2. ROBERVAL A TORRICELLI.

1646-1647.

(Paris, Bibl. Nat., fonds latin, nouv. acq. 2341, f° 3 recto-18 verso; *Ibid.*, fonds latin, nouv. acq. 11196, f° 29 recto-41 verso. — La lettre est imprimée dans l'ouvrage cité sous le n° 1, p. 284 et suiv.)

L'extrait suivant de la lettre de Roberval à Torricelli se rapporte immédiatement aux recherches sur la quadrature des spirales infinies, dont il a été question ci-avant, p. 13-15. Pour l'évaluation de ces quadratures, Fermat se servait d'une règle pour la formation des nombres figurés successifs. Si nous étendons les sommes Σ à toutes les valeurs entières de n depuis 1 jusqu'à n, cette règle apprend que

$$\sum n = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\sum \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\sum \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}, \ldots$$

et conduit à des formules récurrentes servant à déterminer successivement les différentes sommes Σn^m. C'est ainsi que le géomètre de Toulouse arrive aussi à une formule générale pour la somme des puissances semblables des nombres naturels, qui apprend que la somme de toutes les puissances de l'ordre n d'une quantité toujours croissante est à la somme d'autant de puissances égales à la quantité la plus grande comme 1 à $n+1$, c'est-à-dire que

$$\lim_{a=\infty} \frac{1^n + 2^n + \ldots + a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{n+1},$$

théorème dont il est question dans la correspondance de Fermat, dès le mois de septembre 1636. La formule fut retrouvée vers cette époque aussi par Roberval, qui écrit à Fermat s'être servi des inégalités

$$1^n + 2^n + \ldots + a^n > \frac{a^{n+1}}{n+1} > 1^n + 2^n + \ldots + (a-1)^n,$$

et le géomètre de Toulouse affirme dans sa réponse du 4 novembre 1636

www.rcin.org.pl

la concordance des deux méthodes, quoiqu'il soupçonne, dans ses lettres des 4 novembre et 16 décembre 1636 (t. II, p. 83-84, 92), que la démonstration de Roberval se bornait aux cas $n = 2, 3, 4$, pour lesquels l'on savait déjà trouver les sommes ([1]). Ainsi donc, dès cette époque, Fermat était en possession d'une démonstration complète de la formule $\int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, qu'il appliqua, pour des valeurs entières et positives de n, à la recherche de la quadrature des paraboles et spirales infinies. L'extrait suivant de la lettre de Roberval éclaire la voie qui était suivie par les deux géomètres, qui démontraient la formule aussi pour le cas $n = \frac{1}{m}$, où m est un nombre entier, et en faisaient emploi pour l'évaluation de la quadrature des spirales infinies de degré fractionnaire $\frac{R-\rho}{R} = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n}}$ ([2]).

D'ailleurs, une démonstration du théorème mentionné fut rédigée dans l'automne de 1640 par Beaugrand, l'ami ancien de Fermat et de Roberval, pour servir à Cavalieri, qui, s'intéressant particulièrement au problème, avait publié, en 1635, la démonstration pour le cas $n = 3$. Cette démonstration de Beaugrand, insérée dans une lettre de huit feuilles, écrite en italien, fut envoyée de Paris par Mersenne après la mort de l'auteur; accompagnée d'une lettre du Minime datée du 1er mars 1641 ([3]), elle arriva dans l'été de 1641 à Cavalieri, qui en fit part, entre autres, à Galilée ([4]) et à Torricelli ([5]) (*voir* aussi la réponse de Cavalieri à Mersenne, t. IV, p. 71 et suiv.). La démonstration envoyée est nommée *universalmente in tutte le infinite dignità dell' algebra* et *universalissima* par Torricelli et Cavalieri, qui rendait la lettre de Beaugrand en partie publique ([6]).

Quant aux études de Torricelli sur les paraboles infinies, on a vu ci-avant (p. 133, note 2) qu'elles ne prirent pas source dans celles de

(1) *Voir* ci-après, p. 149, la note 1.

(2) *Voir* pour l'application aux spirales de degré supérieur ci-après, p. 146, la note 1.

(3) Cette lettre est imprimée dans la *Continuazione del Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia*, tome XXXIII (Modena, 1786), p. 48.

(4) *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XVIII, 1906, p. 346-347.

(5) *Opere di Evangelista Torricelli*, éd. cit., t. III, 1919, p. 62-63, 144, 226-227, 231, 237 et 333.

(6) *Opere di Ev. Torricelli*, t. III, p. 29-30; CAVALIERI, *Exercitationes geometricæ* (Bononiæ, 1647), p. 244-245, 283-291, 296-303.

www.rcin.org.pl

Cavalieri qui s'en occupait depuis 1638 ([1]), mais dans la proposition que lui adressa Roberval en 1643; celles sur les spirales de degré supérieur remontent au séjour de Mersenne à Rome au commencement de 1645, lorsque Torricelli connut le problème de Roberval sur l'égalisation des arcs de parabole et de spirale. Les courbes en question furent conçues par lui mécaniquement, en les considérant comme décrites par un mouvement circulaire uniforme et un mouvement selon le rayon vecteur avec une accélération de degré supérieur.

Une allusion à ses études sur ces spirales dans un écrit envoyé par Torricelli à Roberval en juillet 1646 donna lieu au passage y relatif dans la présente lettre. Celle-ci fut annoncée par Mersenne à Torricelli plus d'une fois depuis l'automne de 1646; ainsi il lui apprit en décembre 1646 et le 1er mars 1647 que des copies en étaient faites. Toutefois, elle n'était pas encore reçue par Torricelli en août 1647 et probablement il ne l'a jamais reçue. Elle servit donc de lettre circulaire seulement pour les géomètres de Paris.

...Circa hæc tempora, nempe anno 1635, mediante amplissimo senatore Domino de Carcavi, cœpi per epistolas commercium litterarum habere cum amplissimo Senatore Tholosano Domino de Fermat, de quo quid sentiam habes in ea epistola quam ad R. P. Mersennum direxi super solido vestro hyperbolico infinito ([2]).

Is ergo vir præstantissimus, primus omnium, duas propositiones nobilissimas ad nos misit sine demonstratione : alteram de parabolis, alteram de planis helicum utrisque per omnes dignitatum gradus sumptis ([3]) (ne ergo dubites amplius, quis primus tales quæstiones proposuerit, illæ meæ non sunt quanquam illas ego proprio marte, inventâ ad id peculiari nostrâ methodo, demonstraverim) immo univer-

([1]) *Voir* nos *Contribuzioni inedite al Carteggio di Bon. Cavalieri*, dans le *Bollettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche*, 1919, p. 1-12, qui comprend aussi quelques détails sur les rapports de Cavalieri et Beaugrand.

([2]) *Voir* la lettre précédente du 1er octobre 1643.

([3]) Allusion aux lettres de Fermat à Mersenne et Roberval, de la première moitié de l'année 1636 (t. II, p. 12-14, 73).

www.rcin.org.pl

salius multò quam ipse proponas, quippe non solum potestates in helicibus proposuit, sed etiam potestatum radices. Exempli gratià :

Si in helice semidiametri omnium revolutionum ordine sumptarum, se habeant ut radices quadratæ aut cubicæ, etc., numerorum ordine naturali progredentium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, *etc. quarum primam* (quadraticam puta) *reperies in prima revolutione dimidiam partem sui circuli constituere* (1).

Cumque ipsùm arduarum (ut tunc) propositionum demonstrationes rogarem, ille in hæc verba rescripsit : *Ego*, inquit, *ut invenirem laboravi. Labora et ipse; in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem consistere deprehendes* (2). Quid facerem a tanto viro incitatus? Laboravi atque in auxilium infinita nostra advocavi (nondum enim tunc nostra amplius non esse resciveram) eaque tum primum ad numeros extendi. Animadverti enim et parabolarum plana ad sua parallelogramma, et earumdem solida ad suos cylindros, et spatia helicum ad suos circulos, feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis, ordine atque indefinite sumptarum, ad earum maximam toties sumptam, idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sund. Illico enim patuit

Summam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinite sumptorum 1, 4, 9, 16, 25, *etc.*, *ad eorum maximum toties sumptum*

(1) Dans l'équation générale $\frac{R-\rho}{R} = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^n$, en posant $n = \frac{1}{2}$, on obtient la spirale parabolique ou spirale de Fermat $\left(\frac{R-\rho}{R}\right)^2 = \frac{\varphi}{2\pi}$, dont la quadrature fut proposée par Fermat dans sa lettre du 3 juin 1636 (t. II, p. 13-14, *voir* aussi p. 448 et t. III, p. 277-278). Il a été fait mention des deux sortes de spirales $\frac{R-\rho}{R} = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^n$ et $\left(\frac{R-\rho}{R}\right)^n = \frac{\varphi}{2\pi}$, dans le cahier envoyé par Fermat en 1636, et dont il a été question ci-avant, p. 13-14; Mersenne avait publié les résultats des quadratures dans ses *Cogitata* de 1644 (t. II, p. 16-17). Il n'apparaît pas que Fermat ait étudié les cas qui se présentent pour des valeurs négatives de n (spirales hyperboliques).

(2) La lettre de Roberval à Fermat et celle de Fermat à Roberval, dont il est question ici, se sont perdues.

www.rcin.org.pl

quot sunt illi quadrati (hoc est ad cubum ejusdem radicis cum maximo illo quadrato collatam) *se habere ut* 1 *ad* 3 *sive constituere* $\frac{1}{3}$; *summam cuborum, eodem modo sumptorum, ad eorum maximum toties sumptum, sive ad quadrato-quadratum ejusdem radicis cum maximo cubo, se habere ut* 1 *ad* 4 *sive constituere* $\frac{1}{4}$; *summam quadrato-quadratorum eodem modo constituere* $\frac{1}{5}$, *atque ita in infinitum* (1).

Ex hac propositione quæ sola sufficit, innumera deduxi corolloria, qualia sunt hæc :

Summa radicum quadratarum numerorum omnium, ordine naturali atque indefinite sumptorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam, collata (puta summa radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.) *eam habet rationem quam* 2 *ad* 3.

Summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinite sumptorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam, se habet ut 2 *ad* 4.

Summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum ad maximam toties sumptam ut supra, se habet ut 2 *ad* 5.

Atque ita in infinitum *radices quadratæ numerorum quadrato-quadrotorum, quadrato-cuborum, cubo-cuborum*, etc. *ad earum maximam toties sumptam ut supra, sic comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper* 2 *exponens quadrati, consequens verò sit summa ex ipso exponente* 2 *et alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratæ*. Ut si sumantur *radices quadratæ numerorum quadrato-quadrato-cuborum*, qui sunt septimi gradus cujus exponens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 et 7, et ratio erit ut 2 ad 9.

Similiter :

Summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinite sumptorum, ad earumdem

(1) Fermat fait la première allusion à ce théorème dans sa lettre du mois de septembre 1636 (t. II, p. 69).

www.rcin.org.pl

radicum maximam toties sumptam, se habet ut 3 *exponens cubi ad* 4 *compositum ex eodem* 3 *et* 1 *exponente primi gradus.*

Summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum ad earumdem radicum maximam toties sumptam ut supra, se habet ut 3 *ad* 5.

Atque ita in infinitum *radices cubicæ omnium graduum ad earumdem maximam sumptam ut supra, comparabuntur eritque in omnibus antecedens* 3, *consequens verò componetur ex eodem* 3 *juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit.*

Nec aliter *radices quadrato-quadratæ omnium graduum* ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur eritque antecedens 4. Et sic in infinitum infinities, ut satis ex prædictis patet.

Hæc cùm ad amplissimum virum scripsissem, dubitavit (1) num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi (2) eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate et procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto facile est concludere in quadratis, exempli gratia

summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finitè sumptorum, ad eorumdem maximum tòties sumptum, collatam, majorem esse quam $\frac{1}{3}$; *at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadratorum maximo tantum, remanente integro consequente, reliqui rationem minorem quàm* $\frac{1}{3}$.

Nec ad id demonstrandum, aliò recurrendum est quam ad genesim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur ex proximo quadrato minore ex duplo radicis ejusdem minoris atque ex unitate. Quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris atque ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum quadratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab unitate incipientes; atque ita de singulis potestatibus secundum uniuscujusque genesim.

(1) Lettres de Fermat à Roberval, des 4 novembre et 16 décembre 1636 (t. II, p. 83-84 et 92).

(2) Allusion peut-être à la lettre de Roberval à Fermat, du 29 novembre 1636, aujourd'hui perdue (t. II, p. 92).

www.rcin.org.pl

Corollaria, quomodo ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi. Illud autem tale est :

Propositis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate secundum naturalem numerorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. *usque ad* 100000000 *exempli gratiâ, exhibere summam quadratorum aut cuborum aut quadrato-quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum*, etc., *omnium talium numerorum*,

quæ sane regula pro quadratis et cubis reperitur specialis apud Authores (1), at pro omnibus potestatibus nullam apud illos reperimus universalem.

Hæc ergo fuit nostra pro parabolarum planis ac solidis simulque pro planis helicum methodus (2). Post hæc proposuit vir amplissimus (quod et ipse jamdiu in omnibus figuris universaliter quærebam) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analysim recurrit (3), nos ad nostra infinita ; unde methodus illius, ut plerisque inventis analyticis accidit, abstrusissima est, subtilissima atque elegantissima, nostra aliquot mensibus posterior (4), simplicior

(1) Le théorème donné sous forme algébrique ci-avant (p. 143) était déjà démontré par Archimède pour les cas $n = 1$ et $n = 2$, par el-Karchî et puis par Cavalieri pour $n = 3$, le dernier géomètre ne venant au bout de sa solution pour $n = 4$ qu'après avoir reçu l'envoi de Beaugrand. Alors le cas $n = 5$ fut démontré aussi par Giannantonio Rocca à Reggio (*Opere di Evang. Torricelli*, ed. cit., vol. III, p. 227, 417).

(2) Il est question des paraboles de degré fractionnaire dans l'écrit de Fermat destiné à Cavalieri au commencement de 1642 (t. I, p. 196 et suiv.). La voie par laquelle Fermat arriva à l'évaluation de l'intégrale $\int_0^x x^n dx$ pour des valeurs fractionnaires et négatives de n, est exposée par M. Zeuthen dans une Note *Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat* dans le *Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, Copenhague, pour l'année* 1895, p. 44 et suiv. *Voir* aussi la Note de M. Aubry, *Méthode de Fermat pour la quadrature des courbes*, t. IV, p. 228-230.

(3) *Voir* les lettres de Fermat du 4 novembre 1636 (t. II, p. 85), du 16 décembre 1636 (t. II, p. 94) et celle du mois de février 1638 (t. II, p. 133-134) avec l'écrit imprimé au Tome I, p. 136-138 et encore les annotations à la lettre du 15 juin 1638, ci-avant n° VI, et t. II, p. 166.

(4) *Voir* la lettre de Roberval du 4 avril 1637 (t. II, p. 104) et la méthode de Roberval expliquée au Tome IV, p. 3-10.

www.rcin.org.pl

evasit et universalior, quo fit ut cœteris collata, magis nobis arrideat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutas esse geometra, qualis huc usque nullus apparuit....

---

3. TORRICELLI A MERSENNE.

1er FÉVRIER 1647.

(Paris, Bibl. Nat., fonds latin, nouv. acq. 2338, f° 6. — Florence, Bibl. Naz., *Discepoli di Galileo*, t. XL, f° 55.)

... Proxime præteritis mensibus autumni incidi in Problema quoddam, propositum, ut ego audivi, ab illustrissimo viro de Fermat. Jubebat enim *datis tribus punctis aliud reperire ex quo tres eductæ ad data tria puncta, sint minima quantitas*.

Construxi problema, demonstravi determinavique nam propositum fuerat sine determinatione. Solutio non una est : alia enim per doctrinam solidorum procedit, alia atque alia sine locis solidis per pura plana rem omnem absolvit. Si volueris demonstrationes, habebis vel ex me, vel ex Cavalerio, vel Magiotto, vel Renerio nostro (1) ; cum variis enim amicis illas contuli quamquam facilis admodum contemplatio videatur. Doceas quæso num huiusmodi problematis solutio apud vos in vulgus exierit, an apud autorem hactenus lateat....

(1) Les lettres de Torricelli à Vincenzio Renieri à Pise, qui contiennent la solution, sont datées de la fin de l'année 1646 (*Opere di Evangelista Torricelli*, ed. cit., vol. III, 1919, p. 422, 424, 426-428, 429-431). *Voir* pour la solution de Cavalieri l'Introduction, p. XIII. Une autre fut publiée par Viviani dans son ouvrage *de Maximis et minimis*, Lib. sec. (Florentiæ, 1659), p. 144-150.

www.rcin.org.pl