XL.

SUI FENOMENI EREDITARII

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXII_1$, 1913_1; pp. 529–539

1. Nella seconda Nota di questi Rendiconti dedicata ai fenomeni ereditarii ho stabilito il *principio del ciclo chiuso* nel caso della eredità lineare (1). Questo però non è che un caso particolare della eredità generale. Nasce quindi spontaneo il pensiero di trasportare il principio fuori del campo della eredità lineare. Mi permetto qui di esaminare ed esporre il principio stesso nella sua forma più generale. Questa ricerca conduce allo studio delle proprietà invariantive delle funzioni di linee per speciali traslazioni delle linee stesse. Perciò dal punto di vista della teoria di queste funzioni essa costituisce un primo passo nello studio generale delle loro proprietà invariantive. Pur non approfondendo in questa Nota se non la parte di tale studio che tocca la speciale questione del ciclo chiuso, risulta manifesto che i criterii qui adoperati sono suscettibili di notevole estensione.

2. Il concetto fondamentale dei fenomeni ereditari consiste nel riguardare lo stato attuale di un sistema come dipendente da tutta la sua storia antecedente. Limitandoci al caso più semplice in cui lo stato attuale (al tempo $t = x$) di un parametro z dipenda da tutta la storia di un parametro y cioè da tutti i valori assunti da y nel periodo di tempo antecedente ad x, avremo, scrivendo $y = f(t)$, che z dipenderà da tutti i valori di $f(t)$ per $-\infty < t \leq x$. Potremo dunque scrivere

$$z = F\left|\left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| . \tag{1}$$

Lo studio analitico dei fenomeni ereditarii è quindi strettamente collegato a quello delle funzioni precedenti.

Noi potremo rappresentare ancora z nel modo seguente:

Immaginiamo disegnata la curva C avente per equazione $y = f(t)$ nell'intervallo $(-\infty , x)$ (la curva punteggiata della fig. 1). Potremo valerci anziché della notazione precedente (1) dell'altra

$$z = F \,|\, [C] \,| . \tag{2}$$

(1) *Sulle equazioni della elettrodinamica*, seduta del 7 marzo 1909 [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283]; vedi anche: *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, « Acta Math. », tom. 35, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487–538].

Noi supporremo $f(t)$ sempre inferiore, in valore assoluto, ad un valore M, inoltre noi ammetteremo il *postulato della dissipazione dell'azione ereditaria*, cioè che questa azione si attenua indefinitamente coll'andar del tempo. Esprimeremo ciò mediante la condizione che *cambiando comunque* $f(t)$ *nell'intervallo* $(-\infty, x_1)$ *ove* $x_1 < x$ (*e mantenendola sempre inferiore ad* M)

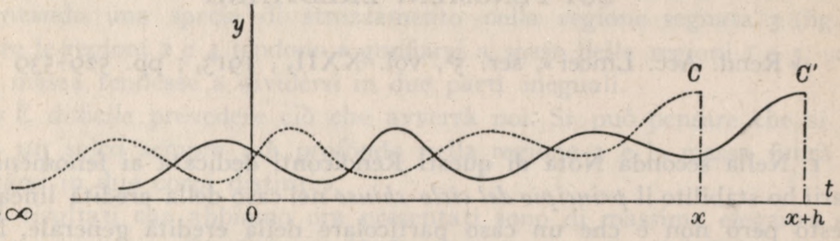

Fig. 1.

mentre si conserva $f(t)$ *inalterata nell'intervallo* (x_1, x), *il valore assoluto della variazione di* z *può rendersi inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio*, *purché si prenda* $x - x_1$ *maggiore di un certo valore.*

3. È evidente che se noi cambiamo x, cioè l'estrema ascissa della curva C, o se cambiamo la funzione $f(x)$ ossia la curva C, o se alteriamo tutti e due questi elementi, z in generale cambierà.

Ma immaginiamo che il cangiamento contemporaneo di questi due elementi consista in una traslazione della curva C di ampiezza h nella direzione t. In altri termini invece della curva C consideriamo la curva C' (la curva a tratto unito della fig. 1) e poniamo

$$z' = \mathrm{F} \mid [\mathrm{C}'] \mid = \mathrm{F} \left[f(t-h) \right] \Big|_{-\infty}^{x+h} \text{ (2)}.$$

Varii casi potranno presentarsi:

1° Qualunque sia h e qualunque sia la funzione f, $z' = z$.

2° Per speciali valori di h, e qualunque sia f, $z' = z$.

3° Qualunque sia h e per speciali funzioni f, $z' = z$.

4° Per speciali valori di h e per speciali funzioni f, $z' = z$.

5° Qualunque sia h (eccettuato il caso $h = 0$) e qualunque sia f non si ha mai $z' = z$.

Diamo esempii di questi varii casi.

1° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1 + (x-t)^4} dt ;$$

(2) Notiamo una volta per tutte che in questa formula come in tutte le successive t è la variabile compresa fra i limiti indicati sopra e sotto ad ogni singola formula.

sarà

$$z' = \int_{-\infty}^{x+h} \frac{f(t-h)}{1 + (x+h-t)^4}\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1 + (x-t)^4}\,dt = z.$$

2° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{\operatorname{sen} x + x - t}{1 + (x-t)^4}\, f(t)\,dt.$$

Se prendiamo $h = 2\pi n$ (n essendo un numero intero) avremo, qualunque sia f, $z = z'$, mentre in generale questa eguaglianza non sarà soddisfatta per altri valori di h.

3° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x\,(f(t-2\pi) - f(t)) + f(t)}{1 + (x-t)^4}\,dt.$$

Se f sarà periodica col periodo 2π, avremo $z' = z$ qualunque sia h. In generale no.

4° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x\,(f(t-2\pi) - f(t)) + (\operatorname{sen} x + x - t)\, f(t)}{1 + (x-t)^4}\,dt.$$

Se prendiamo $h = 2\pi n$ (n essendo intero) e f è periodica col periodo 2π, sarà $z' = z$. In generale no.

5° Se

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x + t + f(t)}{1 + (x-t)^4}\,dt$$

si avrà $z' = z$ solo nel caso in cui sia $h = 0$.

4. Nel primo caso quando

$$\mathrm{F}\,|\,[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}]\,| = \mathrm{F}\,|\,[f\,(t \overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}} h)]\,|,$$

ossia *z è invariante per tutte le traslazioni di* C *nella direzione t* (3), si potrà dire evidentemente che F dipende solo dai valori assunti da $f(t)$ non dal punto estremo x, cioè che F è una *funzionale pura* rispetto a $f(t)$. Dal punto di vista ereditario avremo in questo caso che lo stato in un certo istante non dipende da questo istante, ma è caratterizzato solo dal modo con cui si è svolta la storia anteriormente a questo istante, in altri termini avremo la invariabilità delle leggi ereditarie attraverso il tempo, ciò che si esprimerà dicendo che in questo caso vale la *invariabilità dell'eredità.*

Esaminiamo ora il 4° caso, e supponiamo che sia

$$\mathrm{F}\,|\,[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}]\,| = \mathrm{F}\,|\,[f\,(t \overset{x+\mathrm{T}}{\underset{-\infty}{-}} \mathrm{T})]\,|,$$

(3) È facile stabilire delle denominazioni analoghe negli altri casi.

allorché T *ha un certo valore determinato e* $f(t)$ *è periodica collo stesso periodo* T (come nell'esempio considerato nel § precedente).

In questo caso avremo

$$F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+T}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+nT}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|,$$

n essendo un numero intero qualunque.

Potremo quindi dire che z *è invariante per tutte le traslazioni di ampiezza* T *parallele a* t *che riconducono la curva* C *su se stessa*, ossia che

$$z = z(x)$$

è periodica col periodo T allorché

$$y = f(x)$$

è periodica collo stesso periodo.

Consideriamo y e z come l'ascissa e l'ordinata di un punto del piano; facendo variare x questo punto percorrerà nel caso attuale un ciclo chiuso con moto periodico di periodo T. Potremo quindi caratterizzare questo caso dicendo che in esso si verificano le *condizioni del ciclo chiuso col periodo* T.

5. Vogliamo ora dimostrare il teorema: *Se le condizioni del ciclo chiuso sono verificate per tutti i periodi, vale la invariabilità della eredità*, e reciprocamente *se vale la invariabilità delle eredità le condizioni del ciclo chiuso sono verificate per tutti i periodi* (4).

Supponiamo che

$$z = F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|$$

soddisfi alla condizione del ciclo chiuso. La curva corrispondente a $y = f(t)$ sia C (la curva disegnata a tratto unito nella fig. 2). A partire da $x - H_1$

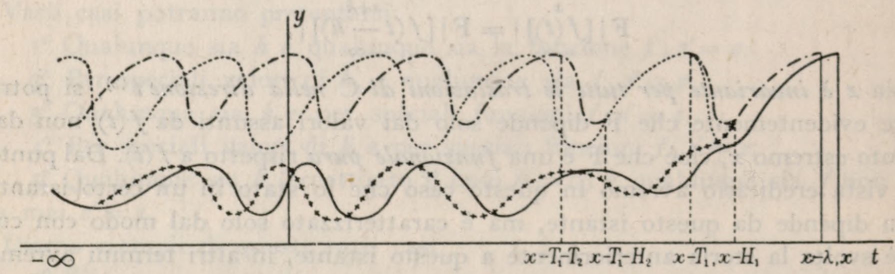

Fig. 2.

fino a $-\infty$ alteriamo $f(t)$ in modo da renderla periodica col periodo T_1, ma conservandola inalterata nell'intervallo $(x - H_1, x)$. Chiamiamo $f_1(t)$

(4) Si può enunciare lo stesso teorema facendo uso delle parole introdotte precedentemente riferentisi alle proprietà invariantive funzionali.

la funzione così cambiata, e denotiamo con C la curva corrispondente (la curva punteggiata della figura, coincidente però nell'intervallo $(x - H_1, x)$ colla linea a tratto continuo).

Poniamo

$$\left| F\left|\left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| - F\left|\left[f_1\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| \right| = \sigma_1 .$$

Ma $F\left|\left[f_1\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| = F\,|[C_1]$ è invariantiva per tutte le traslazioni di C_1 di ampiezza T_1 quindi

$$F\left|\left[f_1\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| = F\left|\left[f_1\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| ,$$

e per conseguenza

$$\left| F\left|\left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| - F\left|\left[f_1\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| \right| = \sigma_1 . \tag{3}$$

Ciò premesso alteriamo la funzione $f_1(t)$ a partire da $x - T_1 - H_2$ $(H_2 < T_1)$ fino a $-\infty$ e da $x - T_1$ fino a $+\infty$ rendendola periodica col periodo $T_2 < T_1$, ma conservandola inalterata nell'intervallo $(x - T_1 - H_2, x - T_1)$. Denotiamo con $f_2(t)$ la funzione così cambiata. La curva corrispondente sarà C_2 (la curva tratto e punto della figura, coincidente però nell'intervallo $(x - T_1 - H_2, x - T_1)$ colla curva punteggiata).

Se noi scriviamo

$$\left| F\left|\left[f_1\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| - F\left|\left[f_2\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| \right| = \sigma_2$$

a cagione della (3) avremo

$$\left| F\left|\left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| - F\left|\left[f_2\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Ma F $[C_2]$ è invariante per traslazioni di C_2 di ampiezza T_2, per conseguenza

$$F\left|\left[f_2\overset{x-T_1+T_2}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| = F\left|\left[f_2\overset{x-T_1}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| ,$$

onde, posto $T_1 - T_2 = \lambda$,

$$\left| F\left|\left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| - F\left|\left[f_2\overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{(t)}}\right]\right| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 . \tag{4}$$

Supponiamo ora di dare alla curva C una traslazione $-\lambda$ nella direzione t. Essa diverrà C' la quale coinciderà con C_2 da $x - \lambda$ fino a $x - \lambda - H_2$, poi in generale se ne distaccherà fino a $-\infty$ (sarà la curva rappresentata con stellette nella figura, coincidente però nell'intervallo $(x - \lambda - H_2, x - \lambda)$ colla curva tratto e punto). La C' corrisponderà evidentemente alla funzione $f(x + \lambda)$.

Pongasi

$$(5)\qquad \left| F\left|\left[f_2(\overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{t}})\right]\right| - F\left|\left[f(\overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{t}}+\lambda)\right]\right| \right| = \sigma_2' .$$

Combinando la (4) e la (5) risulterà

$$\left| F\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}})\right]\right| - F\left|\left[f(\overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{t}}+\lambda)\right]\right| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2' .$$

Ora è in nostro arbitrio scegliere H_1 e H_2 tanto grandi quanto ci piace e quindi, in virtù del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria, σ_1, σ_2, σ_2' possono rendersi tanto piccoli quanto ci piace. Se ne deduce che:

$$F\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}})\right]\right| - F\left|\left[f(\overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{t}}+\lambda)\right]\right| = 0 ,$$

e siccome anche λ è in nostro arbitrio, così la eguaglianza precedente sussisterà qualunque sia λ, come si doveva dimostrare.

La proposizione reciproca si dimostra immediatamente, osservando che, se una $F\,|[C]|$ è invariante per una traslazione data alla curva C, qualunque sia questa curva, sarà pure invariante, allorché C è periodica con un periodo eguale all'ampiezza della traslazione.

Possiamo dunque concludere che, *in conseguenza del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria*, *la condizione del ciclo chiuso per qualsiasi periodo e la invariabilità dell'eredità sono condizioni equivalenti*.

A questo teorema fondamentale nello studio dei *fenomeni ereditarii di qualsiasi natura* daremo il nome di PRINCIPIO DEL CICLO CHIUSO.

Osserviamo che esso vale anche quando $f(t)$ o $F(x)$ sono discontinue, nel qual caso il ciclo è discontinuo.

6. Deduciamo alcune conseguenze da quanto è stato stabilito.

TEOREMA I. – *Se* $F\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}})\right]\right|$ *soddisfa alla condizione del ciclo chiuso ed è continua e derivabile rispetto a* f *si avrà*

$$F'\left|\left[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t}}-h),\,\xi+h\right]\right| = F'\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}),\,\xi\right]\right|$$

ove il parametro contenuto nella derivata denota il punto in cui si è eseguita la derivazione.

Prendiamo $\varphi(t)$ finita e continua a tale che

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } -\infty \text{ e } -k$$

$$m > \varphi(t) > 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } -k \text{ e } k$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } k \text{ e } \infty ,$$

ove k — o. Sia

$$\int_{-k}^{k} \varphi(t)\,dt = \sigma .$$

Poiché F soddisfa alla condizione del ciclo chiuso, avremo

$$F|[f(t-h)+\underset{-\infty}{\overset{x+h}{\varphi}}(t-\xi-h)]|=F|f(t)+\underset{-\infty}{\overset{x}{\varphi}}(t-\xi)]|$$

quindi

$$\frac{F|[f(t-h)+\underset{-\infty}{\overset{x+h}{\varphi}}(t-\xi-h)]|-F|[\underset{-\infty}{\overset{x+h}{f(t-h)}}]|}{\sigma}$$

$$=\frac{F|[f(t)+\underset{-\infty}{\overset{x}{\varphi}}(t-\xi)]|-F|[\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}}]|}{\sigma},$$

e passando al limite per h ed m tendenti a zero, risulterà

$$F'|[\underset{-\infty}{\overset{x+h}{f(t-h)}},\xi+h]|=F'|\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}},\xi]|.$$

In modo analogo passando alle derivate successive si trova la relazione

$$F^{(n)}|[\underset{-\infty}{\overset{x+h}{f(t-h)}},\xi_1+h,\xi_2+h,\cdots,\xi_n+h]|=F^{(n)}|[\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]|.$$

Si dirà che una funzione Φ dipendente da $f(t)$ e da n parametri $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso, quando

$$\Phi[|\underset{-\infty}{\overset{x+h}{(t-h)}},\xi_1+h,\xi_2+h,\cdots,\xi_n+h]|=\Phi|[\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]|$$

onde il

COROLLARIO I. – *Se una funzione soddisfa alla condizione del ciclo chiuso vi soddisfano anche tutte le sue derivate.*

Abbiasi

(I) $$F|[\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}}]|=\int_{-\infty}^{x}F_1(x|\xi_1)f(\xi_1)\,d\xi_1$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}F_2(x|\xi_1,\xi_2)f(\xi_1)f(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}F_n(x|\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)f(\xi_1)\cdots f(\xi_n)\,d\xi_1\cdots d\xi_n+\cdots$$

in cui $F_n(x|\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ è simmetrica rispetto a $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ e in valore assoluto inferiore a

$$\frac{n!\cdot M\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{R^n\cdot(1+x-\xi_1)^{1+\varepsilon_1}(1+x-\xi_2)^{1+\varepsilon_2}\cdots(1+x-\xi_n)^{1+\varepsilon_n}},$$

$M,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, R, essendo numeri positivi. F sarà determinata e finita allorché $|f(t)|<R$ è continua, e avremo

$$F^{(n)}|[\underset{-\infty}{\overset{x}{f(t)}},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]|_{f(t)=0}=F_n(x|\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),$$

dunque, in virtù del corollario precedente, se F soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso sarà

$$F_n(x+h\,|\,\xi_1+h\,,\xi_2+h\,,\cdots,\xi_n+h)=F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)$$

e quindi

$$F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)=F_n(x-\xi_1\,,x-\xi_2\,,\cdots,x-\xi_n)\,.$$

La proposizione reciproca è evidente onde il

COROLLARIO II. - *È necessario e sufficiente affinché la funzione* (I) *soddisfi alle condizioni del ciclo chiuso che*

$$F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)=F_n(x-\xi_1\,,x-\xi_2\,,\cdots,x-\xi_n)\,,\qquad (n=1\,,2\,,\cdots)\ \text{[5]}.$$

7. Supponiamo ora che

$$\left|F'\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\,,\xi]|\right|<\frac{M}{1+(x-\xi)^{1+\varepsilon}}$$

M ed ε essendo quantità positive e che siano soddisfatte le condizioni affinché

$$\text{(II)}\qquad \delta F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|=\int_{-\infty}^{x}F'\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\,,\xi]|\,\delta f(\xi)\,d\xi$$

allora potremo dimostrare il

TEOREMA II. - *Se la derivata prima di* $F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|$ *soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso e* $F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|_{f(t)=0}$ *è costante rispetto ad* x, *allora* $F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|$ *soddisfa essa pure alle condizioni del ciclo chiuso.*

Infatti, posto

$$F\,|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t}}-h)]|-F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|=\Phi\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|$$

sarà

$$\Phi'\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\,,\xi]|=F'\,|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t}}-h)\,,\xi+h]|-F'\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\,,\xi]|=0\,,$$

quindi $\Phi\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|$ è indipendente da $f(t)$. Ma preso $f(t)=0$, $\Phi\,[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|_{f(t)=0}$ risulta nullo, qualunque sia x, per conseguenza Φ è sempre nulla, d'onde

$$F\,|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t}}-h)]|=F\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)]|$$

come si doveva dimostrare.

(5) Il principio del ciclo chiuso quale è enunciato nelle Memorie precedentemente citate è un caso particolare di questo corollario.

TEOREMA III. - Se $F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$ *soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso e alle* (6) e (II) e $f(t)$ *e le sue derivate prime sono finite e continue, avremo*

$$\frac{dF}{dx}=\int_{-\infty}^{x} F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}},\ \xi]|\, f'(\xi)\, d\xi .$$

Infatti

$$0=F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]|=F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$
$$+F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]|,$$

quindi

$$\frac{F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h}=\frac{F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h}$$

e passando al limite per $h=0$

$$\frac{dF}{dx}=\int_{-\infty}^{x} F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}},\xi]|\, f'(\xi)\, d\xi .$$

8. Abbiansi le funzioni

$$(7)\qquad F_1|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_1(x)\,,\ F_2|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_2(x)\,,\cdots,\ F_n|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_n(x).$$

Noi possiamo da esse formarne infinite altre

$$(8)\qquad F_{i,s}|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=F_i|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f_s(t)}}]|$$

e così di seguito. È facile dimostrare il seguente:

TEOREMA IV. - *Se*

$$F_i|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t-h)}}]|=F_i|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|\quad ,\quad F_s|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t-h)}}]|=F_s|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$

avremo anche

$$F_{i,s}|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t-h)}}]|=F_{i,s}|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|.$$

Infatti sarà

$$F_s|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_s(x)$$

$$F_s|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t-h)}}]|=f_s(x-h).$$

Ma

$$F_i\,|[f_s(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-h}})]| = F_i\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f_s(t)}}]|$$

quindi

$$F_{i,s}\,|[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t-h}})]| = F_{i,s}\,|[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}})]|$$

come si doveva dimostrare.

È facile riconoscere che questa proposizione vale anche senza che sia soddisfatto il postulato della dissipazione dell'azione ereditaria. D'altra parte si riconosce che se $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono continue rispetto a $f(t)$ ed esse soddisfano al postulato dalla dissipazione dell'azione ereditaria vi soddisferanno anche le $F_{i,s}$. Potremo quindi enunciare il

COROLLARIO. – *Il sistema delle funzioni* (7) *continue e che verificano alle condizioni del ciclo chiuso e di tutte quelle che possono ottenersene colle operazioni* (8) *formano un gruppo.*