XXXV.

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES ET LEURS APPLICATIONS

« Acta Mathematica » t. 35, 1912; pp. 295-356.

INTRODUCTION.

Dans beaucoup de questions de Physique mathématique, de Mécanique et d'Analyse il est nécessaire de considérer des relations analytiques qui ont en même temps le caractère des équations intégrales et celui des équations différentielles. Je les ai appelées *équations intégro-différentielles*. Leur résolution constitue en général un problème nouveau de l'analyse, car on ne peut l'aborder qu'en employant des méthodes nouvelles. Nous montrerons en effet qu'il faut appliquer une analyse qui n'est pas celle des équations différentielles ni celle des équations intégrales, mais qui ressort de l'union des conceptions fondamentales qui dominent ces classes de questions. C'est ainsi que dans ce mémoire nous ferons usage en même temps de l'idée de GREEN des *solutions fondamentales* et de celle que j'ai introduite depuis mon premier travail sur l'*inversion des intégrales définies*, c'est à dire de regarder les équations intégrales comme un ensemble infini d'équations algébriques.

Dans ce mémoire j'envisagerai quelques classes d'équations intégro-différentielles en les mettant en rapport avec des problèmes de physique mathématique d'où elles ressortent. Ces questions physiques se rapportent aux problèmes de l'hérédité qui avaient été abordés depuis longtemps sous plusieurs dénominations, mais qui, faute de méthodes analytiques générales, n'avaient pas pu amener à une étude systématique au point de vue mathématique.

Comme M. PICARD a montré dans son intéressant article sur la Mécanique classique et ses approximations successives [1], il faut distinguer la mécanique en deux branches, celle de l'hérédité et celle de la non hérédité. Celle-ci se rapporte aux cas où l'avenir d'un système ne dépend à un instant donné que de son état actuel, ou, d'une manière plus générale (si l'on regarde les forces comme pouvant dépendre aussi des vitesses) de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui précède. La mécanique de l'hérédité correspond au cas où chaque action laisse un héritage dans le système, et l'état actuel

(1) « Rivista di Scienza », vol. 1°. Bologna 1907.

dépend de toute l'histoire précédente. C'est ainsi que le problème fondamental de l'astronomie appartient à la mécanique de la non-hérédité, tandis que les questions d'*hystéresis*, de l'*elastische Nachwirkung*, du *traînage* rentrent dans la mécanique de l'hérédité, ou, plus général, dans la physique d'hérédité.

M. PAINLEVÉ dans le chapitre de l'ouvrage *de la méthode dans les sciences* (2) consacré à la mécanique affirme qu'il n'y a pas de vrais problèmes de nature héréditaire. Ceux qui se présentent sous cet aspect ne seraient, à son avis, que des problèmes destinés à disparaître dès que nos connaisances sur la constitution des corps deviendront plus complètes. Je ne discute pas cette opinion, mais je me limite à remarquer qu'à l'état actuel de nos connaissances scientifiques ces problèmes se présentent effectivement et il est nécessaire de les résoudre.

Dans quelques cas, comme ceux de l'élasticité, les équations dont ils dépendent avaient été posées depuis longtemps, mais comme je viens de dire, l'analyse n'était pas assez avancée pour permettre de les traiter d'une manière générale. On peut se rendre compte facilement de cela. Remarquons en effet que, par leur nature, les problèmes de la physique mathématique et de la mécanique non héréditaire dépendent des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Les données initiales constituent les constantes arbitraires ou les fonctions arbitraires qui paraissent dans l'intégration. Pour les problèmes de la physique mathématique de l'hérédité, au contraire, l'analyse des équations différentielles n'est plus suffisante. En effet l'état actuel du système dépend de son histoire, et celle-ci est individualisée par toutes les valeurs prises par des paramètres pendant une certaine période de temps, c'est pourquoi il est nécessaire d'envisager des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de ces paramètres regardés comme des fonctions du temps. On est amené ainsi aux éléments de l'analyse que j'ai étudiés dans plusieurs travaux et que j'ai appelés des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions (fonctions des lignes et des hyperespaces). Les méthodes qu'il faudra suivre seront par suite celles qu'on applique à ces éléments.

Toutes ces méthodes ont pour point de départ une conception analogue à la conception fondamentale du calcul intégral c'est à dire au passage à la limite qui amène d'une somme à une intégrale. C'est ainsi que dans mon travail de 1887 (3) j'ai obtenu un développement en série analogue à celui de TAYLOR pour une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction donnée. En effet si l'on part de la série des puissances relative à une fonction de plusieurs variables et l'on fait croître indéfiniment leur nombre, on trouve, sous certaines conditions, que les termes de premier degré amènent à une intégrale simple, ceux de second degré à une intégrale double

(2) Paris, Alcan, 1909.

(3) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314]. Voir aussi « Acta Mathematica », vol. XII, 1889 [in queste « Opere »: ibidem, XXII, pp. 363-402].

ceux de troisième degré à une intégrale triple, et ainsi de suite. On arrive par là au développement que j'ai rappelé tout-à-l'heure (4).

Ce développement conduit à une classification analogue à celle des fonctions des différents degrés et à beaucoup de questions dont la résolution des équations intégrales linéaires est en première ligne. Cette question se présente de cette manière comme une extension tout-à-fait naturelle de la résolution des systèmes des équations algébriques de premier degré lorsque le nombre des équations et des inconnues croît indéfiniment. C'est pourquoi je me suis servi de cette idée dès le premier abord pour la résolution des équations intégrales que j'ai envisagées. Les auteurs qui ont approfondi après des équations intégrales de plus en plus compliquées l'ont aussi appliquée (5). Je l'emploierai aussi pour étudier les problèmes de physique mathématique héréditaire où les équations intégrales ne suffisent plus et il faut passer aux équations intégro-différentielles dont j'ai parlé ci-dessus.

Le présent Mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre j'envisage l'équation intégro-differentielle

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0$$

qu'on peut écrire pour simplifier

$$\text{(A)} \qquad \Delta^2 u(t) + \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0 .$$

Je la regarde comme l'équation typique du genre elliptique de la même manière que l'équation de LAPLACE est le type des équations différentielles elliptiques aux dérivées partielles.

Dans le second chapitre j'étudie les problèmes de l'élasticité au point de vue héréditaire et je montre qu'on peut en donner une théorie analytique générale. Le troisième chapitre est consacré à donner un premier aperçu de l'hérédité dans l'électromagnétisme.

Je n'ai abordé dans ce mémoire que l'étude analytique des équations intégro-différentielles de type elliptique. Je consacrerai d'autres travaux à l'étude des équations des autres types. Je me suis limité aussi dans ce premier travail à considérer des cas généraux en laissant de côté toutes les questions de détail et les applications particulières. J'ajouterai enfin que je n'ai envisagé que les équations qui ont des rapports avec l'hérédité et par suite des équations intégro-différentielles ayant les deux limites variables ou une limite variable. Cependant on peut étendre les résultats à des équations ayant les limites constantes.

(4) Voir Chap. II, Art. 1er.

(5) «Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sciences.», vol. 142, page 691. 1er Sémestre 1906. [In questo vol.: IX, pp. 56–62].

Je crois que le caractère essentiel et l'utilité des méthodes qui se rattachent à la conception des fonctions qui dépendent d'autres fonctions résultent d'une manière claire et frappante des développements que je vais donner. Ils prouvent en effet que, par la théorie des équations intégro-différentielles qui découle de cette conception, on peut faire l'étude analytique des phénomènes d'hérédité sans particulariser les fonctions qui la caractérisent, c'est à dire les coefficients d'hérédité.

Comme dans les questions ordinaires de physique mathématique il est utile de laisser indéterminées les constantes, autant qu'il est possible, et de ne les fixer numériquement que lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes, de même il est utile de laisser indéterminées les susdites fonctions (coefficients d'hérédité) lorsqu'on traite des questions d'hérédité en général et de résoudre les problèmes qui se présentent avec la plus grande généralité possible. On pourra aussi déterminer ces fonctions, lorsqu'elles sont inconnues, en comparant les solutions générales qu'on obtient avec les résultats de l'observation directe.

L'algèbre et l'analyse ordinaire se sont montrées de jour en jour plus utiles dans les applications aux phénomènes naturels où il n'y a que des paramètres variables. L'analyse, où les éléments qui jouent le rôle de variables indépendentes sont des fonctions, va montrer une de ses applications dans les phénomènes de la physique héréditaire.

CHAPITRE Ier.

L'équation intégro-différentielle.

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0.$$

Art. Ier. – ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES.

1. Si la fonction $u(x, y, z, t)$ est finie et continue à l'intérieur d'un domaine S pour les valeurs de t comprises entre 0 et T, et les premières et les secondes dérivées de u par rapport à x, y, z sont aussi finies et continues, nous disons que u est *régulière*.

u étant une solution régulière de l'équation (A), multiplions les deux membres de cette équation par $u(t)$ et intégrons au domaine S. On aura facilement la formule suivante

$$(1) \quad \int_\sigma u(t) \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right\} d\tau \right\} d\sigma = \int_S \Delta u(t)\, dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS$$

n étant la normale externe au coutour σ et

$$\Delta u(t) = \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z}\right)^2.$$

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Toute solution régulière u de l'équation (A) *sera déterminée à l'intérieur de* S *pour les valeurs de t comprises entre les limites* o *et* T, *si l'on connaît au contour σ les valeurs de u pour t compris entre* o *et* T.

Supposons que u soit nulle sur σ pour les valeurs de t comprises entre o et T, à cause de l'équation (1) on aura

$$(2) \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS = 0.$$

Soit M une quantité plus grande que la limite supérieure de

$$\int_S \Delta u(t)\, dS$$

pour toutes les valeurs de t comprises entre o et T. De la relation

$$\int_S \left(\left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

on tirera

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < M$$

et d'une manière analogue

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M \quad , \quad \int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M.$$

C'est pourquoi, si

$$|f(t, \tau)| < \frac{N}{3} \quad , \quad |\varphi(t, \tau)| < \frac{N}{3} \quad , \quad |\psi(t, \tau)| < \frac{N}{3},$$

en vertu de l'équation (2), on aura

$$(3) \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS < MNt,$$

et par suite

$$(3') \qquad \int_S \Delta u(\tau)\, dS < MN\tau.$$

Mais

$$\int_S \left(\sqrt{\tau} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$

où ξ désigne l'une des variables x, y, z. Donc des équations (3) et (3') l'on tirera

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < MN t^{1/2} \tau^{1/2}.$$

En employant l'équation (2) on déduit

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{2}{3} MN^2 t^2. \tag{4}$$

Démontrons maintenant que si l'on a

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{M(2Nt)^{m-1}}{m!},$$

on doit aussi avoir

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{M(2Nt)^m}{(m+1)!}. \tag{5}$$

En effet

$$\int_S \left(\tau^{\frac{m-1}{2}} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - t^{\frac{m-1}{2}} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

et par suite

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < \frac{M(2N)^{m-1}}{m!} t^{\frac{m-1}{2}} \tau^{\frac{m-1}{2}},$$

d'où l'on tire, à cause de l'équation (2), la relation (5).

On peut donc conclure, en ayant égard aux relations (3) et (4), que l'inégalité (5) est verifiée quel que soit le nombre entier m. Par conséquent u doit être nulle. Puisque l'équation (A) est linéaire le théorème énoncé est démontré.

3. Envisageons l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right\} d\tau. \tag{6}$$

Si elle est nulle on a l'égalité (2) et par suite l'inégalité (5) quel que soit m, d'où l'on déduit que u doit être constante dans le domaine S et pour les valeurs de t comprises entre o et T.

On pourra donc énoncer le théorème:

Si l'expression (6) *est connue au contour* σ, *pour les valeur de t comprises entre* o *et* T, *la fonction u sera déterminée, à l'intérieur du domaine* S, *à une constante près.*

Art. 2ème. – L'ÉQUATION ADJOINTE ET LE THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ.

1. L'équation

$$(\mathrm{A}') \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau = 0$$

sera désignée par la dénomination *d'équation adjointe* à l'équation (A). Nous supposerons Θ comprise entre t et T.

Posons

$$\mathrm{H}_\sigma = \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$+ \int_t^\Theta dt \int_0^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx \right.$$

$$+ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny$$

$$\left. + \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} \right) - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma.$$

Il est évident que H_σ *dépendra des fonctions* u et v et en même temps sera une fonction, dans la signification ordinarie, de la variable Θ. C'est pourquoi nous désignerons cette quantité par

$$\mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta).$$

2. En supposant que u, v soient des fonctions régulières on a facilement

$$\int_\mathrm{S} d\mathrm{S} \int_0^\Theta \left(v(t) \left[\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau \right] \right.$$

$$\left. - u(t) \left[\Delta^2 v(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau \right] \right) dt$$

$$= \mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta);$$

u et v étant respectivement des solutions régulières des équations (A) et (A′), on aura donc

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Cette équation exprime le *théorème de réciprocité*.

3. Soit $\mathrm{H}'_\sigma([u, v], \Theta)$ le premier terme de H_σ, c'est à dire posons

$$\mathrm{H}'_\sigma([u, v], \Theta) = \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma,$$

et soit $H'_\sigma([u, v], \Theta)$ la partie résiduelle de H'_σ; on aura évidemment

$$H_\sigma([u, v], \Theta) = H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta)$$

et si u et v sont des solutions régulières des équations (A) et (A'), il sera

$$H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Art. 3ème. – LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES CONSIDÉRÉES COMME UN ENSEMBLE INFINI ET CONTINU D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. Envisageons le système suivant de m équations différentielles aux dérivées partielles

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 = 0 \\ a_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0 \\ a_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0 \\ \dotfill \end{array}\right.$$

L'équation (A) n'est que le cas limite du système précédent, lorsque le nombre des inconnues et des équations croît indéfiniment.

De cette manière pour les équations intégro-différentielles nous posons le même principe que nous avons établi pour les équations intégrales (6).

Le système adjoint du système (B) sera

$$(B')\quad \left\{\begin{array}{r} \Delta^2 v_1 + a_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + a_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0 \\ \Delta^2 v_2 + a_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0 \\ \Delta^2 v_3 + \cdots = 0 \\ \dotfill \end{array}\right.$$

2. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_m$ des intégrales régulières du système (B) et $v_1, v_2, \cdots, v_m$ des intégrales régulières du système (B'). On a évidemment

$$(7)\quad \int_S \sum_1^m{}_i \left\{ v_i \left[\sum_1^{i-1}{}_h \left(a_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2}\right) + \Delta^2 u_i \right]\right.$$

$$\left. - u_i\left[\sum_{i+1}^m{}_h \left(a_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2}\right) + \Delta^2 v_i\right]\right\} dS = \int_S \sum_1^m{}_i (v_i\Delta^2 u_i - u_i\Delta^2 v_i)\, dS +$$

(6) « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1896. *Sulla inversione degli integrali definiti*. Nota I, § 3. [In queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 219-220].

$$+\int_S \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \Big\{ a_{hi}\Big(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}\Big) + b_{hi}\Big(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}\Big) + c_{hi}\Big(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2}\Big)\Big\} dS$$

$$= \int_\sigma \sum_1^m{}_i \Big(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n}\Big) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \Big\{ a_{ih}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial x}\Big) \cos nx$$

$$+ b_{hi}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y}\Big) \cos ny + c_{hi}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\Big) \cos nz \Big\} d\sigma.$$

Or, toute équation du système (B) est de la forme

$$\sum_1^{i-1}{}_h \Big(a_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2}\Big) + \Delta^2 u_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

et toute équation du système (B′) est de la forme

$$\sum_{i+1}^{m}{}_h \Big(a_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2}\Big) + \Delta^2 v_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m);$$

c'est pourquoi, en vertu de la relation (7), nous aurons

$$0 = \int_\sigma \sum_1^m{}_i \Big(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n}\Big) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \Big\{ a_{hi}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\Big) \cos nx$$

$$+ b_{hi}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y}\Big) \cos ny + c_{hi}\Big(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\Big) \cos nz \Big\} d\sigma.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre des quantités $u_1, u_2, \cdots, u_m;\ v_1, v_2, \cdots, v_m$, cette relation amène à la limite, par le procédé fondamental du calcul intégral, à l'équation (I) c'est à dire au théorème de réciprocité.

3. Posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

c'est à dire représentons par r la distance entre le *pôle* a, b, c fixe et le point variable x, y, z. Une solution du système (B) sera donnée par

$$u_1 = \frac{1}{r},$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\Big(a_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\Big),$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}\Big(a_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\Big) + \frac{1}{24}\Big(a_{32} a_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{32} b_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{32} c_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4}$$

$$+ (a_{22} b_{21} + b_{32} a_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial y^2} + (a_{32} c_{21} + c_{32} a_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial z^2} + (b_{32} c_{21} + c_{32} b_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2 \partial z^2}\Big),$$

. . . .

De même une solution du système (B′) sera

$$v_m = \frac{1}{r},$$

$$v_{m-1} = -\frac{1}{2}\left(a_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

$$\begin{aligned} v_{m-2} = &-\frac{1}{2}\left(a_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\ &+ \frac{1}{24}\left(a_{m,m-1}\,a_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{m,m-1}\,b_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{m,m-1}\,c_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4}\right. \\ &\qquad + (a_{m,m-1}\,b_{m-1,m-2} + b_{m,m-1}\,a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2\,\partial y^2} \\ &\qquad + (a_{m,m-1}\,c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}\,a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2\,\partial z^2} \\ &\qquad \left. + (b_{m,m-1}\,c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}\,b_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2\,\partial z^2}\right), \end{aligned}$$

. . . .

Les solutions que nous venons de trouver sont partout régulières excepté dans le pôle, où toutes les intégrales deviennent infinies de premier ordre, en prenant r comme infiniment petit fondamental. C'est pourquoi ces solutions constituent les *intégrales fondamentales* des systèmes (B) et (B′).

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des équations différentielles qui constituent ces systèmes, en passant à la limite par les procédés du calcul intégral que nous venons de rappeller, on peut obtenir les solutions fondamentales de l'équation intégro-différentielle (A) et de son adjointe, c'est à dire des solutions régulières partout, excepté dans le pôle, où elles deviennent infinies de premier ordre.

Dans l'Art. suivant nous étudiérons la solution fondamentale de l'équation adjointe (A′).

Art. 4ème. – La solution fondamentale de l'équation adjointe.

1. Posons

$$f(t,\tau) = F_{1,0,0}(t,\tau)\ ,\ \varphi(t,\tau) = F_{0,1,0}(t,\tau)\ ,\ \psi(t,\tau) = F_{0,0,1}(t,\tau), \tag{8}$$

$$F_{h,k,l}(t,\tau) = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=\rho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\,F_{i,j,g}(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{9}$$

où $\sum_{i+j+g=\rho}$ est une somme étendue à toutes les valeurs entières de i, j, g dont la somme est égale à ρ. On suppose que toute expression F avec des suffixes négatifs soit nulle et qu'il soit

$$1 \leq \rho < h + k + l.$$

Commençons par démontrer que *la fonction* $F_{h,k,l}$ *est indépendante de* ρ. En effet supposons d'avoir démontré que

$$\int_\tau^t \sum_{i'+j'+g'=\varrho'} F_{h'-i',k'-j',l'-g'}(t,\xi)\, F_{i',j',g'}(\xi,\tau)\, d\xi = F_{h',k',l'}(t,\tau)$$

soit indépendante de ρ' étant

$$1 \leq \rho' < h' + k' + l'$$

et

$$h' + k' + l' < h + k + l.$$

Nous prouverons que l'expression (9) est indépendante de ρ.

Puisque $\rho = i + j + g < h + k + l$, il sera

$$F_{i,j,g}(\xi,\tau) = \int_\tau^\xi \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta,$$

où

$$1 \leq \rho'' < \rho,$$

et par suite

$$F_{h,k,l}(t,\tau)$$

$$= \int_\tau^t \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\, d\xi \int_\eta \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta$$

$$= \int_\tau^t \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta \int_\eta^t \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\, F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, d\xi$$

$$= \int_\tau^t \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{h-i'',k-j'',l-g''}(t,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta.$$

Or on peut vérifier facilement que pour $h + k + l = 2$, $h + k + l = 3$, la propriété que nous avons énoncée est vérifiée; elle sera donc démontrée pour toutes les valeurs entières de h, k, l.

2. Cela posé écrivons

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) \tag{10}$$

$$= \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} F_{h,k,l}(\tau,t) \sum_0^h{}_\alpha \sum_0^k{}_\beta \sum_0^l{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!}\cdot$$

$$\cdot \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!},$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La série précédente est uniformément convergente. En effet on voit aisément que

$$\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma)!\,(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!} \leq \frac{(2(h+k+l))!\,h!\,k!\,l!}{(h+k+l)!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}$$

parce-que le premier membre de l'inégalité précédente augmente si l'on ajoute une unité à α ou à β, ou à γ.

En outre

$$\left|\frac{x}{r}\right| \leq 1 \quad , \quad \left|\frac{y}{r}\right| \leq 1 \quad , \quad \left|\frac{z}{r}\right| \leq 1 ,$$

c'est pourquoi il suffira de démontrer la convergence de la série

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} |F_{h,k,l}(\tau, t)| \sum_0^h {}_\alpha \sum_0^k {}_\beta \sum_0^l {}_\gamma \frac{h!\,k!\,l!}{\alpha!\,(h-\alpha)!\,\beta!\,(k-\beta)!\,\gamma!\,(l-\gamma)!} .$$

Mais

$$\sum_0^h \frac{h!}{\alpha!\,(h-\alpha)!} \sum_0^k \frac{k!}{\beta!\,(k-\beta)!} \sum_0^l \frac{l!}{\gamma!\,(l-\gamma)!} = 2^h\, 2^k\, 2^l = 2^m ,$$

donc la série précédente se réduit à

$$\text{(11)} \qquad \sum_0^\infty {}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^m} \sum_{h+k+l=m} |F_{h,k,l}(\tau, t)| .$$

Or si

$$|F_{1,0,0}| < M \quad , \quad |F_{0,1,0}| < M \quad , \quad |F_{0,0,1}| < M ,$$

on a

$$|F_{h,k,l}(t, \tau)| < \frac{3^{h+k+l-1}\, M^{h+k+l}\, (t-\tau)^{h+k+l-1}}{(h+k+l-1)!} .$$

En remplaçant $|F_{h,k,l}|$ par le second membre de l'inégalité précédente dans la série (11) on trouve

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{(2m)!\, m^3\, 3^{m-1} M^m (t-\tau)^{m-1}}{2^m\, m!\, m!\, (m-1)!} .$$

Cette série est convergente et par suite la série (10) est uniformément convergente. On démontre d'une manière tout-à-fait analogue que la série (10) est dérivable par rapport à x, y, z.

3. Soit

$$\text{(12)} \qquad V(x, y, z \,|\, t, \Theta) = \frac{1}{r}\left(1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) d\tau\right).$$

Nous démontrerons que $V(x, y, z \,|\, t, \Theta)$ est la solution fondamentale de l'équation adjointe, le pôle étant à l'origine.

Remarquons d'abord que

$$\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} = \frac{(2m-1)!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{(m-1)!\,2^{2m-1}\,r}\sum_{0}^{h}{}_{\alpha}\sum_{0}^{k}{}_{\beta}\sum_{0}^{l}{}_{\gamma}\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!}\,.$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!}\,.$$

Par suite nous pouvons écrire

$$(10') \qquad \Phi = r\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau, t).$$

Donc, si nous écrivons pour simplifier $\mathrm{V}(t)$ à la place de $\mathrm{V}(x, y, z \mid t, \Theta)$, on aura

$$(13) \qquad \Delta^2 \mathrm{V}(t) = \int_t^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m}\Delta^2 r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau, t)\,d\tau$$

$$= \int_t^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2(m-1))!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau, t)\,d\tau.$$

D'autre part

$$\int_t^{\Theta}\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2}\mathrm{F}_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2}\mathrm{F}_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2}\mathrm{F}_{0,0,1}(\tau, t)\right\}d\tau$$

$$= \int_t^{\Theta}\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\mathrm{F}_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\mathrm{F}_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\mathrm{F}_{0,0,1}(\tau, t)\right\}d\tau$$

$$+ \int_t^{\Theta}d\tau\int_{\tau}^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\left\{\frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h+2}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\mathrm{F}_{h,k,l}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{1,0,0}(\tau, t)\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+2}\,\partial z^{2l}}\mathrm{F}_{h,k,l}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l+2}}\mathrm{F}_{h,k,l}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{0,0,1}(\tau, t)\right\}d\xi.$$

Or la dernière intégrale double se transforme facilement en

$$\sum_{2}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!}\sum_{h'+k'+l'=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h'}\,\partial y^{2k'}\,\partial z^{2l'}}\int_t^{\Theta}d\tau\int_{\tau}^{\Theta}\{\mathrm{F}_{h'-1,k',l'}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{1,0,0}(\tau, t)$$

$$+ \mathrm{F}_{h',k'-1,l'}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{0,1,0}(\tau, t) + \mathrm{F}_{h',k',l'-1}(\xi, \tau)\,\mathrm{F}_{0,0,1}(\tau, t)\}\,d\xi.$$

Mais

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{ F_{h'-1,k',l'}(\xi,\tau) F_{1,0,0}(\tau,t) + F_{h',k'-1,l'}(\xi,\tau) F_{0,1,0}(\tau,t)$$

$$+ F_{h',k',l'-1}(\xi,\tau) F_{0,0,1}(\tau,t) \} d\xi = \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi F_{h'-1,k',l'}(\xi,\tau) F_{1,0,0}(\tau,t)$$

$$+ F_{h',k'-1,l'}(\xi,\tau) F_{0,1,0}(\tau,t) + F_{h',k',l'=1}(\xi,\tau) F_{0,0,1}(\tau,t) \} d\tau = \int_t^\Theta F_{h',k',l'}(\xi,t) d\xi.$$

Par suite

$$\int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} F_{1,0,0}(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} F_{0,1,0}(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} F_{0,0,1}(\tau,t) \right\} d\tau$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau.$$

En ajoutant l'équation que nous venons de trouver à l'équation (13) et en rappellant les égalités (8) nous aurons

$$\Delta^2 V(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau,t) \right\} d\tau = 0.$$

La fonction (12) satisfait ainsi à l'équation adjointe, en outre elle est partout régulière, excepté à l'origine, où elle devient infinie de premier ordre. Nous avons donc vérifié directement que *la fonction* $V(x,y,z,|t,\Theta)$ *est la solution fondamentale de l'équation adjointe.*

Art. 5ème. - Propriété de la solution fondamentale de l'équation adjointe.

1. En vertu des formules (12) et (10′) nous pouvons écrire

$$(12') \quad V(x,y,z|t,\Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{m-1}}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau$$

et si nous posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

nous porterons le pôle dans le point a, b, c.

La formule précédente est équivalente à l'autre

$$(14) \quad V(x,y,z|t,\Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau.$$

2. Désignons par σ une surface fermée ayant à l'intérieur le pôle a, b, c, et par n la normale externe à σ. Soit S l'espace renfermé par la surface σ. Nous aurons

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = -4\pi,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} d\sigma = \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S 2m(2m-1) r^{2m-3} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos nx \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos ny \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k+2} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos nz \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1} dS.$$

3. Cela posé on aura

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma = -4\pi \tag{15}$$

$$+ \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \cdot F_{h,k,l}(\tau, t) \, d\tau.$$

Calculons maintenant

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\sigma.$$

On trouvera

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,0,1}(\tau, t)$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \left\{ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) \, d\xi \right.$$

$$+ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k+2} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) \, d\xi$$

$$\left. + \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \, d\xi \right\}$$

et par suite

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

$$= \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,0,1}(\tau, t) \right\} d\tau$$

$$+ \int_t^\Theta d\tau \sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \left\{ \int_\tau^\Theta \{ F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) \right.$$

$$\left. + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\xi . \right.$$

Mais

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{ F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t)$$
$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\xi$$

$$= \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t)$$

$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\tau = \int_t^\Theta F_{h,k,l}(\xi, t) d\xi .$$

Donc

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \cdot F_{h,k,l}(\tau, t) d\tau ,$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (15),

$$\text{(II)} \qquad \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \varphi(\tau, t) \cos ny \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) \right\} d\sigma = -4\pi .$$

La propriété de $V(x, y, z \mid t, \Theta)$ renfermée dans cette formule est celle que nous voulions obtenir et dont nous ferons usage.

Art. 6ème. – L'ÉQUATION FONDAMENTALE.

1. Si le pôle est externe au domaine S on pourra, dans la formule (I), remplacer v par V car V est régulière dans S, mais, si le pôle est interne, pour appliquer la formule (I) il faudra retrancher du domaine S un domaine

environnant le pôle. Soit ω le contour de ce dernier domaine. L'équation de réciprocité (I) deviendra alors

$$(\mathrm{I}') \qquad H_\sigma([u, V], \Theta) + H_\omega([u, V], \Theta) = 0.$$

Prenons pour w une sphère ayant le centre dans le pôle, et tâchons de calculer (Voir § 3 Art. 2) $\lim H'_\omega([u, V], \Theta)$ et $\lim H''_\omega([u, V], \Theta)$ en supposant que le rayon de cette sphère devient infiniment petit.

2. Supposons, pour simplifier, que le pôle soit l'origine. On aura

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!\, 2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} F_{h,k,l}(\tau, t)\, g_{h,k,l}$$

où

$$g_{h,k,l} = (2h)!\,(2k)!\,(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!}.$$

Or, Ω étant la sphère de rayon 1 ayant le centre à l'origine, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{x}{r}\right)^{\alpha 2}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma} d\Omega = \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,(2(\alpha+\beta+\gamma)+1)!} 4\pi,$$

et par suite

$$\int_\Omega g_{h,k,l}\, d\Omega = 4\pi\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma \cdot$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{[2(\alpha+\beta+\gamma)+1]\,\alpha!\,(h-\alpha)!\,\beta!\,(k-\beta)!\,\gamma!\,(l-\gamma)!} = 4\pi \frac{2^m m!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}.$$

On déduit de là

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\Omega$$

$$= 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!} F_{h,k,l}(\tau, t) = 4\pi S(\tau, t).$$

En tenant compte de l'ordre de l'infini de V dans le pôle on a facilement

$$\lim H'_\omega([u, V], \Theta) = -\lim \int_0^\Theta dt \int u(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega = -\lim \int_0^\Theta u_0(t)\, dt \int_\omega \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega,$$

ayant posé pour simplifier

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Dans la formule précédente il faut remplacer $\partial V(t)/\partial n$ par

$$\frac{1}{r^2}\left(1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\tau\right)$$

et $d\omega$ par $r^2\,d\Omega$, donc

$$\lim H'_\omega([u\,,\,V]\,,\Theta) = -\int_0^\Theta u_0(t)\,dt \int_\Omega \left\{ 1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}\,,\frac{y}{r}\,,\frac{z}{r}\,\middle|\, t\,,\tau\right) d\tau \right\} d\Omega$$

$$= -4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\left[1 + \int_t^\Theta S(\tau\,,t)\,d\tau\right] dt.$$

De même on trouve

$$\lim H''_\omega([u\,,\,V]\,,\Theta = -4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\,dt \int_t^\Theta T(\tau\,,t)\,dt\,,$$

et par des procédés analogues à ceux que nous avons appliqués précédemment on peut calculer $T(\tau\,,t)$. On a ainsi

$$T(\tau\,,t) = -\sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m\,m\,!}{(2m)\,!} \sum_{h+k+l=m} \frac{(2h)\,!\,(2k)\,!\,(2l)\,!}{h\,!\,k\,!\,l\,!} F_{h,k,l}(\tau\,,t) = -S(\tau\,,t).$$

C'est pourquoi

$$\lim H_\omega([u\,,\,V]\,,\Theta)$$

$$= \lim H'_\omega([u\,,\,V]\,,\Theta) + \lim H''_\omega([u\,,\,V]\,,\Theta) = = -4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt.$$

En vertu de la formule (I') nous aurons donc

$$4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt = H_\sigma([u\,,\,V]\,,\Theta),$$

c'est à dire

(III) $$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u\,,\,V]\,,\Theta).$$

La formule que nous venons de trouver sera appelée la *formule fondamentale*. Nous avons supprimé les calculs pour déterminer directement $T(\tau\,,t)$ qui sont assez longs, parce-que dans l'article suivant nous donnerons une autre méthode pour trouver la formule fondamentale.

Art. 7ème. – Deuxième méthode pour obtenir la formule fondamentale.

1. En ayant égard à l'ordre d'infini de V dans le pôle on a évidemment, si le rayon de la sphère ω devient infiniment petit,

(16) $$\lim \left\{ \int_\omega V(t)\frac{\partial u(t)}{\partial n}\,d\omega + \int_t^\Theta d\tau \int_\omega V(\tau)\left[\frac{\partial u(t)}{\partial x} f(\tau\,,t)\cos nx \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny + \frac{\partial u(t)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right] d\omega \right\} = 0$$

$$
(17) \qquad \lim \left\{ \int_\omega u(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega + \int_t^\Theta dt \int_\omega u(t) \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right] d\omega \right\}
$$

$$
= u_\circ(t) \int_\omega \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right] \right\} d\omega = 4\pi u_\circ(t).
$$

En effet, à cause de la formule (II),

$$
\int_\omega \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right] \right\} d\omega
$$

est indépendent de la grandeur de la sphère ω et est égal à 4π parce-que la normale n est dirigée vers l'intérieur de la sphère.

2. Par l'application des formules (16) et (17) on trouve

$$
\lim H_\omega([u, V], \Theta) = -4\pi \int_0^\Theta u_\circ(t)\, dt
$$

et en vertu de la relation

$$
(\mathrm{I}') \qquad H_\sigma([u, V], \Theta) + H_\omega([u, V], \Theta) = 0
$$

on a

$$
4\pi \int_0^\Theta u_\circ(t)\, dt = H_\sigma([u, V], \Theta),
$$

d'où découle la *formule fondamentale*

$$
(\mathrm{III}) \qquad u_\circ(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} H_\sigma([u, V], \Theta).
$$

Art. 8ème. - Remarques sur la formule fondamentale.

1. La formule (III) exprime la valeur de la solution u régulière de l'équation (A) dans un point interne au domaine S par les valeurs de u et de ses dérivées du premier ordre au contour σ de S.

Elle correspond au théorème de Green car elle joue par rapport à l'équation (A) le même rôle joué par la formule de Green par rapport à l'équation de Laplace.

2. Si l'on veut éliminer les dérivées de u au contour σ, remarquons que, w étant une solution régulière de l'équation (A), on aura, en appliquant le théorème de réciprocité,

$$H_\sigma([u, w], \Theta) = 0.$$

C'est pourquoi à cause de la formule fondamentale

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} H_\sigma([u, V + w], \Theta). \tag{IV}$$

Si $V + w$ sera nulle sur σ, dans le second membre de l'équation précédente ne paraîtront que les valeurs de u sur σ. Par conséquent l'équation (IV) résoudra le problème de *déterminer la solution regulière u à l'intérieur de* S *pour $t = \Theta$ les valeurs de u étant connues au contour σ pour t comprise entre* 0 *et* Θ. Par exemple si σ est un plan on peut calculer w par la méthode des images.

3. En multipliant par dS et intégrant, l'équation (A') amène à l'égalité

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial v(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left(\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\tau \right\} d\sigma = 0,$$

v étant une solution régulière de l'équation adjointe. À cause de l'équation (II) il n'est donc pas possible de trouver une solution v régulière de l'équation adjointe telle que

$$\frac{\partial v(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau$$

$$= \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau.$$

Mais si V_A et V_B sont deux solutions fondamentales de l'équation adjointe correspondantes aux pôles A et B internes au domaine S et

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

l'équation

$$\frac{\partial v(t)}{\partial u} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau$$

$$= \frac{\partial V_{AB}(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau$$

n'est pas impossibile, v étant une solution régulière de l'équation adjointe.

Or

$$H_\sigma([u, v], \Theta) = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u, V_A], \Theta) = u_A(\Theta)$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u, V_B], \Theta) = u_B(\Theta)$$

$u_A(\Theta)$ et $u_B(\Theta)$ étant les valeurs de $u(x, y, z, t)$ dans les points A et B pour $t = \Theta$). C'est pourquoi

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u, V_{AB} - v], \Theta) = u_A(\Theta) - u_B(\Theta).$$

Mais

$$H_\sigma([u, V_{AB} - v], \Theta)$$

$$= \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right) d\tau \right\} (V_{AB} - v)\, d\sigma;$$

il suffira donc de connaître au contour l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right) d\tau,$$

pour les valeurs de t comprises entre 0 et Θ, pour obtenir, par la formule (V), les différences des valeurs de u dans les différents points de S pour $t = \Theta$. (Voir Art. 1er. § 3).

Art. 9ème. – Remarques générales.

1. Si au lieu de l'équation (A) on avait l'équation intégro-différentielle

$$\text{(A'')} \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = X(x, y, z, t)$$

posons

$$\int_0^\Theta dt \int_S v(t)\, X(x, y, z, t)\, dS = K([X, v], \Theta),$$

alors l'équation (III) devrait être remplacée par l'autre

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}\{ H_\sigma([u, V], \Theta) - K([X, V], \Theta)\}.$$

On en tire que la fonction

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} K([X, V], \Theta)$$

vérifie l'équation (A'') dans le domaine S. On pourrait déduire de là un théorème analogue à celui de POISSON.

2. Soit

$$(18)\quad \begin{cases} u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau) f(t,\tau)\,d\tau = U(x,y,z,t), \\ u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau) \varphi(t,\tau)\,d\tau = V(x,y,z,t), \\ u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau) \psi(t,\tau)\,d\tau = W(x,y,z,t). \end{cases}$$

En résolvant ces équations intégrales on aura

$$(19)\quad \begin{aligned} u(x,y,z,t) &= U(x,y,z,t)+\int_0^t U(x,y,z,\tau) f'(t,\tau)\,d\tau \\ &= V(x,y,z,t)+\int_0^t V(x,y,z,\tau) \varphi'(t,\tau)\,d\tau \\ &= W(x,y,z,t)+\int_0^t W(x,y,z,\tau) \psi'(t,\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

et l'équation (A) pourra s'écrire

$$(20)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0.$$

Donc l'équation (A) peut être ramenée à *un système constitué de deux équations intégrales simultanées* (19) *et de l'équation différentielle* (20) *avec les trois fonctions inconnues* U, V, W.

On peut remarquer qu'en général ces équations ne peuvent pas se séparer et par suite *le problème de la résolution des équations intégro-différentielles est en général un problème essentiellement distinct des problèmes des équations différentielles et des problèmes des équations intégrales.*

Mais dans quelques cas particuliers la séparation est possible. C'est ainsi que si $f=\varphi=\psi$, on aura

$$U = V = W$$

et l'équation (20) deviendra

$$(20')\quad \Delta^2 U = 0.$$

La question sera donc ramenée à l'équation différentielle (20') et à la première des équations intégrales (19) ou des équations intégrales (18).

CHAPITRE 2ème.

Théorie mathématique de l'élasticité en ayant égard à l'hérédité.

Art. 1er. – CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Envisageons le cas élémentaire de la torsion d'un fil. Soit ω l'angle de torsion et M le moment de torsion. Dans la théorie ordinaire de l'élasticité on regarde, dans l'équilibre, ω proportionnel à M et l'on écrit

$$\omega = K M, \tag{1}$$

K étant un coefficient constant.

Cette équation n'est qu'une équation approximative, car on néglige toute action héréditaire. Si l'on veut tenir compte de l'hérédité, c'est à dire si l'on veut tenir compte que ω dépend de toute l'histoire du moment de torsion, il faudra corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = K M + \Phi,$$

où Φ est une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par M depuis le temps $-\infty$ jusqu'à l'instant actuel.

Soit t l'instant actuel, en faisant usage d'une notation que nous avons adoptée en plusieurs occasions, nous écrirons

$$\omega(t) = K M(t) + \Phi \left| \left[M(\tau) \right]_{-\infty}^{t} \right|.$$

Le symbole

$$\Phi \left| \left[M(\tau) \right]_{-\infty}^{t} \right|$$

désigne une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par la fonction $M(\tau)$, τ variant depuis $-\infty$ jusqu'à t.

2. En supposant vérifiées certaines conditions, Φ sera développable dans une série analogue à celle de TAYLOR (7) et l'on aura

$$\omega(t) = K M(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau) F(t, \tau) d\tau + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{-\infty}^{t} M(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_2) F(t, \tau_1, \tau_2) d\tau_2$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_{-\infty}^{t} M(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_3) F(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 + \cdots$$

(7) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nota I, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 4ª, vol. III₂, 1887₂, § 3. [In queste « Opere », vol. primo, XVII, p. 294-302].

Supposons maintenant que tous les termes de la série d'ordre supérieur au premier soient négligeables. On aura alors

$$(2) \qquad \omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\mathrm{F}(t,\tau)\,d\tau\,.$$

Nous dirons dans ce cas que *l'hérédité est linéaire*.

Si l'histoire du fil antérieure à un instant t_0 est négligeable, l'équation précédente pourra s'écrire

$$(2') \qquad \omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\mathrm{F}(t,\tau)\,d\tau\,.$$

En résolvant cette équation intégrale par rapport à $\mathrm{M}(\tau)$ on trouvera

$$(3) \qquad \mathrm{M}(t) = \frac{1}{\mathrm{K}}\,\omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,f(t,\tau)\,d\tau\,.$$

3. Les équations (2), (2'), (3) seront les équations fondamentales de l'équilibre élastique de torsion dans le cas de l'hérédité linéaire. Il faut ajouter qu'elles seront valables lorsque l'accélération angulaire de la torsion sera négligeable.

$\mathrm{F}(t,\tau)$ sera le *coefficient d'hérédité*. Voici son interprétation physique: $\mathrm{F}(t,\tau)\,d\tau$ *mesure la torsion induite à l'instant t par un moment de torsion unitaire agissant dans l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$. Réciproquement: $f(t,\tau)\,d\tau$ *mesure le moment de torsion à l'instant t qui fait équilibre à une torsion unitaire à laquelle le fil a été assujetti pendant l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$.

4. Dans l'hypothèse que la valeur absolue du moment de torsion soit toujours inférieure à une limite finie il faudra admettre que le coefficient d'hérédité soit infiniment petit pour $\tau = -\infty$. Nous supposerons

$$(4) \qquad |\mathrm{F}(t,\tau)| < \frac{\mathrm{C}}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}}$$

où $\varepsilon > 0$ et C est une constante finie positive.

Art. 2ème. - Principe du cycle fermé.

1. Soit A un point du plan ayant pour coordonnées rectangulaires ω et M. Il décrit une ligne pendant que M et ω varient. Si M et ω sont des fonctions périodiques du temps ayant la même période, cette ligne constitue un cycle fermé. Supposons maintenant que *chaque fois que* M *est une fonction périodique de τ avec une certaine période*, ω *soit aussi une fonction périodique de t avec la même période*. Nous désignerons cette condition par *condition du cycle fermé*.

Il est évident qu'il faudra admettre la périodicité depuis le temps $-\infty$ c'est à dire qu'il faudra partir de l'équation (2) où la limite inférieure de l'intégrale est $-\infty$.

2. Soit $T > 0$ la période. Nous aurons

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau) F(t+T, \tau) d\tau,$$

et, en vertu de la condition du cycle fermé,

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau) F(t+T, \tau) d\tau.$$

Par suite

$$\int_{-\infty}^{t} M(\tau) F(t, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau) F(t+T, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} M(\tau) F(t+T, \tau+T) d\tau.$$

Puisque $M(\tau)$ est une fonction périodique arbitraire ayant la période T, on déduit de l'égalité précédente

$$F(t, \tau) + \sum_{1}^{\infty}{}_n F(t, \tau - nT) = F(t+T, \tau+T) + \sum_{0}^{\infty}{}_n F(t+T, \tau - nT)$$

où τ est compris entre t et $t-T$.

Les deux séries étant convergentes à cause de la condition (4), il sera

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}_n F(t, \tau - nT) \right| < \frac{C}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$\left| \sum_{0}^{\infty}{}_n F(t+T, \tau - nT) \right| < \frac{C}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

d'où

$$(5) \qquad F(t, \tau) = F(t+T, \tau+T) + \frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

η étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

Soit

$$\vartheta < T - (t - \tau).$$

$T - \vartheta$ sera positif et $\tau + \vartheta$ sera compris entre $t + \vartheta$ et $t + \vartheta - (T - \vartheta)$: c'est pourquoi dans l'équation (5) on pourra remplacer respectivement t, τ, T par $t + \vartheta$, $\tau + \vartheta$, $T - \vartheta$. On aura ainsi

$$(5') \qquad F(t+\vartheta, \tau+\vartheta) = F(t+T, \tau+T) + \frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

η' étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

En retranchant les équations (5) et (5') il viendra

$$F(t, \tau) - F(t+\vartheta, \tau+\vartheta) = \left(\frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}} - \frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Or l'équation précédente doit être vérifiée quelque soit la grandeur de T, on aura donc

$$F(t, \tau) = F(t+\vartheta, \tau+\vartheta)$$

quelque soit ϑ.

On tire de là que $F(t, \tau)$ *doit être fonction de la différence* $t-\tau$.

3. Réciproquement on peut démontrer:

Si F *est une fonction de la différence* $t-\tau$, *la condition du cycle fermé sera vérifiée.*

En effet si

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau) F(t-\tau)\, d\tau$$

on aura

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{T+t} M(\tau) F(t+T-\tau)\, d\tau$$

$$= KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau+T) F(t-\tau)\, d\tau.$$

Donc si $M(\tau)$ est une fonction périodique avec la période T, $\omega(t)$ sera aussi une fonction périodique avec la même période.

4. Si nous nous rapportons à ce que nous avons dit dans le § 3 du 1er article, nous pourrons interpréter la condition que F soit une fonction de $t-\tau$ de la manière suivante: *la torsion induite après un intervalle de temps donné par un moment de torsion est invariable quelque soit l'instant où le moment de torsion a agi.*

Nous appellerons cette condition *l'invariabilité de l'hérédité*.

Les propositions des §§ 2 et 3 nous amènent au théorème suivant:

La condition du cycle fermé porte pour conséquence celle de l'invariabilité de l'hérédité, et réciproquement la condition de l'invariabilité de l'hérédité porte pour conséquence celle du cycle fermé.

Ce théorème sera nommé *principe du cycle fermé*.

Art. 3ème. - Détermination du coefficient d'hérédité.

1. La condition du cycle fermé étant vérifiée, et l'histoire du fil antérieure à l'instant o étant négligeable, on aura

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{0}^{t} M(\tau) F(t-\tau)\, d\tau.$$

Posons $t - \tau = \sigma$, il viendra

$$\omega(t) = \mathrm{K M}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}(t-\sigma)\,d\sigma.$$

2. Si nous supposons que $\mathrm{M}(t)$, $d\mathrm{M}(t)/dt$, $d^2\mathrm{M}(t)/dt^2, \cdots d^{n-1}\mathrm{M}(t)/dt^{n-1}$ soient nulles pour $t = 0$, tandis que $d^n\mathrm{M}(t)/dt^n$ ne soit pas nulle pour $t = 0$, on aura

$$\omega^{(n)}(t) = \mathrm{K M}^{(n)}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n)}(t-\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K} = \frac{\omega^{(n)}(0)}{\mathrm{M}^{(n)}(0)}.$$

Dérivant l'équation intégrale (6), il viendra

$$\omega^{(n+1)}(t) - \mathrm{K M}^{(n+1)}(t) = \mathrm{M}^{(n)}(0)\,\mathrm{F}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n+1)}(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Donc en connaissant $\omega(t)$ et $\mathrm{M}(t)$ on pourra calculer $\mathrm{F}(t)$ par la résolution de l'équation intégrale précédente.

Art. 4ème. – Équations générales de l'élasticité dans le cas de l'hérédité linéaire.

1. Après avoir envisagé, comme exemple, le cas particulier de la torsion nous allons passer au cas général.

Nous prendrons comme équations indéfinies fondamentales de l'équilibre élastique les équations

$$\mathrm{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho \mathrm{X}, \\ &\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho \mathrm{Y}, \\ &\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho \mathrm{Z}, \end{aligned} \right.$$

et comme équations au coutour σ du corps élastique

$$\mathrm{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} &t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz = \mathrm{X}_\sigma, \\ &t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz = \mathrm{Y}_\sigma, \\ &t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz = \mathrm{Z}_\sigma, \end{aligned} \right.$$

où les quantités $t_{is} = t_{si}$ sont les *caractéristiques de la tension* (c'est à dire le *stress*), $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$; X_σ, Y_σ, Z_σ sont respectivement les composantes des forces de masse et des tensions superficielles, n est la normale interne au contour.

2. Les relations qui définiront à chaque instant les conditions d'hérédité seront

$$\text{(III)} \qquad t_{is}(t) \sum_{hk} a_{is\,|\,hk}\,\gamma_{hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{hk} \varphi_{is\,|\,hk}(t\,,\tau)\,\gamma_{hk}(\tau)\,d\tau\,,$$

où les quantités $\gamma_{hk} = \gamma_{hk}$ désignent les *caractéristiques de la déformation* (c'est à dire le *strain*). Les sommes qui paraissent dans les égalités précédentes sont étendues à toutes les combinaisons avec repétition de h et k ($h\,,k =$ $= 1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6$). On a supposé que, antérieurement à l'instant t_0 l'hérédité soit négligeable. Les coefficients $a_{is\,|\,hk} = a_{is\,|\,kh} = a_{is\,|\,kh}$ seront en général des fonctions des coordonnées $x\,,y\,,z$ des points du corps élastique. De même $\varphi_{is\,|\,hk} = \varphi_{si\,|\,hk} = \varphi_{is\,|\,kh}$ seront en général des fonctions de $x\,,y\,,z\,,t\,,\tau$. On n'a mis en évidence que ces dernières variables pour simplifier l'écriture des formules. Ce n'est que dans le cas de l'homogénéité que nous supposerons que $a_{is\,|\,hk}\,,\varphi_{is\,|\,hk}$ soient indépendantes des coordonnées $x\,,y\,,z$.

3. Lorsqu'on néglige les termes intégraux dans les équations (III) elles expriment la *loi de* HOOKE. Les termes intégraux donnent, dans une première approximation, la correction due à l'hérédité. En effet nous supposerons que la correction totale due à l'herédité s'obtienne en ajoutant des quantités qui dépendent de toutes les valeurs prises par les quantités $\gamma_{hk}(\tau)$ pour les valeurs de τ comprises entre t_0 et t. En outre nous supposerons que ces quantités soient développables en séries analogues à celle de TAYLOR et que dans ces développements on puisse négliger tous les termes qui ne sont pas linéaires par rapport aux fonctions γ_{hk}. C'est pourquoi les équations (III) expriment les relations plus générales de l'*hérédité linéaire élastique*.

Nous admettrons que le déterminant du 6ème ordre formé avec les coefficients $a_{is\,|\,hk}$ ne soit pas nul. Les équations intégrales (III) seront alors résolubles par rapport aux quantités γ_{hk}. En les résolvant on exprimera le *strain* par le *stress*.

Il n'y a aucune difficulté à étendre aux coefficients $\varphi_{is\,|\,hk}(t\,,\tau)$ l'interprétation que nous avons donnée dans le 1er article au coefficient $F(t\,,\tau)$. De même on peut étendre au cas général, que nous considérons maintenant, le principe du cycle fermé que nous avons envisagé avec détail dans le cas particulier de la torsion. Nous appellerons les quantités $\varphi_{is|hk}$ les *coefficients d'hérédité*.

4. Soient $u\,,v\,,w$ les composantes du déplacement des particules du élastique. Nous aurons

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad, & \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad, & \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{23} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \quad, & \gamma_{31} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \quad, & \gamma_{12} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,. \end{array} \right.$$

Remplaçons dans les équations (I) les quantités t_{is} par les expressions données par les formules (III) et dans ces expressions posons les seconds membres des équations (IV) à la place des quantités γ_{hk}. On obtiendra trois équations *intégro-différentielles*. Elles sont les *équations intégro-différentielles générales de l'élasticité dans le cas de l'hérédité linéaire*.

Leur étude sera le sujet des articles suivants.

Art. 5ème. – Équations adjointes, théorème de réciprocité, caractéristiques.

1. L'étude des équations intégro-différentielles que nous venons de trouver se fera en les accouplant avec d'autres équations intégro-différentielles qu'on appellera les équations adjointes.

On les obtient en écrivant

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X' \\ \dfrac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y' \\ \dfrac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z' \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}')\quad \begin{cases} t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos uz = X'_\sigma \\ t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz = Y'_\sigma \\ t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz = Z'_\sigma \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}')\quad t'_{si}(t) = t'_{is}(t) = \sum_{hk} a_{hk\,|\,is}\, \gamma'_{hk}(t) + \int_t^T \sum_{hk} \varphi_{hk\,|\,is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, d\tau$$

$$(\mathrm{IV}')\quad \begin{cases} \gamma'_{11} = \dfrac{\partial u'}{\partial x}\ , \ \gamma'_{22} = \dfrac{\partial v'}{\partial y}\ , \ \gamma'_{33} = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \\ \gamma'_{23} = \gamma'_{32} = \dfrac{\partial w'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial z}\ , \ \gamma'_{31} = \gamma'_{13} = \dfrac{\partial u'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial x}\ , \ \gamma'_{12} = \gamma'_{21} = \dfrac{\partial v'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial y}. \end{cases}$$

Les trois équations intégro-différentielles auxquelles satisfont u', v', w' qu'on obtient en éliminant γ'_{hk} et t'_{is} des systèmes (I'), (III'), (IV') sont les *équations adjointes*.

2. On déduit facilement des équations (III)

$$\int_{t_0}^T \sum_{is} t_{is}(t)\, \gamma'_{is}(t)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^T \sum_{is} \sum_{hk} a_{is\,|\,hk}\, \gamma'_{is}(t)\, \gamma_{hk}(t)\, dt + \int_{t_0}^T dt \int_{t_0}^t \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is\,|\,hk}(t, \tau)\, \gamma'_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^T \sum_{hk} \sum_{is} a_{hk\,|\,is}\, \gamma'_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dt + \int_{t_0}^T dt \int_t^T \sum_{hk} \sum_{is} \varphi_{hk\,|\,is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, \gamma_{is}(t)\, d\tau.$$

Mais à cause des équations (III') on a

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{hk} \sum_{is} a_{hk|is}\, \gamma'_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dt + \int_{t_0}^{T} dt \int_{t_0}^{T} \sum_{hk} \sum_{is} \varphi_{hk|is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, \gamma_{is}(t)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sum_{is} t'_{is}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dt ,$$

donc

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{is} t_{is}(t)\, \gamma'_{is}(t)\, dt = \int_{t_0}^{T} \sum_{is} t'_{is}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dt$$

et par suite

$$\int_{t_0}^{T} dt \int_{S} \sum_{is} t_{is}(t)\, \gamma'_{is}(t)\, dS = \int_{t_0}^{T} dt \int_{S} \sum_{is} t'_{is}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS ,$$

S étant l'espace occupé par le corps élastique. Remplaçons maintenant γ'_{is} et γ_{is} par les seconds membres des équations (IV') et (IV). Par des intégrations par parties l'équation précédente devient

$$\int_{t_0}^{T} dt \Bigg[\int_{S} \Big\{ u' \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) + v' \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \right)$$

$$+ w' \left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \right) \Big\} dS$$

$$+ \int_{\sigma} \Big\{ u' (t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz) + v' (t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz)$$

$$+ w' (t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz) \Big\} d\sigma \Bigg]$$

$$= \int_{t_0}^{T} dt \Bigg[\int_{S} \Big\{ u \left(\frac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{13}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{33}}{\partial z} \right)$$

$$+ w \left(\frac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{33}}{\partial z} \right) \Big\} dS$$

$$+ \int_{\sigma} \Big\{ u (t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos nz) + v (t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz)$$

$$+ w (t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz) \Big\} d\sigma \Bigg] ,$$

et en vertu des équations (I), (II), (I') (II'), l'égalité précédente s'écrira

$$\text{(A)} \qquad \int_{t_0}^{T} dt \Big\{ \int_{S} (\rho X u' + \rho Y v' + \rho Z w')\, dS + \int_{\sigma} (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\, d\sigma \Big\}$$

$$= \int_{t_0}^{T} dt \Big\{ \int_{S} (\rho X' u + \rho Y' v + \rho Z' w)\, dS + \int_{\sigma} (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\, d\sigma \Big\} .$$

Le théorème renfermé dans cette formule est le *théorème de réciprocité*. Il est analogue au théorème de réciprocité que nous avons considéré dans l'article 2ème du premier chapitre et il sera la base des méthodes que nous allons développer. On peut comparer ce théorème avec le théorème de BETTI pour les cas ordinaires de l'élasticité [(8)].

Pour simplifier nous écrirons aussi l'équation (A) sous la forme

$$\text{(A)}\qquad \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma\rho\, X u'\, dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u'\, d\sigma \right\} = \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma\rho\, X' u\, dS + \int_\sigma \Sigma X'_\sigma u\, d\sigma \right\}.$$

3. Par des intégrations par parties on tire des équations (I), (II), (III), (IV), la formule

$$\text{(B)}\qquad \int_S (\rho X u + \rho Y v + \rho Z w)\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\, d\sigma$$

$$= -\int_S \sum_{is} \sum_{hk} a_{is\,|\,hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS - \int_{t_0}^{T} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is\,|\,hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, dS.$$

Supposons que pendant l'intervalle de temps (t_0, T) les forces de masse ρX, ρY, ρZ et le trinôme $X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w$ soient nuls, alors le premier membre de l'équation précédente sera nul aussi.

Or par une substitution ortogonale

$$\gamma_{is}(t) = \sum_{rl} c_{rl\,|\,is}\, g_{rl}(t)$$

on pourra ramener la forme quadratique

$$\text{(7)}\qquad \sum_{is} \sum_{hk} a_{is\,|\,hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)$$

à la forme

$$\sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t).$$

L'équation (B) deviendra donc

$$\text{(8)}\qquad \int_S \sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)\, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \psi_{is\,|\,hk}(t, \tau)\, g_{is}(t)\, g_{hk}(\tau)\, dS = 0,$$

où les coefficients $\psi_{is\,|\,hk}$ se calculeront très-facilement moyennant les fonctions $\varphi_{is\,|\,hk}$ et les coefficients $c_{rl\,|\,is}$. Il est évident que les fonctions $\psi_{is\,|\,hk}$ seront finies et continues lorsque $\varphi_{is\,|\,hk}$ seront finies et continues. Dans cette hypothèse, et, en supposant aussi que la forme (7) soit une forme définie, c'est à dire que les coefficients e_{rl} soient du même signe et ne soient pas nuls, on pourra déduire de l'équation (8), par le même procédé que nous avons suivi dans

(8) E. BETTI, *Teoria dell'elasticità.* « Nuovo Cimento », 1872–73.

le premier article du chapitre précédent, que les quantités $g_{rl}(t)$, et par suite les quantités $\gamma_{rl}(t)$, seront nulles pour t compris entre t_0 et T.

On tire de là que, sous les conditions que nous venons d'énoncer, *étant connu les forces de masse et les déplacements superficiels* (*ou les tensions superficielles*), *pendant un intervalle de temps, la déformation du corps sera déterminée dans le même intervalle de temps.*

Art. 6ème. – Corps élastiques isotropes et homogènes.

1. Si le corps élastique qu'on envisage est isotrope les équations (III) ne doivent pas changer si l'on invertit la direction de chacun des axes coordonnés. Par ces changements de direction des axes on a des changements de signe dans les quantités t_{rs} et γ_{rs}. On trouve ainsi très-aisément les termes qu'il faut éliminer dans les seconds membres des équations (III) lorsque le corps est isotrope. Mais les mêmes équations doivent garder toujours la même forme en échangeant les axes entre eux, c'est pourquoi elles seront

$$(9) \qquad t_{rr} = \mathrm{L}\Theta(t) + 2\,\mathrm{K}\,\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)\,\Theta(\tau) + 2\,\psi(t,\tau)\,\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau,$$

$$t_{rs} = h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s,$$

$$\Theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}.$$

Si nous donnons aux axes une orientation arbitraire, les équations précédentes ne doivent pas changer, par suite on doit avoir

$$\mathrm{K} = h \quad , \quad \psi = \chi$$

et en conséquence

$$(9a) \qquad t_{rs} = \mathrm{K}\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s.$$

Le corps élastique étant homogène, L et K seront constants et φ et ψ seront indépendants de x, y, z. Nous supposerons L et K du même signe (voir Art, 4ème, § 2).

2. Donc dans le cas des corps élastiques isotropes et homogènes, en ayant égard à l'hérédité linéaire, on aura les équations (9)

(9) Voir: Boltzmann, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.* « Wien. Ber. », *70*, S. 275-306, 1874; « Pogg. Ann. Erg. », Bd. 7, S. 624, 1876; « Wiss. Abl. », Bd. 1, S. 616. Voir aussi: O. E. Meyer, « Pogg. Ann. », *154*, S. 360; Wiechert, *Gesetze der elastischen Nachwirkung.*

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&K\Delta^2 u+(L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial x}\\&+\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau)+(\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial x}\right\}d\tau=\rho X(t),\\&K\Delta^2 v+(L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial y}\\&+\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau)+(\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial y}\right\}d\tau=\rho Y(t),\\&K\Delta^2 w+(L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial z}\\&+\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau)+(\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial z}\right\}d\tau=\rho Z(t).\end{aligned}\right.$$

On déduit facilement de ces équations

$$(11)\quad (L+2K)\,\Delta^2\Theta(t)+\int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+2\,\psi(t,\tau))\,\Delta^2\Theta(\tau)\,d\tau=\frac{\partial(\rho X)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Z)}{\partial z},$$

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&K\Delta^2\omega_1(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_1(\tau)\,d\tau=\frac{\partial(\rho Z)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z},\\&K\Delta^2\omega_2(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_2(\tau)\,d\tau=\frac{\partial(\rho X)}{\partial z}-\frac{\partial(\rho Z)}{\partial x},\\&K\Delta^2\omega_3(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_3(\tau)\,d\tau=\frac{\partial(\rho Y)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho X)}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

où

$$\omega_1=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\quad,\quad\omega_2=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\quad,\quad\omega_3=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

C'est pourquoi par la résolution de ces équations intégrales on pourra calculer

$$\Delta^2\Theta(t)\quad,\quad\Delta^2\omega_1(t)\quad,\quad\Delta^2\omega_2(t)\quad,\quad\Delta^2\omega_3(t).$$

3. Pour indiquer la résolution de ces équations intégrales et d'autres équations analogues que nous allons trouver, représentons par

$$(13)\qquad \varphi=\mathbf{A}_1 f$$

l'opération

$$(14)\qquad Kf(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau=\varphi(t),$$

qui nous amène de la fonction $f(t)$ à la fonction $\varphi(t)$, et écrivons inversement

$$f = \mathbf{A}_1^{-1}\,\varphi . \tag{13'}$$

Cette opération désigne la résolution de l'équation intégrale précédente.

De même représentons par

$$\varphi = \mathbf{A}_2 f \tag{15}$$

l'opération

$$(\mathrm{L} + 2\,\mathrm{K}) f(t) + \int_{t_0}^{t} \{\varphi(t,\tau) + 2\,\psi(t,\tau)\} f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$$

et par

$$f = \mathbf{A}_2^{-1}\,\varphi \tag{15'}$$

l'opération inverse.

4. Cela posé les équations (11) et (12) pourront s'écrire

$$\mathbf{A}_2\,\Delta^2\,\Theta = \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}, \tag{11'}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A}_1\,\Delta^2\,\omega_1 &= \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z}, \\ \mathbf{A}_1\,\Delta^2\,\omega_2 &= \frac{\partial(\rho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x}, \\ \mathbf{A}_1\,\Delta_2\,\omega_3 &= \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho X)}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{12'}$$

et par suite on aura

$$\Delta^2\,\Theta = \mathbf{A}_2^{-1}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right), \tag{11''}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2\,\omega_1 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z}\right), \\ \Delta^2\,\omega_2 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x}\right), \\ \Delta^2\,\omega_3 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho X)}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{12''}$$

En appliquant l'opération Δ^2 à la première des équations (10) on trouve

$$\mathrm{K}\Delta^4\,u(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,\Delta^4\,u(\tau)\,d\tau$$

$$= \Delta^2(\rho X) - (\mathrm{L} + \mathrm{K})\,\frac{\partial\Delta^2\,\Theta(t)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau) + \psi(t,\tau))\,\frac{\partial\Delta^2\,\Theta(\tau)}{\partial x}\,d\tau,$$

c'est à dire, en vertu de l'équation (11'),

$$\mathbf{A}_1\,\Delta^4\,u = \Delta^2(\rho X) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) + \mathbf{A}_1\,\frac{\partial\Delta^2\,\Theta}{\partial x}.$$

On a aussi deux équations analogues à la précédente.

On en tire, en ayant égard à l'équation (11''),

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^4 u &= \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho X) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right),\\
\Delta^4 v &= \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Y) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right),\\
\Delta^4 w &= \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Z) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il est donc possible de transformer les équations intégro-différentielles (10) dans les équations différentielles précédentes dont les seconds membres sont des fonctions connues.

Si les forces de masse sont nulles, les équations (11''), (12''), (16) deviennent

$$\Delta^2\Theta = \Delta^2\omega_1 = \Delta^2\omega_2 = \Delta^2\omega_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0\,.$$

Donc la forme intégro-différentielle des équations de l'élasticité, dans le cas héréditaire, n'est qu'une forme *apparente* lorsque le corps élastique est isotrope et homogène. Mais il faut remarquer que les relations qui passent entre les composantes des déplacements u, v, w gardent la forme intégro-différentielle, ainsi que les conditions au contour, lorsqu'on suppose que les tensions soient données.

5. Pour les équations adjointes, il faut remplacer les égalités (9), (9 *a*) par

$$(9')\qquad t'_{rr} = L\Theta'(t) + 2\,K\,\gamma'_{rr}(t) + \int_t^T (\varphi(\tau, t)\,\Theta'(\tau) + 2\,\psi(\tau, t)\,\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau\,,$$

$$(9'a)\qquad t'_{rs} = K\gamma'_{rs}(t) + \int_t^T \psi(\tau, t)\,\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau\,,\qquad r \gtrless s\,.$$

Les équations adjointes seront

$$
(10')\quad \left\{
\begin{aligned}
&K\Delta^2 u'(t) + (L+K)\frac{\partial\Theta'(t)}{\partial x}\\
&\quad + \int_t^T\left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial x}\right)d\tau = \rho X',\\
&K\Delta^2 v'(t) + (L+K)\frac{\partial\Theta'(t)}{\partial y}\\
&\quad + \int_t^T\left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial y}\right)d\tau = \rho Y',\\
&K\Delta^2 w'(t) + (L+K)\frac{\partial\Theta'(t)}{\partial z}\\
&\quad + \int_t^T\left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 w'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial z}\right)d\tau = \rho Z',
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$\Theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}.$$

En supposant

$$X' = Y' = Z' = 0,$$

et en posant

$$\omega'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \omega'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \omega'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y},$$

on aura

$$\Delta^2 \Theta' = \Delta^2 \omega'_1 = \Delta^2 \omega'_2 = \Delta^2 \omega'_3 = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0.$$

Art. 7ème. – SOLUTIONS FONDAMENTALES DES ÉQUATIONS ADJOINTES.

1. Supposons

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

On aura aisément les solutions suivantes des équations adjointes (10').

1) F étant une fonction harmonique il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{17}$$

2) F_1, F_2, F_3 étant des fonctions harmoniques il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{18}$$

3) Φ_1, Φ_2, Φ_3 étant des fonctions biharmoniques (10) et les dérivées partielles de

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)$$

par rapport à x, y, z étant indépendantes de t, il y aura la solution

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_1 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\ v' &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_2 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\ w' &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_3 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \end{aligned} \right. \tag{19}$$

où α et β sont des fonctions telles que l'on ait

$$\begin{aligned} &(L + 2K) \beta(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)] \beta(T, \tau) d\tau \\ &\qquad + (L + K) \alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)] \alpha(T, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

(10) Une fonction biharmonique est une fonction qui vérifie l'équation $\Delta^2 \Delta^2 = 0$.

2. Prenons $F = 1/r$, r étant la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c) que nous appellerons le *pôle*. La solution (17) nous donnera

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

$$\Theta' = 0\,,$$

$$t'_{11} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\quad t'_{22} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\ ,\quad t'_{33} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

$$t'_{23} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\ ,\quad t'_{31} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\ ,\quad t'_{12} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

$$X'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\quad Y'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\quad Z'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

où l'on a posé

$$M(T, t) = K + \int_t^T \psi(\tau, t)\,d\tau\,. \tag{21}$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 1 aux lettres u', v', w'; $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$, en les écrivant u'_1, v'_1, w'_1; $X_{\sigma,1}, Y_{\sigma,1}, Z_{\sigma,1}$.

3. Prenons

$$F_1 = \frac{1}{r}\quad ,\quad F_2 = 0\quad ,\quad F_3 = 0.$$

La solution (18) amènera aux formules suivantes

$$u' = 0\ ,\quad v' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\ ,\quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\Theta' = 0\,,$$

$$t'_{11} = 0,\qquad t'_{22} = -2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y}\ ,\quad t'_{33} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z},$$

$$t'_{23} = M(T, t)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\ ,\quad t'_{31} = M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\ ,\quad t'_{12} = -M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial r\,\partial x},$$

$$\left\{\begin{aligned}
X'_\sigma &= M(T, t)\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right),\\
Y'_\sigma &= M(T, t)\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right),\\
Z'_\sigma &= M(T, t)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny + 2\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 2 aux lettres u', v', w'; X'_σ, Y'_σ, Z'_σ en les écrivant u'_2, v'_2, w'_2; $X'_{\sigma,2}$, $Y'_{\sigma,2}$, $Z'_{\sigma,2}$.

On aura évidemment des solutions analogues en prenant successivement

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = \frac{1}{r} \quad , \quad F_3 = 0$$

et

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0 \quad , \quad F_3 = \frac{1}{r} .$$

4. Posons [11] dans les formules (19)

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0,$$

on aura, en tenant compte de la relation (20),

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \quad , \quad v' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},$$

$$\Theta' = (\alpha + \beta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\begin{cases} t'_{11} = (2P + Q + R) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^3}, \\ t'_{22} = \qquad (Q + R) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}, \\ t'_{33} = \qquad (Q + R) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'_{23} = \qquad N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z} \\ t'_{31} = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}, \\ t'_{12} = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_\sigma = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx \right), \\ Y'_\sigma = P \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right) + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right), \\ Z'_\sigma = P \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right) + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial z \partial y} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right), \end{cases}$$

(11) Comparer: SOMIGLIANA, *Sulle equazioni della elasticità*, « Annali di matematica », ser. II, t. XVI.

où

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= K\beta(T, t) + \int_t^T \psi(\tau, t)\, \beta(T, \tau)\, d\tau, \\ P &= K\alpha(T, t) + \int_t^T \psi(\tau, t)\, \alpha(T, \tau)\, d\tau, \end{aligned}\right.$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} Q &= L\beta(T, t) + \int_t^T \varphi(\tau, t)\, \beta(T, \tau)\, d\tau, \\ R &= L\alpha(T, t) + \int_t^T \varphi(\tau, t)\, \alpha(T, \tau)\, d\tau. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que N, P, Q, R sont des fonctions de T, t. Nous choisirons, pour simplifier la fonction arbitraire $\alpha(T, t)$ telle que $P = 1$. Les fonctions β et N, en vertu des relations (20) et (22), seront déterminées.

Pour distinguer la solution que nous venons de trouver nous placerons un indice 3 aux lettres u', v', w'; X'_σ, Y'_σ, Z'_σ, c'est à dire nous écrirons u'_3, v'_3, w'_3; $X'_{\sigma,3}$, $V'_{\sigma,3}$, $Z'_{\sigma,3}$.

On aura deux solutions analogues à celle-ci en prenant successivement

$$\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_3 = 0 ,$$

$$\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = \frac{r}{2} .$$

Art. 8ème. - Détermination de la dilatation et de la rotation.

1. Il est connu que la dilatation de chaque particule du corps élastique et les composantes de la rotation sont données par

$$\Theta ; \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}.$$

Nous commencerons par déterminer Θ, ω_1, ω_2, ω_3 moyennant les forces de masse et les composantes des déplacements et des tensions au contour, en appliquant le théorème de réciprocité donné par la formule (A).

2. Employons d'abord pour solution des équations adjointes celle que nous avons trouvée dans le 2ème § de l'article précédent. Le pôle (a, b, c) étant situé à l'intérieur de l'espace occupé par le corps élastique on pourra le retrancher moyennant une sphère ayant le centre dans le pôle. Si l'on fait diminuer indéfiniment le rayon de cette sphère, la formule (A) devien-

dra à la limite

$$(24)\qquad \int_{t_0}^{T}\left\{\int_\sigma \Sigma X_\sigma(t)\, u'_1\, d\sigma + \int_S \Sigma\rho\, X(t)\, u'_1\, dS - \int_\sigma \Sigma X'_{\sigma,1}\, u(t)\, d\sigma\right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{T}\left\{\frac{16}{3}\pi M(T,t)\,\Theta(a,b,c,t) + \frac{4}{3}\pi\left(t_{11}(a,b,c,t) + t_{22}(a,b,c,t) + t_{33}(a,b,c,t)\right)\right\} dt.$$

Le second membre de cette équation, en vertu des formules (9) et (21), s'écrira

$$4\pi\int_{t_0}^{T}\left\{(L+2K)\,\Theta(t) + \frac{4}{3}\Theta(t)\int_t^T \psi(\tau,t)\, d\tau + \int_{t_0}^{t}\left(\varphi(t,\tau) + \frac{2}{3}\psi(t,t)\right)\Theta(\tau)\, d\tau\right\} dt.$$

Mais

$$\int_{t_0}^{T}\Theta(t)\, dt\int_t^T \psi(\tau,t)\, d\tau = \int_{t_0}^{T} dt\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Theta(\tau)\, d\tau\,,$$

c'est pourquoi l'expression précédente deviendra

$$4\pi\int_{t_0}^{T}\left\{(L+2K)\,\Theta(t) + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau) + 2\psi(t,\tau))\,\Theta(\tau)\, d\tau\right\} dt = 4\pi\int_{t_0}^{T}\mathbf{A}_2\,\Theta(t)\, dt\,.$$

Donc, si nous dérivons l'équation (24) par rapport à T et si nous remplaçons T par t, on aura, en ayant égard aux expressions de u'_1, v'_1, w'_1; $X'_{\sigma,1}, Y'_{\sigma,1}, Z'_{\sigma,1}$, (Art. 7ème, § 2)

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma + \int_S \Sigma\sigma\, X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\, dS - 2\int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_1\, u\cdot\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial 1}\, d\sigma = 4\pi\,\mathbf{A}_2\,\Theta\,,$$

ou même

$$(25)\qquad \int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_2^{-1} X_\sigma\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\, d\sigma + \int_S \Sigma\mathbf{A}_2^{-1}(\rho X)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\, dS$$

$$-\, 2\int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1\, u\cdot\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,\partial\sigma = 4\pi\,\Theta(a,b,c,t)\,.$$

3. Pour solution des équations adjointes prenons maintenant celle que nous avons donnée dans le 3ème § de l'article précédent, et appliquons toujours le théorème de réciprocité. Par un procédé tout-à-fait analogue à celui que nous avons employé dans le § précédent ou trouvera

$$\int_\sigma\left(Z_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\sigma + \int_S\left(\rho Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \rho Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS$$

$$-\int_\sigma\left\{\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nz - \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny\right)\mathbf{A}_1\, u +\right.$$

$$+\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right)\mathbf{A}_1 v$$

$$+\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny + 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right)\mathbf{A}_1 w\Big\}\,d\sigma$$

$$= 4\pi\,\mathbf{A}_1\,\omega_1(a, b, c, t).$$

Cette équation se transforme immédiatement dans l'autre

$$(26)\quad \int_\sigma\left(\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma + \int_S\left(\mathbf{A}_1^{-1}(\rho Z)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1}(\rho Y)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS$$

$$-\int_\sigma\Big\{\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny\right)u + \left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right)v + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny\right.$$

$$\left.+ 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right)w\Big\}\,d\sigma = 4\pi\,\omega_1(a, b, c, t).$$

On a évidemment deux formules analogues à celle que nous venons de trouver qui expriment ω_2 et ω_3.

4. En comparant les formules que nous avons obtenues dans les §§ 2 et 3 avec celles de Betti pour l'équilibre élastique dans le cas ordinaire [12] on trouve qu'elles ont une forme semblable. Pour passer des unes aux autres il suffit d'appliquer aux déplacements, aux rotations, aux forces et à la dilatation les opérations fonctionelles $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ou leurs inverses.

Appelons $\mathbf{A}_1 u$, $\mathbf{A}_1 v$, $\mathbf{A}_1 w$; $\mathbf{A}_1 \omega_{1/2}$, $\mathbf{A}_1 \omega_{2/2}$, $\mathbf{A}_1 \omega_{3/2}$; $\mathbf{A}\,\Theta$ respectivement les *pseudo-déplacements*, les *pseudo-rotations* et la *pseudo-dilatation*, alors on pourra interpréter les formules (25) et (26) et les formules analogues par le théorème suivant:

Lorsqu'on envisage des corps élastiques isotropes et homogènes, pour passer du cas de la non-hérédité à celui de l'hérédité, il suffira de remplacer les déplacements, les rotations et la dilatation par les pseudo-déplacements, les pseudo-rotations et la pseudo-dilatation dans les formules de Betti *relatives à l'équilibre élastique.*

5. Dans les équations (25) et (26) paraissent les valeurs des tensions et celles des déplacements au contour. Mais pour déterminer la dilatation et les rotations les unes ou les autres de ces valeurs sont superflues. On pourra

(12) Voir la citation faite dans la note de l'article 5ème.

obtenir l'élimination des valeurs superflues par l'emploi des éléments qui jouent un rôle analogue aux fonctions de GREEN (voir Chap. 1er, Art. 9ème, § 2).

Art. 9ème. – DÉTERMINATIONS DES DÉPLACEMENTS.

1. On a les formules

$$\Delta^2 u = \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\omega_3}{\partial y},$$

$$\Delta^2 v = \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1}{\partial z},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x},$$

donc, les rotations et la dilatation étant déterminées, on pourra calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

On déduit facilement des équations (10)

$$\Delta^2 u = \mathbf{A}_1^{-1}(\rho X) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

$$\Delta^2 v = \mathbf{A}_1^{-1}(\rho Y) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\frac{\partial\Theta}{\partial y},$$

$$\Delta^2 w = \mathbf{A}_1^{-1}(\rho Z) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

C'est pourquoi en connaissant les forces de masse et ayant déterminé la dilatation, on a aussi une autre manière pour calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

Mais supposons que les tensions au contour soient données, les déplacements étant inconnus. On démontre aisément, en partant des relations (II), (9), (9 *a*), les formules suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1^{-1} X_\sigma + \omega_2 \cos nz - \omega_3 \cos ny + (2 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\Theta \cos nx),$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma + \omega_3 \cos nx - \omega_1 \cos nz + (2 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\Theta \cos ny),$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma + \omega_1 \cos ny - \omega_2 \cos nx + (2 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\Theta \cos nz).$$

Donc, si l'on connait X_σ, Y_σ, Z_σ et l'on a déterminé Θ, ω_1, ω_2, ω_3, on pourra calculer $\partial u/\partial n$, $\partial v/\partial n$, $\partial w/\partial n$ et par suite on aura u, v, w en connaissant $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

3. Mais pour calculer directement les déplacements, sans employer les formules qui donnent la dilatation et les rotations, on pourra employer la méthode suivante (13).

Appliquons la formule de réciprocité (A) en prenant pour solution des équations adjointes celle que nous avons donnée dans le 4ème § de l'article 7ème.

(13) Voir la Note au § 4 de l'article 7ème.

Retranchons le pôle (a, b, c) interne à l'espace occupé par le corps élastique moyennant une sphère qu'on faira diminuer indéfiniment. On trouvera à la limite, P étant égal à 1,

$$\int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_{\sigma}\, u'_3\, d\sigma + \int_{S} \Sigma \rho\, X u'_3\, dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3}\, u d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{T} u(a, b, c, t)\, dt,$$

d'où l'on tire, en dérivant par rapport à T,

$$(27) \quad -4\pi u(a, b, c, T) = \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_{\sigma}\, u'_3\, d\sigma + \int_{S} \Sigma \rho X\, u'_3\, dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3}\, u d\sigma \right\}.$$

4. Il faut maintenant calculer la dérivée par rapport à T qui paraît dans le second membre. C'est pourquoi nous allons établir quelques formules préliminaires.

Rappelons l'équation (14). Multiplions par $\alpha(T, t)\, dt$ et intégrons entre les limites t_0 et T. Par des transformations très simples, et en ayant égard aux formules (22) où $P = 1$, on aura

$$\int_{t_0}^{T} \alpha(T, t)\, \varphi(t)\, dt = \int_{t_0}^{T} K\alpha(T, t) f(t)\, dt + \int_{t_0}^{T} \alpha(T, t)\, dt \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{T} f(t) \left\{ K\alpha(T, t) + \int_{t}^{T} \alpha(T, \tau)\, \psi(\tau, t)\, d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{T} f(t)\, dt.$$

Dérivons par rapport à T et faisons usage de l'égalité (13'), il viendra

$$(28) \qquad \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} \alpha(T, t)\, \varphi(t)\, dt = f(T)\, \mathbf{A}_1^{-1}\, \varphi(T).$$

Mais, à cause des équations (20) et (22) où $P = 1$, on a

$$(L + 2K)(\alpha(T, t) + \beta(T, t)) + \int_{t}^{T} (\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t))(\alpha(T, \tau) + \beta(T, \tau))\, d\tau = 1,$$

donc, en suivant un procédé analogue à celui que nous venons d'employer on trouvera

$$\frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} (\alpha(T, t) + \beta(T, t))\, \varphi(t)\, dt = \mathbf{A}_2^{-1}\, \varphi(T),$$

d'où

$$(28') \qquad \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} (\beta\, T, t)\, \varphi(t)\, dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\, \varphi(T).$$

Les équations (22) et (14) nous donnent

$$\int_{t_0}^{T} N(T, t) f(t)\, dt = \int_{t_0}^{T} \beta(T, t) \left\{ K f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{T} \beta(T, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

C'est pourquoi, à cause des équations (28') et (13),

$$(28'') \qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) f(t)\, dt$$

$$= (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\, \mathbf{A}_1 f(t) = \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 f(t) - f(t) = (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1) f(t).$$

En résumant les formules (28), (28'), (28'') on aura donc

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}, t)\, \mathrm{F}(t)\, dt = \mathbf{A}_1^{-1}\, \mathrm{F}(\mathrm{T}), \\ &\frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T}, t)\, \mathrm{F}(t)\, dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\, \mathrm{F}(\mathrm{T}), \\ &\frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T}, t)\, \mathrm{F}(t)\, dt = (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\, \mathrm{F}(t), \end{aligned} \right.$$

où F (t) est une fonction arbitraire.

5. Pour calculer le second membre de l'équation (27) employons les formules (29). On trouvera alors:

$$(27') \qquad -4\pi u(a, b, c, t)$$

$$= \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r}\mathbf{A}_1^{-1} \mathrm{X}_\sigma + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1}) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\mathrm{X}_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\mathrm{Y}_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\mathrm{Z}_\sigma \right) \right\} d\sigma$$

$$+ \int_\mathrm{S} \left\{ \frac{1}{r}\mathbf{A}_1^{-1}(\rho\mathrm{X}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1}) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\rho\mathrm{X}) + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}(\rho\mathrm{Y}) + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}(\rho\mathrm{Z}) \right) \right\} d\mathrm{S}$$

$$- \int_\sigma \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny \right) v + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz \right) w \right.$$

$$+ (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1) \left[\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nx \right) u + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny \right) v \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz \right) w \right] \right\} d\sigma.$$

Il est évident que nous pourrons obtenir deux formules analogues à la formule précédente pour exprimer v et w.

Art. 10ème. – Remarques générales.

1. Par les formules que nous venons de développer nous avons donné une théorie générale de l'hérédité linéaire élastique dans le cas statique.

Nous avons vu ainsi une application des équations intégro-différentielles. Dans le cas général on ne peut pas séparer la partie intégrale de la partie différentielle, mais cela est possible dans le cas des corps isotropes et homogènes. On peut remarquer que dans ce cas tous les résultats peuvent s'obtenir par les formules ordinaires accouplées aux opérations fonctionelles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ et à leurs inverses.

2. Nous nous sommes bornés aux formules générales en laissant de côté toute question particulière, mais on pourrait approfondir beaucoup de problèmes spéciaux en arrivant aux formules résolutives finales.

C'est aïnsi que dans le cas de la sphère élastique isotrope et homogène le problème peut être résolu complètement par des séries très–rapidement convergentes, en laissant tout–à–fait arbitraires les coefficients d'hérédité.

Ce cas a un intérêt spécial pour les applications. Dans les problèmes relatifs à la terre, lorsqu'on veut tenir compte de son élasticité, les phénomènes héréditaires ne sont pas négligeables. L'analyse que nous indiquons, sans entrer dans aucun détail, donne le moyen de calculer les effets de l'hérédité, pourvu qu'elle soit linéaire.

Chapitre 3ème.

Électro–magnétisme en ayant égard á l'hérédité.

Art. 1er. – Équations générales.

1. Hertz a établi les équations suivantes pour l'électro–magnétisme dans le cas des systèmes en repos [14]

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{(I')}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

où

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z \end{cases} \qquad \text{(II')}\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} u = \vartheta_{11}(X - X') + \vartheta_{12}(Y - Y') + \vartheta_{13}(Z - Z') \\ v = \vartheta_{21}(X - X') + \vartheta_{22}(Y - Y') + \vartheta_{23}(Z - Z') \\ w = \vartheta_{31}(X - X') + \vartheta_{32}(Y - Y') + \vartheta_{33}(Z - Z') . \end{cases}$$

(14) « Wiedemann's Annalen », *40*, page 577. Gesammelte Werke. Bd II, page 208.

Dans ces équations $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w désignent respectivement les composantes de la polarisation électrique, de la force électrique et du courant électrique. $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N désignent respectivement les composantes de la polarisation magnétique et de la force magnétique.

X', Y', Z' sont les composantes de la force électromotrice.

2. Les équations (II), (II') et (III) se déduisent de l'hypothèse que l'état actuel de la polarisation électrique et du courant électrique dépendent de l'état actuel de la force électrique, ainsi que l'état actuel de la polarisation magnétique dépend de l'état actuel de la force magnétique.

De cette manière on néglige les phénomènes de l'hérédité. Si l'on veut en tenir compte, il faudra admettre que l'état actuel de la polarisation électrique dépende, outre que de la force électrique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force électrique, et l'état actuel de la polarisation magnétique dépende, outre que de la force magnétique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force magnétique.

C'est pourquoi on devra ajouter dans les seconds membres des équations (II) et (II') des termes de correction et écrire

$$(\mathrm{II}\,a)\quad\begin{cases}\mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11}X(t) + \varepsilon_{12}Y(t) + \varepsilon_{13}Z(t) + F_1\left|\left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)\right]\right|,\\[2ex] \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21}X(t) + \varepsilon_{22}Y(t) + \varepsilon_{23}Z(t) + F_2\left|\left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)\right]\right|,\\[2ex] \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31}X(t) + \varepsilon_{32}Y(t) + \varepsilon_{33}Z(t) + F_3\left|\left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)\right]\right|,\end{cases}$$

où F_1, F_2, F_3 désignent des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$ correspondantes aux valeurs de l'argument τ depuis $-\infty$ jusqu'à t [15].

De même on écrira

$$(\mathrm{II}'a)\quad\begin{cases}\mathfrak{L}(t) = \mu_{11}L(t) + \mu_{12}M(t) + \mu_{13}N(t) + \Phi_1\left|\left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)\right]\right|\\[2ex] \mathfrak{M}(t) = \mu_{21}L(t) + \mu_{22}M(t) + \mu_{23}N(t) + \Phi_2\left|\left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)\right]\right|\\[2ex] \mathfrak{N}(t) = \mu_{31}L(t) + \mu_{32}M(t) + \mu_{33}N(t) + \Phi_3\left|\left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)\right]\right|.\end{cases}$$

Supposons maintenant que les conditions pour que l'on puisse développer chaque fonction F_i dans une série infinie de termes ayant la forme

$$\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t} G_i(\tau'_1, \cdots, \tau'_h \mid \tau''_1, \cdots, \tau''_k \mid \tau'''_1, \cdots, \tau'''_l \mid t)\cdot$$
$$\cdot X(\tau'_1)\cdots X(\tau'_h)\, Y(\tau''_1)\cdots Y(\tau''_k)\, Z(\tau'''_1)\cdots Z(\tau'''_l)\, d\tau'_1, \cdots, d\tau'''_l$$

(15) Voir Chap. II, Art. 1er, § 1.

soient satisfaites, et supposons aussi que les conditions pour que l'on ait des développements analogues pour les fonctions Φ_i soient vérifies.

Si nous admettons comme postulat que les effets de la superposition des forces électriques et magnétiques se somment, c'est à dire

$$F_i \,|\, [X(\tau) + X'(\tau),\, Y(\tau) + Y'(\tau),\, Z(\tau) + Z'(\tau)] \,|$$
$$= F_i \,|\, [X(\tau),\, Y(\tau),\, Z(\tau)] \,| + F_i \,|\, [X'(\tau),\, Y'(\tau),\, Z'(\tau)] \,|$$

$$\Phi_i \,|\, [L(\tau) + L'(\tau),\, M(\tau) + M'(\tau),\, N(\tau) + N'(\tau)] \,|$$
$$= \Phi_i \,|\, [L(\tau),\, M(\tau),\, N(\tau)] \,| + \Phi_i \,|\, [L'(\tau),\, M'(\tau),\, N'(\tau)] \,|,$$

on aura

$$F_i = \int_{-\infty}^{t} \{ X(\tau)\, \varphi_{i,1}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{i,2}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{i,3}(t,\tau) \}\, d\tau,$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{ L(\tau)\, \psi_{i,1}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{i,2}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{i,3}(t,\tau) \}\, d\tau,$$

c'est pourquoi les équations (II *a*) et (II'*a*) deviendront

$$(\mathrm{II}\,b)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}(t) &= \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{13}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{Y}(t) &= \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{23}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{Z}(t) &= \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{33}(t,\tau))\, d\tau, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II}'b)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}(t) &= \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{13}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{M}(t) &= \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{21}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{22}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{23}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{N}(t) &= \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{31}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{32}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{33}(t,\tau))\, d\tau, \end{aligned} \right.$$

où la limite inférieure a des intégrales sera $-\infty$. Si nous supposons que l'on puisse négliger l'hérédité antérieure à un instant donnée t_0, alors on pourra prendre la limite inférieure des intégrales égale à t_0.

Si nous remplaçons, dans les équations (I) et (I'), u, v, w; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, par leurs valeurs données par les relations (II b), (II' b) et (III) on trouvera des équations *intégro-différentielles*.

L'hérédité, telle que nous venons de l'evisager, est une *hérédité linéaire*. Il faut remarquer à ce propos que l'hystérésis dite électrotechnique ne rentre pas dans l'hérédité linéaire. Il suffit de rappeller la phénomène de la magnétisation permanente pour s'apercevoir qu'elle est en déhors du cadre des phénomènes embrassés par l'hérédité linéaire.

Art. 2ème. – Coefficients d'hérédité.

1. Dans les équations (II b) et (II' b) on n'a écrit explicitement que les variables t, τ, mais il faudra se rappeller que $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; X, Y, Z; L, M, N sont aussi des fonctions de x, y, z. En général les coefficients ε_{rs}, μ_{rs} seront des fonctions de x, y, z ainsi que les coefficients φ_{rs} et ψ_{rs}. Ce n'est que dans le cas où le milieu est homogène que l'on pourra regarder ces coefficients comme indépendants de x, y, z.

Lorsqu'on passe d'un milieu à un autre, sur les surfaces limites il y aura des relations qu'on pourra obtenir par un procédé analogue à celui suivi par Hertz dans le § 8ème du mémoire que nous avons cité.

2. La limite inférieure des intégrales qui paraissent dans les équations (II b) et (II' b) étant finie, et les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}, & \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}, & \varepsilon_{32}, & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \mu_{13} \\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \mu_{23} \\ \mu_{31}, & \mu_{32}, & \mu_{33} \end{vmatrix}$$

n'étant par nuls, on pourra invertir les équations intégrales (II b) et (II' b) et exprimer les composantes de la force électrique par celles de la polarisation électrique et les composantes de la force magnétique par celles de la polarisation magnétique.

3. Nous appellerons φ_{rs} et ψ_{rs} les *coefficients d'hérédité*. Il est facile de trouver leur interprétation. C'est ainsi que

$$\varphi_{11}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \varphi_{21}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \varphi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les composantes de la polarisation électrique, induite à l'instant t, par l'unité de force électrique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$; et

$$\psi_{11}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \psi_{21}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \psi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les composantes de la polarisation magnétique, induite à l'instant t, par l'unité de force magnétique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$.

Nous admettrons que les coefficients d'hérédité φ_{rs}, ψ_{rs} soient infiniment petits pour $t = -\infty$ de telle sorte que

$$|\varphi_{rs}(t, \tau)| < \frac{C}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}} \quad , \quad |\psi_{rs}(t, \tau)| < \frac{C'}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}}$$

où $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ et C et C′ sont des quantités constantes positives [16].

4. Il est facile d'étendre au cas que nous envisageons le *principe du cycle fermé* (Chap. 2ème, Art. 2ème) c'est à dire: *Si, toutes les fois que* X, Y, Z; L, M, N, *sont des fonctions périodiques du temps, avec une période quelconque* T, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, *sont aussi des fonctions périodiques ayant la même période, alors* φ_{rs}, ψ_{rs} *sont des fonctions de la différence* $t - \tau$; *et réciproquement. Si les coefficients* φ_{rs}, ψ_{rs} *sont des fonctions de la différence* $t - \tau$, *et* X, Y, Z; L, M, N *sont des fonctions périodiques du temps*, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *seront aussi des fonctions périodiques avec la même période*. Cette proposition peut aussi s'énoncer par les mots: *La condition du cycle fermé et celle de l'invariabilité de l'hérédité sont équivalentes*.

Art. 3ème. – LE CAS STATIQUE.

1. Envisageons le cas le plus simple où le milieu ne soit pas conducteur et les quantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ changent si lentement qu'on puisse négliger

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

On peut appeller ce cas le *cas statique*.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 ,$$

c'est à dire

$$X = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad Y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad Z = \frac{\partial v}{\partial z} ,$$

$$L = \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad M = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad N = \frac{\partial w}{\partial z} .$$

2. Supposons que les coefficients ε_{rs}, φ_{rs} soient indépendants de x, y, z. Prenons les axes coordonnés coïncidents avec les axes de la surface de 2^d

(16) Voir Chap. II, Art. 1er, § 4.

degré

$$(1) \quad \varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}) zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) xy = 1 .$$

S'ils coïncident avec les axes de la surface

$$(2) \quad \varphi_{11} x^2 + \varphi_{22} y^2 + \varphi_{33} z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32}) yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13}) zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) xy = 1$$

quels que soient les valeurs de t, τ, les équations (II b) deviendront

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial v(t)}{\partial x} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \varphi_{11}(t, \tau)\, dt , \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{22} \frac{\partial v(t)}{\partial y} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi_{22}(t, \tau)\, d\tau , \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{33} \frac{\partial v(t)}{\partial z} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \varphi_{33}(t, \tau)\, d\tau . \end{aligned} \right.$$

C'est pourquoi étant

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4 \pi \rho ,$$

où ρ est une fonction de x, y, z indépendante de t, on aura

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial z^2}$$

$$+ \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} \varphi_{11}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \varphi_{33}(t, \tau) \right) d\tau = 4 \pi \rho .$$

Par un changement des variables x, y, z cette équation peut se réduire à

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right) d\tau = 4 \pi \rho$$

qui est l'équation que nous avons étudiée dans le premier chapitre. (Voir 1e Chap. Art. 10ème).

3. Si les axes de la surface (1) ne coïncident pas avec ceux de la surface (2) les difficultés ne sont pas augmentées.

L'équation intégro-différentielle qu'on trouverait serait

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{11}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} f_{33}(t, \tau) \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y\, \partial z} f_{23}(t, \tau) + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z\, \partial x} f_{31}(t, \tau) + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x\, \partial y} f_{12}(t, \tau) \right\} d\tau = 4 \pi \rho .$$

On pourrait étendre facilement la théorie que nous avons exposée dans le premier chapitre à cette équation intégro-différentielle.

Art. 4ème. – Remarques générales.

1. Le but principal que nous avons poursuivi dans ce chapitre a été de montrer l'origine des équations intégro-différentielles (A), (A'') du premier chapitre.

Nous ne sommes pas entrés dans aucun problème particulier. Si l'on envisagerait un milieu électrique non isotrope entouré par un conducteur, on aurait facilement une application des résultats principaux que nous avons exposés dans le premier chapitre.

2. Nous nous sommes bornés au cas statique sans développer le cas général, car il aurait fallu sortir du type elliptique des équations intégro-différentielles pour aborder le cas hyperbolique, que nous avons laissé de côté dans ce mémoire. En effet les équations intégro-différentielles qui correspondent aux équations (I), (I'), (II b), (II'b) sont des équations hyperboliques.

3. Dans le 2ème et le 3ème Chapitre nous avons vu que, si nous considérons toute l'histoire d'un système antérieure à l'instant actuel t, les intégrales qui paraissent dans les formules sont étendues dépuis la limite $-\infty$ jusqu'à la limite t. C'est pourquoi nous avons négligé, en général, l'hérédité antérieure à un certain instant déterminé pour n'avoir à considérer que des équations intégrales et intégro-différentielles avec des limites finies.

Tout récemment M. G. C. Evans a envisagé les équations intégrales lorsqu'une des limites est infinie [17]. En appliquant ses résultats il est possible de considérer l'hérédité sans négliger aucune période de l'histoire du système.

(17) *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XX, serie 5ª, 1911 (Trois Notes).

TABLE DES ARTICLES