Ta Xiążka
należy do Gustawowi
Bornemanowi.
w roku 1815.
kupiona

JEOMETRYA

PODŁUG

LACROIX

CZĘŚĆ I.

NA KLASSĘ II, III i IV.

Szkół Departamentowych

z figurami.

Cena oprawnéy w papier Zł. 5.

w WARSZAWIE 1813.

w Drukarni Xięży Piiarów.

IZBA EDUKACYYNA.

Dzieło Elementarne, JEOMETRYA, ułożone przez JX. A. Dąbrowskiego S.P. Professora Matematyki w Liceum Warszawskiém, Członka Towarzystwa Królewskiego Przyiacioł nauk i Towarzystwa do Xiąg Elementarnych, a roztrząśnione przez Towarzystwo Elementarne, i Izbie Edukacyynéy podane, przeznaczone na Szkoły Departamentowe, aż do Kalssy IV. Izba Edukacyyna potwierdza, i Szkołom publicznym do używania przeznacza, podaie i zaleca.

Dan w Warszawie na sessyi Izby Edukacyynéy dnia 16 Mca Lipca 1811 Roku.

Stanisław *Potocki*, Senator Woiewoda, Prezes Rady Stanu, Prezes Izby Eduk.

Walenty *Sobolewski*, Sen. Woiew. Xstwa Warsz.

Alexander *Potocki*, Minister Policyi.

X. *Prażmowski*, Proboscz Katedr. Płocki i Warsz.

Stanisław *Staszyc*, Radca Stanu i Prezes Towarz. Przyiaciół Nauk.

X. Onufry *Kopczyński*, Exprowincyał Piiarski.

X. *Diehl*, Prezes Konsyst. i Deputow. na Seym.

Samuel Bogumił *Linde*, Prezes Towarzystwa Elementarnego, Rektor Liceum Warszaws.

J. *Lipiński*, Sekr. J. J. Eduk.

DO CZYTELNIKA.

W układaniu dzieła tego trzymaliśmy się naywięcéy Jeometryi elementarnéy Lacroix. *Jeżeli zaszły iakowe z innych Autorów dodatki lub odmiany tak co do porządku rzeczy, iako też co do sposobu ich wysłowienia, stało się to sczególniéy dlatego, aby małym dzieciom, iakie się zwyczaynie po niższych klassach szkół Departamentowych znayduią, początkowe wiadomości Jeometryi były iak naybardziéy ułatwione. Pod tym względem biorąc rzeczy, wypadało trzymać się tego prawidła:* im która wiadomość trudnieysza iest dla poczynaiących, tém bardziéy powinna być od początku oddalona; *staraiąc się wreszcie iak naytroskliwiéy o to, aby każda prawda wynikała z poprzedzaiących, i ułatwiała zrozumienie następnych. Dla téy przyczyny*, o powiérzchni wielokątów, *umieściliśmy piérwéy, niż* o proporcyonalności ich boków, o wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole i o stosunku przybliżonym okręgu do średnicy: *te bowiem wiadomości są nierównie do zrozumienia, a nawet niektóre z nich do wyłożenia trudnieysze, niżeli twierdzenia o powierzchni wielokątów.*

Na końcu Części I. Jeometryi, umieściliśmy iako przydatek Trygonometryą prostokreślną, *nie tylko dla dopełnienia nauki o tróykątach, na które wszystkie wielokąty mogą być zamienione, koła nawet nie wyłączaiąc; ale też dlatego, że trygonometrya uczniom maiącym iakąkolwiek wprawę w teoryi równań stopnia drugiego, daleko iest łatwieysza, niżeli Jeometrya obiętość ciał za przedmiot maiąca. Wreszcie w téy mierze, równie iak we wszystkiem stosowaliśmy się zupełnie do planu nauk przepisanego na szkoły Departamentowe, podług którego Planimetrya z Trygonometryą prostokréślną kończy się w Klassie IV, Stereometrya z Trygonometryą kulistą w Klassie V, a teorya liniy krzywych drugiego rzędu czyli Sekcye koniczne w Klassie VI.*

W trygonometryi przestaliśmy na kilku tylko przystosowaniach do Jeometryi właściwéy i praktycznéy, nie zapuszczaiąc się w przystosowania Trygonometryi do innych nauk matematycznofizycznych: w tym bowiem przypadku opisy wyrazów technicznych i narzędzi używanych więcéyby zabrały mieysca, niżeli same przystosowania. Nauczyciel, który iak we wszystkich naukach i umieiętnościach, tak i w Jeometryi na iednêm dziele przestawać nie może, chcący uczniów o użytkach Jeometryi przekonać, aby ich tym sposobem do niéy zachęcił, znaydzie takowych przystosowań wielką liczbę w dziełach Jeometrya praktyczna X. Zaborowskiego; Miernictwo woienne Jozefa Łęskiego; Nauka matematyki

Bezout przez Jakubowskiego; traité de Géodesie théorique et pratique par Puissant; traité d'Arpentage par Lefevre; traité de Trigonometrie par Cagnoli; Gr: u. Ausf: Unt: zur prak: Geometrie v. J. T. Mayer; Prak: Anw: zum plan: Vermessen etc. v. J. L. Hogrewe i t. d. *w reszcie w różnych umieiętnościach matematycznofizycznych, a nadewszystko w Jeometryi praktycznéy dla szkół narodowych, która, ile mi iest wiadomo, iuż blizka ukończenia, wkrótce zapewne wyydzie na widok publiczny.*

Co się tycze niektórych pomnieyszych przydatków z dzieła Legendre i innych, te poczynione zostały albo dla okazania zgodności dowodzeń ieometrycznych z algiebraicznemi; iak są np. *o kwadracie summy lub różnicy dwóch liniy i t. d; albo dla skrócenia i ułatwienia dłuższych lub trudnieyszych dowodzeń w Jeometryi dalszéy, iak* np. *Twierdzenie pod liczbą* 175, *bez pomocy którego chcąc dowieść iednego z początkowych twierdzeń Stereometryi, trzeba uważać* 14 *tróykątów, i okazać, które z nich mogą do siebie przystać; albo dlatego, ażeby od iednéy wiadomości ważnéy nie przechodzić nagle do drugiéy ważnéy bez należytego obięcia piérwszéy, iak są* np. *zagadnienia o różnicy powiérzchni dwóch kół spółśrodkowych i t. d. Można w prawdzie przez kilkokrotne powtórzenie iednéyże wiadomości ważnieyszéy dać ią poznać uczniom należycie; lecz tym sposobem dzieci uczą się Jeometryi więcéy na* *pamięć niż na rozum, przez co iuż nikną korzyści, które z uczenia się Jeometryi na rozpostarcie wyższych władz umysłowych spływać powinny. Nadto, ciągłe iedneyże rzeczy powtarzanie, tę ma do siebie przywiązaną niedogodność, że uczniów zwłaszcza poiętnieyszych wprawia nieznacznie w nałóg nie dawania uwagi na to, co się im wykłada. Lepiéy zatém iest przypominać im tę samę rzecz coraz pod odmiennym kształtem, do czego służą naywięcéy wiadomości między ważnieyszemi twierdzeniami środkuiące, iakiemi są uwagi, zagadnienia a nadewszystko odmienne sposoby dowodzenia, których w dziele tém użyliśmy dosyć często: gdyż i nic bardziéy nie służy do rozwinięcia i wydoskonalenia władz umysłowych, iak wprawa w okazanie téy saméy prawdy kilką sposobami odmiennemi; i sama prawda w ten czas dopiero gruntownie iest poznana, gdy do niéy z łatwością różnemi drogami trafić można; i uczniowie nabieraią przez to chęci do Jeometryi, zwłaszcza gdy im iest zostawiona wolność dawania piérwszeństwa temu sposobowi, który się im naybardziéy podoba. Prócz tego iedne z tych sposobów są gruntownieysze, inne łatwieysze do zrozumienia lub wysłowienia, albo też wygodnieysze do użycia w dalszéy Jeometryi. Tak* np. *z trzech sposobów, których użyliśmy do okazania powiérzchni koła i stosunku okręgów, piérwszy może być wygodnie użyty do wyprowadzenia* *powiérzchni i obiętości ciał zakończonych powiérzchniami krzywemi; drugi ma za sobą wszelką ścisłość i dokładność matematyczną; trzeci oprócz dokładności i ścisłości, tę ma iescze przed innemi korzyść, że wystawuie przed oczy koło i wielokąt, które uważać potrzeba; a tym sposobem zmysł widzenia dopomaga uwadze; co w dwóch piérwszych sposobach mieysca nie ma.*

Wreszcie dla ułatwienia i skrócenia niektórych dowodzeń, użyliśmy pomocy z Algiebry, która stosownie do planu, daie się w Szkołach Departamentowych obok Jeometryi. Od początku aż do połowy Rozdziału V. potrzebna iest tylko wiadomość o skróconych znakach, i naypiérwsze wiadomości o równaniach; od połowy Rozdziału V, trzeba znać początkową teoryą proporcyy ieometrycznych, a daléy podnoszenie liczby do kwadratu i wyciąganie piérwiastku kwadratowego. Do Trygonometryi potrzebna iest teorya równań stopnia drugiego i Logarytmów; właśnie też na tém podług planu, kończy się Algiebra w Klassie IV. Lecz aby z dzieła tego i ci korzystać mogli, którzy do szkół publicznych nie chodzą, podaiemy tu niektóre wiadomości z Algiebry ściśleyszy związek z Jeometryą maiące.

WIADOMOŚCI z ALGIEBRY

ŚCIŚLEYSZY ZWIĄZEK Z JEOMETRYĄ MAIĄCE.

I. W rozwiązywaniu zagadnień Arytmetycznych, czasem iedenże wyraz często powtarzać potrzeba. Powtarzanie to i razi ucho, i przeszkadza uwadze. Dla téy przyczyny zgodzono się na mieysce wyrazów, które nayczęściéy powtarzać trzeba, używać skróconych znaków. I tak na oznaczenie dodawania używa się znak taki $+$, *np.* $a+b$, znaczy a więcéy b.

Znak odeymowania iest $-$, *np.* $a-b$, znaczy a mniéy b.

Znak mnożenia iest $\times$, np. $a\times b$, znaczy a rozmnożone przez b.

Mnożenie także oznacza się częstokroć przez kropkę między czynnikami położoną, a nayczęściéy kładą się przy sobie czynniki bez żadnego znaku. I tak trzy te wyrażenia $a\times b$, $a.b$ i ab znaczą to samo. Jeżeli czynniki są ilorakie, to iest z kilku ilości złożone, na ten czas mnożenie oznacza się za pomocą nawiasów. I tak $(a+b)(c+d)$, znaczy, że czynnik $a+b$ powinien być rozmnożony przez czynnik $c+d$.

Znakiem dzielenia są dwie kropki między dzielną i dzielnikiem położone, np. $a:b$, znaczy a podzielone przez b. Dzielenie także oznacza się sposobem ułomków *np* $\frac{a}{b}$.

Na oznaczenie, że iedna ilość większa iest od drugiéy, używa się znak taki $>$; *np*: $x > 10$ znaczy, że liczba lub ilość iakakolwiek oznaczona przez x większa iest od 10.

Na oznaczenie, że iedna ilość mnieysza iest od drugiey, używa się ten sam znak, lecz w położeniu odwrotnem, *np.* $x < 15$, znaczy x mnieysze od 15.

Na oznaczenie równości używa się znak taki $=$, *np.* $x = 12$, znaczy x równa się 12.

II. Jeżeli są dwie ilości równe, dodawszy do obudwu lub od obudwu odiąwszy tę samę ilość, w 1szym przypadku dwie summy, w 2gim dwie różnice będą równe. I tak ieżeli $a = m$, będzie też $a + 3 = m + 3$; $a - c = m - c$.

Jeżeli są dwie ilości równe, rozmnożywszy obiedwie, albo też obiedwie podzieliwszy przez tę samę ilość, będą w 1szym przypadku dwa iloczyny, w 2gim dwa ilorazy równe. I tak ieżeli $x = a$, będzie też $4x = 4a$; $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}a$.

Jeżeli są dwie ilości nierówne, dodawszy do obudwu, albo też od obudwu odiąwszy tę samę ilość, w 1szym przypadku dwie summy, w 2gim dwie różnice będą nierówne. I tak ieżeli $x > m$, będzie też $x + r > m + r$; $x - a > m - a$.

Jeżeli są dwie ilo'ci nierówne, rozmnożywszy obiedwie, albo też obiedwie podzieliwszy przez tę samę ilość, w 1szym przypadku dwa iloczyny, w 2gim dwa ilorazy będą nierówne. I tak ieżeli $x < p$, będzie też $3x < 3p$, $\frac{1}{3}x < \frac{1}{3}p$.

III. Wyrażenia te, $a + 3 = m + 3$, $a - c = m - c$, i tym podobne, zowią się *równaniami*. Ilości a, c, m, 3 i t. d. zowią się *wyrazami*. Wyrazy równania oddzielone od siebie znakiem $=$, zowią się *stronami* równania. I tak w równaniu $a - c = m - c$, piérwsza strona rownania iest $a - c$, druga strona równania iest $m - c$.

To cośmy powiedzieli wyżéy (II), o ilościach równych, stosuiąc do równań w ogólności, wypadnie, że *dodawszy lub odiąwszy po obu stronach równania tę samę ilość, albo też obie strony równania rozmnożywszy lub podzieliwszy przez tę samę ilość, równanie się nie zepsuie:* gdyż w 1szym przypadku summy, w 2gim różnice, w 3cim iloczyny, w 4tym ilorazy wypadną równe.

IV. 1*ód*, a dodawszy do b, będzie $a + b$. 2*re*, a dodawszy do a, będzie $a + a$, czyli $2a$. 3*cie*, $2a$ dodawszy do $4a$, będzie $2a + 4a$, czyli $6a$. 4*te*, $5a + 3b$ dodawszy do $4a + 2b$, będzie $5a + 3b + 4a + 2b$, czyli $9a + 5b$. 5*te*, $a + b$ dodawszy do $a - b$, będzie $a + b + a - b$, czyli $2a + b - b$, czyli $2a$. 6*te*, $a + 5b$ dodawszy do $a - 2b$, będzie $a + 5b + a - 2b$, czyli $2a + 5b - 2b$; czyli $2a + 3b$. 7*me*, $a + 3b$ dodawszy do $a - 9b$, będzie $a + 3b + a - 9b$; czyli $2a + 3b - 9b$; czyli $2a - 6b$. 8*me*, $a - 4b$ dodawszy do $a - 3b$, będzie $a - 3b + a - 4b$; czyli $2a - 4b - 3b$; czyli $2a - 7b$ i t. d.

Piérwsze cztery przykłady nie potrzębuią żadnego obiaśnienia; cztery ostatnie są także oczywiste: bo w przykładzie 5tym dodawszy $a + b$ do $a - b$, będzie summa $2a + b - b = 2a$: co znaczy, że $2a$ powiększywszy i zmnieyszywszy tą samą ilością b, zostanie $2a$.

Podobnież w przykładzie 6*tym* summa $2a + 5b - 2b = 2a + 3b$, znaczy, że do $2a$ dodawszy naprzód $5b$, a potém odiąwszy $2b$, zostanie $2a + 3b$. W przykładzie 7mym, summa $2a + 3b - 9b = 2a - 6b$, znaczy, że do $2a$ dodawszy naprzód $3b$, a potém odiąwszy $9b$, zostanie $2a - 6b$. Nakoniec w przykładzie 8mym summa $2a - 3b - 4b = 2a - 7b$, znaczy, że od $2a$ odiąwszy naprzód $3b$, a potém $4b$, zostanie $2a - 7b$.

Zastanowiwszy się pilnie nad temi przykładami, wyciągniemy z nich następuiące uwagi: 1*ód*, Dodaiąc ilości odmienne, to iest odmiennemi głoskami oznaczone, iak w przykładzie 1, daie się między temi głoskami znak dodawania $+$. 2*re*. Dodaiąc ilości iednakowe, to iest iednakowemi głoskami oznaczone, iak w przykładzie 3 i 4, dodaią się tylko same liczby przed głoskami temi będące, które się zowią *spółczynniki*. Uwaga ta ściąga się także i do przykładu 2, w którym a dodane do a czyni $2a$: gdyż spółczynnik 1 zwyczaynie się opuscza, lecz iest zawsze domyślny. 3*cie* Dodaiąc ilości iednakowe, spółczynniki ich czasem się dodaią, iak w przykładzie 2, 3, 4 i 8; a czasem się odeymuią, iak w przykładzie 5, 6 i 7. 4*te* Spółczynniki ilości iednakowych w ten czas się dodaią, kiedy przed niemi są iednakowe znaki, to iest albo przed obudwoma znak $-$, iak w przykładzie 8, albo przed obudwoma znak $+$, iak w przykładzie 4, i iak iest we wszystkich przykładach przed wyrazem pierwszym, przed którym zwyczaynie żaden się znak nie daie, lecz iest zawsze domyślny znak $+$. 5*te* Spółczynniki ilości iednakowych w ten czas się od siebie odeymuią, kiedy przed niemi są znaki odmienne, to iest, kiedy przed iednym iest znak $+$, a przed drugim znak $-$, iak iest w przykładzie 5, 6 i

7. 6*te* Kiedy się spółczynniki ilości iednakowych od siebie odeymuią, przed pozostałą resztą daie się albo znak $+$, iak w przykładzie 6, albo znak $-$, iak w przykładzie 7. 7*me* Odeymuiąc od siebie spółczynniki ilości iednakowych, przed resztą kładzie się znak taki, iaki iest przed spółczynnikiem większym.

Z uwag tych wypada następuiące prawidło dodawania: *spółczynniki ilości iednakowych z jednakowemi znakami dodaią się; spółczynniki ilości iednakowych z odmiennemi znakami, odeymuią się, daiąc przed resztą znak spółczynnika większego.*

V. 1*ód* Od a odiąwszy b, zostanie $a - b$. 2*re* Od $5a$ odiąwszy $3a$, zostanie $5a - 3a = 2a$. 3*cie* Od $3a + 2b$ odiąwszy $2a + b$, zostanie $3a + 2b - 2a - b$; czyli $a + 2b - b$, czyli $a + b$. 4*te* Od $5a$ odiąwszy $2a - b$, zostanie $5a - 2a + b$; czyli $3a + b$. 5*te* Od $6a + 2b$ odiąwszy $2a - 3b$, zostanie $6a + 2b - 2a + 3b$, czyli $4a + 5b$ i t. d.

Piérwsze trzy przykłady są oczywiste: ostatnie dwa, w których w ilości maiącéy się odeymować znak $-$ zamienia się na znak $+$, potrzebuią dowodzenia.

Od 12 odiąwszy 8, zostanie 4. Jeżeli tak do 12 iako też do 8 przydam *np.* po 2, i summę drugą, to iest 10 odeymę od summy piérwszéy, to iest od 14, zostanie także 4. Jeżeli tak do 12 iako i do 8 przydam po 3, po 4, po 5 i t. d. i odeymę drugą summę od piérwszéy, zawsze wypadnie ta sama różnica, to iest 4. Daymyż na to, że trzeba od a odiąc $b - c$: ponieważ dodawszy tak do a, iako też do $b - c$ iakąkolwiek ilość, i summę 2gą odiąwszy od 1széy, zawsze wypadnie ta sama różnica, którąby wy-

padła bez takowego dodania; więc tak do a, iako też do $b - c$ dodawszy po c, potrzeba będzie od $a + c$ odiąć $b - c + c$; czyli od $a + c$ potrzeba odiąć b. Odiąwszy b od $a + c$, zostanie $a +$ [illegible] Stąd wno- $c - b$
simy, że *w ilościach maiących się odeymować znak* $+$ *zamienia się na znak* $-$, *i przeciwnie znak* $-$ *na znak* $+$; *a z resztą zachowuie się prawidło dodawania.*

Odeymowanie oznacza się także za pomocą nawiasów; i tak $x-(a-b+c)$, znaczy to samo co $x-a+b-c$; podobnież $x-m+p-q = x-(m-p+q)$ i t. d.

Ilości maiące przed sobą znak $-$, zowią się *odiemne*; ilości maiące przed sobą znak $+$ wyraźny lub domyślny, zowią się *dodayne.*

VI. Z tego cośmy wyżéy powiedzieli o skróconych znakach w mnożeniu używanych, łatwo iest wyprowadzić następuiące prawidło mnożenia ilości poiedynczych: *iloczyn składa się ze wszystkich czynników bez żadnego znaku przy sobie położonych.* Tak *np.* iloczyn cztérech czynników a, b, c i d iest $abcd$ i t. d.

VII. Liczba dzielna, iak wiadomo z Arytmetyki, może być uważana iak iloczyn dwóch czynników, z których ieden iest dzielnikiem, drugi szukanym ilorazem. Gdyby więc przyszło dzielić ab przez a, uważaiąc dzielną ab iako iloczyn dwóch czynników a i b, podzieliwszy iloczyn ten przez czynnik a, wypadnie na iloraz czynnik drugi b: i w rzeczy saméy znaleziony iloraz b rozmnożywszy przez dzielnik a, wypadnie iloczyn ab, który od dzielnéy ab odiąwszy zostanie 0. Podobnież dzieląc $abcm$ przez am, wypadnie na iloraz *bc*: gdyż *bc* rozmnożywszy przez *am*, wypadnie iłoczyn *abcm*, który od dzielnéy odiąwszy zostanie o i t.d. Stąd wypada następuiące prawidło dzielenia: *ilości spólne dzielnéy i dzielnikowi przekréśliwszy, reszta będzie szukanym ilorazem*, np. $\frac{ax}{a}=x$, $\frac{2abc}{abm}=\frac{2c}{m}$, $\frac{3ab}{abc}=\frac{3}{c}$, i t.d.

VIII. Ułomki algiebraiczne tém się tylko od zwyczaynych różnią, że w tych używaią się znaki liczebne, w tamtych zaś głoski abecadła i znaki skrócone. Tak *np.* dwa ułomki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ chcąc przyprowadzić do iednakowego mianownika, trzeba licznik i mianownik 1go rozmnożyć przez *d*, a 2go przez *b*, i będzie $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$: chcąc ułomek $\frac{a}{b}$ rozmnożyć przez *d* będzie $\frac{ad}{b}$, i t.d.

IX. Jeżeli 4 ilości *a*, *b*, *c*, *d* są takie, że ile razy ilość 1wsza iest większa lub mnieysza od 2giéy, tyle też razy ilość 3cia iest większa lub mnieysza od 4téy; cztery te ilości zowią się *proporcyonalne*, i składaią *proporcyą ieometryczną*: i mówimy na ten czas, że *tak się ma ilość piérwsza do drugiéy, iak trzecia do czwartéy*, albo że *stosunek ilości 1széy do 2giéy równy iest stosunkowi ilości 3ciéy do 4téy*.

Chcąc się dowiedzieć ile razy ilość iedna iest większa lub mnieysza od drugiéy, trzeba iednę przez drugą podzielić. Dzielenie iakośmy powiedzieli, oznacza się albo za pomocą dwóch kropek między dzielną i dzielnikiem położonych, albo sposobem ułomka.

Proporcyą zatém ilości a, b, c, d, wyrazić można albo tak $a:b=c:d$, albo tak $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Zwyczaynie iednak oznacza się proporcya ieometryczna sposobem 1wszym (*). Wyrazy a, b składaią 1wszy stosunek, wyrazy c, d składaią 2gi stosunek: 1szy wyraz a zowie się *poprzednikiem*, 2gi b *następnikiem* 1wszego stosunku; 3ci wyraz c poprzednikiem, 4ty d następnikiem 2go stosunku. W proporcyi zatém tak się ma poprzednik 1go stosunku do swego następnika, iak poprzednik 2go stosunku do swego następnika. Stąd iuż łatwo uczynić wniosek, że co w dzieleniu zowiemy ilorazem albo ważnością ułomka, to w proporcyi ieometryczney nazywa się stosunkiem.

2. Proporcyą $a:b=c:d$, wyraziwszy sposobem ułomka $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, i oba te równe ułomki rozmnożywszy przez bd, będzie $\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$; czyli $ad=bc$. Czynniki tych dwóch iloczynów równych, są wyrazami daney proporcyi; ad iest iloczynem wyrazu 1go i 4go, bc iest iloczynem wyrazu 2go i 3go. Wyraz 1wszy i 4ty, zowią się wyrazami *skraynemi*, wyraz 2gi i 3ci wyrazami *średniemi* proporcyi. Stąd wniesiemy, że *w proporcyi ieometryczney iloczyn wyrazów skraynych równy iest iloczynowi wyrazów średnich.*

3. W równaniu $mr=pq$, podzieliwszy obie

(*) Zwyczaynie proporcya ieometryczna oznacza się tak $a : b :: c : d$; lecz zamiast 4 kropek używa się nayczęściéy znak równości, iako widocznieyszy i prędszy do napisania.

strony przez pr, będzie $\frac{mr}{pr} = \frac{pq}{pr}$; czyli $\frac{m}{p} = \frac{q}{r}$; czyli $m:p = q:r$. To iest, *gdy są dwa iloczyny równe, dwa czynniki iednego iloczynu mogą być wzięte za wyrazy skrayne, dwa czynniki 2go za wyrazy średnie proporcyi.*

4. W proporcyi $a:b=c:x$, iest $ax=bc$(2). W tém równaniu podzieliwszy obie strony przez a, będzie $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$; czyli $x = \frac{bc}{a}$. To iest, *w proporcyi ieometryczněy wyraz 4ty równa się iloczynowi dwóch wyrazów średnich podzielonemu przez wyraz 1szy.* Podobnymże sposobem znaleźć można którykolwiek wyraz proporcyi, byleby trzy inne wyrazy były dane.

5. Dwie proporcye $a:b=c:d$, $m:p=q:r$, wyraziwszy sposobem ułomków, będą dwa równania $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{m}{p} = \frac{q}{r}$. Strony odpowiadaiące tych dwóch równań rozmnożywszy przez siebie wypadnie $\frac{a}{b} \times \frac{m}{p} = \frac{c}{d} \times \frac{q}{r}$ (II); czyli $\frac{am}{bp} = \frac{cq}{dr}$ (VI); czyli $am:bp=cq:dr$. Tę ostatnią proporcyą porównawszy z dwiema proporcyami podanemi, wniesiemy, że *w dwóch proporcyach ieometrycznych wyrazy odpowiadaiące rozmnożywszy przez siebie, cztéry iloczyny stąd wypadaiące, będą składały proporcyą.*

6. Dwie proporcye $a:b=c:d$, $m:p=c:d$, wyraziwszy sposobem ułomków, będzie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$\frac{m}{p}$

$\frac{m}{p} = \frac{c}{d}$. W dwóch tych równaniach strona 2ga równania 1go równa iest stronie 2giéy równania 2go; a zatém i strona 1wsza równania 1go, równa będzie stronie 1wszéy równania 2go: będzie więc $\frac{a}{b} = \frac{m}{p}$; czyli $a : b = m : p$. To iest, *gdy dwie proporcye maią ieden stosunek spólny, dwa inne stosunki tych proporcyy są sobie równe, a tém samém składaią proporcyą.*

7. W proporcyi $a : b = c : d$, iest $ad = bc$. (2). Do obu stron tego równania raz dodawszy, drugi raz od obu stron odiąwszy bd, i tak dwie rowne summy, iako też dwie równe różnice iednémże równaniem wyraziwszy; będzie $ad \pm bd = bc \pm bd$. W tém równaniu z 1wszéy strony czynnik d, z 2giéy strony czynnik b iest spólny dla obudwu wyrazów; można więc strony tego równania rozłożyć na czynniki, oznaczaiąc mnożenie za pomocą nawiasów; będzie zatém $(a \pm b)\, d = (c \pm d)\, b$. Czynniki dwóch tych iloczynów równych ułożywszy w proporcyą (3); będzie $a \pm b : c \pm d = b : d$; wziąwszy osobno summy, osobno różnice, będą dwie proporcye $a + b : c + d = b : d$, $a - b : c - d = b : d$, w których stosunek 2gi $b : d$ iest spólny; będzie więc $a + b : c + d = a - b : c - d$ (6). To iest, *w proporcyi ieometryczney, tak się ma summa poprzednika i następnika 1go stosunku do summy poprzednika i następnika 2go stosunku, iak różnica poprzednika i następnika stosunku 1go, do różnicy poprzednika i następnika stosunku 2go.*

W témże równaniu $ad = bc$, po obu stronach raz dodawszy drugi raz odiąwszy dc, i odbywszy działanie iak wyżéy, wypadnie $a + c : b + d = a - c : b - d$. To iest, *w proporcyi ieometryczné tak się ma summa poprzedników do summy następników, iak różnica poprzedników, do różnicy następników.*

8. Niech będzie $A : a = B : b = C : c$; czyli $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$. Daymy na to, że $\frac{A}{a} = m$; będzie też $\frac{B}{b} = m$, $\frac{C}{c} = m$. W trzech ostatnich równaniach rozmnożywszy obie strony w równaniu 1szém przez a, w 2giem przez b, w 3ciém przez c, będzie $A = am$, $B = bm$, $C = cm$. W trzech ostatnich równaniach, strony odpowiadaiące dodawszy do siebie, będzie $A + B + C = am + bm + cm$; drugą stronę rozłożywszy na czynniki, i oznaczywszy mnożenie za pomocą nawiasów, będzie $A + B + C = (a + b + c)\,m$; podzieliwszy obie strony przez $a + b + c$, wypadnie $\frac{A + B + C}{a + b + c} = m$; a że $m = \frac{A}{a}$ podług założenia, więc $\frac{A + B + C}{a + b + c} = \frac{A}{a}$; czyli $A + B + C : a + b + c = A : a$. To iest, *gdy iest kilka stosunków równych, tak się ma summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników, iak poprzednik 1wszy do swego następnika, lub iak którykolwiek poprzednik do swego następnika,*

9. W proporcyi ieometryczné można rozmaicie odmieniać mieysce wyrazom bez nadwerężenia proporcyi. I tak proporcya $a : b = c : d$ może być

w następuiące zamieniona $a:c=b:d$; $b:d=a:c$; $b:a=d:c$; $c:d=a:b$; $c:a=d:b$, $d:c=b:a$, $d:b=c:a$. Jakoż we wszystkich tych proporcyach iloczyn skraynych i średnich iest tak iak w proporcyi 1wszéy $ad=bc$.

10. Pozostało iescze wiele innych własności proporcyy ieometrychnych, które łatwo można wyprowadzić za pomocą dwóch równań $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $ad=bc$. Tak *np.* ieżeli w dwóch proporcyach trzy wyrazy iednéy, są równe trzem wyrazom 2giéy, będzie wyraz 4ty 1wszéy równy wyrazowi 4mu 2giéy proporcyi. 2*re* Wszystkie wyrazy proporcyi rozmnożywszy lub podzieliwszy przez iednęż liczbę, proporcya się nie zepsuie. 3*cie* Rozmnożywszy lub podzieliwszy same tylko poprzedniki, lub same tylko następniki przez iednęż liczbę; albo też rozmnożywszy lub podzieliwszy poprzedniki przez iednę liczbę a następniki przez inną liczbę, proporcya się nie zepsuie i t.d.

11. Proporcya $a:b=b:c$, w któréy następnik 1go stosunku równy iest poprzednikowi stosunku 2go, nazywa się proporcyą *ciągłą*. Wyraz b nazywa się *średnim ieometrycznie proporcyonalnym*. Ponieważ w proporcyi ieometrycznéy iloczyn skraynych równa się iloczynowi średnich (2), w proporcyi zatém ciągłéy iloczyn skraynych, równy będzie wyrazowi i średniemu przez siebie rozmnożonemu.

X. Iloczyn iakiéykolwiek ilości przez siebie rozmnożonéy, zowie się *kwadratem*. I tak 16 iest kwadratem liczby 4; 25 iest kwadratem liczby 5; aa, bb są kwadraty ilości a, b. Ilość z któréy przez siebie rozmnożonéy powstaie kwadrat, zowie się *piér-*

wiastkiem kwadratowym. I tak 2 iest piérwiastkiem kwadratu 4; 3 iest piérwiastkiem kwadratu 9; *a* iest piérwiastkiem kwadratu *aa* i t. d.

Mnożąc *aa* przez *a* wypadnie *aaa* (VI), mnożąc *aa* przez *aa*, wypadnie *aaaa* it. d. Dla skrócenia zamiast *aa*, *aaa*, *aaaa* i t. d. pisze się w 1szym przypadku a^2, w 2gim a^3, w 3cim a^4 i t. d. Liczby 2, 3, 4 i t. d. u góry z prawéy strony ilości iakiéy położone, zowią się *wykładniki*, i znaczą że ilość ta wzięta iest za czynnik 2, 3, 4 it. d. razy, albo że ilość ta podniesiona iest do 2go, 3go, 4go i t. d. stopnia, lub też do 2giéy, 3ciéy, 4téy it. d. potęgi. Wykładnik zatém 2 znaczy ilość podniesioną do kwadratu czyli do 2giéy potęgi.

Znak piérwiastku iest taki $\sqrt{\ }$, *np.* $\sqrt{ab}$ znaczy że potrzeba wyciągnąć piérwiastek kwadratowy z iloczynu *ab*. $\sqrt{\frac{5}{4}}$ znaczy, że potrzeba wyciągnąć piérwiastek z licznika i z mianownika; $\frac{\sqrt{5}}{2}$ znaczy, że potrzeba wyciągnąć piérwiastek z licznika tylko; $\sqrt{\overline{a+b}}$ albo $\sqrt{(a+b)}$, znaczy że potrzeba wyciągnąć piérwiastek z summy $a+b$.

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6$; podobnież $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times 3}=\sqrt{9}=3$; podobnież $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{aa}=a$.

$\sqrt{4\times 3}=3\sqrt{4}=3\times 2=6$; podobnież $\sqrt{a\times m}=m\sqrt{a}$.

$\frac{\sqrt{16}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=2$; podobnież $\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a}$.

$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$; podobnież $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$. $\sqrt{16}=2\sqrt{\frac{16}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{16\times4}=4$; podobnież $\sqrt{a}=2\sqrt{\frac{a}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a}$ i t. d.

XI. Mnożąc *np.* 24 przez 7, albo 24 przez 57, trzeba 4 iedności i 2 dziesiątki rozmnożyć w 1szym przypadku przez 7, w 2gim przez 7 iedności i przez 5 dziesiątków. Podobnież chcąc rozmnożyć $a+b$, lub $a-b$ przez c, albo też chcąc rozmnożyć $a+b$, lub $a-b$ przez $c+d$, lub przez $c-d$; trzeba $a+b$ lub $a-b$ w 1szym przypadku rozmnożyć przez c, i wypadną dwa cząstkowe iloczyny ac, bc; w 2gim przypadku przez $c+d$, lub przez $c-d$, i wypadną cztéry cząstkowe iloczyny ac, bc, ad, bd; co iest rzeczą widoczną; lecz nie tak łatwo iest pomiarkować iakie maią być znaki przed temi cząstkowemi iloczynami, to iest gdzie trzeba dać znak $+$, gdzie znak $-$. Obaczmy to na przykładach.

1ód Ponieważ iloczyn iest zawsze o, gdy ieden z czynników iest o; rozmnożywszy więc $a-a$ czyli o, przez iakąkolwiek ilość c, iloczyn powinien wypaść równy o. Mnożąc $a-a$ przez c, wypadną dwa cząstkowe iloczyny ac, ac; kiedy więc 1szy iest dodayny, 2gi powinien być odiemny: gdyż $ac-ac=o$. Stąd wniesiemy, że rozmnożywszy ilość odiemną przez dodayną, wypadnie iloczyn odiemny.

2re Dla téyże samey przyczyny mnożąc c przez $a-a$, wypadnie iloczyn $ac-ac=o$. Stąd wniesiemy, że rozmnożywszy ilość dodayną przez odiemną, wypadnie iloczyn odiemny.

3cie. Nakonoiec mnożąc $a-a$ przez $-c$, piérwszy z dwóch cząstkowych iloczynów, podług przypadku 2go, będzie odiemny; ażeby więc iloczyn całkowity był równy o, drugi cząstkowy iloczyn powinien być dodayny: iakoż $-ac+ac=o$. Stąd wniesiemy, że rozmnożywszy ilość odiemną przez odiemną, wypadnie iloczyn dodayny. Że zaś iloczyn iest dodayny gdy się mnoży ilość dodayna przez dodayną, to żadnéy wątpliwości nie podpada.

Z tych uwag wyprowadzić można prawidło następuiące: *czynniki z iednakowemi znakami, daią iloczyn dodayny; czynniki z odmiennemi znakami daią iloczyn odiemny.*

XII. Podzieliwszy $+ab$ przez $+a$, wypadnie iloraz $+b$, iakośmy iuż powiedzieli (VII). Podzieliwszy $+ab$ przez $-a$, wypadnie iloraz $-b$: gdyż znaleziony iloraz $-b$ rozmnożywszy przez dzielnik $-a$, wypadnie iloczyn $+ab$ (XI), który odiąwszy od dzielnéy $+ab$ podług prawidła wyżéy podanego (V), zostanie $+ab-ab=o$; co dowodzi, że znaleziony iloraz iest prawdziwy.

Dla téyże przyczyny podzieliwszy $-ab$ przez $+a$, wypadnie iloraz $-b$. Podzieliwszy $-ab$ przez $-a$, wypadnie iloraz $+b$: gdyż znaleziony iloraz $+b$ rozmnożywszy przez dzielnik $-a$, wypadnie iloczyn $-ab$, który odiąwszy od dzielnéy $-ab$, zostanie $-ab+ab=o$.

Stąd wypada następuiące prawidło: *ilości z iednakowemi znakami daią iloraz dodayny; ilości z odmiennemi znakami daią iloraz odiemny.*

XIII. Podług prawidła wyżéy podanego (XI), rozmnożywszy $a+b$ przez $a-b$, wypadnie $a^2+ab-ab+b^2$, czyli a^2-b^2; 2re rozmnożywszy $a+b$ przez $a+b$, wypadnie $a^2+2ab+b^2$; 3cie rozmnożywszy $a - b$ przez $a - b$, wypadnie $a^2 - 2ab + b^2$; 4te rozmnożywszy $a + 3$ przez $a + 3$, wypadnie $a^2 + 6a + 9$; 5te rozmnożywszy $a - 3$ przez $a - 3$, wypadnie $a^2 - 6a + 9$ i t. d.

Z piérwszego przykładu wniesiemy, że iloczynem summy dwóch ilości $a + b$ przez ich różnicę $a - b$, iest różnica ich kwadratów $a^2 - b^2$. Z przykładu 2go i 3go wypada, że *kiedy piérwiastek ma dwie części* a + b, *lub* a — b, *kwadrat składa się z części trzech: to iest, z kwadratu* a^2 *części 1wszéy, z podwóynego iloczynu* 2ab *części 1wszéy przez 2gą, i z kwadratu* b^2 *części 2giéy*; Podobnież w dwóch przykładach ostatnich, kwadrat dwóch ilości $a + 3$, $a - 3$, składa się z kwadratu a^2 części 1wszéy, z podwóynego iloczynu $6a$ części 1széy przez 2gą, i z kwadratu 9 części 2giéy. Gdyby więc dane były dwa kwadraty $x^2 + 6x + 9$, $x^2 - 6x + 9$; wnieślibyśmy że piérwiastkiem 1go iest $x + 3$, 2go $x - 3$.

A zatém natrafiwszy *np.* na równanie takie: $x^2 + 6x = 40$, albo też $x^2 - 6x = 40$: wnieślibyśmy, że w obudwu równaniach piérwszey stronie do zupełności kwadratu nie dostaie 9. Dodawszy więc 9 w obu równaniach z piérwszey strony dla dopełnienia kwadratu, z drugiéy dla zachowania równości, będzie $x^2 + 6x + 9 = 49$; $x^2 - 6x + 9 = 49$. Piérwiastek piérwszéy strony w równaniu 1szém iest $x + 3$, w 2giem $x - 3$, piérwiastek zaś 2giéy strony w obu równaniach iest 7; będzie więc $x + 3 = 7$, $x - 3 = 7$ i t. d. Ztąd wypada następuiące prawidło: *chcąc dopełnić kwadratu którego tylko dwie piérwsze części są dane, trzeba połowę spółczynnika części 2giéy podnieść do kwadratu, i kwadrat ten dodać do a-*

budwu stron równania, *np.* w równaniu $x^2 \pm px = q$, dopełniwszy kwadratu, będzie $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$. Piérwiastek szukany piérwszéy strony równa się zawsze piérwiastkowi wyrazu 1go i połowie spółczynnika wyrazu 2go wziętéy z takim znakiem, iaki się przed wyrazem 2gim znayduie: i tak z dwóch kwadratów $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$, $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$, piérwiastkiem 1go iest $x + \frac{1}{2}p$, 2go $x - \frac{1}{2}p$.

XIV. W równaniu $-x^2 + ax = q - m$, rozmnożywszy obie strony przez -1 będzie $x^2 - ax = -q + m$ (XI). Stąd wniesiemy, że w równaniu wszystkie znaki $+$ zamieniwszy na $-$, i wszystkie znaki $-$ zamieniwszy na $+$, równanie się nie zepsuie. I tak ieżeli $5a - x = -p + r$, będzie też $-5a + x = p - r$ i t.d.

JEQ-

JEOMETRYI

CZĘŚĆ I.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości poprzednicze.

1. Wszystkie rzeczy zmysłowe, zwane inaczéy *ciała*, choćby też były naydrobnieysze, są zawsze *rozciągłe*, to iest maią długość, szerokość i wysokość czyli grubość. Spólna ta wszystkim ciałom własność, o któréy nas zmysł widzenia i dotykania przekonywa, sama iedna tylko zaymuie uwagę naszę, kiedy ciała iakiego wielkość zmierzyć, lub ią z wielkością innego ciała porównać chcemy: w ten czas bowiem nie zważaiąc na inne ciała tego własności, do mierzenia żadnego wpływu nie maiące, samą się tylko iego rozciągłością zaprzątamy. Nauka podaiąca sposoby mierzenia rozciągłości, nazywa się nauką *mierniczą*, czyli *Jeometryą*.

2. Rozciągłość uważa się rozmaicie, i ma rozmaite nazwiska. Jeżeli dla wymierzenia wielkości iakiego ciała uważamy razem iego długość, szerokość i wysokość, czyli grubość; roz-

ciągłość pod temi trzema wymiarami razem wzięta zowie się *bryłowatością*, albo *obiętością* tego ciała, *volumen*, a ciała, ktòrych wielkość pod temi trzema wymiarami uważamy, zowią się *bryły*: i tak kamień, kula, belka, budynek i t. d. są to bryły, których obiętość iest mieysce wzdłuż, wszerz i wzwyż rozległe, przez te bryły zaięte. Bryły podług rozmaitego kształtu są rozmaite, okrągłe, graniaste, kończate i t. d. i maią rozmaite nazwiska, iak to na swoiém mieyscu wyłożymy.

3. Częstokroć w mierzeniu ciał uważamy tylko ich długość i szerokość, bez żadnego względu na wysokość lub grubość. I tak dla wymierzenia pola, ogrodu, posadzki w pokoiu, obicia na ścianę i t. d. dosyć iest zmierzyć ich długość i szerokość. Rozciągłość pod temi dwoma wymiarami uważana, bez względu na wysokość czyli grubość, zowie się *powierzchnią*, *superficies*. Powierzchnia podług kształtu ciała, do którego należy, iest albo równa czyli płaska, zwana inaczéy *płasczyzna*, *planum*; iak iest powierzchnia papiéru, tablicy, stołu, posadzki, ieziora, pola równego i t. d. albo nierówna czyli krzywa, to iest wklęsła lub wypukła; iak iest powierzchnia naczynia wklęsłego, kuli, armaty, góry, doliny i t. d. Tu iuż łatwo wnieść można, że powierzchnie równe czyli płasczyzny różnią się tylko między sobą swoią rozległością czyli wielkością: powierzchnie zaś krzywe tak co do rozległości, iak i co do kształtu swego muszą być rozmaite.

4. Często nawet i na szerokość nie daiemy żadnego względu, lecz tylko samę długość uważamy. I tak podróżny nie pyta się o szerokość drogi, którą ma przebyć, ale tylko uważa odległość mieysca do którego dąży: probuiący dzielności strzelby mierzy tylko długość drogi, którą kula przebiegła, i t. d. Rozciągłość taka tylko wzdłuż uważana, bez względu na szerokość i grubość zowie się *liniią*, a końce linii nazywaią się *punktami*. Punkt zatém, ściśle biorąc rzeczy, nie ma żadnéy rozciągłości: gdyż iest końcem linii, która nie ma ani szerokości ani grubości. Mówimy tu, *ściśle biorąc rzeczy*, gdyż punkta znaczone na tablicy lub na papiérze nie mogą być bez rozciągłości, równie iako i liniie, które kredą, ołówkiem albo piórem kréślimy, muszą mieć koniecznie szerokość, choćby też były iak naycieńsze. Ale w ścisłém znaczeniu, kiedy plasczyzna będąca końcem czyli granicą ciała iakiego, ma tylko długość i szerokość bez grubości; liniia będąca granicą czyli końcem płasczyzny, mieć tylko może długość bez szerokości i grubości; punkt zaś, iako granica czyli koniec linii, nie może mieć żadnéy rozciągłości.

5. Liniia iest albo prosta, albo złamana czyli z kilku prostych złożona, albo krzywa. Liniia prosta iest naykrótsza droga z iednego punktu do drugiego, iak iest liniia AB. *Tablica I. Figura* 1. Wszelka zaś inna liniia, która nie iest naykrótszą drogą z iednego punktu do drugiego, iest albo liniia złamana, czyli z prostych

złożona, iak iest liniia ACDB; albo krzywa, iak są liniie AEB, AFB, które są tém dłuższe, im się bardziéy oddalaią od naykrótszéy drogi z punktu A do B, czyli od linii prostéy AB.

6. Z tego cośmy dotąd o linii prostéy powiedzieli, wypada 1*od* że przez ieden punkt tyle liniy prostych prowadzić można, ile się podoba: co iest przez się widoczna; 2*re* że przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może: bo od iednego punktu do drugiego iedna iest tylko naykrótsza droga; liniy zaś krzywych i złamanych tyle przez dwa punkta prowadzić można, ile się podoba: dlatego też liniie krzywe i złamane oznaczaią się kilką głoskami; na oznaczenie zaś linii prostéy, dosyć iest dwóch tylko głosek, które, ieżeli długość linii prostéy iest wyznaczona, kladą się przy iéy końcach; ieżeli długość linii nie iest wyznaczona, kładą się w dwóch którychkolwiek iéy punktach. 3*cie* że gdy zatém dwie liniie proste maią dwa punkta spólne, dwie te liniie czynią iednę tylko liniią prostą: bo przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może; 4*te* że gdy się dwie liniie proste z sobą przecinaią, przecięciem ich iest tylto ieden punkt: bo gdyby się we dwóch punktach przecinały, na ten czas maiąc dwa punkta spólne, czyniłyby iednę liniią prostą. 5*te* że nakoniec liniie proste różnią się między sobą tylko długością swoią; lubo i ta różnica nie iest tak wielka iak się z początku zdaie, gdy zważymy, że każda liniia prosta może być, w myśli przynaymniéy, w obie strony tak daleko

przedłużona, iak się podoba; gdy tym czasem linie złamane i krzywe tak co do długości, tako i co do kształtu swego, mogą być rozmaite.

7. Między liniami krzywemi, nayznaczniey sza iest liniia kolista, zwana *okręgiem koła*, *linea circularis*, *circumferentia circuli*, iaka iest *fig.* 2. ABCDEA, która zwyczaynie kreśli się za pomocą narzędzia cyrklem zwanego, lecz którą wykreślić także można sposobem następuiącym: wziąwszy nitkę lub drócik długości *np.* linii AS, i ieden iego koniec utwierdziwszy na stole lub na tablicy w punkcie S tak, aby około tego punktu mógł się obracać; do drugiego końca A przyłóżmy ołówek lub kredę, i obróćmy drócik wraz z kredą około punktu S tak, aby powrócił na to samo mieysce, z którego obracać się począł: ślad na tablicy od kredy zastawiony iest okręgiem. Płasczyzna tą liniią krzywą określona zowie się *kołem*, *circulus*. Część iakakolwiek okręgu AED, BCD i t. d. nazywa się *łukiem*, *arcus*.

8. Własność okręgu z samego wykreślenia wypływaiąca iest ta, że każdy punkt na nim wzięty znayduie się w równéy odległości od punktu S: odległością bowiem tą iest drócik AS, którego długość w czasie obrotu iest nieodmienna. Punkt S zowie się dla téy przyczyny *środkiem* koła, *centrum*, a liniia prosta SA, SB i t. d. środek koła z punktem którymkolwiek na okręgu wziętym łącząca, nazywa się *promieniem*, *radius*. Wszystkie zatém promienie koła są równe: bo wszystkie punkta okręgu są w równéy

od środka koła odległości. Inne własności okręgu wyłożymy na swoiém mieyscu; tu tylko przestaiemy na tych, które nam do początkowych wiadomości o liniiach prostych będą potrzebne.

9. Co się tycze innych liniy krzywych, kształtem swoim i innemi własnościami od okręgu różniących się, te należą do Jeometryi dalszéy, którą poprzedzić powinna wiadomość własności liniy prostych, płaszczyzn i brył, co iest przedmiotem ninieyszego dzieła.

ROZDZIAŁ II.

o Liniiach prostych przecinaiących się, o kątach i tróykątach.

10. Gdy się dwie liniie proste, *fig.* 3. AC, BC, z sobą przecinaią, w punkcie C, mieysce między temi dwiema liniiami zawarte, ze strony przeciwnéy punktowi przecięcia nieograniczone zowie się *kątem*, *angulus*. Liniie AC, BC, przecięciem swoiém kąt tworzące, zowią się *ramionami* kąta, *crura*, a punkt C, w którym się te dwie liniie przecinaią, nazywa się *wierzchołkiem* kąta, *vertex*.

11. Kąt zwyczaynie oznacza się iedną głoską iakąkolwiek, która się kładzie przy iego wierzchołku. Lecz gdy dwa lub więcéy kątów maią spólny wierzchołek, iak iest na figurze 4, na ten czas kąt oznacza się trzema głoskami, z których iedna kładzie się przy iego wierzchoł-

ku, a dwie przy końcach ramion. A że często-kroć końce ramion są wierzchołkami innych kątów, iak *np.* na *fig.* 11, przeto dla dokładnego oznaczania kątów, zgodzono się w wymawianiu tych głosek zachować następuiący porządek: wymówić naprzód głoskę będącą przy końcu iednego ramienia, potém głoskę będącą przy wierzchołku, nakoniec głoskę będącą przy końcu drugiego ramienia. I tak *fig.* 4 kąt zawarty między ramionami BC, DC iest BCD, lub DCB; kąt ACD, lub DCA iest kąt zawarty między ramionami AC, DC itd.

12. Ramiona kąta mogą się bardziéy lub mniéy rozchodzić: kąty też pod tym względem są większe lub mnieysze. I tak *fig.* 4, kąt ACB iest większy od kąta DCB; gdyż ramiona pierwszego bardziéy się rozchodzą, niż ramiona drugiego. Kąty równe są te, których ramiona równie się rozchodzą, i które tém samém przystać mogą do siebie, gdy ieden na drugim będzie położony. I tak, położywszy *bc* ramie kąta *bca*, na BC ramieniu kąta BCA, w ten sposób, aby punkt *c* padł na C, ieżeli ramie *ac* póydzie po ramieniu AC, kąt *bca* iest równy kątowi BCA, chociażby ramiona *bc*, *ac* były dłuższe lub krótsze od ramion BC, AC: gdyż ramiona kąta iako linije proste mogą być podług potrzeby przedłużone. Jeżeli zaś, położywszy *bc* na BC, ramie *ac* weźmie takie położenie, iak CD, lub iak CE; kąt *bca* iest w piérwszym przypadku mnieyszy, w drugim większy od kąta BCA, chociażby ramiona *bc*, *ac* były równe ramionom

BC, AC. Wielkość zatém kąta nie zależy od długości ramion, lecz od ich roztwartości, czyli, co na iedno wychodzi, od położenia względem siebie dwóch liniy przecięciem swoiém kąt tworzących.

13. Gdy liniia DC *fig.* 5. takie ma względem linii AB położenie, że znią tworzy dwa kąty ACD, BCD między sobą równe; kąty te zowią się *proste*, *recti*, a liniia DC iest *prostopadła*, *perpendicularis*, do linii AB. Wszelki kąt mnieyszy od prostego, iak iest *np. fig.* 6. kąt ECB, zowie się *ostry*, *acutus*; wszelki kąt większy od prostego, iak iest *np.* kąt ACE, zowie się *roztwarty*, *obtusus*.

14. Kąty tak ostre iako też i roztwarte mogą się bardziéy lub mniéy przybliżać do prostego; przeto też tak ostre iako i roztwarte, co do wielkości swoiéy, są między sobą rozmaite. Lecz kąty proste wszystkie sobie są równe, i mogą do siebie przystać. Jakoż *fig.* 5. położywszy *cb* ramie kąta prostego *dcb*, na CB ramieniu kąta prostego DCB, gdyby ramie *cd* nie poszło po ramienin CD, padłoby albo z prawéy strony linii CD, *np.* na liniią CE; albo z lewéy strony teyże linii CD, *np.* na liniią CF; i kąt *dcb* w piérwszym przypadku byłby równy kątowi ECB, który iest ostry, iako mnieyszy od prostego DCB, w drugim przypadku kąt *dcb* byłby równy kątowi FCB, który iest roztwarty, iako większy od prostego DCB. A że kąt *dcb* nie iest ani ostry, ani roztwarty; więc i ramie *cd* nie póydzie ani po linii CE, ani po linii CF, lecz po linii CD;

a zatém będzie kąt prosty *dcb* równy prostemu DCB.

15. Gdy liniia CE, *fig.* 6. z liniią AB tworzy dwa kąty nie równe, ieden ECB ostry, czyli mnieyszy od prostego DCB, drugi ACE roztwarty, czyli większy od prostego ACD; summa tych dwóch kątów ECB, ACE przy sobie leżących, zwanych inaczéy *przyległemi*, *adjacentes*, równa się dwom kątom prostym. Jakoż kąt ostry ECB od prostego DCB mnieyszy iest kątem DCE; kąt zaś roztwarty ACE od drugiego prostego ACD większy iest tymże samym kątem DCE: więc obadwa kąty przyległe ECB, ACE, równe są dwom kątom prostym DCB i ACD. Czyli

kąt ECB = DCB — DCE.

kąt ACE = ACD + DCE. Dodawszy do siebie strony tych dwóch równań, będzie

ECB+ACE=DCB+ACD—DCE+DCE; czyli ECB+ACE=DCB+ACD. to iest: *Summa dwóch kątów przyległych ECB i ACE, równa się dwom kątom prostym DCB i ACD.*

16. Stąd wypadaią następuiące wnioski: *1ód* że kiedy ieden z dwóch kątów przyległych iest prosty, drugi także prosty być powinien; gdyż obadwa czynią dwa kąty proste;

2re Że wszystkie kąty, *fig.* 7. ACE, ECD, DCF, FCB, leżące z jednéy strony linii AB, i maiące spólny wierzchołek C, ważą dwa kąty proste: bo wystawiwszy sobie, że z punktu C iest wyprowadzona CM prostopadła do AB, summa tych wszystkich kątów równa się widocznie dwom kątom prostym ACM, BCM.

3cie Że gdy się dwie liniie proste, *fig.* 8. AB, DE przecinaią w punkcie C, summa cztérech kątów ACD, DCB, BCE, ECA, równa się cztérem kątom prostym: gdyż kąty ACD i DCB iako przyległe, ważą dwa kąty proste, i kąty ACE i ECB dla téyże przyczyny ważą dwa kąty proste;

4te Że przez punkt C, *fig.* 9. poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę liniy prostych AC, BC, DC, EC, FC; summa wszystkich kątów ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, maiących spólny wierzchołek w punkcie C, równa się czterem kątom prostym: gdyż przedłużywszy którąkolwiek liniią *np.* DC do H, summa kątów HCA, ACB, BCD, równa się dwom kątom prostym, i summa kątów HCF, FCE, ECD równa się także dwom kątom prostym, podług wniosku drugiego.

17. Uważać tu potrzeba, że kiedy dwa kąty przyległe, *fig.* 6. ACE, ECB ważą dwa kąty proste, dwa ich ramiona AC i BC są w jednéy linii; to iest, AC ramie kąta ACE, iest przedłużeniem CB ramienia kąta ECB. Kąty *np. fig.* 7. ACD i DCF nie ważą dwóch kątów prostych, chociaż leżą przy sobie, i maią spólny wierzchołek C: bo ramiona ich AC i CF nie są w jednéy linii.

18. Gdy dwie liniie proste, *fig.* 8. AC, DC przecinaiące się w punkcie C przedłużone będą, pierwsza do B, druga do E; dwa kąty ACD, BCE maiące spólny wierzchołek C zowią się kątami *w wierzchołku przeciwległemi*, *ad verticem oppositi.* Kąty ACE, DCB są także w wierz-

chołku przeciwległe, gdyż obadwa maią spólny wierzchołek C, a ramiona iednego z nich *np.* kąta ACE, są przedłużeniem ramion drugiego kąta DCB. Kąty, *fig.* 9. ACB, FCE, lubo maią spólny wierzchołek C, nie są iednak w wierzchołku przeciwległe: gdyż ramiona iednego z nich nie są przedłużeniem ramion drugiego.

19. Kąty ACD, BCE, *fig.* 8. *w wierzchołku przeciwległe, są sobie równe.* Jakoż summa dwóch kątów przyległych ACD i ACE, równa się dwom kątom prostym; podobnież summa dwóch kątów przyległych BCE i ACE równa się dwom kątom prostym. Więc odiąwszy od obudwu summ spólny kąt ACE, zostanie kąt ACD, równy kątowi BCE. Czyli

kąty ACD + ACE równe są dwom kątom prostym;
kąty BCE + ACE równe są dwom kątom pros:(15)
więc ACD + ACE = BCE + ACE.

W tém równaniu odiąwszy po obu stronach kąt ACE, zostanie kąt ACD = BCE.

20. Stąd wypada 1*ód* że przedłużywszy liniią DC, *fig.* 10, która z liniią AB czyni dwa kąty ACD i BCD proste, przedłużenie iéy CE utworzy z drugiéy strony linii AB dwa kąty ACE, BCE proste: gdyż kąty te są wierzchołkiem przeciwległe kątom DCB, ACD prostym;

2*re* Że kiedy liniia DE iest prostopadła do AB, wzaiemnie też i liniia AB iest prostopadła do DE: bo że liniia DE iest prostopadła do AB, idzie zatém, iż kąt ACD iest równy kątowi przyległemu BCD, i że obadwa te kąty są proste (13). Lecz że kąt BCD iest prosty, idzie za tém że i kąt ACE przeciwległy wierżchołkiem iest prosty; więc kąt ACE = ACD, a tém samém liniia AB iest prostopadła do linii DE.

21. Mieysce trzema liniiami prostemi określone zowie się *tróykątem*, *triangulum*. I tak, *fig.* 11. ACB iest tróykąt: liniie AB, AC, BC przecięciem swoiém tworzące tróykąt, zwać będziemy *bokami*, *latera*. Boki te są oraz ramionami trzech kątów A, B, C. W tróykącie zatém, oprócz powierzchni, sześć rzeczy uważać należy: trzy boki i trzy kąty.

22. Summa dwóch którychkolwiek boków tróykąta, *np.* summa dwóch boków AC i BC, większa iest od boku trzeciego AB: gdyż liniia prosta AB iest naykrótsza droga od punktu A do B (5), a tém samém krótsza iest od ACB linii złamanéy z punktu A do B poprowadzonéy. Dla téyże przyczyny summa dwóch innych którychkolwiek boków większa iest od boku trzeciego.

23. Wziąwszy wewnątrz tróykąta ACB, *fig.* 12. punkt od upodobania D, i do dwóch końców któregokolwiek boku, *np.* AB prowadziwszy liniie proste AD, BD; będzie summa dwóch innych boków AC, BC większa od dwóch liniy AD, BD. Własność ta iest wnioskiem tego, cośmy powiedzieli wyżéy, (5). Lecz można ią także okazać sposobem następuiącym:

Przedłużywszy liniią AD aż do przecięcia się z bokiem CB w punkcie F, będzie w tróykącie ACF summa dwóch boków AC i CF większa od boku trzeciego AF; czyli większa od linii AD i DF: gdyż bok AF składa się z dwóch

tych liniy AD i DF. Podobnież w tróykącie BDF summa dwóch boków BF i DF większa iest od boku trzeciego BD; czyli, dla krótkości w tłumaczeniu się używaiąc skróconych znaków, w tróykącie ACF iest $AC + CF > AF$; czyli
$AC + CF > AD + DF$. Podobnież w troykącie BDF, iest $BF + DF > BD$.

W ostatnich dwóch wyrażeniach dodawszy strony odpowiadaiące sobie, będzie $AC + CF + BF + DF > AD + DF + BD$; czyli $AC + CB + DF > AD + DF + BD$: gdyż $CF + BF = CB$. Odiąwszy po obudwu stronach DF, zostanie $AC + CB > AD + BD$. to iest, summa dwóch boków AC i CB większa od dwoch liniy AD i BD.

24. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą przystać do siebie, a tém samém są sobie równe, gdy dwa boki i kąt między niemi zawarty w jednym, równe są dwom bokom i kątowi między niemi zawartemu w drugim tróykącie.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty, *fig.* 13. ABC, *abc* w których bok $AC = ac$, bok $BC = bc$, i kąt C zawarty między ten i bokami AC, BC równy kątowi *c* zawartemu między bokami *ac*, *bc*; mamy okazać, że bok $AB = ab$, kąt $A = a$, kąt $B = b$, to iest, że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Jakoż wystawmy sobie, że tróykąt *abc* iest z mieysca swego oderwany i położony na tróykącie ABC tak, aby punkt *c* padł na punkt C, i bok *ac* poszedł po boku AC: w takiém położeniu punkt *a* padnie na punkt A: gdyż bok *ac* =AC z założenia; bok *bc* póydzie po boku BC: gdyż kąt *c*=C (12): punkt *b* padnie na punkt B: gdyż bok *bc*=BC. A gdy punkt *a* padł na A i punkt *b* padł na B; więc i bok *ab* przystanie do boku AB: gdyż przez dwa punkta A i B iedna tylko liniia prosta przechodzić może (6); a zatém i kąty *a*, *b*, przystaną do kątów A, B, (12) i cały tróykąt *abc* przystanie do troykąta ABC.

25. Uważać tu potrzeba, że boki równe we dwóch tróykątach leżą na przeciwko równych kątów; i odwrotnie kąty równe leżą na przeciwko równych boków. I tak bok *ab* równy bokowi AB, leży na przeciwko kąta *c* równego kątowi C; kąt *b* równy kątowi B leży na przeciwko boku *ac* równego bokowi AC i t d.

26. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą do siebie przystać, gdyż dwa kąty i bok przy nich leżący w jednym, równie są dwom kątom i bokowi przy nich leżącemu w drugim tróykącie.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty, *fig.* 13. ABC, *abc*, w których kąt A=*a*, kąt B =, *b* i bok AB=*ab*: mamy dowieśdź że, bok AC=*ac*, bok BC=*bc*, i kąt C=*c*, czyli, że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Wystawmy sobie, że tróykąt *abc* iest położony na tróykącie ABC tak, aby punkt *a* padł na A, i bok *ab* poszedł po boku AB; ponieważ dwa te boki są równe z założenia, więc punkt *b* padnie na punkt B: a że kąt *a*=A, więc bok *ac* poydzie po boku AC (12), a tém samem punkt c padnie na którykolwiek punkt linii AC. Podobnież dla równości kątów *b* i B, bok *bc* poydzie po boku BC, a tém samém punkt c padnie na którykolwiek punkt linii BC. A zatém punkt c, który musi się znaydować razem na dwóch liniiach AC i BC, padnie na spólne ich przecięcie C: więc tróykąt *abc* przystanie do tróykąta ABC.

27. Twierdzenie. *Jeżeli we dwóch tróykątach dwa boki iednego, są równe dwom bokom drugiego tróykąta, a kąty między temi bokami nie są równe; ten z boków przeciwnych tym nierównym kątom iest większy, który leży naprzeciwko większego kąta; i odwrotnie, ten z dwóch kątów zawartych między równemi bokami we dwóch tróykątach iest większy, który leży naprzeciwko większego boku.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty *fig.* 14. ABC, *abc*, w których bok AB$=$*ab*, bok BC$=$*bc*, a kąt B zawarty między dwoma pierwszemi większy iest od kąta *b* zawartego między dwoma drugiemi bokami: trzeba dowieśdź, że bok AC przeciwny kątowi B w tróykącie ABC, większy iest od boku *ac* przeciwnego kątowi *b* w tróykącie *abc*.

Położywszy tróykąt *abc* na tróykócie ABC tak, aby bok *ab* przystał do boku AB, boki *ac*, *bc* wezmą albo takie położenie, iak na figurze pod liczbą 1, gdzie punkt *c* znayduie się na boku AC; albo takie iak na fig. 2, gdzie punkt *c* znayduie się wewnątrz tróykąta ABC; albo nakoniec takie, iak na *fig.* 3, gdzie punkt *c* znayduie się za tróykątem ABC.

W 1*wszym* przypadku bok AC widocznie iest większy od A*c*, iako całość od swoiéy części: a że A*c* = *ac* z wykréślenia, więc bok AC większy iest także od *ac*.

W 2*gim* przypadku *fig.* 2 AC + BC > A*c* + B*c*; (23) czyli AC + BC > A*c* + BC: gdyż podług założenia bok B*c* = *bc* = BC.

Odiąwszy po obudwu stronach BC, zostanie AC > A*c*. A że A*c* = *ac*, z wykreślenia, będzie więc AC > *ac*, to iest, bok AC większy iest od boku *ac*.

W 3*cim* przypadku, *fig.* 3 w tróykącie A*c*D, AD + D*c* > A*c* (22). Podobnież w tróykącie BDC DC + DB > BC. Dodàwszy strony odpowiadaiące sobie, będzie AD + DC + D*c* + DB > A*c* + BC; czyli AC + B*c* > A*c* + BC. (gdyż na figurze AD + DC = AC, D*c* + DB = B*c*) czyli AC + BC > A*c* + BC (gdyż B*c* = *bc* = BC z założenia). Odiąwszy BC po obu stronach, będzie AC > A*c*; czyli AC > *ac*: gdyż A*c* = *ac* z wykréślenia.

Odwrotnie. Jeżeli boki *fig.* 14 AB, BC, równe są bokom *ab*, *bc*, a bok AC większy iest od boku *ac*; będzie kąt B przeciwny większemu bokowi AC, większy od kąta *b* przeciwnego mnieyszemu bokowi *ac*: gdyż położywszy tróykąt *abc* na tróykącie ABC, iak w Iwszéy części tego twierdzenia, w każdym z trzech przypadków kąt AB*c* czyli kąt *b*, iest częścią kąta ABC czyli kąta B; a tém samém kąt B > *b*.

28.

28. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą do siebie przystać, gdy trzy boki iednego, równe są trzem bokom drugiego tróykąta.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty *fig.* 13 ABC, *abc*, w których bok AB$=$*ab*, bok AC$=$*ac*, bok BC$=$*bc*; trzeba dowieśdź że kąt A$=$*a*, kąt B$=$*b*, i kąt C$=$*c*, czyli że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Gdyby *np*, kąt *b* nie był równy kątowi B, tedy byłby od niego albo większy albo mnieyszy. W pierwszym przypadku, ponieważ boki *ab*, *bc* tróykąta *abc* równe są podług założenia, bokom AB, BC tróykata ABC, bok *ac*, przeciwny większemu kątowi *b*, byłby większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B, podług twierdzenia poprzedzaiącego; co być nie może: gdyż podług założenia bok *ac*$=$AC.

W drugim przypadku, gdyby kąt *b* był mnieyszy od kąta B; bok AC przeciwny kątowi B większemu, byłby większy od boku *ac* przeciwnego kątowi *b* mnieyszemu (27); co być nie może: gdyż, podług założenia, bok AC $=$ *ac*. Kiedy więc kąt *b* nie może być ani większy, ani mnieyszy od kąta B, musi być mu równy. Dwa zatém tróykąty ABC, *abc*, w których dwa boki AB, BC i kąt B między niemi zawarty w jednym, równe są bokom *ab*, *bc* i kątowi *b* między niemi zawartemu w drugim tróykącie, przystaną do siebie (24).

29. Twierd. *W tróykącie maiącym dwa boki równe, kąty przeciwne bokom równym są równe.*

Dowod. Niech będzie tróykąt *fig.* 15. ABC w którym bok AC=BC; trzeba dowieśdź, że kąt B=A.

Podzieliwszy trzeci bok AC na dwie równe części w punkcie D, i poprowadziwszy liniią CD; w dwóch tróykątach ACD, BCD, bok AC piérwszego, równy iest bokowi BC drugiego tróykąta, podług założenia; bok AD piérwszego, równy iest bokowi BD drugiego tróykąta podług wykreślenia; bok CD iest dla obudwu tróykątów spólny: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (28); a w szczególności, kąt A przystanie do kąta B; więc dwa te kąty są równe.

30. Stąd wypada, że w tróykącie ACB, *fig.* 16 maiącym wszystkie trzy boki między sobą równe, wszystkie też trzy kąty są między sobą równe: gdyż kąt A równy iest kątowi B, dla równości boków AC, BC; a że też boki AB i AC są równe, więc kąt B równy iest kątowi C.

31. Tróykąt maiący trzy boki równe zowie się *równoboczny*, *æquilaterum;* tróykąt maiący dwa boki równe, zowie się *równoramienny*, *æquicrurum* albo *isoscele;* tróykąt maiący trzy boki nierówne, zowie się *różnoboczny*, *scalenum.*

W tróykącie równoramiennym ACB *fig.* 15 trzeci bok AB zowie się zwyczaynie *podstawą*, *basis*, a kąt C przeciwny podstawie nazywa się *wiérzchołkiem* tróykąta, *vertex.* W innych tróykątach którykolwiek bok można wziąć za podstawę, a kąt mu przeciwny za wiérzchołek.

Powyższe zatém twierdzenie (29) możnaby tak wysłowić: *w tróykącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.*

32. Twierd. *W tróykącie maiącym dwa kąty równe, boki przeciwne kątom równym są równe.*

Dowod. Niech będzie tróykąt ABC, *fig.* 17. w którym kąt A=B; trzeba dowieśdź, że bok BC=AC, czyli że tróykąt ten iest równoramienny.

Na okazanie tego, podzielmy bok trzeci AB w punkcie F na dwie równe części, i poprowadziwszy liniią CF, przedłużmy ią do D tak, aby były DF = CF; poprowadziwszy potém liniią AD i BD; w dwóch tróykątach AFC, BFD, bok AF=BF z wykreślenia; bok CF=DF z wykreślenia; i kąt AFC=BFD (19); więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24): a w szczególności bok AC=BD, i kąt FAC=FBD. A że kąt FAC = FBC z założenia, więc i kąt FBD =FBC. Podobnymże sposobem dowiedziemy przez przystanie do siebie dwóch tróykątów CFB, AFD, że kąt FAD = FAC. Więc dwa tróykąty ACB, ADB maiące bok AB spólny, i kąty przy nim leżące przy A i B równe, przystaną do siebie (26); a w szczególności bok BC= BD: a że bok BD = AC podług dowiedzenia, więc i BC = AC.

33. Stąd wypada, że ieżeli w tróykącie wszystkie trzy kąty są równe, będą też i wszystkie trzy boki równe.

34. Twierd. *W tróykącie rożnobocznym bok większy, przeciwny iest większemu kątowi, i odwrotnie kąt większy, przeciwny iest większemu bokowi.*

Dowod. 1*sze* Niech będzie tróykąt, *fig.* 18. ABC, w którym kąt CAB iest większy od kąta B: trzeba dowieśdź, że bok BC przeciwny większemu kątowi CAB, iest większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B.

Z punktu A poprowadziwszy liniią AD tak, aby kąt DAB był równy kątowi B, w tróykącie równoramiennym DAB iest bok AD=DB (32). W tróykącie ACD iest CD + AD > AC (22); czyli CD + DB > AC: gdyż AD=DB; czyli CB > AC; to iest: bok CD przeciwny większemu kątowi CAB iest większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B.

2*re* W tróykącie ABC, w którym bok BC > AC, będzie kąt CAB przeciwny większemu bokowi BC, większy od kąta B przeciwnego mnieyszemu bokowi AC.

Jakoż gdyby kąt CAB nie był większy od kąta B, byłby albo równy kątowi B; albo od niego mnieyszy. Gdyby kąt CAB był równy kątowi B, bok BC byłby równy bokowi AC (32); co się sprzeciwia założeniu. Gdyby kąt CAB był mnieyszy od kąta B, bok BC przeciwny kątowi CAB mnieyszemu, byłby mnieyszy od boku AC przeciwnego kątowi większemu, podług pierwszéy części ninieyszego twierdzenia; co się także sprzeciwia założeniu. Kiedy zatém kąt CAB nie może być ani równy kątowi B, ani od niego mnieyszy, musi więc być od niego większy.

35. Dla dowiedzenia ostatnich trzech twierdzeń, trzeba było bok AB, *fig.* 15 i 17 dzielić na dwie równe części, i wykreślic kąt DAB, *fig.* 18 równy kątowi B. Ułatwią to następuiące zagadnienia:

Zagadnienie. 1. *Maiąc dane dwa punkta A i B* fig. 19, *znaleźć punkt trzeci, któryby od obudwu był w jednakowéy odległości.*

Rozwiązanie. Z punktu A, promieniem iakimkolwiek, byle większym niż iest połowa odległości dwóch danych punktów, nakreślmy łuk DE, a z punktu B tymże samym promieniem nakreślmy łuk FG, który z łukiem pierwszym przecina się w punkcie C: punkt C iest punktem szukanym.

Uwaga. Uważać tu potrzeba, iż promień którym kreślimy dwa łuki przecinaiące się, powinien być większy, niż iest połowa odległości dwóch punktów danych: gdyż inaczéy dwa łuki wykreślone przeciąćby się z sobą nie mogły, iak są *np.* łuki *de* i *fg*.

36. Zagad. 2. *Daną liniią prostą AB, fig.* 20 *podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Znaydźmy, podług poprzedzaiącego zagadnienia, punkt C będący w jednakowéy odległości od obudwu końców danéy linii AB; podobnież z drugiéy strony linii AB znaydźmy punkt D będący w iednakowéy odległości od tychże końców. Punkt C złączmy z punktem D liniią prostą CD, która daną liniią

AB podzieli w punkcie F na dwie części równe. Jakoż poprowadziwszy liniie proste AC, CB, BD, DA, dwa tróykąty CAD, CBD, w których bok AC = CB (35) bok AD = BD, a bok CD spólny, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąty przy C są równe. Dwa zatém tróykąty ACF, BCF, w których bok AC = BC, bok CF spólny i kąty przy C równe, przystaną do siebie (24), a w szczególności AF = BF. Więc liniia AB w punkcie F podzielona iest na dwie części równe.

37. Tym samym sposobem możnaby liniią AF i BF podzielić na dwie równe części, a tém samém liniia AB byłaby podzielona na części równych 4. Możnaby potém każdą czwartą część linii AB podzielić tymże sposobem na dwie równe części, a zatém liniia AB byłaby podzielona na części równych 8 i t. d. Lecz sposób ten nie iest dostateczny do podzielenia linii danéy na części równych 3, 5, 6 i t. d. Podamy na to sposób niżéy.

38. Zagad. 3. *Maiąc dane dwie liniie proste, znaleźć ich spólną miarę.*

Rozwiąz. Niech będą dwie liniie AB i CD *fig.* 21: mnieyszą CD przenieśmy na większą tyle razy, ile można: daymy na to, że liniia CD mieści się w linii AB trzy razy, począwszy od A do E, i że zostanie cześć EB; będzie wiec

$$AB = 3CD + EB.$$

Niech znowu liniia EB przeniesiona na liniią CD mieści się w niéy cztery razy począwszy od C do F, i zostaie część FD; będzie więc

$$CD = 4EB + FD.$$

Podobnież FD przeniesiona na EB, mieści się w niéy raz od E do G, i zostaie część BG; będzie więc $EB = FD + BG$.

Nakoniec BG przeniesiona na FD, mieści się w niéy trzy razy zupełnie: będzie więc

$FD = 3BG$. A zatém

$$EB = FD + BG = 3BG + BG = 4BG.$$
$$CD = 4EB + FD = 16BG + 3BG = 19BG.$$
$$AB = 3CD + EB = 57BG + 4BG = 61BG.$$

Toiest, liniia BG iest spólną miarą dwóch liniy AB i CD: w pierwszéy bowiem mieści się razy 61, w drugiéy razy 19; i dwie te liniie AB, CD są do siebie iak dwie liczby 61 i 19.

Uwaga. Sposób ten szukania spólnéy miary dwóch liniy danych, zupełnie iest podobny do tego, który podaie Arytmetyka, gdy idzie o znalezienie spólnego dzielnika dwóch liczb danych, z tą tylko różnicą, że dwóch iakichkolwiek liczb ieżeli nie inna iaka liczba, to przynaymniéy iedność iest spólnym dzielnikiem, czyli spólną miarą; w szukaniu zaś spólnéy miary dwóch liniy danych trafić się częstokroć może, iż się nigdy nie doydzie do takiéy części pozostałéy, któraby się w poprzedzaiącéy zupełnie mieściła, choćby działanie to naydaléy posunięte było. Na ten czas dwie dane liniie nie maią spólnéy miary. Liniie takie i wszystkie ilości nie maiące spólnéy miary, nazywaią się *niespółmierne*, *incommensurabiles*

39 Zagad. 4. *Narysować tróykąt równy danemu tróykątowi ABC fig.* 13.

Rozwiąz. Poprowadziwszy liniią $ab = AB$, z punktu *a* promieniem równym bokowi AC, kreślę łuk; z punktu *b*, promieniem równym bokowi BC, kreślę łuk drugi, z pierwszym w punkcie *c* przecinaiący się; punkt *c* łączę z punktem *a* i *b*, liniiami prostemi *ac*, *bc*, tróykąt *abc* iest szukany: gdyż dwa te tróykąty mogą do siebie przystać (28).

40. Zagad. 5. *Maiąc dany kąt A fig.* 22, *wykreślić kąt drugi równy danemu, któregoby wierzchołkiem był punkt* a *na daney linii* ab.

Rozwiąz. Na ramionach danego kąta A, biorę dwa punkta C, D od upodobania, i łączę ie liniią prostą CD. Na linii *ab*, wziąwszy $ad = AD$, z punktu *a* promieniem równym linii AC kreślę łuk; z punktu *d* promieniem równym linii CD kreślę drugi łuk z piérwszym w punkcie *c* przecinaiący się; punkt przecięcia *c* łączę z punktem *a* liniią *ac*; kąt *cab* iest szukany: gdyż poprowadziwszy liniią prostą *cd*, dwa tróykąty *cad*, CAD przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt $a = A$.

41. Zagad. 6. *Maiąc dane dwie liniie proste na dwa boki tróykąta, i kąt maiący być między temi bokami zawarty, narysować tróykąt.*

Rozwiąz. Nakreśliwszy kąt równy danemu, maiący za ramiona dwie dane liniie, końce tych ramion złączywszy liniią prostą; będzie tróykąt szukany (24).

42. Zagad. 7. *Maiąc daną liniią prostą i dwa kąty, wyrysować tróykąt, w którymby dwa kąty i bok im przyległy były równe dwom danym kątom i danéy linii.*

Rozwiąz. Poprowadzić liniią równą danéy, i przy obudwu iéy końcach wykréślić dwa kąty równe danym, i maiące za ramie spólne liniią daną; drugie dwa ramiona tych kątów przedłużywszy, póki się z sobą nie przetną; będzie tróykąt szukany (26).

43. Zagad. 8. *Maiąc dane trzy liniie na trzy boki tróykąta, narysować tróykąt.*

Rozwiąz. Poprowadziwszy liniią równą któréykolwiek z trzech liniy danych, i wykreśliwszy na niéy tróykąt, daiąc mu dwa drugie boki równe dwom pozostałym liniiom danym, będzie tróykąt szukany (28).

Uwaga. Ponieważ w tróykącie summa dwóch boków iest większa od trzeciego, (22) zagadnienie to w ten czas tylko może być rozwiązane, kiedy każda z danych liniy mnieysza iest od dwóch innych razem wziętych.

44. Zagad. 9. *Wykreślić tróykąt równoramienny, maiąc daną liniią na podstawę i kąt maiący być przy niéy; albo też maiąc dany kąt przy wierzchołku i iedno ramie.*

Rozwiąz. W piérwszym przypadku poprowadziwszy liniią równą danéy i przy obudwu iéy końcach nakreśliwszy dwa kąty równe między sobą i kątowi danemu; ramiona tych kątów przedłużam póki się z sobą nie zeydą: będę miał tróykąt szukany (32).

W drugim przypadku, nakreśliwszy kąt równy danemu, daiąc mu za ramiona liniie równe ramieniu danemu; końce tych liniy złączywszy liniią prostą, będzie tróykąt szukany (29).

45. Zagad. 10. *Na danéy linii wystawić tróykąt równoboczny.*

Rozwiąz. Na danéy linii wykreśliwszy tróykąt, daiąc mu dwa inne boki równe linii danéy, tróykąt ten będzie szukany.

46. Zagad. 11. *Dany kąt A fig. 22 podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Na ramionach kąta danego wziąwszy AF=AE, i z punktów F, E iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy dwa łuki w punkcie B przecinaiące się, prowadzę liniią AB; liniia ta podzieli kąt A na dwie równe części: gdyż poprowadziwszy liniie BF, BE, dwa tróykąty ABF, ABE maią bok AB spólny; bok AF=AE i bok BF=BE z wykreślenia: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28); a w szczególności kąt BAF=BAE.

A zatém dany kąt można podzielić na części równych 4, 8, 16 i t. d. dzieląc każdą połowę na dwie równe części.

ROZDZIAŁ III.

o Liniiach prostopadłych, pochyłych i równo odległych.

47. *Twierd.* Ze wszystkich liniy prostych, *fig.* 23. które z punktu C wziętego za liniią AB

do téy linii poprowadzić można, naykrótsza iest prostopadła CD; inne zaś liniie CA, CF, CB i tym podobne, które zwać będziemy *pochyłemi*, *obliquæ*, tém są dłuższe, im się bardziéy oddalaią od punktu D, w którym prostopadła przecina się z liniią AB, i który zwać będziemy *spodkiem* prostopadłéy; i te tylko między pochyłemi są sobie równe, które są równie od spodku prostopadłéy oddalone.

Dowod. *1ód* Przedłużywszy CD do E tak, aby było ED=CD, i poprowadziwszy liniią FE; w dwóch tróykątach CDF, EDF bok CD=ED z wykreślenia, bok FD spólny, kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste, (14) więc dwa te tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia 1wszego o przystawaniu tróykątów (24), a w szczególności bok FE=FC. W tróykącie CFE iest

CF+FE > CE (22); czyli

CF+FE > CD+ED, czyli

CF+CF > CD+CD. (gdyż FE=CF z dowiedzenia, ED=CD z wykreślenia). Czyli

2CF > 2CD: więc

CF > CD: to iest, iakakolwiek pochyła CF większa iest od prostopadłéy CD, a tém samém prostopadła iest naykrótsza.

2re Wziąwszy AD > FD, będzie pochyła AC bardziéy od spodku prostopadłéy oddalona większa, niż iest pochyła FC. Na okazanie, że pochyła piérwsza iest większa od drugiéy, poprowadźmy liniią AE. Dwa tróykąty CAD, EAD, w których bok AD iest spólny, bok CD=ED z wykreślenia, i kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste, przystaną do siebie podług twierdzenia piérwszego o przystawaniu tróykątów; a w szczególności AC = AE. W tróykącie CAE iest

AC + AE > FC + FE (23); czyli

AC + AC > FC + FC: gdyż AE = AC, FE = FC z dowodzenia; czyli 2AC > 2FC: więc

AC > FC; to iest: pochyła AC bardziéy od spodku D prostopadłéy CD oddalona, większa iest od pochyłéy FC mniéy od tegoż spodku oddalonéy.

3*cie* Wziąwszy DB = DF, i poprowadziwszy liniie CB, CF, dwie te pochyłe równie od spodku prostopadłéy oddalone, będą równe. Jakoż w dwóch tróykątach CDB, CDF bok CD iest spólny, bok DB = DF z założenia; kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności CF = CB: to iest, dwie pochyłe równie od spodku prostopadłéy oddalone są równe.

48. Stąd wypada 1*szé*. Że dwie liniie pochyłe z jednego punktu do linii trzeciéy poprowadzone, ieżeli sobie są równe, nie mogą obiedwie znaydować się z jednéy strony prostopadłéy CD; lecz iedna z nich musi znaydować się ze strony A, druga ze strony B, w równéy odległości od spodku prostopadłéy.

49. 2*re* Że z punktu C do linii prostéy AB nie można poprowadzić trzech liniy równych między sobą: gdyż dwie z nich musiałyby znay-

dować się z jednéy strony prostopadłéy CD; co być nie może.

50. *3cie.* Że ze środka D linii AB *fig.* 24. wyprowadziwszy prostopadłą CD do linii AB, każdy punkt wzięty na téy prostopadłéy *np.* punkt F iest w równéy odległości od obudwu końców linii AB: gdyż poprowadziwszy liniie pochyłe FA, FB, pochyłe te są sobie równe (47). Każdy zaś punkt wzięty za tą prostopadłą *np.* punkt E nie iest w równéy odległości od końców A i B linii AB: gdyż poprowadziwszy liniie EA, EB, w tróykącie BFE

$BF + FE > EB$ (22) więc

$AF + FE > EB$: gdyż $AF = BF$ z dowodzenia; czyli $AE > EB$; to iest, odległość punktu E od punktu A iest większa, niż od punktu B.

51. Prostopadła z punktu C do linii AB spusczona, iako naykrótsza ze wszystkich liniy, które z tegoż punktu do linii AB mogą być poprowadzone, oznacza prawdziwą odległość punktu C od linii AB. Przeto też prostopadła z punktu iakiego do danéy linii spusczona, zowie się *odległością* tego punktu od danéy linii.

52. Twierd. *Dwa tróykąty ABC*, abc, *fig.* 25. *w których kąty A i* a *są proste; boki tym kątom przeciwne BC i* bc *równe, i boki tymże kątom przyległe AC i* ac *równe, mogą przystać do siebie.*

Dowod. Dwa te tróykąty przystałyby do siebie, gdyby bok trzeci *ab* był równy bokowi trzeciemu AB. Daymyż na to, ieżeli być może, iż ieden z nich *np.* AB iest większy od *ab*, i że liniia AF mnieysza od AB, iest równa bokowi *ab*. Poprowadziwszy liniią CF w dwóch tróykątach ACF, *acb*, bok AC = *ac* z założenia; bok AF = *ab* z przypuszczenia; kąt A = *a*, bo są obadwa proste: więc dwa te tróykąty przystałyby do siebie (24), a w szczególności bok CF byłby równy bokowi *cb*; a że podług założenia *cb* = CB; więc i liniia CF, byłaby równa CB; co być nie może: gdyż pochyłe te obiedwie znayduią się z jednéy strony prostopadłéy CA (48), a zatém z dwóch boków AB i *ab* nie może być ieden od drugiego większy: więc boki te są sobie równe; a tém samém tróykąty ABC, *abc* przystaną do siebie (28).

53. Zagad. *Z punktu D danego na linii prostéy AB, fig.* 26. *wyprowadzić prostopadłą do téy linii.*

Rozwiąz. Wziąwszy DF = DB, i z punktu B i F iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy dwa łuki w punkcie C przecinaiące się; punkt C łączę z punktem D liniią prostą CD: ta liniia iest szukana: gdyż poprowadziwszy linie CB i CF, w dwóch tróykątach CDB, CDF bok CD idst spólny; bok DB = DF z wykreślenia; bok BC = CF, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt CDB = CDF: więc kąty te są proste (13); a tém samém liniia CD iest prostopadła do linii AB.

54. Zagad. *Z punktu C danego za liniią AB fig.* 27. *spuścić prostopadłą do téy linii.*

Rozwiąz. Z punktu C promieniem iakimkolwiek, byle większym niż iest odległość punktu tego od linii danéy, kréślę łuk przecinaiący liniią AB w punktach B i F; z drugiéy strony linii AB znalazłszy punkt G równie od punktów B i F odległy (35), punkt C z punktem G łączę liniią prostą CG, która liniią AB przecina w punkcie D: liniia CD iest szukana: gdyż w tróykątach CBG, CFG bok CG iest spólny; bok CB = CF, i BG = FG z wykréślenia: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28), a w szczególności kąty przy C są równe. W dwóch tróykątach CDB, CDF, bok CD iest spólny; bok CB = CF, i kąty przy C równe; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a w sczególności kąty przy D są równe, a tém samém liniia CD iest prostopadła do linii AB (13).

55. *Wnioski.* Stąd wypada 1*ód*, że z punktu C danego za liniią AB, nie można spuścić więcéy prostopadłych do téy linii, tylko iednę CD: gdyż liniie pochyłe CB i CF iako sobie równe, powinny być równie oddalone od spodku D prostopadłéy CD (48); a zatém prostopadła do linii AB z punktu C spuszczona powinna przechodzić przez środek D linii BF: a przez dwa punkta C, D iedna tylko liniia prosta przechodzić może (6). Dla téyże przyczyny z punktu D danego na linii AB nie można wyprowadzić więcéy prostopadłych do téy linii, tylko iednę CD.

56. 2*re*. Dwa tróykąty ABC, *abc*, *fig*. 25. w których kąty A i *a* są proste, boki tym kątom przeciwne BC i *bc* równe, i kąty B i *b* równe, przystaną do siebie: gdyż położywszy tróykąt *abc* na tróykącie ABC tak, aby kąt *b* przystał do

kąta B, i bok *ab* poszedł po AB, bok *bc* przystanie do boku CB i punkt *c* padnie na punkt C, gdyż dwa te boki są sobie równe: gdyby bok *ac* nie przystał do boku AC, lecz wziął odmienne położenie, na tenczas z punktu C, możnaby było do linii AB poprowadzić dwie prostopadłe, iednę będącą ramieniem kąta prostego A, drugą będącą ramieniem kąta prostego *a*; co być nie może (55).

57. 3cie Z tego też twierdzenia wypada, że dwie liniie, *fig.* 28. CH, FI, prostopadłe do trzeciéy linii AB, nigdy się z sobą nie zeydą, choćby też naydaléy były przedłużone, tak w górę ku *x*, iako też na dół ku *y*: bo gdyby się z sobą zeszły, z punktu ich przecięcia się możnaby było spuścić dwie prostopadłe do linii AB; co być nie może (55).

58. Dwie liniie proste na iedneyże płaszczyznie poprowadzone tak, że się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone, zowią się *równoodległe*, *parallelæ*. A zatém dwie liniie prostopadłe do trzeciéy są od siebie równoodległe: gdyż się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone.

59. Lecz ieżeli liniia IK z liniią AB tworzy kąt AIK mnieyszy od prostego CHB, liniia ta IK pochyła i CH prostopadłą do AB zeydzie się powyżéy linii AB, gdy obiedwie dostatecznie będą przedłużone: ieżeli zaś liniia IL z liniią AB tworzy kąt AIL większy od prostego CHB, dwie te liniie IL pochyła i CH prostopadła do AB zeydą się z sobą poniżéy linii AB, gdy obiedwie

dwie

dwie dostatecznie będą przedłużone. Własność ta liniy tak iest sama przez się widoczna, że żadnego dowodzenia nie potrzebuie.

60. Stąd wypada 1*od*, że gdy z dwóch liniy iedna iest prostopadła do trzeciéy, a druga tworzy z trzecią kąt ostry lub roztwarty; dwie piérwsze liniie dostatecznie przedłużone, zeydą się z sobą z jednéy lub drugiéy strony linii trzeciéy.

61. 2*re* Że gdy dwie liniię DH, GI są prostopadłe do trzeciéy AB, każda liniia, iak iest *np.* DG, prostopadła do iednéy z nich, iest razem i do drugiéy prostopadłą: bo gdyby liniia DG prostopadła do DH w punkcie D, nie była prostopadłą do linii GI w punkcie G; kąt G byłby ostry lub roztwarty, a tém samem dwie liniie DH, GI, z których piérwsza tworzy z liniią DG kąt prosty, druga z tą samą liniią DG tworzy kąt ostry lub roztwarty, dwie mówię, te liniie dostatecznie przedłużone, zeszłyby się z sobą; co być nie może: gdyż obiedwie podług założenia, są prostopadłe do linii trzeciéy AB.

62. 3*cie* Że dwie liniié AB, CD *fig.* 29. równoodległe od trzeciéy EF, są także i między sobą równoodległe: gdyż poprowadziwszy liniią GH prostopadłą do EF, liniia AB iako równoległa od EF, będzie także prostopadłą do GH; i liniia CD iako równoległa od EF, będzie prostopadłą do GH: a zatém dwie liniie AB, CD, prostopadłe do trzeciéy GH, są od siebie równoległe (58).

63. *4te.* Stąd nakoniec wypada, że gdy dwie liniie EH, FG *fig.* 30. są prostopadłe, piérwsza do linii AC, druga do linii BC przecinaiącéy się z liniią AC w punkcie C; dwie te prostopadłe EH, FG zeydą się z sobą, gdy będą dostatecznie przedłużone: gdyż inaczéy byłyby od siebie równoległe (58); a że iedna z nich *np.* FG iest prostopadła do CB, więc i druga EH byłaby także do CB prostopadła: dwie zatém liniie AC, BC z iednego punktu C wyprowadzone byłyby do iednéyże linii EH prostopadłe, co być nie może (55).

64. Twierd. *Gdy dwie liniie fig.* 31. *AB, CD przecięte od trzeciéy EF, tworzą z nią dwa kąty AGF, CHF równe; liniie te AB CD są od siebie równoległe; i odwrotnie.*

Dowod. Podzieliwszy liniią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy liniią KL prostopadłą do AB; w dwóch tróykątach LGI, HIK, bok GI = HI z wykréślenia; kąty przy I równe (19); kąt KHI = CHF, a kąt CHF = AGF z założenia; więc i kąt AGF czyli LGI = KHI: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (26), a w szczególności kąt GLI = HKI: a że kąt GLI iest prosty z wykréślenia, więc i kąt HKI iest prosty, a tém samém liniia CD iest prostopadła do KL; że zaś i liniia AB iest prostopadła do KL z wykréślenia, więc dwie te liniie AB, CD prostopadłe do trzeciéy KL są równoległe (58).

Odwrotnie. Gdy dwie liniie AB, CD od siebie równoległe przecięte są od trzeciéy linii

EF; kąty AGF, CHF będą sobie równe. Gdyż podzieliwszy liniią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy liniią KL prostopadłą do linii AB, a tém samém i do linii CD równoległéy od AB; w dwóch tróykątach LGI, HKI, kąty przy I, są równe; kąt GLI=HKI, bo są obadwa proste; bok GI=HI z wykréślenia: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (56); a w szczególności kąt LGI =KHI: a że kąt KHI=CHF, więc i kąt LGI, czyli AGF=CHF. B

65. Ponieważ w dalszym ciągu Jeometryi, często wypada używać liniy równoodległych; dla łatwieyszego tłumaczenia się, ponadawano szczególne nazwiska kątom utworzonym przez dwie liniie równoodległe przecięte od trzeciéy, którą zwać będziemy *sieczną*, *secans*.

I tak kąty zawarte między równoległemi AB, CD *fig.* 32. i częścią GH siecznéy EF, zowią się *wewnętrzne*, *interni*: iakie są, AGF, CHE, BGF, DHE.

Kąty zawarte między równoległémi i częściami EG, HF siecznéy EF, zowią się kąty *zewnętrzne*, *externi*, iakie są: AGE, BGE, CHF, DHF.

Kąty leżące po iednéy stronie siecznéy, zowią się *iednostronne*, *ad eandem partem positi*; i tak kąty AGE, AGF, CHE, CHF z jednéy strony sieczney leżące, są iednostronne: podobnież kąty BGE, BGF, DHE, DHF leżące z drugiéy strony sieczney, są także iednostronne.

Dwa kąty iednostronne, iak są *np.* kąty CHF, AGF, których ramiona rozchodzą się w tę samę stronę, zowią się kąty iednostronne *odpowiadaiące sobie*, *correspondentes*. Kąty AGE, CHE, są także iednostronne odpowiadaiące sobie: toż mówić o kątach BGE, DHE, i o kątach DHF, BGF.

Dwa kąty iednostronne AGF, CHE, tudzież BGF, DHE, zowią się iednostronne *wewnętrzne*.

Dwa kąty iednostronne AGE, CHF, tudzież BGE, DHF, zowią się iednostronne zewnętrzne.

Dwa kąty, których ramiona rozchodzą się w strony przeciwne, zowią się kąty *naprzemianległe* wewnętrzne lub zewnętrzne *alterni*: i tak dwa kąty AGF, DHE, są kąty naprzemian-ległe wewnętrzne; toż mówić o dwóch kątach CHE, BGF. Dwa kąty CHF, BGE, są kąty naprzemian-ległe zewnętrzne; toż mówić o kątach AGE, DHF.

66. Stosownie do tych nazwisk powyższe twierdzenie takby można wysłowić: *gdy dwa kąty AGF, CHF iednostronne odpowiadaiące są równe; dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe: i odwrotnie gdy dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe; dwa kąty AGF, CHF, iednostronne odpowiadaiące są sobie równe.*

67. Twierd. *Gdy dwie liniie AB, CD, od siebie równoodległe przecięte są od trzeciéy EF, będą* 1ód, *kąty ielnostronne odpowiadaiące sobie równe*; 2ie *Kąty naprzemianległe wewnętrzne równe;* 3cie *kąty na-*

przemianległe zewnętrzne równe; 4te *Kąty wewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym;* 5te *kąty zewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym;* 6te *gdy którakolwiek z tych pięciu własności iest dowiedziona, można będzie dowieśdź i innych czterech.*

Dowód. Co do 1. Równość kątów iednostronnych odpowiadaiących sobie AGF, CHF, iest okazana wyżéy (64). Po okazaniu zaś równości tych kątów, łatwo iest dowieśdź równości innych kątów iednostronnych odpowiadaiących. I tak biorąc *np.* dwa kąty odpowiadaiące sobie DHF, BGF *fig.* 32., kąt CHF z kątem DHF ważą dwa kąty proste, bo są przyległe. Kąt AGF z kątem BGF ważą dwa kąty proste, dla téyże przyczyny, Więc

$$\text{CHF} + \text{DHF} = \text{AGF} + \text{BGF}$$

w tém równaniu odiąwszy z jednéy strony kąt CHF, a z drugiéy kąt AGF, które sobie są równe, zostanie DHF = BGF.

Podobnież dwa kąty iednostronne odpowiadaiące BGE, DHE są równe: gdyż są przeciwległe w wierzchołku (19) kątom AGF, CHF, których równość iest dowiedziona. Dla téyże przyczyny i kąty CHE, AGE są sobie równe, iako przeciwległe w wiérzchołku kątom DHF, BGF. równym z dowiedzenia.

2re. Kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE, są sobie równe: gdyż kąt
AGF = CHF (66)
DHE = CHF iako wierzchołkiem przeciwległe: więc AGF = DHE.

Podobnymże sposobem dowieśdź można równości drugich dwóch kątów na przemianległych wewnętrznych CHE i BGF.

3*cie* Kąty na przemianległe zewnętrzne CHF i BGE są równe: gdyż kąt
CHF=DHE (19)
BGE=DHE iako iednostronne odpowiadaiące: więc CHF=BGE.

Tymże sposobem okazać można równość drugich dwóch kątów na przemianległych zewnętrznych DHF, AGE.

4*te* Kąty iednostronne wewnętrzne AGF, CHE ważą dwa kąty proste: gdyż kąt AGF + AGE= dwom kątom prostym (15), a że kąt AGE=CHE, iako iednostronne odpowiadaiące; więc AGF + CHE = dwom kątom prostym.

Toż mówić o drugich dwóch kątach iednostronnych wewnętrznych BGF, DHE.

5*te* Kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF równe są dwom kątom prostym: gdyż kąt AGE + AGF= dwom kątom prostym (15). A że kąt AGF=CHF (66) więc
AGE + CHF = dwom kątom prostym.

Toż mówić o kątach BGE, DHF.

6*te* Naostatek, gdy którakolwiek z tych pięciu własności iest dowiedziona, można będzie dowieśdź innych cztérech, i liniie AB, CD będą równoległe. Bo ieżeli *np.* równość kątów iednostronnych odpowiadaiących sobie iest dowiedziona, liniie AB, CD są równoległe, iakośmy to iuż okazali wyżéy.

Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE są równe, będzie kąt CHF=DHE; a zatém i kąt AGF=CHF: więc dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe (66).

Jeżeli kąty naprzemianległe zewnętrzne CHF, BGE są równe, będzie kąt BGE=AGF (19), a zatém i kąt CHF=AGF: więc dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe (66)

Gdy kąty iednostronne wewnętrzne AGF, CHE są równe dwom kątom prostym; będzie CHE+CHF= dwom kątom prostym (15), a że z założenia AGF+CHE= dwom kątom prostym; więc CHE+CHF=AGF+CHE.

W tém równaniu odiąwszy po obudwu stronach kąt CHE, zostanie CHF=AGF: więc liniie AB, CD są od siebie równoległe.

Gdy kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF są równe dwom kątom prostym, będzie, AGE+AGF= dwom kątom prostym (15): a że z założenia AGE+CHF= dwom kątom prostym; więc AGE+AGF= AGE+CHF.

W tém równaniu odjąwszy AGE po obudwų stronach, zostanie AGF=CHF: więc liniie AB, CD są równoodległe.

68. Zagad. *Przez punkt C wzięty za liniią daną AB, fig. 33. poprowadzić równoległą od téy linii.*

Rozwiąz. Z punktu C prowadzę liniią CD, którąby się z liniią AB przecinała pod iakimkolwiek kątem CDB. Na linii CD przy punkcie

C kréślę kąt DCF=CDB. Liniia EF będzie szukana: gdyż kąty CDB, DCF wewnętrzne naprzemianległe są równe.

69. Zagad. *Przez punkt C wzięty za liniią AB fig. 34. poprowadzić liniią CE któraby z daną liniią AB czyniła kąt BEC równy danemu.*

Rozwiąz. Przy punkcie którymkolwiek A wziętym na danéy linii AB, kréślę kąt DAB równy danemu, i przez punkt C prowadzę liniią CE równoległą od AD, aż do przecięcia się z liniią AB w punkcie E: kąt BEC iest szukany.

70. Twierd. *Dwa kąty ACB,* acb, *fig. 35. których ramiona AC i* ac, *tudzież BC i* bc *są między sobą równoodległe, i rozchodzą się w jednę stronę, są sobie równe.*

Dowod. Przedłużywszy *ac* aż do przecięcia się z ramieniem CB w punkcie D; będzie kąt ACB=*a*DB, bo są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznéy CB i dwóch równoległych AC i *a*D: kąt *a*DB=*acb*, bo są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznéy *a*D, i dwóch równoległych DB, *cb*; a zatém kąt ACB=*acb*. Podobne byłoby dowodzenie, gdyby ramiona dwóch kątów ACB, *acb* miały takie położenie, iakie iest pod liczbą 2. Łatwo byłoby dowieśdź równości tych kątów innym sposobem, poprowadziwszy w obudwu figurach przez wierzchołki tych kątów liniią prostą CE.

71. *Uwaga.* W powyższém twierdzeniu dodaiemy, że ramiona tych dwóch kątów roz-

chodzą się w jednęż stronę: gdy bowiem ramiona te rozchodzą się w strony przeciwne, kąty między niemi zawarte nie zawsze są równe. I tak dwa kąty ACB, *acb fig.* 36. których ramiona AC i *ac*, BC i *bc* są między sobą równoległe, lecz rozchodzą się w strony przeciwne, nie są równe. Jakoż kąt ACB = *a*DB, bo są iednostronne odpowiadaiące; kąt *a*DB = *bc*F, bo są zewnętrzne naprzemianległe względem sieczney *a*F, i dwóch równoległych CB i *cb*; a zatém i kąt ACB = *bc*F; więc gdy kąt ACB iest ostry, będzie też i kąt *bc*F ostry, a tém samém przyległy mu kąt *bca* roztwarty (15): będzie więc kąt *bca* > BCA.

Lecz dwa kąty BCA, *bc*F, lubo ramiona ich rozchodzą się w strony przeciwne, są sobie iednak równe, iakośmy wyżey okazali. Gdy więc ramiona dwóch kątów są między sobą równoległe, a rozchodzą się w strony przeciwne; kąty te mogą być albo równe sobie, iak są dwa kąty ACB, *bc*F; albo też nie równe, iak są dwa kąty ACB, *acb*.

72. Twierd. *Gdy dwie liniie fig.* 37. *EF, GH od siebie równoległe, przecięte są od dwóch drugich liniy IK, LM odsiebie równoległych; części AB i CD dwóch piérwszych liniy zawarte między dwiema drugiémi, tudzież części AC, BD dwóch drugich liniy zawarte między dwiema piérwszemi równoodległemi, są między sobą równe: i odwrotnie, ieżeli części te są równe, liniie, do których te części należą, będą równoległe.*

Dowód. Poprowadziwszy liniią prostą CB, w dwóch tróykątach ACB, DCB, bok CB iest spólny; kąt ABC=BCD, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC, i dwóch równoległych EF, GH; kąt ACB=CBD, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney CB i dwóch równoodległych IK, LM, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26): a w szczególności AB=CD, i AC=BD, iako przeciwne kątom równym (25).

Odwrotnie. Jeżeli AB=CD, i AC=BD; będzie liniia EF równoodlegla od GH, i liniia IK równoodległa od LM.

Gdyż poprowadziwszy liniią CB, dwa tróykąty ACB, DCB, w których trzy boki w jednym równe są trzem bokom w drugim tróykącie, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt ABC =BCD, i ACB=CBD, iako przeciwne bokom równym (25), a że kąty ABC, i BCD są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwóch liniy EF i GH; kąty ACB i CBD są także wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwòch liniy IK i LM; więc liniia EF iest równoległa od GH a liniia IK równoodległa od LM (67).

73. *Wniosek* 1. Jeżeli AB i CD są sobie równe i od siebie równoodległe, będą także AC i BD równe i równoodległe: gdyż w dwóch tróykątach ACB, BCD, bok BC iest spólny; bok AB =CD z założenia, i kąt ABC=BCD, iako wewnętrzne na przemianległe względem sieczney CB i dwóch równoległych AB, CD: więc dwa

te tróykąty przystaną do siebie (24), a w szczególności bok AC=BD, i kąt ACB=CBD; a że dwa te kąty są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwóch liniy AC, BD, więc liniie te są od siebie równoległe (67).

74. *Wniosek* 2. Gdy dwie liniie AB, CD *fig.* 38. są od siebie równoodległe, poprowadziwszy liniie EF, GH, IK i t. d. prostopadłe do tych dwóch liniy; prostopadłe te, iako od siebie równoległe (58), będą sobie równe (73); a że prostopadłe te oznaczaią odległość linii AB i CD (51), a zatém dwie liniie równoodległe zachowuią wszędzie iednakową między sobą odległość.

ROZDZIAŁ IV.

O wielokątach w powszechności, a w szczególności o ich kątach.

75. Płasczyzna określona iakąkolwiek liczbą liniy prostych, zowie się *wielokątem* lub *wielobokiem*, *polygonum*. Wielokąty maią rozmaite nazwiska, podług rozmaitéy liczby boków, lub kątów. I tak tróykąt iest wielokątem maiącym trzy boki, czyli trzy kąty; *czworokąt*, *quadrilaterum*, *pięciokąt*, *pentagonum*, *sześciokąt*, *hexagonum*, *siedmiokąt*, *heptagonum*, *ośmiokąt*, *octogonum*, *dziewięciokąt*, *enneagonum*, *dziesięciokąt*, *decagonum*, *dwunastokąt*, *dodecagonum*, *piętnastokąt*, *pentedecagonum* i t. d. są wielokąty maiące 4, 5, 6 7, 8 i t. d. boków lub kątów. ABCDE *fig.* 39.

iest pięciokąt; ABCDEF *fig.* 40. iest sześciokąt i t. d.

76. Lubo wielokąty zwyczaynie oznaczaią się tylą głoskami, ile maią kątów, dla krótkości iednak oznaczać ie można dwiema tylko głoskami naydaléy od siebie leżącemi: i tak, czworokąty ABCD *fig.* 41, 42, 43. mogą być oznaczone dwiema głoskami AC, lub BD: Podobnież sześciokąt ABCDEF *fig.* 40. może być oznaczony dwiema głoskami *np.* EB, lub FC i t. d.

77. Kąt taki iak iest FAB *fig.* 45. zowie się wklęsły, dla różnicy od innych kątów B, C, D, E, F, które się zowią wyskakuiące.
W wielokącie iakimkolwiek przedłużywszy którykolwiek bok AB *fig.* 40. kąt CBH zawarty między bokiem CB i przedłużeniem boku AB zowie się kątem *zewnętrznym*, *externus*, dla różnicy od kątów ABC, BCD i t. d. które się nazywaią kątami *wewnętrznemi*, *interni*. Liniia prosta łącząca wiérzchołki dwóch kątów wielokąta, zowie się *przekątnią*, *diagonalis*, iakie są *fig.* 40. AC, AD, AE.

78. Kiedy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, iak iest *fig.* 40, 43. i t. d. zowie się *foremnym*, *regulare*: kiedy zaś boki i kąty są nierówne, iak iest *fig.* 39, 45. i t. d., zowie się *nieforemny*, *irregulare*.

79. Między czworokątami niektóre maią boki przeciwne równoodległe; iak iest *np.* czworokąt BD *fig.* 41. w którym bok AB iest równoodległy od boku CD i bok AD równoodległy od boku BC. Czworokąt taki zowie się *równoległobokiem*, *parallelogrammum*.

Z tego cośmy powiedzieli wyżéy (72, 73) wypada:

1sze Że przekątnia AC, dzieli równoległokok na dwa tróykąty równe;

2re Że boki przeciwne w równoległoboku są sobie równe;

3cie Że gdy w czworokącie boki przeciwne są sobie równe, taki czworokąt iest równoległobokiem;

4te Że gdy w czworokącie dwa boki przeciwne są sobie równe i od siebie równoodległe, taki czworokąt iest równoległobokiem.

80. *Uwaga.* Może być czworokąt taki, w którym dwa boki przeciwne są od siebie równoodległe, lecz nierówne, iak iest czworokąt *abcd fig.* 46. w którym boki *cd*, *ab* są od siebie równoodległe, lecz nierówne; taki czworokąt nie iest równoległobokiem: gdyż drugie dwa boki *ad* i *cb* nie są od siebie równoodległe. Czworokąt taki zowie się połacinie *trapezium*; po polsku możnaby go nazwać równoległobok nie zupełny.

81. Równoległobok AC *fig.* 42. maiący wszystkie kąty proste, zowie się *prostokątem*, *rectangulum*.

Prostokąt AC *fig.* 43. maiący wszystkie boki równe zowie się *kwadratem*, *quadratum*.

Równoległobok *ac*, *fig.* 44. maiący wszystkie boki równe, lecz kąty nierówne, zwać się może kwadratem ukośnym, *rhombus*.

82. Chcąc zatém na danéy linii AB, *fig.* 43: wykréślić kwadrat, trzeba z obudwu iéy końców

A i B, wyprowadzić dwie liniie AD i BC prostopadłe do AB, i równe linii danéy AB: końce tych dwóch liniy C i D złączywszy liniią prostą CD, czworokąt ABCD będzie kwadratem szukanym.

Chcąc wykréślić prostokąt, któregoby boki równe były liniiom danym, trzeba poprowadzić liniią AB, *fig.* 42. równą iednéy linii danéy, i z dwóch iéy końców A i B wyprowadzić liniie AD i BC prostopadłe do AB i równe drugiéy linii danéy: końce tych dwóch liniy C i D złączywszy liniią prostą CD, czworokąt ABCD będzie prostokątem szukanym.

Chcąc wykréślić równoległobok, któregoby boki równe były dwom liniiom danym, i kąt równy kątowi danemu, trzeba poprowadzić liniią AB *fig.* 41. równą iednéy linii danéy, z końca A wyprowadzić liniią AD równą drugiéy linii danéy tak: aby kąt BAD był równy kątowi danemu; poprowadziwszy potém z punktu B liniią BC równą linii AD, i od niéy równoodległą, końce D i C złączyć liniią prostą DC; czworokąt ABCD będzie równoległobokiem szukanym.

Dowodzenie we wszystkich trzech przypadkach iest łatwe maiąc wzgląd na to, cośmy powiedzieli o liniiach równoodległych (58, 73).

83. W każdym wielokącie uważać będziemy 1*ód* kąty; 2*re* boki, które razem wzięte zowią się *obwodem* wielokąta, *perimeter*; 3*cie* płaszczyznę obwodem określoną, która się zowie *powiérzchnią* wielokąta.

84. Twier. *W każdym tróykącie summa trzech kątów waży dwa kąty proste.*

Dowodz. W tróykącie ACB, *fig.* 47. przedłużywszy którykolwiek bok *np.* AB do D, i z punktu B wyprowadziwszy linią BF równoodległą od boku AC; będzie kąt CBF$=$C, gdyż są naprzemianległe wewnętrżne względem sieczney BC, i dwóch równoodległych AC, BF. Kąt FBD$=$A, gdyż są iednostronne odpowiadaiące sobie względem sieczney AD i dwóch równoodległych AC, BF. Do kątów CBF i FBD, czyli co na iedno wychodzi, do kąta CBD dodawszy kąt CBA, wypadnie summa równa dwom kątom prostym (15). Więc i do kątów C i A dodawszy tenże kąt CBA, wypadnie summa kątów C, A i CBA, to iest, summą trzech kątów tróykąta, równa dwom kątom prostym. Czyli, kąt CBF $=$ C. Kąt FBD $=$ A. Więc

$$CBF + FBD = C + A; \text{ czyli}$$
$$CBD = C + A.$$

Dodawszy po obu stronach kąt CBA, będzie

$$CBD + CBA = C + A + CBA.$$

A że kąty CBD i CBA iako przyległe ważą dwa kąty proste; więc też i kąty C, A i CBA, to iest trzy kąty tróykąta, ważą dwa kąty proste.

85. *Wnioski.* 1. Ponieważ w tróykącie kąt zewnętrzny CBD równy iest dwom kątom wewnętrznym C i A naprzeciwko niego leżącym, iako się w poprzedzaiacém twierdzeniu okazało, więc od iednégo z nich *np.* od kąta A iest większy.

86. 2. W tróykącie równobocznym, którego wszystkie kąty są między sobą równe (30), każdy kąt iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, czyli dwiema trzeciemi iednego kąta prostego;

87. 3. Kiedy w tróykącie ieden kąt iest prosty, lub roztwarty, drugie dwa muszą być ostre: gdyż inaczéy summa trzech kątów tróykąta, ważyłaby wiecéy niż dwa kąty proste: co iest przeciwne twierdzeniu. Kąt zatém prosty lub roztwarty iest w tróykącie naywiększy, a tém samém i bok przeciwny kątowi prostemu lub roztwartemu iest w tróykącie naywiększy (34).

88. Tróykąt maiący kąt prosty, zowie się *prostokątny*, *rectangulum*; tróykąt maiący kąt roztwarty, zowie się *roztwartokątny*, *obtusangulum*; tróykąt maiący wszystkie kąty ostre, zowie się *ostrokątny*, *acutangulum*. Bok przeciwny kątowi prostemu, zowie się *przeciwprostokątną*, *hypothenusa*: bok przeciwny kątowi roztwartemu nazywać można *przeciwroztwartokątną*, bok przeciwny kątowi ostremu, *przeciwostrokątną*.

89. 4. Z twierdzenia poprzedzaiącego wypada także, że gdy dwa kąty w jednym tróykącie, równe są dwom kątom w drugim tróykącie, trzeci kąt piérwszego równy iest także trzeciemu kątowi drugiego tróykąta: gdyż ten trzeci kąt przydany do dwóch piérwszych w obudwu tróykątach, czyni dwa kąty proste.

90.

90. A stąd wypada, że twierdzenie wyżéy podane (56), podług którego dwa tróykąty ABC, *abc*, *fig.* 25. maiące kąty A i *a* proste, kąt B=*b*, i bok BC=*bc*, mogą do siebie przystać; do tróykątów także ostrokątnych i roztwartokątnych może być zastosowane: bo ieżeli *fig.* 48., dwa kąty A i B w jednym tróykącie, równe są dwom kątom *a* i *b* w drugim tróykącie, będzie też i trzeci kąt C pierwszego równy trzeciemu kątowi *c* drugiego tróykąta; a gdy ieszcze i bok CB=*cb* z założenia, dwa te tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia drugiego o przystawaniu tróykątów.

91. Podobnież twierdzenie podane wyżéy (52), podług którego dwa tróykąty, *fig.* 25. ACB, *acb*, maiące kąty A i *a* proste, bok BC =*bc*, i bok AC=*ac* przystaną do siebie, do niektórych także innych tróykątów zastosować można. Jakoż niech będą dwa tróykąty, *fig.* 48. ABC, *abc*, w których kąty ostre A, *a* są równe, boki tym kątom przeciwne BC, *bc* równe, i boki tymże kątom przyległe AC, *ac* równe; dwa te tróykąty przystaną do siebie: gdyż z punktów C i *c* spuściwszy liniie CD i *cd* piérwszą prostopadłą do AB, drugą prostopadłą do *ab*, w dwóch tróykątach CDA, *cda*, kąt A=*a* z założenia, kąt D=*d* iako proste, a tém samém i trzeci kąt ACD=*acd* (89); a że i bok AC=*ac* z założenia, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26), a w szczególności bok CD =*cd*, bok AD=*ad*. Dwa zatém tróykąty CDB, *cdb*, w których kąty przy D i *d* są proste z wy-

kreślenia, bok CD$=$*cd* z dowodzenia, i bok CB$=$*cb* z założenia, przystaną do siebie (52), a w szczególności bok DB$=$*db*. A kiedy AD $=$*ad*, i DB$=$*db*; więc AD$+$DB$=$*ad*$+$*db*, czyli AB$=$*ab*. Dwa zatém tróykąty ABC, *abc*, w którym bok AC$=$*ac* z założenia, bok AB$=$*ab* z dowodzenia, i kąt A$=$*a* z założenia, przystaną do siebie podług piérwszego twierdzenia o przystawaniu tróykątów.

92. Mogą iednak być dwa takie tróykąty, które nie przystaną do siebie, chociaż w nich będzie kąt iednego równy kątowi drugiego tróykąta, i bok przeciwny i przyległy temu kątowi w jednym równy bokowi przeciwnemu i przyległemu w drugim tróykącie. Trafić się to może w ten czas, kiedy boki przeciwne kątom równym mnieysze są od boków przyległych tymże kątom. Jakoż niech będą *fig.* 49. dwa tróykąty ABC, *abc*, w których kąt A$=$*a*, bok BC $=$*bc*, i bok AB$=$*ab*, lecz w obudwu tróykątach boki BC, *bc* przeciwne kątom równym, mnieysze są od boków AB, *ab* przyległych tymże kątom.

Z wierzchołka kąta *b* spuściwszy *db* prostopadłą do *ac*, będzie liniia *ad* większa od linii *cd*; czego łatwo można dowieśdź zważaiąc, że liniia *ad* nie może być ani równa linii *cd*, ani od niéy mnieysza; gdyż w piérwszym przypadku pochyła *ab* byłaby równa pochyłéy *bc*, w drugim pochyła *ab* byłaby mnieysza od pochyłéy *bc* (47), co się sprzeciwia założeniu. Na linii zatém *ad* wziąwszy *dć*$=$*dc*, i poprowadziwszy *bć*, będzie *bć*$=$*bc*. A że *bc*$=$BC z założenia, więc i *bć*=BC. A zatém trzy tróykąty ABC, *abc*, *abć* maią kąty A, *a* równe, boki tym kątom przeciwne BC, *bc*, *bć* równe, i boki tymże kątom przyległe AB, *ab* równe. Lecz ieżeli tróykąt *abc* przystanie do tróykąta ABC podług poprzedzaiącego wniosku, tedy trzeci tróykąt *abć*, będący częścią tróykąta drugiego *abc* nie może przystać do tróykąta ABC.

93. W tych więc tylko przypadkach dwa trókąty mogą do siebie przystać: 1*ód* gdy dwa boki i kąt między niemi zawarty w jednym równe są dwom bokom i kątowi między niemi zawartemu w drugim tróykącie; 2*re* gdy dwa kąty i bok im przyległy w jednym równe są dwom kątom i bokowi im przyległemu w drugim tróykącie; 3*cie* gdy trzy boki iednego równe są trzem bokom drugiego tróykąta; 4*te* gdy kąt prosty, bok mu przeciwny i przyległy w jednym równe są kątowi prostemu i bokom przeciwnemu i przyległemu w drugim tróykącie. Przypadek ten lubo może być zastosowany i do niektórych innych tróykątów, iednakże ponieważ czasem zayść może wątpliwość, czy dwa tróykąty nieprostokątne mogą do siebie przystać, iakośmy to okazali wyżéy, używać go w dziele ninieyszém nie będziemy, na okazanie równości dwóch tróykątów nieprostokątnych. Co się tycze twierdzenia podanego wyżéy (56, 90) twierdzenie to iuż nam więcéy potrzebne nie będzie, bo w takim przypadku dwa tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia drugiego o przystawaniu tróykątów, iakośmy to okazali wyżéy, (90).

94. Gdy dwa tróykąty mogą do siebie przystać, tém samém powierzchnia iednego iest równa powiérzchni drugiego tróykąta. Niżéy obaczymy, że dwa tróykąty mogą mieć równe powierzchnie, chociażby nie mogły do siebie przystać.

95. Twierd. *Summa kątów wewnętrznych wielokąta iakiegokolwiek waży kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków, mniéy 4: czyli, liczbę boków wielokąta rozmnożywszy przez 2, i od tak rozmnożonéy odiąwszy 4, reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.*

Dowod. Wziąwszy wewnątrz iakiegokolwiek wielokąta AD, *fig.* 39 punkt S od upodobania, i z punktu tego poprowadziwszy liniie SA, SB, SC i t. d łączące wszystkie wierzchołki kątów wielokąta z punktem S, utworzą się tróykąty ASB, BSC, CSD i t. d: których spólnym wierzchołkiem iest punkt S, a z których każdy ma za podstawę bok ieden wielokąta, i dwa przy niéy kąty należące do kątów wielokąta. Liniie więc te AS, BS, CS i t. d. podzielą wielokąt na tyle tróykątów, ile wielokąt ma boków. A że w każdym tróykącie summa trzech kątów waży dwa kąty proste (84); więc wszystkie te tróykąty ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków. Że zaś kąty przy punkcie S będące, ważą 4 kąty proste (16); a nie należą do kątów wewnętrzuych wielokąta, więc od podwoionéy liczby boków wielokąta odiąwszy 4, reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.

To samo twierdzenie możnaby okazać następuiącym sposobem: z wierzchołka kąta któregokolwiek w wielokącie FC *fig.* 40, 45. *np.* z wierzchołką kąta A, poprowadziwszy do wierzchołków wszystkich innych kątów przekątne AC, AD i t. d. przekątne te podzielą wielokąt na tyle tróykątów, ile ma wielokąt boków, mniéy 2; gdyż do wierzchołku dwóch kątów B i F przyległych ramionom kąta A, przekątnych poprowadzić niemożna. A że summa trzech kątów tróykąta waży dwa kąty proste (84), więc summa kątów we wszystkich tych tróykątach, czyli, co na iedno wychodzi, summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta, ważyć będzie kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków, mniéy 4.

96. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny (78), wszystkie iego kąty wewnętrzne są między sobą równe; a tém samém i kąty zewnętrzne są między sobą równe: gdyż każdy kąt zewnętrzny, *np.* kąt CBH: *fig.* 40. z przyległym sobie wewnętrznym CBA, waży dwa kąty proste. A zatém maiąc wiadomą liczbę boków wielokąta foremnego, można doyść ważności kąta iego wewnętrznego i zewnętrznego. I tak w pięciokącie *np.* foremnym, summa wszystkich kątów wewnętrznych, równa iest liczbie boków iego rozmnożonéy przez 2, i zmnieyszonéy 4; czyli równa $5 \times 2 - 4 = 6$: więc każdy iego kąt ważyć będzie piątą część sześciu kątów prostych,

czyli $\frac{6}{5}$ iednego kąta prostego: a zatém kąt zewnętrzny pięciokąta foremnego ważyć będzie reszte do dwóch kątów prostych, to iest $\frac{4}{5}$: gdyż $\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}=2$ kątom prostym.

Podobnież w sześciokącie foremnym summa wszystkich kątów wewnętrznych $=6\times 2-4=8$ kątom prostym; więc każdy iego kąt wewnętrzny ważyć będzie $\frac{8}{6}$ czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego: a zatém kąt zewnętrzny ważyć będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego, gdyż $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ kątom prostym i t.d.

97. Twierd. *W wielokącie maiącym wszystkie kąty wyskakuiące, przedłużywszy w jednę stronę wszystkie boki, iak iest na fig. 50. summa wszystkich kątów zewnętrznych FAK, GBF i t.d. waży 4 kąty proste.*

Dowod. Każdy kąt zewnętrzny *np.* GBF z przyległym sobie wewnętrznym GBA, waży dwa kąty proste: wszystkie zatém kąty zewnętrzne z wewnętrznemi ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków. A że same wewnętrzne ważą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków mniéy 4 (95), więc same zewnętrzne ważą 4 kąty proste.

98. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny, kąty iego zewnętrzne są między sobą równe; a że wszystkie zewnętrzne ważą 4 kąty proste, więc 4 podzieliwszy przez liczbę boków, iloraz będzie ważnością kąta zewnętrznego w wielokącie foremnym. I tak w pięciokącie *np.* foremnym ponieważ 5 kątów zewnętrznych ważą 4 kąty proste, więc 1 waży piątą część 4 ką-

tów prostych, czyli $\frac{4}{5}$ iednego prostego: a tém samém kąt wewnętrzny iako mu przyległy, ważyć będzie resztę do dwóch kątów prostych; to iest $\frac{6}{5}$ kąta prostego. Podobnież w sześciokącie foremnym ieden kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{6}$ czyli $\frac{2}{3}$ kąta prostego; a tém samém kąt wewnętrzny ważyć będzie $\frac{4}{3}$ kąta prostego. W siedmiokącie foremnym kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{7}$, a wewnętrzny $\frac{10}{7}$ kąta prostego i t. d.

99. *Uwaga*. Postrzegamy tu, że im więcéy ma boków wielokąt foremny; tém kąty iego zewnętrzne są mnieysze, a wewnętrzne większe.

Inne własności wielokątów ściągaiące się do ich powierzchni i obwodu, wyłożymy na swoiém mieyscu.

ROZDZIAŁ V.

O liniiach prostych i o kole.

100. Powiedzieliśmy wyżéy (7), że część okręgu zowie się łukiem. Liniia prosta CD *fig.* 51. łącząca dwa końce łuku CGD zowie się *cięciwą*, *chorda*.

Uważać tu potrzeba *iód*, że cięciwa każda *np.* CD łączy końce dwóch łuków: iednego CGD, drugiego CHD, których summa czyni okrąg koła; ieżeli więc ieden z nich mnieyszy iest od pół okręgu, drugi tém samém będzie większy; *2re* że każda cięciwa dzieli koło na dwie części zwane *odcinkami*, *segmenta*, ieden DCG, drugi DCH, których summa czyni koło; i ieżeli ieden z nich mnieyszy iest od półkola, drugi tém samém większy być musi.

101. Gdy cięciwa przechodzi przez środek koła iak iest AB, nazywa się *średnicą*, *diameter*.

Uważać tu potrzeba 1*ód*, że średnica równa iest dwom promieniom: gdyż promień, iakośmy powiedzieli wyżéy (7), iest liniią prostą od środka koła do iakiego punktu na okręgu poprowadzoną: a zatém średnica AB równa iest dwom promieniom SB i SA. 2*re* Ze tém samém wszystkie średnice w jednémże kole są sobie równe; gdyż każda z nich równa iest dwom promieniom, które są między sobą wszystkie równe; 3*cie* że średnica iest większa, niż iakakolwiek inna cięciwa: gdyż końce iakiéykolwiek cięciwy CD złączywszy ze środkiem koła liniiami prostemi SC, SD, w tróykącie SDC summa dwóch boków $SC + SD > CD$ (22), to iest, summa dwóch promieni, czyli średnica, większa iest od cięciwy; 4*te* że średnica AB dzieli koło i iego okrąg na dwie części równe: gdyż złożywszy figurę wzdłuż linii AB, gdyby część okręgu AHB, nie przystała do części okręgu AGB, punkta iednéy z nich byłyby mniéy lub więcéy od środka koła oddalone, niż punkta drugiéy: co być nie może (7).

102. Tym samym sposobem dowieść można, że dwa koła nakreślone iednymże promieniem są sobie równe, i mogą do siebie przystać,

i

gdy iedno na drugiém będzie położone tak, aby środek iednego padł na środek drugiego koła.

103. Liniia prosta EF, przecinaiąca koło, którą *sieczną* koła, *secans circuli* zwać będziemy, dwa tylko punkta C i D spólne z okręgiem mieć może: bo gdyby miała *np.* trzy punkta spólne, trzy te punkta iako znayduiące się na okręgu, byłyby w równéy od środka koła odległości (7); a tém samém z punktu danego S do linii prostéy EF możnaby było poprowadzić trzy liniie równe: co być nie może (49).

104. Gdy liniia prosta ma tylko ieden punkt spólny z okręgiem, to iest, gdy się okręgu w jednym tylko punkcie dotyka, a w drugim punkcie dotykać się nie może, choćby była przedłużona; taka liniia zowie się *styczną* koła, *tangens circuli.* I tak liniia IK w jednym tylko punkcie H dotykaiąca się okręgu, iest styczną: liniia zaś HL lubo w jednym tylko punkcie H dotyka się okręgu, przecież dostatecznie przedłużona, przecięłaby go w punkcie drugim, a zatém nie iest styczną.

105. *Twierd.* Wziąwszy dwa iakiekolwiek łuki iednegoż koła, albo dwóch kół równych, i położywszy ieden na drugim tak, aby ich wklęsłości obrócone były w jednę stronę, i aby dwa iakiekolwiek punkta iednego, padły na dwa punkta łuku drugiego; *łuk mnieyszy zeydzie się zupełnie z łukiem większym.*

Dowod. Jakoż przeniosłszy łuk *ac fig.* 52. na łuk AE tak aby punkt *a* padł na A, i punkt *c* na C, cięciwa *ac* przystanie zupełnie do cięciwy AC: a że promienie *sa*, *sc*, są podług założenia równe promieniom SA, SC, więc dwa tróykąty *sca*, SCA, przystaną do siebie (28); a w szczególności punkt *s* padnie na S: a zatém wszystkie punkta łuku *ac* padną na punkta łuku AC: gdyż punkta te są równie oddalone od środków *s*, S, które są w jednym punkcie: a tém samém łuk *ac* zeydzie się zupełnie z łukiem AE.

106. Stąd wypada, że dwa łuki iednegoż koła, albo dwóch kół równych, są równe, gdy ich cięciwy są równe i odwrotne, byleby łuki te były iednegoż gatunku, to iest, obadwa mnieysze, lub obadwa większe od pół okręgu. Jakoż cięciwę iednę położywszy na drugiéy, dwa końce piérwszéy padną na dwa końce drugiéy cięciwy, a tém samém i dwa końce iednego łuku, padną na dwa końce drugiego: więc dwa te łuki podług twierdzenia poprzedzaiącego, zeydą się z sobą, i ieden do drugiego zupełnie przystanie, a zatém są sobie równe.

Odwrotnie, ieżeli dwa łuki iednegoż koła, albo dwóch kół równych, są równe; będą też równe i ich cięciwy: gdyż łuki te iako równe przystaną do siebie podług wniosku poprzedzaiącego; a tém samém końce iednego padną na końce drugiego łuku; więc i cięciwy ich przystaną do siebie: przez dwa bowiem punkta, iedna tylko liniia prosta przechodzi.

107. Zagad. *Maiąc dane dwa łuki AB, CD, fig. 53. iednegoż koła, albo dwóch kół równych, znaleść spólną ich miarę.*

Rozwiąz. Zagadnienie to rozwiązać można tym samym sposobem, któregośmy użyli w pcdobnym przypadku z liniiami prostemi (38); z tą tylko różnicą, że zamiast przenoszenia łuków mnieyszych na większe, przenosić będziemy ich cięciwy, które gdy są równe, łuki ich są także równe (106).

Cięciwa łuku CD może być na łuk AB dwa razy przeniesiona od A do E, z pozostałą resztą EB; będzie więc łuk AB = 2 CD + EB.

Cięciwa łuku EB może być na łuk CD raz przeniesiona od C do F, z pozostałą resztą FD: będzie więc łuk CD = EB + FD.

Nakoniec cięciwa łuku FD może być na łuk EB 4 razy przeniesiona, bez żadnéy reszty: będzie więc łuk

EB = 4 FD. A zatém

CD = EB + FD = 4 FD + FD = 5 FD.

AB = 2 CD + EB = 10 FD + 4 FD = 14 FD. to iest: łuk FD iest spólną miarą dwóch danych łuków AB, CD, i mieści się w piérwszym łuku 14 razy, w drugim 5 razy. Dwa więc łuki dane są do siebie iak dwie liczby 14 i 5.

Uwaga. Mogą być dwa dane łuki takie, że spólnéy ich miary znaleźć nie można, choćby powyższe działanie było iak naydaléy posunięte: łuki więc takie będą ilościami niespółmiernemi, iakośmy wyżéy powiedzieli (38).

108. Twierd. *Promień SM*, *fig.* 54. *prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę w punkcie C i łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.*

Dowod. 1*ód* Poprowadziwszy promienie SA, SB, promienie te względem prostopadłéy SC są dwiema pochyłemi równemi, a tém samém muszą być równie oddałone od spodku C prostopadłéy SC (48) więc AC = BC.

2*re* Ponieważ SM iest prostopadła ze środka C linii AB wyprowadzona, więc każdy punkt na téy prostopadłéy wzięty *np.* punkt M iest w równéy odległości od końców linii AB (50); a zatém liniia AM = BM. Że zaś liniie te są cięciwami łuków AM, BM, więc i łuki te są sobie równe (106). A zatém promień SM. prostopadły do cięciwy AB dzieli ią w punkcie C, i iéy łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.

109. *Wnioski.* Z tego twierdzenia okazuie się 1*ód*, że trzy te punkta, środek koła S, środek cięciwy C, i środek iéy łuku M znayduią się na iednéy linii SM prostopadłéy do cięciwy: a że na oznaczenie linii prostéy dosyć iest dwóch tylko punktów; więc kiedy liniia prosta przechodzi przez dwa punkta którekolwiek z trzech punktów wymienionych, przeydzie tém samém i przez punkt trzeci, i będzie prostopadła do cięciwy.

2*re* Ponieważ z punktu wziętego na linii prostéy, nie można więcéy prostopadłych do téy linii wyprowadzić, tylko iednę (55), więc prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona przechodzi przez środek koła, i dzieli łuk do téy cięciwy należący na dwie równe części.

110. 3*cie* Z tego też twierdzenia wypada, że chcąc podzielić łuk na dwie równe części,

trzeba ze środka cięciwy tego łuku wyprowadzić prostopadłą, aż do przecięcia się z łukiem danym; albo też w kole danem przez środek cięciwy łuku danego do podzielenia poprowadzić promień, albo nakoniec poprowadzić promień prostopadły do cięciwy łuku danego. Tymże sposobem postępuiąc można będzie łuk podzielić na części równych 4, 8, 16 i t. d.

111. Zagad. *Wykréślić koło, któregoby okrąg przechodził przez trzy punkta A, B, C dane nie w prostéy linii. fig.* 55.

Rozwiąz. Złączywszy punkt A z punktem B, i punkt B z punktem C liniiami prostemi AB, BC, i linią AB w punkcie D, linią BC w punkcie E podzieliwszy na dwie części równe; z punktu D i E wyprowadźmy dwie prostopadłe DF, EG, pierwszą do AB, drugą do BC: dwie te prostopadłe, podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (63), dostatecznie przedłużone, zeydą się z sobą w punkcie S: punkt S będzie środkiem, a odległość iego od któregokolwiek z trzech punktów danych, będzie promieniem koła szukanego: gdyż punkt S uważany na prostopadłéy DF, iest w równéy odległości od dwóch punktów A i B (50): tenże sam punkt S uważany na prostopadłéy EG, iest w równéy odległości od dwóch punktów B i C. Trzy więc odległości, AS, BS, CS są między sobą równe: a zatém ze środka S promieniem AS nakreśliwszy koło, okrąg tego koła przeydzie przez punkta A, B, C.

112. *Uwaga* 1. Ponieważ liniie AB, BC są w kole szukaném cięciwami w punktach D

i E na dwie równe części podzielonemi, środek tego koła powinien się znaydować tak na prostopadłéy DF, iako też na prostopadłéy GE (109), to iest, na spólném tych dwóch liniy przecięciu S: a że liniie proste w jednym tylko punkcie przecinać się mogą, więc tylko ieden iest punkt S mogący być środkiem koła szukanego. Toż samo koło nie może mieć innego promienia, tylko liniią AS: bo wziąwszy za promień liniią krótszą lub dłuższą od AS, i z punktu S promieniem tym nakréśliwszy koło, okrąg tego koła nie przeydzie przez punkta A, B, C: co iest przez się widoczna.

A stąd wypada *1ód*, że przez trzy dane punkta iednego tylko koła okrąg przechodzić może; *2re*, że gdy okręgi dwóch kół maią trzy punkta spólne, dwa te koła są iednémże kołem; *3cie*, że zatém okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przecinać tylko we dwóch punktach.

Uwaga 2. Gdyby trzy punkta A, B, C, dane były w linii prostéy, na ten czas dwie prostopadłe DF, EG byłyby od siebie równoodległe (58), a tém samém zeyśćby się z sobą nie mogły: a że punkt ich zeyścia się iest środkiem, a iego odległość od któregokolwiek z trzech punktów danych, iest promieniem koła szukanego; w tym więc przypadku, nie mogąc mieć ani środka, ani promienia, byłoby rzeczą niepodobną wykreślić koło szukane. A zatém przez trzy punkta dane w linii prostéy, okrąg iednego koła przechodzić nie może. Co i z tego względu iest rzeczą widoczną, że liniia prosta z okręgiem koła trzech punktów spólnych mieć nie może (103).

113. Zagad. *Maiąc dane koło, znaleźć iego środek.*

Rozwiąz. Na okręgu danego koła wziąwszy trzy punkta od upodobania A, B, C, *fig.* 55. i złączywszy ie liniiami prostemi AB, BC, ze środków tych liniy D i E, wyprowadzam dwie prostopadłe DF, EG, piérwszą do AB, drugą do BC, przecinaiące się z sobą w punkcie S: punkt S będzie środkiem szukanym danego koła.

114. *Twierd.* Z punktu któregokolwiek C *fig.* 56. wziętego na okręgu koła poprowadziwszy CA prostopadłą do promienia SC, przez ten punkt C przechodzącego, *prostopadła ta do promienia będzie styczną koła. I odwrotnie, styczna z któregokolwiek punktu wziętego na okręgu poprowadzona, iest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia się stycznéy z kołem.*

Dowod. Wziąwszy iakiekolwiek punkta D, E i t. d. na prostopadłéy AB, i złączywszy ie ze środkiem koła S liniiami prostemi DS, ES, liniie te iako pochyłe do linii AB są dłuższe od prostopadłéy SC (47). A że punkt C znayduie się na okręgu; więc punkta D, E i t. d. znaydować się muszą za okręgiem. Liniia zatém AB, ieden tylko punkt C ma z okręgiem spólny: inne zaś wszystkie iéy punkta są za okręgiem: więc liniia ta iest styczna z kołem (104).

Odwrotnie. Styczna z kołem AB iest prostopadła do promienia SC przechodzącego przez punkt zetknięcia się C: Gdyż ponieważ styczna AB ma tylko ieden punkt C na okręgu, inne zaś wszystkie iéy punkta są za okręgiem; więc ze wszystkich liniy prostych, które z punktu S do stycznéy AB prowadzić można, naykrótszy iest promień SC: ten bowiem kończy się na okręgu, gdy tym czasem inne wszystkie, iak są *np.* SD, SE, wychodzą za okrąg. Gdyby więc promień SC nie był prosropadły do stycznéy AB, tedy inna którakolwiek liniia z punktu S do linii AB poprowadzona, dłuższa od promienia SC, byłaby do linii AB prostopadłą, co być nie może (47).

115. *Wniosek.* Stąd wypada 1*ód*, że przez punkt C dany na okręgu koła, nie można więcéy stycznych wyprowadzić, tylko iednę: gdyż styczna ta powinna być prostopadła do promienia SC, przez dany punkt przechodzącego: a z punktu C do linii SC nie można wyprowadzić dwóch prostopadłych, różnych od siebie (55); 2*re* Ze przez dany punkt na okręgu koła, chcąc wyprowadzić styczną z kołem, trzeba z danego punktu wyprowadzić prostopadłą do promienia przez tenże dany punkt przechodzącego.

116. Twierd. *Dwa łuki iednegoż koła zawarte między dwiema cięciwami od siebie równoodległemi, lub zawarte między cięciwą i styczną od niéy równoległą, są sobie równe.*

Dowod. 1*ód.* Niech będą dwie cięciwy AB, CD, *fig.* 57. od siebie równoległe: poprowadziwszy promień SG prostopadły do cięciwy CD, CD, promień ten będzie razem prostopadły i do cięciwy AB iako równoległéy od CD (61), i punkt G będzie środkiem tak łuku CGD, iako też łuku AGB (108): będzie zatém łuk CG = DG, łuk AG = BG: odiąwszy strony równania drugiego, od stron równania piérwszego, zostanie CG — AG = DG — BG; czyli CA = DB; to iest, łuki zawarte między dwiema cięciwami od siebie równoległemi, są sobie równe.

2re Niech będzie cięciwa IK równoległa od stycznéy EF: przez punkt zetknięcia się H, poprowadziwszy promień SH, promień ten będzie prostopadły do stycznéy EF (114), i do cięciwy IK iako równoległéy od EF; a tém samém łuk KHI iest podzielony w punkcie H, na dwie równe części (108); będzie więc łuk IH = KH, to iest, łuki zawarte między styczną i cięciwą od niéy równoległą są równe.

117. *Twierd.* Wiérzchołki S, *s*, dwóch kątów równych ASB, *asb fig.* 58. wziąwszy za środek koła, i iakimkolwiek promieniem nakréśliwszy łuk ACB przecinaiący ramiona kąta ASB, w punktach A i B, i tymże samém promieniem nakréśliwszy łuk *acb* przecinaiący ramiona kąta *asb* w punktach *a* i *b*; *łuki ACB*, acb *zawarte między ramionami tych dwóch kątów równych, będą sobie równe;* i odwrotnie, *ieżeli łuki kół równych zawarte między ramionami dwóch kątów maiących swoie wiérzchołki w środku kół, są sobie równe; kąty te będą także równe.*

Dowod. Poprowadziwszy cięciwy AB, *ab*, w dwóch tróykątach ASB, *asb*: kąt S=*s*, boki AS, BS, równe bokom *as*, *bs*, iako promienie, z założenia; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a w szczególności cięciwa AB=*ab*; a zatém i łuki ACB, *acb* są równe (106).

Odwrot. Jeżeli łuk *ab*=AB, będzie kąt *asb*=ASB: bo ponieważ łuki te są równe, więc i cięciwy ich AB, *ab* są równe (106), a że i promienie SA, SB, *sa*, *sb*, są między sobą równe z założenia, więc dwa tróykąty ASB, *asb* przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt ASB = *asb*.

118. *Twierd.* Wiérzchołki O, *o*, *fig.* 59. dwóch iakichkolwiek kątów AOB, *aob* wziąwszy za środek, i iednymże promieniem nakreśliwszy dwa łuki, któreby przecinały ramiona dwóch danych kątów w punktach A, B, *a*, *b*; będzie *stosunek kąta AOB do kąta* aob, *równy stosunkowi łuku AB do łuku* ab; to iest, tyle razy kąt ieden będzie większy lub mnieyszy od drugiego, ile razy łuk zawarty między ramionami kąta piérwszego, iest większy lub mnieyszy od łuku zawartego między ramionami kąta drugiego: czyli, będzie AOB : *aob*=AB : *ab*.

Dowod. Mogą tu być dwa przypadki, albo łuki AB, *ab* są ilościami spółmiernemi, albo nie spółmiernemi. 1*ód* Jeżeli łuki AB, *ab*, są ilości spółmierne, daymy na to, że łuk AB ma takich części 4, iakich łuk *ab* ma 2. Podzieliwszy łuk *ab* na dwie części równe w punkcie *c*, a łuk AB na cztéry części równe w punktach C, D, E, i poprowadziwszy promienie *oc*; OC, OD, OE, kąty *aoc*; *cob*, AOC, COD, DOE, EOB, są między sobą równe, podług twierdzenia poprzedzaiącego. A zatém kąt AOB, składa się ze cztérech takich kątów, z jakich dwóch składa się kąt *aob*: więc kąty te maią się do siebie, iak 4 do 2. Czyli, AOB: *aob*$=$4: 2. A że podług założenia, łuk AB: *ab*$=$4: 2; więc AOB: *aob*$=$AB: *ab*, to iest, kąt AOB do kąta *aob* ma się iak łuk AB zawarty między ramionami 1go, do łuku *ab* zawartego między ramionami kąta 2go.

2*re* Jeżeli łuki AB, *ab*, *fig.* 60. są niespółmierne, będzie także

AOB: *aob*$=$AB: *ab* , — , — , — A.

Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni wyraz *ab* iest albo zamały, albo zawielki do uczynienia proporcyi: trzy bowiem piérwsze wyrazy proporcyi, mogą być iakiekolwiek.

Weźmyż naprzód łuk *as*$>$*ab*, i niech będzie, ieżeli być może

AOB: *aob* $=$ AB: *as*

Podzielmy łuk AB na części równych 2, 4, 8 i t.d. (110), aż póki nie doydziemy do części mnieyszych od łuku *bs*. Przenieśmy potém części te mnieysze od łuku *bs* na łuk *ab*, poczynaiąc od punktu *a* ku *b*.

Ponieważ łuki *ab*, AB. są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt *b*, lecz padnie albo z prawéy strony punktu *b*, *np.* w punkcie *c*, albo z lewéy strony, *np.* w punkcie *ć*. Poprowadziwszy promień *oc*, kąty *aoc*, AOB obeymuiące ramionami swemi łuki *ac*, AB spółmierne z wykreślenia, maią się do siebie iak te łuki, podług 1széy części ninieyszego twierdzenia; to iest, aoc: AOB $=$ ac: AB. A że podług przypusczenia AOB : aob $=$ AB: as; więc rozmnożywszy przez siebie wyrazy odpowiadaiące w tych dwóch proporcyach, będzie $aoc \times$ AOB: AOB $\times aob = ac \times$ AB: AB $\times as$.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez AOB, a dwa drugie przez AB, będzie

$aoc : aob = ac : as$.

Lecz kąt $aoc > aob$; łuk zaś $ac < as$ z wykréślenia; to iest, w ostatniéy proporcyi poprzednik 1go stosunku, większy iest od swego następnika; poprzednik zaś 2go stosunku mniéyszy iest od swego następnika: a zatém proporcya ta iest fałszywa. Proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy poprzedzaiących, z których 1wsza aoc: AOB $=$ ac: AB iest dowiedziona w 1széy części ninieyszego twierdzenia; druga zatém AOB : aob $=$ AB : as, w któréy łuk as wzieliśmy większy od ab, musi być fałszywa. W proporcyi więc oznaczonéy głoską A ostatni wyraz ab nie może być zamały: obaczmy czy nie iest zawielki.

Weźmy łuk $aś < ab$ i niech będzie, ieżeli być może, ta proporcya prawdziwa:

AOB : aob $=$ AB : $aś$.

Podzielmy łuk AB na takie części równe, aby przeniosłszy ie na łuk ab zaczynaiąc od punktu a, iedna takowa część skończyła się między punktami $ś$ i b, *np.* w punkcie $ć$. Poprowadziwszy promień $oć$, dwa kąty $aoć$, AOB obeymuiące ramionami swoiemi łuki $ać$, AB spółmierne z wykréślenia, maią się do siebie iak te łuki, podług 1széy części ninieyszego twierdzenia; to iest, *aoć* : AOB $=$ *ać* : AB; a że podług przypuszczenia AOB : *aob* $=$ AB : *aś*; więc *aoć* $\times$ AOB : AOB $\times$ *aob* $=$ *ać* $\times$ AB : AB $\times$ *aś*.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez AOB, dwa drugie przez AB, będzie

aoć : *aob* $=$ *ać* : *aś*; co być nie może: gdyż kąt *aoć* $<$ *aob*; łuk zaś *ać* $>$ *aś* z wykréślenia: więc i proporcya ta: AOB : *aob* $=$ AB : *aś*, w któréy wzięliśmy łuk *aś* $<$ *ab*, iest fałszywa.

W proporcyi zatém A ostatni wyraz *ab* nie może być ani zamały, ani zawielki do uczynienia proporcyi; a tém samém wyraz ten iest takim, iakim być powinien; to iest, proporcya ta AOB : *aob* $=$ AB : *ab*, iest prawdziwa.

Czy więc łuki są spółmierne, czy nie spółmierne, zawsze *kąty maią się do siebie, iak łuki zawarte między ich ramionami.*

119, *Wniosek* 1. Ponieważ stosunek łuków AB, *ab*, równy iest stosunkowi kątów AOB, *aob*; więc gdy się kąty AOB, *aob* powiększą lub zmnieyszą w iakimkolwiek stosunku, łuki także AB, *ab* powiększą się, albo zmnieyszą w tymże samym stosunku; i odwrotnie, za powiększeniem lub zmnieyszeniem łuków AB, *ab*, kąty także AOB, *aob* powiększą się albo zmnieyszą. Łuki więc te mogą być użyte za miarę wielkości kątów. Przeto też *miarą kąta iest łuk między iego ramionami zawarty, należący do koła, którego środek iest wierzchołkiem tego kąta.*

Byłoby wprawdzie rzeczą przyzwoitszą dochodzić wielkości kątów, za pomocą kąta iakiego wziętego za iedność, niżeli za pomocą łuków. I tak *np.* wziąwszy kąt prosty za 1, kąt ostry, iako mnieyszy od prostego, byłby mnieyszym od iedności, kąt roztwarty iako większy od prostegò, byłby większym od iedności. Lecz takowy sposób mierzenia kątów lubo nayprzyzwoitszy, w użyciu iednak nie iest wygodny, dla téy naybardziéy przyczyny, że łatwiéy iest brać równe łuki danym łukom, niż równe kąty danym kątom. W takowym sposobie mierzenia kątów, mówić *np.* że łuk AB iest miarą kąta AOB, iest to samo co mówić, że kąt AOB taką iest częścią kąta iakiego wziętego za 1, iaką częścią iest łuk AB łuku zawartego między ramionami kąta wziętego za 1, i który iest częścią okręgu koła maiącego swóy środek w wiérzchołku tegoż kąta.

120. 2. Miarą kąta prostego, którąby nayprzyzwoiciéy było wziąć za iedność do mierzenia kątów, iest czwarta część okręgu: gdyż wiérzchołek S *fig.* 56. kąta prostego FSG wziąwszy za środek i promieniem iakimkolwiek *np.* SG nakréśliwszy koło; przedłużmy FS do H; będzie FH średnica tego koła (101); a zatém FGH iest połową okręgu: a że kąt GSF=GSH iako proste, więc i łuk FG=GH iako miary kątów równych. Łuk przeto FG iest połową pół okręgu FGH, czyli czwartą częścią okręgu całego.

Miarą zatém kąta ostrego będzie łuk mnieyszy od czwartéy części okręgu: miarą kąta roztwartego będzie łuk większy od czwartéy części okręgu.

121. 3. Z twierdzenia poprzedzaiącego wypada także, że chcąc dany kąt podzielić na iakąkolwiek liczbę części równych, dosyć iest łuk służący mu za miarę podzielić na tyleż części, i punkta podziału połączyć liniiami prostemi z wiérzchołkiem kąta: liniie te podzielą kąt dany na części szukane.

Uwaga. Widzieliśmy wyżéy (110), że łuk dany podzielić można na części równych 2, 4, 8, 16 i t. d. Więc na te same części równe można także podzielić dany kąt, iak to iuż innym sposobem okazaliśmy wyżéy (46). Co się tycze dzielenia łuku na inne części równe, iak *np.* na 3, 5, 6 i t. d. do tego potrzeba wyższych wiadomości, niżeli są te, które w Jeometryi elementarnéy mogą być umiesczone: i kąt więc na takie części równe ieometrycznie dzielonym być nie może, wyłączywszy tylko nie wielką liczbę przypadków szczególnych, które późniéy wymieniemy.

122. Twierd. *W dwóch kołach równych lub w jednymże kole łuk większy, ma większą cięciwę; i odwrotnie*: (byleby łuki, o których mowa, były mnieysze od półokręgu).

Dowod. Niech będzie *fig.* 61. łuk CB > BA, trzeba dowieśdź, że cięciwa CB > BA. Jakoż poprowadziwszy promienie SA, SB, SC, w dwóch tróykątach BSC, BSA: boki BS, CS piérwszego równe są bokom BS, AS drugiego tróykąta: a że kąt BSC>BSA, bo miarą piérwszego iest łuk BC z założenia większy od łuku BA, który iest miarą kąta drugiego; więc i bok BC przeciwny kątowi większemu iest większy od boku AB przeciwnego kątowi mnieyszemu (27); czyli, cięciwa BC>BA.

Odwrotnie. Jeżeli cięciwa BC>AB, będzie łuk BC>AB: gdyż w dwóch tróykątach BCS, ABS, boki BS, CS piérwszego równe są bokom BS, AS drugiego tróykąta; a że bok trzeci BC>AB z założenia, więc i kąt BSC>ASB (27), a tém samém i łuk BC>AB. (*)

(*) *Dowodzenie to zasadza się na 2giéy części twierdzenia podanego wyżéy (27), gdzie przez wzgląd na to, aby ile możności ułatwić dla poczynaiących początkowe wiadomości Jeometryi, użyliśmy dowodzenia łatwego wprawdzie, lecz które nie iest tak ścisłe, iak następuiące:* Jeżeli we dwóch tróykątach ABC, *abc fig.* 14., bok AB=*ab*, bok BC=*bc*, a bok AC > *ac*; będzie kąt B>*b*. *Jakoż gdyby kąt B nie był większy od kąta* b, *byłby albo mu równy, albo od niego mnieyszy. W 1wszym przypadku dwa te tróykąty przystałyby do siebie (24), a tem samém byłby bok* ac=*AC, co być nie może, iako przeciwne założeniu. W 2gim przypadku byłby bok* ac>*AC, podług 1wszéy części ninieyszego twierdzenia; co się także sprzeciwia założeniu, a tém samém być nie może. Kiedy więc kąt B nie może być ani równy kątowi* b, *ani od niego mnieyszy, więc musi być od niego większy.*

123. *Uwaga.* Twierdzenie to ma tylko mieysce w tenczas, gdy łuki są mnieysze od półokręgu; łuki zaś większe od półokręgu, maią przeciwną własność; to iest im większy iest łuk, tém iest mnieysza cięciwa, i odwrotnie: i tak łuk AFCB>AFC: a cięciwa piérwszego AB mnieysza iest od BC cięciwy drugiego łuku.

124. Twierd. *Dwie cięciwy równe są w równéy od środka koła odległości: a z dwóch cięciw nierównych mnieysza iest w większéy od środka koła odległości.*

Dowod. 1*ód* Niech będzie *fig.* 62. cięciwa AB=CD: ze środka S spuściwszy dwie prostopadłe SE, SG 1wszą do AB, 2gą do CD, i poprowadziwszy promienie SA, SC, w dwóch tróykątach SAE, SCG prostokątnych, iest bok SA=SC, iako promienie; bok AE=CG, iako połowy dwóch cięciw równych (108): a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (52), a w szczególności SE=SG: a że SE, SG są odległością środka S od cięciw AB, CD (51); więc cięciwy te są w równéy odległości od środka S.

2*re* Niech będzie cięciwa CF>AB; łuk CF iest większy od łuku AB (122). Na łuku CF wziąwszy łuk CD=AB, i poprowadziwszy cięciwę CD, tudzież ze środka S spuściwszy dwie prostopadłe SH, SG, 1wszą do cięciwy CF, 2gą do cięciwy CD; w tróykącie SHI prostokątnym przy H, iest SI>SH (87), a tém bardziéy SI+IG>SH; czyli SG>SH: a że SG=SE podług 1széy części ninieyszego twierdzenia; więc i SE>SH;

to iest, odległość mnieyszéy cięciwy od środka koła iest większa, niż odległość większéy cięciwy od tegoż środka.

125. Twierd. *Kąt maiący swóy wiérzchołek na okręgu koła, ma za miarę połowę łuku zawartego między ramionami.*

Dowod. 1*sze* Niech będzie kąt ACB, *fig.* 63. maiący wiérzchołek C na okręgu, i ktorego iedno ramie CB przechodzi przez środek koła S. Poprowadziwszy średnicę DE rownoodległą od drugiego ramiona AC, będzie kąt ACB = DSB iako iednostronne odpowiadaiące względem siecznéy CB i dwóch równoodległych AC, DE. A że miarą kąta DSB iest łuk DB (119), więc i miarą kąta ACB iest łuk DB. Łuk DB = CE, iako miary kątów DSB, CSE równych; łuk CE = AD: gdyż są zawarte między cięciwami równoodległemi: więc i łuk DB = AD; to iest, łuk AB podzielony iest w punkcie D na dwie równe części; a tém samém łuk DB, będący miarą kąta ACB iest połową łuku AB zawartego między ramionami tegoż kąta.

2*re* Gdy środek koła S znayduie się między ramionami kąta ACF maiącego wiérzchołek C na okręgu, średnica BC, dzieli kąt ACF na dwa inne ACB i BCF, których spólnym ramieniem iest średnica BC. A zatém podług przypadku 1szego miarą kąta ACB iest połowa łuku AB; miarą kąta BCF iest połowa łuku BF: więc miarą kątów ACB + BCF, iest połowa łuków AB + BF; czyli miarą kąta ACF iest połowa łuku AF zawartego między iego ramionami.

3cie Gdy środek koła S iest za ramionami kąta HCA maiącego wierzchołek C na okręgu, kąt HCA=HCB—ACB. Miara kąta HCB iest połowa łuku HB, podług przypadku 1szego. Miarą kąta ACB iest połowa łuku AB. Więc miarą kąta HCB—ACB iest $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB; czyli miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB. A że łuk HB —AB=AH, a tém samém $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$AH; więc miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}$AH.

To samo twierdzenie może być dowiedzione sposobem następuiącym:

Poprowadziwszy promień SA *fig.* 64. w tróykącie ACS kąt zewnętrzny ASB, równy iest dwom wewnętrznym ACS i SAC naprzeciwko leżącym (85). A że kąt SAC=ACS: gdyż tróykąt ACS iest równoramienny; więc kąt ASB= 2 ACS; czyli kąt ASB=2 ACB: więc połowa kąta ASB = ACB. A tém samém i połowa miary kąta ASB, czyli połowa łuku AB iest miarą kąta ACB.

Tegoż samego dowodzenia użyć można w dwóch innych przypadkach, uważaiąc, że kąt ACF iest równy summie dwóch kątów ACB, BCF maiącym za spólne ramie średnicę CB, kąt zaś HCA równy iest różnicy dwóch kątów HCB i ACB maiących za spólne ramie średnicę BC.

126. *Wnioski* 1. Kąt GCH zawarty między styczną i cięciwą, ma także za miarę połowę łuku CH zawartego między ramionami: gdyż kąt GCH=GCB—HCB. Miarą kąta GCB iako prostego (114), iest połowa półokręgu CHB; miarą kąta HCB iest połowa łuku HAB (125).

więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CHB, mniéy połową łuku HAB: że zaś łuk CHB—HAB $=$CH; a tém samém $\frac{1}{2}$CHB — $\frac{1}{2}$HAB $=$ $\frac{1}{2}$CH; więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CH zawartego między ramionami.

2. Kąt HCM zawarty między cięciwą CH i przedłużeniem cięciwy CF, ma za miarę połowę summy łuków należących do tych dwóch cięciw, to iest, połowę łuku CH więcéy połową łuku CF: gdyż kąt HCM równy dwom kątom prostym mniéy kątem HCF, będzie miał za miarę półokręgu mniéy połowę łuku HF; że zaś cały okrąg mniéy łukiem HF równa się dwom łukom CH i CF, a tém samém połowa okręgu mniéy połową łuku HF, równa się połowie dwóch łuków CH i CF; więc miarą kąta HCM będzie połowa łuków CH i CF. *Albo tak*: kąt HCM $=$ HCG $+$ GCM; czyli, kąt HCM$=$HCG $+$ FCI: gdyż kąt FCI $=$ GCM. A że miarą kąta HCG iest połowa łuku CH, a miarą kąta FCI iest połowa łuku CF podług wniosku poprzedzaiącego; więc też i kąta HCM będzie miarą połowa summy tychże łuków.

127. 3. Kąty E, H, I, *fig.* 65. maiące wierzchołki na okręgu, a ramionami swoiemi obeymuiące tenże sam łuk FCG, są sobie równe: gdyż wszystkich miarą iest połowa łuku FCG.

128. 4. Kąt ACB maiący wierzchołek na okręgu, a którego ramiona przechodzą przez końce średnicy AB, iest prosty: gdyż ma za miarę połowę półokręgu AEB: czyli czwartą część

okręgu całego; co także można okazać sposobem następuiącym:

Poprowadziwszy promień SC, w dwóch tróykątach równoramiennych ACS, BCS, iest kąt SCA=CAS; kąt SCB=CBS: więc SCA+SCB =CAS+CBS: czyli, kąt ACB=CAS+CBS. To iest, w tróykącie ABC, kąt ACB równy iest summie dwóch innych kątów CAS i CBS; a tém samém kąt ACB iest połową summy wszystkich trzech kątów tróykąta ABC: a że wszystkie trzy kąty tróykąta ważą dwa kąty proste (84), więc kąt ACB waży połowę dwóch kątów prostych, czyli waży ieden kąt prosty.

Własność ta zwyczaynie tak się wyraża: *kąt w półkolu iest prosty.*

Uwaga. W dowodzeniu piérwszym sposobem poprzedzaiącego twierdzenia wyprowadziliśmy ważność kąta maiącego wiérzchołek na okręgu za pomocą prawdy wyżéy okazanéy, że dwa łuki zawarte między dwiema cięciwami równoodległemi są równe. Wzaiemnie prawdę tę możnaby teraz okazać za pomocą twierdzenia poprzedzaiącego: gdyż *fig.* 65. ieżeli dwie cięciwy AB, FG są od siebie równoodległe, poprowadziwszy cięciwę FB, kąty ABF, BFG maią za miarę połowy łuków AF i BG: a że kąty te są równe, iako naprzemian ległe wewnętrzne, więc i miary ich są równe; a tém samém łuk AF=BG.

129. Twierd. *Kąt ACB fig.* 66. *maiący wiérzchołek w kole między okręgiem i środkiem koła, ma za miarę połowę łuku AB za-*

wartego między ramionami, więcéy połowę łuku DE zawartego między przedłużeniami ramion.

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miarą kąta ADF połowa łuku AF (125). Łuk AF $=$ AB $+$ BF, czyli, łuk AF $=$ AB $+$ DE, gdyż łuk DE $=$ BF (116), a tém samém $\frac{1}{2}$ AF $= \frac{1}{2}$ AB $+ \frac{1}{2}$ DE: więc miarą kąta ADF iest $\frac{1}{2}$ AB $+ \frac{1}{2}$ ED. A że kąt ADF $=$ ACB (67), więc miarą kąta ACB iest połowa łuku AB więcéy połową łuku ED.

130. *Twierd.* Kąt ACB *fig.* 67. maiący wierzchołek za kołem, a ramionami swemi obeymuiący dwa łuki AB, ED, *ma za miarę połowę różnicy tychże łuków*, to iest, ma za miarę połowę łuku AB, mniéy połową łuku DE.

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miara kąta ADF $= \frac{1}{2}$ AF. A że łuk AF $=$ AB $-$ BF, czyli łuk AF $=$ AB $-$ DE, gdyż łuk DE $=$ BF; a tém samém $\frac{1}{2}$ AF $= \frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ DE; więc miara kąta ADF $= \frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ DE: że zaś kąt ADF $=$ ACB (67), więc miara kąta ACB $= \frac{1}{2}$ AB $- \frac{1}{2}$ DE.

Ostatnie trzy twierdzenia, mogą być także następuiącym sposobem dowiedzione:

Kąt ACB *fig.* 68., maiący wierzchołek wewnątrz koła *fig.* 1., lub za kołem, *fig.* 2. lub na okręgu *fig.* 3.; w 1szym przypadku ma za miarę połowę summy dwóch łuków AB, *ab*: w 2gim przypadku połowę różnicy dwóch łuków AB, *ab*: w 3cim przypadku połowę łuku AB.

Dowod. We wszystkich trzech figurach poprowadziwszy średnice D*d*, E*e* równoodległe piérwsze od ramion AC, drugie od ramion BC; będzie we wszystkich trzech przypadkach kąt DSE $=$ *dSe*, iako wiérzchołkiem przeciwległe; kąt ACB $=$ DSE (70). Więc łuk DE będący miarą kąta DSE (119), będzie oraz miarą kąta ACB. Idzie więc tylko o wynalezienie ważności łuku DE we wszystkich trzech figurach.

W przypadku 1wszym, *fig.* 1.

Łuk DE $=$ AB — AD — BE;
łuk $de = \cancel{ad} + ad + be$. *ab*

W tych dwóch równaniach dodawszy strony odpowiadaiące sobie, będzie

$DE + de = AB + ab - AD + ad - BE + be.$

Ze zaś łuk DE $= de$, iako miary równych kątów DSE, *dSe*, łuk AD $= ad$, i łuk BE $= be$, iako zawarte między cięciwami równoodległemi; więc powyższe równanie zamieni się w następuiące:

$2DE = AB + ab$. Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie

$$DE = \frac{AB + ab}{2} \; ; \; — \; ; \; — \; , \; — \; , \; — \; A.$$

To iest, łuk DE, będący miarą kąta ACB maiącego wiérzchołek wewnątrz koła, równy iest połowie summy dwóch łuków AB, *ab*.

W przypadku 2gim, *fig.* 2.

Łuk DE $=$ AB — AD — BE:
łuk $de = ad + be - ab$. A zatém

$DE + de = AB + ad - AD + be - BE - ab$; czyli
$2 DE = AB - ab$; a zatém

$$DE = \frac{AB - ab}{2} : - : - : - : - B.$$

To iest, łuk DE będący miarą kąta ACB który ma wiérzchołek za kołem, równy iest połowie różnicy łuków AB, *ab*.

W przypadku 3cim, *fig.* 3.

Łuk $DE = AB - AD - BE$; łuk $de = Cd + Ce$: więc $DE + de = AB + Cd - AD + Ce - BE$; czyli, $2 DE = AB$: gdyż $Cd = AD$, $Ce = BE$: więc $DE = \frac{AB}{2}$. To iest, łuk DE będący miarą kąta ACB, który ma wiézchołek na okręgu, równy iest połowie łuku AB.

Uwaga. Równania oznaczone głoskami A i B różnią się tylko znakiem ostatniego wyrazu, który iest w równaniu A przydayny, w równaniu B uiemny. Dwa więc te równania możnaby tak wyrazić: łuk $DE = \frac{AB \pm ab}{2}$.

Że zaś w przypadku 3cim nie masz łuku *ab*, czyli, co na iedno wychodzi, łuk $ab = 0$; więc w przypadku tym ostatni wyraz $\pm ab = 0$; będzie więc łuk $DE = \frac{AB}{2}$.

131. Zagad. *Z końca danéy linii AC, fig.* 65., *wyprowadzić prostopadłą, nie przedłużaiąc danéy linii, iak wymaga sposób podany wyżéy* (53).

Roz-

Rozw. Z punktu któregokolwiek S wziętego za daną liniią nakréślić koło, któregoby okrąg daną liniią przecinał w punkcie A; przez punkta A i S poprowadzić linią prostą AB, przecinaiącą się z okręgiem w punkcie B; punkta B i C złączywszy linią prostą BC, liniia ta będzie prostopadła do AC: gdyż kąt ACB iest prosty (128).

Zagad. 2. *Z punktu A fig.* 69. *danego za kołem poprowadzić styczną koła.*

Rozw. Środek danego koła S złączywszy z punktem A liniią prostą SA, i podzieliwszy ią w punkcie C na dwie części równe, z punktu C iako ze środka, promieniem CS wykréślić koło, którego okrąg z okręgiem koła danego, przecina się w punktach R, T. Punkt R lub T złączywszy liniią prostą z punktem A, liniia ta będzie styczną szukaną: gdyż poprowadziwszy promień ST, kąt STA iest prosty (128), a zatém liniia AT iest prostopadła do promienia ST, a tém samém iest styczną danego koła (114).

132. Twierd. *Okręgi dwóch kół przechodzące przez ieden punkt A, fig.* 70. *linii AS która łączy ich środki, maią tylko ten ieden punkt A spólny, w którym się stykaią: i odwrotnie, gdy się okręgi dwóch kół stykaią, środki ich i punkt zetknięcia się są na iednéy linii.*

Dowod. Środki tych kół mogą być albo z jednéy strony punktu zetknięcia się A, iak są S, *s*; albo ieden z jednéy, drugi z drugiéy strony tego punktu, iak są S, *ś*. W 1wszym przypadku na okręgu koła większego, wziąwszy iakikolwiek punkt C, i z punktu tego do środków S, s dwóch kół poprowadziwszy liniie proste CS; Cs; w tróykącie CSs, iest Ss + Cs > CS (22), czyli Ss + Cs > AS; czyli Ss + Cs > Ss + As. Odiąwszy po obu stronach Ss, zostanie Cs > As. To iest, liniia Cs większa iest od As, promienia koła mnieyszego, a tém samém punkt C musi być za okręgiem tego koła.

W przypadku 2gim, kiedy środki S, $ś$ są po obu stronach punktu A, na okręgu koła wykréślonego promieniem AS, wziąwszy którykolwiek punkt C, i poprowadziwszy liniie proste CS, C$ś$; w tróykącie CS$ś$, iest C$ś$ + CS > S$ś$; czyli C$ś$ + AS > A$ś$ + AS: a zatém C$ś$ > A$ś$. To iest: liniia C$ś$ dłuższa iest od promienia A$ś$; a tém samém punkt C musi być za okręgiem koła wykréślonego promieniem A$ś$.

Odwrotnie. Jeżeli okręgi dwóch kół stykaią się z sobą w punkcie A, środki ich i punkt zetknięcia się, są na iednéy linii: gdyż z punktu zetknięcia się A wyprowadziwszy styczną AT, liniia ta prostopadłą będzie do promieni AS, As, A$ś$ (114), i wzaiemnie promienie te będą w punkcie A prostopadłe do linii AT. A że z punktu A wziętego na linii AT nie można więcéy prostopadłych do niéy wyprowadzić, tylko iednę (55); więc wszystkie te trzy promienie, a tém samém i środki kół S, s, $ś$ znaydować się muszą na iednéyże linii, przez punkt A przechodzącéy.

133. *Uwaga.* W przypadku 1szym iest Ss = AS — As; czyli Ss + As = AS. W przypadku 2gim, S$ś$ = AS + A$ś$. Gdyby w przypad-

ku 1szym, $Ss < AS - As$, a tém samém $Ss + As < AS$; na ten czas okręgi dwóch kół, nie mogłyby się zsobą zetknąć, lecz okrąg koła mniéyszego, byłby zawarty w okręgu koła większego. Gdyby zaś $Ss > AS - As$, a tém samém $Ss + As > AS$; na ten czas okręgi dwóch kół, przecięłyby się z sobą w punktach C, c, iak iest na *figurze* 71.

W przypadku 2gim, gdyby $S\acute{s} > AS + A\acute{s}$, rzeczą icst widoczną, iż okręgi dwóch kół nie mogłyby się z sobą zetknąć. Lecz gdyby była liniia $S\acute{s} < AS + A\acute{s}$ iak iest na *fig.* 71.; na ten czas okręgi dwóch kół, przecięłyby się z sobą w punktach F, f.

To iest, okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przeciąć; 1*ód*, gdy odległość ich środków powiększona iednym promieniem, albo się równa promieniowi drugiemu, albo iest od niego mnieysza; 2*re*, gdy odległość środków iest albo równa summie dwóch promieni, albo od niéy większa. Gdy zaś odległość środków powiększona promieniem mnieyszym, wieksza iest od promienia drugiego; albo gdy odległość środków, mnieysza iest od summy dwóch promieni; na tenczas okręgi dwóch kół mogą się z sobą przeciąć, byleby w drugim przypadku promień ieden nie był większy od summy promienia drugiego i odległości środków.

Widzieliśmy wyżéy, że kréśląc tróykąt, kiedy są dane trzy liniie proste maiące być iego bokami, iedna z nich bierze się za podstawę, dwa iéy końce za środki, a dwie inne liniie dane za promienie dwóch łuków, których przecięcie się oznaczy wiérzchołek szukanego tróykąta. Lecz przecięcie się tych dwóch łuków, w tych tylko przypadkach nastąpić może, któreśmy dopiéro wymienili, a które wychodzą na to samo, cośmy iuż wyżéy powiedzieli (43), że trzy dane liniie na boki tróykąta, takie być powinny, aby każda z nich mnieysza była od summy dwóch pozostałych.

134. Zagad. *Wykréślić koło, któregoby okrąg zetknął się z daną liniią AT w punkcie A fig. 70.,* i *przeszedł przez punkt B, dany za tą liniią AT.*

Rozw. Z punktu A wyprowadziwszy AE prostopadłą do AT, punkt A z punktem B łączę liniią prostą AB, którą w punkcie D podzieliwszy na dwie równe części, i z punktu D wyprowadziwszy prostopadłą do AB przecinaiącą się w punkcie ś z linią AK, punkt ś będzie środkiem, a liniia Aś promieniem koła szukanego. C
Jakoż środek tego koła powinien się znaydować tak na linii AE, która iest w punkcie A prostopadłą do stycznéy AK (132), iako też na linii Dś (109), która iest prostopadłą ze środka cięciwy AB wyprowadzoną: więc środek ten znaydować się będzie na spólném tych dwóch liniy przecięciu, którym iest punkt ś. T

135. Zagad. *Maiąc dane koło AFH, fig. 70. i punkt za niem B, wykréślić drugie koło, któregoby okrąg przeszedł przez punkt B, i zetknął się z okręgiem koła danego w daném punkcie A.*

Rozw. Punkt A z punktem B złączywszy liniią prostą AB, i że środka D linii AB wyprowadziwszy D*ś* prostopadłą do AB, przez środek *s* danego koła i przez punkt A prowadzę liniią prostą *s*A, aż do przecięcia się z liniią D*ś* w punkcie *ś*; punkt *ś* będzie środkiem, a liniia A*ś* promieniem koła szukanego: gdyż tak prostopadła D*ś* ze środka cięciwy AB wyprowadzona, iako też i liniia A*s* środek danego koła z punktem A łącząca powinny przechodzić przez środek koła szukanego: środek zatém ten należąc do obudwu liniy, znaydować się musi na spólném ich przecięciu, którem iest punkt *ś*.

136. Zagad. *Na linii danéy AB fig.* 72. *wykréślić odcinek koła w którymby się zmieścił kąt równy danemu.*

Rozw. Przez punkt A, linii AB prowadzę linią AD, któraby z liniią AB czyniła kąt DAB równy danemu. Kréślę potém koło, któregoby okrąg przeszedł przez punkt B i zetknął się z liniią AD w punkcie A (134), odcinek ABE iest szukany: gdyż kąt BAD zawarty między cięciwą AB i styczną AD maiący za miarę połowę łuku AFB (126), równy iest kątowi ACB umieszczonemu w odcinku koła ABE i maiącemu za miarę połowę tegoż łuku AFB (125).

ROZDZIAŁ VI.

o *Powierzchni wielokątów.*

137. W tróykącie iakimkolwiek ACB *fig.* 73. z wierzchołka kąta C przeciwnego podstawie

AB, spuściwszy CD prostopadłą do AB, prostopadła ta zowie się wysokością tego tróykąta.

Prostopadła ta CD, może paść albo wewnątrz tróykąta, iak iest na *fig.* 1; albo zewnątrz na przedłużenie podstawy AB, iak iest na *fig.* 2; albo też na sam koniec A podstawy AB, iak iest na *fig.* 3; a w tym przypadku bok CA iest wysokością tróykąta.

W Równoległoboku ABCD *fig.* 74. wziąwszy którykolwiek bok, *np.* AB za podstawę, i z któregokolwiek punktu wziętego na boku CD przeciwnym podstawie spuściwszy prostopadłą FE do podstawy AB, prostopadła ta nazywa się wysokością równoległoboku.

Ponieważ kwadrat i prostokąt ma wszystkie kąty proste (81), więc wziąwszy którykolwiek ich bok za podstawę, bok drugi przyległy podstawie będzie wysokością kwadratu lub prostokąta. A że kwadrat ma wszystkie boki równe; więc wysokość kwadratu równa iest iego podstawie.

138. Twierd. *Dwa iakiekolwiek równoległoboki maiące równe podstawy i wysokości, maią równe powierzchnie.*

Dowod. Wystawmy sobie, że równoległobok ABEF *fig.* 75. iest położony na równoległoboku ABCD, tak aby ich podstawy do siebie przystały: ponieważ te dwa równoległoboki maią równe wysokości, więc bok EF równoodległy od podstawy AB drugiego, padnie na bok CD równoodległy od podstawy AB piérwszego równoległoboku (74); inne zaś dwa boki AF, BE, wezmą położenie albo takie iak iest na *fig.* 1; albo iak iest na *fig.* 2; albo też iak iest na *fig.* 3.

W przypadku 1: w dwóch tróykątach ADF, BCE, bok AD = BC, bok AF = BE, iako boki przeciwne w równoległobokach (79). Nadto kąt DAF = CBE, gdyż ramiona ich są równoodległe i rozchodzą się w iednęż stronę: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a tém samém powiérzchnie ich są równe; czyli tróykąt BCE = ADF: więc ABED — BCE = ABED — ADF; czyli ABCD = ABEF.

To samo iest dowodzenie w drugich dwóch przypadkach.

139. Twierd. *Tróykąt iakikolwiek ABC fig. 76. iest połową równoległoboku AD maiącego tę samę podstawę i wysokość.*

Dowod. Z punktu B wyprowadziwszy BF równoległą od AC, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużonym bokiem ED, czworokąt ABFC iest równoległobokiem; a zatém przekątna BC dzieli go na dwa tróykąty ABC, BCF mogące do siebie przystać, a tém samém równe co do powierzchni (79); więc ieden z nich *np.* tróykąt ABC, iest połową powierzchni obudwu, czyli iest połową powierzchni równoległoboku AF: a że równoległobok AF równy iest co do powierzchni równoległobokowi AD (138), więc tróykąt ACB iest połową powierzchni równoległoboku AD.

140. *Wniosek.* Stąd wypada, że dwa tróykąty maiące równe wysokości i podstawy

są równe co do powierzchni: gdyż każdy z nich iest połową równoległoboku maiącego też samę wysokość i podstawę co i tróykąty.

141. Zagad. *Dany wielokąt zamienić na inny równy danemu co do powierzchni, i któryby miał boków mniéy iednym, niż wielokąt dany.*

Rozwiąz. Niechby wielokąt dany był pięciokątem AD *fig.* 77. który zamienić trzeba na czworokąt równy mu w powierzchni. Przez wiérzchołki dwóch kątów E i C poprowadziwszy liniią EC, w tróykącie EDC przez wiérzchołek kąta D poprowadzmy liniią DF równoodległą od EC, aż do spotkania się w punkcie F z przedłużonym pięciokąta bokiem AE. Poprowadziwszy liniią CF, czworokąt ABCF będzie szukany: gdyż tróykąty ECD, ECF podług poprzedzaiącego wniosku są równe co do powierzchni, iako maiące tę samę podstawę i wysokość (74); a zatém

ABCE + ECD = ABCE + ECE; czyli ABCDE F
= ABCF.

Gdyby w pięciokącie danym ABCDE *fig.* 78., kąt D był wklęsły, wykréślenie byłoby zupełnie to samo, co wyżéy; lecz w dowodzeniu zachodzi nieiaka odmiana; okazawszy bowiem że tróykąt ECD = ECF, będzie

ABCE — ECD = ABCE — ECF; czyli
ABCDE = ABCF.

142. *Wniosek.* Tymże samym sposobem postępuiąc, można czworokąt ABCF zamienić na tróykąt równy mu co do powierzchni; i w

ogólności każdy wielokąt zamienionym być może na tróykąt równy mu co do powierzchni. I tak sześciokąt zamieniwszy naprzód sposobem wyżéy podanym na pięciokąt, zamienilibyśmy potém pięciokąt na czworokąt, a czworokąt na tróykąt.

143. Twierd. *Dwa prostokąty AC, EG, fig. 79. których wysokości są równe, maią się do siebie iak podstawy*; to iest, prostokąt ieden tyle razy iest większy lub mnieyszy od drugiego, ile razy podstawa piérwszego iest większa lub mnieysza od podstawy drugiego; czyli

ABCD : EFGH = AB : EF.

Dowod. Podstawy AB, EF, mogą być spółmierne lub niespółmierne. W 1szym przypadku daymy nato, że AB zamyka takich części 8, iakich EF zamyka 4. Podzieliwszy AB na 8, EF na 4 części równe (37), i z punktów podziału wyprowadziwszy prostopadłe do tych podstaw, aż do przecięcia się z bokami DC, HG przeciwnemi podstawom AB, EF; prostopadłe te podzielą prostokąt AC na 8, prostokąt EG na 4 prostokąty równe między sobą (138), gdyż wszystkie maią równe podstawy i wysokości. Będzie więc ABCD : EFGH = 8 : 4. A że AB : EF = 8 : 4: więc ABCD : EFGH = AB : EF.

W 2gim przypadku, kiedy podstawy AB, EF *fig.* 80. są niespółmierne, będzie także ABCD : EFGH = AB : EF . . . . A. Jakoż gdyby proporcya ta była fałszywa, ostatni iéy wyraz EF, byłby albo zamały, albo zawielki do uczynienia proporcyi: trzy bowiem piérwsze wyrazy mogą być iakiekolwiek. Daymyż nato, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa:

ABCD : EFGH = AB : Es, w któréy Es > EF.

Podzielmy AB na części równych 2, 4, 8. i t. d., aż póki nie doydziemy do części mnieyszych od linii Fs. Przenieśmy potém części te mnieysze od linii Fs na liniią EF zaczynaiąc od punktu E ku F. Ponieważ liniie AB, EF są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt F, lecz padnie albo z prawéy strony *np.* w punkcie c, albo z lewéy strony, *np.* w punkcie $\acute{c}$, Z punktu c wyprowadziwszy co prostopadłą do Es, aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem GH wpunkcie o, prostokąty EcoH, ABCD maią podstawy Ec, AB spółmierne z wykreślenia, będzie więc podług 1széy części niniéyszego twierdzenia

EcoH : ABCD = Ec : AB. A że podług przypusczenia

ABCD : EFGH = AB : Es, więc rozmnożywszy w tych dwóch proporcyach wyrazy sobie odpowiadaiące, będzie

EcoH × ABCD : ABCD × EFGH = Ec × AB : AB × Es.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez ABCD, dwa drugie przez AB, będzie EcoH : EFGH = Ec : Es. W téy proporcyi 1wszy poprzednik wiekszy iest od swego nastepnika, 2gi zaś poprzednik mnieyszy iest od swego następnika podług wykréślenia: proporcya więc ta iest fałszywa. Proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyi poprzedzaiacych, z których piérwsza iest wypadkiem 1wszéy części niniéyszego twierdzenia: druga więc, w któréy ostatni wyraz Es wzięliśmy większy od EF, musi być fałszywa. A zatém w proporcyi A ostatni wyraz EF nie może być zamały: obaczmy czy nie iest zawielki. Daymy nato że ta proporcya iest prawdziwa:

ABCD : EFGH = AB : E$ś$, w któréy E$ś$ $<$ EF.

Podzielmy AB na takie części równe, aby przeniosłszy ie na EF zaczynaiąc od E ku F, ieden punkt podziału padł między $ś$ i F, *np.* w punkcie $ć$. Z punktu $ć$ wyprowadziwszy $ćó$ prostopadłą do EF aż do przecięcia się z bokiem HG w punkcie $ó$; prostokąty E$ćó$H, ABCD maią podstawy spółmierne z wykréślenia: będzie więc

E$ćó$H : ABCD = E$ć$: AB; a że podług przypuszczenia

ABCD : EFGH = AB : E$ś$; będzie więc EFGH

E$ćó$H $\times$ ABCD : ABCD $\times$ EFGH = E$ć$ $\times$ AB : AB $\times$ E$ś$. Więc

E$ćó$H : EFGH = E$ć$: E$ś$.

W téy proporcyi piérwszy poprzednik mniéyszy iest od swego następnika, drugi zaś poprzednik większy iest od swego następnika z wykréślenia. Proporcya zatém ta iest fałszywa; a więc i proporcya ią poprzedzaiąca, w któréy ostatni wyraz E$ś$ wzięliśmy mnieyszy od EF, musi być fałszywa. W proporcyi zatém oznaczonéy głoską A wyraz EF nie może być zawielki.

Kiedy więc wyraz ten EF nie iest ani zamały, ani zawielki do utworzenia proporcyi A; proporcya zatém ta iest prawdziwa, to iest, *dwa prostokąty z równemi wysokościami, maią się iak podstawy, choćby podstawy były niespółmierne.*

144. Tymże samym sposobem dowieść można, że *dwa prostokąty, których podstawy są równe, maią się iak wysokości.* Jakoż wziąwszy wysokości ich za podstawy, a podstawy za wysokości, twierdzenie to niczém niebędzie się różniło od poprzedzaiącego.

145. Twierd. *Dwa iakiekolwiek prostokąty, AC, EG fig.* 81 *maią się iak iloczyny ich podstaw, przez wysokości*: to iest, będzie ABCD : EFGH = AB × BC : EF × FG.

Dowod. Na wysokości FG prostokąta EG wziąwszy FI = BC, i poprowadziwszy IK równoodległą od EF; dwa prostokąty AC, EI, maiące równe wysokości, są do siebie iak podstawy; podobnież dwa prostokąty EI, EG, maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości, to iest

ABCD : EFIK = AB : EF.

EFIK : EFGH = FI : FG.

W tych dwóch proporcyach rozmnożywszy wyrazy sobie odpowiadaiące, cztéry iloczyny będą w proporcyi, to iest

ABCD × EFIK : EFIK × EFGH = AB × FI : EF × FG.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez EFIK, a dwa drugie przez AB, i w 3cim wyrazie zamiast FI położywszy BC, będzie ABCD : EFGH = AB × BC : EF × FG.

146. *Wnioski* 1. Niech będzie prostokąt AC i kwadrat *ac fig.* 82. w których bok AB ma 8 stop, bok BC ma 4 stopy, bok *ab* ma iednę stopę i bok *bc* 1 stopę. Podług twierdzenia poprzedzaiącego iest ABCD: *abcd* = AB × BC: *ab* × *bc*. Zamiast boków położywszy liczby wyrażaiące ich ważność w stopach, będzie ABCD: *abcd* = 32: 1.

W téy proporcyi ponieważ poprzednik 2go stosunku iest 32 razy większy od swego następnika; więc i poprzednik 1go stosunku iest 32 razy większy od swego następnika; to iest, powierzchnia prostokąta ABCD zamyka w sobie 32 kwadratów równych kwadratowi *ac*: i gdyby powierzchnia kwadratu *ac* wzięta była za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, maiąc dany iakikolwiek prostokąt, łatwoby znaleźć można, ile razy powierzchnia iego zamyka w sobie powierzchnią kwadratu *ac* wziętego za iedność. Na ten koniec dosyćby było zmierzyć danego prostokąta podstawę AB i wysokość BC w stopach mierniczych, i rozmnożyć liczbę stop podstawy, przez liczbę stóp wysokości: iloczyn okaże ile razy powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie powierzchnią kwadratu *ac* wziętego za iedność; czyli, co na iedno wychodzi, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie stóp kwadratowych: kwadrat bowiem którego bok ma stopę mierniczą, zowie się stopą kwadratową.

Gdyby kwadrat wzięty za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, był łokciem, prętem lub sznurem kwadratowym; podstawę i wysokość danego prostokąta zmierzylibyśmy przez łokcie, pręty lub sznury miernicze; a w ten czas iloczyn podstawy przez wysokość okazałby, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie łokci, prętów lub sznurów kwadratowych. A stąd wypada, *że powierzchnia prostokąta równa iest iloczynowi iego podstawy przez wysokość*.

Prawdę te naocznie okazać można sposobem następuiącym: Niech będzie prostokąt AC którego powierzchnią zmierzyć mamy. Daymy nato, że podstawa AB zamyka w sobie bok *ab* kwadratu *abcd* wziętego za iedność 8 razy; wysokość zaś BC zamyka w sobie tenże bok *ab* 4 razy. Podzieliwszy AB na 8 części równych, BC na 4 części równe, i przez punkta podziału poprowadziwszy liniie równoodległe od BC i AB, powiérzchnia prostokąta AC podzieloną zostanie przez te liniie równoodległe na 4*ry* rzędy kwadratów równych kwadratowi *ac*, a każdy rząd zamyka 8 takich kwadratów: liczba zatém wszystkich kwadratów w powiérzchni prostokąta AC zawartych iest 4 raczy 8, czyli 32.

Gdyby wysokość BC zamykała w sobie 5, 10, 15 i t. d. razy, bok *ab* kwadratu *abcd*; powiérzchnia prostokąta AC byłaby podzielona na 5, 10, 15 i t. d. rzędów, z których każdy zamykałby 8 kwadratów równych kwadratowi *ac*; a tém samém powiérzchnia ta zamykałaby 5, 10, 15 i t. d. razy 8, takich kwadratów, iak iest *ac*;

to iest, powiérzchnia byłaby równa iloczynowi podstawy przez wysokość.

147. 2. Ponieważ w kwadracie wysokość równa iest podstawie, a zatém dla znalezienia powiérzchni kwadratu dosyć iest zmierzyć iego podstawę, i znalezioną liczbę stóp, łokci, lub prętów i t. d. rozmnożyć przez siebie samę, czyli podnieść liczbę tę do drugiego stopnia.

148. 3. Powiérzchnia równoległoboku iakiegokolwiek równa iest także iloczynowi iego podstawy przez wysokość: gdyż równoległobok równy iest w powiérzchni prostokątowi maiącemu tę samę podstawę i wysokość (138).

149. 4. A zatém równoległoboki maiące równe wysokości, są do siebie iak podstawy: gdyż nazwawszy ieden równoległobok R, drugi r, podstawę piérwszego P, wysokość W, podstawę drugiego p, wysokość W; będzie powiérzchnia piérwszego $P \times W$, powiérzchnia drugiego $p \times W$: a zatém będzie $R : r = P \times W : p \times W$. W téy proporcyi dwa wyrazy drugiego stosunku podzieliwszy przez W będzie $R : r = P : p$.

Tymże samym sposobem okazać można, że dwa równoległoboki maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości, maiące różne podstawy i wysokości, są do siebie iak iloczyny podstaw przez wysokości.

150. 5. Ponieważ tróykąt iest połową równoległoboku maiącego tę samę podstawę i wysokość (139); więc powierzchnia tróykąta równa iest połowie iloczynu iego podstawy przez wy-

sokość; albo, co na iedno wychodzi, równa iloczynowi iego podstawy przez połowę wysokości, albo też równa iloczynowi iego wysokości, przez połowę podstawy.

151. 6. A zatém tróykąty maiące równe wysokości są do siebie iak podstawy: gdyż oznaczywszy ieden tróykąt głoską T, drugi t, podstawę piérwszego P, wysokość W, podstawę drugiego p, wysokość W: będzie powierzchnia 1go $P \times \frac{1}{2} W$, powiérzchnia 2go $p \times \frac{1}{2} W$: a zatém $T : t = P \times \frac{1}{2} W : p \times \frac{1}{2} W$. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez $\frac{1}{2} W$, będzie $T : t = P : p$.

Tymże sposobem okazać można, że tróykąty maiące równe podstawy są do siebie iak wysokości; maiące różne podstawy i wysokości, są do siebie iak iloczyny podstaw przez wysokości.

152. 7. Chcąc znaleźć powiérzchnią iakiegokolwiek wielokąta, trzeba go naprzód podzielić przekątnemi na tróykąty (95), potém wyrachować powiérzchnią każdego tróykąta podług wniosku 5: summa powiérzchni wszystkich tróykątów będzie powiérzchnią danego wielokąta.

153. Twierd. *Powiérzchnia czworoboku ABCD, fig. 83. w którym dwa tylko boki AB, CD są równoodległe, równa iest iloczynowi iego wysokości EF, przez połowę summy dwóch boków równoodległych.*

Dowod. Poprowadziwszy przekątną AC, powiérzchnia tego czworoboku podzieloną będzie na dwa tróykąty ACB, ACD, w których boki

ki

ki AB i CD wziąwszy za podstawy, wysokość piérwszego będzie prostopadła z punktu C spusczona na AB, wysokość drugiego będzie prostopadła z punktu A spusczona na CD. Dwie te prostopadłe są sobie równe (74), i równe wysokości czworokątu ABCD: będzie zatém powierzchniá tróykąta ACB $=$ EF $\times \frac{1}{2}$ AB, powiérzchnia tróykąta ACD $=$ EF $\times \frac{1}{2}$ CD (150): więc

ACB $+$ ACD $=$ EF $\times \frac{1}{2}$ AB $+$ EF $\times \frac{1}{2}$ CD: czyli
ABCD $=$ EF $(\frac{1}{2}\text{AB} + \frac{1}{2}\text{CD})$; czyli

$$\text{ABCD} = \text{EF}\left(\frac{\text{AB} + \text{CD}}{2}\right).$$

154. *Twierd.* W czworoboku ABCD ieden z boków nie równoodległych, *np.* bok CB podzieliwszy w punkcie M na dwie części równe, i z punktu M poprowadziwszy MP równoległą od AB; będzie *połowa summy dwóch boków równoodległych AB i CD równa linii MP.*

Dowod. Przez punkt M poprowadziwszy liniią GH równoodległą od AD, aż do przecięcia się w punkcie G z przedłużonym bokiem CD; w dwóch tróykątach CGM, BHM, bok CM $=$ BM z wykréślenia; kąty przy M. równe iako wiérzchołkiem przeciwległe, kąt MCG $=$ M~~HB~~ BH (67), więc dwa te tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia 2go o przystawaniu tróykątów, a w szczególności CG $=$ BH. Że zaś liniie AH, PM, DG, są między sobą równe (72), więc 2PM $=$ AH $+$ DG. W tém równaniu z drugiéy strony dodawszy BH, a odiąwszy CG, przez co się równanie nie odmieni, gdyż dwie te liniie są sobie równe, z dowiedzenia będzie

$2PM = AH + BH + DG - CG$; czyli, $2PM = AB + DC$; a zatém

$$PM = \frac{AB + CD}{2}.$$

155. *Wniosek* 1. A zatém powiérzchnia czworoboku ABCD równa iest wysokości iego EF rozmnożonéy przez liniią PM.

2. Można więc powiérzchnią wielokąta iakiegokolwiek AD *fig.* 84. wynaleźć także sposobem następuiącym: przez wiérzchołki kątów E, C, F poprowadziwszy liniie EI, CH, GF równoodległe od AB, powierzchnia wielokąta AD podzieloną będzie na czworoboki AG, FC, HI, i na tróykąt EDI. Znalazłszy więc powiérzchnią tych czworoboków którym kolwiek z dwóch sposobów podanych wyżéy, i dodawszy ie do powierzchni tróykąta EDI, summa ta równa będzie powierzchni danego wielokąta.

156. Zagad. *Dany tróykąt zamienić na prostokąt lub iakikolwiek równoległobok równy tróykątowi co do powiérzchni.*

Rozwiąz. Wykryślmy prostokąt lub równoległobok, daiąc mu podstawę równą podstawie danego tróykąta, a wysokość równą połowie wysokości tegoż tróykąta; albo też daiąc mu podstawę równą połowie podstawy danego tróykąta, a wysokość równą wysokości tegoż tróykąta: prostokąt ten lub równoległobok będzie szukany (139).

157. Zagad. *Dany prostokąt AC fig.* 85. *lub równoległobok iakikolwiek zamienić na prostokąt lub równoległobok inny, równy*

danemu co do powierzchni, któryby miał za podstawę liniią daną BG.

Rozw. Podstawę AB danego prostokąta lub równoległoboku przedłużmy do G tak aby przedłużenie to było równe linii danéy BG, z punktu G poprowadzmy GH równoodległą od BC, aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem DC w punkcie H. Poprowadziwszy przekątną BH, i przedłużywszy ią aż do zeyścia się z przedłużonym bokiem AD w punkcie I, z punktu I poprowadźmy FI równoległą od AG, która z przedłużonemi bokami CB, HG spotyka się w punktach E, F: równoległobok BF iest szukany.

Gdyż równoległobok DF przez przekątnią HI podzielony iest na dwa tróykąty IDH, IFH, równe (79). Tróykąt IDH składa się z równoległoboku AC, z tróykąta BCH, i z tróykąta ABI; tróykąt IFH składa się z równoległoboku BF, z tróykąta BGH, i z tróykąta IBE: a że tróykąt BCH = BGH, i tróykąt ABI = IBE; więc i równoległobok AC = BF.

Albo tak: tróykąt CBH = BGH; tróykąt ABI = EBI; więc
CBH + ABI = BGH + EBI. Tróykąt IDH = FHI. od stron tego równania odiąwszy strony równania poprzedzaiącego, zostanie

IDH — CBH — ABI = FHI — BGH — EBI;
czyli AC = BF.

Uwaga. Tym samym sposobem postąpić należy, chcąc dany kwadrat zamienić na prostokąt lub równoległobok równy kwadratowi co do powierzchni, i któryby podstawę miał równą linii danéy.

158. Zagad. *Maiąc dane dwa prostokąty lub iakiekolwiek równoległoboki, wykréśleć 3ci, któregoby powierzchnia równa była summie lub różnicy powierzchni dwóch równoległoboków danych.*

Rozwiąz. Dwa dane równoległoboki maią albo równe podstawy a wysokości różne; albo równe wysokości, a różne podstawy; albo i podstawy i wysokości różne.

W przypadku 1*wszym* nazwiymy ieden równoległobok R, drugi *r*, podstawę 1*go* P, wysokość W, podstawę 2*go* P, wysokość *w*.

Ponieważ powierzchnia równoległoboku, równa iest iloczynowi iego podstawy przez wysokość (148), będzie więc $R = P \times W$. $r = P \times w$. Strony dwóch tych równań, naprzód dodawszy, potém odiąwszy od siebie, będą dwa następuiące równania:

$R + r = P \times W + P \times w$; $R - r = P \times W - P \times w$. Czyli

$R + r = P(W + w)$: $R - r = P(W - w)$.

To iest, summa powierzchni obudwu równoległoboków równa iest iloczynowi podstawy iednego z nich przez summę wysokości obudwóch; różnica powierzchni obudwu równoległoboków równa iest iloczynowi podstawy iednego z nich przez różnicę wysokości obudwu.

A zatém chcąc wykréślić równoległobok równy co do powierzchni dwom danym; trzeba mu dać za podstawę linią równą podstawie iednego z nich, a za wysokość liniią równą wysokości obudwu: chcąc zaś wykréślić równoległobok, któregoby powierzchnia równa była różnicy powiérzchni dwóch danych; trzeba mu dać za podstawę linią równą podstawie iednego z danych, a za wysokość liniią równą różnicy wysokości obudwu.

W przypadku 2*gim*, kiedy wysokości dwóch danych równoległoboków są równe, a podstawy różne; nazwawszy ieden równoległobok R. drugi r, podstawę iednego P, drugiego p, a wysokości obudwu W, i odbywszy działanie iak wyżéy, będzie

$$R + r = W\,(P + p).\quad R - r = W\,(P - p).\ \text{itd.}$$

W przypadku 3, kiedy dwóch danych równoległoboków i podstawy i wysokości są różne, zamieniwszy ieden z nich na inny równy mu co do powiérzchni, któryby miał za podstawę liniią równą podstawie lub wysokości drugiego równoległoboku danego; będą dwa równoległoboki maiące równe podstawy, iak w przypadku 1, albo równe wysokości iak w przypadku 2.

Tymże sposobem postąpić należy, chcąc znaleźć prostokąt równy co do powiérzchni summie, lub różnicy dwóch danych kwadratów, lub iednego kwadratu drugiego prostokąta. Lecz aby znaleźć kwadrat równy sumie albo różnicy dwóch danych kwadratów, sposoby dotąd wyłożone nie są dostateczne: ułatwi to iedno z następuiących twierdzeń.

159. Twierd. *Kwadrat wykréślony na linii AB, fig.* 86. *która iest summą dwóch liniy AC i BC, składa się z kwadratu wykréślonego na linii AC, z kwadratu wykréślonego na linii BC, i z dwóch prostokątów, których bokami przyległemi są liniie AC i BC*; czyli AB^2, albo $(AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times BC$.

Dowod. Na linii AB wykreśliwszy kwadrat ABDE, i wziąwszy AH = AC, przez punkt H poprowadźmy HF równoległą od AB, przez punkt C poprowadźmy CI równoległą od BD. Tym sposobem kwadrat AD podzielony został na 4 części: piérwsza AG iest kwadratem wykréślonym na linii AC: gdyż wzięliśmy AH = AC; druga FI iest kwadratem wykréślonym na linii BC: ponieważ AB = AE, AC = AH; więc AB − AC = AE − AH; czyli CB = EH = IG = GF.

Nakoniec trzecia i czwarta część są dwa prostokąty HI, CF, których boki HG i CG równe są linii AC; boki zaś HE i GF równe są linii BC.

Albo tak: Liniią AC oznaczywszy głoską a, a liniią CB głoską b, będzie liniia $AB = a + b$. Więc $AB^2 = (a+b)(a+b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. To iest, kwadrat z linii AB równy iest summie kwadratów z linii AC i BC, więcéy podwóynym iloczynem z ważności linii AC, przez ważność linii BC; czyli, co na iedno wychodzi, więcéy dwoma prostokątami z linii AC i BC.

160. Twierd. *Kwadrat wykréślony na linii AB fig.* 87., *która iest różnicą dwóch li-*

niy AC, BC, składa się z kwadratu linii AC, z kwadratu linii BC, mniéy dwoma prostokątami z liniy AC i BC, czyli

AB^2 albo $(AC-BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC$.

Dowod. Na linii AC wykréśliwszy kwadrat AD, i wziąwszy AH = AB, z punktu H poprowadźmy HF równoodległą od AC, i z punktu B, poprowadźmy BI równoodległą od CD: nakoniec na linii HE wykréślimy kwadrat LE.

Łatwo iest okazać, że LE iest kwadratem z linii BC; AG iest kwadratem z linii AB; że LI iest prostokątem z linii AC i BC; CI iest prostokątem z linii AC i BC. Od całéy figury ACDKLH, czyli od kwadratu z linii AC i od kwadratu z linii BC odiąwszy dwa prostokąty LI, CI, czyli dwa prostokąty z AC i BC, zostanie AG kwadrat z linii AB.

Oznaczywszy liniie AC, BC głoskami a i b, i odbywszy działanie iak w twierdzeniu poprzedzaiącém, wypadnie $AB^2 = (a-b)(a-b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

161. Twierd. *Prostokąt z summy i różnicy dwóch liniy AB; CB fig.* 88., *równy iest różnicy kwadratów z tychże liniy*: czyli

$(AB + BC)(AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Dowod. Wykréśliwszy na liniach AB, AC kwadrawy AD, AI, przedłużmy AB do K tak, aby było BK = BC, i dopełniymy prostokąta AL: prostokąt ten ma za podstawę liniią AK równą summie dwóch danych liniy AB i BC, a za wysokość liniią AE równą różnicy tychże liniy: gdyż $AE = AF - FE = AB - BC$. A zatém prostokąt AL $=$ (AB $+$ BC) (AB $-$ BC). Ten sam prostokąt AL $=$ AH $+$ BL; a że BL $=$ FI, co iest łatwo okazać; więc AL $=$ AH $+$ FI. AH $+$ FI $=$ AD $-$ DI $=$ AB^2 $-$ BC^2: gdyż kwadrat DI $=$ CB^2. Więc AL $=$ AB^2 $-$ BC^2; czyli (AB $+$ BC) (AB $-$ BC) $=$ AB^2 $-$ BC^2. BC

Oznaczywszy liniie AB, BC głoskami *a* i *b*, i odbywszy działanie iak wyżéy, wypadnie (AB $+$ BC) (AB $-$ BC) $= (a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$.

162. Twierd. *W tróykącie prostokątnym ABC fig. 89. kwadrat AK z przeciw prostokątnéy AB równy iest summie kwadratów AH i CG z dwóch ramion kąta prostego.*

Dowod. Z wiérzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB, i przedłużywszy ią aż do przecięcia się z bokiem IK w punkcie M, poprowadźmy liniie AG, CK: kąt CBG $=$ ABK, bo obadwa proste: więc kąt CBG $+$ CBA $=$ ABK $+$ CBA; czyli kąt ABG $=$ CBK. A zatém w dwóch tróykątach ABG, CBK bok BG $=$ CB iako boki kwadratu BE, bok AB $=$ BK iako boki kwadratu AK, i kąty między temi bokami zawarte ABG, CBK równe: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a tém samem powiérzchnie ich są równe. Tróykąt ABG iest połową kwadratu BE: gdyż maią tę samę podstawę BG, i wysokość CB (74): gdy bowiem kąty BCA i BCE czynią dwa kąty proste, liniie AC i CE składaią iednę liniią prostą AE (17), która iest równoodległa od BG. Tróykąt CBK iest połową prostokąta BM, gdyż maią tę samę podstawę BK, i wysokość BD. Gdy więc połowa kwadratu BE, równa iest połowie prostokąta BM, tém samém i cały kwadrat BE równy iest całemu prostokątowi BM. Poprowadziwszy liniie od F do B, i od C do I tym samym sposobem dowiedlibyśmy, że kwadrat AH równy iest prostokątowi AM.

Lecz summa prostokątów AM i BM czyni kwadrat AK; więc kwadrat AK z przeciwptostokątnéy AB równy iest summie kwadratów AH i BE z dwóch ramion kąta prostego.

163. *Wniosek* 1. Prostokąt AM i kwadrat AK maiąc tę samę podstawę AI są do siebie iak wysokości AD, AB: podobnież prostokąt BM i kwadrat AK, maiąc tę samę podstawę KB są do siebie iak wysokości. BD i AB: to iest ADMI : ABKI = AD : AB. BDMK : ABKI = BD: AB. W tych dwóch proporcyach zamiast prostokątów ADMI, BDMK położywszy równe im kwadraty ACHF, BCEG; będzie ACHF: ABKI = AD: AB. BCEG : ABKI = BD : AB. to iest, kwadraty z ramion kąta prostego, maią się do kwadratu przeciwprostokątnéy, iak odcinki AD, BD przyległe tym ramionom, do przeciw prostokątnéy.

164. 2. ADMI, BDMK maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości AD, BD; to iest, ADMI: BDMK = AD: BD. Zamiast prostokątów położywszy równe im kwadraty, będzie ACHF: BCEG = AD: BD. To iest, kwadraty z ramion kąta prostego, maią się do siebie iak

przyległe tym ramionom odcinki przeciwprostokątnéy.

165. Zagad. *Wykréślić kwadrat równy summie dwóch kwadratów danych.*

Rozwiąz. Wykréśliwszy kąt prosty daiąc mu za iedno ramie bok iednego kwadratu, za drugie ramie bok drugiego kwadratu danego, i końce tych dwóch ramion złączywszy liniią prostą; utworzy się tróykąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego (162).

166. *Wniosek.* Gdyby dwa dane kwadraty były sobie równe, kwadrat trzeci znaleziony równy ich summie, byłby dwa razy większy od iednego z danych. A zatém chcąc mieć kwadrat dwa razy większy od danego; trzeba wykréślić kąt prosty, daiąc mu za ramiona dwie linii równe bokowi danego kwadratu; złączywszy końce tych ramion liniią prostą, utworzy się tróykąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego.

Uwaga. W danym kwadracie ABCD *fig.* 90. poprowadziwszy przekątnią AC, w tróykącie ABC prostokątnym przy B, iest $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (162), czyli $AC^2 = 2AB^2$ gdyż $BC = AB$. To iest, kwadrat przekątnéy iest dwa razy większy od kwadratu z boku AB, czyli od kwadratu danego.

Prawdę tę można okazać naocznie. Przez punkta D i B poprowadziwszy linii HG, EF równoodległe od AC, aż do przecięcia się z liniiami HE, GF przez punkta A i C poprowadzonemi równoodlegle od DB przekątnéy danego kwadratu ABCD, utworzy się nowy kwadrat EFGH, który iest kwadratem z AC przekątnéy danego kwadratu, i który zamyka 8 tróykątów równych między sobą, i takich, iakich dany kwadrat ABCD zamyka 4. Więc kwadrat EFGH iest dwa razy większy od kwadratu ABCD.

A zatém chcąc wykréślić kwadrat dwa razy większy od danego, trzeba w dánym kwadracie poprowadzić przekątną: ta będzie bokiem kwadratu szukanego.

167. *Wniosek.* Ponieważ kwadrat z przekątnéy AC iest dwa razy większy od kwadratu ABCD, czyli od kwadratu z boku AB, będzie więc $AB^2 : AC^2 = 1 : 2$. A zatém $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$. To iest, bok kwadratu tak się ma do przekątnéy tegoż kwadratu, iak 1 do piérwiastku liczby 2. A że 1, i $\sqrt{2}$ są dwie liczby niespółmierne, gdyż prawdziwego piérwiastku liczby 2 mieć nie można; więc bok i przekątna kwadratu, są dwie liniie niespółmierne.

168. Z poprzedzaiącego twierdzenia wypada, że chcąc wykréślić kwadrat trzy razy większy od danego, trzeba narysować tróykąt prostokątny, w którymby iedno ramie kąta prostego, było równe bokowi danego kwadratu, a drugie ramie równe przekątnéy tegoż kwadratu: przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego. Chąc mieć kwadrat 4 razy większy od danego, trzeba tróykątowi prosrokątnemu dać ramiona kąta prostego równe przekątnéy dane-

go kwadratu; przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego; albo też wykréślić kwadrat, któregoby bok był dwa razy większy od boku kwadratu danego. Chcąc mieć kwadrat 5 razy większy od danego, trzeba dać tróykątowi prostokątnemu iedno ramie kąta prostego równe ptzekątnéy danego kwadratu, drugie równe bokowi kwadratu 3 razy większego niż iest dany; przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego: albo też znaleźć kwadrat równy summie danego i 4 razy większego niż iest dany. Podobnież chcąc mieć kwadrat 6 razy większy od danego, trzeba znaleźć kwadrat równy summie kwadratu danego, i pięć razy większego niż iest dany; albo też trzeba znaleźć kwadrat równy summie dwóch kwadratów innych, z którychby ieden był dwa razy, drugi 4 razy większy od danego; albo nakoniec, trzeba znaleźć kwadrat 3 razy większy od danego; przekątna tego kwadratu, będzie bokiem kwadratu 6 razy większego niż iest dany.

Tym sposobem można znaleźć kwadrat tyle razy większy od danego, ile się podoba. Lecz można także i następuiącym sposobem rozwiązać to samo zagadnienie:

Daymy na to, że trzeba znaleźć kwadrat 5 razy większy od danego kwadratu *ac fig.* 91. Prowadzę liniią AB 5 razy dłuższą, od boku *ab* danego kwadratu; na téy linii iako na średnicy kréślę półkole; wziąwszy potém AD $=$ *ab*, z punktu D wyprowadzam DC prostopadłą do AB aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C;

nakoniec prowadzę cięciwę AC; cięciwa ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB, kąt ACB iest prosty (128), a zatém kwadrat z ramienia kąta prostego AC, równy iest prostokątowi z linii AB i AD (162), ten zaś prostokąt maiąc podstawę 5 razy większą od wysokości AE = AD z wykréślenia, może być podzielonym na 5 kwadratów maiących za boki liniią AD; czyli prostokąt ten może być podzielony na 5 kwadratów takich, iak iest kwadrat dany *ac*: a zatém prostokąt ten iest od kwadratu danego *ac* 5 razy większy; a tém samém i kwadrat z linii AC będzie od danego kwadratu 5 razy większy.

169. Zagad. *Wykréślić kwadrat równy różnicy dwóch kwadratów danych ABKI, CBGE fig.* 89.

Rozwiąz. Kreślę kąt prosty ACB, daiąc mu za iedno ramie bok CB kwadratu mnieyszego; z punktu B iako ze środka promieniem równym bokowi kwadratu większego, krélę łuk przecinaiący drugie ramie kąta prostego w punkcie A: liniia AC będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy liniią AB, w tróykącie ACB prostokątnym przy C iest $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Odiąwszy po obu stronach BC^2, zostanie $AB^2 - BC^2 = AC^2$. To iest, różnica między kwadratem z boku AB, którym iest kwadrat dany ABKI, i między kwadratem z boku BC, którym iest drugi kwadrat dany CBGE iest kwadrat z linii AC.

Sposób 2. Prowadzę linią AB *fig.* 91. równą bokowi kwadratu większego z dwóch danych, i na niéy iako na średnicy wykréśliwszy półkole, z punktu B prowadzę cięciwę CB równą bokowi kwadratu mnieyszego, z punku A poprowadziwszy cięciwę AC, ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż kąt ACB iest prosty (128), a zatém $AB^2 = AC^2 + BC^2$; więc $AB^2 - BC^2 = AC^2$.

170. Zagad. *Prostokąt AF fig.* 91. *zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozwiąz. Na większym boku danego prostokąta iako na średnicy, kréślę półkole, wziąwszy potém AD = AE, i z punktu D wyprowadziwszy DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C, prowadzę cięciwę CA; ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB, w tróykącie ACB prostokątnym przy C, kwadrat z ramienia kąta prostego AC równy iest prostokątowi z przeciwprostokątnéy AB, i z odcinka AD przyległego temu ramieniu (162), to iest, $AC^2 = AB \times AD$; czyli, $AC^2 = AB \times AE$; gdyż AD = AE z wykrélenia: to iest, kwadrat z linii AC równy iest prostokątowi danemu.

171. *Wniosek.* Ponieważ wielokąt iakikolwiek można zamienić na tróykąt (142), tróykąt zaś na prostokąt (156), a prostokąt na kwadrat równy mu co do powierzchni; więc każdy wielokąt zamienić można na kwadrat równy mu co do powiérzchni.

172. *Twierd.* W tróykącie ACB *fig.* 73, z końca C, boku CB przeciwnego kątowi ostremu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB rami~~e~~~~na~~ enia tegoż kąta A, będzie *kwadrat z przeciwoprokątnéy CB równy summie kwadratów z dwóch ramion kąta ostrego AC i AB, mniéy dwoma prostokątami z ramienia AB na które spuszczona iest prostopadła, i z odcinku AD przyległego temuż kątowi ostremu A, to iest, będzie* $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

Dowod. W tróykącie CDB prostokątnym przy D, iest $BC^2 = CD^2 + DB^2$ (162). W tróykącie ACD, $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (169). Liniia DB $= AB - AD$; a zatém $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$ (160). W równaniu więc piérwszém z drugiéy strony zamiast $CD^2 + DB^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następuiące:

$$BC^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD;$$

czyli $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

Albo tak, Liniia $DB = AB - AD$: więc $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$ (160). W tém równaniu dodawszy po obu stronach CD^2, będzie $DB^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 - 2AB \times AD$ - A.

W tróykącie CDB iest $DB^2 + CD^2 = CB^2$, w tróykącie CDA iest $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (162). W równaniu A z jednéy strony zamiast $DB^2 + CD^2$ położywszy CB^2, z drugiéy strony zamiast $AD^2 + CD^2$ położywszy AC^2; równanie to zamieni się wnastępuiące: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

173. *Twierd.* W tróykącie ACB *fig.* 73. Nro 2 z końca C boku BC przeciwnego kątowi

roztwartemu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB ramienia tegoż kąta, będzie *kwadrat z przeciwroztwartokątnéy BC równy summie kwadratów z ramion AC, AB powiększonéy dwoma prostokątami z AB i AD;* to iest, będzie $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD$.

Dodwo. W tróykącie CDB prostokątnym przy D, iest $CB^2 = CD^2 + BD^2$ (162). W tróykącie CDA, $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (169). Liniia $BD = AB + AD$: więc $BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD$ (159). W równaniu więc piérwszém zamiast $CD^2 + BD^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następuiące:

$$CB^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD:$$

czyli $CB^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD$. Sposób 2gi iak w twierdzeniu poprzedzaiącém.

174. *Wniosek.* Z trzech ostatnich twierdzeń wypada, że maiąc w liczbach wyrażone trzy boki tróykąta, można doyść czy kąt przeciwny któremukolwiek z boków iest prosty, czy ostry, czy roztwarty. Jeżeli kwadrat z jednego boku iest równy summie kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny piérwszemu bokowi iest prosty: ieżeli zaś kwadrat iednego boku iest mnieyszy lub większy od summy kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny bokowi piérwszemu będzie w piérwszym przypadku ostry, w drugim roztwarty.

175. Twierd. *W tróykącie ABC fig. 92. podzieliwszy podstawę AB na na dwie równe części w punkcie E, i poprowadziwszy liniią CE, będzie* $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2$.

Do-

Dowod. Z wiérzchołka kąta C spuściwszy CD prostopadłą do AB, w tróykącie CDE prostokątnym przy D, kąt CED iest ostry (87), a zatém w tróykącie ACE iest $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \times ED$ (172).

W tróykącie CBE, którego kąt CEB iest roztwarty (15), iest $BC^2 = CE^2 + BE^2 + 2BE \times ED$ (173), czyli $BC^2 = CE^2 + AE^2 + 2AE \times ED$: gdyż $BE = AE$.

Dodawszy strony równania piérwszego i ostatniego, będzie

$AC^2 + BC^2 = AE^2 + CE^2 + CE^2 + AE^2 - 2AE \times ED + 2AE \times ED$; czyli

$AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2$.

176. *Wniosek.* A zatém w każdym równoległoboku ABCD *fig.* 41. summa kwadratów ze cztérech boków, równa iest summie kwadratów z dwóch przekątnych AC, BD: gdyż przekątne te w punkcie F dzielą się na dwie części równe: tróykąty bowiem DFC, AFB, w których bok $DC = AB$ (79), kąt $DCF = BAF$, i kąt $CDF = ABF$, iako naprzemianległe wewnętrzne, przystaną do siebie (26), a w szczególności $DF = BF$, i $AF = CF$. Więc w tróykącie ABC, podług twierdzenia poprzedzaiącego, iest $AB^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2BF^2$. Podobnież w tróykącie ADC, iest $DC^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2DF^2$, czyli $DC^2 + \underline{AD} = 2AF^2 + 2BF^2$; gdyż $DF = BF$ z dowodzenia. AD^2

Dodawszy strony równania piérwszego i ostatniego, będzie

$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AF^2 + 4BF^2$, — A.

Lecz $AC = 2AF$; więc $AC^2 = 4AF^2$; $BD = 2BF$; więc $BD^2 = 4BF^2$. W równaniu A zamiast $4AF^2 + 4BF^2$, położywszy $AC^2 + BD^2$, będzie $AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, to iest, summa kwadratów ze cztérech boków równoległoboku, równa iest summie kwadratów z dwóch iego przekątnych.

ROZDZIAŁ VII.

O podobieństwie wielokątów, a naprzód tróykątów, i o proporcyonalności ich boków.

177. *Twierd.* W tróykącie iakimkolwiek ACB *fig.* 93. poprowadziwszy liniią DE równoodlegle od podstawy AB; *liniia ta podzieli boki AC, BC na części proporcyonalne: to iest będzie* $CD : AD = CE : EB$.

Dowod. Poprowadziwszy liniie proste AE, BD, dwa tróykąty ADE, BDE stoiące na iednéy podstawie DE, i maiące wiérzchołki swoie A i B na linii AB równoległéy od podstawy, maią iednakową podstawę i wysokość: a tém samém są sobie równe co do powiérzchni (140).

Dwa tróykąty CDE, DAE, maiące podstawy na linii CA, a spólny wiérzchołek w punkcie E, maią równą wysokość, a zatém są do siebie iak podstawy (151): to iest,

$CDE : DAE = CD : AD$; — ; — , — A.

Podobnież tróykąty CDE i BDE maiące podstawy na linii BC, a spólny wiérzchołek w punkcie D, maią równą wysokość, a zatém są dło siebie iak podstawy : to iest, CDE : BDE = CE : EB; czyli CDE : DAE = CE : EB : . . — B. gdyż tróykąt BDE = DAE co do powierzchni, iakośmy dowiedli wyżéy. Porównawszy z sobą dwie proporcye A i B, postrzeżemy że dwa piérwsze wyrazy CDE, DEA, w obudwu proporcyach są te same : więc tak się ma piérwszy poprzednik do swego następnika w piérwszéy proporcyi, iak piérwszy poprzednik do swego następnika w drugiéy : a zatém będzie też i drugi podrzednik do swego następnika w piérwszéy, iak drugi poprzednik do swego następnika w drugiéy proporcyi : to iest, będzie CD : AD = CE : EB.

178. *Wniosek* 1. Ponieważ iest CD : AD = CE : EB; więc też będzie

1ód CD + AD : CD = CE + EB : CE; czyli, AC : CD = BC : CE;

2re CD + AD : AD = CE + EB : EB; czyli, AC : AD = BC : EB.

179. 2. Kiedy dwie liniie proste AB, CD, *fig.* 94. iakiekolwiek położenie względem siebie maiące, przecięte są od iakieykolwiek liczby liniy między sobą równoległych AC, EF, GH itd. części dwóch piérwszych liniy zawarte między równoległemi są sobie proporcyonalne, to iest, będzie AE : CF = EG : FH = BG : DH.

Jakoż przedłużywszy liniie AB, CD aż do przecięcia się w punkcie S, w tróykącie SEF, którego boki SE, SF przecina liniia AC równolegle od podstawy EF, iest SE : AE = SF : CF (178); czyli SE : SF = AE : CF : — : — : A.

Podobnież w tróykącie SGH, którego bołki SG, SH przecina liniia EF równolegle od podstawy GH, iest SE: SF = EG: FH : — : — B.

Porównawszy z sobą proporcye A i B, będzie AE: CF = EG: FH.

Podobnymże sposobem dowieśdź można, że EG: FH = BG: DH.

180. *Twierd.* Gdy w tróykącie ABC *fig.* 95. liniia DE dzieli dwa którekolwiek boki *np.* AC, BC na części proporcyonalne; *liniia ta DE będzie od trzeciego boku AB równoodległa.*

Dowod. Jakoż gdyby liniia DE niebyła równoległa od AB, natenczas z punktu D możnaby było wyprowadzić inną iaką liniią *np.* DF od boku AB równoległą. A zatém w tróykącie ACB, którego dwa boki AC, BC przecina liniia DF równoległa od boku trzeciego AB, byłaby następuiąca proporcya: AC: CD = BC: CF; a że podług założenia AC: CD = BC: CE; więc gdy 3 wyrazy piérwszéy proporcyi równe są trzem odpowiadaiącym wyrazom drugiéy proporcyi, czwarty wyraz w piérwszéy powinien być równy czwartemu wyrazowi drugiéy proporcyi; czyli powinno być CF = CE. To iest, liniia z punktu D wyprowadzona równoodlegle od boku AB powinna bok CB przecinać w takiéy odległości od wiérzchołka C, w iakiéy odległości przecina go liniia z tegoż punktu D wyprowadzona, i dzieląca dwa boki AC, BC proporcyonalnie: czyli, co na iedno wychodzi, punkta F i E powinny się znaydować na boku BC w iednéyże odległości od punktu C; a zatém dwa te punkta F i E powinny być iednymże punktem; a tém samém liniie DE, DF, z których 1*sza* dzieli boki AC, BC proporcyonalnie, 2*ga* iest równoległa od boku AB, składaią iednę liniią, bo przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może.

181. *Twierd.* W tróykącie iakimkolwiek ACB *fig.* 96. podzieliwszy ieden z kątów *np.* kąt C na dwie równe części liniią CD; *liniia ta podzieli bok AB na dwa odcinki AD i DB proporcyonalne bokom przyległym; to iest, będzie AC: BC = AD: BD.*

Dowod. Wyprowadziwszy z punktu A liniią AF równoodległą od CD, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużonym bokiem BC; w tróykącie ABF, w którym liniia CD iest równoległa od AF: iest CF: BC = AD: BD (177).

Nadto kąt CAF = ACD iako wewnętrzne naprzemianległe względem sieczněy AC i równoległych AF, CD; kąt ACD = DCB podług założenia; kąt DCB = AFC iako iednostronne odpowiadaiące względem sieczněy FB i równoległych AF, DC; a zatém kąt CAF = AFC. Więc tróykąt ACF iest równoramienny (32); i bok CF = AC. W powyższéy więc proporcyi położywszy AC zamiast FC, będzie AC: BC = AD: BD.

182. Zagad. 1. *Przez punkt D wzięty od upodobania między ramionami kąta C, fig. 97. poprowadzić liniią AB tak, aby części iéy AD, BD, będące między ramionami kąta C i punktem D były równe.*

Rozwiąz. Przez punkt D poprowadziwszy DF równoodległą od BC, wziąć FA = CF, i przez punkta A, D poprowadzić liniią ADB: liniia ta iest szukana: gdyż w tróykącie ABC, AF: CF = AD: DB (177), a że AF = CF z wykréślenia, więc i AD = DB.

183. Zagad. 2. *Maiąc dane 3 liniie AC, BC, DC fig. 98. znaleźć czwartą proporcyonalną.*

Rozw. Wykréśliwszy kąt iakikolwiek C, na iednym iego ramieniu biorę CA równą 1széy linii danéy, i CB równą 2giéy linii danéy, a na drugim ramieniu biorę CD równą 3ciéy linii danéy: złączywszy potém punkta A i D liniią prostą AD, i z punktu B poprowadziwszy BE równoodległą od AD, aż do przecięcia się z bokiem CD w punkcie E, liniia CE iest szukana: gdyż w tróykącie ACD iest AC: BC = DC: CE (178).

184. *Uwaga.* Gdyby druga liniia dana CB była dłuższa od piérwszéy AB, znaleźlibyśmy 4tą proporcyonalną tymże samym sposobem, z tą tylko odmianą, że liniia CB równa 2giéy linii danéy wypadłaby na przedłużeniu boku AC; a liniia CE na przedłużeniu boku CD.

Gdyby 2*ga* i 3*cia* liniia dana były sobie równe, na ten czas liniia szukana byłaby 3*cią* ciągłą ieometrycznie proporcyonalną. Wykréślenie iest to samo; Kréśli się naprzód iakikolwiek kąt C, potém wziąwszy CA równe piérwszéy linii danéy, a CB i C*b* równe między sobą i równe drugiéy linii danéy, punkta A i *b* łączą się liniią prostą A*b*; a z punktu B prowadzi się B*e* równoodległa od A*b*: liniia C*e* iest szukana, gdyż w tróykącie AC*b* iest AC: CB =

Cb : Ce ; czyli AC : CB = CB : Ce : albowiem Cb = CB.

185. Wiedząc sposób, którym się znayduie 4*ta* liniia ieometrycznie proporcyonalna, można dwa zagadnienia wyżéy podane (157, 158) rozwiązać innym sposobem.

Zagad. *Dany prostokąt AC lub równoległobok iakikolwiek fig.* 85. *zamienić na prostokąt lub równoległobok inny równy danemu co do powiérzchni, któryby miał za podstawę liniią daną BG.*

Rozw. Do danéy linii BG, do podstawy AB i wysokości BC danego prostokąta, szukam 4téy ieometrycznie proporcyonalnéy BE, ta będzie wysokością szukanego prostokąta : gdyż podług wykréślenia iest BG : AB = BC : BE. więc BG × BE = AB × BC. to iest, powiérzchnia prostokąta znalezionego, równa powiérzchni prostokąta danego.

186. Zagad. * *Maiąc dane dwa prostokąty lub równoległoboki, których podstawy i wysokości są różne, wykréślić trzeci któregoby powiérzchnia równa była summie lub różnicy powiérzchni dwóch równoległoboków danych.*

Rozw. Nazwawszy powiérzchnią iednego równoległoboku R, iego podstawę P, wysokość W; powiérzchnią drugiego r, podstawę p, wysokość w, będzie R = P × W ; $r = p \times w$. A zatém R + r = P × W + $p \times w$; R − r = P × W − $p \times w$: — : — : — : — , — : — ; — A.

Do obudwu podstaw P i p, tudzież do wysokości w, znaydźmy 4tą ieometrycznie proporcyonalną (183), którą nazwiymy M, będzie $P : p = w : M$. więc $P \times M = p \times w$.

W równaniach A, zamiast $p \times w$, położywszy $P \times M$, równania te zamienią się w następuiące: $R + r = P \times W + P \times M = P\,(W + M)$; $R - r = P \times W - P \times M = P\,(W - M)$: to iest, summa lub różnica powiérzchni dwóch równoległoboków danych, równa iest 3*mu* maiącemu podstawę równą podstawie iednego z dwóch danych, a wysokość równą summie lub różnicy wysokości tegoż równoległoboku danego, i 4*téy* ieometrycznie proporcyonalnéy do obudwu podstaw i wysokości 2*go* równoległoboku danego.

187. Zagad. *Maiąc dane dwa prostokąty AC i EG fig.* 81. *wyrazić ich stosunek w liniiach:* to iest, znaleźć dwie liniie proste, któreby się tak miały do siebie, iak się maią dwa dane prostokąty.

Rozw. Do wysokości BC iednego, do podstawy EF i wysokości FG drugiego prostokąta danego, szukam czwartéy ieometrycznie proporcyonalnéy, którą nazwiymy M. Prostokąt AC
EG tak się będzie miał do prostokąta ~~EK~~, iak podstawa AB do linii znalezionéy M: gdyż $ABCD : EFGH = AB \times BC : EF \times FG$ (145), że zaś podług wykréślenia $BC : EF = FG : M$; więc $BC \times M = EF \times FG$. W piérwszéy proporcyi zamiast $EF \times FG$ położywszy $BC \times M$; proporcya ta zamieni się w następuiącą: $ABCD : EFGH = AB$

$\times BC : BC \times M$. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez BC, będzie $ABCD : EFGH = AB : M$.

188. Tym samym sposobem postępuiąc można znaleźć dwie liniie któreby się tak miały do siebie, iak dwa dane kwadraty. Możnaby też zagadnienie to rozwiązać sposobem następuiącym:

Niech będą AC, AF, *fig.* 99., boki danych kwadratów, których stosunek wyrazić mamy w liniiach. Prowadzę liniią AB, iakieykolwiek długości, byleby większą od AF boku kwadratu większego z dwóch danych; na linii AB iako na średnicy wykréśliwszy półkole, z końca A średnicy AB prowadzę dwie cięciwy AC, AF piérwszą równą bokowi danemu AC, drugą równą bokowi danemu AF; z punktu C i F spuszczam CD, FG prostopadłe do AB: odcinki AD, AG są liniiami szukanemi; to iest, dwa dane kwadraty będą się miały do siebie iak liniie AD, AG. Jakoż poprowadziwszy cięciwy CB, FB, kąty ACB, AFB są proste (128). A że $AC^2 = AB \times AD$, $AF^2 = AB \times AG$ (162); więc $AC^2 : AF^2 = AB \times AD : AB \times AG$; czyli $AC^2 : AF^2 = AD : AG$.

Albo tak. Kréślę kąt prosty daiąc mu ramiona równe bokom dwóch kwadratów danych: poprowadziwszy potém przeciwprostokątną, i z wiérzchołka kąta prostego spuściwszy do niéy prostopadłą, przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, które są liniiami szukanemi (164).

189. Jeżeli dwa tróykąty ABC, *abc fig.* 100. są *równokątne*, to iest takie, że kąt A = *a*, B = *b*, C = *c*; i ieżeli boki ich *odpowiadaiące*, czyli przyległe kątom równym są między sobą proporcyonalne; to iest, gdy iest AB : *ab* = BC : *bc* = AC : *ac*; takie dwa tróykąty nazywać będziemy *podobnémi*, *Triangula similia*.

W ogólności wszystkie wielokąty równokątne, i których boki odpowiadaiące, to iest, przyległe kątom równym, są między sobą proporcyonalne, zwać będziemy *podobnémi*. I tak dwa *np.* pięciokąty ABCDE, *abcde fig.* 108. są podobne, ieżeli kąt A = *a*, B = *b*, C = ç, D = d, E = *e*; i ieżeli iest AB : *ab* = BC : *bc* = CD : *cd* = DE : *de* = AE : *ae*.

190. Twierd. *Jeżeli dwa tróykąty ABC*, abc *fig.* 100., *są równokątne, będą też boki ich odpowiadaiące proporcyonalne, a tém samém tróykąty te będą podobne.*

Dowod. Na boku AC wziąwszy CD = *ac*, na boku CB wziąwszy CE = *cb* i poprowadziwszy DE; w dwóch tróykątach CDE, *cab*, bok CD = *ac*, bok CE = *cb* zwykréślenia, i kąty między temi bokami zawarte C i *c* równe zzałożenia; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie podług Twierd. 1., o przystawaniu tróykątów; a w szczególności bok DE = *ab*, i kąt CDE = *cab*; że zaś kąt *cab* = CAB podług założenia, więc i kąt CDE = CAB, a tém samém liniia DE iest równoległa od AB (67). Będzie więc AC : DC = BC : CE (178), czyli AC : *ab* = BC : *bc*: gdyż *ac* = DC, *bc* = CE.

W tróykącie ABC z punktu E poprowadziwszy EF równoległą od AC, będzie BC : CE = AB : AF czyli BC : bc = AB : ab : gdyż bc = CE, AF = DE = ab.

Tę ostatnią proporcyą złączywszy z powyższą AC : ac = BC : bc, będzie AC : ac = BC : bc = AB : ab.

191. *Wnioski* 1. Stąd wypada, że dwa tróykąty są równokątne, a tém samém podobne, gdy dwa kąty iednego równe są dwom kątom drugiego tróykąta: gdyż i trzeci kąt piérwszego musi być równy 3*mu* kątowi drugiego tróykąta (84).

192. 2. Dwa tróykąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki iednego są równoodległe względem boków drugiego tróykąta: bo ieżeli boki CA, CB *fig.* 100. są równoodległe względem boków ca, cb, a boki CB, AB są równoodległe względem boków cb, ab; będzie kąt C = c, kąt B = b, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi, i rozchodzącemi się w ;ednęż stronę (70), a zatém dwa te tróykąty są podobne podług poprzedzaiącego wniosku.

Jeżeli zaś w dwóch tróykątach ABC, abc, *fig.* 101. boki AB i ab, BC i bc, AC i ac, względem siebie równoodległe, rozchodzą się w strony przeciwne; przedłużywszy bok CB aż do przecięcia się z bokami ab, ac w punktach d, f, w dwóch tróykątach ABC, adf, kąt CBA = fda iako naprzemian ległe zewnętrzne względem sieczney Cf, i dwóch równoodległych AB, ab;

kąt ACB $=$ *afd*, iako naprzemianległe wewnętrzne względem sieczněy Cf, i dwoch równoodległych AC, *ac*; więc dwa te tróykąty ABC, *adf* są równokątne (191). A że tróykąty *adf*, *abc* są równokątne, gdyż maią kąt *a* spólny, kąt *adf* $=$ *abc* iako iednostronne odpowiadaiące względem sieczněy *ab* i dwóch równoległych Cf, *bc*; więc i tróykąty ABC, *abc* są równokątne.

193. 3. Nakoniec dwa tróykąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki iednego są prostopadłe względem boków drugiego tróykąta. Jakož gdy w dwóch tróykątach CAB, *cab fig.* 102, boki AB i *ab*, AC i *ac*, BC i *bc* są względem siebie prostopadłe; z wiérzchołka kąta C wyprowadziwszy iednę liniią CD prostopadłą do CB a tém samém równoległą od *cb* (58); drugą CF prostopadłą do AC a tém samém równoodległą od *ac*, będzie kąt DCB $=$ ACF iako proste z wykréślenia. Dodawszy po obu stronach kąt BCF, będzie DCB $+$ BCF $=$ ACF $+$ BCF: czyli DCF $=$ ACB. A że kąt DCF $=$ *bca*, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykréślenia, i rozchodzącemi się w iednęż stronę, więc i kąt ACB $=$ *bca*.

Podobnież z punktu A wyprowadziwszy iednę liniią AG prostopadłą do AB, a tém samém równoodległą od *ab*, drugą AH prostopadłą do AC, a tém samém równoodległą od *ac*, będzie kąt CAH $=$ BAG iako proste z wykréślenia. Odiąwszy po obu stronach kąt CAG, zostanie CAH $-$ CAG $=$ BAG $-$ CAG; czyli GAH $=$ BAC. A że kąt GAH$=$*bac*, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykréślenia, i rozchodzącemi się w jednęż stronę: więc i kąt BAC$=$*bac*. Dwa więc tróykąty BAC, *bac* są podług wniosku 1. równokątne, a tém samém podobne.

Gdyby tróykąt *abc* znaydował się wewnątrz tróykąta ABC, iak iest *fig.* pod liczbą 2, dowodzenie byłoby iescze łatwieysze: gdyż w czworokącie A *daf* summa wszystkich kątów waży 4 kąty proste (95): a że dwa kąty przy *d* i *f* ważą dwa kąty proste z założenia, więc kąt *daf* z kątem A, waży dwa kąty proste. Tenże sam kąt *daf* z kątem przyległym *cab*, waży także dwa kąty proste: więc kąt A$=$*cab*. Tym sposobem okazać można, że kąt B$=$*cba*; a zatém dwa tróykąty ACB, *acb* są równokątne, a tém samém podobne: będzie więc AB:*ab*$=$BC:*bc*$=$AC:*ac*.

194. *Uwaga.* Uważać tu należy 1*ód*, że kiedy dwa tróykąty ABC, *abc fig.* 100, są równokątne, boki ich te są odpowiadaiące a tém samém proporcyonalne, które są przeciwne kątom równym; i tak *np.* boki BC i *bc* przeciwne kątom równym A i *a*, są bokami odpowiadaiącemi: 2*re*, że kiedy dwa tróykąty ABC, *abc fig.* 101. maią boki względem siebie równoodległe, te boki są odpowiadaiące, a tém samém proporcyonalne, które są od siebie równoodległe; 3*cie*, Ze kiedy dwa tróykąty ABC, *abc*, *fig.* 102. maią boki względem siebie prostopadłe; te boki są proporcyonalne, które są względem siebie prostopadłe.

195. Twierd. *Jeżeli we dwóch tróykątach trzy boki w jednym są proporcyonalne, względem trzech boków w drugim tróykącie, takie dwa tróykąty są równokątne a tém samém podobne.*

Dowod. Niech będą dwa tróykąty ACB, *acb fig.* 103. których boki są między sobą proporcyonalne: na okazanie że tróykąty te są równokątne a tém samém podobne, na boku AC wziąwszy CD$=$*ac*, i poprowadziwszy DE równoodległą od AB; dwa tróykąty ACB, DCE są podobne (190), będzie więc AC: CD$=$CB: CE$=$AB: DE. Lecz z założenia iest AC: *ac*$=$CB: *cb*$=$AB: *ab*.

W tych dwóch ciągach stosunek piérwszy ciągu 1go równy iest stosunkowi piérwszemu ciągu 2go: gdyż CD$=$*ac* z wykréślenia; a zatém wszystkie stosunki obudwu ciągów muszą być między sobą równe. A że poprzedniki ciągu 1go równe są poprzednikom ciągu 2go, więc i następniki w ciągu 1wszym muszą być równe następnikom w ciągu 2gim; to iest CE$=$*cb*, DE$=$*ab*. Dwa więc tróykąty CDE, *acb* przystaną do siebie (28), a tém samém są równokątne: a że tróykąty CDE, ACB są równokątne, więc i tróykąty *acb* i ACB są równokątne, a tém samém podobne (190).

196. Twierd. *Dwa tróykąty są podobne, gdy dwa boki iednego są proporcyonalne względem dwóch boków drugiego tróykąta, i gdy kąty między tęmi bokami zawarte, są sobie równe.*

Dowod. Niech będą dwa tróykąty ACB, *acb fig*. 103. w których kąt C$=c$, i AC: $ac=$ BC: bc. Na boku AC wziąwszy CD$=ac$, na boku CB wziąwszy CE$=cb$, i poprowadziwszy DE, dwa tróykąty CDE, *cab* przystaną do siebie podług Twierd. 1 o przystawaniu tróykątów, a tém samém są równokątne. Ponieważ zaś podług założenia iest AC: *ac*: BC: *bc*; będzie więc AC: CD$=$BC: CE; gdyż CD$=ac$, CE$=bc$.

Więc liniia DE iest równoległa od AB (180), a tém samém tróykąty ABC, DEC są równo kątne: że zaś tróykąt DCE iest równokątny z tróykątem *acb*, więc i troykąty ACB, *acb* są równokątne, a tém samém podobne (190).

197. Zagad. *Na danéy linii AB fig.* 103. *wystawić tróykąt podobny danemu* acb.

Rozw. Sposób 1. Przy punktach A i B, kreślę kąt A$=a$ i kąt B$=b$, ramiona tych kątów przedłużam aż do przecięcia się w punkcie C: tróykąt ACB iest szukany (191).

Sposób 2. Przedłużam bok *ab* do *d*, tak aby była liniia *ad*$=$AB; przez punkt *d* prowadzę równoodległą od *bc* aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem *ac* w punkcie *f*: tróykąt *adf* iest szukany (196).

Sposób 3. Do *ab*, AB i *ac* szukam linii 4*téy* ieometrycznie proporcyonalnéy (183). Przy punkcie A na danéy linii AB, kreślę kąt A$=a$, daiąc mu za drugie ramie znalezioną 4*tą* ieometrycznie proporcyonalną: końce tych dwóch ramion łączę liniią prostą i będzie tróykąt podobny danemu (196).

Sposób 4ty. Szukam *4téy* ieometryczznie proporcyonalnéy; *1ód*, do *ab*, AB i *ac*; *2re*, do *ab* AB i *bc* i na linii AB kréślę tróykąt ABC daiąc mu za boki AB i BC dwie *4te* proporcyonalne znalezione, będzie tróykąt ABC podolbny danemu (195).

198. *Twierd.* Z punktu A *fig.* 104. poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę liniy AB, AC, AD i t. d. któreby się przecinały z dwiema równoodległemi GL i BF; *liniie te AB, AC i t.d. podzielone będą w punktach przecięcia się z równoodległemi na części proporcyonalne, i liniie równoodległe będą także podzielone na części proporcyonalne.*

Dowod. Dwa tróykąty ACB, AHG, maiące kąt przy A spólny i kąt ABC=AGH (67), są podobne (191). Dla téyże przyczyny dwa tróykąty ACD, AIH są także podobne. Toż mówić o tróykątach AED, AKI, tudzież o tróykątach AFE, ALK. Boki zatém tych tróykątów są między sobą proporcyonalne: będzie więc

AB: AG = AC: AH = BC: GH.
AC: AH = AD: AI = CD: HI.
AD: AI = AE: AK = DE: IK.
AE: AK = AF: AL = EF: KL.

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w każdym ciągu stosunek drugi iest ten sam, co w następuiącym ciągu stosunek piérwszy. Wziąwszy naprzód te tylko stosunki, których wyrazami są liniie z punktu A poprowadzone, będzie
AB: AG = AC: AH = AD: AI = AE: AK = AF: AL; więc

AB—

AB—AG: AG=AC—AH: AH=AD—AI: AI i t. d.; czyli

BG: AG=CH: AH=DI: AI=EK: AK= FL: AL; to iest, liniie AB, AC, AD i t. d. podzielone są na części proporcyonalne.

Wziąwszy potém w 4 powyższych ciągach te tylko stosunki, których wyrazami są części dwóch liniy równoodległych GL, BF, będzie

BC: GH=CD: HI=DE: IK=EF: KL; to iest, liniie równoodległe GL, BF podzielone są na części proporcyonalne.

199. Zagad. *Daną linią MN podzielić na części proporcyonalne częściom linii BF.*

Rozw. Na linii BF kréślę tróykąt równoboczny BAF; wziąwszy potém AG=MN, i AL =MN, i poprowadziwszy liniią GL, punkt A z punktami podziałów linii BF łączę liniiami prostemi AC, AD, AE, które liniią GL przecinaią w punktach H, I, K na części proporcyonalne częściom linii BF: gdyż AB=AF, i AG=AL z wykréślenia: będzie więc AB: AG=AF: AL. Więc liniia GL iest równoodległa od BF (180), a tém samém dwa tróykąty AGL, ABF są podobne: będzie więc AB: AG=BF: GL. W téy proporcyi poprzednik drugi BF, równy iest poprzednikowi piérwszemu AB z wykréślenia; więc i następnik drugi, równy być musi następnikowi piérwszemu; to iest, GL=AG=MN. A zatém podług twierdzenia poprzedzaiącego części linii GL czyli MN, są proporcyonalne częściom linii BF.

Gdyby dana liniia do dzielenia była wwiększa od linii BF, iak iest *np.* liniia *mn*, na ten czas wykréśliwszy na linii BF tróykąt równobboczny BAF, i boki AB, AF przedłużywszy do *g* i *l*, tak aby A*g* = *mn*, A*l* = *mn*, poprowadźmy liniią *gl* przecinaiącą się w punktach *h*, *i*, *k* z przedłużonemi liniiami AC, AD, AE. Tym sposobem liniia *gl* czyli *mn* podzielona będzie na części proporcyonalne częściom linii BF.

Sposób 2. Niech będzie liniia AF *fig.* 1005. do podzielenia na 5 części proporcyonalnych częściom linii danéy: z punktu A wyprowadziwszy liniią AL nieograniczonéy długości, pod iakimkolwiek nachyleniem do linii AF, i części drugiéy linii danéy, przeniosłszy na liniią AL, 1wszą część od A do G, 2gą od G do H, 3cią od H do I, 4tą od I do K, 5tą od K do L; punkt L i F złączyć liniią prostą LF, i przez punkta podziałów linii AL poprowadzić liniie KE, ID i t. d. równoodległe od LF, aż do przecięcia się z liniią AF w punktach E, D, C, B; liniia AF w tych punktach podzielona będzie na części szukane: gdyż w 4 tróykątach ACH, ADI, AEK, AFL, których dwa boki przecięte są przez liniie BG, CH i t. d. równoodległe od boku 3go, iest (178)

AB: AG = AC: AH = BC: GH.
AC: AH = AD: AI = CD: HI.
AD: AI = AE: AK = DE: IK.
AE: AK = AF: AL = EF: KL.

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż drugi stosunek w jednym ciągu, iest tenże sam co stosunek piérwszy w ciągu następuiącym. Biorąc te tylko stosunki, których wyrazami są znalezione części linii AF i dane części linii AL, będzie

AB : AG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EF : KL; to iest, części AB, BC, i t. d. linii AF, są proporcyonalne częściom AG, GH i t. d. linii AL.

Aby się ustrzedz uchybienia w prowadzeniu liniy KE, ID i t. d. równoodległych od LF, można z końca F linii AF poprowadzić liniią FM tak, aby kąt AFM = LAF; wziąwszy potém na linii FM część FQ = LK, QP = KI, PO = IH, ON = HG, NM = GA; punkta A i M, G i N, H i O i t. d. połączyć liniiami prostemi AM, GN, HO i t. d., które liniią daną podzielą w punktach B, C i t. d. na części szukane.

200. *Wniosek* Gdyby części linii GL, *fig.* 104. były między sobą równe, części linii BF byłyby także między sobą równe. A stąd wypada sposób łatwy podzielenia linii danéy na iakąkolwiek liczbę części równych.

16*d*. Poprowadziwszy liniią BF *fig.* 104. nieograniczonéy długości, i oznaczywszy na niéy tyle części równych iakiéykolwiek długości, na ile ma być podzielona liniia dana GL, lub *gl*; wykréślić na linii BF tróykąt równoboczny BAF, i wziąwszy na bokach AB, AF, lub na ich przedłużeniu liniie AG, AL, lub A*g*, A*l* równe linii danéy do podzielenia, przez punkt A i przez punkta podziału linii BF, poprowadzić liniie

9*

proste, które przetną liniią daną GL, lub *gll* na części szukane.

2re. Z punku A linii AF, *fig.* 105. danéy do podzielenia na części równe, poprowadziwszy liniią AL nieograniczonéy długości, pod iakimkolwiek do linii AF nachyleniem; i zaczynaiąc od punktu A, oznaczywszy na linii AL tyle części równych iakiéykolwiek długości, na ile ma być liniia AF podzielona; poprowadzić liniie BG, CH i t. d. równoodległe od linii LF: liniia AF będzie w punktach B, C i t. d. podzielona na części szukane.

Są także inne sposoby podzielenia linii prostéy na części równe. Niechby *np.* trzeba było podzielić na 20 równych części liniią *mn fig.* 104, która do takowego dzielenia iest dla swéy małości niewygodna, lecz którą wygodnie podzielić można na części równych 4 i 5. Daymy na to, że *ma* iest 4tą, a *mb* iest 5tą częścią linii *mn*; liniia *ab* będąca różnicą między 4tą i 5tą częścią linii danéy, będzie iéy częścią 20stą: gdyż $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Znalazłszy 20stą część linii *mn*, łatwo będzie podzielić ią na części szukane.

Sposób następuiący dzielenia linii prostéy na części równe, może być także wygodnie użyty. Niechby *np.* liniią AM, *fig.* 105 potrzeba było podzielić na części równych 5. Z końców linii danéy wyprowadziwszy dwie liniie MF, AL od siebie równoodległe nieograniczonéy długości, na iednéy z nich MF wziąć 5 części równych iakiéykolwiek długości MN, NO, i t. d. przeniosłszy potém te same części na liniią AL, zaczynaiąc od A ku L, i połączywszy punkta podziałów liniiami prostemi GN, HO, i t.d. w równoodległoboku LM poprowadzić przekątną AF, która liniie GN, HO i t.d. równe linii danéy AM, podzieli na części szukane: gdy w tróykącie AFM, którego dwa boki AF i MF dzieli liniia EQ równoodległe od boku trzeciego AM, iest MF : QF = AM : EQ.

A że liniia QF iest 5tą częścią linii MF podług wykréślenia, więc i EQ będzie 5tą częścią linii AM. Tymże sposobem okazać można, że DP = $\frac{2}{5}$ częściom linii AM i t.d.

201. Znaiąc sposób dzielenia linii prostéy na części równe, łatwo będzie wykréślić *podziałkę*, *scala*, która służy do mierzenia liniy prostych. Naywygodnieysza iest podziałka dziesiętna, którą się kréśli sposobem następuiącym: podzieliwszy liniią AB *fig.* 106, na 10 części równych, i z punktów A i B poprowadziwszy AD, BC prostopadłe do AB nie ograniczonéy długości, na iednéy z nich *np.* na linii AD wziąć 10 części równych iakiéykolwiek długości, i te same części przenieść na liniią BC, poczynaiąc od B do C. Poprowadziwszy potém przez punkta podziałów liniie proste, iak wyraża figura, łatwo iest okazać, że *np.* część linii oznaczonéy liczbą 1. równoodległéy od AB, zawarta między liniiami BC i B*a* iest 10tą częścią linii C*a* = A*b*. A że A*b* iest 10tą częścią linii AB z wykréślenia, więc 10ta część linii A*b*, będzie setną częścią linii AB. Podobnież części liniy oznaczonych liczbami, 2, 3, 4 i t.d. równoodległych od AB, za-

warte między liniiami BC i B*a* są $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$ i t.d. Linii AB. Sznur mierniczy ma iak wiadomo, prętów 10, a pręt prącików 10. Gdyby więc liniia AB wyrażała sznur 1, liniia A*b* lub C*a* wyrażałaby 1 pręt, a liniie zawarte między liniiami BC i B*a* wyrażałyby 1, 2, 3, 4 i t. d. pręciki. Liniia *np. cd* wynosi 5 prętów i 3 pręciki; liniia *ef* wynosi 7 prętów i 6 pręcików. Przedłużywszy liniią AB do E tak aby BE = AB i dokończywszy figury; liniia *cg* wynosi sznur 1, prętów 5, pręcików 3; liniia *eh* wynosi sznur 1, prętów 7 i 6 pręcików i t.d.

202. *Twierd.* W tróykącie prostokątnym ACB *fig.* 107, z wierzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB;

1ód. *Prostopadła ta podzieli tróykąt dany na dwa inne podobne danemu, a tém samém podobne między sobą;* 2re *Przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, między któremi prostopadła ta iest średnią ieometrycznie proporcyonalną;* 3cie *ramiona kąta prostego w tróykącie danym, będą średniemi ieometrycznie proporcyonalnemi między przeciwprostokątną i odcinkami przyległemi.*

Dowod. 1*ód* Dwa tróykąty ACD, ACB maią kąt A spólny, kąt prosty ADC piérwszego, równy kątowi prostemu ACB drugiego tróykąta: więc i trzeci kąt ACD który oznaczamy głoską *m*, w piérwszym, równy iest trzeciemu kątowi, B oznaczonemu głoską *m* w drugim tróykącie. Więc dwa te tróykąty są podobne (190). Podobnież dwa tróykąty CBD, ACB maią kąt B spólny, kąt CDB pierwszego równy kątowi ACB 2go tróykąta; więc i trzeci kąt DCB czyli *o* w pierwszym równy iest 3*mu* kątowi BAC czyli *o* w drugim tróykącie, więc dwa te tróykąty są podobne.

2*re*: Aby okazać, że prostopadła CD iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między AD, i BD, uważmy dwa podobne tróykąty ACD i BCD, których bokami są liniie AD, DC i DB tę proporcyą składaiące. Ponieważ w tróykątach podobnych boki odpowiadaiące, to iest, przyległe albo też przeciwne kątom równym są proporcyonalne (194), będzie więc bok AD przeciwny kątowi *m* w 1*szym* tróykącie ACD, do boku CD przeciwnego kątowi *m* w 2*gim* tróykącie DCB, iak bok CD przeciwny kątowi *o* w 1*szym*, do boku DB przeciwnego kątowi *o* w 2gim tróykącie; czyli AD: DC = DC: DB.

3*cie*. Aby okazać, że AC iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między AD i AB; uważmy dwa podobne tróykąty ACB i ACD, których bokami są liniie AB, AC i AD proporcyą tę składaiące: będzie więc iak wyżéy, bok AB przeciwny kątowi prostemu w 1szym tróykącie ACB, do boku AC przeciwnego kątowi prostemu w 2gim tróykącie ACD, iak bok AC przeciwny kątowi *m* w 1*wszym*, do boku AD przeciwnego kątowi *m* w 2*gim* tróykącie; czyli AB: AC = AC: AD.

Podobnież na okazanie że iest AB: BC = BC: BD: uważmy dwa podobne tróykąty ABC, DBC, których bokami są liniie AB, BC i BD, składaiące tę proporcyą: będzie więc, bok AB przeciwny kątowi prostemu w piérwszym tróykącie ABC, do boku BC, przeciwnego kątowi prostemu w 2*gim* tróykącie DCB, iak bok BC przeciwny kątowi *o* w 1*szym* do boku BD przeciwnego kątowi *o* w 2*gim* tróykącie: czyli AB: BC=BC: BD.

203. *Wniosek.* Ponieważ podług 3ciéy części poprzedzaiącego twierdzenia iest

$AB : AC = AC : AD$, $AB : CB = CB : DB$; więc
$AB \times AD = AC^2$, $AB \times DB = CB^2$. A zatém
$AB \times AD + AB \times DB = AC^2 + CB^2$; czyli
$AB\ (AD + DB) = AC^2 + CB^2$; czyli
$AB \times AB = AB^2 = AC^2 + CB^2$; gdyż $AD + DB = AB$; to iest, w tróykącie prostokątnym ACB kwadrat przeciwprostokątnéy AB, równy iest summie kwadratów z dwóch ramion kąta prostego; własność którąśmy iuż wyżéy (162) innym sposobem okazali.

204. Zagad. *Maiąc dane dwie liniie znaleźć między niemi średnią ieometrycznie proporcyonalną.*

Rozw. Poprowadziwszy iakiéykolwiek długości liniią prostą, i wziąwszy na niéy liniią AD *fig.* 91. równą piérwséy linii danéy i DB równą drugiéy linii danéy, na linii AB iako na średnicy wykréślić półkole; i z punktu D wyprowadzić liniią DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C: prostopadła CD będzie szukana: gdyż poprowadziwszy dwie cięciwy AC, BC, w tróykącie ACB prostokątnym przy C (128), iest AD: CD = CD: DB (202).

Sposób 2. Poprowadziwszy liniią AB równą większéy z dwóch liniy danych, i od końca B wziąwszy BD równą mnieyszéy z dwóch liniy danych; na linii AB iako na średnicy, wykréślić półkole, i z punktu D poprowadzić DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C; punkt C z punktem B złączywszy cięciwą CB, ta będzie liniią szukaną: gdyż poprowadziwszy cięciwę CA, w tróykącie ACB prostokątnym przy C, iest AB: CB = CB: BD (202).

205. Zagad. 2. *Dany prostokąt ABCD fig.* 80, *zamienić na kwadrat równy mu co do powiérzchni.*

Rozw. Między podstawą AB i wysokością BC danego prostokąta, znaydźmy średnią ieometrycznie proporcyonalną (204), którą oznaczmy głoską M; ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykréślenia iest AB: M = M: CB; więc AB × CB = M²: to iest, powiérzchnia danego prostokąta, równa iest powiérzchni kwadratu wykréślonego na linii M.

206. Zagad. 3. *Dany tróykąt ABC fig.* 107. *zamienić na kwadrat równy mu co do powiérzchni.*

Rozw. Między połową podstawy AB i między wysokością CD danego tróykąta znaydźmy średnią ieometrycznie proporcyonalną, którą oznaczmy głoską M; ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykréślenia iest $\frac{1}{2}$ AB:

$M = M : CD$; więc $\frac{1}{2} AB \times CD = M^2$; to iiest, powiérzchnia danego tróykąta, równa iest powiérzchni kwadratu wykréślonego na linii M.

207. *Wniosek.* Okazaliśmy wyżéy (142), że każdy wielokąt może być zamieniony na tróykąt równy mu co do powiérzchni: w zagadnieniu poprzedzaiącém podaliśmy sposób zamienienia tróykąta na kwadrat równy mu co do powiérzchni, a zatém każdy wielokąt można zamiénić na kwadrat równy mu co do powiézchni.

208. Twierd. *Wielokąty foremne o iednéyże liczbie boków są podobne.*

Dowod. Ponieważ kąty wewnętrzne wielokąta, ważą kątów prostych 2 razy tyle, ile wielokąt ma boków mniéy 4 (95), w dwóch zatém wielokątach o iednéyże liczbie boków kąty wewnętrzne iednego tyle ważą kątów prostych, ile ich ważą kąty wewnętrzne wielokąta drugiego. A że kąty iednego wielokąta są między sobą równe, i kąty drugiego wielokąta są także między sobą równe, gdyż dwa te wielokąty są podług założenia foremne; będą więc kąty iednego równe kątom drugiego wielokąta; to iest, dwa te wielokąty będą równokątne.

2re. Ponieważ wielokąty te są foremne, więc boki iednego wielokąta są między sobą równe, i boki drugiego wielokąta, są także między sobą równe. Jeżeli więc bok ieden w 1*szym* wielokącie iest *np.* dwa razy większy od boku iednego w drugim; będzie też bok drugi w piérwszym, dwa razy większy od boku drugiego w 2*gim* wielokącie; i bok trzeci w 1*szym* dwa razy większy od boku 3*go* w 2*gim* wielokącie itd. to iest, boki tych dwóch wielokątów będą między sobą proporcyonalne.

Kiedy więc dwa te wielokąty są równokątne i maią boki proporcyonalne, są tém samém podobne.

209. Twierd. *Dwa iakiekolwiek wielokąty np. dwa pięciokąty ABCDE*, abcde *fig.* 108. *złożone z téyże saméy liczby tróykątów podobnych między sobą i podobnie ułożonych, są sobie podobne i odwrotnie.*

Dow. W dwóch tróykątach ABC, *abc* podobnych z założenia iest kąt B$=b$; kąt ACB$=$ *acb*. Podobnież w tróykątach CAD, *cad* podobnych z założenia iest kąt ACD$=acd$; gdy więc iest ACB$=acb$, ACD$=acd$; więc ACB $+$ ACD $= acb + acd$; czyli kąt BCD $= bcd$. Tymże sposobem okazać można równość kątów CDE i *cde*, DEA i *dea*. Co się tycze kątów BAE, *bae*, te są także sobie równe: gdyż piérwszy z nich składa się z kątów BAC, CAD, DAE równych kątom odpowiadaiącym *bac*, *cad*, *dae* z których składa się kąt drugi.

Nadto w tróykątach ABC i *abc*, ACD i *acd*, ADE i *ade* podobnych między sobą z założenia, iest

$$AB:ab=BC:bc=AC:ac.$$
$$AC:ac=CD:cd=AD:ad.$$
$$AD:ad=DE:de=AE:ae.$$

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w piéwszym ciągu ostatni stosunek iest ten sam co piérwszy w drugim ciągu, ostatni zaś w drugim ciągu, iest ten sam co piérwszy w trzecim. Biorąc zatém te tylko stosunki, których wyrazy są bokami wielokątów, będzie AB : *ab* = BC : *bc* = CD : *cd* = DE : *de* = AE : *ae*. Dwa więc te wielokąty będąc równokątnemi, i maiąc boki odpowiadaiące proporcyonalne są podobne (189).

Odwrotnie. Gdy są dwa wielokąty podobne, składaią się z jednéyże liczby tróykątów podobnych i podobnie ułożonych.

Dow. Niech będą dwa wielokąty ABCDE, *abcde* podobne: z wiérzchołku dwóch kątów A, *a*, odpowiadaiących sobie poprowadziwszy przekątne AC, AD, *ac*, *ad*, tróykąty ABC i *abc*, ACD i *acd*, ADE i *ade* będą między sobą podobne. Jakoż w tróykątach ABC, *abc* kąt B = *b* z założenia, i boki AB, BC są proporcyonalne bokom *ab*, *bc* z założenia; więc dwa te tróykąty są podobne (196), będzie więc BC : *bc* = AC : *ac*; i kąt ACB = *acb* iako przyległe bokom proporcyonalnym BC, *bc*. Że zaś podług założenia kąt BCD = *bcd*; będzie więc BCD — ACB = *bcd* — *acb*; czyli ACD = *acd*.
A że BC : *bc* = CD : *cd* podług założenia,
BC : *bc* = AC : *ac* z dowodzenia; więc
CD : *cd* = AC : *ac*.

Dwa więc tróykąty ADC, *adc* maiąc kąty ACD, *acd* równe, zawarte między bokami względem siebie proporcyonalnemi są sobie podobne (196), a w szczególności kąt ADC = *adc*, iako przyległe bokom proporcyonalnym CD i *cd*, będzie więc CD : *cd* = AD : *ad*. Tymże samym sposobem dowieść można podobieństwa innych tróykątów.

210. *Uwaga.* W dwóch iakichkolwiek wielokątach podobnych, w dwóch *np.* pięciokątach ABCDE, *abcde fig.* 109, z dwóch końców którego kolwiek boku *np.* AB poprowadziwszy przekątne AD, AC, BD, BE, *ad*, *ac*, *bd*, *be*; łatwo byłoby okazać sposobem któregośmy użyli w twierdzeniu poprzedzaiącém, że tróykąty ABC, ABD, ABE, których spólną podstawą iest bok AB wielokąta 1go, tudzież tróykąty *abc*, *abd*, *abe*, których spólną podstawą iest bok *ab* wielokąta 2go odpowiadaiący bokowi AB, że mówię, te wszystkie tróykąty są między sobą podobne. I odwrotnie założywszy, że tróykąty te są między sobą podobne, łatwo byłoby okazać, że wielokąty ABCDE, *abcde* są także podobne.

211. Zagad. *Na danéy linii* ab *fig.* 108. *wykréślić wielokąt podobny danemu BD.*

Rozw. W danym wielokącie BD prowadzę przekątne AC, AD; na danéy linii *ab* kréślę tróykąt *abc* podobny tróykątowi ABC; na linii *ac* kréślę tróykąt *acd* podobny tróykątowi ACD, na linii *ad* kreślę tróykąt *ade* podobny tróykątowi ADE. Wielokąt *abcde* będzie podobny danemu (209).

Sposób 2gi. Wiérzchołki kątów danego wielokąta ABCDE *fig.* 109. złączywszy z dwoma końcami któregokolwiek boku *np.* AB przez przekątne AC, AD, BD, BE i na danéy linii *ab* wykréśliwszy tróykąty *acb*, *adb*, *aeb* podobne względem tróykątów ACB, ADB, AEB: punkt *d* złączyć z punktem *c* i *e*, liniiami prostemi *dc*, *de*: wielokąt *abcde* będzie podobny danemu (210).

Sposób 3ci. Na boku AB danego wielokąta ABCDE *fig.* 108. wziąć liniią A*b*, równą linii danéy; z punktu *b* poprowadzić *bc* równoodległą od BC, aż do przecięcia się z przekątną AC w punkcie *c*; z punktu *c* poprowadzić *cd* równoodległą od CD, aż do przecięcia się z przekątną AD w punkcie *d*; z punktu *d* poprowadzić *de* równoodległą od DE, aż do przecięcia się z bokiem AE w punkcie *e*: wielokąt A*bcde* będzie szukany.

Gdyby dana liniia *ab* dłuższa była od boku AB, na ten czas przedłużywszy bok AB tak, aby wraz z przedłużeniem równy był linii danéy, prowadząc iak wyżéy równoodległe od boku BC, CD, DE, aż do przecięcia się z liniiami AC, AD, AE przedłużonemi, wykréślimy wielokąt podobny danemu.

212. *Twierd.* W dwóch wielokątach podobnych ABCDE, *abcde fig.* 110. na dwóch odpowiadaiących sobie bokach AB, *ab*, wziąwszy dwa punkta G i *g* podobnie położone, to iest tak, aby było BG: *bg* = BC: *bc*; i poprowadziwszy liniie GF, *gf* tak, aby kąt FGB = *fgb*; albo też tak, aby liniie te GF, *gf*, przecinały boki DC i *dc* na części proporcyonalne bokom wielokąta; *w obudwu przypadkach liniie GF*, gf *będą proporcyonalne bokom wielokątów*: *to iest*, *będzie* FG: *fg* = BC: *bc*.

Dowod. W piérwszym przypadku, kiedy kąt FGB $=fgb$, poprowadziwszy przekątne CG, cg; w dwóch tróykątach CBG, cbg, kąt B $=b$ i BG : bg = BC : bc podług założenia; więc dwa te tróykąty są sobie podobne (196), będzie zatem

BG : bg = CG : cg; a że iest

BG : bg = BC : bc; więc CG : cg = BC : bc; i kąt BCG $=bcg$, kąt BGC $=bgc$. A że kąt BCF $=bcf$, iako odpowiadaiące w wielokątach podobnych, więc BCF — BCG $=bcf-bcg$; czyli kąt GCF $=gcf$; kąt FGB $=fgb$ podług założenia, kąt BGC $=bgc$ z dowiedzenia; więc FGB — BGC $=fgb-bgc$; czyli FGC $=fgc$.

Tróykąty zatém FGC, fgc są równokątne (191), a tém samém podobne: będzie więc FG : fg = CG : cg: a że CG : cg = BC : bc; więc FG : fg = BC : bc.

W 2gim *przypadku*, założywszy że liniie FG, fg tak są poprowadzone, iż przecinaią boki DC, dc na części proporcyonalne bokom wielokątów, czyli że iest FC : fc = BG : bg = BC : bc; poprowadziwszy, iak wyżéy przekątne CG, cg, i okazawszy, że dwa tróykąty CBG, cbg są podobne, będzie

CG : cg = BG : bg; a że podług założenia

FC : fc = BG : bg; więc CG : cg = FC : fc.

Dwa więc tróykąty CGF, cgf maiące kąty przy C i c równe, zawarte między bokami względem siebie proporcyonalnemi, są podobne (196), a zatém FG : fg = FC : fc = BC : bc.

213. Twierd. *Obwody dwóch wielokątów podobnych, są do siebie w stosunku dwóch boków odpowiadaiących sobie w tych wielokątach.*

Dow. Ponieważ wielokąty ABCDE, *abcde* *fig.* 110 są podobne, będzie więc

AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea; więc

AB + BC + CD + DE + EA : $ab + bc + cd + de + ea$ = AB : ab; to iest, obwód wielokąta ABCDE do obwodu wielokąta *abcde*, iak bok 1wszego AB do boku ab w drugim wielokąciie.

214. Twierd. *Powiérzchnie wielokątów podobnych maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.*

Dód. Niech będą dwa tróykąty ABC, *abc* *fig.* 111. podobne, mamy dowieść, że powiérzchnia tróykąta ACB, do powiérzchni tróykąta *abc* iak kwadrat z boku *np.* AC do kwadratu z boku *ac*, czyli, że iest tróykąt ACB : $acb = AC^2 : ac^2$.

Z wiérzchołka kąta C i c spuściwszy CD i cd piérwszą prostopadłą do AB, drugą prostopadłą do ab; dwa tróykąty ACD, acd prostokątne przy D i d. i w których kąt A równy kątowi a, są podobne (191), będzie więc

CD : cd = AC : ac; a że podług założenia

AB : ab = AC : ac, więc rozmnożywszy w tych dwóch proporcyach wyrazy sobie odpowiadaiące, będzie

$AB \times CD : ab \times cd = AC \times AC : ac \times ac$; czyli

$AB \times CD : ab \times cd = AC^2 : ac^2$. Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez 2, będzie

AB

$\frac{AB \times CD}{2} : \frac{ab \times cd}{2} = AC^2 : ac^2$: to iest, połowa iloczynu podstawy tróykąta ABC przez wysokość tegoż tróykąta, tak się ma do połowy iloczynu podstawy tróykąta *abc* przez wysokość tegoż tróykąta, iak kwadrat z boku AC do kwadratu z boku *ac*. A że iloczyny te równe są, piérwszy powiérzchni tróykąta ABC, drugi powiérzchni tróykąta *abc* (150); więc powiérzchnie tych dwóch tróykątów maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

2*re*. Niech będą dwa iakiekolwiek wielokąty podobne, *np.* dwa pięciokąty ABCDE, *abcde fig* 108. Z wiérzchołka kątów A, *a*, poprowadziwszy przekątne AC, AD, *ac*, *ad*; obadwa te wielokąty podzielone będą na równą liczbę tróykątów podobnie ułożonych i podobnych (209); będzie zatém podług piérwszéy części ninieyszego twierdzenia, tróykąt

$ABC : abc = BC^2 : bc^2$.

$ACD : acd = CD^2 : cd^2$.

$ADE : ade = DE^2 : de^2$. A że dla podobieństwa wielokątów iest

$BC : bc = CD : cd = DE : de$; a tém samém

$BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2$; więc będzie też

$ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade$. A zatém summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; to iest

$ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade =$ $ABC : abc$; czyli $ABCDE : abcde = ABC : abc$. A że $ABC : abc = BC^2 : bc^2$; więc $ABCDE : abcde$

$=BC^2 : bc^2$: to iest, powiérzchnie dwóch wielokątów podobnych maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

Uwaga. Stosunek kwadratowy zowiie się inaczéy stosunkiem *dwumnożnym*, *ratio duplicata.* Przeto też twierdzenie poprzedzaiące zwyczaynie tak się wyraża: *Dwa wielokąty podobne są do siebie w stosunku dwu-mnożnym boków odpowiadaiących.*

215. Zagad. *Maiąc dane dwa wielokąty podobne, wykréślić trzeci podobny dwom danym, i któregoby powiérzchnia równa była summie lub różnicy dwóch wielokątów danych.*

Rozw. 1. Wykréśliwszy tróykąt ABC *fig.* 112. prostokątny przy C, w którymby ramiona kąta prostego AC, BC były bokami odpowiadaiącemi dwóch danych wielokątów P i Q, na przeciwprostokątnéy AB wykréślmy wielokąt R podobny wielokątom P i Q, i w którymby bok AB był odpowiadaiący bokom AC, BC w dwóch wielokątach danych: wielokąt R iest szukany: gdyż ponieważ wielokąty te są podobne, więc podług twierdzenia poprzedzaiącego $P : Q = AC^2 : BC^2$; a tém samém

$P + Q : Q = AC^2 + BC^2 : BC^2$. A że też iest

$Q \;:\; R = \quad BC^2 \quad : AB^2$; więc złożywszy te dwie proporcye, będzie $P + Q : R = AC^2 + BC^2 : AB^2$. W téy proporcyi ponieważ 2gi poprzednik $AC^2 + BC^2$ równy iest swemu następnikowi (162); więc i poprzednik 1szy $P + Q$ równy iest także swoiemu następnikowi R; to iest, dwa dane wielokąty P i Q równe są znalezionemu R.

2. Chcąc znaleźć wielokąt Q podobny dwom wielokątom danym P i R, i któregoby powiérzchnia równa była różnicy tychże dwóch wielokątów danych, trzeba wykréślić tróykąt prostokątny ABC, daiąc mu za iedno ramie kąta prostego AC bok wielokąta mnieyszego P, a za przeciwprostokątną AB bok odpowiadaiący wielokąta większego R: BC będzie bokiem odpowiadaiącym wielokąta szukanego Q: gdyż ponieważ wielokąty R i P są podobne, będzie $R : P = AB^2 : AC^2$; a tém samém

$R - P : P = AB^2 - AC^2 : AC^2$. A że iest także

$P : Q = AC^2 : BC^2$; więc złożywszy te dwie proporcye, będzie $R - P : Q = AB^2 - AC^2 : BC^2$. W téy proporcyi poprzednik 2gi $AB^2 - AC^2$ równy iest swemu następnikowi BC^2 (169); więc i poprzednik 1wszy $R - P$ równy iest także swemu następnikowi Q; to iest, różnica powiérzchni dwóch danych wielokątów R i P równa iest wielokątowi znalezionemu Q.

216. Zagad. *Wykréślić wielokąt podobny danemu, i któregoby powiérzchnia do powiérzchni danego, miała się w stosunku danym; lub któregoby powiérzchnia równa była danemu kwadratowi.*

Rozw. 1. Daymy na to, że powiérzchnia danego wielokąta X *fig.* 113, ma być do powiérzchni wielokąta szukanego w stosunku dwóch iakichkolwiek liniy prostych M i N. Poprowadziwszy liniią AB iakieykolwiek długości, i wziąwszy na niéy dwie części AD i BD, któreby się miały do siebie w stosunku dwóch liniy M i N; na linii AB iak na średnicy wykréślić półkole, i z punktu D wyprowadzić DC prostopadłą do AB. Poprowadziwszy potém cięciwy AC, BC, i wziąwszy CE równą *ce* bokowi danego wielokąta X; z punktu E poprowadzić EF równoodległą od AB, aż do przecięcia się w punkcie F z cięciwą CB: liniia CF będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadaiącym bokowi *ce*: to iest, na linii CF wykréśliwszy wielokąt podobny danemu, wielokąt ten będzie szukany. Jakoż w tróykącie ACB, iest AC: BC = EC: FC (178), a tém samém

$AC^2 : BC^2 = EC^2 : FC^2$. A że

$AC^2 : BC^2 = AD : BD$ (164); więc złożywszy dwie te proporcye będzie $EC^2 : FC^2 = AD : BD$. Że zaś AD: BD = M: N podług wykréślenia, więc $EC^2 : FC^2 = M : N$; a tém samém wielokąt wykréślony na boku EC, czyli *ec*, to iest, wielokąt dany X, ma się do podobnego wielokąta wykréślonego na boku FC, iak liniia M do linii N: gdyż wielokąty podobne maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących (214).

Gdyby bok *ec* wielokąta X większy był od AC, na ten czas liniią CA przedłużylibyśmy do *e* tak, aby *Ce* = *ce*: w reszcie wykréślenie i dowodzenie byłoby to samo.

2re. Chcąc wykréślić wielokąt podobny danemu X, któregoby powierzchnia równa była danemu kwadratowi N^2, trzeba naprzód wielokąt dany X zamienić na kwadrat M^2 równy mu co do powiérzchni; potém do boków tych dwóch kwadratów, to iest do M i N; tudzież do boku ec danego wielokąta X znaleźć 4tą ieometrycznie proporcyonalną; ta będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadaiącym bokowi ec. Jakoż oznaczywszy 4tą ieometrycznie proporcyonalną głoską P, a wielokąt na niéy wykréślony głoską Z, ponieważ dwa wielokąty X i Z są podobne z wykréślenia, będzie więc $X : Z = ec^2 : P^2$; — ; — ; — ; — ; — ; — ; — A.

A że podług wykréślenia $M : N = ec : P$, a tém samém $M^2 : N^2 = ec^2 : P^2$; złożywszy tę proporcyą z proporcyą oznaczoną głoską A, będzie $X : Z = M^2 : N^2$.

W téy proporcyi ponieważ poprzednik 1szy X iest równy z wykréślenia poprzednikowi 2mu M^2, więc i następnik 1wszy Z, iest także równy następnikowi 2mu N^2; to iest, wielokąt znaleziony, równy co do powiérzchni danemu kwadratowi.

217. Twierd. *Z punktu C wziętego za kołem fig.* 114. *poprowadziwszy dwie liniie CA, CB przecinaiące okrąg w punktach D i A, B i F; będzie CA : CB = CF : CD.*

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy AF, BD, dwa tróykąty ACF, BCD, maią kąt C spólny, kąty A i B równe, gdyż obudwu miarą iest połowa łuku DF: więc dwa te tróykąty są podobne; będzie zatém CA : CB = CF : CD.

Uwaga. W proporcyi téy CA : CB = CF : CD, sieczna iedna CA i część iéy za kołem CD, są wyrazami skraynemi; sieczna druga CB i część iéy za kołem CF, są wyrazami średniemi proporcyi; to iest, tak się ma sieczna 1wsza do 2giéy, iak część za kołem sieczney 2giéy, do części za kołem sieczńey 1wszéy. Stosunek takowy naazywa się odwrotny, *ratio inversa*, dla różnicyy od stosunku prostego *directa*, któryby był na ten czas, gdyby się miała sieczna 1wsza do 2giéy, iak część za kołem sieczńey 1wszéy, do części za kołem drugiéy. Dlatego też poprzedzaiące twierdzenie zwyczaynie tak się wyraża: *z punktu wziętego za kołem poprowadziwszy dwie sieczne; sieczne te są do siebie w stosunku odwrotnym części swoich za kołem.*

218. Twierd. *Z punktu C wziętego za kołem, poprowadziwszy styczną CB fig.* 115, *i sieczną CA, przecinaiącą okrąg w punktach A i D; będzie styczna CB średnią ieometrycznie proporcyonalną między całą sieczną CA, i częścią iéy za kołem CD:* to iest, będzie CA: CB=CB: CD.

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy BA, BD, dwa tróykąty ABC, BDC maią kąt C spólny, kąt A=DBC, gdyż obadwa maią za miarę połowę łuku BD (126), a zatém dwa te tróykąty są podobne; będzie więc CA: CB=CB: CD.

219. *Twierd.* Wziąwszy w kole punkt C *fig.* 116. od upodobania, i przez ten punkt poprowadziwszy dwie cięciwy AB, DF w punkcie C przecinaiące się; *części tych cięciw będą do siebie w stosunku odwrotnym.*

Dowod. Poprowadziwszy cięciwy FA, BD, tróykąty CFA, CBD maią kąty przy C równe, kąt A równy kątowi D, gdyż obadwa maią za miaiarę połowę łuku BF: więc dwa te tróykąty są podobne; będzie zatém: AC : DC = FC : BC.

220. *Uwaga.* Porównawszy to twierdzenie z twierdzeniem wyżéy podaném (217), łatwo iest postrzedz, że one są dwoma przypadkami następuiącego twierdzenia:

Gdy dwie liniie proste przecinaiące się z sobą w punkcie wziętym w kole lub za kołem, przedłużone będą tak aby każda z nich przecinała okrąg we dwóch punktach; odległości spólnego ich przecięcia się od punktów przecięcia się ich z okręgiem są do siebie w stosunku odwrotnym.

221. *Wniosek.* Gdyby cięciwa AB *fig.* 117. przechodziła przez środek koła, a cięciwa DF była ~~od~~ niéy prostopadłą, a tém samém w punkcie C na dwie równe części podzielona (108); na ten czas proporcya AC : DC = FC : BC (219), zamieniłaby się w następuiącą: AC : DC = DC : BC: gdyż FC = DC; to iest, DC iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między odcinkami AC i BC średnicy AB: cośmy iuż wyżéy innym sposobem okazali (202). do

222. Zagad. *Daną liniią BC fig.* 118. *podzielić w stosunku średnim i skraynym*; to iest, podzielić tę liniią na dwie części tak, aby część większa CF była średnią ieometrycznie proporcyonalną między całą liniią BC i częścią mnieyszą BF, czyli aby było BF : CF = CF : CB.

Rozw. Z końca B linii danéy poprowadziwszy BS prostopadłą do BC i równą połowie linii BC; punkt S z drugim końcem C danéy linii złączyć liniią prostą SC; z punktu S iako ze środka promieniem SB nakréślić koło, którego okrąg liniią SC przecina w punkcie D, nakoniec z punktu C iako ze środka promieniem CD wykréślić łuk DF, który liniią daną BC podzieli w punkcie F na części szukane. *)

Gdyż ponieważ BC iako prostopadła z końca promienia SB wyprowadzona, iest styczna z kołem (114), przedłużywszy zatém CS do A, będzie CD: CB = CB: CA (218). A zatém

CB — CD: CA — CB = CD: CB.

Że zaś podług wykréślenia CB — CD = CB — CF = BF; a liniia BS równa połowie BC, a tém tamém BC = 2BS = AD; będzie więc

CA — CB = CA — AD = CD = CF;

ostatnia zatém proporcya zamieni się w następuiącą: BF: CF = CF: CB.

223. Zagad. *Nakréślić koło, któregoby okrąg przeszedł przez dwa dane punkta A i D, i stykał się z daną liniią CE fig.* 119.

Rozw. Złączywszy dwa dane punkta liniią prostą AD i przedłużywszy ią aż do przecięcia się z liniią daną CE w punkcie C; między liniiami CA i CD znaléźć średnią ieometrycznie proporcyonalną, którą będzie liniia CF, podług tego co się wyżéy powiedziało (204). Z punktu C promieniem CF wykréślić łuk FB, przecinaiący liniią daną CE w punkcie B. Nakoniec wykréślić koło, któregoby okrąg przechodził przez trzy punkta A, B, D sposobem podanym wyżéy (111), koło to będzie szukane: gdyż podług wy-

*) Gdy linia AD iest od CE równoodległa, na ten czas punkt szukany B oznaczy prostopadła ze środka linii AD spuszczona do CE.

kreślenia AC : CF = CF : CD ; czyli AC : CB = CB : CD : gdyż CB = CF z wykréślenia. A że AC iest sieczna koła ADB, a CD iest część iéy za kołem, więc CB iest styczna tegoż koła (218). Gdy więc okrąg znalezionego koła przechodzi przez dwa dane punkta A i D, i dotyka się linii danéy CE w punkcie B, koło zatém ADB iest szukane.

ROZDZIAŁ VIII.

o Wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole.

224 *Uwaga.* Powiedzieliśmy wyżéy (111), że maiąc dane trzy punkta, byle nie w linii prostéy, można zawsze wykréślić koło, któregoby okrąg przechodził przez te trzy punkta. Z tego wypada, że maiąc dany iakikolwiek tróykąt ABC *fig.* 120 można zawsze wykréślić koło takie, któregoby okrąg przechodził przez wiérzchołki trzech kątow tego tróykąta: taki tróykąt zowie się tróykątem w koło *wpisanym*, *triangulum circulo inscriptum:* W powszechności każdy wielokąt nazywa się wielokątem w koło wpisanym, gdy przez wiérzchołki wszystkich iego kątów przechodzi okrąg iednego koła; koło zaś takie zowie się kołem opisaném na wielokącie.

225. Zastanowiwszy się nad tróykątem ABC w koło wpisanym, można niektòre iego własności wyżéy dowiedzione innym sposobem okazać. I tak 1*ód*, trzy kąty tróykąta ważą dwa kąty proste : gdyż każdy z nich ma za

miarę połowę łuku zawartego między iego ramionami (125); a że łuki między ramionami tych trzech kątów zawarte, równaią się całemu okręgowi, więc miara tych trzech kątów iest połowa okręgu, czyli miara dwóch kątów prostych.

2re. Gdy dwa kąty B i C są równe, połowa łuku AC równa będzie połowie łuku AB, a tém samém i cały łuk AC równy całemu łukowi AB: gdy zaś łuki te są równe, będą też i cięciwy ich AC, AB równe (106), a że cięciwy te są bokami tróykąta ABC, więc tróykąt ten iest równoramienny.

3cie. Odwrotnie równość boków AC, AB ciągnie za sobą równość łuków AC, AB i równość kątów B i C.

4te. Gdy trzy kąty A, B, C są równe, łuki też CB, CA, AB będą równe, i cięciwy tych łuków CB, CA, AB które tu są bokami tróykąta, będą równe: to iest, tróykąt będzie równoboczny.

5te. Odwrotnie równość boków CB, CA, AB, ciągnie za sobą równość łuków CB, CA, AB, i równość kątów A, B, C.

6te. Jeżeli kąt A > B będzie też łuk CB > AC, a tém samém i cięciwa CB, która tu iest bokiem tróykąta, większa od cięciwy AC (122), i t. d.

226. Zagad. *Wewnątrz danego tróykąta ABC fig.* 121. *wykréślić koło takie, aby boki tróykąta były stycznemi tego koła.*

Rozw. Dwa którekolwiek kąty A i B podzieliwszy na dwie równe części (46), przez liniie AS, BS przecinaiące się w punkcie S, i z punktu S do którego kolwiek boku tróykąta *np.* do boku AB spuściwszy prostopadłą SD, punkt S będzie środkiem, a prostopadła SD promieniem koła szukanego.

Gdyż spuściwszy do innych dwóch boków prostopadłe SE, SF, w dwóch tróykątach ASD, ASE, bok AS iest spólny, kąty przy A równe z wykréślenia, kąt ADS=AES iako proste: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26), a w szczególności SD=SE. Tymże sposobem z tróykątów SDB, SFB mogących do siebie przystać dowiedziemy, że SF=SD. Trzy więc prostopadłe SD, SE, SF są sobie równe. Okrąg zatém koła z punktu S promieniem SD nakréślonego, przeydzie przez punkta E i F; i boki tróykąta ABC w punktach D, E, F, będą stycznemi z kołem.

Koło wewnątrz tróykąta wykréślone, którego boki tróykąta są stycznemi, zowie się kołem w tróykąt wpisaném: a tróykąt zowie się tróykątem opisaném na kole; *Triangulum circulo circumscriptum.* W powszechności każdy wielokat, którego wszystkie boki są stycznemi iednego koła wykréślonego wewnątrz wielokąta, zowie się *wielokątem na kole opisanym*, a koło takie zowie się kołem wpisaném w wielokąt.

Poprzedzaiące więc zagadnienie można inaczéy tak wysłowić: *wpisać koło w dany tróykąt.*

227. *Uwaga.* Ponieważ przez trzy punpunkta A, C, B *fig.* 120, okrąg tylko iednego

koła przechodzić może (112), więc wziąwszy punkt 4ty D za kołem, rzeczą iest widoczną, że okrąg koła ACB nie może przeyść przez punkt D, a tém samém czworokąt ADCB nie może być w koło wpisany. Lecz gdyby 4ty punkt F znaydował się na okręgu koła ACB, czworokąt AFCB byłby w koło wpisany. Stąd się okazuie, że nie każdy czworokąt, a tém bardziéy nie każdy wielokąt maiący boków więcéy niż 4, może być w koło wpisany.

228. Twierd. *Każdy wielokąt foremny może być w koło wpisany i opisany na kole.*

Dowod. Niech będzie iakikolwiek wielokąt foremny ABCDEF *fig.* 122. Nakréślmy koło któregoby okrąg przechodził przez trzy wiérzchołki trzech przyległych kątów, A, B, C; niech punkt S będzie środkiem tego koła: mamy okazać, że okrąg tego koła przéydzie przez wszystkie wiérzchołki kątów wielokąta. Jakoż z punktu S poprowadziwszy liniie proste SA, SB, SC, SD it.d. do wszystkich wiérzchołków kątów wielokąta, trzy piérwsze liniie SA, SB, SC są podług wykréślenia, promieniami tego koła, a tém samém równe: więc dwa tróykąty SBA, SBC, w których bok SB spólny, bok SA = SC, bok BA = BC, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt SBA = SBC; a zatém ieden z nich *np.* SBC iest połową obudwu, czyli kąt SBC iest połową kąta ABC; że zaś kąt ABC = BCD, gdyż wielokąt ABCEF iest foremny; więc kąt SBC iest także połową kąta BCD. Nadto w tróykącie SBC bok SB = SC z wykréślenia; więc kąt SBC = SCB, a zatém i kąt SCB iest połową kąta BCD, a tém samém kąt BCD iest drugą połową tegoż kąta SCD. Więc kąt SCB=SCD. W dwóch zatém tróykątach SCB, SCD, bok SC iest spólny, bok CB =CD z założenią, i kąty między temi bokami zawarte SCB, SCD równe: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie; (24), a w sczególności bok SB=SD; a zatém okrąg przechodzący przez 3 punkta A, B, C, przeydzie także i przez punkt D. Tymże sposobem okazać można, że okrąg przechodzący przez 3 punkta B, C, D, przeydzie także przez punkt E i t. d. Więc ten sam okrąg który przechodzi przez punkta A, B, C, przeydzie przez punkta D, E, F, to iest, przez wszystkie wiérzchołki kątów wielokąta.

2re. Że środek S koła opisanego na wielokącie, spuściwszy prostopadłe SM, SN i t. d. do boków wielokąta, wszystkie te prostopadłe będą między sobą równe: gdyż boki wielokąta są cięciwami koła opisanego: cięciwy te są między sobą równe, wielokąt bowiem ABCDEF iest foremny; a zatém odległości tych cięciw od środka koła, to iest, prostopadłe SM, SN i t. d. są między sobą równe (124). Wziąwszy więc liniią SM za promień i z punktu S iako ze środka nakréśliwszy koło, okrąg tego koła przeydzie przez wszystkie punkta M, N, O i t. d., i boki wielokata w punktach M, N, O i t. d. będą styczne tego koła (114), a zatém koło to będzie wpisane w wielokąt.

229. *Uwaga.* Punkt S spólny środek koła wpisanego w wielokąt i na nim opisanego,

może być także uważany iako środek wielokąta, dla téy przyczyny kąty ASB, BSC i t. d. zawarte między dwoma promieniami do końców boków wielokąta poprowadzonemi, zowią się kątami we środku wielokąta.

Wszystkie kąty we środku wielokąta foremnego, są między sobą równe: gdyż cięciwy AB, BC i t. d., a tem samém i łuki AB, BC i t. d. będące miarami tych kątów, są równe. A że wszystkie te kąty ważą 4 kąty proste (16), więc iednego ważność znaydzie się podzieliwszy 4 przez liczbę boków wielokąta. I tak *np.* w ośmiokącie foremnym ieden kąt we środku iest $\frac{1}{8}$ cztérech kątów prostych czyli $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ iednego kąta prostego i t. d.

230. A stąd wypada, że wpisać w koło wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków, iest to samo, co podzielić okrąg koła danego na tyle łuków równych, ile wielokąt mieć powinien boków, i poprowadzić cięciwy tych łuków; cięciwy te będą bokami wielokąta foremnego w koło wpisanego: gdyż 1*ód* boki AB, BC i t. d. iako cięciwy łuków równych, są sobie równe.

2*re*. Tróykąty ABS, BCS, CDS i t. d. przystaną do siebie (28), więc kąty SBC, SBA, SCB, SCD i t. d. są równe: a tém samém i kąty ABC, BCD i t. d. będą sobie równe. A zatém figura ABCDEF będzie wielokątem foremnym.

231. Zagad. *W dane koło wpisać tróykąt równoboczny.*

Rozw. Ponieważ tróykąt równoboczny iest wielokątem foremnym maiącym trzy boki, trzeba więc okrąg koła danego podzielić na 3 części równe; a cięciwa 3ciéy części okręgu będzie bokiem tróykąta szukanego (230); albo też okrąg podzielić na 6 części równych, a cięciwa dwóch takowych części, będzie bokiem tróykąta szukanego: gdyż $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Aby zaś podzielić okrąg na 6 części równych, trzeba w danéin kole poprowadzić cięciwę równą promieniowi tegoż koła; cięciwa ta odetnie łuk równy szóstéy części okręgu.

Jakoż niech będzie sześciokąt foremny ABCDEF *fig.* 123. w koło wpisany: na okazanie że bok tego sześciokąta, będący cięciwą szóstéy części okręgu, iest równy promieniowi tegoż koła, poprowadźmy promienie SA, SB: w tróykącie ABS, kąt ASB we środku sześciokąta iest $\frac{1}{6}$ częścią 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{6}$ lub $\frac{2}{3}$ iednego prostego (230); więc dwa kąty SAB, SBA ważą resztę do 2 kątów prostych: czyli kąt SAB + SBA $= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ kąta prostego. A że kąty te są równe; gdyż SA $=$ SB; więc każdy z nich waży połowę $\frac{4}{3}$, to iest, kąty SAB, SBA ważą po $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Tróykąt zatém ASB, maiący wszystkie trzy kąty równe, iest równoboczny: wiec bok AB $=$ SA; to iest, *bok sześciokąta w koło wpisanego równy iest promieniowi tegoż koła.* Poprowadziwszy liniie AC, CE, EA, z których każda iest cięciwą dwóch szóstych części okręgu, będzie ACE tróykąt równoboczny w koło wpisany.

232. *Uwaga.* Podaliśmy wyżéy (110), sposób podzielenia łuku danego na dwie równe części. Kiedy więc okrąg koła podzielony być może na 6 części równych, można go także podzielić na 12 części równych: na ten koniec dosyć będzie łuk równy szóstéy części okręgu podzielić na dwie równe części, iedna takowa część będzie równa dwunastéy części okręgu. Podzieliwszy znowu łuk równy dwunastéy części okręgu na dwie części równe, będziemy mieli 24tą część okręgu i t. d. Można więc okrąg podzielić na części równych 12, 24, 48 i t. d. czyli, co na iedno wychodzi, w dane koło można wpisać wielokąty foremne o 12, 24, 48 i t. d. bokach.

233. 2. W czworokącie ABCS boki przeciwne są sobie równe, a zatém czworokąt ten iest równoległobokiem (79): będzie więc $AC^2 + BS^2 = AB^2 + BC^2 + CS^2 + AS^2$ (176); czyli $AC^2 + BS^2 = 4BS^2$; gdy liniie AB, BC, CS, AS, są między sobą równe; a zatém i kwadraty ich są także równe. W ostatnim równaniu odiąwszy po obu stronach BS^2, zostanie $AC^2 = 3BS^2$; to iest, AC^2 trzy razy większy od BS^2. A zatém $BS^2 : AC^2 = 1 : 3$, a tém samém $BS : AC = 1 : \sqrt{3}$, to iest, promień koła tak się ma do boku tróykąta rownobocznego w to koło wpisanego, iak iedność do piérwiastku liczby 3. A ztąd wypada 1*ód*, że maiąc wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego; i odwrotnie; 2*re*, że ponieważ prawdziwy pierwiastek liczby 3 nie może być wyrażony w liczbach, więc promień

koła

koła i bok tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego, są dwie liniie niespółmierne (38).

234. Zagad. *W dane koło wpisać kwadrat.*

Rozw. W daném kole poprowadziwszy dwie średnice AC, BD do siebie prostopadłe *fig.* 124, i końce ich połączywszy cięciwami AB, BC, CD, DA, czworokąt ABCD w koło wpisany iest kwadratem szukanym: gdyż wszystkie kąty iako zawarte w półkolu (128) są proste; wszystkie boki są między sobą równe, bo są cięciwami cztérech łuków równych, iako będących miarą 4 kątów prostych, maiących swóy wiérzchołek w punkcie S.

235. *Uwaga.* Wpisawszy w koło kwadrat, łatwo będzie można wpisać wielokąty foremne o 8, 16, 32 i t. d. bokach używaiąc sposobu wyżéy podanego (232).

236. 2re. W tróykącie ASB, prostokątnym przy S, iest $AB^2 = AS^2 + BS^2$; czyli $AB^2 = 2BS^2$; gdyż $AS = BS$ iako promienie; to iest, kwadrat z boku AB, czyli kwadrat w koło wpisany, iest dwa razy większy od kwadratu z promienia tegoż koła; a zatém $BS^2 : AB^2 = 1 : 2$, a tém samém $BS : AB = 1 : \sqrt{2}$: to iest, promień koła tak się ma do boku kwadratu w toż koło wpisanego, iak iedność do piérwiastku liczby 2. Maiąc zatém wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok kwadratu w koło wpisanego: i odwrotnie.

237. Zagad. *W koło dane wpisać pięciokąt foremny.*

Rozw. Aby zagadnienie to rozwiązać, trzeba okrąg koła danego podzielić na 5 części równych; a cięciwa piątéy części okręgu, będzie bokiem pięciokąta szukanego: albo też podzielić okrąg na 10 części równych, a cięciwa dwóch dziesiątych części okręgu będzie bokiem pięciokąta szukanego: gdyż $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$: trzeba więc znaleźć cięciwę dwóch dziesiątych części okręgu, albo co na iedno wychodzi, bok dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Daymy na to, że AB *fig.* 125 iest bokiem dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego. Ze środka koła S poprowadziwszy dwa promienie SA, SB do końców A i B boku dziesięciokąta, kąt we środku tego wielokąta ASB iest dziesiątą częścią 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{10}$ albo $\frac{2}{5}$ iednego kąta prostego: więc w tróykącie ASB, dwa drugie kąty SAB, SBA ważą resztę do dwóch kątów prostych, to iest, ważą obadwa razem $\frac{8}{5}$ kąta prostego; a że kąty te SAB, SBA są równe, bo SA, SB są promienie, więc ieden z nich *np.* kąt SAB waży połowę $\frac{8}{5}$, to iest waży $\frac{4}{5}$ kąta prostego: a że kąt ASB waży $\frac{2}{5}$ kąta prostego, więc kąt SAB iest dwa razy większy od kąta ASB. Podzieliwszy więc kąt SAB na dwie równe części przez liniią AC, będzie kąt CAS = ASB, a tém samém w tróykącie ACS, będzie bok AC = CS.

W tróykącie ABC kąt przy B, iakośmy okazali wyżéy, waży $\frac{4}{5}$ kąta prostego; kąt CAB waży $\frac{2}{5}$ kąta prostego z wykréślenia: więc 3ci kąt ACB waży resztę do dwóch kątów prostych: to iest, waży $\frac{4}{5}$ kąta prostego; a zatém tróykąt

ABC maiący przy podstawie BC dwa kąty równe, iest równoboczny, będzie więc AC=AB; więc trzy te linie AC, CS, AB są między sobą równe: znalazłszy więc iednę z nich, znaydziemy tém samém i dwie inne.

Dwa tróykąty ASB, ACB maią kąt przy B spólny; kąt ASB=CAB z wykréślenia: a zatém są podobne, będzie więc AS : AB = AB : BC; czyli, BS : CS = CS : BC; gdyż AS=BS, AB=CS: to iest, promień BS w punkcie C podzielony iest w stosunku średnim i skraynym (222), i bok 10kąta AB równa się odcinkowi CS, który iest większy od drugiego odcinka CB: gdy bowiem w ostatniéy proporcyi poprzednik piérwszy BS większy iest od swego następnika CS, więc i poprzednik drugi CS musi być większy od swego następnika CB. Chcąc zatém wpisać pięciokąt foremny w dane koło, trzeba naprzód promień danego koła podzielić w stosunku średnim i skraynym: odcinek większy promienia tak podzielonego, będzie cięciwą 10téy części okręgu: poprowadziwszy potém cięciwę dwóch dziesiątych części okręgu, ta będzie bokiem pięciokąta szukanego.

Uwaga. Wpisawszy w koło pięciokąt i dziesięciokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 20, 40, 80 i t. d. bokach sposobem wyżéy podanym.

W powyższym sposobie dochodzenia boku dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego, przypuszczamy, że bok ten iest już znaleziony, i przez ciąg rozumowań dochodzimy na

11*

końcu, iż bok ten równa się wiekszéy części promienia podzielonego w stosunku średnim i skraynym. W nastepuiącym sposobie dowodzenia teyże prawdy przypusczenie takowe nie ma mieysca; lecz za to przypuścić należy iaką rzecz skądinąd wiadomą i potrzebuiącą tylko dowodzenia, że większa część promienia podzielonego w stosunku średnim i skraynym równa się bokowi dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Niech będzie promień SB podzielony w punkcie C w stosunku średnim i skraynym. Wziąwszy cięciwę AB = CS i poprowadziwszy SA, CA; ponieważ podług założenia BS : CS = CS : BC, a AB = CS z wykréślenia, będzie więc BS : AB = AB : BC: tróykąty zatém SBA, CBA są podobne (196), a tém samém kąty przeciwne bokom proporcyonalnym są równe; to iest kąt S = CAB, i kąt SAB = ACB: a że kąt SAB = B, gdyż tróykąt SBA iest równoramienny, więc i kąt ACB = B, a tém samém bok AB = AC; że zaś AB = CS z wykréślenia, więc AC = CS: tróykąt zatém ACS iest równoramienny, a tém samém kąt S = CAS.

Lecz kąt ACB = S + CAS (85); czyli
kąt SAB = 2S; a tym samém
kąt B = 2S.

W ostatnich dwóch równaniach dodawszy strony odpowiadaiące, będzie
kąt SAB + B = 4S. Dodawszy po obu stronach kąt S, będzie kąt SAB + B + S = 5S; to iest, w tróykącie SBA summa wszystkich trzech

kątów iest 5 razy większa od kąta S, czyli co na iedno wychodzi, kąt S iest piątą częścią trzech kątów tróykąta: a że trzy kąty tróykąta ważą dwa kąty proste; więc kąt S iest piątą częścią dwóch kątów prostych, czyli dziesiątą częścią 4 kątów prostych; a tém samém łuk AB będący miarą kąta S, iest dziesiątą częścią całego okręgu, więc cięciwa łuku tego AB równa z wykréślenia większéy części promienia podzielonego w sposunku średnim i skraynym, iest bokiem dziesięciokąta foremn~~ym~~ego w koło wpisanego.

238. Zagad. *Wpisać w koło wielokąt foremny o 15 bokach.*

Rozw. Bok sześciokata czyli promień koła iest cięciwą 6téy części okręgu; bok dziesięciokąta iest cięciwą 10téy części okręgu. Różnica między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ iest $\frac{1}{15}$. Więc z punktu A przeniosłszy bok dziesięciokąta od A do D, i promień koła od A do E, łuk DE = AE — AD; czyli łuk DE iest różnicą między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ częścią okręgu, a tém samém iest $\frac{1}{15}$ częścią okręgu. Więc cięciwa tego łuku będzie bokiem piętnastokąta foremnego w koło wpisanego.

Uwaga. Wpisawszy w koło piętnastokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 30, 60, 120 i t. d. bokach sposobem wyżéy podanym.

239. *Uwaga 2.* W powyższych zagadnieniach podaliśmy sposób podzielenia okręgu, 1*ód* na części równych 3, 6, 12 i t. d.; 2*re*, na 4, 8, 16 i t. d.; 3*cie*, na 5, 10, 20 i t. d.; 4*te*, na 15, 30, 60 i t. d.

Są także sposoby dzielenia okręgu na imne części równe, a mianowicie na 25, 50, 100, 200, 400 i t. d.; na 45, 90, 180, 360 i t. d.; lecz sposoby te w Jeometryi Elementarnéy wyłożone być nie mogą.

240. Część $\frac{1}{360}$ okręgu zowie się *stopniem*, *gradus*. Wprowadzono ten podział okręgu na stopnie dla łatwieyszego oznaczania wielkości kątów, których miarą są łuki między ramiomami zawarte, iakośmy powiedzieli wyżéy (119); a dla większéy dokładności każdy stopień dzieli się iescze na 60 części równych zwanych *minutami piérwszemi*, *minuta prima*, każda minuta na 60 części równych zwanych *sekundami*, *minuta secunda*, każda sekunda na 60 części równych zwanych *tercyami*, *minuta tertia* it. d. Zero położone u góry z prawéy strony liczby iakiéy oznacza stopnie, a znamie iedno, dwa, trzy it. d. takież położenie maiące, oznacza minuty, sekundy, tercye it. d. *np.* łuk iakikolwiek $a = 37^{\circ}\ 15'\ 24''$ znaczy, że łuk ten ma stopni 37, minut 15, i sekund 24.

Ponieważ miarą kąta prostego iest czwarta część okręgu (120), więc kąt prosty ma 90 stopni; kąt roztwarty więcéy, a kąt ostry mniéy niż 90 stopni.

Można było inną iakąkolwiek część okręgu wziąć za stopień: zgodzono się iednak na część $\frac{1}{360}$ dla téy podobno przyczyny, że liczba 360 iest podzielna przez wszystkie liczby, zacząwszy od 1, aż do 10, wyłączywszy tylko liczbę 7.

Poźniéy we Francyi przyięto inny podział okręgu na stopnie: $\frac{1}{400}$ część okręgu nazwano *grade* stopniem; setną część stopnia nazwano minutą, setną część minuty nazwano sekundą i t. d. W takim więc podziale kąt prosty ma 100 stopni; kąt roztwarty więcéy, a kąt ostry mniéy a niżeli 100 stopni: łuk *np.* iakikolwiek $a = 24, 91$ znaczy, że łuk ten ma stopni 24 i minut 91, podług nowego podziału.

Nowy ten podział w tém iest wygodny, że działania arytmetyczne z ułomkami dziesiątnemi wymagaią nie wiele pracy.

Wreszcie stopnie dawnego podziału łatwo być mogą obrócone na stopnie podziału nowego. Chcąc *np.* 72 stopnie podziału dawnego obrócić na stopnie podziału nowego, trzeba ułożyć następuiącą proporcyą:

$$90 : 100 = 72 : X = 80.$$

Podobnież chcąc *np.* 50 stopni nowego podziału obrócić na stopnie podziału dawnego, trzeba ułożyć następuiącą proporcyą:

$$100 : 90 = 50 : X = 45. \text{ it.d.}$$

241. Powiedzieliśmy wyżéy (121), że w niektórych szczególnych przypadkach można kąt dany, a tém samém łuk będący miarą tego kąta podzielić na części równych 3, 5 i t. d. Zagadnienia poprzedzaiące ułatwią do tego drogę; trzeba tylko uważać iaką częścią całego okręgu iest dany łuk. Niechby *np.* dany łuk był 4tą częścią okręgu koła; bok dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, byłby cięciwą 3ciéy części danego łuku, a bok dwudziestokąta fore-

mnego w toż koło wpisanego byłby cięciwą 5ttéy części tegoż łuku. Gdyby łuk dany był 5tą częścią okręgu koła, bok piętnastokąta foremnego w to koło wpisanego byłby cięciwą 3ciéy części danego łuku i t. d.

242. Zagad. *Maiąc wiadomy bok wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, znaleźć ważność boku innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, który ma boków dwa razy więcéy niż wielokąt piérwszy.*

Rozw. Niech będzie AB *fig.* 126, bok wielokąta piérwszego, AM bok wielokąta drugiego. Przedłużywszy promień MS do N, i poprowadziwszy cięciwę AN, w tróykącie MAN prostokątnym przy A (128), i w którym AB iest prostopadła do MN (109), iest $MN : AM = AM : MO$ (202). Więc $AM^2 = MN \times MO$. A że $MN = 2MS$, a $MO = MS - SO$; będzie więc

$$AM^2 = 2SM\,(MS - SO) \;;\; - \;;\; - \;;\; - \;A.$$

W tróykącie ASO prostokątnym przy O, iest $SO^2 = AS^2 - AO^2$ (169): czyli $SO^2 = MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2$: gdyż $MS = AS$, $AO = \frac{1}{2}AB$. Więc $SO = \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$. W równaniu zatém A zamiast SO położywszy znalezioną ważność, równanie to zamieni się w następuiące: $AM^2 = 2MS^2\,(MS - \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$.

Wziąwszy promień MS za 1, będzie

$AM^2 = 2\,(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}AB)^2}$; to iest: połowę boku danego wielokąta podnieść do kwadratu, kwadrat ten odiąć od 1, z pozostałéy reszty wyciągnąć piérwiastek kwadratowy, który odięty od 1 i rozmnożony przez 2, będzie kwadratem boku wielokąta szukanego; a zatém piérwiastek tego kwadratu będzie ważnością tegoż boku.

Łuk AM wpunkcie P podzieliwszy na dwie równe części, i poprowadziwszy dwie cięciwy AP, PM; cięciwy te byłyby dwòma przyległemi bokami wielokąta foremnego w koło wpisanego, maiącego boków dwa razy więcéy niż wielokąt drugi; i byłoby podług powyższego zagadnienia $AP^2 = 2(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2} AM)^2}$ i tak daléy.

243. Zagad. *Maiąc wielokąt foremny o iakieykolwiek liczbie boków ABCD it.d. fig. 127 w koło wpisany, opisać na tém kole drugi wielokąt podobny piérwszemu.*

Rozw. Ze środka koła S, spuściwszy S*a*, S*b* it.d. prostopadłe do boków wielokąta ABCDEF, i przez punkta *a*, *b*, *c* i t.d. poprowadziwszy styczne koła GH, HI i t.d., aż do przecięcia się z sobą w punktach G, H, I, K i t.d. wielokąt GHI i t.d. będzie szukany: gdyż poprowadziwszy liniie SG, SH, SI i t.d., tróykąty SH*a*, SH*b* prostokątne przy *a* i *b* maią bok SH spólny; bok S*a* = S*b*, więc przystaną do siebie (52), a w szczególności kąt HS*a* = HS*b*, a zatém i miary tych kątów są równe; to iest, łuk B*a* = B*b*. Więc liniia SH przechodzi przez środek łuku *ab*, czyli liniia SH przechodzi przez wiérzchołek kąta B. Tymże sposobem okazać można, że liniia SI przechodzi przez wiérzchołek kąta C i t.d. Ze zaś liniia GH iest równoległa od AB, gdyż obiedwie są prostopadłe do *Sa*, i liniia HI równoległa od BC i t. d. będzie kąt GHI=ABC (70). Podobnież okazać można, że kąt HIK = BCD iitd. Więc kąty wielokąta opisanego równe są kątom wielokąta wpisanego. Nadto w dwóch tróyłkątach GSH, ASB podobnych, tudzież w drugiich dwóch HSI, BSC podobnych, iest GH: AB=SH: SB HI: BC=SH: SB; a że SH: SB=SH: SB, więc GH: AB=HI: CB.

W téy proporcyi nastepnik 1wszy AB równy iest następnikowi 2mu BC z założenia; więc i poprzedniki są równe: to iest, GH=HI. Tymże sposobem okazać można, że HI=IK, IK=KL i t. d. a zatém wielokąt GHI i t. d. ma boki wszystkie między sobą równe; iest więc foremny i podobny wielokątowi wpisanemu.

Sposób 2gi. Niech bedzie wielokąt foremny ABC i t. d. w koło wpisany *fig.* 128. Poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d. i z końców A, B, C i t. d. tych promieni poprowadziwszy liniie GH, HI, IK i t. d. prostopadle do tych promieni, i przecinaiące się z sobą w punktach H, I, K it. d.; wielokąt GK będzie szukany.

Gdyż w dwóch tróykątach ABG, BCH, bok AB=BC iako boki wielokąta foremnego; kąt BAG=CBH gdyż maią za miare połowę łuków równych AB, BC (126), kąt ABG=BCH dla téyże przyczyny, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności kąt G=H.

Tymże sposobem okazać można, że dwa tróykąty BCH, CDI, przystaną do siebie; będzie więc kąt H=I. Toż mówić o innych tróykątacch; a zatém wielokąt GHIK i t.d. ma kąty równe.

Nadto tróykąty ABG, BCH, CDI i t.d. są rownoramienne; gdyż kąty ich przy podstawie AB, BC CD i t.d. są równe, iako maiące za miarę połowę łuków AB, BC i t.d.; więc bok AG = BG, BH = CH i t.d. a że wszystkie te tróykąty mogą do siebie przystać, więc będzie AG = GB = BH = HC = CI i t.d. Że zaś każdy bok wielokąta opisanego GHIK i t.d. złożony iest z dwóch takowych liniy, więc wszystkie boki będą między sobą równe. Wielokąt zatém opisany GHIK i t.d. maiąc wszystkie kąty równe, i boki równe iest foremny.

244. *Uwaga*. Przez wszystkie wiérzchołki kątów kwadratu ABCD *fig.* 124 wkoło wpisanego poprowadziwszy styczne, utworzy się EFGH kwadrat na kole opisany, który iest kwadratem średnicy tegoż koła: gdyż bok tego kwadratu EF iest równy DB średnicy koła. A zatém kwadrat na kole opisany i kwadrat średnicy iest wszystko iedno.

245. *Odwrotnie*. Maiąc wielokąt foremny GHIK i t.d. *fig.* 127. opisany na kole, aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny piérwszemu, wiérzchołki kątów danego wielokąta złączmy ze środkiem koła liniiami SG, SH, SI i t.d. które okrąg przecinaią w punktach A, B, C i t.d. Punkta te połączywszy liniiami prostemi AB, BC itd. wielokąt AD będzie szukany: gdyż 1*ód* tróykąty SGH, SHI, SIK itd. mogą do siebie przystać; a w szczególności kąty

ich przy S są między sobą równe, więc i miiary ich, to iest, łuki AB, BC, CD i t. d. są także i równe, a tém samém i cięciwy AB, BC, CD i t.d. będące bokami wielokąta szukanego, są mieedzy sobą równe. 2re. Ponieważ GS = HS i ASS = BS, więc GS : AS = HS : BS; a zatém liniia AB iest równoległa od linii GH (180). Podobnynmże sposobem okazać można, że liniia BC iest równoległa od HI. A zatém kąt ABC = GHI, iaako zawarte między liniiami względem siebie równoległemi i wiednęż stronę rozchodzącemi się. Dla téyże przyczyny kąt BCD = HIK i t.d. a że kąty GHI, HIK itd. są równe z założenia, wieec i kąty ABC, BCD it.d. będą sobie równe. Wielokąt zatém wpisany ABCD i t.d. maiąc boki i kąty równe, iest foremny.

Sposób 2gi. Niech będzie wielokąt foremny GHIK i t.d. *fig.* 128. opisany na kole: aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny danemu, punkta zetknięcia się boków wielokąta danego z okręgiem, to iest punkta A, B, C itd. połączywszy liniiami prostemi AB, BC i t. d. wielokąt ABCD it.d. będzie szukany: gdyż w dwóch tróykątach ABG, BCH; bok AG = BH, bok BG = HC iakośmy okazali w zagadnieniu poprzedzaiącém (243); kąt AGB = BHC z założenia: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności AB = BC. Tymże sposobem okazać można, przez przystanie dwóch tróykątów BCH i CDI, tudzież drugich dwóch CDI i DEK i t. d., że bok BC = CD, bok CD = DE i t. d. Boki zatém wielokąta ABCD it. d.

są między sobą równe: a tém samém i łuki AB, BC, CD i t.d. których boki te są cięciwami, są między sobą równe. A stąd wypada, że i kąt ABC = BCD: gdyż piérwszy z nich obeymuie ramionami swoiemi łuk AEC, drugi obeymuie ramionami swoiemi łuk BFD: te zaś dwa łuki są sobie równe, każdy bowiem z nich złożony iest ze 4 łuków między sobą równych. Podobnież okazać można, że kąt BCD = CDE, kąt CDE = DEF i t.d. Wielokąt zatém ABCD i t.d. maiąc wszystkie boki i kąty równe iest szukany.

246. Zagad. *Maiąc wiadomy bok AB, wielokąta foremnego ABCD it.d. w koło wpisanego fig. 127. znaleźć ważność boku HG wielokąta GHI i t.d. na témże kole opisanego.*

Rozw. Poprowadziwszy Sa prostopadłą do AB, dwa tróykąty SAm, SGa prostokątne przy m i a, i maiące kąt S spólny są podobnę więc Sm : Sa = Am : Ga. Rozmnożywszy 2gi stosunek przez 2, będzie Sm : Sa = 2Am : 2Ga; czyli Sm : Sa = AB : HG. Więc

$$GH = \frac{AB \times Sa}{Sm} ; — ; — ; — ; — ; A.$$

W tróykącie ASm iest $Sm^2 = AS^2 - Am^2$ (169); czyli $Sm^2 = Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2$; a zatém $Sm = \sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$. Ważność tę położywszy w równaniu A zamiast Sm, będzie

$$GH = \frac{AB \times Sa}{\sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}}.$$

I taka iest ważność boku GH wielokąta foremnego na kole opisanego. Oznaczywszy bok

AB wielokąta w koło wpisanego głoską a, bok HG wielokąta na kole opisanego głoską A, a promień Sa wziąwszy za 1, będzie

$$A = \frac{a \times 1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}a)^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}a)^2}}.$$

Podobnież oznaczywszy głoską b bok wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt 1wszy wpisany, a głoską B bok wielokąta opisanego, maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt 1wszy opisany; będzie $B = \frac{b}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}b)^2}}$ i t. d.

247. Twier. *Obwody wielokątów foremnych o iednéy liczbie boków, są w stosunku promieni kół opisanych lub wpisanych, a ich powiérzchnie są w stosunku dwumnożnym tychże promieni.*

Dow. 1ód. Niech będą dwa wielokąty foremne o iednéy liczbie boków ABCDEF, *abcdef* *fig.* 122: wpisawszy w nie i opisawszy na nich koła, których środki są S, *s* poprowadźmy promienie SA, SB, SC i t. d., *sa*, *sb*, *sc* i t. d. W dwóch tróykątach ABS, *abs*, kąt ASB = *asb*, kąt SAB = *sab*: gdyż każdy z nich iest połową kąta w wielokącie: więc dwa te tróykąty są podobne. Będzie zatém SA : *sa* = AB : *ab* Ze zaś i obwody tych dwóch wielokątów maią się iak AB : *ab* (214); więc obwody te maią się także iak SA, *sa*: to iest, iak promienie kół opisanych.

2re. Z punktów S i s do boków AB i ab spuściwszy prostopadłe SM, sm, dwa tróykąty AMS, ams prostokątne przy M, m, i w których kąt SAM$=$$sam$, są podobne; więc SA, sa $=$ SM: sm; a że podług dowiedzenia, SA: sa $=$ AB: ab; więc AB: ab $=$ SM: sm, a tém samém obwód iednego wielokąta, do obwodu drugiego, iak SM: sm czyli iak promienie kół wpisanych w te wielokąty: liniie bowiem SM, sm są promieniami kół wpisanych.

3cie. Ponieważ iest AB: ab $=$ SA: sa i AB: ab $=$ SM: sm będzie więc $AB^2 : ab^2 = SA^2 : sa^2$ i $AB^2 : ab^2 = SM^2 : sm^2$. A że powiérzchnie tych wielokątów maią się do siebie iak $AB^2 : ab^2$ (214), więc będą się też miały iak $SA^2 : sa^2$, albo iak $SM^2 : sm^2$, to iest, iak kwadraty promieni kół opisanych lub wpisanych; czyli, powiérzchnie wielokątów foremnych o iednéy liczbie boków są w stosunku dwumnożnym promieni kół opisanych lub wpisanych.

248. Twierd. *Powiérzchnia wielokąta foremnego na kole opisanego ABCD i t. d. fig.* 122. *równa iest iloczynowi iego obwodu przez połowę promienia koła wpisanego w ten wielokąt.*

Dowod. Do wiérzchołków wszystkich kątów danego wielokąta poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d., powiérzchnia wielokąta podzielona będzie na tyle tróykątów mogących do siebie przystać, ile wielokąt ma boków. Każdy z tych tróykątów *np.* ASB, biorąc w nim za podstawę bok wielokąta AB, ma za wysokość

SM promień koła wpisanego. Będzie więc powiérzchnia tróykąta

ASB=AB×$\frac{1}{2}$SM. Podobnież powiérzchnia tróykąta

BSC=BC×$\frac{1}{2}$SM: gdyż SN=SM; a zatém, powiérzchnia tróykątów ASB+BSC=AB×$\frac{1}{2}$SM+BC×$\frac{1}{2}$SM, czyli ASB+BSC=(AB+BC)$\frac{1}{2}$SM.

Tymże sposobem postępuiąc daléy, okażemy, że powiérzchnia wszystkich tróykątów składaiących powiérzchnią wielokąta danego, równa iest (AB+BC+CD+DE+EF)$\frac{1}{2}$SM, to iest, powiérzchnia wielokąta ABCD i t. d. równa iest iloczynowi iego obwodu, przez połowę promienia koła w ten wielokąt wpisanego (*).

249. *Wniosek.* Stąd wypada, że kiedy iest kilka wielokątów foremnych o różnéy liczbie boków, na iednémże kole opisanych, powiérzchnie ich maią się do siebie, iak ich obwody: gdyż nazwawszy ieden wielokąt Q, drugi *q*, obwód piérwszego O, 2go *o*, a promień koła na którém te wielokąty są opisane, czyli co na iedno wychodzi, promień koła w te wielokąty wpisanego nazwawszy R, będzie podług poprzedzaiącego twierdzenia Q=$\frac{1}{2}$RO; *q*=$\frac{1}{2}$R*o*: a zatém Q:*q*=$\frac{1}{2}$RO:$\frac{1}{2}$R*o*. Podzieliwszy drugi stosunek przez $\frac{1}{2}$R, będzie Q:*q*=O:*o*, to iest, wielokąty Q i *q* są do siebie iak ich obwody.

150

(*) *Prostopadła SM spuszczona ze środka koła w wielokąt foremny wpisanego, do boku tegoż wielokąta zowie się po grecku* Apothema.

250. Twierd. *Powiérzchnia wielokąta foremnego w koło wpisanego, maiącego parzystą liczbę boków, równa iest iloczynowi połowy promienia koła opisanego przez obwód innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, lecz maiącego dwa razy mniéy boków niż wielokąt dany.*

Dow. Niech będzie AD *fig.* 123, sześciokąt foremny w koło wpisany, ACE tróykąt foremny czyli równoboczny w toż koło wpisany. Poprowadziwszy promienie SA, SB, SC it.d. w tróykącie SBA wziąwszy za podstawę SB, wysokością iego będzie AG prostopadła do SB (109): a zatém powiérzchnia tróykąta SBA $=$ AG $\times \frac{1}{2}$SB. Podobnież powiérzchnia

tróykąta SBC $=$ CG $\times \frac{1}{2}$SB.

Więc SBA $+$ SBC $=$ (AG $+$ CG) $\frac{1}{2}$SB; czyli powiérzchnia czworokąta ABCS $=$ AC $\times \frac{1}{2}$SB.

Tymże sposobem okazać można, że powiérzchnia czworokąta CDES $=$ CE $\times \frac{1}{2}$SB, i AFES $=$ EA $\times \frac{1}{2}$SB. A zatém powiérzchnia wszystkich trzech czworokątów, czyli powiérzchnia sześciokąta AD $=$ (AC $+$ CE $+$ EA) $\frac{1}{2}$SB; to iest, powiérzchnia sześciokąta foremnego w koło wpisanego, równa iest iloczynowi obwodu tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego, przez połowę promienia koła opisanego.

Ten sam iest sposób dowodzenia, gdy wielokąt w koło wpisany ma inną iakąkolwiek liczbę parzystą boków. Oznaczywszy zatém głoską W obwód wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, a promień koła opisanego głoską R; iloczyn $\frac{1}{2}$ RW oznaczać będzie powierzchnią wielokąta foremnego w koło wpisanego. Uważać tu tylko potrzeba, że ieżeli W znaczy obwód tróykąta, kwadratu, pięciokąta i t. d. iloczyn $\frac{1}{2}$ RW wyrażać będzie w pierwszym przypadku powierzchnią sześciokąta, w drugim powierzchnią ośmiokąta, w 3cim powierzchnią dziesięciokąta i t. d.

251. Zagad. *Maiąc wiadome powierzchnie dwóch wielokątów foremnych, podobnych iednego w koło wpisanego, drugiego opisanego na kole, znaleźć powierzchnie dwóch innych wielokątów foremnych, iednego wpisanego, drugiego opisanego, maiących boków po dwa razy więcéy, niż wielokąty pierwsze.*

Rozw. Niech będzie *ab*, *fig.* 129 bok danego wielokąta wpisanego, AB równoodległa od *ab* bok wielokąta opisanego. Poprowadziwszy promień S*m* prostopadły do *ab*, tudzież cięciwę *am* i styczne *a*P, *b*N, cięciwa *am* będzie bokiem wielokąta wpisanego dwa razy więcéy boków maiącego, a PN będzie bokiem wielokąta opisanego dwa razy więcéy boków maiącego; co iest łatwo okazać podług wiadomości poprzedzaiących.

Niech będzie *q* powierzchnia wiadoma wielokąta wpisanego, którego bokiem iest *ab*, Q powierzchnia wiadoma wielokąta opisanego, którego bokiem iest AB; *x* powierzchnia szukana wielokąta wpisanego, którego bokiem iest *am*; X powierzchnia szukana wielokąta opisanego, którego bokiem iest PN.

Dwa tróykąty aDS, amS maiące spólny wiérzchołek w punkcie a, są do siebie iak podstawy SD, i SM (151), to iest

$$a\mathrm{DS} : am\mathrm{S} = \mathrm{SD} : \mathrm{S}m.$$

Te same dwa tróykąty, uważaiąc ie iako części wielokątów q i x, są do siebie iak te wielokąty: gdyż iaką częścią powiérzchni wielokąta q iest tróykąt aDS, taką częścią powiérzchni wielokąta x iest tróykąt amS, o czém widocznie przekonać się można, dokończywszy figury: będzie więc.

$a\mathrm{DS} : am\mathrm{S} = q : x$. Złożywszy dwie te proporcye, będzie $q : x = \mathrm{SD} : \mathrm{S}m$ — : — — A.

Tróykąty maS i mAS maiące spólny wiérzchołek w punkcie m, są do siebie iak podstawy aS, AS, to iest

$$ma\mathrm{S} : m\mathrm{AS} = a\mathrm{S} : \mathrm{AS}.$$

Te same tróykąty uważane iako części powierzchni wielokątów x i Q, są do siebie iak te wielokąty, to iest

$$ma\mathrm{S} : m\mathrm{AS} = x : \mathrm{Q}.$$

Złożywszy dwie ostatnie proporcye, będzie $x : \mathrm{Q} = a\mathrm{S} : \mathrm{AS}$: — : — : — : — B.

W tróykącie ASm, w którym aD iest równoodległa od Am, iest $\mathrm{SD} : \mathrm{S}m = a\mathrm{S} : \mathrm{AS}$ (178). Więc złożywszy dwie proporcye oznaczone głoskami A i B, będzie $q : x = x : \mathrm{Q}$; a tém samém $x^2 = \mathrm{Q} \times q$, $x = \sqrt{\mathrm{Q} \times q}$. To iest, powiérzchnia szukana wielokąta wpisanego x równa iest piérwiastkowi iloczynu dwóch powiérzchni wielokątów danych Q i q.

2re. Dwa tróykąty SPm, SPA maiące spólna wysokość Sm, są do siebie iak podstawy mnP, AP, to iest

$SPm : SPA = mP : AP$.

Ponieważ zaś liniia SP dzieli kąt ASm na dwie równe części, co łatwo iest okazać za ppomocą tróykątów SPm, SPa mogących do siebbie przystać, będzie więc

$mP : AP = Sm : AS$ (181); że zaś

$Sm : AS = SD : Sa$; czyli

$Sm : AS = SD : Sm$, gdyż $Sm = Sa$;

$SD : Sm = q : x$, podług piérwszéy części ninieyszego zagadnienia; złożywszy wwięc wszystkie te proporcye, będzie $SPm : SPA = q : x$, a tém samém $SPm : SPm + SPA = q : q + x$; czyli $SPm : ASm = q : q + x$: Rozmnożywszy poprzedniki przez 2, będzie $2SPm : ASm = 2q : q + x$.

Lecz $2SPm = SPm + SPa = aPmS$ i ASm uważane iako części powiérzchni wielokąttów X i Q są do siebie iak te wielokąty, to iest

$2SPm : ASm = X : Q$; więc

$X : Q = 2q : q + x$; a tém samém

$$X = \frac{2q \times Q}{q + x}.$$

252. *Uwaga.* Znalazłszy wielokąty x, X, chcąc potém znaleźć powiérzchnie dwóch innych wielokątów y wpisanego, Y opisanego, któreby miały po dwa razy więcéy boków, niż wielokąty x, X; tymże samym sposobem postępuiąc znaleźlibyśmy, że $y = \sqrt{X \times x}$;

$$Y = \frac{2x \times X}{x + y}.$$

Podobnież oznaczywszy głoskami z, Z powiérzchnie dwóch innych wielokątów maiących po dwa razy więcéy boków, niż wielokąty y, Y; byłoby $z = \sqrt{Y \times y}$; $Z = \frac{2y \times Y}{y + z}$ i t. d.

253. *Twierd.* Gdy są dwa koła nakréślone z jednego środka S, dwoma promieniami nierównemi AS, BS *fig.* 130, które się zowią kołami *spółśrodkowemi*, *circuli concentrici*; można zawsze w koło większe wpisać wielokąt foremny, na kole zaś mnieyszem opisać wielokąt podobny piérwszemu tak, *że obwód wielokąta wpisanego w żadnym punkcie nie zeydzie się z okręgiem koła mnieyszego, obwód zaś wielokąta opisanego w żadnym punkcie nie zeydzie się z okręgiem koła większego.*

Dow. Przez punkt B poprowadziwszy styczną CD, aż do przecięcia się z okręgiem większym w punktach C i D, podzielmy okrąg większy na tyle części równych, aby każda część była mnieysza od łuku CAD. Daymy na to, że taką częścią iest łuk EAF, który w punkcie A iest podzielony na dwie części równe. Poprowadziwszy cięciwę EF, cięciwa ta iest w odległości większéy od środka koła S, niżeli cięciwa CD (124). A że ta cięciwa iest równoodległa od cięciwy CD, gdyż obiedwie są prostopadłe do AS (109); więc dwie te cięciwy zeyść się z sobą nie mogą: a zatém i cięciwa EF z okręgiem koła mnieyszego zeyść się nie może; a tém samém i obwód wielokąta foremnego w koło większe wpisanego, którego bokiem iest cięciwa EF, z okręgiem koła mnieyszego zeyść się nie może.

Poprowadziwszy promienie ES, FS przecinaiące się z cięciwą CD w punktach I, H, liniia IH będzie bokiem wielokąta opisanego na kole mnieyszém podobnego wielokątowi wpisanemu w koło większe (243). Gdyby bok ten IH mógł się zeyść z okręgiem koła większego, zeyście się to w innym punkcie nie mogłoby nastąpić, chyba w punkcie I lub H, które ze wszystkich punktów linii HI są naybardziéy oddalone od okręgu mnieyszego, a tém samém naybardziéy przybliżone do okręgu większego. Lecz gdyby punkt *np.* I znaydował się na okręgu większym, na ten czas liniia SI byłaby równa linii SE; co być nie może, gdyż piérwsza iest częścią drugiéy: więc i bok IH wielokąta drugiego nie może się zeyść z okręgiem większym. Toż mówić o innych bokach tego wielokąta. A zatém obwód wielokąta opisanego na kole mnieyszém, nie może się zeyść z okręgiem koła większego.

ROZDZIAŁ IX.

O powiérzchni koła i o stosunku okręgu do średnicy.

254. Wiadomości w Rozdziale V i innych wyłożone, dały nam poznać rozmaite własności koła, do znacznéy liczby twierdzeń o liniiach prostych, o kątach i wielokątach ścisły wpływ maiących. Lecz pozostała iescze do wyłożenia

rzecz w dalszéy Jeometryi istotnie potrzebna, to iest, czyby nie można iakowym sposobem zmierzyć okręgu koła i iego powiérzchni, ieżeli nie z taką dokładnością, z iaką mierzyć możemy liniie proste i płasczyzny liniiami prostemi zakończone; to przynaymniéy z iak naywiększém do rzeczywistéy ważności przybliżeniem. Wiadomości w poprzedzaiącym Rozdziale podane o wielokątach foremnych w koło wpisanych i opisanych na kole ułatwią nam do tego drogę.

255. Przypatrzywszy się z uwagą dwom wielokątom foremnym o iednakowéy liczbie boków, iednemu w koło wpisanemu, drugiemu opisanemu na kole, postrzeżemy *1ód*, że obwód opisanego większy iest, niż obwód wpisanego wielokąta: gdyż w tróykątach ABG, BCH i t. d. *fig.* 128, $AG + BG > AB$, $BH + CH > BC$ i t. d. (22).

256. *2re.* Podwaiaiąc ciągle liczbę boków wielokąta wpisanego i opisanego, obwód piérwszego będzie się co raz powiększał, obwód zaś drugiego będzie się coraz zmnieyszał. Jakoż niech będzie *fig.* 131, *ab* bok wielokąta foremnego w koło wpisanego, *a*M, *b*M połowy dwóch boków przyległych wielokąta na kole opisanego. Poprowadziwszy promień S*m* prostopadły do *ab*, i cięciwy *am*, *bm*, tudzież liniią AB prostopadłą do S*m*; cięciwy *am*, *bm* będą dwoma bokami przyległemi wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt piérwszy wpisany; liniie zaś *a*A, A*m*, *m*B, B*b*, będą połowami boków wielokąta opisanego,

maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt opisany piérwszy.

W tróykącie amb iest $am+bm>ab$ (22), to iest, summa dwóch boków wielokąta wpisanego drugiego, większa iest od iednego boku wielokąta piérwszego: a zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta wpisanego drugiego większa iest od summy wszystkich boków czyli od obwodu wielokąta wpisanego piérwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt drugi, większy iest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

Podobnież w tróykącie AMB iest $AB<AM+MB$; czyli $Am+mB<AM+MB$. Dodawszy po obu stronach $aA+Bb$, będzie

$$aA+Am+mB+Bb<aA+AM+MB+Bb;$$

czyli $aA+Am+mB+Bb<aM+Mb$. To iest, summa dwóch boków wielokąta opisanego drugiego mnieysza iest od boku wielokąta opisanego piérwszego. A zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta drugiego mnieysza iest od summy wszystkich boków czyli od obwodu wielokąta piérwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta opisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt opisany drugi, mnieyszy iest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

257. 3*cie*. Kiedy więc obwód wielokąta wpisanego tém iest większy, im więcéy boków ma wielokąt, a obwód wielokąta opisanego tem iest mniéyszy, im więcéy boków ma wielokąt; idzie

zatém, że im więcéy dwa te wielokąty maią boków, tém mniéysza zachodzi różnica między ich obwodami. Można nawet wpisać w koło i na niém opisać dwa wielokąty foremne o iednéyże liczbie boków takie, że różnica miedzy ich obwodami mnieysza będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. Gdyż ponieważ obwody wielokątów foremnych o iedneyże liczbie boków maią się do siebie iak promienie kół wpisanych (247) oznaczywszy obwód wielokąta MI *fig.* 128, głoską O, obwód zaś wielokąta AD głoską W, będzie $O : W = Sm : Sq$; a tém samém $O - W : O = Sm - Sq : Sm$; czyli $O - W : O = mq : Sm$. A zatém $O - W = \frac{mq \times O}{Sm}$; czyli wziąwszy promień Sm za 1, $O - W = mq \times O$. W tém równaniu ieżeli mq równa się $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ itd. części promienia Sm czyli 1, iloczyn $mq \times O$ będzie równy $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ it.d. części obwodu wielokąta opisanego, a tém samém $O - W$, czyli różnica między obwodami tych wielokątów, równa będzie $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ i t.d. części obwodu tegoż wielokąta opisanego.

Wziąwszy zatém mq *fig.* 125, równą $\frac{1}{10}$, lub innéy iakiéykolwiek części promienia Sm, byleby tylko liniia ta mq była mnieysza od ilości naznaczonéy, co będzie zawsze rzeczą podobną do uskutecznienia, i przez punkt q poprowadziwszy cięciwę FG prostopadłą do Sm, gdyby cięciwa ta nie była bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, dosyćby było podzielić okrąg tego koła na takie części równe, aby każda część mnieysza była od łuku FG. Daymy na to, że taką częścią iest łuk *ab*, który przeniosłszy na łuk FG tak aby promień S*m* dzielił go w punkcie *m* na dwie równe części, i poprowadziwszy cięciwę *ab*; cięciwa ta będąca bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, odetnie liniią *mc* mnieyszą od *mq*, a tém samém iescze bardziéy mnieyszą od ilości naznaczonéy, niż iest liniia *mq*.

Można więc różnicę między obwodami dwóch tych wielokątów uczynić mnieyszą od wszelkiéy ilości naznaczonéy, podwaiaiąc podług potrzeby liczbę boków wielokąta wpisanego.

258. 4*te*. Obwód wielokąta wpisanego AD *fig*. 128, o iakiéykolwiek liczbie boków, zawsze iest mnieyszy od okręgu koła: gdyż zawsze liniie proste AB, BC it.d. krótsze są od liniy krzywych czyli od łuków A*m*B, B*n*C i t.d. (5). Obwód zaś wielokąta opisanego MI, o iakieykolwiek liczbie boków, zawsze iest większy od okręgu koła: gdyż liniie złamane AGB, BHC i t.d. bardziéy od liniy prostych AB, BC i t.d. oddalone, dłuższe są niż liniie krzywe, czyli łuki A*m*B, B*n*C i t.d. mniéy oddalone od tychże liniy prostych AB, BC it.d. (*). Okrąg zatém koła co do swo-

(*) *Prawda ta iest wypadkiem sczególnym następuiącego twierdzenia: wszelkie liniie wypukłe, to iest te, które liniia prosta we dwóch tylko punktach przecinać może, iak iest* np. *okrąg koła, i obwód wielokąta maiącego wszystkie kąty wyskakuiące, są tém dłuższe, im się bar-*

iéy długości, środek trzyma miedzy obwodem wielokąta opisanego i wpisanego. Kiedy więc różnica między obwodami dwóch tych wielokątów, może być mniéysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy; tém bardziéy różnica między okręgiem koła i obwodem iednego z tych dwóch wielokątów mnieysza być może od wszelkiéy ilości naznaczonéy: bo z trzech ilości nierównych różnica między naywiększą i naymnieyszą, zawsze iest większa, niż między średnią i naywiększą, lub między średnią i naymnieyszą.

---

dziéy od linii prostéy oddalaią.

Dowod. *Niech będą dwie liniie wypukłe ACB, AMB fig. 132: poprowadziwszy liniią prostą DE dotykaiącą się linii wypukłey ACB w punkcie C; liniia ta DE będzie krótsza niż łuk DME; będzie więc $ADEB < AMB$. Wziąwszy potém punkta H, L pośrednie między punktami A i C, B i C. i poprowadziwszy styczne FG, IK, utworzy się nowa liniia wypukła AFGIKB mnieysza od linii wypukłéy ADEB: gdyż $FG < FD + DG$, $IK < EI + EK$. Tym sposobem postępuiąc daléy, możnaby wykréślić nieograniczoną liczbę liniy wypukłych corazbardziéy zmnieyszaiących się w miarę przybliżenia się ich do linii wypukłéy ACB, która tém samém będzie nie tylko krótsza od AMB, lecz od wszelkich innych liniy wypukłych, środkuiących między wypukłą AMB i ACB, bardziéy od linii prostéy AB oddalonych a niżeli iest liniia ACB.*

259. *Twierd.* Jeżeli dwie wielkości nieodmienne A i B są takie, że można dowieść, iż ich różnica A — B iest mnieysza niż trzecia wielkość naznaczona δ tak mała, iak tylko być może: dwie te wielkości A i B są między sobą równe.

Dow. Jakoż gdyby dwie te wielkości nie były równe, tedy zachodziłaby między niemi różnica, którą oznaczywszy D, byłoby A — B = D, a tém samém byłaby rzecz niepodobna wziąć między niemi różnicę mniéyszą od D, co się sprzeciwia założeniu.

Uwaga. Trzeba się tu dobrze zastanowić nad wyrazem *nieodmienne*: gdyż można *np.* otrzymać wyrażenie $\sqrt{2}$ tak bliżkie piérwiastku prawdziwego, że różnica między znalezionym a prawdziwym, może być mniéysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy; a iednak piérwiastek znaleziony nigdy nie będzie równy prawdziwemu: lecz tu za każdém przybliżeniem otrzymuiemy wypadek odmienny: wielkości zaś A i B są zawsze te same.

260. Twierd. *Okręgi kół są do siebie w stosunku swoich promieni.*

Dow. W koła dane, których okręgi oznaczamy C, c, wpisawszy dwa wielokąty foremne o iedneyże liczbie boków, i obwody ich oznaczywszy głoskami W, w, a promienie kół głoskami R, r; ponieważ obwody wielokątów podobnych maią się iak promienie kół opisanych (247), będzie więc W : w = R : r, a tém samém $\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$. Nadto można przynaymniéy w myśli sobie wystawić, że liczba boków w tych wielokątach iest tak wielka, iż różnica między obwodem każdego z nich a okręgiem koła opisanego iest mnieysza, niż wielkość iakakolwiek tak mała, iak tylko być może. Kiedy więc $\frac{C}{c}$ iest stosunkiem dwóch okręgów, różnica między stosunkami $\frac{C}{c}$ i $\frac{W}{w}$ ieśliby iaka była, może być przywiedziona do takiego stopnia małości, do iakiego ią przywieść zechcemy. Że zaś ta sama różnica zachodziłaby między stosunkami $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$, gdyż $\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$; wypada stąd iż można dowieść, że różnica między ilościami nieodmiennemi $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$ iest mnieysza niż trzecia wielkość naznaczona tak mała, iak tylko być może; będzie więc podług twierdzenia poprzedzaiącego $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$, czyli $C : c = R : r$ (*).

(*) *Dowodzenie to i twierdzenie poprzedzaiące wyłożone tu są w kształcie takim, iaki ie czyni do okazania innych prawd w dalszéy Jeometryi naywygodnieyszemi, i iaki zgadza się naybardziéy z wysłowieniem w Jeometryi używanem. To samo dowodzenie mogłoby inaczéy tak być wyłożone. Wpisawszy w dwa dane koła wielokąty foremne podobne o liczbie boków tak wielkiéy iak tylko być może, obwody tych wielokątów bez widocznego uchybienia, mogą być wzięte za okręgi kół opisanych: gdyż boki tych wielokątów będące cięciwami*

Sposób 2gi. Oznaczywszy okręgi dwóch kół głoskami C, c, a ich promienie R, r; trzeba dowieść że iest $R : r = C : c$; — ; — ; — A.

Dow. Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni iéy wyraz c iest albo zamały do uczynienia proporcyi, albo zawielki.

W 1*szym* przypadku weźmy ilość m większą od c, i daymy na to, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa :

$R : r = C : m$, w którey $m > c$.

Opiszmy na kole c wielokąt foremny taki, aby różnica między iego obwodem, który zwać będziemy o, i okręgiem c mnieysza była od różnicy między ilością m i tymże okręgiem c; to iest, aby było $o - c < m - c$. Dodawszy po obu stronach c, wypadnie $o < m$.

Opiszmy i na kole C wielokąt foremny podobny wielokątowi opisanemu na kole c. Ponieważ obwody wielokątów podobnych, maią się do siebie iak promienie kół wpisanych (247); oznaczywszy więc obwód 2go wielokąta głoską O, będzie $R : r = O : o$. A że z przypuszczenia iest $R : r = C : m$; więc złożywszy dwie te proporcye, wypadnie $O : C = o : m$.

W téy proporcyi drugi poprzednik o iest mnieyszy od swego następnika z dowiedzenia; 1*wszy* zaś poprzednik O, czyli obwód wielokąta opisanego, iest większy od swego następnika

łuków nieskończenie małych, nie różniłyby się przynaymniéy na oko od tychże łuków. A że obwody wielokątów foremnych podobnych maią się iak promienie kół opisanych, więc i okręgi maią się iak promienie.

C, czyli od okręgu koła (258). Proporcya więc ta iest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy ią poprzedzaiących, z których 1*wsza* R : $r = O : o$, iest dowiedziona wyżéy; 2*ga* zatém R : $r = C : m$, musi być fałszywa. Nie może więc w proporcyi A ostatni wyraz c być za mały.

W przypadku 2gim, ieżeli ostatni wyraz c w proporcyi A iest za wielki, weźmy ilość n mnieyszą od c, i daymy na to, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa, R : $r = C : n$, w któréy $n < c$.

Wpiszmy w koło c wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica miedzy okręgiem c i obwodem tego wielokąta zwanym w, mnieysza była od różnicy między okręgiem c i ilością n; to iest aby było $c - w < c - n$. Dodawszy po obu stronach w i n, a odiąwszy c, zostanie $n < w$.

Wpiszmy w koło C wielokąt foremny podobny wielokątowi wpisanemu w koło c. Ponieważ obwody wielokątów podobnych maią się do siebie iak promienie kół opisanych; oznaczywszy więc obwód wielokąta w koło C wpisanego głoską W, będzie R : $r = W : w$. A że podług przypuszczenia iest R : $r = C : n$; złożywszy zatém dwie ostatnie proporcye, będzie C : W $= n : w$.

W téy proporcyi 2gi poprzednik n mnieyszy iest od swego następnika w z dowiedzenia; 1*wszy* zaś poprzednik C to iest okrąg koła, większy iest od swego następnika W, to iest, od obwodu wielokąta w toż koło wpisanego: proporcya więc ta iest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy ią poprzedzaiących, z których 1sza R : r = W : w, iest wyżéy dowiedziona: 2*ga* zatém R : r = C : n, musi być fałszywa. Nie może więc ostatni wyraz c proporcyi A być za wielki.

Albo tak: Jeżeli w 2gim przypadku wyraz 4ty c proporcyi A iest za wielki, tedy albo wyraz ten potrzeba zmnieyszyć; albo też powiększyć wyraz 3*ci* C, co wychodzi na iedno: a na ten czas w proporcyi A odmieniwszy mieysce wyrazów, byłoby r: R = c: m, gdzie $m > C$, co podług 1go przypadku być nie może; a tém samém ostatni wyraz c proporcyi A nie może być za wielki.

A kiedy wyraz ten c nie iest ani za mały, ani za wielki do uczynienia proporcyi A; więc iest taki iak być powinien, a tém samém proporcya ta iest prawdziwa: to iest, okręgi kół maią się iak ich promienie.

Sposób 3ci. Niech będą dwa koła nakréślone promieniami sc, SC *fig.* 133: będzie okrąg koła nakréślonego promieniem sc, do okręgu koła nakréślonego promieniem SC, iak promień sc do promienia SC; czyli oznaczywszy okrąg koła 1go c, 2go C, będzie sc: SC = c: C : — , — ; — , — A.

Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, więc będzie sc do SC iak c do wyrazu 4go, albo mnieyszego od C, albo większego. Daymyż na to, że wyraz 4ty C iest za wielki, i ze środka S pro-

mie-

mieniem Sć mnieyszym od promienia SC nakréśliwszy koło, którego okrąg oznaczamy głoską ć, niech będzie, ieżeli być może, ta proporcya prawdziwa; $sc : SC = c : ć$.

Wpiszmy w koło którego promień SC, wielokąt foremny ABC i t. d. tak aby obwód iego nigdzie nie schodził się z okręgiem koła ć (253). Wpiszmy także i w koło, którego promień *sc* wielokąt *abcd* itd. podobny piérwszemu. Ponieważ obwody wielokątów podobnych, maią się iak promienie kół opisanych, oznaczywszy zatém obwód wielokąta *abcd* i t. d. głoską *w*, obwód wielokąta ABCD i t. d. głoską W, będzie $sc : SC = w : W$: a że podług przypuszczenia $sc : SC = c : ć$; więc złożywszy dwie te proporcye, będzie $w : c = W : ć$.

W téy proporcyi poprzednik 1szy *w*, czyli obwód wielokąta *abcd* i t. d. mnieyszy iest od swego następnika *c*, to iest od okręgu koła opisanego; poprzednik zaś 2gi W, czyli obwód wielokąta ABCD it.d. większy iest od swego następnika ć, to iest, od okręgu koła wykréślonego promieniem Sć (258). A zatém proporcya ta iest fałszywa; to iest, nie może być, aby promień *sc* miał się do promienia SC, iak okrąg koła wykréślonego promieniem *sc*, do okręgu koła wykréślonego promieniem Sć mnieyszym od promienia SC.

W przypadku 2gim, ieżeli w proporcyi A 4ty wyraz C iest zamały, trzeba go powiększyć, albo zmnieyszyć wyraz 3*ci* *c*; a na ten czas w proporcyi A odmieniwszy mieysce wyrazów, byłoby SC: sc = C do okręgu koła mnieyszego od okręgu c; co podług przypadku 1go być nie może.

Kiedy więc w proporcyi A 4ty wyraz C nie może być ani mnieyszy, ani większy od okręgu C, musi zatém być równy okręgowi C. Więc okręgi kół maią się iak ich promienie.

261. *Wnioski.* Ztąd wypada 1*ód*, że okręgi kół maią się także iak średnice: gdyż w powyższéy proporcyi C: c = R: r, rozmnożywszy 2gi stosunek przez 2, będzie C: c = 2R: 2r; a że 2R i 2r znaczą średnice tych kół, więc oznaczywszy średnice głoskami S i s, będzie C: c = S: s.

262. 2*re.* Dwa łuki CB, cb *fig.* 133, kół nierównych, będące miarą dwóch kątów S, s równych, które się zowią *łukami podobnemi*, są do siebie także w stosunku promieni lub średnic kół do których należą: gdyż ponieważ kąty S i s są równe, więc iaką częścią 4 kątów prostych iest kąt S, taką częścią 4 kątów prostych iest kąt s; a tém samém iaką częścią okręgu swego iest łuk CB będący miirą kąta S, taką częścią okręgu swego iest łuk cb będący miarą kąta s. Łuki więc te są do siebie w stosunku swoich okręgów: a że okręgi maią się iak ich promienie lub średnice, więc i łuki CB, cb maią się iak promienie lub średnice kół, do których należą.

263 3*cie.* Z tego także twierdzenia wypada, że gdyby wiadomy był stosunek okręgu iednego tylko koła do iego promienia lub średnicy, iuż tém samém byłby wiadomy stosunek okręgu każdego innego koła do iego promienia

lub średnicy. Jakoż niech π oznacza ten stosunek wiadomy; czyli, co na iedno wychodzi, niech π będzie okrąg koła którego średnica iest 1; niech C oznacza okrąg innego koła, którego promień iest R: będzie podług poprzedzaiącego twierdzenia

$1 : \pi = 2R : C$. więc $C = 2\pi R$.

Gdyby więc stosunek π czyli okrąg koła maiącego za średnicę 1 był wiadomy, łatwo byłoby znaleźć okrąg C każdego innego koła, którego promień R iako liniia prosta może być zawsze wiadomy. Idzie więc tylko o znalezienie stosunku okręgu iednego koła do średnicy: ułatwi to następuiące zagadnienie.

264. Zagad. *Znaleźć stosunek przybliżony okręgu do średnicy.*

Rozw. Ażeby to zagadnienie rozwiązać, potrzeba 1*od* wpisać w koło wielokąt foremny taki, aby stosunek obwodu iego do średnicy był wiadomy.

2*re*. Opisać na kole wielokąt podobny wpisanemu (243).

3*cie*. Za pomocą wiadomego boku wielokąta wpisanego wyrachować naprzód bok, a potém obwód wielokąta opisanego (246).

4*te*. Podwoiwszy liczbę boków obu tych wielokątów, wyrachować naprzód bok i obwód wielokąta drugiego wpisanego (242), potém bok i obwód wielokąta drugiego opisanego.

5*te*. To ostatnie działanie powtórzywszy kilkanaście razy, gdy nakoniec znaydziemy dwie liczby, iednę mnieyszą wyrażaiącą obwód wie-

13*

lokąta wpisanego, drugą większą wyrażaiącą obwód wielokąta opisanego, takie, że ich różnica iest bardzo mała; na ten czas liczba środek między niemi trzymaiąca, to iest, większa od ważności obwodu wielokąta wpisanego, a mnieysza od ważności obwodu wielokąta opisanego, może być wzięta za ważność okręgu, który co do długości swoiéy, trzyma środek między obwodami dwóch tych wielokątów (258). Ważność tę porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy stosunek przybliżony okręgu koła do średnicy.

Wpiszmy *np.* w koło sześciokąt foremny: ponieważ bok tego sześciokąta równy iest promieniowi koła opisanego (231), wziąwszy więc promień koła za 1, obwód sześciokąta wpisanego będzie 6.

Oznaczywszy bok sześciokąta wpisanego a, opisanego A, bok 12kąta wpisanego b, opisanego B, bok 24kąta wpisanego c, opisanego C, i tak daléy; będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (246), $A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$.

Że zaś $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4-1) = \frac{1}{4} \times 3$; a wyciągaiąc pierwiastek z iloczynu, trzeba go wyciągnąć z każdego czynnika; gdy więc w iloczynie $\frac{1}{4} \times 3$ czynnik $\frac{1}{4}$ iest kwadratem, którego pierwiastek iest $\frac{1}{2}$, powyższe równanie zamieni się w następuiące: $A = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$; rozmnożywszy licznik i mianownik przez 2, będzie $A = \frac{2}{\frac{2}{2}\sqrt{3}}$; czyli $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$; a tém samém 6 A $= \frac{12}{\sqrt{3}}$; i tą iest ważność obwodu 6kąta opisanego; a że obwód sześciokąta wpisanego iest 6; więc okrąg koła będzie większy od 6, a mnieyszy od $\frac{12}{\sqrt{3}}$.

Podobnież podług zagadnienia podanego wyżéy (242), będzie bok 12kąta wpisanego, czyli

$$b = \sqrt{2(1-\sqrt{1-\tfrac{1}{4}})} = \sqrt{2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2-\tfrac{2}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}};$$ a tém samém obwód 12kąta wpisanego, czyli

$$12\,b = 12\sqrt{2-\sqrt{3}};$$ i t. d.

Wyciągnąwszy pierwiastek z liczby 3, będzie $\sqrt{3} = 1,7320508075688 77$; przez pierwiastek ten podzieliwszy 12, będzie obwód 6kąta opisanego, czyli 6A $= 6,9282032302 75$.

Tenże pierwiastek liczby 3 odiąwszy od 2, zostanie $0,267949192431123$; z czego wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$b = 0,517638090205$; pierwiastek ten rozmnożywszy przez 12, będzie obwód 12kąta wpisanego, czyli $12\,b = 6,211657082460$.

Tym sposobem postępuiąc daléy, znaydziemy obwody wielokątów wpisanych i opisanych, począwszy od 6kątów, aż do wielokątów maiących po 12288 boków, iak wyraża następuiąca tablica.

6 a = 6,0000000.	6 A = 6,9282032.
12 b = 6,2116571.	12 B = 6,4307806.
24 c = 6,2652572.	24 C = 6,3193199.
48 d = 6,2787004.	48 D = 6,2921724.
96 e = 6,2820639.	96 E = 6,2854292.
192 f = 6,2829049.	192 F = 6,2837461.
384 g = 6,2831152.	384 G = 6,2833260.
768 h = 6,2831678	768 H = 6,2832203.
1536 i = 6,2831809.	1536 I = 6,2831941.
3072 k = 6,2831842.	3072 K = 6,2831875.
6144 l = 6,2831850.	6144 L = 6,2831858.
12288 m = 6,2831852.	12288 M = 6,2831854.

(*)

Widzimy tu iak obwody wielokątów tych coraz się bardziéy do siebie przybliżaią; tak

(*) *Dla większéy dokładności obwody tych wielokątow rachowane były do dwunastu liczb dziesiętnych; w tablicy zaś położone są tylko z 7 dziesiętnemi, lecz ostatnia liczba dziesiętna iest raz większa, drugi raz mnieysza od znalezionéy. I tak obwód 12kąta wpisanego w tablicy będący iest większy od znalezionego, i powinienby mieć na końcu zero nie 1; lecz za to obwód 24kąta w tablicy położony iest mnieyszy od znalezionego: znaleziony bowiem wypada* 6,265257226560.

dalece, że różnica między obwodami dwóch wielokątów ostatnich maiących po 12288 boków, równa się tylko dwom iednościom dziesiętnym siodmego rzędu. A że okrąg koła większy iest od obwodu wielokąta wpisanego, a mnieyszy od obwodu wielokąta opisanego; liczba więc trzymaiąca środek między ważnościami dwóch tych obwodów, to iest liczba

6,2831853 może być naznaczona za ważność okręgu koła, którego promień iest 1. Stosunek zatém okręgu do średnicy będzie 2: 6,2831853, czyli podzieliwszy obadwa wyrazy przez 2, 1: 3,1415926. A zatém 3,1415926 iest ważnością stosunku przybliżonego, któryśmy wyżéy oznaczyli przez π (263).

W działaniach nie wymagaiących wielkiéy dokładności, można przestać na dwóch liczbach dziesiętnych: będzie więc stosunek średnicy do okręgu iak 1: 3,14, czyli rozmnożywszy przez 100 oba wyrazy, iak 100: 314.

Archimedes wpisawszy w koło i opisawszy na nim dwa wielokąty foremne o 96 bokach, znalazł, że okrąg koła iest mnieyszy od $3\frac{10}{70}$, a większy od $3\frac{10}{71}$. Podług tego więc rachunku będzie stosunek średnicy do okręgu 1: $3\frac{10}{70}$; czyli obróciwszy całkowitą na ułomek, i obadwa wyrazy rozmnożywszy przez 70, a potém ie podzieliwszy przez 10; będzie stosunek średnicy do okręgu 7: 22. Późniéy dokładność w téy mierze posunięto daléy; lecz ze wszystkich stosunków wiadomych dwa następuiące, pod względem dokładności, zasługuią na szczególną uwagę: 1szy 113 : 355; 2gi 1250 : 3927.

265. *Uwaga.* Działanie powyższe, za pomocą którego wynayduią się obwody wielokątów foremnych w koło wpisanych i opisanych na kole, zabiera nie mało czasu. Lecz można ie cokolwiek skrócić sposobem następuiącym. Daymy na to, że AB *fig.* 126, iest bokiem 6kąta foremnego w koło wpisanego; będzie więc AM bokiem 12kąta, AP bokiem wielokąta maiącego boków 24 i t.d. Poprowadziwszy średnicę AC, i cięciwy CB, CM i t.d. w tróykątach prostokątnych ABC, AMC i t.d. iest

$$CB = \sqrt{AC^2 - AB^2};\ CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} \text{ itd.}$$

Niech będzie promień AS $= 1$; a tém samém średnica AC $= 2$; bok 6kąta AB $= a$, bok 12kąta AM $= b$ i t.d. cięciwa CB $= m$, CM $= n$, CP $= o$ i t.d. Równania więc powyższe zamienią się w następuiące:

$$m = \sqrt{4 - a^2}.\quad n = \sqrt{4 - b^2}.$$

Że zaś $a = 1$, $b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (264); a tém samém $a^2 = 1$, $b^2 = 2 - \sqrt{3}$; położywszy więc te ważności w równaniach poprzedzaiących, będzie

$$m = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3};\ n = \sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{3}};$$ czyli $n = \sqrt{2 + m}$; gdyż $m = \sqrt{3}$ z dowodzenia.

Tymże sposobem okazać można, że cięciwa CP, czyli $o = \sqrt{2 + n}$; $p = \sqrt{2 + o}$ i t.d.

Odbywszy działanie, będzie $m = \sqrt{3} =$ 1,7320508075. Więc $n = \sqrt{2 + 1,7320508075}$ $= 1,9318516525$. $o = \sqrt{2 + 1,9318516525}$ $= 1,9828897227$ i t. d.

Znalazłszy ważność cięciw m, n, o i t. d. łatwo będzie znaleźć ważność dla b, c, d it.d.: gdyż w tróykącie ACM iest $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2}$, czyli $b = \sqrt{4 - n^2}$. A że $n = \sqrt{2 + 1,7320508075}$ czyli $n = \sqrt{3,7320508075}$; a tém samém $n^2 = 3,7320508075$; więc ważność tę odiąwszy od 4, zostanie 0,2679491925; z czego wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie 0,51763809 ważnością boku dwunastokąta wpisanego; co rozmnożywszy przez 12, będzie obwód tegoż wielokąta 6,2116571, iak w tablicy powyższey (264) i t. d.

266. Zastanowiwszy się nad powiérzchniami dwóch wielokątów foremnych o iedneyże liczbie boków, z których ieden iest na kole opisany, drugi wpisany w koło, łatwo iest postrzedz że powierzchnia opisanego większa iest od powiérzchni wpisanego. Ciągle podwaiaiąc liczbę boków obudwu tych wielokątów postrzeżemy, że powiérzchnią wpisanego coraz się bardziéy powieksza, powiérzchnia opisanego coraz się bardziéy zmnieysza. A stąd wypada, że im większą liczbę boków maią dwa te wielokąty, tém mnieysza różnica zachodzi między ich powiérzchniami. Można nawet różnicę tę uczynić mnieyszą od wszelkiéy ilości naznaczonéy.

Jakoż ponieważ powiérzchnie wielokątów podobnych maią się iak kwadraty z promieni kół wpisanych (247), oznaczywszy zatém powiérzchnią wielokąta MI *fig.* 128 głoską O, powiérzchnią wielokąta AD głoską W, będzie O: W $= Sm^2 : Sq^2$; a tém samém O — W : O $= Sm^2 - Sq^2 : Sm^2$. Więc $O - W = \frac{O(Sm^2 - Sq^2)}{Sm^2}$.

Że zaś czynnik $Sm^2 - Sq^2$ może być mnieyszym od wszelkiéy ilości naznaczonéy (257); więc O — W, to iest różnica między powiérzchniami tych wielokątów, może być mnieysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy.

Albo tak: Różnica między powiérzchnią wielokąta opisanego MI i wpisanego AD składa się z tylu tróykątów ABG, BCH i t. d. ile wielokąty te maią boków. Powiérzchnia każdego z tych tróykątów równa się iloczynowi połowy iego podstawy, którą iest bok wielokąta wpisanego, przez wysokość Gq; a zatém powiérzchnia wszystkich tych tróykątów, czyli różnica między powiérzchnią wielokąta opisanego i wpisanego, równać się będzie iloczynowi połowy obwodu wielokąta wpisanego przez Gq. A że Gq można uczynić mnieyszą od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; więc i różnica między powierzchnią wielokąta opisanego i wpisanego, może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

267. Powiérzchnia koła mnieysza iest od powiérzchni wielokąta opisanego, a większa od powiérzchni wielokąta wpisanego. Kiedy więc różnica między powiérzchniami tych dwóch wie-

lokątów może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; tém bardziéy różnica między powiérzchnią koła i powiérzchnią wielokąta opisanego lub wpisanego, mnieysza być może od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

268. *Twierd.* Jeżeli są trzy wielkości A, B, X, z których A iest odmienna, ale zawsze większa od B i od X, które są nieodmienne, lecz takie, że A może być razem do B i do X tak przybliżoną iak się podoba, czyli że różnica tak między A i B, iako też między A i X, może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; będzie $B = X$.

Jakoż ieżeli $X > B$, bedzie

$A > X$ z założenia, $X > B$ z przypusczenia: kiedy więc różnica między A i B, moze być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, iakośmy założyli, tém bardziéy różnica miedzy X i B może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

Jeżeli $B > X$ będzie

$A > B$ z założenia, $B > X$ z przypusczenia, kiedy więc różnica między A i X może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, iakośmy założyli, tém bardziéy różnica między B i X, może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

Dwie zatém wielkości nie odmienne B, X, są takie, że różnica między niemi może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, a tém samém $B = X$ (259).

269. Twierd. *Powiérzchnia koła równa iest iloczynowi iego okręgu przez połowę pro-*

mienia; czyli, oznaczywszy okrąg koła głoską C, promień głoską R, a powiérzchnią koła głoską X, trzeba dowieść, że $X = \frac{1}{2}RC$.

Dowód. Opisawszy na kole wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków, i obwód iego oznaczywszy głoską O; powiérzchnia tego wielokąta równać się będzie iloczynowi $\frac{1}{2}RO$ (248). Iloczyn ten $\frac{1}{2}RO$, wyrażaiący powiérzchnią wielokąta opisanego, większy iest tak od powiérzchni koła oznaczonéy głoską X, iako też od iloczynu $\frac{1}{2}RC$: gdyż zawsze będzie $O > C$. Lecz przez ciągłe podwaianie liczby boków, można będzie nakoniec otrzymać wielokąt opisany taki, że różnica między obwodem O i okręgiem koła C, a tém samém między iloczynem $\frac{1}{2}RO$ i $\frac{1}{2}RC$, może być mnieysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy (258). Podobnież różnica między powiérzchnią tegoż wielokąta i powiérzchnią koła, może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy (266).

Trzy więc te ilości $\frac{1}{2}RO$, $\frac{1}{2}RC$; i prawdziwa powiérzchnia koła X, są zupełnie takie, o iakich mówiliśmi wyżéy (268): będzie więc $X = \frac{1}{2}RC$.

Sposób 2gi. Jeżeli to równanie $X = \frac{1}{2}RC$ iest fałszywe, to iest, ieżeli powiérzchnia koła nie iest równa iloczynowi okręgu przez połowę promienia, tedy iloczyn ten, iest albo mnieyszy, albo większy od powiérzchni koła.

W 1wszym przypadku ieżeli iloczyn $\frac{1}{2}RC$ iest mnieyszy od powiérzchni koła, weźmy ilość M większą od C, i daymy nato, ieżeli być może, że powiérzchnia koła równa się iloczynowi $\frac{1}{2}$RM, czyli że iest X $=$ $\frac{1}{2}$RM.

Opiszmy na kole daném wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między iego obwodem, który oznaczamy głoską O, i okręgiem C mnieysza była, niż iest między ilością M i tymże okręgiem C; to iest, aby było O — C $<$ M — C. Dodawszy po obu stronach C, będzie O $<$ M. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}$R, będzie $\frac{1}{2}$RO $<$ $\frac{1}{2}$RM. A że podług przypusczenia X $=$ $\frac{1}{2}$RM; więc będzie $\frac{1}{2}$RO $<$ X; to iest, iloczyn obwodu wielokąta opisanego przez połowę promienia koła wpisanego, czyli powiérzchnia wielokąta opisanego (248), mnieysza iest od powierzchni koła, co być nie może. A zatém i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2}$RC był mnieyszy od powiérzchni koła.

W 2gim przypadku, ieżeli iloczyn $\frac{1}{2}$RC iest większy od powiérzchni koła, weźmy ilość N mnieyszą od C, i dáymy nato, ieżeli być może, że X $=$ $\frac{1}{2}$RN.

Wpiszmy w koło dane wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między okręgiem C i obwodem tego wielokąta oznaczonym głoską W, mnieysza była od różnicy między okręgiem C i ilością N, to iest, aby było C — W $<$ C — N. Dodawszy po obu stronach W i N, a odiąwszy C, będzie N $<$ W. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}$R, bedzie $\frac{1}{2}$RN $<$ $\frac{1}{2}$RW. A że podług przypusczenia X $=$ $\frac{1}{2}$RN, będzie więc X $<$ $\frac{1}{2}$RW; to iest, powiérzchnia koła mnieysza iest od powiérzchni wielokąta w toż koło wpisanego (250); co być nie może. Więc i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2}$RC był większy od powiérzchni koła.

Kiedy więc iloczyn $\frac{1}{2}$RC nie może być ani mnieyszy, ani większy od powiérzchni koła, musi być zatém iéy równy.

Sposób 3ci. Powiérzchnią koła, którego promień SM *fig.* 133. oznaczywszy głoską X, a iego okrąg głoską C, trzeba dowieśdź, że $X = \frac{1}{2}SM \times C$.

Gdyby iloczyn ten $\frac{1}{2}SM \times C$, nie był równy powiérzchni koła X, byłby od niéy albo mnieyszy, albo większy; czyli, co na iedno wychodzi, iloczyn ten byłby równy albo powiérzchni koła mniéyszego od X, albo większego.

Daymy nato: *iód*, że iloczyn ten równy iest powiérzchni koła mniéyszego wykréślonego promieniem S*m*: oznaczywszy powiérzchnią tego koła głoską x, będzie podług przypusczenia $\frac{1}{2}SM \times C = x$.

Opiszmy na kole mnieyszém wielokąt foremny *abc* i t.d. taki, aby obwód iego nie schodził się nigdzie z okręgiem koła większego (253). Oznaczywszy obwód tego wielokąta głoską o, powiérzchnia iego równać się będzie iloczynowi $\frac{1}{2}Sm \times o$. Ze zaś okrąg koła większego $C > o$, a tém samém $\frac{1}{2}Sm \times C > \frac{1}{2}Sm \times o$; więc tém bardziéy $\frac{1}{2}SM \times C > \frac{1}{2}Sm \times o$. Lecz $\frac{1}{2}SM \times C = x$ podług przypusczenia; będzie więc $x > \frac{1}{2}Sm \times o$; to iest, powiérzchnia koła mnieyszego, byłaby większa od powiérzchni wielokąta na niém opisanego, co być nie może. Więc i to być nie może, ażeby iloczyn $\frac{1}{2}SM \times C$ był mnieyszy od powiérzchni koła X, czyli, niemoże być aby iloczyn okręgu koła przez połowę promienia był mnieyszy od powiérzchni tegoż koła.

2re. Podobnymże sposobem dowiedziemy, że iloczyn okręgu koła przez połowę promienia, nie może być większy od powierzchni koła, czyli, co na iedno wychodzi, że iloczyn ten nie może być równy powiérzchni koła większego. Bo daymy na to, że oznaczyć trzeba powiérzchnią koła wykréślonego promieniem Sm. Oznaczywszy okrąg koła tego głoską c, a iego powiérzchnią głoską x; trzeba dowieść, że iloczyn okręgu tego koła przez połowę promienia, nie może być równy powierzchni X koła większego wykréślonego promieniem SM, czyli, że nie może być $\frac{1}{2}Sm \times c = X$. wy

Jakoż na kole mnieyszém opisawszy, iak wyżéy, wielokąt foremny *abc* it.d. i obwód iego oznaczywszy głoską o, powiérzchnia tego wielokąta, będzie równa iloczynowi $\frac{1}{2}Sm \times o$. Że zaś obwód $o > c$, a tém samém $\frac{1}{2}Sm \times o > \frac{1}{2}Sm \times c$; więc gdyby iloczyn $\frac{1}{2}Sm \times c$ równy był powiérzchni koła większego X podług przypuszczenia, wypadłoby $\frac{1}{2}Sm \times o > X$, to iest, powiérzchnia wielokąta opisanego na kole mnieyszym, byłaby większa od powiérzchni koła wykréślonego promieniem SM, co być nie może; a zatém i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2}Sm \times c$ był większy od powiérzchni x, czyli, nie może być, aby okrąg koła rozmnożony przez połowę promienia był większy od powiérzchni tegoż koła.

Kiedy więc iloczyn okręgu koła przez połowę promienia, nie może być ani mnieyszy ani większy od powiérzchni tegoż koła; musi być zatém iéy równy.

270. *Wnioski* 1. Oznaczywszy przez π okrąg koła, którego średnica $=1$, a przez R promień, przez C okrąg drugiego koła, będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (263), $C = 2\pi R$. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}R$, będzie $\frac{1}{2}RC = \pi R^2$. To iest, powiérzchnia koła równa iest także iloczynowi kwadratu iego promienia, przez stosunek okręgu do średnicy, czyli przez okrąg koła którego średnica iest 1.

271. 2. Oznaczywszy okrąg iednego koła przez C, 2go przez c, promień 1go przez R, 2go przez r; będzie $C : c = R : r$. Rozmnożywszy poprzedniki przez R, a następniki przez r, będzie $RC : rc = R^2 : r^2$. Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez 2, będzie $\frac{1}{2}RC : \frac{1}{2}rc = R^2 : r^2$. A że $R : r = 2R : 2r$, czyli oznaczywszy średnice tych dwóch kół głoskami S i s, $R : r = S : s$, a tém samém $R^2 : r^2 = S^2 : s^2$; więc $\frac{1}{2}RC : \frac{1}{2}rc = S^2 : s^2$. To iest, powiérzchnie kół są do siebie w stosunku kwadratowym, czyli dwumnożnym swoich promieni lub średnic.

272. 3. Niech będzie część koła APMS *fig.* 126, między dwoma promieniami AS, MS i łukiem APM zawarta, która się zowie *wycinkiem* koła, *sector circuli*: ieżeli powiérzchnia tego wycinka iest $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i t. d. częścią powiérzchni koła, łuk też wycinka APM będzie, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i t. d. częścią okręgu tegoż koła (118). Powiérz-

wierzchnia zatém wycinka APMS tak się ma do powiérzchni koła, iak łuk wycinka APM do okręgu koła; czyli oznaczywszy powiérzchnią koła przez X, iego okrąg przez C, a promień przez R, będzie APMS : X = APM : C. Rozmnożywszy wyrazy 2go stosunku przez $\frac{1}{2}$R, będzie

$$APMS : X = \tfrac{1}{2}R \times APM : \tfrac{1}{2}RC.$$

W téy proporcyi następnik 1wszy X, to iest, powiérzchnia koła danego, równy iest następnikowi 2mu $\frac{1}{2}$RC, to iest, iloczynowi okręgu przez połowę promienia; a zatém i poprzednik 1wszy APMS równy być musi poprzednikowi 2mu $\frac{1}{2}R \times APM$; to iest, powiérzchnia wycinka koła, równa iest iloczynowi łuku tegoż wycinka, przez połowę promienia.

273. 4. Powiérzchnia odcinka APMA, iest różnicą między powiérzchnią wycinka APMS, i powiérzchnią tróykąta AMS; powiérzchnia drugiego odcinka AMNA, iest różnicą między powiérzchnią koła i powiérzchnią odcinka APMA. A zatém powiérzchnie tych dwóch odcinków, mogą być łatwo wyrachowane.

274. Zagad. *Wykréślić koło któregoby powiérzchnia równa była summie lub różnicy powiérzchni dwóch kół danych.*

Rozw. W przypadku 1szym wykréślić kąt prosty i dać mu za ramiona promienie dwóch kół danych; przeciwprostokątna będzie promieniem koła szukanego. W przypadku 2gim wykréślić kąt prosty, i dać mu za iedno ramie promień koła mnieyszego, a za przeciwprostokątną promień koła większego: drugie ramie kąta prostego będzie promieniem koła szukanego.

Dowodzenie zupełnie iest takie, iakiego użyliśmy wyżéy (215), mówiąc o wielokątach podobnych, których powiérzchnie są do siebie w stosunku dwumnożnym z boków odpowiadaiących, tak iak powiérzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni.

275. *Uwaga.* Gdyby dwa dane koła były między sobą równe, trzecie koło znalezione równe summie ich powiérzchni byłoby od iednego z nich dwa razy większe. W ogólności można znaleźć koło 3, 4, 5 i t. d. razy większe od koła danego tym samym sposobem iakiśmy podali wyżéy (168), na znalezienie kwadratu 3, 4, 5 i t. d. razy większego niż kwadrat dany.

276. Zagad. *Maiąc dane koło, wykréślić drugie spółśrodkowe z danêm, któregoby powiérzchnia była trzy razy mnieysza od powiérzchni koła danego.*

Rozw. Między całym promieniem koła danego i 3cią iego częścią znaleźć średnią ieometrycznie proporcyonalną (204), ta będzie promieniem koła szukanego. Daymy na to, że
99 AB *fig.* ~~100~~, iest promieniem koła danego, AD 3cia część tego promienia; liniia AC średnio ieometrycznie proporcyonalna między AB i AD iest promieniem koła szukanego: gdyż podług wykréślenia iest AB: AC = AC: AD; czyli zamiast liniy położywszy ich ważności w liczbach, będzie $3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$. Więc AB: AC = $3 : \sqrt{3}$; a têm samêm $AB^2 : AC^2 = 9 : 3$: gdyż $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$. Że zaś powiérzchnie kół

maią się iak kwadraty z promieni, oznaczywszy zatém powiérzchnią koła danego przez X, powiérzchnią koła znalezionego przez x, będzie

$$X : x = AB^2 : AC^2;\ \text{czyli}$$

$$X : x = 9 : 3.$$

W téy proporcyi następnik 2gi, iest 3 razy mnieyszy od swego poprzednika; więc i następnik 1wszy x iest 3 razy mnieyszy od swego poprzednika X; to iest, powiérzchnia koła znalezionego iest 3 razy mnieysza od powiérzchni koła danego.

Tym samym sposobem postępuiąc, łatwo będzie rozwiązać dwa następuiące zagadnienia:

1ód. *Maiąc dane koło znaleźć drugie spółśrodkowe z danėm, któregoby powiérzchnia była tyle razy mnieysza lub większa od powiérzchni danego, ile się podoba.*

2re. *Dane koło podzielić kołami spółśrodkowemi na tyle równych części, na ile się podoba.*

277. Zag. *Maiąc dane dwa koła spółśrodkowe, wyrachować różnicę ich powiérzchni.*

Rozw. Oznaczywszy powiérzchnią koła większego przez X, iego okrąg przez C, promień przez R, powiérzchnią koła mnieyszego przez x, iego okrąg przez c, promień przez r; będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (269), $X = \frac{1}{2}RC$, $x = \frac{1}{2}rc$. Odiąwszy strony równania 2go od stron równania 1wszego, zostanie

$$X - x = \tfrac{1}{2}RC - \tfrac{1}{2}rc \ \text{; — ; — ; — ; A.}$$

14*

Że zaś $R:r = C:c$ (260); więc $Rc = rC$; a tém samém $\frac{1}{2}Rc = \frac{1}{2}rC$. Odiąwszy po obu stronach $\frac{1}{2}rC$, zostanie $\frac{1}{2}Rc - \frac{1}{2}rC = o$.

W równaniu więc oznaczoném głoską A, dodawszy z prawéy strony $\frac{1}{2}Rc - \frac{1}{2}rC$, równość nie zginie, a równanie to weźmie na się następuiącą postać:

$$X - x = \tfrac{1}{2}RC - \tfrac{1}{2}rC + \tfrac{1}{2}Rc - \tfrac{1}{2}rc.$$

Rozłożywszy drugą stronę na czynniki, będzie

$$X - x = (R - r)\ (\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}c);\ \text{czyli},$$

$$X - x = (R - r)\ \left(\frac{C + c}{2}\right) - - - B.$$

Nadto ponieważ $R:r = C:c$, a tém samém $r:R + r = c:C + c$; podzieliwszy następniki przez 2; będzie $r:\frac{R+r}{2} = c:\frac{C+c}{2}$.

Niech będzie $\frac{R+r}{2} = P$. Wziąwszy liniią oznaczoną przez P za promień, i okrąg koła tym promieniem wykréślonego oznaczywszy przez O; będzie

$r : P = c : O$; a że z dowiedzenia

$r:\frac{R+r}{2} = c:\frac{C+c}{2}$; kiedy więc w tych dwóch proporcyach trzy piérwsze wyrazy iednéy proporcyi są równe trzem odpowiadaiącym wyrazom proporcyi drugiéy, wyraz 4ty 1wszéy, równy także być musi wyrazowi 4temu drugiéy proporcyi; to iest, $\frac{C+c}{2} = O$. W równaniu zatém B położywszy O zamiast $\frac{C+c}{2}$, będzie

$X - x = (R - r)\,O$. To iest, różnica powiérzchni dwóch kół spółśrodkowych $X - x$, równa iest iloczynowi różnicy ich promieni $R - r$, przez okrąg koła O wykréślonego promieniem równym połowie summy dwóch promieni kół danych $\frac{R+r}{2}$.

Uwaga. Wszelka ilość równaiąca się połowie summy dwóch ilości innych, iest między niemi średnią arytmetycznie proporcyonalną. Powyższe zatém wyrażenie

$X - x = (R - r)\,O$, można inaczéy tak wysłowić: różnica powiérzchni dwóch kół spółśrodkowych, równa iest iloczynowi różnicy ich promieni przez okrąg koła wykréślonego promieniem równaiącym się linii średniéy arytmetycznie proporcyonalnéy, między promieniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Można także wyznaczyć tę powiérzchnią innym sposobem, iak iest w następuiącém twierdzeniu.

278. Twierd. *Różnica powiérzchni dwóch kół spółśrodkowych, równa iest prostokątowi maiącemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę liniią prostą równą okręgowi koła wykréślonego promieniem równaiącym się linii średniéy arytmetycznie proporcyonalnéy miedzy promieniami dwóch danych kół spółśrodkowych.*

Dowod. Niech będą SC, Sc *fig.* 134 promienie dwóch kół spółśrodkowych. Daymy na to, że liniia prosta CE prostopadła do SC, równa iest okręgowi C koła większego. Poprowadziwszy liniią prostą SE, i z punktu *c* liniią *ce* równoodległą od CE, aż do przecięcia się z liniią SE w punkcie *e*, w dwóch tróykątach SCE, S*ce* podobnych iest SC : S*c* = CE : *ce*; czyli SC : S*c* = C : *ce* : gdyż CE = C podług wykréślenia, a zatém $ce = \frac{Sc \times C}{SC}$.

A że okręgi kół maią się iak promienie (260); oznaczywszy więc przez *c* okrąg koła wykréślonego promieniem S*c*, będzie SC : S*c* = C : *c*; a zatém $c = \frac{Sc \times C}{SC}$.

Z dwóch ostatnich równań wypada, że *ce* = *c*, to iest, że liniia *ce* równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem S*c*.

Powiérzchnia troykąta SCE = $\frac{1}{2}$SC × CE (150). Powiérzchnia tróykąta S*ce* = $\frac{1}{2}$S*c* × *ce*. Ze zaś CE równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem SC podług założenia, a *ce* równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem S*c* podług dowiedzenia, powiérzchnia zaś koła równa iest iloczynowi iego okręgu przez połowę promienia (269); powiérzchnia zatém tróykąta SCE równa iest powiérzchni koła większego, powiérzchnia tróykąta S*ce* równa iest powiérzchni koła mnieyszego; a tém samém różnica między powiérzchniami dwóch tych tróykątów, to iest, czworobok C*ce*E iest równy różnicy między powiérzchniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Podzieliwszy linią Cc w punkcie ć na dwie równe części i poprowadziwszy linią ćé równoodległą od CE, aż do przecięcia się z linią SE w punkcie é; przez punkt é poprowadźmy linią Bb prostopadłą do CE, przecinaiącą się w punkcie b z linią ce: prostokąt CcbB równy iest co do powiérzchni czworobokowi CceE: gdyż dwa prostokątne tróykąty ebé, éBE, maiące kąty przy é równe i boki bé, Bé równe (79), mogą do siebie przystać (26). Prostokąt zatém CcbB równy iest różnicy dwóch kół spółśrodkowych.

Prostokąt ten ma za wysokość linią Cc, która iest różnicą dwóch promieni, a za podstawę linią CB=ćb, która iest równa okręgowi ć koła wykréślonego promieniem Sć; co tym samym sposobem okazać można, iakim okazaliśmy, że linia ce iest równa okręgowi koła wykréślonego promieniem Sc. Idzie więc tylko o to, aby okazać, że promień Sć iest średnim arytmetycznie proporcyonalnym między promieniami SC i Sc; czyli, co na iedno wychodzi, że promień Sć równy iest połowie summy dwóch promieni SC i Sc; co iest łatwo okazać przedłużywszy SC do A tak aby CA=Sc.

279. *Uwaga.* Ponieważ powiérzchnia koła równa iest iloczynowi iego okręgu przez połowę promienia (269); podzieliwszy więc powiérzchnią koła przez połowę promienia, wypadnie na iloraz okrąg koła. Nadto dowiedliśmy wyżéy (267), że można w koło wpisać lub

na niém opisać wielokąt foremny taki, iż różnica między iego powiérzchnią i powiérzchnią koła, może być mnieysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy. Nakoniec okazaliśmy (251), że maiąc wiadome powiérzchnie dwóch wielokątów foremnych podobnych iednego w koło wpisanego, drugiego opisanego na kole, można znaleźć powiérzchnie dwóch innych wielokątów foremnych iednego wpisanego, drugiego opisanego maiących boków po dwa razy więcéy niż wielokąty piérwsze. Wiadomości te podaią inny sposób, cokolwiek łatwieyszy od podanego wyżéy (264), wynalezienia stosunku okręgu do średnicy.

Trzeba 1*ód* wpisać w koło i opisać na niém dwa wielokąty foremne o iedneyże liczbie boków, którychby powiérzchnie mogły być łatwo wyrachowane.

2*re*. Podwoiwszy liczbę boków wielokąta wpisanego i opisanego, wyrachować powiérzchnie dwóch drugich wielokątów maiących po dwa razy więcéy boków, niż dwa wielokąty piérwsze.

3*cie*. To ostatnie działanie powtórzywszy kilkanaście razy, gdy nakoniec znaydziemy dwie liczby iednę mnieyszą wyrażaiącą powiérzchnią wielokąta wpisanego, drugą większą wyrażaiącą powiérzchnią wielokąta opisanego takie, że ich różnica iest bardzo mała; na ten czas liczba środek między niemi trzymaiąca, może być wzięta za powiérzchnią koła, którą podzieliwszy przez połowę promienia, wypadnie na iloraz ważność okręgu koła; nakoniec ważność tę porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy stosunek przybliżony okręgu do średnicy.

Ponieważ kwadrat w koło wpisany iest dwa razy większy od kwadratu promienia (236), wziąwszy więc promień koła za 1, będzie powiérzchnia kwadratu wpisanego $= 2$. A że kwadrat na kole opisany iest kwadratem średnicy (244), a tém samém 4 razy większy od kwadratu promienia; będzie więc powiérzchnia kwadratu opisanego $= 4$.

Oznaczywszy powiérzchnią kwadratu wpisanego przez a, opisanego przez A, powiérzchnią ośmiokąta wpisanego przez b, opisanego przez B, powiérzchnią 16kąta wpisanego przez c, opisanego przez C, i t. d.; będzie

1*ód*, $a = 2$. $A = 4$.

Że zaś $b = \sqrt{A \times a}$; $B = \dfrac{2a \times A}{a + b}$ (251);

będzie więc

2*re*, $b = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8} = 2{,}8284271$.

$$B = \frac{4 \times 4}{2 + \sqrt{8}} = \frac{16}{4{,}8284271} = 3{,}3137085.$$

Podobnież ponieważ $c = \sqrt{B \times b}$; $C = \dfrac{2b \times B}{b + c}$; położywszy więc zamiast B i b znalezione ich ważności, i odbywszy działanie, znaydziemy powiérzchnie c i C 16kąta wpisanego i opisanego.

Tym sposobem postępuiąc daléy, znaydziemy powiérzchnie wielokątów wpisanych i opisanych, coraz bardziéy do siebie zbliżaiących się. I tak *np.* powiérzchnia wielokąta maiącego boków 128 wpisanego = 3,1403311, opisanego zaś o téyże saméy liczbie boków = 3,1422236. Powiérzchnia wielokąta o 2048 bokach, wpisanego = 3,1415877, opisanego zaś = 3,1415951. Powiérzchnia wielokąta o 16384 bokach wpisanego = 3,1415925; opisanego zaś = 3,1415927.

Powiérzchnie te różnią się tylko między sobą dwiema iednościami dziesiętnemi siodmego rzędu. Liczba zatém 3,1415926, może być wzięta za ważność powiérzchni koła (*). Ze zaś powiérzchnia koła, równa iest iloczynowi promienia przez połowę okręgu; kiedy więc promień iest 1, połowa okręgu będzie = 3,1415926. A zatém oznaczywszy promień koła przez R, średnicę przez S, a okrąg koła przez C, będzie R : $\frac{1}{2}$C = 1 : 3,1415926. Rozmnożywszy piérwszy stosunek przez 2, będzie 2R, czyli S : C = 1 : 3,1415926.

(*) *W wielokątach maiących po* 16384 *boków, podwoiwszy liczbę boków, otrzymamy wielokąty o* 32768 *bokach, których powiérzchnie w piérwszych siedmiu liczbach dziesiętnych od siebie się nie różnią; odbywszy bowiem działanie potrzebne, wypadnie powiérzchnia tak wpisanego iak opisanego* = 3,1415926.

TRYGONOMETRYA
PROSTOKREŚLNA.

280. Z twierdzeń o przystawaniu i z zagadnień o kréśleniu tróykątów prostokréślnych, to iest liniiami prostemi zakończonych, łatwo wnieść można, że ieżeli z sześciu części tróykąta, któremi są iego boki i kąty, trzy części są wiadome, drugie trzy mogą być wyznaczone, i tróykąt może być wykreślony, byleby ieden bok przynaymniey znaydował się między częściami wiadomemi. Lecz kréślenie tróykątów zależące od większéy lub mnieyszéy wprawy i dokładności, narzędzi do tego używanych, podlega rozmaitym uchybieniom, na których sprostowanie Jeometrya nie może podać żadnych prawideł, kiedy nawet liniia prosta nie może być tak wykréślona, aby nie miała żadnéy szerokości: gdy tym czasem w rachunku arytmetycznym wszelkie omyłki bez trudności poprawić można.

Dla dopełnienia więc nauki o tróykątach prostokréślnych, na które wszelkie inne wielokąty podzielone i zamienione być mogą, wypada do wykréślenia ieometrycznego przydać rachunek arytmetyczny, aby z trzech części tróykąta wyrażonych liczbami, drugie trzy części liczbami także wyrażone być mogły z taką dokładnością, do iakiéy tylko kałkuł algiebraiczny doprowadzić można. Część Jeometryi podaiąca na to sposoby, zowie się *Trygonometryą prostokréślną.*

3 281. Niech będzie tróykąt ACB *fig.* 104, w którym wiadome są kąty A, B i bok AB. Weźmy inny tróykąt *abc*, którego wszystkie części są wiadome, i w którym kąt $a = A$, $b = B$: więc dwa te tróykąty są podobne (191), a zatém $ab : AB = ac : AC$; $ab : AB = bc : BC$. Więc $ab \times AC = AB \times ac$; $ab \times BC = AB \times bc$. a tém samém $AC = \frac{AB \times ac}{ab}$; $BC = \frac{AB \times bc.}{ab}$.

Jeżeli więc boki *ab*, *ac*, *bc* i AB są wyrażone w liczbach, znaydziemy także w liczbach boki AC i BC; a że dwa te tróykąty są równokątne, kiedy więc kąty tróykąta *abc* są wiadome, będą także wiadome kąty tróykąta ABC: a tym sposobem wszystkie części tróykąta ABC są wiadome i mogą być wyrażone w liczbach, czyli, iak odtąd mówić będziemy, tróykąt ABC iest *rozwiązany.*

282. Stąd się okazuie, że gdybyśmy mieli ciąg tróykątów, którychby kąty miały wszelką ważność iaką tylko mieć mogą, i którychby wszystkie części były wiadome; w ciągu tym musiałby się znaydować ieden tróykąt równokątny z tróykątem danym do rozwiązania, za pomocą którego tróykąt dany moglibyśmy rozwiązać sposobem wyżéy okazanym.

Abyśmy ciąg taki tróykątów ułożyć mogli, zaczniymy od tróykątów prostokątnych: wszystkie takie tróykąty mogą być wykréślone w ezwartéy części koła, spuszczaiąc ze wszystkich punktów łuku AB *fig.* 135, liniie SC, ŚĆ it.d. prostopadłe do promienia RA, i prowadząc promienie RS, RŚ it.d. Tróykąty RCS, RĆŚ it.d. tym sposobem utworzone, wszystkie będą przy punktach C, Ć it.d. prostokątne; a kąty ich przy R będą miały wszelkie ważności, iakie tylko kąty ostre mieć mogą: gdyż miarą ich są łuki AS, AŚ it.d. których wielkość zależy od naszéy woli; kąty zaś CSR, ĆŚR it.d. w miarę powiększaiących się kątów przy R zmnieyszać się będą: gdyż kąt przy S, z kątem przy R w każdym tróykącie RCS waży ieden kąt prosty; i nie może być żaden tróykąt prostokątny dany do rozwiązania, któryby nie był podobny iednemu z tróykątów wykréślonych w czwartéy części koła.

283. Wszystkie te tróykąty RCS it.d., maią iednakową przeciwprostokątną równą promieniowi RA. Możnaby utworzyć inny ciąg tróykątów prostokątnych, którychby iedno ramię kąta prostego, równe było promieniowi RA: na ten koniec, dosyć iest z końca promienia RA wyprowadzić styczną AT nie ograniczonéy długości, i ze środka koła R przez punkta S, Ś it.d. poprowadzić sieczne RN, RŃ it.d. Rzeczą iest przez się widoczną, że kąty ostre przy R w tróykątach prostokątnych RNA, RŃA it.d. będą miały wszelką ważność, iaka tylko kąty ostre mieć mogą, i że tém samém między temi tróykątami, musi być ieden podobny tróykątowi prostokątnemu danemu do rozwiązania.

284. W tróykątach RCS it.d. przeciwprostokątna nie odmienia się; boki CS i t.d. rosną w miarę rosnących kątów CRS it.d., i łuków AS itd. Wielkość zatém kątów CRS it.d. i łuków AS it.d., zależy w tróykątach prostokątnych od wielkości boków CS, C'S' it.d. Boki te nazwano *Wstawami*, *sinus*, łuków i kątów im odpowiadaiących. I tak CS iest wstawa łuku AS i kąta ARS; C'S' iest wstawa łuku AS' i kąta ARS' i t. dl. *Wstawa więc łuku iest prostopadła spusczona z końca tego łuku na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku.*

285. Liniie RC, RC' it.d. które zmnieyszaią się w miarę powiększaiących się łuków AS, AS' it.d. są równe liniom SO, S'O' i t.d. prostopadłym do promienia RB, który iest prostopadły do promienia RA. Liniie te SO, S'O' it.d. są tém względem łuków BS, BS' i t.d. czém są liniie SC, S'C' it.d. względem łuków AS, AS' it.d. To iest, liniia SO iest wstawą łuku BS; liniia S'O' iest wstawą łuku BS' it.d. Dwa łuki, które do siebie dodane lub od siebie odięte równe są czwartéy części okręgu, nazywamy *Dopełnieniem* ieden drugiego, *complementum*. I tak łuk BS iest dopełnieniem łuku AS; łuk BS' iest dopełnieniem łuku AS' it.d. Liniie zatém SO, S'O' it.d. są wstawami dopełnienia łuków AS, AS' i t.d., *sinus complementi*. Wstawa dopełnienia inaczéy zowie się *dostawą*, *cosinus*. Więc liniie SO, S'O' it.d., tudzież równe im liniie RC, RC' i t.d. są dostawami łuków AS, AS' it.d. *Dostawa zatém łuku iest wstawą dopełnienia tegoż łuku*, *i*

równa się części promienia będącéy między środkiem koła i wstawą (*).

286. W tróykątach więc prostokątnych RCS i t. d. przeciwprostokątna RS i t. d. iest promieniem koła; boki CS it.d. są wstawami, a boki RC i t. d. są dostawami kątów ostrych R maiących swóy wiérzchołek w środku koła. W każdym więc tróykącie prostokątnym wziąwszy przeciwprostokątną za promień, a wiérzchołek iednego z dwóch kątów ostrych za środek koła, bok przeciwny kątowi ostremu maiącemu swóy wiérzchołek w środku koła będzie iego wstawą, a bok przyległy temuż kątowi iego dostawą.

287. W tróykątach ARN, ARŃ it.d. bok AR nie odmienia się; boki zaś RN, RŃ it.d. tudzież boki AN, AŃ i t.d. rosną w miarę rosnących kątów ARN it.d. i łuków AS it.d. które są miarą tychże kątów. Boki RN, RŃ it.d. zowią się *Sieczne*, *secantes*, łuków AS it.d., i kątów ARN it.d., boki zaś AN, AŃ it.d. *styczne*, *tangentes*, tychże łuków i kątów.

Sieczna zatém trygonometryczna łuku, iest promień przez koniec tego łuku poprowadzony i przedłużony, aż do zeyścia się ze styczną wyprowadzoną z drugiego końca tegoż łuku; Styczna zaś trygonometryczna łuku, iest część stycznéy przez ieden koniec tego łuku poprowadzonéy, zawarta między dwoma

---

(*) *Liniia AC nazywa się* Sinus versus: *lecz liniia ta w trygonometryi, nie służy do żadnego użytku.*

promieniami przez obadwa końce tegoż łuku poprowadzonemi.

288. W tróykątach więc prostokątnych ARN it.d., bok AR iest promieniem koła, boki AN it.d. są stycznemi, a przeciwprostokątne RN it.d. są siecznemi kątów ostrych ARN it.d. maiących swóy wiérzchołek w środku koła. W każdym więc tróykącie prostokątnym, wziąwszy iedno ramie kąta prostego za promień, a wiérzchołek iednego z kątów ostrych za środek koła, drugie ramie kąta prostego będzie styczną, a przeciwprostokątna sieczną kąta ostrego maiącego swóy wiérzchołek w środku koła.

289. Z końca B łuku AB *fig.* 136, wyprowadziwszy styczną B*n*, i przedłużywszy ią aż do zeyścia się z sieczną R*n*; liniia B*n* będzie styczną, a liniia R*n* sieczną łuku BS. Że zaś łuk BS iest dopełnieniem łuku AS (285), więc liniia B*n* iest styczną dopełnienia łuku AS, i zowie się inaczéy *dostyczną*, *cotangens*; liniia zaś R*n* iest sieczną dopełnienia tegoż łuku AS, i zowie się *dosieczną*, *cosecans.*

290. Wszystkie te liniie trygonometryczne będąc bokami podobnych tróykątów RCS, RNA, RB*n*, ROS, są między sobą proporcyonalne: maiąc zatém wiadome ważności iednych, łatwo będzie wyznaczyć ważności drugich.

Jakoż w tróykącie RCS prostokątnym przy C iest $CS^2 + RC^2 = RS^2$; czyli, oznaczywszy promień RS przez R, łuk AS przez *a*, liniie zaś trygonometryczne przez początkowe głoski ich nazwisk; będzie

wst² *a*

$\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = R^2$; więc $\text{wst}^2 a = R^2 - \text{dos}^2 a$; $\text{dos}^2 a = R^2 - \text{wst}^2 a$: a tém samém

$\text{wst}\, a = \sqrt{R^2 - \text{dos}^2 a}$; — ; — ; — ; 1.

$\text{dos}\, a = \sqrt{R^2 - \text{wst}^2 a}$; — ; — ; — ; 2.

2*re.* W tróykątach RAN, RCS podobnych iest RC : CS = RA : AN ; czyli $\text{dos}\, a : \text{wst}\, a = R : \text{sty}\, a$; więc $\text{sty}\, a = \frac{R.\, \text{wst}\, a}{\text{dos}\, a}$; — ; — 3.

3*cie.* W tróykątach RCS, RB*n* podobnych, iest CS : RC = BR : B*n*; czyli $\text{wst}\, a : \text{dos}\, a = R : \text{dot}\, a$; więc $\text{dot}\, a = \frac{R.\, \text{dos}\, a}{\text{wst}\, a}$; — ; — ; 4.

4*te.* W tróykątach RCS, RAN podobnych iest RC : RS = RA : RN ; czyli $\text{dos}\, a : R = R : \text{siec}\, a$; więc $\text{siec}\, a = \frac{R^2}{\text{dos}\, a}$; — ; — ; 5.

5*te.* W tróykątach RCS, RB*n* podobnych iest CS : RS = RB : R*n* ; czyli, $\text{wst}\, a : R = R : \text{dosiec}\, a$; więc $\text{dosiec}\, a = \frac{R^2}{\text{wst}\, a}$ — ; — 6.

Przypatrzywszy się równaniom 1, 2, 3, 4, 5 i 6, oznaczaiącym ważność 6ciu liniy trygonometrycznych, postrzeżemy, że ważność stycznéy i dotycznéy, siecznéy i dosiecznéy zależy od wyznaczenia ważności wstawy, dostawy i promienia. Że zaś długość promienia w mierzeniu kątów za pomocą łuków koła iest rzeczą oboiętną, więc wziąwszy promień za iedność, ważność innych liniy trygonometrycznych zależéć będzie od wyznaczenia wstawy i dostawy:

a właściwie mówiąc od wyznaczenia ważności samey tylko wstawy: gdyż dostawa zależy od ważności wstawy, iak się z równania pod liczbą 2 przekonać można.

Następuiące twierdzenie o ważności wstaw i dostaw summy lub różnicy dwóch łuków, zasługuie na naywiększą uwagę: gdyż zamyka w sobie wszystkie własności wstaw i dostaw.

291. Twierd. *Niech będą dwa iakiekolwiek łuki* a, b; *będzie*

$$\text{wst}\,(a \pm b) = \frac{\text{wst}\,a\,.\,\text{dos}\,b \pm \text{wst}\,b\,.\,\text{dos}\,a}{\text{R}};$$

$$\text{dos}\,(a \pm b) = \frac{\text{dos}\,a\,.\,\text{dos}\,b \mp \text{wst}\,a\,.\,\text{wst}\,b}{\text{R}}.$$

Dowod. Niech będzie *fig.* 137, łuk AM $= a$, MN $= b$: wziąwszy łuk MŃ $=$ MN, i poprowadziwszy cięciwę NŃ i promień MR, z punktów Ń, M, E i N spuśćmy ŃĆ, MP, EF i NC prostopadłe do AR, tudzież ŃG i ED prostopadłe do NC.

Podług tego cośmy powiedzieli wyżey (284), liniia MP iest wstawą, a PR dostawą łuku AM $= a$. Liniia NE z wykréślenia prostopadła do promienia MR (109), iest wstawą, a RE dostawą łuku MN $= b$.

Liniia NC iest wstawą łuku AN $=$ AM $+$ MN $= a + b$.

Liniia ŃĆ iest wstawą łuku AŃ $=$ AM $-$ MN $= a - b$.

Liniia RC iest dostawą łuku AN $=$ AM $+$ MN $= a + b$.

Liniia RĆ iest dostawą łuku AŃ $=$ AM $-$ MN $= a - b$.

Lecz NC = DC + DN = EF + DN: gdyż EF = DC.
Ń Ć = GC = DC — DG = EF — DG.
RC = RF — FC = RF — ED. gdyż ED = FC.
RĆ = RF + FĆ.

Nadto w tróykątach ŃNG, END podobnych iest
ŃN: EN = NG: DN = ŃG: ED.

A że poprzednik 1szy ŃN iest dwa razy większy od swego następnika EN (108); więc i liniia NG dwa razy większa od DN, i ŃG czyli ĆC dwa razy większa od ED czyli FC; a tém samém DG = DN, ED czyli FC = FĆ.

W powyższych zatém równaniach zamiast liniy DG i FĆ położywszy równe im liniie DN i ED, będzie

wst $(a+b)$ = NC = EF + DN.
wst $(a-b)$ = ŃĆ = EF — DN.
dos $(a+b)$ = RC = RF — ED.
dos $(a-b)$ = RĆ = RF + ED.

Idzie więc tylko o wynalezienie ważności cztérech linii EF, RF, DN i ED, z których dwie piérwsze są bokami tróykąta EFR podobnego tróykątowi MPR, dwie drugie są bokami tróykąta EDN podobnego temuż tróykątowi MPR: gdyż boki 1go są z wykréślenia prostopadłe do boków 2go tróykąta. Będzie więc

RM: MP = RE: EF. RM: PR = RE: RF.
RM: NE = RP: DN. RM: EN = MP: ED.

Czyli położywszy ważności trygonometryczne,

R: wst a = dost b: EF; więc EF = $\dfrac{\text{wst } a. \text{ dos } b}{\text{R}}$.

R: dos a = dos b: RF; więc RF = $\dfrac{\text{dos } a. \text{ dos } b}{\text{R}}$.

$$R : \text{wst}\, b = \text{dos}\, a : DN;\ \text{więc}\ DN = \frac{\text{wst}\, b.\ \text{dos}\, a}{R}.$$

$$R : \text{wst}\, b = \text{wst}\, a : ED;\ \text{więc}\ ED = \frac{\text{wst}\, a.\ \text{wst}\, b}{R}.$$

Wpowyższych zatém cztérech równaniach zamiast liniy EF, RF, DN i ED położywszy znalezione ich ważności, równania te zamienią się w następuiące:

$$\text{wst}\,(a+b) = \frac{\text{wst}\, a.\ \text{dos}\, b + \text{wst}\, b.\ \text{dos}\, a}{R};$$

$$\text{wst}\,(a-b) = \frac{\text{wst}\, a.\ \text{dos}\, b - \text{wst}\, b.\ \text{dos}\, a}{R};$$

$$\text{dos}\,(a+b) = \frac{\text{dos}\, a.\ \text{dos}\, b - \text{wst}\, a.\ \text{wst}\, b}{R};$$

$$\text{dos}\,(a-b) = \frac{\text{dos}\, a.\ \text{dos}\, b + \text{wst}\, a.\ \text{wst}\, b}{R}.$$

Równania te za pomocą podwóynego znaku $\pm$ wyrażaiącego summę i różnicę wstaw i dostaw, można zamienić na dwa równania, któreśmy założyli w twierdzeniu.

292. Chcąc znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy większego, niż iest łuk dany a, dosyć iest w równaniu 1wszém i 3ciem, ze cztérech równań poprzedzaiących, zamiast łuku b wziąć łuk a; tym sposobem dwa te równania zamienią się w następuiące:

$$\text{wst}\,(a+a) = \frac{\text{wst}\, a.\ \text{dos}\, a + \text{wst}\, a.\ \text{dos}\, a}{R};$$

$$\text{dos}\,(a+a) = \frac{\text{dos}\, a.\ \text{dos}\, a - \text{wst}\, a.\ \text{wst}\, a}{R};\ \text{czyli}$$

$$\text{wst}\,2a = \frac{2\text{wst}\,a.\,\text{dos}\,a}{R};\quad \text{dos}\,2a = \frac{\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}.$$

W tychże samych równaniach zamiast b położywszy łuk $2a$, otrzymamy ważność wstawy i dostawy łuku trzy razy większego, niż iest łuk dany a: będzie bowiem

$$\text{wst}\,(a+2a) = \text{wst}\,3a = \frac{\text{wst}\,a.\,\text{dos}\,2a + \text{wst}\,2a.\,\text{dos}\,a}{R};$$

$$\text{dos}\,(a+2a) = \text{dos}\,3a = \frac{\text{dos}\,a.\,\text{dos}\,2a - \text{wst}\,a.\,\text{wst}\,2a}{R}.$$

Tym sposobem postępuiąc, można otrzymać wstawę i dostawę łuku 4, 5 it.d. razy większego, niż iest łuk dany.

293. Z równania $\text{dos}\,2a = \frac{\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}$ (292), można także otrzymać wstawę i dostawę łuku dwa razy mnieyszego niż iest łuk dany a; iakoż zamiast łuku a, wziąwszy łuk $\frac{1}{2}a$, równanie to zamieni się w następuiące:

$\text{dos}\,a = \frac{\text{dos}^2 \frac{1}{2}a - \text{wst}^2 \frac{1}{2}a}{R}$. Zniósłszy mianownik, będzie.

$\text{dos}^2 \frac{1}{2}a - \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R.\,\text{dos}\,a$. Że zaś

$\text{dos}^2 \frac{1}{2}a + \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R^2$ (290); więc strony tych dwóch równań raz od siebie odiąwszy, drugi raz do siebie dodawszy, będą dwa następuiące równania:

$2\text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R^2 - R.\,\text{dos}\,a$. $2\text{dos}^2 \frac{1}{2}a = R^2 + R.\,\text{dos}\,a$.

Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie

$\text{wst}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R.\,\text{dos}\,a$; $\text{dos}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R.\,\text{dos}\,a$.

Więc wst $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R. \text{ dos } a}$; dos $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R. \text{ dos } a}$.

Drugą stronę przed znakiem pierwiastkowym podzieliwszy przez 2, a wyrazy będące pod znakiem pierwiastkowym rozmnożywszy przez 2^2, czyli przez 4, co wypadnie na to samo, iak gdyby strona ta była podzieloną i rozmnożoną przez 2; będzie

$$\text{wst } \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R. \text{ dos } a};$$

$$\text{dos } \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R. \text{ dos } a}.$$

Za pomocą tych dwóch równań, można będzie znaleźć wstawę i dostawę nie tylko połowy łuku danego, ale też łuku 4, 8, 16 i t.d razy mnieyszego, niż iest łuk dany; gdyż wstawa i dostawa łuku dwa razy mnieyszego niż iest łuk $\frac{1}{2}a$, będzie wstawą i dostawą łuku 4 razy mnieyszego, niż iest łuk *a* i t.d.

Te same dwa równania otrzymać można sposobem następuiącym:

Podzieliwszy łuk AM *fig.* 138, na dwie części równe w punkcie N, i poprowadziwszy promień RN, i cięciwę AM: cięciwa ta w punkcie C iest podzielona na dwie równe części, i iest prostopadła do promienia RN (108): liniia zatém CM iest wstawą łuku MN, czyli połowy łuku AM (284). W tróykącie AMP prostokątnym przy P, iest $AM = \sqrt{MP^2 + AP^2}$.

A że $AP = AR - PR = R -$ dos $AM = R -$ dos *a*; $MP =$ wst $AM =$ wst *a*; położywszy więc ważności te w równaniu powyższém, będzie

$$AM = \sqrt{wst^2 a + R^2 - 2R . dos\, a + dos^2 a}.$$

Że zaś $wst^2 a + dos^2 a = R^2$ (290); będzie więc

$AM = \sqrt{2R^2 - 2R . dos\, a}$. Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie $\frac{1}{2}AM = MC = wst\, \frac{1}{2}a$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R . dos\, a}$.

Dla znalezienia linii RC, która iest dostawą łuku MN czyli połowy łuku danego AM, poprowadźmy cięciwę BM i promień RŃ do niéy prostopadły. W tróykącie BMP iest $BM = \sqrt{MP^2 + BP^2}$.

A że $BP = BR + RP = R + dos\, a$, $MP = wst\, a$; będzie więc

$$BM = \sqrt{wst^2 a + R^2 + 2R . dos\, a + dos^2 a};$$

Położywszy R^2 zamiast $wst^2 a + dos^2 a$, i obie strony podzieliwszy przez 2, będzie

$$\tfrac{1}{2}BM = MĆ = RC = dos\, \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R . dos\, a}.$$

294. Liniia MP będąca wstawą łuku AM, iest oraz wstawą łuku MB, który do łuku AM dodany, czyni półokręgu AMB: gdyż liniia ta iest prostopadła z końca M łuku BM spusczona do promienia RB przechodzącego przez drugi koniec B tegoż łuku MB. Dwa łuki lub dwa kąty, które do siebie dodane czynią półokręgu lub dwa kąty proste zowiemy *spełnieniem* ieden drugiego, *supplementum.* I tak łuk BM większy od czwartéy części okręgu iest spełnieniem łuku AM mnieyszego od czwartéy części okręgu; łuk AM iest spełnieniem łuku BM. Stąd wniesiemy 1ód, *że wstawa łuku iest ta sama, co wstawa spełnienia tegoż łuku.*

2re. Liniia CR będąca dostawą łuku MŃ $=\frac{1}{2}$AM, równa iest linii MĆ będącéy wstawą łuku MŃ$=\frac{1}{2}$BM. Podobnież liniia CM będąca wstawą łuku MN $=\frac{1}{2}$AM, równa iest linii RĆ będącéy dostawą łuku MŃ$=\frac{1}{2}$MB. Jeżeli więc łuk dany *a* iest większy od czwartéy części okręgu, iak iest *np.* łuk MB, natenczas wstawa połowy tego łuku równać się będzie dostawie połowy iego spełnienia; dostawa zaś połowy łuku większego od czwartéy części okręgu, równać się będzie wstawie połowy iego spełnienia. Będzie więc, oznaczywszy łuk AM przez *a*, wst $\frac{1}{2}$BM$=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2+2R.\ \text{dos}\ a}$, dos $\frac{1}{2}$BM$=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-2R.\ \text{dos}\ a}$.

295. Nakoniec widzimy tu, że MC wstawa łuku MN iest połową AM cięciwy łuku ANM dwa razy większego od łuku MN; podobnież MĆ wstawa łuku MŃ iest połową MB cięciwy łuku MŃB dwa razy większego od łuku MŃ. Stąd wniesiemy, że *wstawa łuku równa iest połowie cięciwy łuku dwa razy większego.* A zatém gdy wstawy są wiadome, łatwo można wyrachować cięciwy, i odwrotnie.

296. Ponieważ średnica iest cięciwą półokręgu; połowa więc średnicy czyli promień, będzie wstawą połowy półokręgu czyli czwartéy części okręgu (295); iakoż wstawą łuku AB *fig.* 136, równego czwartéy części okręgu iest promień BR z końca B tego łuku spusczony prostopadle do promienia AR przechodzącego przez drugi koniec A tegoż łuku. A że średnica ze

wszystkich cięciw koła iest naywiększa (101); więc wstawa czwartéy części okręgu iest ze wszystkich wstaw naywiększa. Wziąwszy zatém promień za 1, wstawa czwartéy części okręgu będzie 1; wstawy zaś innych łuków będą mnieysze od 1, a tém samém ważności ich będą ułomkowe.

Ze zaś kwadrat dostawy równa się kwadratowi promienia zmnieyszonemu kwadratem wstawy (290); kiedy więc wstawą czwartéy części okręgu iest promień, dostawa czwartéy części okręgu będzie $=o$. I w samey rzeczy dostawa łuku równa się części promienia zawartéy między wstawą i środkiem koła (285); kiedy więc wstawa BR łuku AB równego czwartéy części okręgu, przypada na środek koła R, dostawa tegoż łuku niknie czyli równa się o.

Ponieważ promień iest cięciwą łuku równego 6téy części okręgu; więc połowa promienia będzie wstawą łuku równego 12téy części okręgu (295). Wziąwszy zatém promień za 1, wstawa 12téy części okręgu będzie $=\frac{1}{2}$. A że dostawa łuku równa się piérwiastkowi różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (290), kiedy więc promień $=1$, wstawa 12téy części okręgu $=\frac{1}{2}$, będzie dostawa 12téy części okręgu $=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

12sta część okręgu iest 3cią częścią łuku AB równego 4téy części okręgu. Oznaczywszy zatém 4tą część okręgu przez Q, będzie

1*od.* wst $Q=1$; dos $Q=o$.

2*re.* wst $\frac{1}{3}Q=\frac{1}{2}$; dos $\frac{1}{3}Q=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Maiąc wstawy i dostawy tych dwóch łuków, można będzie znaleźć nie tylko styczne, dotyczne, sieczne i dosieczne tychże łuków; ale też wstawy, dostawy it.d. innych wszystkich łuków, biorąc łuki te tak podług nowego podziału okręgu na 400 stopni, iako też podług podziału dawnego na stopni 360. Lecz piérwéy uczynić potrzeba dwie następuiące uwagi:

297. 1*ód*. Łuk co do długości zawsze iest mnieyszy niż iego styczna, a większy niż iego wstawa. Jakoż wziąwszy łuk $Am = AM$ *fig*. 139, i poprowadziwszy cięciwę Mm, i styczne TM, Tm; styczne tę przetną się z promieniem AR w punkcie T: gdyż dwa tróykąty RTM, RTm mogą do siebie przystać. Lecz łuk MAm czyli $AM + Am < TM + Tm$, $AM + Am > MP + Pm$ (258); że zaś $AM = Am$, $TM = Tm$, $PM = Pm$; będzie więc $2AM < 2TM$; $2AM > 2PM$; a tém samém $AM < TM$, $AM > PM$.

2*re*. Stosunek między styczną i wstawą co raz bardziéy przybliża się do 1, w miarę coraz bardziéy zmnieyszaiącego się łuku; czyli, co na iedno wychodzi, im iest łuk mnieyszy, tém iest mnieysza różnica między iego styczną i wstawą. Jakoż ponieważ $\text{sty}\, a = \frac{R.\,\text{wst}\, a}{\text{dos}\, a}$ (290), czyli wziąwszy promień za 1, $\text{sty}\, a = \frac{\text{wst}\, a}{\text{dos}\, a}$; więc obie strony rozmnożywszy przez dos a, i podzieliwszy przez sty a, będzie $\text{dos}\, a = \frac{\text{wst}\, a}{\text{sty}\, a}$: że zaś dostawa łuku tém iest większa, im iest łuk mniéyszy, to iest dostawa tém bardziéy przybliża się do promienia czyli do 1, im iest łuk mnieyszy; więc im łuk a iest mnieyszy, tém bardziéy ważność dos a, a tém samém i ważność ułomka $\frac{\text{wst } a}{\text{sty } a}$, przybliża się do 1; co dowodzi, że różnica między mianownikiem i licznikiem tego ułomka, to iest między sty a i wst a musi być bardzo mała, a iescze mnieysza między ważnością łuku a, i ważnością iego wstawy lub styczney. Wziawszy *np.* PM $=$ 0,0001, będzie

$$RP = \sqrt{RM^2 - PM^2} = \sqrt{1 - 0{,}00000001} =$$
0, 999 999 995.

$$MT = \frac{RM \times PM}{RP} = \frac{1 \times 0{,}0001}{0{,}999\,999\,995} =$$
0, 000 100 000 000 5; ważność ta styczney MT różni się tylko od ważności wstawy PM w 13téy liczbie dziesiętnéy; można ią więc wziąć za ważność łuku AM wyrażonego w częściach promienia RA.

298. Po tych uwagach i po wiadomościach które ie poprzedziły, nie trudno będzie wskazać sposób, którym ważność wstaw, dostaw it. d. wszystkich łuków wynaleziono i ułożono w tablice.

Ponieważ wstawa 4téy części okręgu czyli wst $Q = 1$, dos $Q = 0$ (296), uczyniwszy więc $a = Q$, i położywszy naznaczone ważności w dwóch równaniach wyżéy znalezionych (293).

wst $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R.\ \text{dos}\ a}$, dos $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ $\sqrt{2R^2 + 2R.\ \text{dos}\ a}$; równania te zamienią się w następuiące :

wst $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707106781186$.

dos $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707106781186$.

Ważność tę wstawy i dostawy $\frac{1}{2}Q$ można także następuiącym sposobem wyprowadzić.

Jeżeli łuk AB *fig.* 140, równy czwartéy części okręgu iest w punkcie M podzielony na dwie części równe, na ten czas liniia MP czyli wstawa łuku $\frac{1}{2}$AB, równa iest linii RP czyli dostawie tegoż łuku: w tróykącie bowiem RPM kąt PRM $=$ RMP, co iest łatwo okazać. Że zaś $MP^2 + RP^2 = MR^2$; czyli, $2MP^2 = MR^2 = 1$; więc $MP^2 = \frac{1}{2}$; a tém samém $MP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\times 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Maiąc ważność wstawy i dostawy łuku $\frac{1}{2}Q$, można będzie znaleźć ważność wstawy i dostawy połowy tego łuku czyli $\frac{1}{4}Q$. Jakoż niech będzie $\frac{1}{2}Q = a$: w równaniach powyższych (293), położywszy znalezione lub naznaczone ważności, będzie

wst $\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\times 0{,}707106781186)} = 0{,}382683432365$;

dos $\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + 2\times 0{,}707106781186)} = 0{,}923879532511$.

Lecz dzieląc tym sposobem każdy łuk na dwie części równe, nie doydziemy ani do części dziesiętych które są stopniami, minutami itd. podług nowego podziału okręgu, ani do części takich, któreby można wziąć za stopnie, minuty i t. d. podziału dawnego. Znaydziemy tylko łuki coraz mnieysze, a tém samém coraz bardziéy przybliżaiące się do swoich wstaw: i tak za 14tym podziałem będzie łuk $= \frac{1}{16384}$ Q, którego wstawa $=$ 0, 000 095 873 799. Wstawa ta mnieysza iest od wstawy 0, 0001; łuk więc ten nie różni się od swoiéy wstawy w piérwszych 12tu liczbach dziesiętnych (297). Łuki zatém mnieysze iescze mniéy różnić się będą od swoich wstaw.

Łuki tak mało różniące się od swoich wstaw i stycznych, mogą być uważane za proporcyonalne tym liniom: będzie więc

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{16384}\,Q : \text{wst}\,\tfrac{1}{100000}\,Q = \tfrac{1}{16384}\,Q : \tfrac{1}{100000}\,Q.$$

czyli $=$ 100000 : 16384. A zatém

wst $\frac{1}{100000}$ Q, czyli wst 0,00001 Q $=$

$$\frac{16384 \times \text{wst}\,\frac{1}{16384}\,Q}{100000} = 0{,}000\ 015\ 707\ 963.$$

Nadto ponieważ łuki małe są proporcyonalne swoim wstawom, łuków zatém 2, 3, 4 i t.d. razy większych od łuku 0,00001 Q, będą wstawy 2, 3, 4 i t.d. razy większe od wstawy tegoż łuku: będzie więc

wst 0,00002 Q $=$ 2wst 0,00001 Q.
wst 0,00003 Q $=$ 3wst 0,00001 Q.
wst 0,00004 Q $=$ 4wst 0,00001 Q i t.d.

Tym sposobem znaydziemy iescze wiele łuków większych od łuku 0,00001 Q, których wstawy i styczne nie różnią się między sobą w piérwszych 12stu liczbach dziesiętnych. A chociaż za dalszém powiększaniem się łuków, różnica ta coraz się bardziéy powiększa; można iednak tym sposobem postępuiąc doyść aż do łuku $= 0,001\,Q$, którego wstawa i styczna tymże sposobem znalezione, iescze się między sobą nie różnią w piérwszych 8miu liczbach dziesiętnych.

W łukach większych od $0,001\,Q$, różnica ta znacznieby się powiększyła: w ten czas więc użyć potrzeba 4 równań wyżéy znalezionych (291 i 292),

$$\text{wst } 2a = 2\text{wst } a . \text{dos } a;$$
$$\text{dos } 2a = \text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a;$$
$$\text{wst } (a \pm b) = \text{wst } a . \text{dos } b \pm \text{wst } a . \text{dos } b.$$
$$\text{dos } (a \pm b) = \text{dos } a . \text{dos } b \mp \text{wst } a . \text{wst } b;$$

Wziąwszy naprzód $a = 0,001\,Q$, potém $a = 0,002\,Q$ i t.d. z dwóch równań piérwszych otrzymamy

wst $0,002\,Q$; dos $0,002\,Q$; wst $0,004\,Q$; dos $0,004\,Q$ i t.d. Wziąwszy znowu naprzód $a = 0,001\,Q$, $b = 0,002\,Q$; potém $a = 0,002\,Q$, $b = 0,003\,Q$ it.d. z dwóch równań drugich otrzymamy

wst $0,003\,Q$, dos $0,003\,Q$; wst $0,005\,Q$, dos $0,005\,Q$ i t.d.

299. Ten sam sposób postępowania można przystosować do dawnego podziała okręgu na 360°, z tą tylko różnicą, że działanie rozpocząć należy od wstawy i dostawy łuku $= \frac{1}{3}\,Q = 30°$ (296). Łuk ten ciągle dzieląc na dwie części równe, i za każdym podziałem wynayduiąc ważność wstawy i dostawy łuków coraz bardziéy zmnieyszaiących się, doydziemy nakoniec do łuków bardzo mało różniących się od swo-

ich wstaw i stycznych, które mogą być wzięte za proporcyonalne tymże wstawom i stycznym. Dalszy sposób postępowania zupełnie iest podobny do podanego wyżéy.

300. Wreszcie różne są sposoby, osobliwie w Matematyce wyższéy, znacznie ułatwiaiące i skracaiące to długie działanie. Wyłożymy tu ieden przynaymniéy sposób, który pod wielu względami godzien iest, aby go poznać. Lecz naprzód okazać potrzeba, że formuły podane wyżéy (293), na znalezienie wstawy i dostawy łuku dwa razy mniéyszego, mogą być zamienione w następuiące:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 + R.\,\text{wst}\,a)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 - R.\,\text{wst}\,a)};$$

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 + R.\,\text{wst}\,a)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 - R.\,\text{wst}\,a)}.$$

Jakoż strony równania *np.* 1go podniosłszy do kwadratu, będzie

$\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}(R^2 + R.\ \text{wst}\,a) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^4 - R^2\ \text{wst}^2\,a)} + \tfrac{1}{4}(R^2 - R.\,\text{wst}\,a)$; z drugiéy strony dodawszy wyraz 1szy i 3ci, a wyraz 2gi rozłożywszy na czynniki, będzie

$$\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2(R^2 - \text{wst}^2\,a)};$$

zamiast $R^2 - \text{wst}^2\,a$, położywszy $\text{dos}^2\,a$ (290), i wyciągnąwszy piérwiastek, wypadnie

$$\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R\ \text{dos}\,a.$$

Podobnież strony równania 2go podniosłszy do kwadratu i odbywszy działanie iak wyżéy, wypadnie.

$\text{dos}^2\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 + \tfrac{1}{2}R\ \text{dos}\,a$. Dwa te ostatnie równania łatwo przerobić można na formuły podane wyżéy.

Po takowém przygotowaniu łatwo będzie wyłożyć następuiący sposób wynaydowania wstaw i dostaw niektórych łuków.

301. Niech będzie wst $20^\circ = x$: więc $2x$ będzie cięciwą łuku $= 40^\circ$ (295), czyli, rachując stopnie podług nowego podziału, $2x$ będzie bokiem 10kąta foremnego w koło wpisanego: a że bok ten równy iest większéy części promienia podzielonego w stosunku średnim i skraynym (237); więc wziąwszy promień za 1, będzie $1 : 2x = 2x : 1 - 2x$; a zatém $4x^2 = 1 - 2x$; czyli $4x^2 + 2x = 1$; czyli $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$. Dopełniwszy kwadratu, będzie $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$; a zatém $x + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$. Odiąwszy $\frac{1}{4}$ po obu stronach, będzie $x = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; czyli $x = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$. A że $x =$ wst 20°, więc

wst $20^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$. Podniosłszy obie strony do kwadratu;

$$\text{wst}^2 20^\circ = \frac{1}{16}(1 - 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}.$$

Że zaś $\text{dos}^2 20^\circ = R^2 - \text{wst}^2 20^\circ$ (290), więc

$$\text{dos}^2 20^\circ = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16};$$

A że $\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a = \text{dos}\, 2a$ (292); będzie więc

$$\text{dos}\, 2a, \text{ czyli dos } 40^\circ = \text{wst } 60^\circ = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}; \text{ czyli}$$

dos

$$\text{dos } 40^\circ = \text{wst } 60^\circ = \frac{4+4\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} =$$
$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

W formułach zatém powyższych (300) uczyniwszy $R=1$, $a=20^\circ$, wst $a=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$; będzie

wst $10^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})}$; czyli

wst $10^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5})} - \frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}})$; czyli

wst $10^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5})} - \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5})}$.

Wyrazy będące pod znakiem piérwiastkowym rozmnożywszy przez 4, a przed znakiem piérwiastkowym podzieliwszy przez 2, wypadnie

wst $10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. Podobnymże sposobem odbywszy działanie wypadnie

dos $10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$.

W tych samych formułach uczyniwszy potém $a=60^\circ$, wst $a=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, będzie

wst $30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})}$; odbywszy działanie jak wyżéy, wypadnie

wst $30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$.

dos $30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$.

Podobnież wziąwszy łuk $a=80^\circ$, dos $a=$

$$\text{dos } 80^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$ i ważności te położywszy w równaniu wst $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(2R^2-2R.\text{ dos } a)}$ (293); będzie

$$\text{wst } 40^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8-2\sqrt{5}+2}{4}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$$

16

Maiąc wiadome te ważności, i wiedząc prócz tego iaka iest wstawa 100° i 50°, można ułożyć następuiącą tablicę.

wst $10° =$ dos $90° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$;
wst $20° =$ dos $80° = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$
wst $30° =$ dos $70° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
wst $40° =$ dos $60° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
wst $50° =$ dos $50° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
wst $60° =$ dos $40° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
wst $70° =$ dos $30° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
wst $80° =$ dos $20° = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$
wst $90° =$ dos $10° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
wst $100° =$ dos $0° = 1$.

Działanie potrzebne do znalezienia tych ważności można iescze znacznie skrócić: gdyż $\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jakoż podniósłszy obie strony do kwadratu, będzie

$$3+\sqrt{5} = \frac{1}{4}\times 10 + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \frac{1}{4}\times 2 = \frac{12}{4} + \sqrt{\frac{20}{4}} = 3+\sqrt{5}.$$

Podobnież okazać można, że $\sqrt{(3-\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Te ostatnie ważności położywszy w powyższéy tablicy, postrzeżemy, że uważaiąc $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{10}$ za wiadome, dosyć będzie cztéry razy wyciągnąć piérwiastek kwadratowy, dla znalezienia ważności wstaw i dostaw 10ciu łuków w powyższéy tablicy umiesczonych.

302. Zamiast ważności wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych w tablicach zwyczay-

nych położone są ich logarytmy, dla ułatwienia rachunku w rozwiązaniu dwóch następuiących zagadnień do wyrachowania części tróykąta istotnie potrzebnych:

1. *Maiąc dany łuk, znaleźć logarytm iego wstawy, albo dostawy, albo styczney albo dotyczney.*

2. *Maiąc dany logarytm wstawy, albo dostawy, albo styczney, albo dotyczney łuku, znaleźć ten łuk.*

Rozwiązanie tych zagadnień zależy od sposobu rozłożenia i uporządkowania tablic, który iest rozmaity, lecz zawsze na wstępie dzieła tablic wyłożony.

303. Tablice te nie obeymuią łuków większych nad 4tą część okręgu, i nie maią po większéy części ważności siecznych i dosiecznych: obaczymy iednak niżéy, że one są dostateczne do wynalezienia ważności wstawy, dostawy, styczney i dotyczney wszystkich łuków choćby też naywiększych. Co się zaś tycze siecznych i dosiecznych, tę nie wchodzą do rozwiązywania tróykątów, iak się o tém przekonamy w zagadnieniach rozwiązywanie to za cel maiących, które wkrótce podamy, wyłożywszy piérwéy twierdzenia istotnie potrzebne do wyrachowania części tróykątów, co iest właściwym przedmiotem Trygonometryi.

304. *W każdym tróykącie prostokątnym tak się ma promień do wstawy iednego z kątów ostrych, iak przeciwprostokątna do boku przeciwnego temu kątowi.*

Niech będzie ABC *fig.* 141. tróykąt prostokątny przy A, z punktu B iako ze środka promieni BM równym promieniowi podług którego em ułożone są tablice nakréśliwszy łuk MF, który będzie miarą kąta B i z punktu M do AB spuściwszy prostopadłą MP, która będzie wstawą kąta B; w tróykątach BMP, BCA podobnych, iest

BM: MP = CB: AC; czyli, położywszy ważności trygonometryczne R: wst B = CB: AC.

305. *W każdym tróykącie prostokątnym tak się ma promień do styczney iednego z kątów ostrych, iak bok przyległy temu kątowi do boku przeciwnego.*

Wykréśliwszy, iak wyżéy, łuk MF, i z punktu F do AB poprowadziwszy prostopadłą FD, która będzie styczną kąta B: w tróykątach BFD, CAB podobnych iest BF: FD = AB: AC, czyli R: sty B = AB: AC.

306. *W tróykącie prostokréślnym iakimkolwiek wstawy kątów maią się iak boki przeciwne.*

Niech będzie tróykąt ABC *fig.* 73, z wiérzchołka C spuściwszy CD prostopadłą do AB, prostopadła ta padnie albo wewnątrz tróykąta iak iest na figurze 1, albo zewnątrz, iak iest na figurze 2. W 1wszym przypadku, w tróykątach prostokątnych ACD, BCD iest

R: wst A = AC: CD; R: wst B = BC: CD (304), więc

R $\times$ CD = wst A $\times$ AC; R $\times$ CD = wst B $\times$ BC; a tém samém wst A $\times$ AC = wst B $\times$ BC. Więc wst A: wst B = BC: AC.

W przypadku 2gim w dwóch tróykątach prostokątnych CDA, CDB, iest

R : wst DAC = AC : CD; R : wst B = CB : CD; więc
R × CD = wst DAC × AC; R × CD = wst B × BC; a zatém
wst DAC × AC = wst B × BC; a tém samém wst DAC : wst B = BC : AC. Ze zaś kąt DAC iest spełnieniem kąta CAB czyli kąta A (294), a tém samém wst DAC = wst A; będzie więc wst A : wst B = BC : AC.

Tę samę własność można także następuiącym sposobem wyprowadzić.

Dany tróykąt ACB *fig.* 142, opisawszy kołem, i ze środka S promieniem S*a* równym promieniowi tablic wykreśliwszy koło, poprowadzić promienie AS, BS, CS przecinaiące okrąg drugiego koła w punktach *a*, *b*, *c*, i poprowadzić cięciwy *ab*, *bc*, *ac*; tróykąt *abc* będzie podobny tróykątowi ABC, gdyż ponieważ *a*S i *b*S sa równe iako promienie iednego koła, tudzież AS i BS są także równe; więc w tróykącie ASB iest AS : *a*S = BS : *b*S; a tém samém bok *ab* iest równoodległy od AB. Tymże sposobem okazać można, że bok *bc* iest równoodległy od BC, bok *ac* równoodległy od AC. A zatém tróykąty ABC i *abc* są podobne: będzie więc
AB : *ab* = BC : *bc* = AC : *ac*; czyli
AB : BC : AC = *ab* : *bc* : *ac*; więc
AB : BC : AC = $\frac{1}{2}ab$: $\frac{1}{2}bc$: $\frac{1}{2}ac$. Że zaś kąty tróykąta *abc*, których wiérzchołki są na okręgu, maią za miarę połowy łuków, których cięciwami są boki tym kątom przeciwne; a wstawa łuku równa iest połowie cięciwy łuku dwa razy większego (295); więc $\frac{1}{2}ab$ = wst *c* = wst C;

$\frac{1}{2}bc = \text{wst}\, a = \text{wst A}$; $\frac{1}{2}ac = \text{wst}\, b = \text{wst B}$; a tém samém

AB : BC : AC = wst C : wst A : wst B.

307. *W każdym tróykącie prostokréślnym dostawa iednego z kątów tak się ma do promienia, iak summa kwadratów z boków przyległych temu kątowi zmnieyszona kwadratem boku trzeciego, do podwóynego illoczynu dwóch piérwszych boków.*

W tróykącie ACB *fig.* 143, z wiérzchołka kąta naywiększego C spuściwszy CD prostopadłą do AB, i dla skrócenia bok CB przeciwny kątowi A oznaczywszy przez a, bok AC przeciwny kątowi B przez b, bok AB przeciwny kątowi C przez c, a odcinek AD przez x; będzie $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (172). Dodawszy po obu stronach $2cx$, a odiąwszy a^2, i podzieliwszy przez $2c$, będzie $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

W tróykącie prostokątnym ACD iest R : wst DCA $= b : x$ (304). A że kąt DCA iest dopełnieniem kąta A, gdyż obadwa czynią kąt prosty, a tém samém wst DCA = dos A (285); będzie więc R : dos A $= b : x$.

A zatém $x = \frac{\text{dos A} \times b}{\text{R}}$. Porównawszy zsobą dwie znalezione ważności x, będzie $\frac{\text{dos A} \times b}{\text{R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$; podzieliwszy obie strony przez *b*, wypadnie $\frac{\text{dos A}}{\text{R}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; a tém samém dos A : R $= b^2+c^2-a^2 : 2bc$ (*).

308. W równaniu $a^2 = b^2+c^2-2cx$ (307), dodawszy po obu stronach $2cx$, a odiąwszy a^2 i c^2, będzie $2cx-c^2 = b^2-a^2$. Strony tego równania rozłożywszy na czynniki, wypadnie
$c(2x-c) = \underline{(a+b)\ (a-b)}$; a zatém $c : b+a = b-a : 2x-c$. $(b+a)(b-$

Ze zaś AB $= c$, AD $= x$; więc BD $= c-x$, a tém samém AD $-$ BD $= x-c+x = 2x-c$. Ostatnia więc proporcya zamieni się w następuiąca:

AB : AC $+$ BC $=$ AC $-$ BC : AD $-$ BD. To iest,

(*) *Jeżeli kąt A iest roztwarty, iak fig. 73 pod liczbą 2, na ten czas będzie* $a^2 = b^2+c^2+2cx$ (173); *a tém samém* $x = \frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$.

W tróykącie CDA iest wst ACD = dos CAD $= \frac{R.\,x}{b}$ (304), *że zaś kąt CAB, czyli kąt A iest spełnieniem kąta CAD, i ma tę samę dostawę co i kąt CAD lecz uiemną, iak obaczymy niżéy; będzie więc dos A* $= -\frac{R.\,x}{b}$; *zamiast* x *położywszy ważność znalezioną wyżéy, będzie dos* $A = R \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

a zatém $\frac{dos\ A}{R} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

w tróykącie, w którym prostopadła z wiérzchołka do podstawy spusczona pada wewnątrz tróykąta, podstawa tak się ma do summy dwóch innych boków, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Jeżeli kąt A iest roztwarty *fig.* 73 *Nro* 2, na ten czas $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ (173). Więc $a^2 - b^2 = c^2 + 2cx$; czyli $(a+b)(a-b) = c(2x + c)$; a zatém $c : a+b = a-b : 2x+c$: to iest, kiedy prostopadła z wiérzchołka spusczona do podstawy pada zewnątrz tróykąta, *tak się ma podstawa do summy dwóch innych boków, iak różnica tychże boków, do summy odcinków podstawy BD + AD.*

Tę samę własność można wyprowadzić sposobem następuiącym. Z punktu C iako ze środka promieniem CB wykreśliwszy koło *fig.* 143, i bok AC przedłużywszy do przecięcia się z okręgiem w punkcie E; będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (217). AB : AE = AF : AM; czyli AB : AC + CE = AC − CF : AD − DM. Że zaś CE = CF = BC, a DM = BD; będzie więc AB : AC + BC = AC − BC : AD − BD.

Kiedy kąt A iest roztwarty, *fig.* 73 *Nro* 2, Dowodzenie i wykréślenie podobne do poprzedzaiącego.

309. *W każdym tróykącie prostokréślnym tak się ma summa dwóch boków do ich różnicy, iak styczna połowy summy kątów tym bokom przeciwnych do styczné́y połowy różnicy tychże kątów.*

W równaniach $\text{wst}\,(a+b) = \frac{\text{wst}\,a.\,\text{dos}\,b + \text{wst}\,b\,\,\text{dos}\,a}{R}$,

$\text{wst}\,(a-b) = \frac{\text{wst}\,a\ \text{dos}\,b - \text{wst}\,b\ \text{dos}\,a}{R}$ (291), strony odpowiadaiące raz do siebie dodawszy, drugi raz odiąwszy, będzie

$$\text{wst}\,(a+b) + \text{wst}\,(a-b) = \frac{2\text{wst}\,a.\ \text{dos}\,b}{R};$$

$$\text{wst}\,(a+b) - \text{wst}\,(a-b) = \frac{2\text{wst}\,b.\ \text{dos}\,a}{R}.$$

Niech będzie $a+b=A$, $a-b=B$; a zatém $(a+b)+(a-b)=2a=A+B$; więc $a = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

$(a+b)-(a-b)=2b=A-B$; więc $b = \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$.

Położywszy te ważności w dwóch powyższych równaniach, będzie

$$\text{wst}\,A + \text{wst}\,B = \frac{2}{R}\,\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\ \text{dos}\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B);$$

$$\text{wst}\,A - \text{wst}\,B = \frac{2}{R}\,\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)\ \text{dos}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B).$$

Strony odpowiadaiące tych równań podzieliwszy przez siebie, wypadnie

$$\frac{\text{wst}\,A + \text{wst}\,B}{\text{wst}\,A - \text{wst}\,B} = \frac{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)};\ \text{czyli}$$

$$\frac{\text{wst}\,A + \text{wst}\,B}{\text{wst}\,A - \text{wst}\,B} = \frac{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\text{dos}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\,\text{wst}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}.$$

Że zaś wstawa łuku podzielona przez dostawę równa się stycznéy tegoż łuku (290), będzie więc

$$\frac{\text{wst A} + \text{wst B}}{\text{wst A} - \text{wst B}} = \text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B}) \times \frac{\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})}{\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})}.$$

Rozmnożywszy obie strony przez wst $(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})$, a podzieliwszy przez dos $(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})$, wypadnie

$$\frac{\text{wst A} + \text{wst B}}{\text{wst A} - \text{wst B}} \times \frac{\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})}{\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})} = \text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B});\ \text{czyli}$$

$$\frac{\text{wst A} + \text{wst B}}{\text{wst A} - \text{wst B}} \times \text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B}) = \text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B}).$$

Podzieliwszy obie strony przez sty $(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})$, będzie

$$\frac{\text{wst A} + \text{wst B}}{\text{wst A} - \text{wst B}} = \frac{\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B})}{\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B})}.\quad \text{A zatém}$$

$$\text{wst A} + \text{wst B} : \text{wst A} - \text{wst B} = \text{sty}\,\frac{\text{A}+\text{B}}{2} : \text{sty}\,\frac{\text{A}-\text{B}}{2}.$$

Że zaś w tróykącie wstawy kątów, maią się iak boki tym kątom przeciwne (306); oznaczywszy zatém boki przeciwne kątom A i B głoskami a i b, będzie $a : b =$ wst A : wst B; a tém samém $a + b : a - b =$ wst A $+$ wst B : wst A $-$ wst B. Proporcyą tę porównawszy z proporcyą powyższą wypadnie

$$a + b : a - b = \text{sty}\,\frac{\text{A}+\text{B}}{2} : \text{sty}\,\frac{\text{A}-\text{B}}{2}.$$

Możnaby to samo okazać sposobem następuiącym. Niech będzie *fig.* 144, łuk AM $=$ A, łuk AN $=$ B: będzie MP $=$ wst A, NQ $=$ wst B. Poprowadziwszy NC równoodległą od średnicy AB, i przedłużywszy MP do m; będzie

$$\text{MR} = \text{MP} - \text{PR} = \text{MP} - \text{NQ} = \text{wst A} - \text{wst B};$$
$$m\text{R} = m\text{P} + \text{PR} = \text{MP} + \text{NQ} = \text{wst A} + \text{wst B}.$$

Z punktu C iako ze środka promieniem CD równym promieniowi koła ACBm nakréśliwszy łuk EDG, i przez punkt D poprowadziwszy styczną FH, aż do przecięcia się z liniiami CM, Cm w punktach F i H; liniia DF będzie styczną łuku DE (287), liniia DH będzie styczną łuku DG, z których piérwszy iest miarą kąta MCN, drugi miarą kąta mCN; a że kąty te maią wiérzchołki na okręgu, więc kąta MCN iest także miarą połowa łuku MN $=$ AM $-$ AN $=$ A $-$ B; kąta zaś mCN iest miarą połowa łuku mN $=$ AM $+$ AN $=$ A $+$ B. Będzie zatém DF $=$ sty $\frac{A-B}{2}$, DH $=$ sty $\frac{A+B.}{2}$.

Ze zaś liniie Mm, FH są od siebie równoodległe, więc w tróykątach MCR i FCD, tudzież w tróykątach mCR i DCH podobnych iest

RC : DC $=$ MR : DF, RC : DC $=$ mR : DH: a zatém mR : MR $=$ DH : DF; czyli

$$\text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B = \text{sty } \frac{A+B}{2},$$

$$\text{sty } \frac{A-B}{2};$$ reszta iak wyżéy.

310. Po wyłożeniu tych twierdzeń, można będzie z łatwością wyrachować części tróykątów prostokréślnych we wszystkich przypadkach, iakie tylko wydarzyć się mogą.

A naprzód co do tróykątów prostokątnych, niech będzie A kąt prosty, B i C dwa inne kąty tróykąta prostokątnego ABC; niech a oznacza przeciwprostokątną, b bok przeciwny kątow

B, *c* bok przeciwny kątowi C. Ponieważ w tróykącie prostokątnym summa dwóch kątów ostrych B i C równa się iednemu prostemu, więc kąty te są dopełnieniem ieden drugiego; a zatém wst C = dos B, wst B = dos C; podobnież sty C = dot B, sty B = dot C.

Dla rozwiązania tróykąta, czyli dla wyrażenia części iego w liczbach, iakośmy iuż uważali, potrzeba mieć trzy części dane, między któremi powinien być przynaymniéy ieden bok. W tróykącie prostokątnym ABC kąt A iest zawsze wiadomy iak prosty: dla rozwiązania więc tróykąta prostokątnego dosyć iest oprócz kąta prostego, mieć dwie części dane, między któremi powinien być przynaymniéy ieden bok.

Dwie te dane części mogą być 1*ód* przeciwprostokątna i ieden z boków przyległych kątowi prostemu; 2*re* dwa boki przyległe kątowi prostemu; 3*cie* przeciwprostokątna i ieden z kątów ostrych; 4*te* ieden z boków przyległych kątowi prostemu i ieden z kątów ostrych. Wszystkie więc przypadki rozwiązywania tróykątów prostokątnych sprowadzić można do cztérech następuiących zagadnień.

311. Zagad. 1. *Maiąc daną przeciwprostokątną* a *i bok* b, *znaleźć dwa kąty ostre B i C, i bok trzeci* c.

Rozw. $a : b = \mathrm{R} : \text{wst B}$ (304), więc wst B $= \frac{\mathrm{R}.\, b}{a}$; czyli odbywaiąc działanie za pomocą logarytmów, log wst B = log R + log b — log a. Znalazłszy kąt B, łatwo będzie znaleźć kąt C, który iest kąta B dopełniemiem. Można także kąt C znaleźć przez następuiącą proporcyą: $a : b = R : \text{dos } C$.

Co się tyczé boku c, ten znaleźć można dwoma sposobami: 1*ód* znalazłszy kąt C, będzie $R : \text{sty } C = b : c$ (305), a zatém $c = \frac{\text{Sty } C . b}{R}$; czyli $\log c = \log \text{sty } C + \log b - \log R$. 2*re*, $c^2 = a^2 - b^2$ (169); a zatém $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; czyli $c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$; czyli $\log c = \frac{1}{2} \log (a+b) + \frac{1}{2} \log (a-b)$.

312. Zagad. 2. *Maiąc dane dwa boki* b *i* c *przyległe kątowi prostemu, znaleźć przeciwprostokątną* a *i dwa kąty ostre B i C.*

Rozw. $c : b = R : \text{sty } B$ (305): więc $\text{sty } B = \text{dot } C = \frac{R . b}{c}$. Znalazłszy kąt C, przeciwprostokątną a znaydziemy przez proporcyą: $\text{wst } B : R = b : a$. Możnaby także znaleźć przeciwprostokątną a, przez następuiące równanie: $a^2 = b^2 + c^2$ (162); więc $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; lecz wyrażenie to nie-iest wygodne do rachunku przez logarytmy: gdyż $b^2 + c^2$ nie można rozłożyć na czynniki.

313. Zagad. 3. *Maiąc daną przeciwprostokątną* a *i ieden kąt ostry B, znaleźć dwa boki* b *i* c.

Rozw. $R : \text{wst } B = a : b$. $R : \text{dos } B = a : c$. więc $b = \frac{\text{wst } B . a}{R}$; $c = \frac{\text{dos } B . a}{R}$.

314. Zagad. 4. *Maiąc dany bok* b *przyległy kątowi prostemu, i ieden z kątów o-*

strych, znaleźć bok drugi i przeciwprostokątną.

Rozw. wst B : R $=b:a$; R : dot B $=b:c$. Więc $a=\frac{\mathrm{R}.\,b}{\mathrm{wst\,B}}$; $c=\frac{\mathrm{dot\,B}.\,b}{\mathrm{R}}$.

315. Co się tycze tróykątów ostrokatnych i roztwartokątnych, w tych oznaczywszy trzy kąty przez A, B, C, a boki tym kątom przeciwne przez a, b, c, ażeby za pomocą trzech danych części wyrachować inne trzy części tróykąta, potrzeba mieć dane albo ieden bok a i dwa którekolwiek kąty; albo dwa boki a i b, i kąt A przeciwny bokowi danemu a; albo dwa boki a i b i kąt C między niemi zawarty; albo nakoniec trzy boki a, b i c. Wszystkie więc przypadki rozwiązywania tych tróykątów można sprowadzić do czterech następuiących zagadnień.

316. Zag. 1. *Maiąc dany bok* a *i dwa kąty tróykąta, znaleźć dwa inne boki* b *i* c.

Rozw. wst A : wst B $=a:b$; wst A : wst C $=a:c$ (306); więc

$$b=\frac{\mathrm{wst\,B}.\,a}{\mathrm{wst\,A}};\ c=\frac{\mathrm{wst\,C}.\,a}{\mathrm{wst\,A}}.$$

317. Zag. 2. *Maiąc dane dwa boki* a *i* c, *i kąt A przeciwny iednemu z boków danych, znaleźć bok trzeci* b *i dwa inne kąty B* i *C*.

Rozw. $a:c=$ wst A : wst C; więc wst C $=\frac{\mathrm{wst\,A}.\,c}{a}$. Maiąc wiadomy kąt A i C, znaydziemy tém samem i kąt B. Dla znalezienia zaś boku b, ułożymy następuiącą proporcyą:

wst A : wst B $= a : b$.

Uwaga. Jeżeli kąt A iest ostry, a bok $a < c$; na ten czas znaleziona przez powyższą proporcyą wst C $= \frac{\text{wst A}. c}{a}$, będzie albo wstawą kąta bca *fig.* 49, albo też wstawą kąta $b\acute{c}a$, który iest spełnieniem kąta bca, iakośmy to uważali wyżéy (92). W tym więc przypadku podwoyne być może rozwiązanie.

318. Zag. 3. *Maiąc dane dwa boki* a *i* b *i kąt C między niemi zawarty, znaleźć dwa inne kąty A* i *B i bok trzeci* c.

Rozw. Ponieważ kąt C iest wiadomy, tem samém wiadoma będzie summa dwóch innych kątów A+B, i połowa téy summy $\frac{A+B}{2}$. Jeżeli więc $a > b$, a tém samém A > B; znaydziemy połowę różnicy tychże kątów A i B, przez następuiącą proporcyą:

$$a + b : a - b = \text{sty}\,\frac{A+B}{2} : \text{sty}\,\frac{A-B}{2} \quad (309).$$

Znalazłszy połowę różnicy, znaydziemy kąt większy A i mnieyszy B. Jakoż niech s oznacza summę, r różnicę tych dwóch kątów: czyli niech będzie $A+B = s$, $A-B = r$. Strony tych dwóch równań raz do siebie dodawszy, drugi raz od siebie odiąwszy, wypadnie $2A = s + r$; $2B = s - r$; więc $A = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}r$, $B = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r$. To iest, kąt większy A równa się połowie ich summy więcéy połową różnicy; kąt mnieyszy B równa się połowie summy mniéy połową różnicy.

Znalazłszy dwa kąty A i B, bok trzeci c znaydziemy przez proporcyą: wst A: wst C $=$ a: c.

319. Zag. 4. *Maiąc dane trzy boki* a, b, c, *znaleźć trzy kąty A, B, C.*

Rozw. dos A: R $= b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$ (307).

więc dos $A = R \times \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Tymże sposobem znaydziemy dwa inne kąty.

Możnaby także zagadnienie to rozwiązać sposobem następuiącym: niech będzie tróykąt ACB *fig.* 143, w którym wszystkie trzy boki są wiadome, i w którym kąt C iest naywiększy i bok AC $>$ BC, czyli $b > a$. Z wiérzchołka kąta C spuściwszy CD prostopadłą do AB, czyli do c, i odcinek większy AD oznaczywszy przez x, odcinek mnieyszy DB przez y, będzie

$c : b + a = b - a : x - y$ (308). Znalazłszy różnicę odcinków $x - y$, wiedząc prócz tego ich summę $x + y = c$, znaydziemy odcinek większy AD, i mnieyszy BD, z których piérwszy równa się połowie ich summy więcéy połową różnicy, drugi równa się połowie ich summy mniéy połową różnicy. W tróykątach zatém prostokątnych ACD, BCD znaydziemy kąty A i B sposobem podanym wyżéy (311): maiąc zaś wiadome te dwa kąty, w tróykącie ACB, znaydziemy kąt C, który iest ich spełnieniem.

Jeżeli kąt A iest roztwarty *fig.* 73, *pod liczbą* 2, na ten czas z proporcyi $c : a + b = a - b :$

2x

$2x+c$ (308), znaydziemy summę dwóch odcinków BD+AD; a że różnica tychże odcinków BD—AD=AB, maiąc zatém wiadomą summę i różnicę odcinków, a tém samém połowę ich summy i połowę różnicy, znaydziemy odcinek większy BD i mnieyszy AD. W tróykątach zatém prostokątnych BDC, ADC, w których przeciwprostokątne BC, AC i boki BD, AD są wiadome, znaydziemy kąt B i CAD (311), a tém samém i kąt CAB, który iest spełnieniem kąta CAD.

320. Sposób piérwszy, podług którego rozwiązaliśmy ostatnie zagadnienie, użytym być może nie tylko w tym przypadku, gdy są dane trzy boki tróykąta; lecz i w ten czas gdy są dane dwa boki i kąt między niemi zawarty, albo też iednemu z dwóch danych boków przeciwny: w równaniu bowiem $\cos A = R \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ieżeli wiadome są dwa boki b, c i kąt A między niemi zawarty, łatwo będzie znaleźć bok trzeci a i dwa inne kąty; podobnież gdy są wiadome dwa boki a, c i kąt A iednemu z nich przeciwny, łatwo będzie znaleźć bok trzeci b i dwa inne kąty (*). To tylko iest rzeczą niedogodną, że w równaniu tém nie można użyć logarytmów dla znalezienia ważności licznika $b^2+c^2-a^2$. Lecz

(*) *To samo równanie służy także do rozwiązania tróykąta, kiedy dany iest bok ieden i dwa kąty: lecz do tego potrzebne są wiadomości z dalszéy matematyki, które tu mieysca mieć nie mogą.*

można temu zapobieżeć sposobem następującym.

Ponieważ $\text{dos}^2 a = R^2 - \text{wst}^2 a$ (290); w równaniu zatem $\text{dos}\, 2a = \frac{\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}$ (292), położywszy $R^2 - \text{wst}^2 a$ zamiast $\text{dos}^2 a$, będzie $\text{dos}\, 2a = \frac{R^2 - \text{wst}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}$, czyli $\text{dos}\, 2a = \frac{R^2 - 2\text{wst}^2 a}{R}$.

Niech będzie $\text{dos}\, 2a = \text{dos A}$, $\text{wst}\, 2a = \text{wst A}$: będzie $\text{wst}\, a = \text{wst}\, \frac{1}{2}\text{A}$, $\text{wst}^2 a = \text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A}$, $2\text{wst}^2 a = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A}$. Położywszy te ważności w powyższem równaniu, będzie

$\text{dos A} = \frac{R^2 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A}}{R}$; podzieliwszy obie strony przez R, wypadnie $\frac{\text{dos A}}{R} = \frac{R^2 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A}}{R^2}$.

A że $\text{dos A} : R = b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$, a tém samém $\frac{\text{dos A}}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; wiec

$\frac{R^2 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A}}{R^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; Rozmnożywszy przez R^2, będzie

$R^2 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A} = R^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$; odmieniwszy znaki,

$-R^2 + 2\text{wst}^2 \frac{1}{2}\text{A} = R^2 \left(\frac{-b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right)$; dodawszy $R^2 = 1$ po obu stronach, będzie

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}^2\left(\frac{a^2-(b^2+c^2)}{2bc}\right)+1;$$ obróciwszy całkowitą na ułomek,

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}^2\left(\frac{a^2-(b^2+c^2)+2bc}{2bc}\right)=\text{R}^2\left(\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}\right);$$ czyli

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}^2\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right).$$ A że $a^2-(b-c)^2=(a-b+c)\,(a+b-c)$; więc

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}^2\left(\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{2bc}\right);$$ podzieliwszy przez 2, i wyciągnąwszy piérwiastek kwadratowy, wypadnie

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}\sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{4bc}}.$$

Niech będzie $a+b+c=s$; a zatém $a-b+c=s-2b$, $a+b-c=s-2c$; a tém samém $\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{4bc}=\frac{(s-2b)\,(s-2c)}{4bc}$.

Podzieliwszy z drugiéy strony mianownik przez 4, a w liczniku ieden czynnik przez 2 i drugi czynnik przez 2, co naiedno wychodzi, iak gdyby cały licznik był podzielony przez 4; będzie $\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{4bc}=\frac{(\frac{1}{2}s-b)\,(\frac{1}{2}s-c)}{bc}$; ważność tę położywszy w równaniu powyższém, będzie $\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)\,(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$. To iest: *chcąc znaleźć kąt tróykąta, którego trzy boki są dane, trzeba od połowy summy trzech boków odiąć naprzód ieden, potém drugi bok przyległy kątowi szukanemu, dwie pozostałe reszty przez siebie rozmnożyć; iloczyn ten podzielić przez iloczyn dwóch boków kątowi szukanemu przyległych; wyciągnąć z tego ilorazu piérwiastek kwadratowy; pierwiastek ten będzie wstawą połowy kąta szukanego.* Promień bierze się zwyczaynię za 1, a tém samém w mnożeniu i dzieleniu opuscza się.

321. -Zagadnienia te z łatwością być mogą przystosowane do Jeometryi praktycznéy, wymiar gatunków za przedmiot maiącéy, iako też do innych wszystkich umieiętności matematyczno fizycznych. Przytoczymy tu kilka przykładów potocznieyszych.

Przykład 1. Chcąc zmierzyć na gruncie z punktu A *fig.* 145, odległość niedostępnego przedmiotu X, trzeba wymierzyć na gruncie podstawę AB, i za pomocą narzędzia zwanego *kątomiarem*, wymierzyć dwa kąty XAB, XBA zawarte między podstawą AB i promieniami ocznemi AX, BX z punktów A i B do przedmiotu X wykierowanemi: tym sposobem utworzy się tróykąt ABX, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukaną więc odległość AX znaydziemy przez proporcyą wst AXB : wst ABX = AB : AX (306); więc log. AX = log. AB + log. wst ABX — log. wst AXB.

Daymy nato, że AB = 588 prętów; kąt BAX = 103°, 30′ podług dawnego podziału, kąt

ABX = 36°, 15′; będzie więc kąt AXB = 40°, 15′.

Logarytm AB	2,7693773
Log. wst ABX	9,7718150
Summa	12,5411923
Log. wst AXB	9,8103159
Log. AX	2,7308764.

Logarytm ten odpowiada liczbie 538, 1; będzie więc AX = 538, 1 prętów.

Chcąc z tegoż punktu A znaleźć odległość drugiego przedmiotu niedostępnego Y, trzeba wymierzyć kąty YAB, ABY: tym sposobem utworzy się tróykąt AYB, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukaną więc odległość AY znaydziemy przez proporcyą wst AYB : wst ABY = AB : AY. Daymy na to, że kąt BAY = 35° 6′, kąt ABY = 118° 48′; będzie więc kąt AYB = 26° 6′. Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, iak wyżéy, znaydziemy AY = 1171 prętów.

322. *Przykład 2.* Chcąc znaleźć odległość dwóch przedmiotów niedostępnych X, Y, trzeba wynaleźć AX i AY, iak w przykładzie poprzedzaiącym; kąt XAY będzie wiadomy: gdyż kąt ten iest różnicą dwóch kątów wiadomych BAX = 103° 30′, i BAY = 35° 6′: będzie więc kąt XAY = 68° 24′. W tróykącie zatém AXY maiąc wiadome z przykładu 1go dwa boki AY, AX i kąt między niemi zawarty XAY, znaydziemy styczną połowy summy dwóch in-

nych kątów przez proporcyą AY + AX: AY — AX = sty $\frac{AXY + XYA}{2}$: sty $\frac{AXY - XYA}{2}$ (309). Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie $\frac{AXY - XYA}{2} = 28°, 35'$. Że zaś $\frac{AXY + XYA}{2} = 55°, 48'$; a kąt większy AXY równy połowie summy obudwu więcéy połową ich różnicy, kąt mnieyszy XYA równy połowie ich summy mniéy połową różnicy; będzie więc kąt AXY = 84° 23', kąt XYA = 27° 13'. W tróykącie zatém XYA maiąc wiadome wszystkie kąty i bok AX, znaydziemy XY przez proporcyą wst XYA: wst XAY = AX: XY (306). Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie XY = 1093 prętów.

323. *Przykład* 3. Niech będzie DX *fig.* 146, szerokość rzeki którą zmierzyć potrzeba: wymierzywszy na gruncie podstawę AB równoodlegle od koryta rzeki, która tém samém będzie prostopadła do szerokości rzeki DX, i za pomocą kątomiaru wyznaczywszy kąt ABX zawarty między podstawą AB i promieniem ocznym BX wykierowanym z punktu B do przedmiotu X będącego na drugim brzegu rzeki; będzie tróykąt BAX prostokątny przy A, w którym kąt B i bok AB iest wiadomy: bok zatem AX znaydziemy przez proporcyą, R: sty B = AB: AX (305). Znalazłszy tym sposobem AX, i odiąwszy AD

odległość podstawy AB od brzegu rzeki, zostanie DX szerokość szukana (*).

Gdyby AX była wysokość wieży, którą potrzeba zmierzyć, na ten czas wymierzywszy podstawę AF, i z punktu F za pomocą kątomiaru wymierzywszy kąt DCX zawarty między liniią poziomą DC równą odległą od podstawy AF, i promieniem ocznym CX wykierowanym z punktu C do wiérzchołka wieży X; utworzy się tróykąt prostokątny CDX, w którym bok CD czyli AF, i kąt DCX są wiadome: bok zatém DX znaydziemy przez proporcyą R: sty DCX = DC: DX. Znalazłszy tym sposobem DX, i dodawszy wysokość narzędzia CF czyli AD, będzie AX wysokość szukana.

Jeżeli punkt A iest niedostępny, na ten czas dla zmierzenia wysokości AX, można oznaczyć odległość CX sposobem takim, iakiego użyliśmy w przykładzie 1wszym: w tróykącie zatém prostokątnym CDX maiąc wiadomy bok CX i kąt DCX znaydziemy DX przez proporcyą R: wst DCX = CX: DX.

324. *Przykład* 4. Maiąc dane na mappie trzy punkta A, B, C *fig.* 147, chcąc wyznaczyć położenie 4go punktu M leżącego na teyże co i piérwsze trzy punkta płasczyznie, i z które-

---

(*) *W braniu podstaw na gruncie trzeba zachować tę ważną przestrogę, aby podstawy te nie były ani zbyt małe, ani zbyt wielkie względem odległości szukanéy. Tu* np. *podstawa AB może wynosić około połowy odległości AX.*

go kąty AMB, AMC są wymierzone; trzeba na linii AB wykréślić odcinek koła AMDB, w którymby się zmieścił kąt dany BMA (136); potém wykréślić drugi odcinek koła AMC, w którymby się zmieścił drugi kąt dany AMC; dwa łuki przetną się w punktach A i M; punkt M będzie punktem szukanym: gdyż ze wszystkich punktów łuku AMDB można widzieć AC pod kątem równym kątowi danemu AMB, i że wszystkich punktów łuku AMC można widziéć AC pod kątem równym kątowi danemu AMC; więc punkt M, w którym się te dwa łuki przecinaią, iest punktem takim, z którego widziéć można razem AB i AC pod kątami równemi kątom AMB, AMC.

W tróykącie ABC, którego trzy boki będące odległościami trzech danych punktów A, B i C, są wiadome, znaydziemy kąt BAC podług formuły podanéy wyżéy (320). Poprowadziwszy średnicę AD, i cięciwę DB, w tróykącie BAD prostokątnym przy B, iest bok AB i kąt przeciwny BDA = AMB wiadomy; znaydziemy więc AD.

Podobnież poprowadziwszy średnicę AE i cięciwę CE, w tróykącie ACE prostokątnym przy C, bok AC iest wiadomy z założenia, kąt CAE = AMC — 90°: gdyż miara kąta CAE to iest połowa łuku CE, równa się połowie łuku będącéy miarą kąta AMC zmnieyszonéy 4tą częścią okręgu; o czém łatwo przekonać się można dokończywszy figury. W tróykącie zatém ACE maiąc wiadomy bok AC i kąt przyległy CAE, znaydziemy AE (314).

Poprowadziwszy liniie proste MD i ME, ponieważ kąty AMD i AME są proste, iako zawarte w półkolu; więc dwie liniie MD i ME czynią iednę liniią prostą DE. Liniia zatém AM, któréy długość i położenie oznaczyć potrzeba, iest wysokością tróykąta DAE, w którym boki AD i AE są wiadome, i kąt między niemi zawarty DAE równa się summie dwóch kątów wiadomych BAC i CAE mniéy kątem DAB, który iest także wiadomy iako dopełnienie kąta wiadomego BDA w tróykącie prostokątnym ABD; znaydziemy więc kąt ADE (318).

Nakoniec w tróykącie prostokątnym ADM znaydziemy AM. Odległość ta AM i kąt BAM $=$ DAB $+$ DAM oznaczaią położenie punktu M.

325. W wielu przypadkach można także w Jeometryi użyć wygodnie formuł trygonometrycznych, iak się okaże z następuiących zagadnień.

Zagad. 1. *Maiąc wiadome dwa boki tróykąta i kąt między niemi zawarty, znaleźć iego powiérzchnią.*

Rozw. Powiérzchnia tróykąta ABC *fig.* 143, równa iest połowie iloczynu iego podstawy AB przez wysokość CD (150). Oznaczywszy zatém powierzchnią tróykąta przez p, będzie $p = \frac{AB \times CD}{2}$. W tróykącie prostokątnym ACD, R : wst A $=$ AC : CD (304); więc CD $=$ AC $\times$ wst A. Ważność tę położywszy w równaniu powyższém, będzie $p = \frac{AB \times AC}{2} \times$

wst A; to iest, *powiérzchnia tróykąta równa się połowie iloczynu dwóch iego boków rozmnożonego przez wstawę kąta między temi bokami zawartego.*

326. Zag. 2. *Maiąc wiadome trzy boki tróykąta, wyrachować promień koła na nim opisanego.*

Rozw. W tróykącie ABC *fig.* 148, oznaczywszy boki przeciwne kątom A, B, C, przez a, b, c, powiérzchnią tróykąta przez p, a BS szukany promień koła opisanego przez x; będzie podług zagadnienia poprzedzaiącego, $p = \frac{bc}{2} \times$ wst A.

Poprowadziwszy średnicę BD i cięciwę CD, w tróykącie prostokątnym BCD, R : wst CDB = BD : BC. A że kąt CDB = A, BD = 2BS = $2x$, BC = a, R = 1; więc 1 : wst A = $2x : a$; a zatém wst A $= \frac{a}{2x}$. Ważność tę położywszy w równaniu powyższém, będzie $p = \frac{abc}{4x}$; więc $x = \frac{abc}{4p}$; To iest, *promień koła na tróykącie opisanego, równa się iloczynowi trzech boków tróykąta podzielonemu przez wziętą 4 razy iego powierzchnią.*

Co się tycze SF promienia koła wpisanego w tróykąt ABC *fig.* 121, łatwo iest okazać, że promień ten równa się powiérzchni tróykąta podzielonéy przez polowę summy trzech iego boków.

327. Zag. 3. *Wynaleźć stosunek przybliżony okręgu do średnicy.*

Rozw. Ponieważ łuk co do długości zawsze iest większy od swoiéy wstawy, a mnieyszy od stycznéy; różnica zaś między wstawą i styczną tém iest mnieysza, im iest mnieyszy łuk (297); znalazłszy więc sposobem podanym wyżéy (298), ważność wstawy i stycznéy łuku równego *np.* iednéy sekundzie, i obie te ważności podwoiwszy, znaydziemy dwie liczby bardzo mało między sobą różniące się, z których piérwsza będąca ważnością cięciwy łuku równego dwom sekundom (295), iest cokolwiek od tego łuku mnieysza, druga zaś cokolwiek od tegoż łuku większa: liczba zatém środek między niemi trzymaiąca, będzie ważnością łuku równego dwom sekundom. Wziąwszy potém obie te podwoione ważności tyle razy, ile razy łuk równy dwom sekundom mieści się w półokręgu, otrzymamy dwie liczby bardzo mało między sobą różniące się, iednę mnieyszą od ważności półokręgu, drugą większą. Liczba zatém środek między temi dwiema liczbami trzymaiąca, może być wziętą za ważność półokręgu, którą podwoiwszy i porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy przybliżony stosunek okręgu do średnicy.

328. Do wyrachowania części tróykątów prostokréślnych, potrzebne są tylko styczne i dotyczne łuków mnieyszych od czwartéy części okręgu, a wstawy i dostawy łuków mnieyszych

od połowy okręgu; o czém łatwo przekonać się można przeyrzawszy z uwagą podane wyżéy zagadnienia. Lecz w różnych przystosowaniach Trygonometryi potrzebne są częstokroć łuki nie tylko większe od połowy okręgu, ale też większe od całego okręgu, a nawet łuki równe kilku okręgom koła. Wypada więc poznać ważność wstaw, dostaw i t. d. łuków tak wielkich, iak tylko być mogą.

Wystawmy sobie, że promień SM, *fig.* 149, może się około punktu S obracać tak, że punkt M obiega cały okrąg w kierunku ACBDA. Rzeczą iest przez się widoczną, że im bardziéy punkt M oddali się od punktu A, tém będzie większy łuk AM. Gdy punkt M znayduie się na punkcie A, to iest, gdy łuk AM $=$ o, iego wstawa iest także o, i styczna o. Jakoż wstawa MP iest odległością punktu M od promienia AS: kiedy więc punkt M znayduie się na punkcie A, odległość ta musi być o; toż mówić o stycznéy AT która także musi być o, gdy punkt M znayduie się na punkcie A; w ten czas bowiem sieczna ST przechodząca przez punkt M, musiałaby przechodzić przez punkt A.

Że zaś dostawa łuku równa się piérwiastkowi z różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (290); kiedy więc łuku o wstawa iest o, dostawa tegoż łuku musi być równa promieniowi. I w rzeczy saméy dostawa łuku iest wstawa dopełnienia tegoż łuku; dopełnieniem zaś łuku o iest łuk równy 4téy części okręgu, którego wstawą iest promień. A że sieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez dostawę tegoż łuku (290): kiedy więc łuku o dostawą iest promień, sieczną łuku o będzie kwadrat promienia podzielony przez promień, czyli sieczna łuku o iest promień. Co się tycze dosieczney i dotyczney łuku o, z tych pierwsza równa iest sieczney, druga styczney dopełnienia łuku o, czyli 4téy części okręgu. Dla poznania więc ważności dosieczney i dotyczney łuku o, trzeba pierwey poznać sieczną i styczną 4téy części okręgu.

Oznaczywszy zatém promień przez R, będzie
wst o $=$ o, sty o $=$ o, dos o $=$ R, siec o $=$ R.

329. Im bardziey punkt M przybliża się do B, czyli im bardziey rośnie łuk AM, tém bardziey powiększa się iego wstawa, styczna i sieczna, a tém bardziey zmnieysza się iego dostawa, dotyczna i dosieczna; co iest przez się widoczna. Gdy punkt M znayduie się w połowie drogi od A do B, czyli gdy łuk AM równa się 8méy części okręgu, i iego dopełnienie czyli łuk MB równa się także 8méy części okręgu; na ten czas wstawa równa iest dostawie, styczna równa dotyczney, sieczna równa dosieczney. Nadto w tróykącie AST prostokątnym przy A, kąt AST = ATS: gdyż miarą pierwszego iest łuk AM równy 8méy części okręgu, czyli 45°; a zatém i dopełnienie iego, to iest, kąt ATS $=$ 45°. Więc bok AT $=$ AS; to iest, styczna 8méy części okręgu równa się promieniowi. I w rzeczy saméy ponieważ styczna łuku równa się iloczynowi promienia i wstawy podzielonemu przez dosta-

wę tegoż łuku (290); kiedy więc wstawa i dostawa 8méy części okręgu są sobie równe, styczna 8méy części okręgu równa będzie promieniowi. Toż mówić o dotycznéy tego łuku. Oznaczywszy zatém okrąg koła przez π, będzie

sty $\frac{1}{8}\pi = R$. dot $\frac{1}{8}\pi = R$. Ważność wstawy i dostawy tego łuku wyprowadziliśmy wyżéy (298). A co się tycze ważności siecznéy i dosiecznéy tegoż łuku, te łatwo iest wyprowadzić z równań podanych wyżéy (290).

330. Gdy punkt M przyydzie do C, czyli gdy łuk AM równa się 4téy części obręgu, na ten czas wstawa łuku tego będzie promień, a dostawa $= 0$, iakośmy iuż powiedzieli wyżéy (296).

Ważność ta wstawy i dostawy 4téy części okręgu, może być także następuiącym sposobem wyprowadzona. Ponieważ dostawa łuku iest wstawą iego dopełnienia, a dopełnieniem łuku 0 iest łuk równy 4téy części okręgu; więc dostawa łuku 0 to iest promień, będzie wstawą czwartéy części okręgu; a wstawa łuku 0, to iest 0 będzie dostawą 4téy części okręgu.

Ponieważ styczna AT iest równoodległa od promienia CS przechodzącego przez drugi koniec łuku AC równego 4téy części okręgu; więc dwie te linije zeyść się z sobą nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone.

Styczna zatém 4téy części okręgu iest ilością nieskończoną: ilość nieskończona wyraża się zwyczaynie znakiem takim ∞. Będzie więc sty $\frac{1}{4}\pi = \infty$.

Dopełnieniem 4téy części okręgu iest łuk

o. Styczna zatém łuku o, to iest o będzie dotyczną 4téy części okręgu; a styczna 4téy części okręgu czyli ∞ będzie dotyczną łuku o; to iest, dot $\frac{1}{4}\pi = 0$; dot $0 = \infty$ (*).

Co się tycze siecznéy i dosiecznéy łuku równego 4téy części okręgu, z tych pierwsza iest ilością nieskończoną, druga zaś równa się promieniowi który iest sieczną łuku o będącego dopełnieniem 4téy części okręgu; co i stąd iest rzeczą widoczną, że ponieważ dosieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę (290); kiedy więc wstawa 4téy części okręgu iest promień, dosieczną 4téy części okręgu będzie kwadrat promienia podzielony przez promień, czyli dosiec $\frac{1}{4}\pi = R$.

331. Gdy punkt M oddala się od C ku B, wstawy zmnieyszaią się, a dostawy rosną. I tak wstawa łuku AN większego od 4téy części okręgu iest NQ, a dostawa NG czyli SQ. Ta sama liniia NQ iest także wstawą łuku NB mnieyszego od 4téy części okręgu, lecz będącego spełnieniem łuku AN.

Poprowadziwszy cięciwę NM równoodległą od średnicy AB, będzie NQ = MP, i łuk NB = AM iako zawarte między cięciwami równoodległemi; a tém samém i łuk AM iest spełnie-

---

(*) *Ponieważ sty* a $= \dfrac{R.\ wst\ a}{dos\ a}$ (290), *a wst* $\frac{1}{4}\pi =$ *R*, *dos* $\frac{1}{4}\pi = 0$; *będzie więc sty* $\frac{1}{4}\pi = \dfrac{R^2}{0}$; *ułomek ten oznacza także ilość nieskończoną.*

niem łuku AN. Dwa te łuki maiące równe wstawy MP i NQ, maią także równe dostawy SP i SQ; lecz dostawy te maią odwrotny kierunek: dostawa SP łuku AM mnieyszego od 4téy części okręgu leży po lewéy stronie średnicy DC, dostawa zaś SQ łuku AN większego od 4téy części okręgu leży po prawéy stronie teyże średnicy DC. Odwrotność ta kierunku dostaw i wszelkich innych liniy wyraża się w rachunku dwoma znakami + i —, z których piérwszy wyraża ilości dodayne, drugi odiemne. I tak ieżeli dostawa SP leżąca po lewéy stronie średnicy DC uważa się iako ilość dodayna, czyli ma przed sobą znak +; dostawa SQ leżąca po prawéy stronie teyże średnicy DC uważa się iako ilość odiemna, i ma przed sobą znak —. *Dostawa zatém łuku większego od 4téy części okręgu, iest równa dostawie iego spełnienia wziętéy ze znakiem —.*

Że zaś sty AN $= \dfrac{\text{R. wst AN}}{\text{dos AN}}$ (290); kiedy więc dostawa łuku AN iest odiemna, styczna tegoż łuku powinna być odiemna: iloraz bowiem ilości dodanéy podzielonéy przez ilość odiemną iest odiemny. I w rzeczy saméy styczna łuku AN iest część prostopadłéy AT zawarta między promieniem AS i sieczną NS przez drugi koniec tego łuku poprowadzoną (287); lecz sieczna ta dostatecznie przedłużona, zeydzie się z liniią AT w punkcie *t* poniżéy średnicy AB. Styczną zatém łuku AN iest liniia A*t* równa stycznéy AT, lecz maiąca kierunek odwrotny, a tém samém odie-

odiemna. Nadto ponieważ A*t* iest styczną łuku A*m*, który iest spełnieniem łuku AN, gdyż N*m* iest średnica; więc *styczna łuku większego od 4téy części okręgu, równa się stycznéy iego spełnienia wziętéy ze znakiem —.* Toż mówić o dotycznéy tegoż łuku, którą iest liniia CF równa CE dotycznéy łuku AM, lecz maiąca kierunek odwrotny, a tém samém odiemna. A że sieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez dostawę, a dosieczna równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę; kiedy więc dostawa łuku większego od 4téy części okręgu iest odiemna, będzie sieczna tego łuku odiemna, a dosieczna dodayna. Jakoż sieczna łuku AN iest S*t*, dosieczna zaś iest SF.

332. Gdy punkt M znayduie się na punkcie B, czyli gdy łuk AM równa się połowie okręgu, będzie wstawa $=$ o, dostawa $= -$ R, styczna $=$ o; dotyczna $= - \infty$; sieczna $= -$ R; dosieczna $= \infty$; co iest łatwo wyprowadzić z wiadomości poprzedzaiących.

333. Gdy punkt M znayduie się na punkcie *n*, czyli gdy łuk AM iest większy od połowy okręgu, iak iest łuk ACB*n*, wstawa iego *n*Q znayduiąca się poniżéy średnicy AB, ma kierurunek odwrotny wstawom NQ, MP znayduiącym się powyżéy średnicy AB; wstawa zatém łuku większego od połowy okręgu iest odiemna. Wstawa ta *n*Q powiększa się, a dostawa SQ zmnieysza się coraz bardziéy, w miarę przybliżania się punktu M do punktu D, iak dalece, że

18

w punkcie D, gdzie łuk ABD$=\frac{3}{4}$ okręgu, wstawa iest promień DS wzięty odiemnie, dostawa zaś równa się o. Nakoniec gdy punkt M przybliża się do punktu A, czyli gdy łuki są większe od $\frac{3}{4}$ okręgu, iak iest *np.* łuk AB*m*, na ten czas wstawa *m*P zaczyna się zmnieyszać, lecz iest zawsze odiemna; dostawa zaś SP zaczyna się powiększać, i iest znowu dodayna, aż do punktu A, gdzie wstawa równa się o, a dostawa promieniowi. Wstawą zatém łuku równego okręgowi iest o, dostawą zaś promień.

Co się tycze ważności styczney, dotyczney, sieczney i dosieczney tak łuku większego od połowy okręgu i od $\frac{3}{4}$ okręgu, iako też łuku równego $\frac{3}{4}$ okręgu i całemu okręgowi, te łatwo iest wyprowadzić za pomocą równań podanych wyżey (290).

334. Gdyby punkt M powróciwszy do punktu A, rozpoczął nowy obrot w tymże samym kierunku, w jakim odbył obrot piérwszy, mielibyśmy łuki większe od całego okręgu, a nawet większe od dwóch, trzech i t. d. okręgów, gdyby punkt M po ukończonym obrocie drugim, rozpoczął obrot trzeci, potém czwarty i t. d. Lecz wszystkie te łuki maią zawsze początek w punkcie A, a koniec w punkcie M; a zatém ich wstawy, dostawy i t. d. będą te same, iakie są łuków AM wykréślonych przez punkt M w czasie piérwszego obrotu. Oznaczywszy więc łuk iakikolwiek przez a, będzie wst $a =$ wst $(\pi + a)$ $=$ wst $(2\pi + a) =$ wst $(3\pi + a)$ i t. d. Toż mówić o dostawach, stycznych i t. d.

335. Wszystkie te ważności wstaw i dostaw, a tém samém stycznych, dotycznych siecznych i dosiecznych, można także wyprowadzić z piérwszego twierdzenia Trygonometryi (291). Jakoż w piérwszém i trzeciém równaniu tego twierdzenia wziąwszy promień R za 1, będzie

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}\,(a+b) = \text{wst}\,a.\,\text{dos}\,b. + \text{wst}\,b.\,\text{dos}\,a\\ \text{dos}\,(a+b) = \text{dos}\,a.\,\text{dos}\,b. - \text{wst}\,a.\,\text{wst}\,b\end{array}\right\}\text{A.}$$

W dwóch tych równaniach wziąwszy 1*ód* łuk a równy 4téy części okręgu, któréy wstawa iest promień czyli 1, a dostawa równa 0, i ważności te położywszy zamiast wst a, dos a; będzie

$$\text{wst}\,(\tfrac{1}{4}\pi + b) = 1.\,\text{dos}\,b + \text{wst}\,b.\,0 = \text{dos}\,b;$$
$$\text{dos}\,(\tfrac{1}{4}\pi + b) = 0.\,\text{dos}\,b - 1.\,\text{wst}\,b = -\,\text{wst}\,b.$$

To iest, wstawa łuku większego od 4téy części okręgu iest dodayna, a dostawa odiemna.

2*re*. Wziąwszy łuk $a = \frac{1}{4}\pi$, i łuk $b = \frac{1}{4}\pi$; dwa równania A zamienią się w następuiące:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\pi = 1.\,0 + 1.\,0 = 0;$$
$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}\pi = 0.\,0 - 1.\,1 = -1.$$

To iest, wstawa łuku równego połowie okręgu iest 0, a dostawa tegoż łuku iest odiemna.

3*cie*. W tychże równaniach A wziąwszy łuk $a = \frac{1}{2}\pi$, i zamiast wst a, dos a położywszy ważności znalezione w dwóch poprzedzaiących równaniach; będzie

$$\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\pi + b) = 0.\,\text{dos}\,b + \text{wst}\,b. - 1 = -\,\text{dos}\,b;$$
$$\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}\pi + b) = -1.\,\text{dos}\,b - 0.\,\text{wst}\,b = -\,\text{dos}\,b.$$

To iest, łuku większego od połowy okręgu wstawa i dostawa iest odiemna.

4te. Wziąwszy łuk $a = \frac{1}{2}\pi$, łuk $b = \frac{1}{4}\pi$; i zamiast wst a, dos a, wst b, dos b położywszy ich ważności znalezione; równania A zamienią się w następuiące:

wst $(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi) = 0.0 + 1. - 1 = -1$;

dos $(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi) = -1.0 - 0.1 = 0$. To iest, łuku równego $\frac{3}{4}$ okręgu wstawa iest odiemna, a dostawa równa 0.

5te. Wziąwszy łuk $a = \frac{3}{4}\pi$, i zamiast wst a, dos a, położywszy znalezioną ważność wstawy i dostawy $\frac{3}{4}$ okręgu; równania A zamienią się w następuiące:

wst $(\frac{3}{4}\pi + b) = -1.$ dos b + wst $b.\,0 = -$dos b;

dos $(\frac{3}{4}\pi + b) = 0.$ dos $b - (-1$ wst $b) =$ wst b. To iest, łuku większego od $\frac{3}{4}$ okręgu wstawa iest odiemna, a dostawa dodayna.

6te. Wziąwszy łuk $a = \frac{3}{4}\pi$, łuk $b = \frac{1}{4}\pi$; i w równaniach A zamiast wst a, dos a położywszy wstawę i dostawę $\frac{3}{4}$ okręgu, a zamiast wst b, dos b położywszy wstawę i dostawę 4téy części okręgu, będzie

wst $(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi) = -1.\ 0 + 1.\ 0 = 0$;

dos $(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi) = 0.\,0 - (-1.\ 1) = 1$. To iest, łuku rownego całemu okręgowi wstawa iest 0, a dostawa dodayna.

7me. Nakoniec w tychże równaniach A wziąwszy łuk $a = \pi$, i zamiast wst a, dos a położywszy znalezioną ważność wstawy i dostawy łuku równego okręgowi; będzie

wst $(\pi + b) = 0.$ dos b + wst $b.\ 1 =$ wst b;

dos $(\pi + b) = 1.$ dos $b - 0.$ wst $b =$ dos b. To iest, łuku równego całemu okręgowi powiększonemu łukiem b, wstawa i dostawa równa się wstawie i dostawie tegoż łuku b i t. d.

Ztąd się okazuie, że od punktu A *fig.* 149, aż do punktu B, gdzie łuk ACB równa się połowie okręgu, wstawy są dodayne; od punktu zaś B, aż do punktu A, gdzie łuk ACBDA równa się okręgowi, wstawy są odiemne. 2re, że od punktu A do C, gdzie łuk AC równa się 4téy części okręgu, dostawy są dodayne; od punktu C do D, gdzie łuk ACBD równa się $\frac{3}{4}$ okręgu, dostawy są odiemne; od punktu D do A, gdzie łuk ACBDA równa się okręgowi, dostawy są dodayne. Granicą zatém wstaw dodaynych i odiemnych iest średnica AB; granicą dostaw dodaynych i odiemnych iest średnica DC prostopadła do średnicy AB.

336. Ponieważ sty $a = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a}$; dot $a = \frac{\text{dos } a}{\text{wst } a}$; styczna więc i dotyczna łuku w ten czas będzie dodayna, kiedy iego wstawa i dostawa maią przed sobą iednakowe znaki, co ma mieysce od punktu A do C i od punktu B do D. Kiedy zaś wstawa i dostawa maią przed sobą znaki odmienne, iak iest od punktu C do B, i od punktu D do A, na ten czas styczna i dotyczna będzie odiemna.

337. Częstokroć w rachunku wypadaią łuki odiemne. Abyśmy poznali iakie są tych łuków wstawy i dostawy, uważmy, że dwa łuki równe AM, Am *fig.* 149, z krórych piérwszy iest

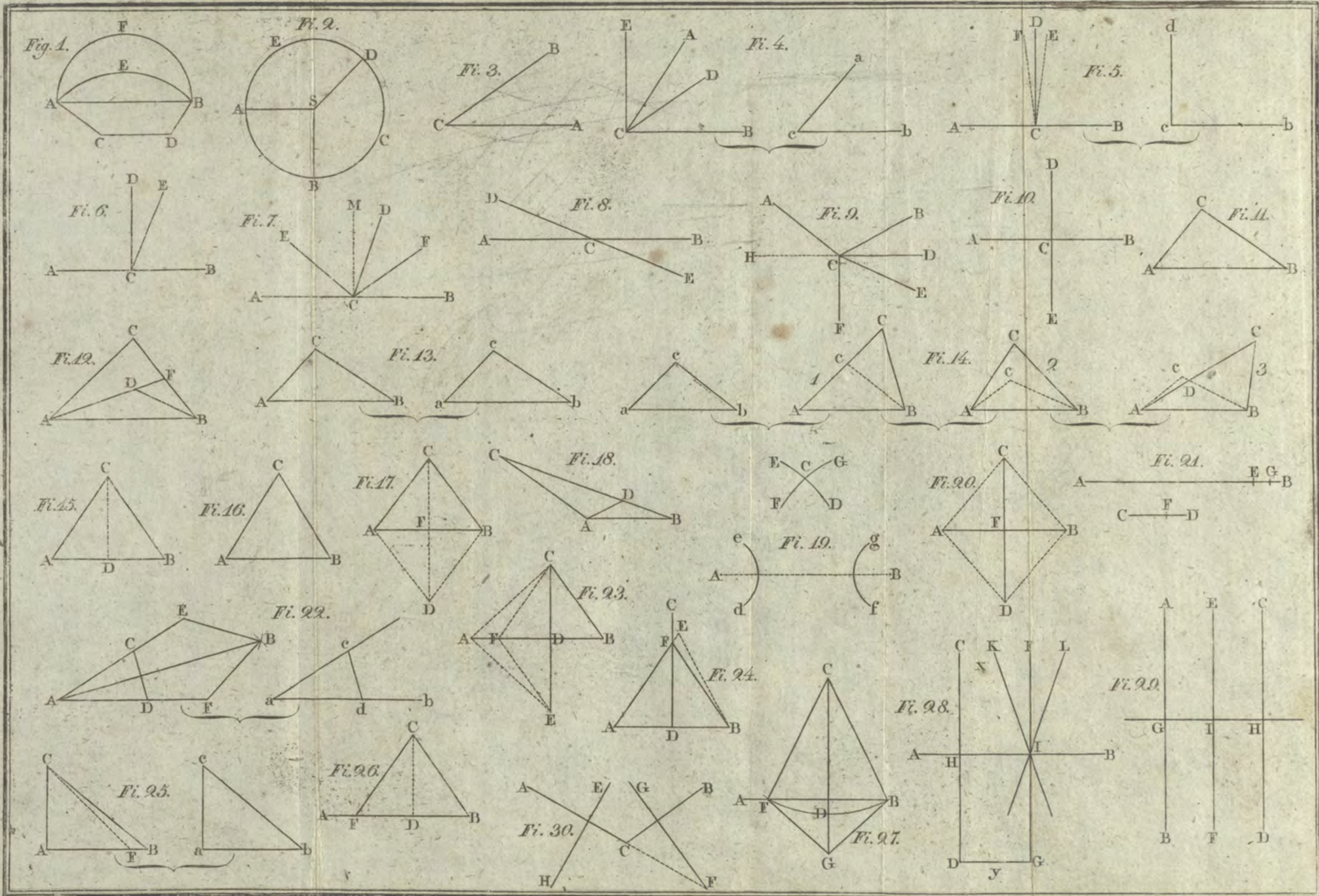
dodayny, drugi odiemny, maią wprawdzie równe wstawy PM i Pm; lecz wstawa piérwszego iest dodayna, wstawa drugiego odiemna; dostawa zaś obudwu iest ta sama PS. Podobnież dwa równe łuki ACN, ADn, z których piérwszy iest dodayny, drugi odiemny, maią równe wstawy NQ i nQ, lecz piérwsza dodayna, druga odiemna; dostawa zaś obudwu iest SQ. Stąd wniesiemy, *że wstawy łuków odiemnych są odiemne; dostawy zaś te same co i łuków dodaynych równych odiemnym.* W ogólności, wst $-a = -$ wst a; dos $-a =$ dos a.

Koniec Trygonometryi Prostokréślnéy i Jeometryi Części I.

REIESTR ROZDZIAŁÓW.

OMYŁKI.

Karta XIII	*wiersz* 4	$+b-c$	*czytay*	$+c-b$
XXI	9	$a-d$		$c-d$
23	12	mieści		mieści się
29	8	CA, CB,		FA, FB,
30	24	CF		DF
35	5	AD		AB
40	5	prowadzić		poprowadzić
69	10	*acb*		*aob*
73	7	BC		AC
79	12	$ad+ad$		$ab+ad$
84	19	AC		AE
—	23	AF		AT
88	21	ECE		ECF
—	29	ABCDE—ABCF		ABCDE=ABCF
91	4	BF		EF
—	20	FFGH		EFGH
97	23	MHB		MBH
102	28	AB		AC
104	7	AC		BC
111	3	ramiona		ramienia
113	28	AD		AD²
120	26	EF		EG
151	16	od		do
153	7	*Na końcu dodać:* Gdy liniia AD iest od CE równoodległa, na ten czas punkt szukany B oznaczy prostopadła ze środka linii AD spuszczona do CE.		
157	2	SCD		BCD
165	11	foremnym		foremnego
207	10	oznaczyć		wyznaczyć
210	24	fig. 100,		fig. 99.
215	16	*ćb*		*cb*
218	6	314 it.d.		3,14 it.d.
220	3	fig. 104		fig. 103
222	6	CS		ĆS
224	20	*dostyczną* lub właściwiéy *dotyczną*		
226	18	prostopadłe		prostopadłe do
244	2	promieni		promieniem
247	7	$(a+b)\ (a-b)$		$(b+a)\ (b-a)$
249	5	wst $(a-b)$		wst $(a+b)$
269	15 i 20	B,		C,
—	22	MB		MC



Joan. Ligber del. et sculp. Varsoviae 1815

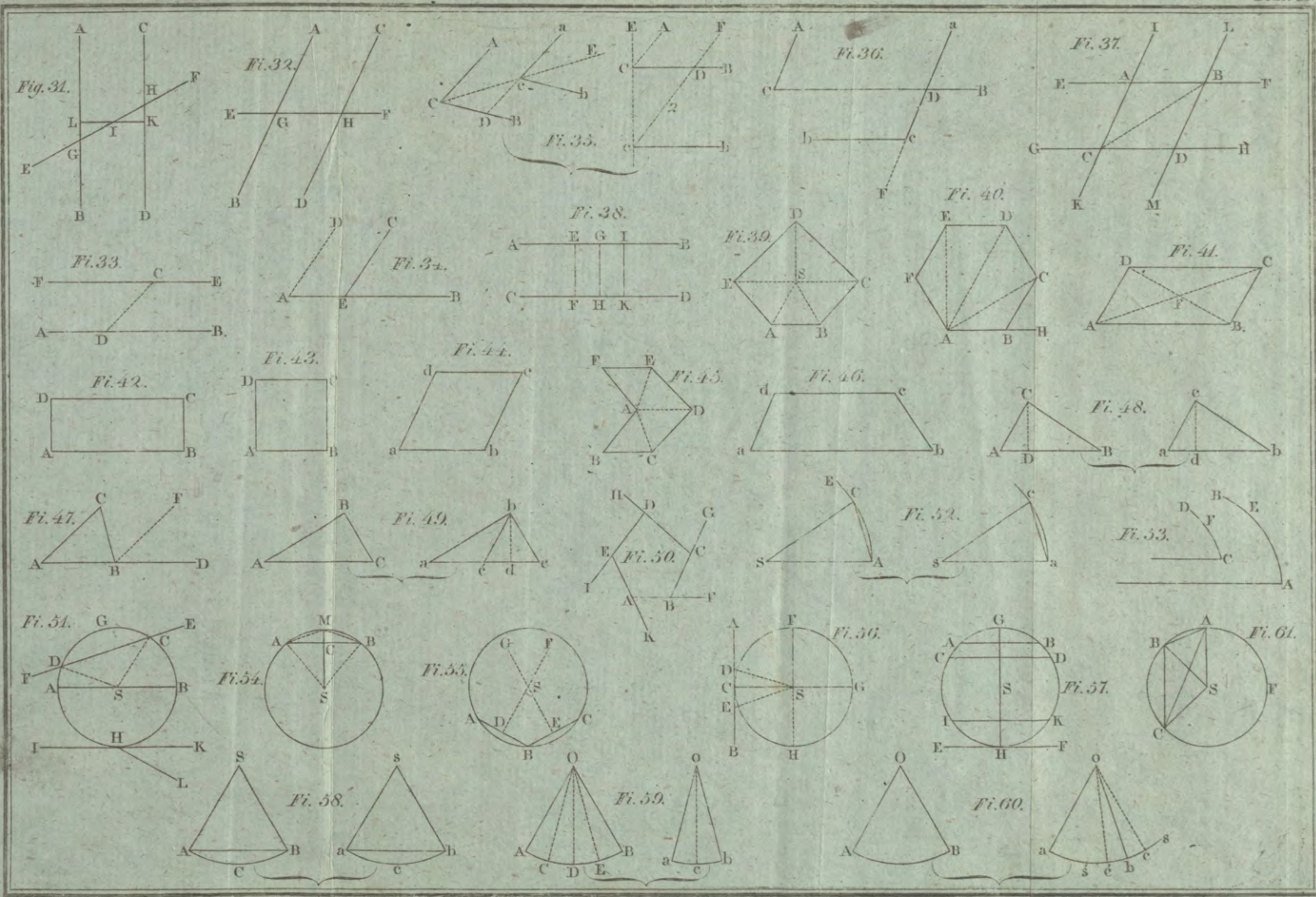


Fig. 31.
Fi. 32.
Fi. 33.
Fi. 34.
Fi. 35.
Fi. 36.
Fi. 37.
Fi. 38.
Fi. 39.
Fi. 40.
Fi. 41.
Fi. 42.
Fi. 43.
Fi. 44.
Fi. 45.
Fi. 46.
Fi. 47.
Fi. 48.
Fi. 49.
Fi. 50.
Fi. 51.
Fi. 52.
Fi. 53.
Fi. 54.
Fi. 55.
Fi. 56.
Fi. 57.
Fi. 58.
Fi. 59.
Fi. 60.
Fi. 61.

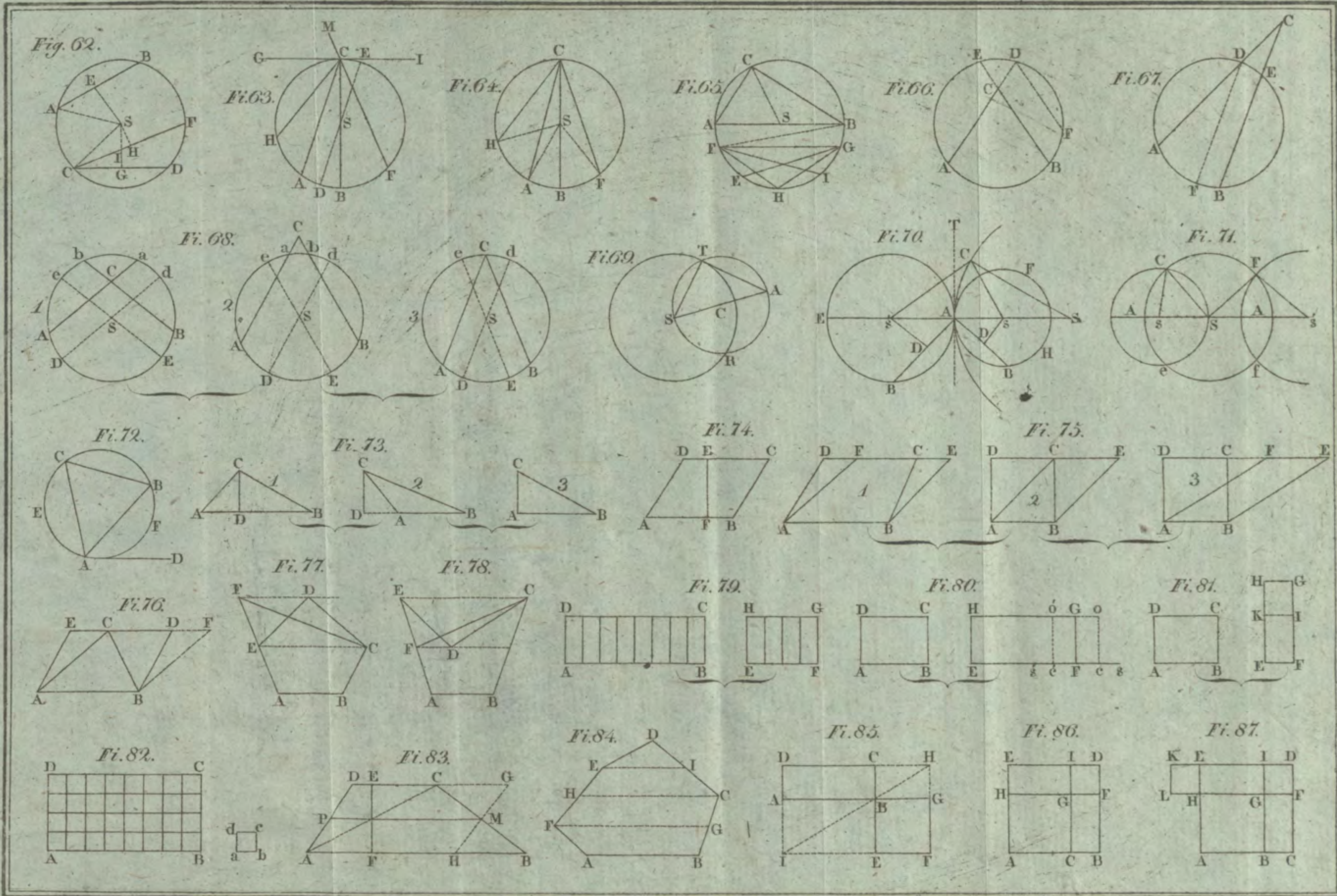


Fig. 62.
Fi. 63.
Fi. 64.
Fi. 65.
Fi. 66.
Fi. 67.
Fi. 68.
Fi. 69.
Fi. 70.
Fi. 71.
Fi. 72.
Fi. 73.
Fi. 74.
Fi. 75.
Fi. 76.
Fi. 77.
Fi. 78.
Fi. 79.
Fi. 80.
Fi. 81.
Fi. 82.
Fi. 83.
Fi. 84.
Fi. 85.
Fi. 86.
Fi. 87.

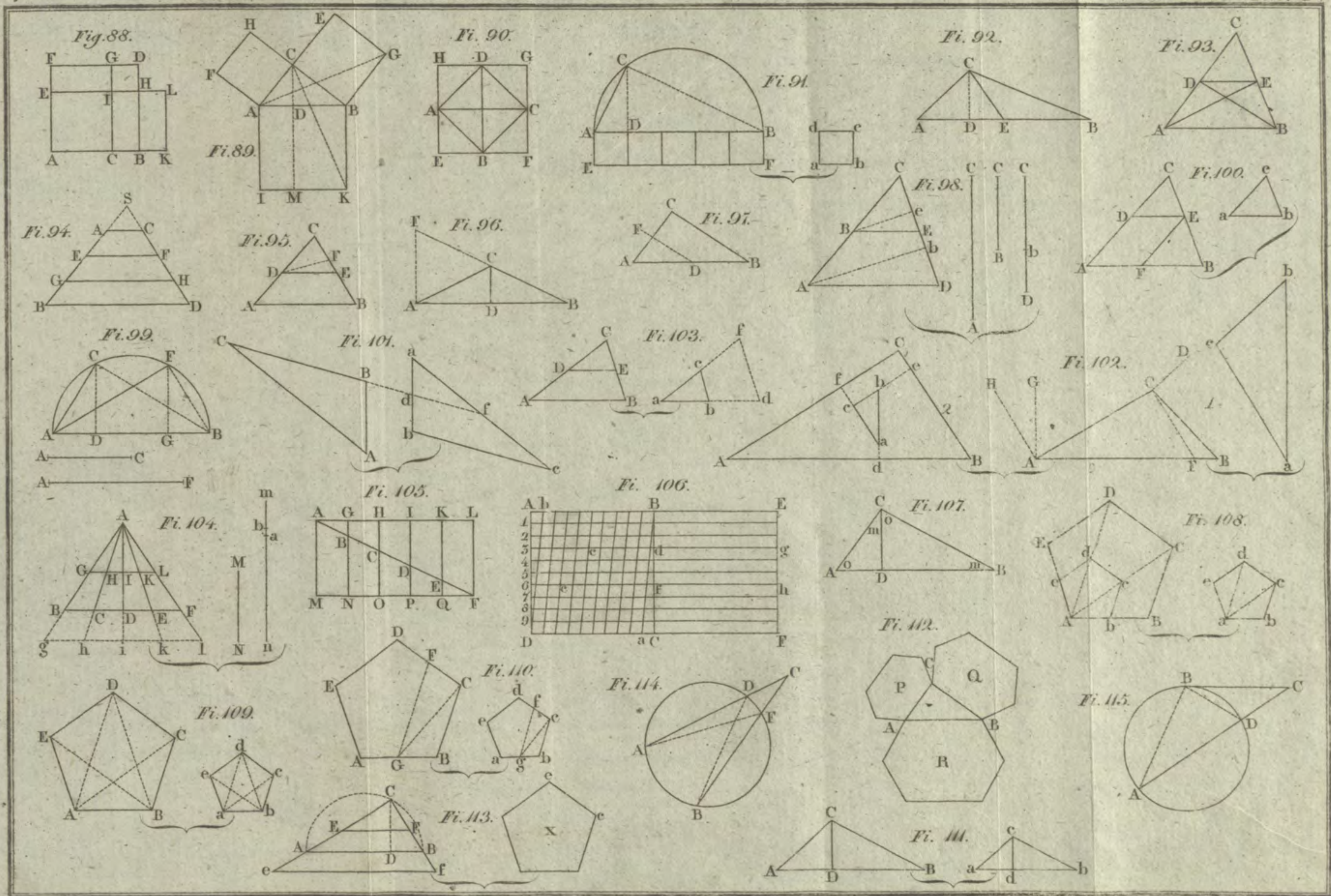
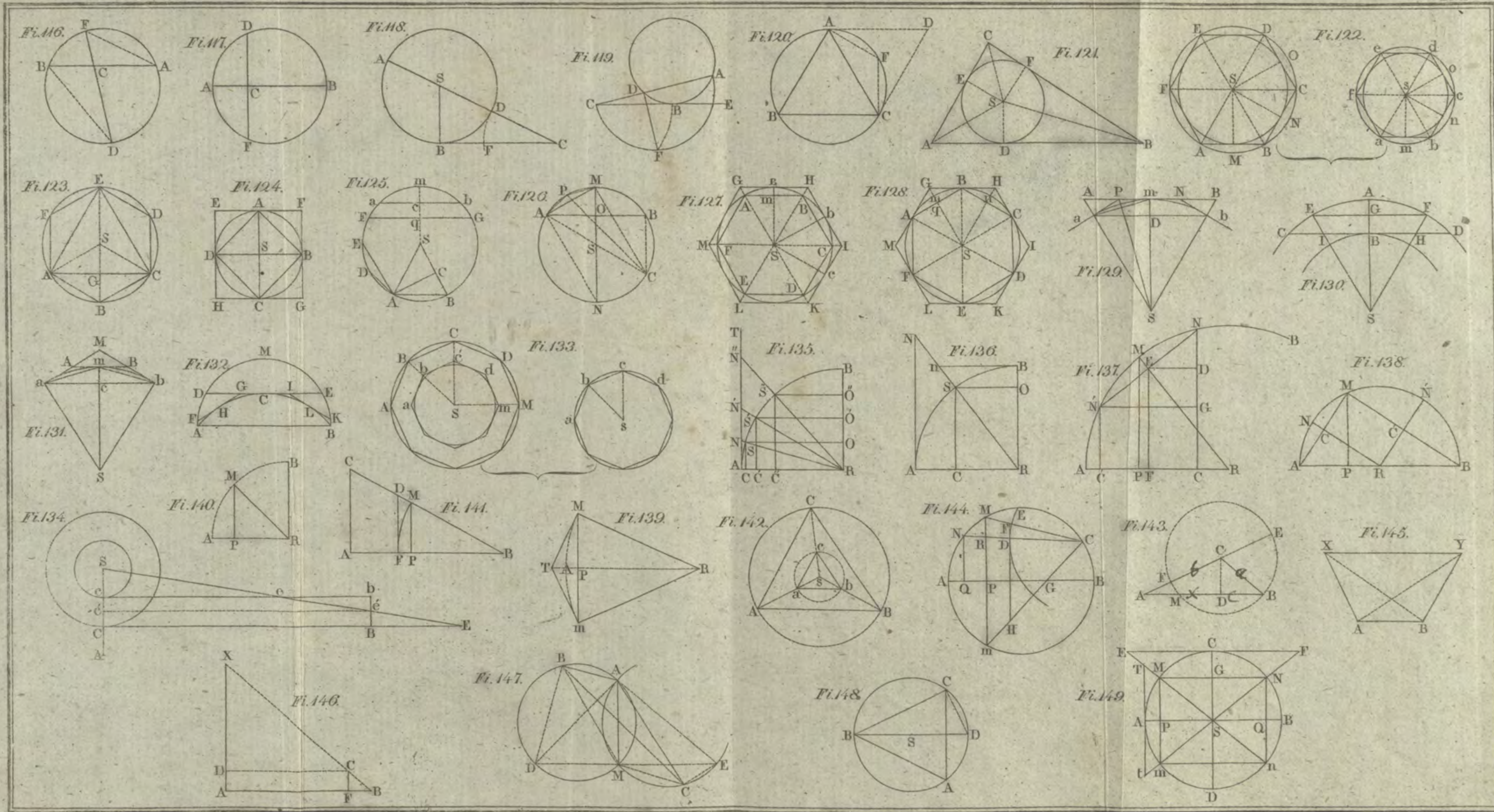
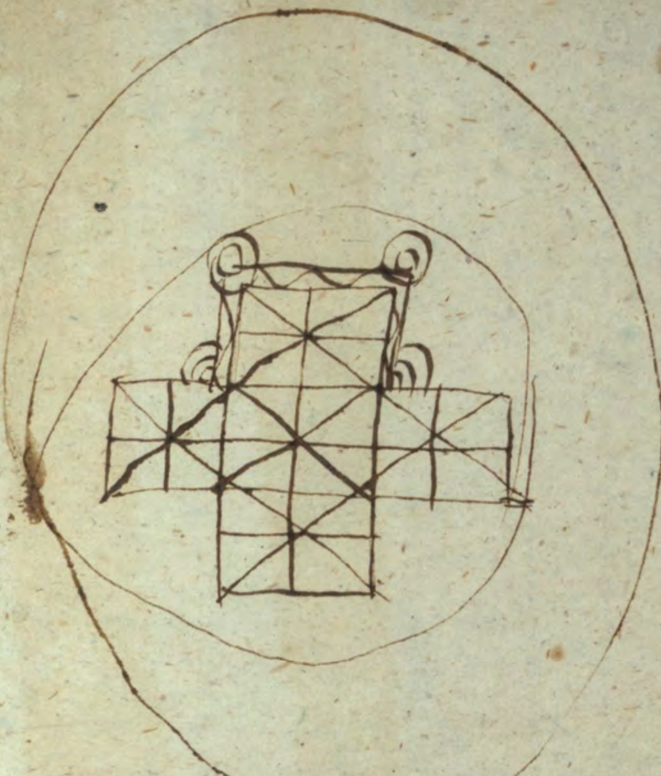


Fig. 88.
Fi. 89.
Fi. 90.
Fi. 91.
Fi. 92.
Fi. 93.
Fi. 94.
Fi. 95.
Fi. 96.
Fi. 97.
Fi. 98.
Fi. 99.
Fi. 100.
Fi. 101.
Fi. 102.
Fi. 103.
Fi. 104.
Fi. 105.
Fi. 106.
Fi. 107.
Fi. 108.
Fi. 109.
Fi. 110.
Fi. 111.
Fi. 112.
Fi. 113.
Fi. 114.
Fi. 115.



Fi.116.
Fi.117.
Fi.118.
Fi.119.
Fi.120.
Fi.121.
Fi.122.
Fi.123.
Fi.124.
Fi.125.
Fi.126.
Fi.127.
Fi.128.
Fi.129.
Fi.130.
Fi.131.
Fi.132.
Fi.133.
Fi.134.
Fi.135.
Fi.136.
Fi.137.
Fi.138.
Fi.139.
Fi.140.
Fi.141.
Fi.142.
Fi.143.
Fi.144.
Fi.145.
Fi.146.
Fi.147.
Fi.148.
Fi.149.



JEOMETRYA
PODŁUG
LA·CROIX