_{12}, & 0, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & -a_{23}, & 0, & -a_{34} \\ a_{14}, & -a_{24}, & a_{34}, & 0 \end{vmatrix}$$

Wyznaczniki zaś symetralne z pełnemi rzędami przekątnemi są:

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & x & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§ 98.

Wniosek. Jasną jest rzeczą, iż tak jak przy symetrycznych wyznacznikach, tak i przy symetralnych, główne minory A_{pp} tego samego są rodzaju, co ich wyznaczniki całkie.

§ 99.

Twierdzenie. Minory sprężone wyznacznika symetralnego z próżnym rzędem przekątnym są równe, skoro wyznacznik jest stopnia nieparzystego, równe zaś lecz z przeciwnemi znakami, skoro wyznacznik jest parzystego stopnia.

Dowód. Elementa rzędów pionowych w minorze A_{pq} są te same tylko z przeciwnemi znakami jak elementa odpowiednych rzędów poziomych w sprzężonym minorze A_{qp}. Skoro wszystkie rzędy poziome, których liczba jest $(n-1)$, przez (-1) pomnożonemi i cały minor przez $(-1)^{n-1}$ podzielimy, to minor A_{qp} nie zmienia ani znaku ani wartości podług § 47. Pomnożywszy wszystkie rzędy poziome w A_{qp} przez (-1) i nazwawszy rezultat powstały α, mieć będziemy:

$$(1)\ldots\quad A_{qp} = \frac{\alpha}{(-1)^{n-1}}$$

Ponieważ elementa rzędów poziomych w α są co do znaków i do wartości całkiem te same jak elementa rzędów odpowiednich pionowych, przeto być musi na mocy § 29:

$$(2)\ldots\quad A_{pq} = \alpha$$

Z równań (1) i (2) wynika:

$$(3)\ldots\quad A_{pq} = (-1)^{n-1} \,.\, A_{qp}$$

To równanie zmienia się, skoro n jest liczbą parzystą, na:

$$(4)\ldots\quad A_{pq} = -A_{qp}$$

skoro zaś n jest liczbą nieparzystą, to otrzymamy:

$$(5)\ldots\quad A_{pq} = A_{qp}.$$

§ 100.

Twierdzenie. Wartość wyznacznika symetralnego z próżnym rzędem przekątnym stopnia nieparzystego jest równa 0.

Dowód. Jak wiadomo mamy:

$$P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

$$P = a_{1p}A_{1p} + a_{2p}A_{2p} + a_{3p}A_{3p} + \ldots + a_{np}A_{np}$$

Odjąwszy drugie równanie od pierwszego, otrzymamy:

$$a_{p1}A_{p1} - a_{1p}A_{1p} + a_{p2}A_{p2} - a_{2p}A_{2p} + a_{p3}A_{p3} - a_{3p}A_{3p} + \ldots +$$
$$+ a_{pn}A_{pn} - a_{np}A_{np} = 0.$$

Ponieważ mamy

$$a_{p1} = -a_{1p},\ a_{2p} = -a_{2p},\ a_{p3} = a_{3p} \text{ etc.}$$

zatém pisać możemy:

$$a_{p1}(A_{p1} + A_{1p}) + a_{p2}(A_{p2} + A_{2p}) + a_{p3}(A_{p3} + A_{3p}) + \ldots +$$
$$+ a_{pn}(A_{pn} + A_{np}) = 0$$

Na mocy § 99 jest

$$A_{p1} = A_{1p},\ A_{p2} = A_{2p},\ A_{p3} = A_{3p}$$

przeto zmienia się równanie w następujące:

$$2a_{p1}A_{p1} + 2a_{p2}A_{p2} + 2a_{p3}A_{p3} + \ldots + 2a_{pn}A_{pn} = 0$$

albo

$$2(a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn} = 0$$

albo nareszcie

$$2P = 0 \text{ t. j.}$$

$$P = 0.$$

§ 101.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznacznik P jest symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia parzystego, to i jego odwrotny wyznacznik P^1 jest tego samego rodzaju.

Dowód. Minory główne A_{pp} są równe zeru na mocy § 100, a minory sprężone mają równe wartości z przeciwnemi znakami podług § 99.

§ 102.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznącznik P nieparzystego stopnia jest symetralnym z próżnym rzędem przekątnym, to jego odwrotny wyznacznik P^1 jest co do rodzaju symetrycznym z pełnym rzędem przekątnym, co do wartości zaś równy zeru.

Dowód. Minory sprężone A_{pq}, A_{qp} wyznacznika P są na mocy § 99 równe, a minory główne są wyznacznikami symetralnemi z próżnemi rzędami przekątnemi parzystego stopnia, zatém jest P^1 wyznacznikiem symetrycznym z pełnym rzędem przekątnym.

Podług § 83 zaś mamy:

$$P^1 = P^{n-1}$$

W skutek § 100 jest $P = 0$, zatém być musi

$$P^1 = 0.$$

§ 103.

Twierdzenie. Różniczka wyznacznika symetralnego z próżnym rzędem przekątnym stopnia parzystego podług dowolnego elementu a_{pq} jest równą podwójnemu odpowiedniemu minorowi.

Dowód. Jak wiadomo mamy:

$$(1)\ldots\quad P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

albo

$$(2)\ldots\ P = a_{p1}[a_{1p}(A_{p1})_{1p} + a_{2p}(A_{p1})_{2p} + a_{3p}(A_{p1})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p1})_{np}] +$$
$$+ a_{p2}[a_{1p}(A_{p2})_{1p} + a_{2p}(A_{p2})_{2p} + a_{3p}(A_{p2})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p2})_{dp}] +$$
$$+ a_{p3}[a_{1p}(A_{p3})_{1p} + a_{2p}(A_{p3})_{2p} + a_{3p}(A_{p3})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p3})_{np}] +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{pn}[a_{1p}(A_{pn})_{1p} + a_{2p}(A_{pn})_{2p} + a_{3p}(A_{pn})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{pn})_{np}]$$

W skutek § 59 mamy:

$$(A_{p1})_{2p} = -(A_{pp})_{21}$$
$$(A_{p2})_{1p} = -(A_{pp})_{12}$$

Ponieważ minor A_{pp} jest tego samego rodzaju co wyznacznik pierwotny P, a minor A_{pp} wyznacznikiem stopnia nieparzystego, przeto mamy podług § 99:

$$\left.\begin{matrix} -(A_{pp})_{21} \\ (A_{p1})_{2p} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -(A_{pp})_{12} \\ (A_{p2})_{1p} \end{matrix}\right.$$

W ten sam sposób mamy daléj:

$$(A_{p1})_{3p} + (A_{p3})_{1p} \text{ i w ogóle}$$
$$(A_{pq})_{rp} = (A_{pr})_{qp}$$

Zważając jeszcze na równania

$$a_{p1}a_{1p} = -a_{1p}^2$$
$$a_{p2}a_{2p} = -a_{2p}^2 \text{ w ogóle}$$
$$a_{pq}a_{qp} = -a_{qp}^2$$
$$a_{p1}a_{2p} = a_{p2}a_{1p}$$
$$a_{p1}a_{3p} = a_{p3}a_{1p} \text{ w ogóle}$$
$$a_{pq}a_{rp} = a_{pr}a_{qp}$$

możemy zmienić równanie (2) w następujące:

$$(3)\ldots\quad P = -a_{1p}^2(A_{p1})_{1p} + 2a_{p1}a_{2p}(A_{p1})_{2p} + 2a_{p1}a_{3p}(A_{p1})_{3p} + \ldots + 2a_{p1}a_{np}(A_{p1})_{np} -$$

$$-a_{2p}^2(A_{p2})_{2p} + 2a_{p2}a_{3p}(A_{p2})_{3p} + 2a_{p2}a_{4p}(A_{p2})_{4p} + \ldots + 2a_{p2}a_{np}(A_{p2})_{np} -$$

$$-a_{3p}^2(A_{p3})_{3p} + 2a_{p3}a_{4p}(A_{p3})_{4p} + 2a_{p3}a_{5p}(A_{p3})_{5p} + \ldots + 2a_{p3}a_{np}(A_{p3})_{np} -$$

$$\cdot\quad\cdot$$

$$-a_{np}(A_{pn})_{np}$$

Różniczkując podług $a_{pq} = a_{qp}$, otrzymamy:

$$\frac{dP}{da_{pq}} = \begin{cases} -2[a_{p1}(A_{p1})_{qp} + a_{p2}(A_{p2})_{qp} + a_{p3}(A_{p3})_{qp} + \ldots + a_{pn}(A_{pn})_{qp}] \\ -2[a_{p1}(A_{qp})_{p1} + a_{p2}(A_{qp})_{p2} + a_{p3}(A_{qp})_{p3} + \ldots + a_{pn}(A_{qp})_{pn}] \\ -2A_{qp} \\ 2A_{pq} \end{cases}$$

§ 104.

Twierdzenie. Różniczka wyznacznika symetralnego z próżnym rzędem przekątnym stopnia nieparzystego podług któregokolwiekbądź elementu a_{pq} równa jest zeru.

Dowód.

$$(1)\ldots\quad P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

albo:

$$\begin{aligned}(2)\ldots\quad P = {} & a_{p1}[a_{1p}(A_{p1})_{1p} + a_{2p}(A_{p1})_{2p} + a_{3p}(A_{p1})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p1})_{np}] + \\ & + a_{p2}[a_{1p}(A_{p2})_{1p} + a_{2p}(A_{p2})_{2p} + a_{3p}(A_{p2})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p2})_{np}] + \\ & + a_{p3}[a_{1p}(A_{p3})_{1p} + a_{2p}(A_{p3})_{2p} + a_{3p}(A_{p3})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{p3})_{np}] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{pn}[a_{1p}(A_{pn})_{1p} + a_{2p}(A_{pn})_{2p} + a_{3p}(A_{pn})_{3p} + \ldots + a_{np}(A_{pn})_{np}] +\end{aligned}$$

Na mocy § 59 mamy:

$$(A_{p1})_{2p} = -(A_{pp})_{21}$$

$$(A_{p2})_{1p} = -(A_{pp})_{12}$$

Ponieważ A_{pp} jest wyznacznikiem symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia parzystego, przeto mają jego minory sprężone podług § 99 równe wartości z przeciwnemi znakami, t. j.

$(A_{p1})_{2p} = -(A_{pp})_{21} = (A_{pp})_{12} = -(A_{p2})_{1p}$ tak samo jest:

$(A_{p2})_{3p} = -(A_{p3})_{2p}$ i w ogóle:

$(A_{pq})_{rp} = -(A_{pr})_{qp}$

Ze względu na te równania otrzymamy:

$$(3)\ldots\ P = -a_{1p}^2(A_{p1})_{1p} + 2a_{p1}a_{2p}\,.\,0 + 2a_{p1}a_{3p}\,.\,0 + \ldots + 2a_{p1}a_{np}\,.\,0 -$$

$$-a_{2p}^2(A_{p2})_{2p} + 2a_{p2}a_{3p}\,.\,0 + 2a_{p2}a_{4p}\,.\,0 + \ldots + 2a_{p2}a_{np}\,.\,0 -$$

$$-a_{3p}^2(A_{p3})_{3p} + 2a_{p3}a_{4p}\,.\,0 + 2a_{p3}a_{5p}\,.\,0 + \ldots + 2a_{p3}a_{np}\,.\,0 -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-a_{qp}^2(A_{pq})_{qp} + 2a_{pq}a_{q+1,p}.0 + 2a_{pq}a_{q+2,p}.0 + \ldots + 2a_{pq}a_{np}.0 -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-a_{np}^2(A_{pn})_{np}$$

Różniczkując to równanie podług a_{pq} i zważając na $a_{pq} = -a_{qp}$, otrzymamy:

$$(4)\ldots\quad \frac{dP}{da_{pq}} = \begin{cases} -2a_{qp}(A_{pq})_{qp} \\ 2a_{pq}(A_{pp})_{qq} \\ 2a_{pq}.0 \text{ (patrz § 100)} \\ 0 \end{cases}$$

§ 105.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznacznik P jest symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia nieparzystego, minory wyznacznika odwrotnego są równe zeru, skoro one są wyznacznikami stopnia wyższego niż pierwszego.

Dowód. Na mocy §§ 55, 86, 100 mamy:

$$(1)\ldots\quad \begin{vmatrix} A_{pq} A_{pp} A_{pr} \\ A_{rq} A_{rp} A_{rr} \\ A_{sq}\ A_{sp}\ A_{sr} \end{vmatrix} = \begin{cases} ((A_{pq})_{rp})_{sr}\,.\,P^2 \\ ((A_{pq})_{rp})_{sr}\,.\,0 \\ 0 \end{cases}$$

Tak samo jest

$$(2)\ldots\quad \begin{vmatrix} A_{pp}A_{pq} \\ A_{qp}A_{qq} \end{vmatrix} = \begin{cases} (A_{pp})_{qq}\,.\,P \\ (A_{pp})_{qq}\,.\,0 \\ 0 \end{cases}$$

albo:

$$(3) \ldots \quad A_{pp} A_{qq} = A_{pq} A_{qp}$$

§ 106.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznacznik jest symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia nieparzystego, każdy element wyznacznika odwrotnego A_{pq} jest średnią geometryczną proporcyonalną pomiędzy głównemi elementami, z których jeden stoi z pierwszym w tym samym rzędzie pionowym q, a drugi w tym samym rzędzie poziomym p.

Dowód. Równanie (3) w § 105 było:

$$A_{pp} \cdot A_{qq} = A_{pq} \cdot A_{qp}$$

albo:

$$A_{pp} : A_{pq} = A_{qp} : A_{qq}$$

Ponieważ podług § 99 mamy

$$A_{pq} = A_{qp}$$

przeto zmienia się proporcya w następującą:

$$(1) \ldots \quad A_{pp} : A_{pq} = A_{pq} : A_{qq}$$

albo:

$$A_{pq}^2 = A_{pp} \cdot A_{qq} \text{ lub też}$$

$$(2) \ldots \quad A_{pq} = \sqrt{A_{pp} \cdot A_{qq}}$$

§ 107.

Twierdzenie. Jeżeli pierwotny wyznacznik P jest symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia nieparzystego, elementa wyznacznika odwrotnego, znajdujące się w którymkolwiekbądź rzędzie, tworzą proporcyą ciągłą z pierwiastkami drugiemi elementów głównych.

Dowód. W § 88 (11) mamy:

$$(1) \ldots \quad A_{1q}A_{q1} : A_{2q}A_{q2} : A_{3q}A_{q3} : \ldots : A_{nq}A_{qn} = A_{11} : A_{22} : A_{33} : \ldots : A_{nn}$$

Ponieważ w naszym wyznaczniku mamy:

$$A_{1q} = A_{q1}, \; A_{2q} = A_{q2}, \ldots A_{nq} = A_{qn}$$

Przeto zmienia się proporcya w następującą:

$$(2) \ldots \quad A_{q1}^2 : A_{q2}^2 : A_{q3}^2 : \ldots : A_{qn}^2 = A_{11} : A_{22} : A_{33} : \ldots : A_{nn}$$

albo:

$$(3) \ldots \quad A_{1q}^2 : A_{2q}^2 : A_{3q}^2 : \ldots : A_{nq}^2 = A_{11} : A_{22} : A_{33} : \ldots : A_{nn}$$

albo nareszcie:

$$(4) \ldots \quad A_{q1} : A_{q2} : A_{q3} : \ldots : A_{qn} = \sqrt{A_{11}} : \sqrt{A_{22}} : \sqrt{A_{33}} : \ldots : \sqrt{A_{nn}}$$

$$(5) \ldots \quad A_{1q} : A_{2q} : A_{3q} : \ldots : A_{nq} = \sqrt{A_{11}} : \sqrt{A_{22}} : \sqrt{A_{33}} : \ldots : \sqrt{A_{nn}}$$

§ 108.

Twierdzenie. Każdy wyznacznik P można wyrazić przez następujące oznaczenie:

$$P = a_{pq}A_{pq} - \sum_{rs} a_{pr}a_{sq}(A_{pq})_{rs}$$

Dowód.

$$P = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + a_{p3}A_{p3} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

albo:

$$P = a_{pq}A_{pq} + a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \ldots + a_{pq-1}A_{pq-1} + a_{pq+1}A_{pq+1} + \ldots + a_{pn}A_{pn}$$

albo też

$$P = a_{pq}A_{pq} + a_{p1}[a_{1q}(A_{p1})_{1q} + a_{2q}(A_{p1})_{2q} + a_{3q}(A_{p1})_{3q} + \ldots + a_{nq}(A_{p1})_{nq}] +$$
$$+ a_{p2}[a_{1q}(A_{p2})_{1q} + a_{2q}(A_{p2})_{2q} + a_{3q}(A_{p2})_{3q} + \ldots + a_{nq}(A_{p2})_{nq}] +$$
$$\cdot\;\cdot$$
$$+ a_{pq-1}[a_{1q}(A_{pq-1})_{1q} + a_{2q}(A_{pq-1})_{2q} + a_{3q}(A_{pq-1})_{3q} + \ldots + a_{nq}(A_{pq-1})_{nq}] +$$
$$+ a_{pq+1}[a_{1q}(A_{pq+1})_{1q} + a_{2q}(A_{pq+1})_{2q} + a_{3q}(A_{pq+1})_{3q} + \ldots + a_{nq}(A_{pq+1})_{nq}] +$$
$$\cdot\;\cdot$$
$$+ a_{pn}[a_{1q}(A_{pn})_{1q} + a_{2q}(A_{pn})_{2q} + a_{3q}(A_{pn})_{3q} + \ldots + a_{nq}(A_{pn})_{nq}]$$

W skutek § 59 zmienia się to równanie w następujące:

$$P = a_{pq}A_{pq} - a_{p1}a_{1q}(A_{pq})_{11} - a_{p1}a_{2q}(A_{pq})_{21} - a_{p1}a_{3q}(A_{pq})_{31} - \ldots - a_{p1}a_{nq}(A_{pq})_{n1} -$$
$$- a_{p2}a_{1q}(A_{pq})_{12} - a_{p2}a_{2q}(A_{pq})_{22} - a_{p2}a_{3q}(A_{pq})_{32} - \ldots - a_{p2}a_{nq}(A_{pq})_{n2} -$$
$$\cdot\;\cdot$$
$$- a_{pq-1}a_{1q}(A_{pq})_{1q-1} - a_{pq-1}a_{2q}(A_{pq})_{2q-1} - a_{pq-1}a_{3q}(A_{pq})_{3q-1} - \ldots - a_{pq-1}a_{nq}(A_{pq})_{nq-1} -$$
$$- a_{pq+1}a_{1q}(A_{pq})_{1q+1} - a_{pq+1}a_{2q}(A_{pq})_{2q+1} - a_{pq+1}a_{3q}(A_{pq})_{3q+1} - \ldots - a_{pq+1}a_{nq}(A_{pq})_{nq+1} -$$
$$\cdot\;\cdot$$
$$- a_{pn}a_{1q}(A_{pq})_{1n} - a_{pn}a_{2q}(A_{pq})_{2n} - a_{pn}a_{3q}(A_{pq})_{3n} - \ldots - a_{pn}a_{nq}(A_{pq})_{qq} -$$

albo nareszcie:

$$(1)\ldots \quad P = a_{pq}A_{pq} - \sum_{rs} a_{ps}a_{rq}(A_{pq})_{rs}$$

w którém wyrażeniu Σ się ściąga na wskaźniki

$$r = 1, 2, 3, \ldots p-1, p+1, \ldots n$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots q-1, q+1, \ldots n$$

Dowieść można w ten sam sposób oznaczenie wyznacznika następujące:

$$(2)\ldots \quad P = a_{pp}A_{pp} - \sum_{rs} a_{ps}a_{rp}(A_{pp})_{rs}$$

gdzie wskaźniki r i s oznaczają:

$$r = 1, 2, 3, \ldots p-1, p+1, \ldots n$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots p-1, p+1, \ldots n$$

§ 109.

Twierdzenie. Każdy symetralny wyznacznik z próżnym rzędem przekątnym stopnia parzystego jest kwadratem całkiéj wymiernéj funkcyi swych elementów, mającéj $1.3.5\ldots(n-1)$ wyrazów, każdy wyraz jest iloczynem z $\frac{n}{2}$ elementów, których wszystkie wskaźniki są różne.

Dowód. Ponieważ w naszym wyznaczniku podług § 99 mamy:

$$a_{rp} = -a_{pr}$$

i na mocy § 100 pierwszy minor A_{pp} równy jest zeru, przeto bierze równanie § 108 (2) kształt następujący:

$$(1)\ldots \quad P = \sum_{rs} a_{pr}a_{ps}(A_{pp})_{rs}$$

Ze względu na § 106 jest

$$(2)\ldots \quad (A_{pp})_{rs} = \sqrt{(A_{pp})_{rr} \cdot (A_{pp})_{ss}}$$

W skutek tego równania otrzymamy:

$$(3)\ldots\quad P=\sum_{rs} a_{pr}a_{ps}\sqrt{(A_{pp})_{rr}(A_{pp})_{ss}}=\sum_{rs} a_{pr}\sqrt{(A_{pp})_{rr}}.a_{ps}.\sqrt{(A_{pp})_{ss}}$$

Ponieważ wskaźniki r i s te same mają wartości, jak już w § 108 jest powiedziane, przeto pisać możemy:

$$(4)\ldots\quad P=(\sum_r a_{pr}\sqrt{(A_{pp})_{rr}})^2$$

albo:

$$(5)\ldots\quad \sqrt{P}=\sum_r a_{pr}\sqrt{(A_{pp})_{rr}}$$

Rozwijając to równanie otrzymamy:

$$(6)\ldots\quad \sqrt{P}=a_{p1}\sqrt{(A_{pp})_{11}}+a_{p2}\sqrt{(A_{pp})_{22}}+\cdots+$$

$$+a_{pp-1}\sqrt{(A_{pp})_{p-1,p-1}}+a_{p,p+1}\sqrt{(A_{pp})_{p+1,p+1}}+\cdots+a_{pn}\sqrt{(A_{pp})_{nn}}$$

Z ostatniego równania wynika, iż $\sqrt{P}$ można rozwinąć jako summę, składającą się z $(n-1)$ wyrazów kształtu $a_{pr}\sqrt{(A_{pp})_{rr}}$, gdzie $(A_{pp})_{rr}$ jest wyznacznikiem symetralnym z próżnym rzędem przekątnym stopnia parzystego, t. j. $(n-2)$go. Rozwinąwszy podług (6) wyznacznik $\sqrt{(A_{pp})_{rr}}$, otrzymamy $(n-3)$ wyrazów, w każdym wyrazie znajduje się drugi pierwiastek z wyznacznika, który jest tego samego rodzaju co pierwotny wyznacznik P. Rozwijając w ten sposób daléj, przychodzimy nareszcie do summy, któréj wyrazy są kształtu następującego:

$$K.\begin{vmatrix} 0 & a_{vw} \\ -a_{vw} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=K.\sqrt{a_{vw}^2}=Ka_{vw}$$

gdzie K oznacza iloczyn elementów wyznacznika P. Wynosząc równanie ostatniego rozwinięcia do drugiéj potęgi, otrzymamy P na jednéj stronie równania, na drugiéj zaś kwadrat summy z $1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(n-1)$ wyrazów, wyrazy składają się z $\frac{n}{2}$ elementów, przy których wszystkie wskaźniki są różne.

Przykład.

$$P = \begin{vmatrix} 0, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ -a_{12}, & 0, & a_{23}, & a_{24} \\ -a_{13}, & -a_{23}, & 0, & a_{34} \\ -a_{14}, & -a_{24}, & -a_{34}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{P} = \begin{cases} a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ -a_{34} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{24} \\ -a_{24} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_{14}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ -a_{23} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} \end{cases}$$

$$P = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

§ 110.

Twierdzenie. Każdy symetralny wyznacznik z pełnym rzędem przekątnym jest całką wymierną funkcyą elementu znajdującego się w rzędzie przekątnym, potęgi tego elementu są wszystkie parzyste albo wszystkie nieparzyste, współczynniki tych potęg są summami kwadratów.

Dowód. W skutek § 92 można wyznacznik nasz, którego elementa główne mają być wszystkie x, wyrazić w sposób następujący:

$$W^{(n)} = x^n + x^{n-2}\Sigma W_0^{(2)} + x^{n-4}\Sigma W_0^{(4)} + x^{n-6}\Sigma W_0^{(6)} + \ldots$$

ponieważ wyznaczniki $W_0^{(3)}$, $W_0^{(5)}$, $W_0^{(7)}$, $W_0^{(9)}\ldots$ podług § 100 wszystkie są równe zeru.

Wyznaczniki stopnia parzystego $W_0^{(2)}$, $W_0^{(4)}$, $W_0^{(6)}\ldots$ są podług § 109 kwadratami swych elementów.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & x & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & x \end{vmatrix} = x^3 + x(a_{12}^2 + a_{12}^2 + a_{23}^2)$$

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & x & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & x & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & x \end{vmatrix} = x^4 + x^2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) +$$
$$+ (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

ROZDZIAŁ IX.

Objaśnienie wyniknika. Wyniknik dwóch równań jednorodnych z dwoma i z jedną zmienną. Wywodzenie wyniknika w sposób Euler'a, Sylwester'a, Bézout'a. Obrachowania wspólnego pierwiastku dwóch równań. Wyznacznik funkcyjny albo wyznacznik Jacobi'ego, kilka twierdzeń tyczących się tego wyznacznika. Własność funkcyi jednorodnych. Wyniknik trzech równań drugiego stopnia z trzema zmiennemi.

Wyniknik.

§ 111.

Objaśnienie. Wypadek, który otrzymamy, wyrugowawszy n odmiennych z n jednorodnych równań stopni dowolnych, nazywać będziemy wyniknikiem (resultante) tych równań.

§ 112.

Zadanie. Dane są dwa równania jednorodne dowolnych stopni z dwoma odmiennemi:

$$(1)\ldots\quad \varphi = a_0x^m + a_1x^{m-1}y^1 + a_2x^{m-2}y^2 + a_3x^{m-3}y^3 + \ldots + a_my^m = 0$$

$$(2)\ldots\quad \psi = a'_0x^n + a'_1x^{n-1}y^1 + a'_2x^{n-2}y^2 + a'_3x^{n-3}y^3 + \ldots + a'_ny^n = 0$$

znaleść wyniknik tych równań.

Rozwiązanie. Włożywszy w równania nasze

$$\frac{x}{y}=z,\ \frac{a_1}{a_0}=p_1,\ \frac{a_1'}{a_0'}=p_1',\ \frac{a_2}{a_0}=p_2,\ \frac{a_2'}{a_0'}=p_2' \text{ etc.}$$

otrzymamy dwa równania z jedną odmienną następującego kształtu:

$$(3)\dots\ z^m+p_1z^{m-1}+p_2z^{m-2}+p_3z^{m-3}+\dots+p_m=0$$

$$(4)\dots\ z^n+p_1'z^{n-1}+p_2'z^{n-2}+p_3'z^{n-3}+\dots+p_n=0$$

Pierwiastki równania (3) oznaczmy przez

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \dots\ \alpha_m$$

a pierwiastki równania (4) przez

$$\alpha_1',\ \alpha_2',\ \alpha_3',\dots\ \alpha_n'$$

Najprostszy sposób wyrugowania nieznajoméj (z) z naszych równań, żebyśmy byli w stanie pierwsze równanie rozwiązać, byłby następujący: wartość dla (z), z pierwszego równania otrzymaną, włożylibyśmy w równanie drugie, i wypadek, w taki sposób otrzymany, byłby wyniknikiem równań. Z tego sposobu rugowania wynika, iż zawsze przypuszczamy, że obydwa równania mają przynajmniéj jeden pierwiastek wspólny. Jeżeli zatém pierwiastki pierwszego równania w drugie kładziemy, to przynajmniéj jeden z następujących wyrazów musi być równy zeru:

$$\psi(\alpha_1),\ \psi(\alpha_2),\ \psi(\alpha_3),\ \dots\ \psi(\alpha_m)$$

Z tego wynika, iż iloczyn

$$\psi(\alpha_1)\,.\,\psi(\alpha_2)\,.\,\psi(\alpha_3)\ \dots\ \psi(\alpha_m)$$

także musi być równy zeru.

Zadanie nasze zależy więc od uzyskania iloczynu z czynników następujących:

$$\psi(\alpha_1)=\alpha_1^n+p_1'\alpha_1^{n-1}+p_2'\alpha_1^{n-2}+\ldots+p_n'$$

$$\psi(\alpha_2)=\alpha_2^n+p_1'\alpha_2^{n-1}+p_2'\alpha_2^{n-2}+\ldots+p_n'$$

$$\psi(\alpha_3)=\alpha_3^n+p_1'\alpha_3^{n-1}+p_2'\alpha_3^{n-2}+\ldots+p_n'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(\alpha_m)=\alpha_m^n+p_1'\alpha_m^{n-1}+p_2'\alpha_m^{n-2}+\ldots+p_n'$$

Iloczyn, składający się z takich czynników, jest funkcyą symetryczną pierwiastków równania pierwszego. Włożywszy na miejsce tych symetrycznych funkcyi pierwiastków wartości, wyrażone przez współczynniki pierwszego równania, otrzymamy pożądany wyniknik.

Przykład. Wyrugowane ma być (z) z równań następujących:

$$z^2+p_1z+p_2=0$$

$$z^2+p_1'z+p_2'=0$$

W skutek mnożenia otrzymamy:

$$(\alpha_1^2+p_1'\alpha_1+p_2')(\alpha_2^2+p_1'\alpha_2+p_2')$$

albo:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+p_1'\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+p_1'^2\alpha_1\alpha_2+p_2'(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+p_1'p_2'(\alpha_1+\alpha_2)+p_2'^2$$

Ponieważ mamy:

$$\alpha_1+\alpha_2=-p_1,\ \alpha_1\alpha_2=p_2$$

przeto być musi:

$$p_2^2-p_1p_1'p_2+p_1'^2p_2+p_2'(p_1^2-2p_2)-p_1'p_2'p_1+p_2'^2=0$$

albo:

$$(5)\ldots\ (p_2-p_2')^2+(p_1-p_1')(p_1p_2'-p_1'p_2)=0$$

Chcąc zatrzymać wyniknik z współczynnikami równań (1) i (2), trzeba włożyć na miejsca

$$p_1, p_2, p_3 \dots, p'_1, p'_2, p'_3 \dots$$

wartości

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0} \dots, \frac{a'_1}{a'_0}, \frac{a'_2}{a'_0}, \frac{a'_3}{a'_0} \dots$$

Równania

$$a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$$

$$a'_0x^2 + a'_1xy + a'_2y^2 = 0$$

będą więc miały następujący wyniknik:

$$(6)\dots \quad (a_0a'_2 - a'_0a_2)^2 + (a_1a'_0 - a'_1a_0)(a_1a'_2 - a'_1a_2) = 0$$

albo:

$$(7)\dots \quad \begin{vmatrix} a_0a'_2 - a'_0a_2, & a_1a'_2 - a'_1a_2 \\ a_0a'_1 - a'_0a_1, & a_0a'_2 - a'_0a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 113.

Uwaga. Jeżeli równanie jest kształtu następującego:

$$(1)\dots \quad \varphi = z^4 + p_1z^3 + p_2z^2 + p_3z + p_4 = 0$$

wtenczas mamy:

$$\varphi = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4) = 0$$

$$-p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$p_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$$

$$-p_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

$$p_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Jeżeli zaś równanie jest kształtu

$$(2)\dots \quad \varphi^1 = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4 = 0$$

pierwiastki oznaczyć możemy przez

$$x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3,\ x_4y_4$$

i równanie (2) wyrazić przez

$$(3)\ldots\ \varphi^1 = (xy_1 - x_1y)(xy_2 - x_2y)(xy_3 - x_3y)(xy_4 - x_4y) = 0$$

Skoro mnożenie wykonamy i współczynniki jego porównamy z współczynnikami równania (2), to otrzymamy:

$$a_0 = y_1y_2y_3y_4$$

$$-a_1 = x_1y_2y_3y_4 + x_2y_1y_3y_4 + x_3y_1y_2y_4 + x_4y_1y_2y_3 = \Sigma x_1y_2y_3y_4$$

$$a_2 = x_1x_1y_3y_4 + x_1x_3y_2y_4 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_2x_4y_1y_3 +$$
$$+ x_3x_4y_1y_2 = \Sigma x_1x_2y_3y_4$$

$$-a_3 = x_1x_2x_3y_4 + x_1x_2x_4y_3 + x_1x_3x_4y_2 + x_2x_3x_4y_1$$

$$a_4 = x_1x_2x_3x_4$$

§ 114.

Wywodzenie wyniknika na sposób Eulera.

Jeżeli dwa równania m^{go} i n^{go} stopnia wspólny mają pierwiastek, to równe musimy otrzymać wypadki, mnożąc pierwsze równanie z $(n-1)$ linijnemi iloczynami drugiego równania, albo drugie równanie z $(m-1)$ linijnemi iloczynami pierwszego równania. Pomnożywszy więc pierwsze równanie przez funkcyą $(n-1)^{go}$ stopnia z n dowolnemi stałemi, drugie równanie zaś przez funkcyą $(m-1)^{go}$ stopnia z m dowolnemi stałemi, otrzymamy dwa równania $(m+n-1)^{go}$ stopnia. W skutek porównania współczynników każdéj potęgi zmiennéj przychodzimy do $(m+n)$ równań. Z tych równań rugując $(m+n)$ dowolnych stałych, które w równaniach w pierwszym stopniu się znajdują, otrzymamy wyniknik w kształcie wyznacznika.

Przykład. Z równań:

$$\varphi = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$$

$$\psi = a_0'x^2 + a_1'xy + a_2'y^2 = 0$$

mamy rugować nieznajome.

Skoro te równania jeden pierwiastek mają równy, pisać je możemy:

$$\varphi = (xy_1 - x_1y)(x\text{A} + By) = 0$$

$$\psi = (xy_1 - x_1y)(x\text{A}' + B'y) = 0$$

albo:

$$xy_1 - x_1y = \frac{\varphi}{\text{A}x + By} = \frac{\psi}{\text{A}'x + B'y} \text{ t. j.}$$

$$(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)(\text{A}'x + B'y) = (a_0'x^2 + a_1'xy + a_2'y^2)(\text{A}x + By)$$

Z tego równania wynika:

$$\begin{aligned} a_0\text{A}' \qquad - a_0' \qquad\qquad &= 0 \\ a_1\text{A}' + a_0B' - a_1'\text{A} - a_0'B &= 0 \\ a_2\text{A}' + a_1B' - a_2'\text{A} - a_1'B &= 0 \\ a_2B' \qquad - a_2'B &= 0 \end{aligned}$$

Rugując z tych równań dowolne stałe A′, B′, — A, — B, otrzymamy wyniknik w kształcie wyznacznika następującego:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_0' & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1' & a_0' \\ a_2 & a_1 & a_2' & a_1' \\ 0 & a_2 & 0 & a_2' \end{vmatrix} = 0.$$

§ 115.

Wywodzenie wyniknika na sposób Sylwestera.

Równanie $m$go stopnia mnożymy przez x^{n-1}, $x^{n-2}y$, $x^{n-3}y^2$, $x^{n-4}y^3$, ... y^{n-1}, równanie $n$go stopnia zaś przez x^{m-1}, $x^{m-2}y$, $x^{m-3}y^2$, $x^{m-4}y^3$, ... y^{m-1} i otrzymujemy, w taki sposób postępując, $(m+n)$ równań, z których ilości

$$x^{m+n-1}, \; x^{m+n-2}y, \; x^{m+n-3}y^2, \ldots y^{m+n-1}$$

łatwo można wyrugować; ponieważ te $(m+n)$ nieznajomych możemy uważać jako linijno w równania zachodzące i pomiędzy sobą niezależne.

Przykład. Z danych równań

$$a_0x^2+a_1xy+a_2y^2=0$$

$$a_0'x^2+a_1'xy+a_2'y^2$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2 \qquad\qquad &=0\\ a_0x^2y+a_1xy^2+a_2y^3 &=0\\ a_0'x^3+a_1'x^2y+a_2'xy^2 \qquad\qquad &=0\\ a_0'x^2y+a_1'xy^2+a_2'y^3 &=0 \end{aligned}$$

Wyrugowawszy x^3, x^2y, xy^2, y^3, otrzymamy wyniknik

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0' & a_1' & a_2' & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' \end{vmatrix}=0$$

§ 116.

Wywodzenie wyniknika na sposób Bézout'a.

Sposób Bézout'a uzyskania wyniknika najlepiéj poznamy na specyalnych przykładach.

Mając dwa równania 4^go^ stopnia

$$(1)\ldots\quad a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4=0$$

$$(2)\ldots\quad a_0'x^4+a_1'x^3y+a_2'x^2y^2+a_3'xy^3+a_4'y^4=0$$

możemy pierwsze przez a_0', drugie zaś przez a_0 pomnożyć, i otrzymamy, odejmując pierwsze równanie od drugiego i dzieląc przez y, następujący wypadek:

$$(3)\ldots\quad (a_0a_1')x^3+(a_0a_2')x^2y+(a_0a_3')xy^2+(a_0a_4')y^3=0$$

gdzie współczynniki mają następujące znaczenie:

$$(a_0a_1') = \begin{vmatrix} a_0 & a_0' \\ a_1 & a_1' \end{vmatrix}, \quad (a_0a_2') = \begin{vmatrix} a_0 & a_0' \\ a_2 & a_2' \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Mnożąc daléj pierwsze równanie przez $a_0'x+a_1'y$, drugie zaś przez a_0x+a_1y, odejmując pomnożone równania pierwsze od drugiego, otrzymamy, podzieliwszy nareszcie wypadek przez y^2, rownanie następującego kształtu:

$$(4)\ldots\ (a_0a_2')x^3+[(a_0a_3')+(a_1a_2')]x^2y+[(a_0a_4')+(a_1a_3')]xy^2+ \\ +(a_1a_4')y^3=0$$

Mnożąc w ten sam sposób równania odpowiednio przez $(a_0'x^2+a_1'xy+a_2'y^2)$, $(a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)$, odejmując i dzieląc przez y^3, przychodzimy do równania:

$$(5)\ldots\ (a_0a_3')x^3+[(a_0a_4')+(a_1a_3')]x^2y+[(a_1a_4')+(a_2a_3')]xy^2+ \\ +(a_2a_4')y^3=0$$

Jeżeli nareszcie równania odpowiednio pomnożymy przez

$$(a_0'x^3+a_1'x^2y+a_2'xy^2+a_3'y^3), \quad (a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3),$$

pierwsze od drugiego odejmiemy i wypadek ten przez y^4 podzielimy, natenczas otrzymamy:

$$(6)\ldots\ (a_0a_4')x^3+(a_1a_4')x^2y+(a_2a_4')xy^2+(a_3a_4')y^3=0$$

Z równania (3), (4), (5), (6), t. j.

$$\begin{aligned}
&(a_0a_1')x^3+(a_0a_2')\,x^2y+(a_0a_3')\,xy^2+(a_0a_4')y^3=0\\
&(a_0a_2')x^3+[(a_0a_3')+(a_1a_2')]x^2y+[(a_0a_4')+(a_1a_3')]xy^2+(a_1a_4')y^3=0\\
&(a_0a_3')x^3+[(a_0a_4')+(a_1a_3')]x^2y+[(a_1a_4')+(a_2a_3')]xy^2+(a_2a_4')y^3=0\\
&(a_0a_4')x^3+(a_1a_4')\,x^2y+(a_2a_4')\,xy^2+(a_3a_4')y^3=0
\end{aligned}$$

rugując zmienne x^3, x^2y, xy^2, y^3, uważane jako linijne, otrzymamy wyniknik:

$$\begin{vmatrix} (a_0a'_1), & (a_0a'_2) & , (a_0a'_3) & , (a_0a'_4) \\ (a_0a'_2), & (a_0a'_3)+(a_1a'_2), & (a_0a'_4)+(a_1a'_3) & , (a_1a'_4) \\ (a_0a'_3), & (a_0a'_4)+(a_1a'_3), & (a_1a'_4)+(a_2a'_3), & (a_2a'_4) \\ (a_0a'_4), & (a_1a'_4), & (a_2a'_4), & (a_3a'_4) \end{vmatrix} = 0$$

Wyniknik dwóch równań 5go stopnia jest:

$$\begin{vmatrix} (a_0a'_1), & (a_0a'_2) & , (a_0a'_3) & , (a_0a'_4) & , (a_0a'_5) \\ (a_0a'_2), & (a_0a'_3)+(a_1a'_2), & (a_0a'_4)+(a_1a'_3) & , (a_0a'_5)+(a_1a'_4) & , (a_1a'_5) \\ (a_0a'_3), & (a_0a'_4)+(a_1a'_3), & (a_0a'_5)+(a_1a'_4)+(a_2a'_3), & (a_1a'_5)+(a_2a'_4) & , (a_2a'_5) \\ (a_0a'_4), & (a_0a'_5)+(a_1a'_4), & (a_1a'_5)+(a_2a'_4), & (a_2a'_5)+(a_3a'_4), & (a_3a'_5) \\ (a_0a'_5), & (a_1a'_5), & (a_2a'_5), & (a_3a'_5), & (a_4a'_5) \end{vmatrix} = 0$$

Z ostatnich dwóch wyników widzimy, jak sobie trzeba postąpić, skoro równania są wyższego od 5go stopnia.

§ 117.

Wywodzenie wyniknika dwóch równań różnych stopni na sposób Bézout'a.

Sposób postępowania najlepiéj poznamy znów na specyalnych przykładach.

Dane równania niech będą:

$$(1)\ldots\quad a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y_4=0$$

$$(2)\ldots\quad a'_0x^2+a'_1xy+a'_2y^2=0.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez a'_0, drugie zaś przez a_0x^2 i odejmując od pierwszego drugie, otrzymamy:

$$(3)\ldots\quad (a_1a'_0)x^3+(a_2a'_0)x^2y+(a_3a'_0)xy^2+(a_4a'_0)y^3=0$$

Mnożąc daléj pierwsze równanie przez $(a'_0x+a'_1y)$, drugie zaś przez $(a_0x+a_1y)x^2$ i odejmując jedno od drugiego, otrzymamy:

$$(4)\ldots\quad (a_2a'_0)x^3+[(a_2a'_1)+(a_3a'_0)]x^2y+[(a_3a'_1)+(a_4a'_0)]xy^2+$$
$$+(a_4a'_1)y^3=0$$

W trzeciém i czwartém równaniu jest:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ 0 & a'_0 \end{vmatrix}=a_3a'_0,\quad \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ 0 & a'_0 \end{vmatrix}=a_4a'_0,\quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ 0 & a'_1 \end{vmatrix}=a_3a'_1,\quad \begin{vmatrix} a_4 & a_1 \\ 0 & a'_1 \end{vmatrix}=a_4a'_1$$

Jeżeli równanie drugie pomnożymy przez x i y, możemy ilości x^3, x^2y, xy^2, y^3 wyrugować z równań następujących:

$$\begin{array}{lllll}
(a_1a'_0)x^3+ & (a_2a'_0)x^2y & + (a_3a'_0)xy^2 & +(a_4a'_0)y^3 & =0 \\
(a_2a'_0)x^3+ & [(a_2a'_1)+(a_3a'_0)]x^2y & +[(a_3a'_1)+(a_4a'_0)]xy^2 & +(a_4a'_1)y^3 & =0 \\
a'_0x^3+ & a'_1x^2y & + a'_2xy^2 & & =0 \\
 & a'_0x^2y & + a'_1xy^2 & +a'_2y^3 & =0
\end{array}$$

Wyniknik tych równań będzie więc:

$$\begin{vmatrix} (a_1a'_0), & (a_2a'_0) & , (a_3a'_0) & , (a_4a'_0) \\ (a_2a'_0), & (a_2a'_1)+(a_3a'_0), & (a_3a'_1)+(a_4a'_0), & (a_4a'_1) \\ a'_0, & a'_1 & , a'_2 & , 0 \\ 0, & a'_0 & , a'_1 & , a'_2 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli równanie pierwsze jest m^{go} stopnia, równanie drugie zaś n^{go} stopnia i $m > n$, użyć możemy sposobu w § 115 podanego i otrzymamy n równań $(m-1)^{go}$ stopnia; do tych równań dołączamy $(m-n)$ równań, które z drugiego równania wynikają, skoro je pomnożymy przez x^{m-n-1}, $x^{m-n-2}y$, $x^{m-n-3}y^2$ etc. Z tych m równań rugując m ilości x^{m-1}, $x^{m-2}y$, $x^{m-3}y^2$ etc., otrzymamy pożądany wyniknik.

§ 118.

Wyniknik wywodzony na sposób, który podaje Cayley.

Jeżeli dwa równania:

$$(1)\ldots\quad \varphi(x,y) = 0,\quad \psi(x,y) = 0$$

wspólny mają pierwiastek, musimy być w stanie, równaniu

$$(2)\ldots\quad \varphi + \lambda \,.\, \psi = 0$$

zadosyć uczynić bez względu na ilość λ.

Włożywszy w równanie (2)

$$\lambda = -\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\psi(x_1, y_1)}$$

otrzymamy:

$$(3)\ldots\quad \varphi(x,y) \,.\, \psi(x_1,y_1) - \varphi(x_1,y_1) \,.\, \psi(x,y) = 0$$

Ponieważ temu równaniu zadosyć się czyni pierwiastkiem x_1, y_1, przeto czynnik $xy_1 - x_1y$ w nim się znajdować musi; zatém równanie (3) dzielić możemy przez $xy_1 - x_1y$.

Porównawszy potém współczynniki różnych potęg ilości x_1, y_1 ze zerem, otrzymamy tyle równań, iż możemy różne potęgi ilości x, y jako od siebie niezależne uważać i wyrugować. Wyniknik, w taki sposób osiągniony, ma ten sam kształt, jak w § 116 podany.

Przykład.

$$a_0x^2+a_1xy+a_2y^2=0$$

$$a'_0x^2+a'_1xy+a'_2y^2=0$$

Dzieląc równanie:

$$(a_0x^2+a_1xy+a_2y^2)(a'_0x_1^2+a'_1x_1y_1+a'_2y_1^2)-$$
$$-(a_0x_1^2+a_1x_1y_1+a_2y_1^2)(a'_0x^2+a'_1xy+a'_2y^2)=0$$

przez $$xy_1-x_1y$$

otrzymamy:

$$[(a_0a'_1)x+(a_0a'_2)y]x_1+[(a_0a'_2)x+(a_1a'_2)y]y_1=0$$

Z tego równania wynika:

$$(a_0a'_1)x+(a_0a'_2)y=0$$

$$(a_0a'_2)x+(a_1a'_2)y=0.$$

Wyniknik będzie więc:

$$\begin{vmatrix}(a_0a'_1), & (a_0a'_2)\\ (a_0a'_2), & (a_1a'_2)\end{vmatrix}=0.$$

§ 119.

Twierdzenie. Wyniknik dwóch równań m^{go} i n^{go} stopnia jest funkcyą jednorodną współczynników każdego równania, i to m^{go} stopnia w współczynnikach pierwszego równania, a n^{go} stopnia w współczynnikach drugiego.

Dowód. Równania (3) i (4) w § 112 pisać możemy:

(1)... $\varphi=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_m)$

(2)... $\psi=(z-\alpha'_1)(z-\alpha'_2)(z-\alpha'_3)\ldots(z-\alpha'_n)$

Oznaczywszy wyniknik tych równań przez R, mieć będziemy podług § 112:

$$(3)..\ R=(\alpha'_1-\alpha_1)(\alpha'_1-\alpha_2)(\alpha'_1-\alpha_3)...(\alpha'_1-\alpha_m)(\alpha'_2-\alpha_1)(\alpha'_2-\alpha_2)(\alpha'_2-\alpha_3)...(\alpha'_1-\alpha_m)$$
$$(\alpha'_3-\alpha_1)(\alpha'_3-\alpha_2)(\alpha'_3-\alpha_3)...(\alpha'_3-\alpha_m)(\alpha'_n-\alpha_1)(\alpha'_n-\alpha_2)(\alpha'_n-\alpha_3)...(\alpha'_n-\alpha_m)$$

albo też

$$(4)...\ R=\quad(\alpha_1-\alpha'_1)(\alpha_1-\alpha'_2)(\alpha_1-\alpha'_3)\dots$$
$$...(\alpha_1-\alpha'_n)(\alpha_2-\alpha'_1)(\alpha_2-\alpha'_2)(\alpha_2-\alpha'_3)...(\alpha_2-\alpha'_n)(\alpha_3-\alpha'_1)(\alpha_3-\alpha'_2)...$$
$$...(\alpha_3-\alpha'_n)\dots\dots(\alpha_m-\alpha'_1)(\alpha_m-\alpha'_2)(\alpha_m-\alpha'_3)...(\alpha_m-\alpha'_n)...$$

Na prawéj stronie (3) i (4) mamy mn czynników. Jeżeli każdy pierwiastek równań (1) i (2) pomnożymy przez c, to w taki sposób pomnożony będzie wyniknik przez c^{mn}, ponieważ każda z owych mn różnic $(\alpha_p-\alpha_q')$ posiada czynnik c. Takie mnożenie zpowoduje mnożenie współczynników p_1 przez c', p_2 przez c^2, p_3 przez c^3, p_m przez c^m, p'_1 przez c', p'_2 przez c^2, p'_3 przez c^3, p'_n przez c^n. Skoro więc w wyniknik R włożymy

$$\begin{array}{lllll}
 & p_1c^1,\ p'_1c^1 & \text{zamiast} & p_1,\ p'_1 & \\
 & p_2c^2,\ p'_2c^2 & \text{,,} & p_2,\ p'_2 & \\
 & p_3c^3,\ p'_3c^3 & \text{,,} & p_3,\ p'_3 & \text{etc.} \\
\text{albo też} & a_0c^0,\ a'_0c^0 & \text{,,} & a_0,\ a'_0 & \\
 & a_1c^1,\ a'_1c^1 & \text{,,} & a_1,\ a'_1 & \\
 & a_2c^2,\ a'_2c^2 & \text{,,} & a_2,\ a'_2 & \\
 & a_3c^3,\ a'_3c^3 & \text{,,} & a_3,\ a'_3 & \text{etc.}
\end{array}$$

to znaczy to samo, co mnożenie wyniknika R przez c^{mn}. Z tego wynika, iż każdy wyraz w R jest pomnożony przez c^{mn}, summa wskaźników każdego wyrazu jest więc równa iloczynowi mn, t. j. równa iloczynowi z liczb, które stopnie równań danych oznaczają.

§ 120.

Wniosek. Jeżeli we współczynnikach a_1, a'_1 inna nowa zmienna (z) w pierwszéj potędze jest zawartą i we współczynnikach $a_2, a'_2; a_3, a'_3, a_4, a'_4$ etc. odpowiednio ta sama zmienna w drugiéj, trzeciéj, czwartéj potędze etc., wyniknik R zawiera tę zmienną w mnéj potędze. Albo téż jeżeli w wynikniku zamiast każdego współczynnika a_p podstawiamy odpowiedni wyraz $x^p y^p$, to każdy wyraz wyniknika dzielić można bez reszty przez $x^{mn} y^{mn}$.

§ 121.

Twierdzenie. Liczba systemów wartości zmiennych zadosyć czyniących dwom równaniom jednorodnym z trzema zmiennemi $m$go i $n$go stopnia, równa jest iloczynowi mn.

Dowód. Pisząc równania podług potęg zmiennéj x w kształcie następującym:

$$a_0 x^m + (a_1 y + a_2 z) x^{m-1} + (a_3 y^2 + a_4 yz + a_5 z^2) x^{m-2} + \text{etc.} = 0$$

$$a'_0 x^n + (a'_1 y + a'_2 z) x^{n-1} + (a'_3 y^2 + a'_4 yz + a'_5 z^2) x^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

możemy z nich x wyrugować. Ponieważ współczynnik przy x^{m-1} jest funkcyą jednorodną zmiennych (y i z) pierwszego stopnia, współczynnik przy x^{m-2} funkcyą jednorodną zmiennych (y i z) drugiego stopnia etc., przeto być musi wyniknik podług § 119 funkcyą jednorodną zmiennych (y i z) mngo stopnia. Zatém mamy mn systemów wartości zmiennych (y, z), które wyniknik przyprowadzają do zera. Każdy taki system wartości, włożony w oba równania, prowadzi do wspólnego pierwiastku dla x w obydwóch równaniach, ponieważ ich wyniknik jest równy zeru. Każde takie x ze swemi odpowiedniemi wartościami y i z zadosyć czyni równaniom, zatém mamy mn takich systemów wartości dla zmiennych xyz.

Przykład. Współrzędne czterech punktów mają być obrachowane, w których się przecinają następujące cięcia ostrokręgowe:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$$

$$a'_{11} x_1^2 + a'_{22} x_2^2 + a'_{33} x_3^2 + 2a'_{12} x_1 x_2 + 2a'_{13} x_1 x_3 + 2a'_{23} x_2 x_3 = 0$$

albo:

$$a_{11}x_1^2 + 2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) = 0$$
$$a'_{11}x_1^2 + 2(a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3)x_1 + (a'_{22}x_2^2 + 2a'_{23}x_2x_3 + a'_{33}x_3^2) = 0$$

Rugując z tych równań zmienną x_1, otrzymamy:

$$\{a_{11}(a'_{22}x_2^2+2a'_{23}x_2x_3+a'_{33}x_3^2)-a'_{11}(a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2)\}^2+$$
$$+\{2a'_{11}(a_{12}x_2+a_{13}x_3)-2a_{11}(a'_{12}x_2+a'_{13}x_3)\}\cdot\{$$
$$\{2(a_{12}x_2+a_{13}x_3)(a'_{22}x_2^2+2a'_{23}x_2x_3+a'_{33}x_3^2)-$$
$$-2(a'_{12}x_2+a'_{13}x_3)(a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2)\}=0.$$

albo:

$$\{(a_{11}a'_{22})x_2^2+2(a_{11}a'_{23})x_2x_3+(a_{11}a'_{33})x_3^2\}^2+$$
$$+4\{(a_{11}a'_{12})x_2+(a_{11}a'_{13})x_3\}.\{(a_{22}a'_{12})x_2^3+[(a_{22}a'_{13})+2(a_{23}a'_{12})]x_2^2x_3+$$
$$+[(a_{33}a'_{12})+2(a_{23}a'_{13})]x_2x_3^2+(a_{33}a'_{13})x_3^3\}=0$$

gdzie jest $(a_{11}a'_{22}) = \begin{vmatrix} a_{11}a'_{11} \\ a_{22}a'_{22} \end{vmatrix}$, $(a_{33}a'_{13}) = \begin{vmatrix} a_{33}a'_{33} \\ a_{13}a'_{13} \end{vmatrix}$ etc.

Rozwiązawszy to równanie dla $x_2 : x_3$, znajdziemy cztery wartości dla $x_2 : x_3$, które czterem punktom przecięcia odpowiadają. Włożywszy jednę z tych wartości w oba nasze równania i obrachowawszy ich wspólny pierwiastek, otrzymamy odpowiednią wartość dla $x_1 : x_3$. Ten sposób postępowania prowadzi nas zawsze do wartości współrzędnych, które każdemu punktowi odpowiadają.

§ 122.

Zadanie. Wynaleść wspólny pierwiastek dwóch równań jednorodnych *m*go i *n*go stopnia z dwoma nieznajomemi.

Rozwiązanie. Ponieważ wyniknik R jest równy iloczynowi wszystkich różnic pomiędzy pierwiastkami obydwóch równań, przeto R zmienić się nie może, skoro wszystkie pierwiastki powiększamy albo zmniejszamy o stałą ilość h.

Wyniknik równań

$$a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 + \dots = 0$$
$$a'_0x^n + a'_1x^{n-1}y + a'_2x^{n-2}y^2 + \dots = 0$$

możemy wyrazić przez

$$R = f(a_0,\ a_1,\ a_2, \dots a_m;\ a'_0,\ a'_1,\ a'_2, \dots a'_n)$$

Za pomocą podstawienia pierwiastków

$$\alpha_p = \alpha_p + h$$

zmieniają się równania nasze w następujące:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1}y + A_2x^{m-2}y^2 + \dots = 0$$
$$A'_0x^n + A'_1x^{n-1}y + A'_2x^{n-2}y^2 + \dots = 0$$

Wyniknik R zaś zmienia się w

$$R_1 = f(A_0,\ A_1,\ A_2 \dots A_m;\ A'_0,\ A'_1,\ A'_2, \dots A'_n)$$

W skutek związku współczynników z pierwiastkami mamy na mocy podstawienia

$A_0 = a_0,\ A'_0 = a'_0;$

$A_1 = a_1 + ma_0h,\ A'_0 = a'_1 + na'_0h;$

$A_2 = a_2 + (m-1)a_1h + \dfrac{m(m-1)}{1.2}a_0h^2;$

$A'_2 = a'_2 + (n-1)a'_1h + \dfrac{n(n-1)}{1.2}a'_0h^2;$

$A_3 = a_3 + (m-2)a_2h + \dfrac{m(m-1)}{1.2}a_1h^2 + \dfrac{m(m-1)(m-1)}{1.2.3}a_0h^2;$

$A'_3 = a'_3 + (n-2)a'_2h + \dfrac{n(n-1)}{1.2}a'_1h^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a'_0h^3;$ etc.

$A_m = a_m + a_{m-1}h + a_{m-2}h^2 + a_{m-3}h^3 + \dots + a_0h^m$

$A'_n = a'_n + a'_{n-1}h + a'_{n-2}h^2 + a'_{n-3}h^3 + \dots + a'_0h^n$

Z tych równań wynikają następujące:

$$A_0-a_0=\triangle a_0=0,\quad A'_0-a'_0=\triangle a'_0=0;$$

$$A_1-a_1=\triangle a_1=ma_0h,\quad A'_1-a'_1=\triangle a'_1=na'_0h;$$

$$A_2-a_2=\triangle a_2=(m-1)a_1h+\frac{m(m-1)}{1.2}a_0h^2,$$

$$A'_2-a'_2=\triangle a'_2=(n-1)a_1h+\frac{n(n-1}{1.2}a'_0h^2;$$

$$A_3-a_3=\triangle a_3=(m-2)a_2h+\frac{m(m-1)}{1.2}a_1h^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a_0h^3,$$

$$A'_3-a'_3=\triangle a'_3=(n-2)a'_2h+\frac{n(n-1)}{1.2}a'_1h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a'_0h^3;\text{etc}$$

$$A_m-a_m=\triangle a_m=a_{m-1}h+a_{m-2}h^2+a_{m-3}h^3+\ldots+a_0h^m,$$

$$A'_n-a'_n=\triangle a'_n=a'_{n-1}h+a'_{n-2}h^2+a'_{n-3}h^3+\ldots+a'_0h^n.$$

W skutek tych równań mamy:

$$R_1=\begin{cases} f(A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots A_m;\ A'_0,\ A'_1,\ A'_2,\ldots A'_n) \\ f(a_0+\triangle a_0,\ a_1+\triangle a_1,\ a_2+\triangle a_2,\ldots a_m+\triangle a_m; \\ \qquad a'_0+\triangle a'_0,\ a'_1+\triangle a'_1,\ a_2+\triangle a_2,\ldots a'_n+\triangle a'_n) \end{cases}$$

Podług wzoru Taylor'a być musi:

$$R_1=R+h\left(ma_0\frac{dR}{da_1}+(m-1)a_1\frac{dR}{da_2}+(m-2)a_2\frac{dR}{da_3}+\ldots+a_{m-1}\frac{dR}{da_m}+\right.$$
$$\left.+na'_0\frac{dR}{da'_1}+(n-1)a'_1\frac{dR}{da'_2}+(n-2)a'_2\frac{dR}{da'_3}+\ldots+a'_{n-1}\frac{dR}{da'_n}\right)+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Ponieważ R jest zawsze równe R_1 dla jakiegokolwiekbądź h, przeto nietylko czynnik, stojący przy h, ale i czynniki wszystkich potęg przyrostku h muszą być równe zeru. Zatém wynika:

$$ma_0\frac{dR}{da_1}+(m-1)a_1\frac{dR}{da_2}+(m-2)a_2\frac{dR}{da_3}+\ldots+a_{m-1}\frac{dR}{da_m}+$$
$$+na'_0\frac{dR}{da'_1}+(n-1)a'_1\frac{dR}{da'_2}+(n-2)a'_2\frac{dR}{da'_3}+\ldots+a'_{n-1}\frac{dR}{da'_n}=0$$

Skoro jest $m = n$, wtenczas mamy:

$$n\left(a_0\frac{dR}{da_1}+a'_0\frac{dR}{da'_1}\right)+(n-1)\left(a_1\frac{dR}{da_2}+a'_1\frac{dR}{da'_2}\right)+$$
$$+(n-2)\left(a_2\frac{dR}{da_3}+a'_2\frac{dR}{da'_3}\right)+\ldots+\left(a_{n-1}\frac{dR}{da_n}+a'_{n-1}\frac{dR}{da'_n}\right)=0.$$

Robiąc te same uwagi nad współczynnikami równań, dojdziemy do obrachowania wspólnego pierwiastku.

Jeżeli oba równania

$$U=0,\ V=0$$

mają wyniknik

$$R=0$$

wtenczas istnieje dla nich wspólny pierwiastek $\frac{x_1}{y_1}=\varkappa$.

Włożywszy w równanie $U=0$ zamiast

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m$$

współczynniki następujące:

$$a_0+\triangle a_0,\ a_1+\triangle a_1,\ a_2+\triangle a_2,\ \ldots\ a_m+\triangle a_m$$

zmieniamy je w następujący kształt:

$$(1)\ldots\ a_0x^m+a_1x^{m-1}y+a_2x^{m-2}y^2+\ldots+\triangle a_0x^m+\triangle a_1x^{m-1}y+\ldots=0$$

Temu równaniu zadosyć czynić będą te same wartości x_1, y_1, skoro zadosyć czynią równaniom

$$U=0,\ V=0$$

i skoro przyrostki

$$\triangle a_0,\ \triangle a_1,\ \triangle a_2 \text{ etc.}$$

wypełnią warunek

$$(2)\ldots\ \triangle a_0x_1^m+\triangle a_1a_1^{m-1}y_1+\triangle a_2x_1^{m-2}y_1^2+\ldots=0$$

Jeżeli równaniu temu zadosyć się czyni, równanie (1) i dane dwa równania mają wspólny pierwiastek. Wyniknik zatém równania (1) i równania $V=0$ musi być równy zeru.

Wyniknik tych równań otrzymamy, skoro w wynikniku R zmienimy a_0, a_1, a_2 etc. w współczynniki

$$a_0+\triangle a_0,\ a_1+\triangle a_1,\ a_2+\triangle a_2 \text{ etc.}$$

Za pomocą takiego podstawienia będzie:

$$R+\left(\triangle a_0\frac{dR}{da_0}+\triangle a_1\frac{dR}{da_1}+\triangle a_2\frac{dR}{da_2}+\ldots\right)+\ldots=0$$

Ponieważ mamy $R=0$, przeto przyrostki zadosyć czynić muszą także równaniu:

$$(3)\ldots\quad \triangle a_0\frac{dR}{da_0}+\triangle a_1\frac{dR}{da_1}+\triangle a_2\frac{dR}{da_2}+\ldots=0$$

Z równania (2) i (3) wynika:

$$(4)\ldots\quad x_1^m : x_1^{m-1}y_1 : x_1^{m-2}y_1^2 : x_1^{m-3}y_1^3 : \text{etc.} \ldots : y_1^m =$$

$$=\frac{dR}{da_0}:\frac{dR}{da_1}:\frac{dR}{da_2}:\text{etc.}\ldots:\frac{dR}{da_m}$$

Z téj proporcyi wynika, jak Richelot najpierwéj wynalazł, wspólny pierwiastek:

$$(5)\ldots\quad x_1:y_1=\frac{dR}{da_0}:\frac{dR}{da_1}$$

Tak samo mamy za pomocą drugiego równania $V=0$:

$$(6)\ldots\quad x_1:y_1=\frac{dR}{da'_0}:\frac{dR}{da'_1}$$

Z ogólnych dwóch proporcyi:

$$x_1^{m-k}y_1^k : x_1^{m-l} : y_1^l = \frac{dR}{da_k}:\frac{dR}{da_l}$$

$$x_1^{n-k}y_1^k : x_1^{n-l}y_1^l = \frac{dR}{da'_k}:\frac{dR}{da'_l}$$

wynika następująca:

$$(7)\ldots\quad \frac{dR}{da_k}:\frac{dR}{da_l}=\frac{dR}{da'_k}:\frac{dR}{da'_l}$$

Jeżeli w jedno z danych równań na miejsca potęg zmiennych włożymy proporcyonalne częściowe iloczyny różniczkowe wyniknika podług odpowiednich współczynników drugiego równania, otrzymamy:

$$(8)\ldots\quad a'_0\frac{dR}{da_{m-n}}+a'_1\frac{dR}{da_{m-n+1}}+a'_2\frac{dR}{da_{m-n+2}}+\ldots+a'_n\frac{dR}{da_m}=0$$

a dla $m=n$ jest:

$$(9)\ldots\quad \begin{cases} a_0\dfrac{dR}{da'_0}+a_1\dfrac{dR}{da'_1}+a_2\dfrac{dR}{da'_2}+\ldots+a_n\dfrac{dR}{da'_n}=0 \\ a'_0\dfrac{dR}{da_0}+a'_1\dfrac{dR}{da_1}+a'_2\dfrac{dR}{da_2}+\ldots+a'_n\dfrac{dR}{da_n}=0 \end{cases}$$

Możemy jeszcze w inny sposób wynaleść wspólny pierwiastek dwóch danych równań; sposób ten poprowadzi nas do wynalezienia nietylko jednego lecz i więcéj pierwiastków wspólnych. Oznaczywszy przez x_1, y_1 wspólny pierwiastek, a przez

$$x'_2, y'_2;\ x'_3, y'_3;\ x'_4, y'_4 \text{ etc.}$$

pierwiastki inne drugiego równania, pisać możemy jak wiadomo:

$$(10)\ldots\quad R=(a_0x_1^m+a_1x_1^{m-1}y_1+\ldots)(a_0x_2'^m+a_1x_2'^{m-1}y'_2+\ldots)($$
$$(a_0x_3'^m+a_1x_3'^{m-1}y'_3+a_2x_3'^{m-2}y_3'^2+\ldots)\ldots.$$

albo:

$$(11)\ldots\quad R=U_1\,.\,U'_2\,.\,U'_3\ldots.$$

Za pomocą różniczkowania wynika z tego równania:

$$(12)\ldots\quad \frac{dR}{da_0}=x_1^mU'_2\,.\,U'_3\ldots+x_2'^mU_1\,.\,U'_3\ldots+x_3'^mU_1U'_2U'_4\ldots+\ldots$$

Ponieważ mamy:

$$U_1=0$$

przeto być musi:

$$(13)\ldots\quad \frac{dR}{da_0}=x_1^mU'_2U'_3U'_4\ldots$$

W ten sam sposób otrzymamy:

$$(14)\ldots\ \frac{dR}{da_1} = x_1^{m-1} y_1 U'_2\, U'_3\, U'_4 \ldots$$

Z ostatnich dwóch równań wynika:

$$(15)\ldots\ \frac{dR}{da_0} : \frac{dR}{da_1} = x_1 : y_1$$

Jeżeli dwa równania mają dwa wspólne pierwiastki $x_1, y_1; x_2, y_2$, to znikają podług powyższych zasad pierwsze ilorazy różniczkowe wyniknika i proporcya (15) nie prowadzi do obrachowania wspólnych pierwiastków. Lecz za pomocą drugich ilorazów różniczkowych wyniknika dojdziemy do celu naszego na drodze podobnych badań.

Z równania:

$$(16)\ldots\ R = U_1 \,.\, U_2 \,.\, U'_3 \,.\, U'_4 \ldots$$

wynika:

$$(17)\ldots\ \frac{d^2R}{da_0^2} = x_1^m x_2^m U'_3\, U'_4 \ldots + x_1^m x_3^m U_2 U'_3 U'_4 \ldots +$$
$$+ x_2^m x_3'^m \,.\, U_1 U'_3\, U'_4 \ldots + \ldots$$

Ponieważ jest

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0$$

przeto być musi:

$$\frac{d^2R}{da_0^2} = x_1^m \,.\, x_2^m U'_3 \,.\, U'_4 \ldots$$

W ten sam sposób otrzymamy:

$$(19)\ldots\ \frac{d^2R}{da_0 da_1} = [x_1^m \,.\, x_2^{m-1} y_2 + x_2^m x_1^{m-1} y_1] U'_3 U'_4 \ldots$$

$$(20)\ldots\ \frac{d^2R}{da_1^2} = x_1^{m-1} y_1 x_2^{m-1} y_2 U'_3\, U'_4 \ldots$$

Z ostatnich trzech równań wynika, iż rozwiązanie kwadratowego równania:

$$(21)\ldots\ \xi^2\frac{d^2R}{da_0^2}-\xi\eta\frac{d^2R}{da_0da_1}+\eta^2\frac{d^2R}{da_1^2}=0$$

prowadzi nas do wynalezienia wartości dla

$$x_1^m : x_1^{m-1}y_1 \text{ i } x_2^m : x_2^{m-1}y_2$$

albo dla wspólnych pierwiastków

$$x_1 : y_1 \text{ i } x_2 : y_2$$

Oznaczenie symboliczne

$$\left(\xi\frac{dR}{da_0}-\eta\frac{dR}{da_1}\right)^t=0$$

gdzie q^{ta} potęga oznacza q^{ty} iloraz różniczkowy, prowadzi do wynalezienia tyle wspólnych pierwiastków ile ich istnieje.

Wyznacznik Jakobiego.

§ 123.

Objaśnienie. Dla dalszéj teoryi rugowań ma wielkie znaczenie wyznacznik Jakobiego, przeto bliżéj się nad nim zastanowić musimy.

Mając n równań z n zmiennemi

$$u=0,\ v=0,\ w=0 \text{ etc.}$$

nazywamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz}, & \ldots \\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz}, & \ldots \\ \frac{dw}{dx}, & \frac{dw}{dy}, & \frac{dw}{dz}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

wyznacznikiem Jakobiego i oznaczamy go przez *J*. Ponieważ w tym wyznaczniku elementa są funkcyami, przeto nazywamy go także wyznacznikiem funkcyjnym.

Oznaczywszy zmienne przez

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n,$$

funkcye tych zmiennych zaś przez

$$f_1, f_2, f_3, \ldots f_n,$$

iloraz różniczkowy podług x_p przez f_{qp}, tak iż w szczególnym przypadku jest

$$f_{34} = \frac{df_3}{dx_4},$$

możemy wyznacznik Jakobiego ogólnie wyrazić przez

$$fx = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_1}{dx_2}, & \frac{df_1}{dx_3}, & \ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \frac{df_2}{dx_3}, & \ldots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}, & \frac{df_n}{dx_2}, & \frac{df_n}{dx_3}, & \ldots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

albo nareszcie przez

$$fx = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \cdots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \cdots f_{2n} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \cdots f_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ f_{n1} f_{n2} f_{n3} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 124.

Twierdzenie. Jeżeli n funkcyi $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ zadosyć czynią warunkowi

$$\varphi(f_1, f_2, f_3, \dots f_n) = 0$$

wyznacznik Jakobiego jest równy zeru.

Dowód. Za pomocą różniczkowania mamy:

$$\frac{d\varphi}{df_1} f_{11} + \frac{d\varphi}{df_2} f_{12} + \frac{d\varphi}{df_3} f_{13} + \dots + \frac{d\varphi}{df_n} f_{1n} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{df_1} f_{21} + \frac{d\varphi}{df_2} f_{22} + \frac{d\varphi}{df_3} f_{23} + \dots + \frac{d\varphi}{df_n} f_{2n} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{df_1} f_{31} + \frac{d\varphi}{df_2} f_{32} + \frac{d\varphi}{df_3} f_{33} + \dots + \frac{d\varphi}{df_n} f_{3n} = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad \dots \quad . \quad .$$

$$\frac{d\varphi}{df_1} f_{n1} + \frac{d\varphi}{df_2} f_{n2} + \frac{d\varphi}{df_3} f_{n3} + \dots + \frac{d\varphi}{df_n} f_{nn} = 0$$

Z tych równań wynika:

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \dots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \dots f_{2n} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \dots f_{3n} \\ \vdots \\ f_{n1} f_{n2} f_{n3} \dots f_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 125.

Twierdzenie. Jeżeli wyznacznik funkcyjny J jest identycznie równy zeru, funkcye od siebie są zależne, t. j. funkcye odpowiadają pewnemu warunkowi.

Dowód. Oznaczywszy przez f_1 jednę z n funkcyi, w której zmienna x_1 nie braknie, możemy sobie łatwo wystawić zmienną x_1 jako funkcyą pewną zależną od $f_1, x_2, x_3, \dots x_n$, a wszystkie inne funkcye możemy także zależnemi zrobić od $f_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Niech oznacza f_2 jednę z $n-1$ przekształconych funkcyi, w której zmienna x_2 nie braknie, natenczas jest x_2 pewną funkcyą zależną od $f_1, f_2, x_3, x_4, \dots x_n$, a resztę $n-2$ funkcyi można zależnemi zrobić od f_1, f_2, x_3, $x_4 \ldots x_n$. Oznaczywszy przez f_3 jednę z ostatnich funkcyi, w któréj x_3 nie braknie, możemy w sposób podany daléj postępować. Zatém oznacza:

f_1 funkcyą zależną od $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

f_2 „ „ „ $f_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

f_3 „ „ „ $f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$

. . . . .

f_n „ „ „ $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}, x_n$

Oznaczywszy ilorazy różniczkowe funkcyi przekształconych przez nawiasy, mieć będziemy:

$$f_{11} = \frac{df_1}{dx_1} = \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)$$

$$f_{12} = \frac{df_1}{dx_2} = \left(\frac{df_1}{dx_2}\right)$$

$$f_{13} = \frac{df_1}{dx_3} = \left(\frac{df_1}{dx_3}\right)$$

. . . .

$$f_{1n} = \frac{df_1}{dx_n} = \left(\frac{df_1}{dx_n}\right)$$

$$f_{21} = \frac{df_2}{dx_1} = \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)$$

$$f_{22} = \frac{df_2}{dx_2} = \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_2}\right) + \left(\frac{df_2}{dx_2}\right)$$

$$f_{23} = \frac{df_2}{dx_3} = \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_3}\right) + \left(\frac{df_2}{dx_3}\right)$$

. . . .

$$f_{2n} = \frac{df_2}{dx_n} = \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_n}\right) + \left(\frac{df_2}{dx_n}\right)$$

$$f_{31} = \frac{df_3}{dx_1} = \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)$$

$$f_{32} = \frac{df_3}{dx_2} = \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_2}\right) + \left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)$$

$$f_{33} = \frac{df_3}{dx_3} = \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_3}\right) + \left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_3}\right) + \left(\frac{df_3}{dx_3}\right)$$

. . . .

$$f_{3n} = \frac{df_3}{dx_n} = \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_n}\right) + \left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_n}\right) + \left(\frac{df_3}{dx_n}\right)$$

$$f_{41} = \frac{df_4}{dx_1} = \left(\frac{df_4}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)$$

$$f_{42} = \frac{df_4}{dx_2} = \left(\frac{df_4}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_2}\right) + \left(\frac{df_4}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)$$

W ogóle mamy:

$$f_{pq} = \frac{df_p}{dx_q} = \left(\frac{df_p}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_q}\right) + \left(\frac{df_p}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_q}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{df_p}{df_{p-1}}\right)\left(\frac{df_{p-1}}{dx_q}\right) + \left(\frac{df_p}{dx_q}\right)$$

Z tych równań wynika:

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \cdots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \cdots f_{2n} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \cdots f_{3n} \\ \vdots \\ f_{n1} f_{n2} f_{n3} \cdots f_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} f_{21} f_{31} \cdots f_{n1} \\ f_{12} f_{22} f_{32} \cdots f_{n2} \\ f_{13} f_{23} f_{33} \cdots f_{n3} \\ \vdots \\ f_{1n} f_{2n} f_{3n} \cdots f_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix}
\left(\frac{df_1}{dx_1}\right), & \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_1}\right) & , \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_1}\right) & , \dots \\
\left(\frac{df_1}{dx_2}\right), & \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_2}\right)+\left(\frac{df_2}{dx_2}\right), & \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_2}\right)+\left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right) & , \dots \\
\left(\frac{df_1}{dx_3}\right), & \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_3}\right)+\left(\frac{df_2}{dx_3}\right), & \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_3}\right)+\left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_3}\right)+\left(\frac{df_3}{dx_3}\right) & , \dots \\
\vdots & & & \\
\left(\frac{df_1}{dx_n}\right), & \left(\frac{df_2}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_n}\right)+\left(\frac{df_2}{dx_n}\right), & \left(\frac{df_3}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_n}\right)+\left(\frac{df_3}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_n}\right)+\left(\frac{df_3}{dx_n}\right) & , \dots
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1\,, & 0\,, & 0\,, & \dots & 0 \\
\left(\frac{df_2}{df_1}\right), & 1\,, & 0\,, & \dots & 0 \\
\left(\frac{df_3}{df_1}\right), & \left(\frac{df_3}{df_2}\right), & 1\,, & \dots & 0 \\
\left(\frac{df_4}{df_1}\right), & \left(\frac{df_4}{df_2}\right), & \left(\frac{df_4}{df_3}\right), & 1 \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
\left(\frac{df_n}{df_1}\right), & \left(\frac{df_n}{df_2}\right), & \left(\frac{df_n}{df_3}\right), & \dots & 1
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\left(\frac{df_1}{dx_1}\right), & 0\,, & 0\,, & 0\,, \dots & 0 \\
\left(\frac{df_1}{dx_2}\right), & \left(\frac{df_2}{dx_2}\right), & 0\,, & 0\,, \dots & 0 \\
\left(\frac{df_1}{dx_3}\right), & \left(\frac{df_2}{dx_3}\right), & \left(\frac{df_3}{dx_3}\right), & 0\,, \dots & 0 \\
\left(\frac{df_1}{dx_4}\right), & \left(\frac{df_2}{dx_4}\right), & \left(\frac{df_3}{dx_4}\right), & \left(\frac{df_4}{dx_4}\right), \dots & 0 \\
\vdots & & & & \\
\left(\frac{df_1}{dx_n}\right), & \left(\frac{df_2}{dx_n}\right), & \left(\frac{df_3}{dx_n}\right), & \left(\frac{df_4}{dx_n}\right), \dots & \left(\frac{df_n}{dx_n}\right)
\end{vmatrix}
=
$$

$$
= 1 \,.\, \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)\left(\frac{df_3}{dx_3}\right) \dots \left(\frac{df_n}{dx_n}\right) = 0.
$$

Ponieważ wyznacznik funkcyjny J podług założenia jest identycznie równy zeru, t. j. znika, przeto musi być iloczyn

$$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)\left(\frac{df_3}{dx_3}\right)\cdots\left(\frac{df_n}{dx_n}\right)$$

równy zeru. Ponieważ ilorazy różniczkowe

$$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right),\ \left(\frac{df_2}{dx_2}\right),\ \cdots\left(\frac{df_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)$$

mają podług przypuszczenia odpowiednie zmienne x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1}, zatém znikać musi $\left(\frac{df_n}{dx_n}\right)$. Z tego wynika, iż f_n, nie mając x_n, wyrażona być może przez funkcye f_1, f_2, f_3, ... f_{n-1}.

§ 126.

Uwaga. Mając dwie grupy elementów:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \end{matrix}\right\|$$

w których liczba rzędów poziomych jest niższa od liczby rzędów pionowych, możemy z nich utworzyć wyznacznik podług § 66 następujący:

$$(1)\ldots\quad \left\|\begin{matrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{12}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{13}b_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{13}b_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{11}b_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{12}b_{23}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{13}b_{23}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{13} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}(b_{11}b_{23}-b_{21}b_{13})+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+(b_{12}b_{23}-b_{22}b_{13})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

W ten sam sposób otrzymamy:

$$(2)\ldots\quad \left\|\begin{matrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} b_{11} b_{12} b_{13} b_{14} \\ b_{21} b_{22} b_{23} b_{24} \end{matrix}\right\|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+a_{14}b_{14}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}+a_{14}b_{24} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}+a_{24}b_{14}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}+a_{24}b_{24} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{22} & b_{24} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{13} b_{14} \\ b_{23} b_{24} \end{vmatrix}$$

$$(3)\ldots\quad \left\|\begin{matrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} b_{11} b_{12} b_{13} b_{14} b_{15} \\ b_{21} b_{22} b_{23} b_{24} b_{25} \\ b_{31} b_{32} b_{33} b_{34} b_{35} \end{matrix}\right\|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+a_{14}b_{14}+a_{15}b_{15}, & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}+a_{14}b_{24}+a_{15}b_{25}, & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33}+a_{14}b_{34}+a_{15}b_{35} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}+a_{24}b_{14}+a_{25}b_{15}, & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}+a_{24}b_{24}+a_{25}b_{25}, & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33}+a_{24}b_{34}+a_{25}b_{35} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13}+a_{34}b_{14}+a_{35}b_{15}, & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}+a_{34}b_{24}+a_{35}b_{25}, & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33}+a_{34}b_{34}+a_{35}b_{35} \end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{14} \\ b_{21} b_{22} b_{24} \\ b_{31} b_{32} b_{34} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{15} \\ a_{21} a_{22} a_{25} \\ a_{31} a_{32} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{15} \\ b_{21} b_{22} b_{25} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{33} a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{13} b_{14} \\ b_{21} b_{23} b_{24} \\ b_{31} b_{33} b_{34} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} a_{15} \\ a_{21} a_{23} a_{25} \\ a_{31} a_{32} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{13} b_{15} \\ b_{21} b_{23} b_{25} \\ b_{31} b_{33} b_{35} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{14} a_{15} \\ a_{21} a_{24} a_{25} \\ a_{31} a_{34} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{14} b_{15} \\ b_{21} b_{24} b_{25} \\ b_{31} b_{34} b_{35} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{32} a_{33} a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} b_{13} b_{14} \\ b_{22} b_{23} b_{24} \\ b_{32} b_{33} b_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} a_{15} \\ a_{22} a_{23} a_{25} \\ a_{32} a_{33} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} b_{13} b_{15} \\ b_{22} b_{23} b_{25} \\ b_{32} b_{33} b_{35} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} a_{14} a_{15} \\ a_{22} a_{24} a_{25} \\ a_{32} a_{34} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} b_{14} b_{15} \\ b_{22} b_{24} b_{25} \\ b_{32} b_{34} b_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} a_{14} a_{15} \\ a_{23} a_{24} a_{25} \\ a_{33} a_{34} a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{13} b_{14} b_{15} \\ b_{23} b_{24} b_{25} \\ b_{33} b_{34} b_{35} \end{vmatrix}$$

Z tych specyalnych przykładów wynika następujące ogólne wyrażenie:

$$(4)\ldots \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2m} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nm} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \ldots b_{1m} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \ldots b_{2m} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nm} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \ldots c_{2n} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ c_{n1} c_{n2} c_{n3} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} = R =$$

$$= \Sigma P . Q$$

gdzie jest $m > n$,

$$c_{pq} = a_{p1} b_{q1} + a_{p2} b_{q2} + a_{p3} b_{q3} + \ldots a_{pn} b_{qn}.$$

Wyznacznik P powstaje z dowolnéj kombinacyi n rzędów pionowych pierwszego systemu, z wyznacznika P powstaje Q, skoro zmieniamy a w b. Utworzywszy więc z m rzędów pionowych wszystkie kombinacye do $n$éj klasy, otrzymamy $R = \Sigma PQ$ jako summę z $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)(}{1.2.3\ldots n}$ różnych iloczynów PQ.

Jeżeli jest $m = n$, mamy

$$(5)\ldots\ R = P\,.\,Q \ (\S\ 73,\ 6)$$

Skoro jest $m < n$, wtenczas mamy

$$(6)\ldots\ R = 0.$$

Dla lepszego pojęcia równania ostatniego przytoczymy przykład specyalny:

$$(7)\ldots \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12}, & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{21}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{31}, & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12} \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{22}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{32}, & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{21}.0 + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{32}, & a_{31}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} + b_{12}b_{22}\,.0 =$$

$$= b_{11}b_{22}b_{31}.0 + b_{11}b_{22}b_{32}\,.0 + b_{12}b_{21}b_{31}.0 + b_{12}b_{21}b_{32}.0 = 0$$

§ 127.

Twierdzenie. Jeżeli

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \cdots f_n$$

są funkcyami zmiennych

$$y_1, y_2, y_3, \dots y_m$$

a te zaś funkcyami zmiennych niezależnych

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n,$$

wtenczas jest

$$\frac{df_p}{dx_q} = \frac{df_p}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_q} + \frac{df_p}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_q} + \dots + \frac{df_p}{dy_m}\frac{dy_m}{dx_q},$$

w skutek czego otrzymamy:

$$(1)\dots \left\| \begin{matrix} \frac{df_1}{dy_1}, & \frac{df_1}{dy_2}, & \dots & \frac{df_1}{dy_m} \\ \frac{df_2}{dy_1}, & \frac{df_2}{dy_2}, & \dots & \frac{df_2}{dy_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{df_n}{dy_1}, & \frac{df_n}{dy_2}, & \dots & \frac{df_n}{dy_m} \end{matrix} \right\| . \left\| \begin{matrix} \frac{dy_1}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dx_1}, & \dots & \frac{dy_m}{dx_1} \\ \frac{dy_1}{dx_2}, & \frac{dy_2}{dx_2}, & \dots & \frac{dy_m}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dy_1}{dx_n}, & \frac{dy_2}{dx_n}, & \dots & \frac{dy_m}{dx_n} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_1}{dx_2}, & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{df_n}{dx_1}, & \frac{df_n}{dx_2}, & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{matrix} \right| = fx$$

Skoro jest $m > n$, w którym przypadku funkcye są zawisłe pomiędzy sobą, wtenczas mamy

$$(2)\dots f_x = 0 \quad (\S\ 166,\ 6,\ 7)$$

Dla $m = n$ mamy:

$$(3)\dots f_x = f_y \cdot y_x \quad (\S\ 166,\ 5)$$

dla $m > n$ jest

$$(4)\dots f_x = \Sigma f_y \cdot y_x \quad (\S\ 166,\ 4)$$

§ 128.

Twierdzenie. Jeżeli n funkcyi

$$f_1, f_2, f_3, \dots f_n$$

i n zmiennych

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

są związane n równaniami

$$(1)\dots\quad \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0, \dots \varphi_n = 0,$$

wtenczas mamy:

$$(2)\dots\quad \varphi_f \cdot f_x = (-1)^n \varphi_x$$

$$(3)\dots\quad \varphi_x \cdot x_f = (-1)^n \varphi_f$$

$$(4)\dots\quad f_x \cdot x_f = 1.$$

Dowód. Dla dowodu zaprowadźmy oznaczenia następujące:

$$\varphi_f = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{df_1}, & \frac{d\varphi_1}{df_2}, & \dots & \frac{d\varphi_1}{df_n} \\ \frac{d\varphi_2}{df_1}, & \frac{d\varphi_2}{df_2}, & \dots & \frac{d\varphi_2}{df_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{df_1}, & \frac{d\varphi_n}{df_2}, & \dots & \frac{d\varphi_n}{df_n} \end{vmatrix}, \quad \varphi_x = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \dots & \frac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \dots & \frac{d\varphi_n}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n}, & \frac{d\varphi_2}{dx_n}, & \dots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$f_x = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_1}, & \dots & \frac{df_n}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \dots & \frac{df_n}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_1}{dx_n}, & \frac{df_2}{dx_n}, & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}, \quad x_f = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{df_1}, & \frac{dx_1}{df_2}, & \dots & \frac{dx_1}{df_n} \\ \frac{dx_2}{df_1}, & \frac{dx_2}{df_2}, & \dots & \frac{dx_2}{df_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dx_n}{df_1}, & \frac{dx_n}{df_2}, & \dots & \frac{dx_n}{df_n} \end{vmatrix}$$

Na mocy własności równań (1) mamy ogólnie:

$$(5)\dots\ \frac{d\varphi_p}{df_1}\frac{df_1}{dx_q}+\frac{d\varphi_p}{df_2}\frac{df_2}{dx_q}+\dots+\frac{d\varphi_p}{df_n}\frac{df_n}{dx_q}=-\frac{d\varphi_p}{dx_q}$$

Jeżeli x jako funkcye zależne od f uważamy, mamy zaś

$$(5)\dots\ \frac{d\varphi_p}{dx_1}\frac{dx_1}{df_q}+\frac{d\varphi_p}{dx_2}\frac{dx_2}{df_q}+\dots+\frac{d\varphi_p}{dx_n}\frac{dx_n}{df_q}=-\frac{d\varphi_p}{df_q}$$

Z równania (5) wynika:

$$\varphi_f \cdot f_x = (-1)^n \cdot \varphi_x$$

z równania (6) zaś

$$\varphi_x \cdot x_f = (-1)^n \cdot \varphi_f$$

Pomnożywszy równanie ostatnie, otrzymamy:

$$f_x \cdot x_f = 1.$$

§ 129.

Własność kilku funkcyi jednorodnych.

Jeżeli funkcya z n zmiennemi $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ stopnia p^{go}

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$

wypełnia warunek następujący:

$$(1)\dots\ t^p f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = f(x_1 t, x_2 t, x_3 t, \dots x_n t)$$

nazywamy ją funkcyą jednorodną.

Różniczkując równanie (1) podług t, otrzymamy:

$$(2)\dots\ p t^{p-1} f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1\frac{df}{dx_1}+x_2\frac{df}{dx_2}+\dots+x_n\frac{df}{dx_n}$$

$$(3)\dots\ p_{(p-1)} t^{p-2} f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^2\frac{d^2f}{dx_1^2}+x_2^2\frac{d^2f}{dx_2^2}+\dots+x_n^2\frac{d^2f}{dx_n^2}+$$

$$+2x_1x_2\frac{d^2f}{dx_1dx_2}+2x_1x_3\frac{d^2f}{dx_1dx_3}+\dots+2x_{n-1}x_n\frac{d^2f}{dx_{n-1}dx_n}$$

Włożywszy w te równania $t = 1$, otrzymamy:

$$(4)\dots\quad p\,.f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n$$

$$(5)\dots\quad p_{(p-1)}\,.f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^2 f_{11} + x_2^2 f_{22} + x_3^2 f_{33} + \dots + x_n^2 f_{nn} +$$
$$+ 2x_1 x_2 f_{12} + 2x_1 x_3 f_{13} + \dots + 2x_1 x_n f_{1n} + \dots + 2x_{n-1} x_n f_{n-1,\, n}$$

gdzie jest $f_p = \frac{df}{dx_p},\ f_{pq} = \frac{d^2 f}{dx_p dx_q}$

Z równania (4) wynika:

$$(p-1) f_1 = f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3 + \dots + f_{1n} x_n$$
$$(p-1) f_2 = f_{21} x_1 + f_{22} x_2 + f_{23} x_3 + \dots + f_{2n} x_n$$
$$(p-1) f_3 = f_{31} x_1 + f_{32} x_2 + f_{33} x_3 + \dots + f_{3n} x_n$$
$$\vdots$$
$$(p-1) f_n = f_{n1} x_1 + f_{n2} x_2 + f_{n3} x_3 + \dots + f_{nn} x_n$$

w tych równaniach jest ogólnie:

$$f_q = \frac{df}{dx_q},\ f_{qr} = \frac{d^2 f}{dx_q dx_r}$$

§ 130.

Twierdzenie. Jeżeli równaniom dowolnéj liczby zadosyć czyni wspólny system wartości, to ten sam system zadosyć czyni wyznacznikowi Jakobi'ego tych równań, a skoro te równania są równego rzędu, to ten system także zadosyć czyni częściowym ilorazom różniczkowym wyznacznika Jakobi'ego.

Dowód. Ogólny dowód łatwo wynika z dowodu, który prowadzić będziemy na równaniach trzech $n$go stopnia z trzema zmiennemi.

Przyjąwszy następujące oznaczenia:

$$\frac{du}{dx}=a_{11},\ \frac{du}{dy}=a_{12},\ \frac{du}{dz}=a_{13}$$

$$\frac{dv}{dx}=a_{21},\ \frac{dv}{dy}=a_{22},\ \frac{dv}{dz}=a_{23}$$

$$\frac{dw}{dx}=a_{31},\ \frac{dw}{dy}=a_{32},\ \frac{dw}{dz}=a_{33}$$

możemy pisać za pomocą własności funkcyi jednorodnych:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=nu$$

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=nv$$

$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=nw$$

Na mocy § 50 (3) wynika z tych równań:

$$Jx=A_{11}nu+A_{21}nv+A_{31}nw$$

Z tego równania wynika, iż ten sam system wartości, który wspólnie u, v, w przyprowadza do zera, także i J do zera prowadzić musi.

Rożniczkując równanie ostatnie, otrzymamy:

$$J+x\frac{dJ}{dx}=nu\frac{dA_{11}}{dx}+nv\frac{dA_{21}}{dx}+nw\frac{dA_{31}}{dx}+n(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})$$

$$x\frac{dJ}{dy}=nu\frac{dA_{11}}{dy}+nv\frac{dA_{21}}{dy}+nw\frac{dA_{31}}{dy}+n(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})$$

$$x\frac{dJ}{dz}=nu\frac{dA_{11}}{dz}+nv\frac{dA_{21}}{dz}+nw\frac{dA_{31}}{dz}+n(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})$$

Za pomocą §§ 42 i 44 jest:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=J$$

$$a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$$

$$a_{12}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0$$

Ponieważ podług przyjęcia jest:

$$u=0,\ v=0,\ w=0$$

przeto być musi oprócz

$$J = 0$$

także
$$\frac{dJ}{dx} = 0, \quad \frac{dJ}{dy} = 0, \quad \frac{dJ}{dz} = 0.$$

§ 131.

Twierdzenie. Jeżeli n równaniom z n zmiennemi wspólny system wartości zadosyć czyni i jeżeli $(n-1)$ równań są równego stopnia, to dla tego systemu pochodne częściowe wyznacznika funkcyjnego wszystkich n funkcyi są proporcyonalne odpowiednim pochodnym częściowym funkcyi nierównego stopnia.

Dowód. Przyjąwszy te same oznaczenia, które się znajdują w ostatnim paragrafie, z wyjątkiem tylko, iż u i v są $n$go stopnia, w zaś $m$go stopnia, mieć będziemy podług ostatniego paragrafu:

$$J + x\frac{dJ}{dx} = nu\frac{dA_{11}}{dx} + nv\frac{dA_{21}}{dx} + mw\frac{dA_{31}}{dx} +$$

$$+ na_{11}A_{11} + na_{21}A_{21} + ma_{31}A_{31}$$

Ponieważ mamy:

$$J = 0, \; u = 0, \; v = 0, \; w = 0$$

przeto otrzymamy:

$$x\frac{dJ}{dx} = na_{11}A_{11} + na_{21}A_{21} + ma_{31}A_{31}$$

W podobny sposób przychodzimy do równań:

$$y\frac{dJ}{dy} = na_{12}A_{12} + na_{22}A_{22} + ma_{32}A_{32}$$

$$z\frac{dJ}{dz} = na_{13}A_{13} + na_{23}A_{23} + ma_{33}A_{33}$$

Dodając te równania, otrzymamy:

$$x\frac{dJ}{dx}+y\frac{dJ}{dy}+z\frac{dJ}{dz}=n(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13})+$$
$$+n(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})+$$
$$+m(a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33})$$

albo:

$$x\frac{dJ}{dx}+y\frac{dJ}{dy}+z\frac{dJ}{dz}=nJ+nJ+mJ$$

Różniczkując (w) otrzymamy za pomocą własności funkcyi jednorodnych:

$$x\frac{dw}{dx}+y\frac{dw}{dy}+z\frac{dw}{dz}=mw$$

Ponieważ mamy:

$$w=0,\ J=0$$

zatém być musi:

$$x\frac{dJ}{dx}+y\frac{dJ}{dy}+z\frac{dJ}{dz}=0$$

$$x\frac{dw}{dx}+y\frac{dw}{dy}+z\frac{dw}{dz}=0$$

Z tych równań wynika:

$$\frac{dJ}{dx}:\frac{dJ}{dy}:\frac{dJ}{dz}=\frac{dw}{dx}:\frac{dw}{dy}:\frac{dw}{dz}$$

§ 132.

Za pomocą paragrafów ostatnich jesteśmy w stanie wyrazić wyniknik trzech równań drugiego stopnia w kształcie wyznacznika.

Jeżeli równania drugiego stopnia z trzema zmiennemi są

$$u=0,\ v=0,\ w=0,$$

to wyznacznik Jakobi'ego tych równań jest stopnia trzeciego, a pochodne częściowe tego wyznacznika są stopnia drugiego. Ponieważ system wspólnych pierwiastków zadosyć czyni równaniom:

$$u = 0, \; v = 0, \; w = 0, \; \frac{dJ}{dx} = 0, \; \frac{dJ}{dy} = 0, \; \frac{dJ}{dz} = 0,$$

przeto można z tych sześciu równań łatwo sześć zmiennych

$$x^2, \; y^2, \; z^2, \; xy, \; xz, \; yz$$

wyrugować i wyniknik danych trzech równań w kształcie wyznacznika otrzymać.

Rugowanie jest daleko trudniejsze, jeżeli równania dane są wyższego stopnia. Sylwester dowiódł, iż wyniknik zawsze w kształcie wyznacznika wyrazić można, skoro równania są równego stopnia.

ROZDZIAŁ X.

Wyznacznik Hesse'go, własności tego wyznacznika i jego znaczenie w geometryi analitycznéj.

---

§ 133.

Objaśnienie. Jeżeli f przedstawia funkcyą jednorodną z n zmiennemi

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

to dla pierwszych i drugich pochodnych częściowych zaprowadzimy oznaczenia następujące:

$$(1)\dots\quad f_p = \frac{df}{dx_p},\quad f_{pq} = \frac{d^2f}{dx_p dx_q}$$

Wyznacznik, z drugich pochodnych funkcyi f złożony, nazywamy wyznacznikiem Hesse'go, ponieważ ten sławny matematyk używał go we wielu bardzo ważnych badaniach Oznaczywszy wyznacznik Hesse'go przez H, mamy:

$$(2)\dots\quad H = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \cdots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \cdots f_{2n} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \cdots f_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_{n1} f_{n2} f_{n3} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$$

Ponieważ mamy

$$f_{pq} = f_{qp},$$

przeto jest H wyznacznikiem symetrycznym. Z równania (2) widzimy, iż H jest wyznacznikiem funkcyjnym pierwszych pochodnych funkcyi f; przeto musi H mieć własności wyznacznika funkcyjnego.

§ 134.

Twierdzenie. Hesse'go wyznacznik funkcyi przerobionéj jest równy Hesse'go wyznacznikowi funkcyi pierwotnéj, pomnożonemu przez kwadratowy moduł przerobienia.

Dowód. Równania przerobienia niech będą:

$$(1)\ldots \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n \\ x_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{3n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + b_{n3}y_3 + \ldots + b_{nn}y_n \end{aligned}$$

Moduł przerobienia jest więc:

$$(2)\ldots \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \ldots b_{2n} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \ldots b_{3n} \\ \vdots \\ b_{n1} b_{n2} b_{n3} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

Za pomocą różniczkowania otrzymamy:

$$(3)\ldots \quad \frac{d^2f}{dy_p dy_q} = \frac{d^2f}{dy_p dx_1}\frac{dx_1}{dy_q} + \frac{d^2f}{dy_p dx_2}\frac{dx_2}{dy_q} + \ldots + \frac{d^2f}{dy_p dx_n}\frac{dx_n}{dy_q}$$

To równanie zamienia się w skutek równania (1) w następujące:

$$(4)\ldots \quad \frac{d^2f}{dy_p dy_q} = \frac{d^2f}{dy_p dx_1} b_{1q} + \frac{d^2f}{dy_p dx_2} b_{2q} + \frac{d^2f}{dy_p dx_3} b_{3q} + \ldots + \frac{d^2f}{dy_p dx_n} b_{nq}$$

Oznaczywszy wyznacznik Hesse'go funkcyi przerobionéj przez $H(f_y)$, funkcyi pierwotnéj zaś przez $H(f_x)$, mieć będziemy w skutek równania (4):

$$(5)\ldots\quad H(f_y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1dx_1}, & \frac{d^2f}{dy_1dx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_1dx_n} \\ \frac{d^2f}{dy_2dx_1}, & \frac{d^2f}{dy_2dx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_2dx_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^2f}{dy_ndx_1}, & \frac{d^2f}{dy_ndx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_ndx_n} \end{vmatrix} . B$$

Daléj mamy:

$$\frac{df}{dy_p} = \frac{df}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_p} + \frac{df}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_p} + \ldots + \frac{df}{dx_n}\frac{dx_n}{dy_p}$$

albo:

$$(6)\ldots\quad \frac{df}{dy_p} = \frac{df}{dx_1}b_{1p} + \frac{df}{dx_2}b_{2p} + \ldots + \frac{df}{dx_n}b_{np}$$

Różniczkując powtórnie, otrzymamy:

$$(7)\ldots\quad \frac{d^2f}{dy_pdx_q} = \frac{d^2f}{dx_1dx_q}b_{1p} + \frac{d^2f}{dx_2dx_q}b_{2p} + \ldots + \frac{d^2f}{dx_ndx_q}b_{np}$$

Za pomocą tego równania wynika:

$$(8)\ldots\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{ay_1dx_1}, & \frac{d^2f}{dy_1dx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_1dx_n} \\ \frac{d^2f}{dy_2dx_1}, & \frac{d^2f}{dy_2dx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_2dx_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^2f}{dy_ndx_1}, & \frac{d^2f}{dy_ndx_2}, & \ldots & \frac{d^2f}{dy_ndx_n} \end{vmatrix} = H(f_x) . B.$$

Z równań (5) i (8) wynika:

$$(9)\ldots\quad H(f_y) = H(f_x) . B^2.$$

Jeżeli przerobienie (1) jest ortogonalne, t. j. jeżeli współczynniki przerobienia odpowiadają warunkom:

$$(10)\ldots\quad \begin{cases} b_{p1}^2+b_{p2}^2+b_{p3}^2+\ldots+b_{pn}^2=0 \\ b_{p1}b_{q1}+b_{p2}b_{q2}+b_{p3}b_{q3}+\ldots+b_{pn}b_{qp}=0 \end{cases}$$

wtenczas jest $B=1$, zatém

$$(11)\ldots\quad H(f_y)=H(f_x)$$

Jeżeli funkcya f jest $m$go stopnia, to Hesse'go wyznacznik przedstawia funkcyą jednorodną $n(m-2)$go stopnia.

§ 135.

Inne ważne własności wyznacznika Hesse'go wynikają z twierdzenia Euler'a o funkcyach jednorodnych, t. j. z równań w § 129:

$$(1)\ldots\quad \begin{cases} mf=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\ldots+f_nx_n \\ (m-1)f_1=f_{11}x_1+f_{12}x_2+f_{13}x_3+\ldots+f_{1n}x_n \\ (m-1)f_2=f_{21}x_1+f_{22}x_2+f_{23}x_3+\ldots+f_{2n}x_n \\ \vdots \\ (m-1)f_n=f_{n1}x_1+f_{n2}x_2+f_{n3}x_3+\ldots+f_{nn}x_n \end{cases}$$

albo:

$$(2)\ldots\quad \begin{cases} -\frac{mf}{m-1}(m-1)+f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\ldots+f_nx_n=0 \\ -\quad f_1(m-1)+f_{11}x_1+f_{12}x_2+f_{13}x_3+\ldots+f_{1n}x_n=0 \\ -\quad f_2(m-1)+f_{21}x_1+f_{22}x_2+f_{23}x_3+\ldots+f_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ -\quad f_n(m-1)+f_{n1}x_1+f_{n2}x_2+f_{n3}x_3+\ldots+f_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

Wyniknik tych równań jest:

$$(3)\dots\ R = \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}f, & f_1, & f_2, & \dots f_n \\ f_1, & f_{11}, & f_{12}, & \dots f_{1n} \\ f_2, & f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_n, & f_{n1}, & f_{n2}, & \dots f_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

albo:

$$(4)\dots\ R = \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}f, & f_1, & f_2, & \dots f_n \\ 0, & f_{11}, & f_{12}, & \dots f_{1n} \\ 0, & f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0, & f_{n1}, & f_{n2}, & \dots f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2, & \dots f_n \\ f_1, & f_{11}, & f_{12}, & \dots f_{1n} \\ f_2, & f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_n, & f_{n1}, & f_{n2}, & \dots f_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

albo nareszcie:

$$(5)\dots\ R = \frac{m}{m-1}\cdot f\,.\,H - \sum_{pq} f_p f_q H_{pq} = 0$$

gdzie H_{pq} oznacza wyznacznik, który powstaje z H, jeżeli w H opuszczamy p^{ty} rząd poziomy i q^{ty} rząd pionowy, wskaźniki pq biorą wartości:

$$pq = 11, 21, 31, 41, \dots n1$$

albo:

$$pq = 11, 12, 13, 14, \dots 1n$$

Ponieważ wyznacznik R jest symetrycznym i równy zeru, przeto jego odwrotny wyznacznik R^1 także być musi symetrycznym i równy zeru podług §§ 94 i 83.

Zatém jest:

$$(6)\dots\ R^1 = \begin{vmatrix} H, & F_1, & F_2, & \dots F_n \\ F_1, & F_{11}, & F_{12}, & \dots F_{1n} \\ F_2, & F_{21}, & F_{22}, & \dots F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ F_n, & F_{n1}, & F_{n2}, & \dots F_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$F_{pq} = F_{qp}$$

Na mocy § 88 mamy:

$$(7)\ldots\quad F_{pq}^2 = F_{pp} \cdot F_{qq}.$$

Z tego równania wynika:

$$\begin{array}{ll}
F_{11}^2 = F_{11} \cdot F_{11}, & F_{11} = \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{F_{11}} \\
F_{12}^2 = F_{11} \cdot F_{22}, & F_{12} = \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{F_{22}} \\
F_{13}^2 = F_{11} \cdot F_{33}, & F_{13} = \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{F_{33}} \\
\vdots & \vdots \\
F_{1n}^2 = F_{11} \cdot F_{1n}, & F_{1n} = \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{F_{nn}} \\
F_{10}^2 = F_{11} \cdot F_{00}, & F_{10} = \begin{cases} \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{F_{00}} \\ \sqrt{F_{11}} \cdot \sqrt{H} \end{cases}
\end{array}$$

Za pomocą § 86 i tych równań wynika z równań (1) proporcya następująca:

$$\begin{aligned}
(8)\ldots\quad -(m-1):x_1:x_2:x_3:\ldots:x_n &= \sqrt{H}:\sqrt{F_{11}}:\sqrt{F_{22}}:\sqrt{F_{33}}:\ldots:\sqrt{F_{nn}} \\
&= H : F_1 : F_2 : F_3 :\ldots: F_n \\
&= F_p : F_{p1} : F_{p2} : F_{p3} :\ldots: F_{pn}
\end{aligned}$$

Z téj proporcyi otrzymamy:

$$(9)\ldots\quad F_p = -\frac{x_p}{m-1} H,\quad F_{pq} = \frac{x_p x_q}{(m-1)^2} \cdot H.$$

§ 136.

Niech będzie $f = 0$ całką algebraiczną funkcyą $(n-1)$ zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ m^{go} stopnia, i zastanówmy się bliżéj nad wyznacznikiem:

$$(1)\ldots\quad V = \begin{vmatrix}
0, & f_1, & f_2, & f_3, & \ldots f_{n-1} \\
f_1, & f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & \ldots f_{1,n-1} \\
f_2, & f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & \ldots f_{2,n-1} \\
f_3, & f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & \ldots f_{3,n-1} \\
\vdots & & & & \\
f_{n-1}, & f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & f_{n-1,3}, & \ldots f_{n-1,n-1}
\end{vmatrix}$$

Równanie $f=0$ możemy przerobić na jednorodne, włożywszy na miejsca zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ ilorazy $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ i pomnożywszy równanie całe przez x_n^m.

Z przerobionego równania wynika:

$$(2)\ldots \quad f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\ldots+f_nx_n = mf.$$

Za pomocą tego równania możemy wyznacznik przerobić na inny.

Naprzód mamy:

$$(3)\ldots \quad V = \frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} 0, & f_1, & f_2, & \ldots f_{n-1} \\ (m-1)f_1, & f_{11}, & f_{12}, & \ldots f_{1,\,n-1} \\ (m-2)f_2, & f_{21}, & f_{22}, & \ldots f_{2,\,n-1} \\ \vdots & & & \\ (m-1)f_{n-1}, & f_{n-1,\,1}, & f_{n-1,\,2}, & \ldots f_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

Pomnożywszy oprócz pierwszego wszystkie rzędy pionowe odpowiednio przez $-x_1, -x_2, \ldots -x_{n-1}$ i dodawszy je do rzędu pierwszego, nie zmienimy przez to, podług § 49, wartości wyznacznika i otrzymamy za pomocą równania (2) i § 135 (1):

$$(4)\ldots \quad V = \frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} x_nf_n-mf, & f_1, & f_2, & \ldots f_{n-1} \\ x_nf_{1,n}, & f_{11}, & f_{12}, & \ldots f_{1,\,n-1} \\ x_nf_{2,n}, & f_{21}, & f_{22}, & \ldots f_{2,\,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_nf_{n-1,\,n}, & f_{n-1,\,1}, & f_{n-1,\,2}, & \ldots f_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

albo:

$$(5)\ldots \quad V = -\frac{mf}{m-1}\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \ldots f_{1,\,n-1} \\ f_{21}, & f_{22}, & \ldots f_{2,\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1,\,1}, & f_{n-1,\,2}, & \ldots f_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x_n}{m-1}\begin{vmatrix} f_1, & f_2, & \dots f_n \\ f_{11}, & f_{22}, & \dots f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & \dots f_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

albo:

$$(6)\dots\quad V = -\frac{mf}{m-1}\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \dots f_{1,n-1} \\ f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & \dots f_{n-1,n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x_n}{(m-1)^2}\begin{vmatrix} (m-1)f_1, & (m-1)f_2, & \dots & (m-1)f_n \\ f_{11}, & f_{12}, & \dots & f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}, & \dots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & \dots & f_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Dodawszy wszystkie rzędy poziome, pomnożone odpowiednio przez $-x_1, -x_2, \dots x_{n-1}$, oprócz pierwszego, do pierwszego rzędu poziomego, otrzymamy za pomocą § 135 (1):

$$(7)\dots\quad V = -\frac{mf}{m-1}\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \dots f_{1,n-1} \\ f_{21}, & f_{22}, & \dots f_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & \dots f_{n-1,n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_n^2}{(m-1)^2}\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \dots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \dots f_{2n} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \dots f_{3n} \\ \vdots \\ f_{n1} f_{n2} f_{n3} \dots f_{nn} \end{vmatrix} \\ \\ \dfrac{x_n^2}{(m-1)^2}\,.\,H \end{array}\right.$$

Z tego równania wynika, iż te wartości zmiennych, które przyprowadzają funkcyą f i wyznacznik V do zera, także wyznacznik H do zera prowadzić muszą. Pod temi warunkami możemy pisać, kładąc $x_n = 1$, następujące równanie:

$$(8)\ldots\quad V = \frac{H}{(m-1)^2}$$

§ 137.

Zadanie. Krzywość linii krzywych w płaszczyźnie wyrazić za pomocą wyznacznika Hesse'go.

Rozwiązanie. Równanie

$$(1)\ldots\quad f = 0$$

z dwoma zmiennemi x, y ma przedstawiać w układzie prostokątnym współrzędnych liniję krzywą. Przyjąwszy dalej:

$$(2)\ldots\quad \frac{df}{dx} = f_1,\quad \frac{df}{dy} = f_2$$

$$(3)\ldots\quad \frac{d^2f}{dx^2} = f_{11},\quad \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = f_{12} = f_{21},\quad \frac{d^2f}{dy^2} = f_{22}$$

mieć będziemy, jak wiadomo:

$$(4)\ldots\quad x-\xi : y-\eta = f_1 : f_2$$

To równanie wyraża normalną punktu xy na krzywéj $f=0$, zmienne $\xi\eta$ są współrzędnemi bieżącemi normalnéj.

Kładąc

$$(5)\ldots\quad \lambda(x-\xi) = f_1,\quad \lambda(y-\eta) = f_2$$

otrzymamy z tych równań i z równania (1) za pomocą różniczkowania:

$$f_1dx + f_2dy = 0$$

$$(6)\ldots\quad (x-\xi)d\lambda + \lambda dx = df_1,\quad (y-\eta)d\lambda + \lambda dy = df_2$$

albo w skutek równań (5):

$$(7)\ldots\quad f_1\frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx,\quad f_2\frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

Te równania tyczą się normalnéj punktu $x+dx$, $y+dy$ krzywéj $f=0$; obydwie normalne przecinają się w centrum koła krzywości $\xi\eta$.

Równaniom (6) i (7) możemy dać kształt następujący:

$$\begin{aligned} f_1 dx + f_2 dy & &= 0 \\ (f_{11}-\lambda)dx + f_{12}dy & - f_1\frac{d\lambda}{\lambda} &= 0 \\ f_{12}dx + (f_{22}-\lambda)dy & - f_2\frac{d\lambda}{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Z tych równań wynika:

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

albo:

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0 & f_1 & 0 \\ f_1 & f_{11} & 0 \\ f_2 & f_{12} & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_2 \\ f_1 & 1 & f_{12} \\ f_2 & 0 & f_{22} \end{vmatrix} = 0$$

albo:

$$\lambda(f_1^2+f_2^2) = -\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

albo nareszcie:

$$(8)\ldots \quad \lambda = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}}{f_1^2+f_2^2}$$

Dla wyrażenia promienia krzywości mamy:

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

Za pomocą równań (5) otrzymamy:

$$\varrho^2 = \frac{f_1^2+f_2^2}{\lambda^2}$$

Ztąd wynika dla wyrażenia krzywości:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\lambda}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$$

Kładąc w to równanie wartość dla λ z równania (8), otrzymamy:

$$(9)\ldots\quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}}{(f_1^2+f_2^2)^{3/2}}$$

W skutek równania § 136 (8) zamienia się ta wartość w kształt następujący:

$$(10)\ldots\quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}}{(m-1)^2(f_1^2+f_2^2)^{3/2}}$$

§ 138.

Zadanie. Krzywość powierzchni krzywéj m^{go} stopnia dowolnego punktu wyrazić za pomocą wyznacznika Hesse'go.

Rozwiązanie. Jeżeli f jest funkcyą trzech współrzędnych prostokątnych x, y, z, albo $f=0$ równanie powierzchni m^{go} stopnia, na któréj się punkt (x, y, z) znajduje, to przedstawia proporcya:

$$(1)\ldots\quad x-\xi : y-\eta : z-\varsigma = f_1 : f_2 : f_3$$

normalną powierzchni $(f=0)$ w punkcie (x, y, z). Oznaczenia ostatniego paragrafu przyjmiemy także i w tym paragrafie.

Z równania (1) wynika:

$$(2)\ldots\quad \lambda(x-\xi) = f_1,\ \lambda(y-\eta) = f_2,\ \lambda(z-\varsigma) = f_3.$$

Normalne powierzchni punktów (x, y, z) i $(x+dx, y+dy, z+dz)$ nie przecinają się w ogóle zawsze, tylko wtenczas, gdy punkt drugi znajduje się na linii krzywości, która przez pierwszy punkt przechodzi. Przecięcie obydwóch normalnych (ξ, η, ς) jest centrum koła krzywości dla cięcia głównego powierzchni przez punkt (x, y, z) przechodzącego. Pod tym warunkiem otrzymamy za pomocą różniczkowania równań (2):

$$(3)\ldots\quad (x-\xi)d\lambda+\lambda dx = df_1 \text{ etc.}$$

albo:

$$(4)\ldots\quad \begin{cases} f_1\dfrac{d\lambda}{\lambda}-df_1+\lambda dx=0 \\ f_2\dfrac{d\lambda}{\lambda}-df_2+\lambda dy=0 \\ f_3\dfrac{d\lambda}{\lambda}-df_3+\lambda dz=0 \end{cases}$$

Z tych równań wynika następujące równanie różniczkowe:

$$(5)\ldots\quad \begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix}$$

które z równaniem różniczkowém powierzchni

$$(6)\ldots\quad f_1dx+f_2dy+f_3dz=0$$

wyraża liniję krzywości przez punkt (x, y, z) przechodzącą.

Z równań (4) i (6) wynika:

$$(7)\ldots\quad \begin{cases} 0=-0\dfrac{d\lambda}{\lambda}+f_1dx+f_2dy+f_3dz \\ 0=-f_1\dfrac{d\lambda}{\lambda}+(f_{11}-\lambda)dx+f_{12}dy+f_{13}dz \\ 0=-f_2\dfrac{d\lambda}{\lambda}+f_{12}dx+(f_{22}-\lambda)dy+f_{23}dz \\ 0=-f_3\dfrac{d\lambda}{\lambda}+f_{13}dx+f_{23}dy+(f_{33}-\lambda)dz \end{cases}$$

Dla obrachowania wartości λ otrzymamy z tych równań:

$$(8)\ldots\quad \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

albo:

$$(9)\ldots \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-\lambda\left\{\begin{vmatrix} 0 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{13} \\ f_3 & f_{13} & f_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}\right\} + \lambda^2(f_1^2+f_2^2+f_3^2)=0$$

Oznaczywszy pierwiastki tego równania przez λ', λ'', mieć będziemy:

$$(10)\ldots\ \lambda'\lambda'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$$

Jeżeli odległość punktu (x, y, z) od punktu (ξ, η, ς) przez ϱ oznaczamy, wtenczas mamy:

$$(11)\ldots\ \varrho^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2$$

To równanie zmienia się za pomocą (2) w następujące

$$(12)\ldots\ \lambda\varrho = \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$$

Z równania (10) wynika, iż ϱ ma dwie wartości ϱ' i ϱ'' zatém możemy pisać:

$$(13)\ldots\ \lambda'\varrho'.\lambda''\varrho''=f_1^2+f_2^2+f_3^2$$

Krzywość powierzchni punktu (x, y, z) jest jak wiadomo

$$(14)\ldots\ \frac{1}{\varrho'.\varrho''}=\frac{\lambda'.\lambda''}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$$

albo za pomocą (10):

$$(15)\ldots\ \frac{1}{\varrho'\varrho''} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}$$

Na mocy § 136 (8) możemy temu równaniu dać kształt następujący:

$$(16)\ldots \quad \frac{1}{\varrho'\varrho''} = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} f_{14} \\ f_{12} f_{22} f_{23} f_{24} \\ f_{13} f_{23} f_{33} f_{34} \\ f_{14} f_{24} f_{34} f_{44} \end{vmatrix}}{(m-1)^2(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}$$

§ 139.

Wniosek. W punktach przegięcia krzywéj w płaszczyźnie mamy krzywość niezmiernie małą lub promień krzywości niezmiernie wielki; w tym przypadku być musi:

$$H = 0.$$

Punkta przegięcia znajdują się więc na krzywych $f=0$ i $H=0$, liczba takich punktów musi być zatém $3m(m-2)$.

Punkta przegięcia na powierzchni znajdują się na obydwóch powierzchniach $f=0$ i $H=0$, zatém w przecięciu tych powierzchni m^{go} i $4(m-2)^{go}$ stopnia. Punkta te tworzą liniję przegięcia.

§ 140.

Jeżeli wyznacznik Hesse'go H identycznie znika, wtenczas mamy:

$$(1)\ldots \quad H_{p1}f_{p1}+H_{p2}f_{p2}+H_{p3}f_{p3}+\ldots+H_{pn}f_{pn} = H = 0$$

$$(2)\ldots \quad H_{p1}f_{q1}+H_{p2}f_{q2}+H_{p3}f_{q3}+\ldots+H_{pn}f_{qn} = 0 \quad (\S\ 44)$$

gdzie jest
$$\frac{dH}{df_{pq}} = H_{pq}$$

Z powodu tych równań sprawdza się równanie:

$$(3)\ldots \quad H_{p1}f_{q1}+H_{p2}f_{q2}+\ldots+H_{pn}f_{qn} = 0$$

dla wszystkich wartości $q = 1, 2, 3, \ldots n$, zatém i dla $q=p$.

Z równania (3) wynikają n równań, które są linijnemi ze względu na ilorazy różniczkowe H_{p1}, H_{p2}, H_{p3} etc.

Ponieważ te równania wszystkie są identycznie równe zeru, przeto muszą mieć ilorazy różniczkowe H_{p1}, H_{p2}, H_{p3} etc. wspólny czynnik M stopnia μ^{go}, co się tyczy zmiennych. Zatém możemy pisać:

$$(4)\ldots\quad H_{p1}=a_1 M,\ H_{p2}=a_2 M,\ H_{p3}=a_3 M \text{ etc.}$$

gdzie a_1, a_2, a_3 etc. są całkiemi funkcyami jednorodnemi stopnia

$$(n-1)(m-2)-\mu^{go},$$

które żadnego czynnika wspólnego nie mają pomiędzy sobą.

Na mocy podstawień (4) zmienia się równanie (3) w następujące:

$$(5)\ldots\quad a_1 f_{q1}+a_2 f_{q2}+a_3 f_{q3}+\ldots+a_n f_{qn}=0.$$

Z tego równania odebrać możemy n równań, kładąc $q=1, 2, 3 \ldots n$.

Pomnożywszy równanie (5) przez x_q, otrzymamy:

$$(6)\ldots\quad a_1 f_{q1} x_q+a_2 f_{q2} x_q+a_3 f_{q3} x_q+\ldots+a_n f_{qn} x_q=0.$$

Włożywszy w to równanie na miejsce q wartości $1, 2, 3 \ldots n$, mieć będziemy:

$$(7)\ldots\quad \begin{cases} a_1 f_{11} x_1+a_2 f_{12} x_1+a_3 f_{13} x_1+\ldots+a_n f_{1n} x_1=0 \\ a_1 f_{21} x_2+a_2 f_{22} x_2+a_3 f_{23} x_3+\ldots+a_n f_{2n} x_2=0 \\ a_1 f_{31} x_3+a_2 f_{32} x_3+a_3 f_{33} x_3+\ldots+a_n f_{3n} x_3=0 \\ \vdots \\ a_1 f_{n1} x_n+a_2 f_{n2} x_n+a_3 f_{n3} x_n+\ldots+a_n f_{nn} x_n=0 \end{cases}$$

Dodawszy te równania do siebie, otrzymamy ze względu na

$$f_{1p} x_1+f_{2p} x_2+f_{3p} x_3+\ldots+f_{np} x_n=(m-1) f_p$$

następujące równanie:

$$(8)\dots\ a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \dots + a_n f_n = 0$$

Z tego równania wynika za pomocą różniczkowania ze względu na równanie (5):

$$(9)\dots\ \frac{da_1}{dx_q} f_1 + \frac{da_2}{dx_q} f_2 + \frac{da_3}{dx_q} f_3 + \dots + \frac{da_n}{dx_q} f_n = 0.$$

Dla $q = 1, 2, 3 \dots n$ wynika system równań, których wyznacznik

$$(10)\dots\ \begin{vmatrix} \frac{da_1}{dx_1}, & \frac{da_2}{dx_1} & \dots & \frac{da_n}{dx_1} \\ \frac{da_1}{dx_2}, & \frac{da_2}{dx_2} & \dots & \frac{da_n}{dx_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{da_1}{dx_n}, & \frac{da_2}{dx_n} & \dots & \frac{da_n}{dx_n} \end{vmatrix} = D$$

koniecznie musi być równy zeru. Z tego wyznacznika otrzymamy za pomocą oznaczenia:

$$\frac{dD}{d\left(\frac{da_k}{dx_p}\right)} = D_{kp}$$

następujące równanie:

$$(11)\dots\ D_{p1}\frac{da_k}{dx_1} + D_{p2}\frac{da_k}{dx_2} + D_{p3}\frac{da_k}{dx_3} + \dots + D_{pn}\frac{da_k}{dx_n} = 0.$$

Z tego równania wynika dla $p = 1, 2, 3 \dots n$ system z n równań się składający.

Różniczkując równanie (5) podług x_k, mieć będziemy:

$$(12)\dots\ \left(\frac{da_1}{dx_k} f_{q1} + \frac{da_2}{dx_k} f_{q2} + \frac{da_3}{dx_k} f_{q3} + \dots + \frac{da_n}{dx_q} f_{qn}\right) =$$

$$= -(a_1 f_{q1k} + a_2 f_{q2k} + a_3 f_{q3k} + \dots + a_n f_{qnk})$$

gdzie oznacza

$$f_{qpk} = \frac{d^3 f}{dx_q dx_p dx_k}$$

Prawą stronę równania (12) oznaczmy przez w_{qk} i mieć będziemy:

$$(13) \ldots \quad \frac{da_1}{dx_k} f_{q1} + \frac{da_2}{dx_k} f_{q2} + \ldots + \frac{da_n}{dx_k} f_{qn} = w_{qk}$$

Pomnożywszy to równanie przez D_{pk}, otrzymamy:

$$(14) \ldots \quad D_{pk} \frac{da_1}{dx_k} f_{q1} + D_{pk} \frac{da_2}{dx_k} f_{q2} + \ldots + D_{pk} \frac{da_n}{dx_k} f_{qn} = D_{pk} w_{qk}$$

Włożywszy w to równanie na miejsce k wartości 1, 2, 3 ... n, otrzymamy n równań. Skoro te równania do siebie dodamy, lewa strona téj summy znika w skutek równania (11) i otrzymamy:

$$(15) \ldots \quad D_{p1} w_{q1} + D_{p2} w_{q2} + D_{p3} w_{q3} + \ldots + D_{pn} w_{qn} = 0$$

Jeżeli w tém równaniu dajemy wskaźnikowi p wartości 1, 2, 3 ... n, otrzymamy system równań, w których współczynniki są równe współczynnikom odpowiednim systemu równań (11), przeto muszą być zmienne:

$$w_{q1}, \; w_{q2} \text{ etc.}$$

proporcyonalnemi z

$$\frac{da_k}{dx_1}, \; \frac{da_k}{dx_2} \text{ etc.}$$

to jest:

$$(16) \ldots \quad \varrho \frac{da_k}{dx_1} = w_{q1}; \; \varrho \frac{da_k}{dx_2} = w_{q2}; \; \varrho \frac{da_k}{dx_3} = w_{q3} \ldots \varrho \frac{da_k}{dx_n} = w_{qn}$$

Te równania wtenczas istnieją, skoro nie wszystkie ilorazy różniczkowe ilości a_k znikają i skoro taka wartość dla q istnieje, dla któréj (w) nie jest równe zeru.

Pomnożywszy równania (16) odpowiednie przez x_1, x_2, x_3 ... x_n i dodawszy je do siebie, otrzymamy:

$$(17)\ldots\ \varrho\left\{\frac{da_k}{dx_1}x_1+\frac{da_k}{dx_2}x_2+\ldots+\frac{da_k}{dx_n}x_n\right\}=$$
$$=w_{q1}x_1+w_{q2}x_2+\ldots+w_{qn}x_n$$

Ponieważ a_k jest funkcyą $(n-1)(m-2)-\mu$go stopnia, przeto zmienia się równanie (17) w następujące:

$$(18)\ldots\ \{(n-1)(m-2)-\mu\}\varrho a_k=w_{q1}x_1+w_{q2}x_2+\ldots+w_{qn}x_n$$

Ponieważ mamy podług (12):

$$w_{q1}x_1=-\{a_1f_{q,1,1}x_1+a_2f_{q,2,1}x_1+\ldots+a_nf_{q,n,1}x_1\}$$
$$w_{q2}x_2=-\{a_1f_{q,1,2}x_2+a_2f_{q,2,2}x_2+\ldots+a_nf_{q,n,2}x_2\}$$
$$\vdots$$
$$w_{qn}x_n=-\{a_1f_{q,1,n}x_n+a_2f_{q,2,n}x_n+\ldots+a_nf_{q,n,n}x_n\}$$

przeto otrzymamy, dodając te równania do siebie:

$$(19)\ldots\ w_{q1}x_1+w_{q2}x_2+\ldots+w_{qn}x_n=$$
$$=-(m-2)(a_1f_{q1}+a_2f_{q2}+a_3f_{q3}+\ldots a_nf_{qn})$$

Prawa strona tego równania znika na mocy równania (5), zatém wynika dla równania (18):

$$(20)\ldots\ \{(n-1)(m-2)-\mu\}\varrho a_k=0$$

Ponieważ ani ϱ ani a_k nie są równe zeru, przeto być musi:

$$(n-1)(m-2)=\mu$$

Z tego równania wynika, iż w równaniach (4) H_{pq} i M są równych stopni, zatém być muszą ilości a_1, a_2, $a_3\ldots a_n$ ilościami stałemi.

Jeżeli wszystkie (w) znikają, równanie (13) zmienia się na:

$$(21)\ldots\ \frac{da_1}{dx_k}f_{q1}+\frac{da_2}{dx_k}f_{q2}+\frac{da_3}{dx_k}f_{q3}+\ldots+\frac{da_n}{dx_k}f_{qn}=0$$

Z tego równania wynikają n równań dla $q = 1, 2, 3 \dots n$, które mają te same współczynniki ze systemem równań powstającym z równania (5) dla $q = 1, 2, 3 \dots n$. Zatém być musi:

$$(22)\dots \quad \lambda a_1 = \frac{da_1}{dx_k}, \; \lambda a_2 = \frac{da_2}{dx_k}, \; \lambda a_3 = \frac{da_3}{dx_k}, \dots \lambda a_n = \frac{da_n}{dx_k}$$

gdzie λ jest funkcyą zmiennych $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, która ma być oznaczoną.

Za pomocą całkowania otrzymujemy:

$$(23)\dots \quad a_1 = e^{\int \lambda dx_k} \,.\, C_1, \; a_2 = e^{\int \lambda dx_k} \,.\, C_2, \dots a_n = e^{\int \lambda dx_k} \,.\, C_n$$

Ponieważ stałe $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ zmiennych x_k w sobie nie zawierają, przeto funkcye $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ musiałyby mieć wspólny czynnik $e^{\int \lambda dx_k}$, co się naszemu przyjęciu sprzeciwia; zatém być musi:

$$(24)\dots \quad \lambda = 0.$$

Z tego wynika, iż ilorazy różniczkowe (22) wszystkie muszą być równe zeru, t. j. ilości $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ są stałemi.

Na mocy równania (8)

$$(25)\dots \quad a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \dots + a_n f_n = 0$$

wynika zatém twierdzenie następujące:

Jeżeli wyznacznik Hesse'go całkiéj funkcyi jednorodnéj z n zmiennemi identycznie znika, istnieją zawsze n stałych takich, z któremi mnożąc pierwsze pochodne częściowe i iloczyny dodając, otrzymujemy summę, która identycznie musi zniknąć.

Stałe $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ wynikają z równań:

$$H_{p1} = a_1 M, \; H_{p2} = a_2 M, \dots H_{pn} = a_n M.$$

§ 141.

Twierdzenie. Jeżeli Hesse'go wyznacznik funkcyi z n zmiennemi identycznie znika, można zawsze tę funkcyą przerobić na inną funkcyą jednorodną z $(n-1)$ zmiennemi za pomocą linijnego podstawienia.

Dowód. Podstawienie niech będzie:

$$x_1=a_1y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+\dots+a_{1n}y_n$$

$$x_2=a_2y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+\dots+a_{2n}y_n$$

$$\vdots$$

$$x_n=a_na_1+a_{n2}y_2+a_{n3}y_3+\dots+a_{nn}y_n$$

gdzie współczynniki przy y_1 stojące wynikają z równań § 140 (26).

W skutek tego podstawienia mieć będziemy za pomocą różniczkowania:

$$\frac{df}{dy_1}=\frac{df}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1}+\frac{df}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_1}+\dots+\frac{df}{dx_n}\frac{dx_n}{dy_1}$$

To równanie zmienia się w skutek:

$$\frac{df}{dx_p}=f_p$$

$$\frac{dx_p}{dy_1}=a_p$$

w następujące:

$$\frac{df}{dy_1}=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+\dots+a_nf_n=0 \quad (§\ 140,\ 25).$$

Ponieważ iloraz różniczkowy podług y_1 znika, zatém we funkcyi przerobionéj zmienna y_1 znajdować się nie może.

Skoro odwrotnie takie przerobienie istnieje, wtenczas znika identycznie wyznacznik Hesse'go.

Jeżeli $f = 0$ wyraża krzywą lub powierzchnię i wyznacznik Hesse'go znika identycznie, to dowodzi, iż krzywa lub powierzchnia składa się z samych punktów parabolicznych.

Jeżeli wyznacznik Hesse'go identycznie znika, możemy jednorodną funkcyą $f = 0$ z trzema lub czterema zmiennemi przerobić na funkcyą jednorodną z dwoma lub trzema zmiennemi, co nam dowodzi, iż funkcya $f = 0$ przedstawia system n prostych lub powierzchnią ostrokręgową.

O wyzreszczalkach

Zelewski