ANNÉE 1643.

X.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS.

FERMAT A BRÛLART DE SAINT-MARTIN.

31 MARS? 1643.

(T. I, p. 133-169.)

[Florence, Bibl. Naz., Mss. Galileiani, *Discepoli*, vol. CIII, f^{os} 113 verso-115 recto. — En haut : *Extrait d'une lettre du dernier may* 1643, et en marge : *A*, *M. Br.* — Inédit (1).]

Nous sommes ici sans doute en présence d'une lettre, ou plutôt d'un écrit, de Fermat adressé à Pierre Brûlart, qui est nommé, dans d'autres lettres de Fermat, M. de Saint-Martin (2). Quant à la date donnée dans le manuscrit, nous croyons qu'elle est erronée et qu'il y a eu confusion avec une autre lettre de Fermat à Brûlart, datée du 31 mai 1643 (t. II, p. 258-260), qui n'a cependant rien de commun

(1) Tandis que notre manuscrit attendait l'impression, le présent écrit fut publié par le Père Giovannozzi dans l'*Archivio di storia della scienza*, vol. I, 1919, p. 137-140.

(2) Pierre Brûlart, seigneur de Saint-Martin, conseiller au Grand-Conseil à Paris, comme Carcavi, et amateur de mathématiques, s'intéressait surtout, comme son ami Frenicle de Bessy, à des problèmes numériques (*voir* sa correspondance avec Mersenne dans l'année 1640, t. IV, p. 69 et 70); il figure dans la correspondance de Fermat dès le commencement de l'année 1640. Roberval lui dédia, le 6 juillet 1643, son *Aristarchus Samius* qu'il feignit avoir tiré d'un vieux manuscrit que Brûlart lui aurait communiqué. Dans le Codex 7049 de la Hofbibliothek, à Vienne, se trouve une lettre de Brûlart à Nublé du 18 mai 1646 et une autre de Desnoyers à Brûlart, datée de Varsovie, le 25 septembre 1647, dans laquelle il est question d'observations météorologiques; en effet, il se trouve au British Museum un manuscrit de Brûlart intitulé : *Les causes et les admirables effets des météores ou diverses impressions de l'air;* ce traité est dédié au surintendant Fouquet et est, par conséquent, antérieur à 1664.

avec la présente. En effet, Fermat ayant promis à Mersenne de « *satisfaire au désir de M. de Saint-Martin sur le sujet de ma méthode* de Maximis et minimis » déjà dans une lettre du 16 février 1643 (t. II, p. 252), le présent écrit est sans doute celui que Fermat ajouta à sa lettre à Mersenne du 7 avril 1643, en écrivant : « *Vous aurez maintenant la réponse que je fais à M. de Brulart, jointe à celle-ci ; je l'ai écrite à la hâte, comme vous verrez, et c'est la raison qui m'oblige à vous prier qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart* », et il donne, dans cette même lettre du 7 avril 1643, des éclaircissements ultérieurs sur des points qui pouvaient paraître douteux dans l'écrit ajouté (t. II, p. 253-254). Cet écrit fut donc rédigé peu de temps avant le 7 avril 1643 et la date du 31 mars 1643 lui convient peut-être mieux que celle du 31 mai 1643.

Les recommandations de Fermat données à Mersenne peuvent expliquer pourquoi l'écrit ne figure pas dans l'édition de 1679. L'écrit mérite d'autant plus l'attention qu'il contient un développement de la méthode des extrêmes qui tend à une démonstration. En effet, comme l'écrivit Fermat en 1658, Carcavi possédait des copies de cette méthode « *de toutes façons, c'est à dire avec démonstration et sans démonstration* » (t. II, p. 366), mais jusqu'à présent, on ne connaissait pas d'exposés du premier genre. D'ailleurs, l'auteur y emploie la dérivée seconde (p. 125 ci-après).

Dans l'impression de cet écrit que les éditeurs de la présente édition ont cru perdu (t. II, p. 253, note 2), nous avons gardé la notation de notre copie, qui est (sauf dans l'emploi des lettres majuscules) complètement la notation soi-disant cartésienne.

Mon invention de *Maxima* et *minima* n'a que deux ou trois fondemens.

Je suppose premierement que cette recherche aboutit à un point ou à un terme unique, comme, par exemple, quand on veut *diviser une ligne en sorte que le rectangle sous les segmens soit esgal à un space donné*. Nous avons deux points dans la ligne qui satisfont à la question, mais quand on cherche le plus grand de tous ces rectangles, nous n'avons qu'un seul point qui y puisse satisfaire, lequel, en l'exemple proposé, est celluy qui divise la ligne en deux parties esgales. Voylà pourquoy Pappus, dans le septième livre [1], appelle tousiours *maximam, unicam et singularem*, et tout de mesme *minimam;* le mot grec est μοναχὸς, qui avoit si fort estonné Commandin, qu'il avoue tout net [2] ne point entendre ce que Pappus a voulu dire par ce terme.

Il faut donc chercher un point unique, au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient ou tousiours plus grands ou tousiours plus petits que celuy qui sera produit par le point cherché.

Il importe donc de comparer le point unique avec ceux qui peuvent estre imaginés de chaque costé. Cela ne se peut pas faire commodément par une seule position, parce que si, par exemple, nous appellons la ligne qui nous donne le point unique, A, il faut luy adiouster, ou en soustraire, une autre quantité pour chercher le rapport entre le point unique et ceux qu'il a de chaque costé. Nous pouvons donc, pour faire la comparaison avec un autre point, pris à discrétion de l'un des costez de l'unique, appeller la ligne qui le donne, $A+E$; et tout de mesme, pour faire la comparaison avec un autre point, pris de l'autre costé de l'unique, appeller la ligne qui le donne, $A-E$, l'un se faisant par l'addition et l'autre par la soustraction. Il faut donc trouver une méthode par le moien de laquelle $A+E$ et $A-E$ donnent le mesme terme pour représenter A, affin que le dict A, représente le point du mitan. Tout ce qui est à ses deux costés excède ou défaille, à

(1) Pappus, *Mathematicæ collectiones*, ed. Commandinus (Pisauri, 1568, fol. 196, verso A.

(2) Comp. tome I, p. 142, note 2; p. 147-148 et ci-avant p. 76.

mesure que nous cherchons ou la plus grande ou la plus petite.

Or il paroist que ma méthode donne la mesme question par $A+E$ que par $A-E$, ce que l'expérience et la raison vous fairont paroistre d'abord. Car $A-E$ donne tousiours les mêmes termes que $A+E$, et n'y a que cette différence qu'au lieu des puissances impaires, ils sont marquez des signes contraires, ce qui ne change point l'équation.

Il paroist donc que $A+E$ donne la mesme équation que $A-E$ par ma méthode. Mais cecy ne suffit pas entièrement, car s'il ne falloit que trouver une mesme équation par $A+E$ que par $A-E$, nous pourrions aussi bien prendre les deux termes qui ont, par exemple, E^2 ou E^3, etc. que ceux qui n'ont que E seulement, et les esgaliser l'un à l'autre, ce qui pourtant ne réussiroit pas. Il faut donc, outre la précaution précédente, qui veut que $A+E$ donne la mesme équation que $A-E$, en adiouster une autre, qui veut que, si $A+E$ donne moins que A, $A-E$ donne aussy moins que A, et pareillement, si $A+E$ donne plus que A, $A-E$ donne aussy plus que A (1).

Ie m'explique par l'exemple qui suit : *Diviser une ligne, en sorte que le solide sous l'un des termes par le quarré de l'autre, soit le plus grand* (2).

Soit A l'un des termes de la ligne qui donne le point unique; le solide sera, la ligne estant posée B : BA^2-A^3.

$A+E$ donnera :

$$BA^2-A^3+BE^2-3AE^2+2BAE-3A^2E-E^3;$$

(1) *Voir* les éclaircissements que Fermat a donnés sur ces conditions dans sa lettre à Mersenne du 7 avril 1643 (t. II, p. 254, l. 10 et suiv.).

(2) Fermat a traité le même exemple aux endroits insérés ci-avant p. 74 et t. I, p. 149.

$A - E$ donnera :

$$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3.$$

Si nous prenons les termes qui sont mesurez par E simple, nous aurons en toutes les deux équations de $A + E$ et de $A - E$, une mesme équation, car il faudra en toutes deux esgaler $2BAE$ à $3A^2E$. Si nous prenions les termes qui sont mesurez par E^2, nous aurions une mesme équation par $A + E$ que par $A - E$, car en toutes les deux il faudroit esgaler BE^2 à $3AE^2$. Il faut donc rendre raison pourquoy nous prenons plutost E simple qu'aucune de ses puissances.

C'est qu'il est nécessaire qu'en toutes les deux positions les homogènes, qui se comparent avec $BA^2 - A^3$, soient chacun moindre que $BA^2 - A^3$. Il faut donc que

$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 + 2BAE - 3A^2E - E^3$ soient moindres que $BA^2 - A^3$,

et que

$BA^2 - A^3 + BE^2 - 3AE^2 - 2BAE + 3A^2E + E^3$ soit aussi moindre que $BA^2 - A^3$,

ce qui ne peut arriver qu'en esgalisant entr'eux les termes, qui sont mesurez par la plus basse puissance de E, qui est icy E. De quoy la raison est parce que les termes, mesurez par la plus basse puissance de E, ont tousiours plus grande raison entr'eux que ceux qui sont mesurez par E^2 ou par E^3, etc., et ceux qui sont mesurez par E^2, ont plus grande raison entr'eux que ceux qui sont mesurez par E^3, E^4, etc. (1). Comme en cet exemple, prenant $A + E$, et faisant l'équation des deux termes mesurez par E seulement, nous aurons d'un costé $2BAE$, de l'autre $3A^2E$; or $2BAE$ est en plus

(1) *Voir* sur ce sujet la remarque de Fermat dans sa lettre à Mersenne du 7 avril 1643, éd. cit., t. II, p. 254, l. 1-9).

grande raison à $3A^2E$ que (en prenant les deux termes mesurez par E^2) BE^2 à $3AE^2$, de quoy la rayson est parce que la multiplication analytique double B en la précédente équation, qui est icy simple. Si donc nous esgalisons $2BAE$ avec $3A^2E$, donc BE^2 (1) sera moindre que $3AE^2$.

Nous prouverons par là que tous les termes qui seront marquez du signe $+$, seront moindres que ceux, qui seront marquez du signe —. Et la dernière puissance de E, qui se trouve tousiours seule, et qui est icy E^3, ne changera point l'ordre de l'équation de quelque signe qu'elle soit marquée, ce qui nous paroistra clairement à la seule inspection. La raison principalle de cecy est que les deux termes marquez par E^2, estans en plus grande raison que ceux qui sont mesurez par les plus hautes puissances au dessus de E^2, ils serviront de clef pour déterminer la plus grande ou la plus petite. Car si le terme marqué $+$ est moindre que le terme marqué —, en ce cas la proposition aboutira à la recherche de la plus grande; que si le terme marqué $+$ est plus grand que le terme marqué —, en ce cas la question sera de la plus petite. Que si nous employons $A-E$, les deux termes mesurez par E^2, auront chacun le même signe (2).

Et partant tous les termes qui seront de mesme marqués du signe $+$ seront moindres que ceux qui seront marqués du signe —. Et la méthode et les raisons que i'ay alléguées, seront générales.

(1) Le manuscrit porte BE; il semble qu'il y a ici quelque omission du copiste.

(2) Entendez : le même signe que si l'on emploie la forme $A+E$. — Jusqu'ici on a cru que Fermat, après avoir déterminé par le moyen de sa méthode une valeur extrême, n'avait pas su discerner qu'il s'agissait d'une valeur *maximum* ou d'une valeur *minimum*. Dans ce qui précède, on le voit introduire dans ses considérations le signe de la dérivée seconde. Celle-ci avait été posée nulle déjà dans son écrit de 1640, où il s'agit de la détermination des points d'inflexion de la conchoïde (t. I, p. 166-167).