VII.

LA DÉTERMINATION DE LA QUADRATURE DE LA ROULETTE ORDINAIRE, DES ROULETTES ALLONGÉES ET RACCOURCIES ET LA CONSTRUCTION DE LA TANGENTE A CES ROULETTES.

1. FERMAT A MERSENNE.

TOULOUSE [JUILLET 1638].

(Tome II, p. 135, 151.)

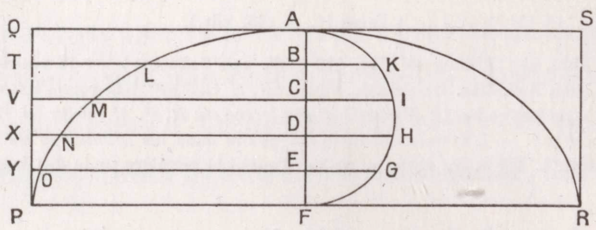
[Groningue, Bibl. de l'Université, Ms. 110 (coll. van Schooten), f^{os} 16 recto-16 verso. — Florence, Bibl. Naz. Mss. Galileiani, *Discepoli*, t. CIII, f^{os} 103 verso-105 recto. — Les deux copies portent en haut : *Extrait d'une lettre au R. P. M.*; celle de Florence porte aussi : *Deleatur*. — L'extrait suivant a été publié dans les *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, s. XI, t. V, 1917, p. 77-80, d'après la première seule des deux sources.]

Dans une lettre de février 1638, Mersenne avait annoncé à Fermat la découverte de la quadrature de la cycloïde par Roberval (t. II, 1894, p. 135) et le géomètre de Paris en avait entretenu lui-même Fermat dans une lettre du 1er juin 1638 (*Ibid.*, p. 151). Il est assez évident que la lettre suivante, à laquelle manque l'indication de la date, doit avoir été écrite vers le mois de juillet 1638, précédant immédiatement la lettre suivante du 27 juillet 1638 (N° 2). L'existence des deux lettres nous est connue par la correspondance de Descartes, qui en parle dans ses lettres de 1638 (*Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. II, 1898, p. 395 et le passage cité aux prolégomènes de la lettre suivante) et par la lettre de Carcavi à Descartes du 24 septembre 1649 : « *I'ay* — dit-il — *plusieurs lettres de Monsieur Fermat de l'année* 1637 [1] *qui disent le mesme* (à savoir la démonstration de la quadrature de la cycloïde comme d'une chose trouvée par Roberval) *et qui témoignent sa franchise, en ce que, s'estant mespris sur le suiet de cette ligne et d'une énonciation dudit sieur de Roberval, qui luy apparut d'abord fausse, il se rétracta genereusement par le courrier suivant.* » D'ailleurs les démonstrations suivantes sont mentionnées dans l'*Histoire de la Roulette* (1658) de Pascal (*Œuvres de Bl. Pascal*, éd. Brunschvicg et Boutroux, t. VIII, 1914, p. 197).

Vous vous souviendrez que ie vous ay autresfois [2] escrit que ie treuvois la proposition de M. de Roberval douteuse et que i'appréhendois qu'il n'eust équivoqué en sa recherche. En voicy la confirmation.

Voyez en la figure suivante (*fig.* 22) la description de la

Fig. 22.



courbe descrite par un point du cercle qui roule. Sa base est PR, coupée esgalement au point F; son sommet est A; la ligne AF, perpendiculaire sur PR, est le diamètre du cercle

(1) Les éditeurs de cette lettre de Carcavi (*Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. V, 1903, p. 421) ont déjà remarqué qu'il y a ici erreur de date et que les lettres de Fermat ne pouvaient dater que de février 1638, au plus tôt.

(2) En février 1638; *voir* les prolégomènes,

qui roule; AIGF est la moitié dudit cercle; PLAR est la ligne courbe; PS est un parallélogramme rectangle.

La principale propriété de la courbe, qu'il est très aisé de demonstrer est que, si vous prenéz un point en icelle comme L, duquel vous tiriez LBK perpendiculaire sur AF, la ligne LB est esgale à la ligne BK et à la portion de la demi-circonférence AK (1); tout de mesme la ligne MC est esgale à la ligne CI et à la portion de la demy-circonférence IA et ainsy des autres iusques à ce que la ligne PF se treuve esgale à l'entière demi-circonférence. Que sy la base PR est double de la circonférence du cercle qui roule, en ce cas la ligne LB est esgale à la ligne BK et au double de la portion du cercle AK, et ainsy la ligne MC est esgale à la ligne CI et au double de la portion du cercle IA. Et si la ligne PR est triple de la circonférence du cercle qui roule, tout de mesme, etc.

Cela ainsy supposé, pour treuver la proportion du rectangle PA à la demi-figure APF, diuisons AF en autant de parties esgales que nous voudrons, comme AB, BC, CD, DE, EF. Et ensuite des points B, C, etc. tirons les lignes BLT, CMV, DNX, EOY parallèles à PF.

Pour treuver la proportion que nous cerchons, il faut comparer toutes les lignes PF, EY, DX, CV, BT, AQ à toutes les lignes PF, EO, DN, CM, BL (2).

Or les lignes PF, EO, DN, CM, BL sont égales, comme nous avons dit, aux portions du cercle FA, GA, HA, IA, KA et aux droites EG, DH, CI, BK (3). Il faut donc comparer toutes les lignes PF, EY, DH, CV, BT, AQ avec les portions

(1) C'est-à-dire à la somme de la droite BK et l'arc de cercle AK.

(2) C'est-à-dire la somme des lignes PF, EY, DX, CV, BT, AQ à celle des lignes PF, EO, DN, CM, BL.

(3) A savoir à la somme des arcs de cercle et des droites nommées.

du cercle FA, GA, HA, IA, KA et avec les droites EG, DH, CI, BK.

Faisons cette comparaison séparément. En comparant premièrement toutes les lignes PF, EY, DX, CV, BT, AQ avec les droites BK, CI, DH, EG, etc., il est évident que toutes ces lignes PF, EY, etc. à l'infiny, auront la mesme proportion à BK, CI, etc., que celle qui est du rectangle AP au demi-cercle FGA (à cause que les lignes AB, BC, CD, etc. sont égales entr'elles). Et ladite proportion est de 4 à 1 en la première révolution (de 8 à 1 en la seconde, de 12 à 1 en la troisième, etc., à l'infiny) de laquelle seule nous parlerons, les conséquences pour les autres estant trop aisées et la démonstration trop évidente.

Comparons maintenant toutes les lignes PF, EY, DX, CV, BT, AQ avec les portions du cercle FA, GA, HA, IA, KA. Sy les portions AK, KI, IH, etc. estoient esgales entr'elles, nous pourrions dire que toutes les lignes PF, YE, XD, VC, BT, AQ seroient doubles des portions FA, GA, HA, IA, KA, à cause que chascune des lignes PF, YE, etc. est égale à la demy-circonférence FA, qui seroit par conséquent la plus grande de la progression arithmétique, en laquelle la différence de la progression est esgale au plus petit terme. Mais nous ne pouvons sans paralogisme déterminer cette proportion double, à cause que les droites AB, BC, etc. estant egales entr'elles, il s'ensuit manifestement que les portions AK, KI, IH, etc. sont inesgales entr'elles. Et partant nous ne pouvons pas dire que toutes les lignes PF, EY à l'infiny soient doubles des portions FA, GA, etc., à l'infiny, ce que pourtant j'estime que Mr Roberval aura creu, ne s'estant pas amusé à considérer l'inesgalité des portions AK, KI, etc. (1).

(1) Comparez le lettre de Fermat qui suit.

Et de fait, si cette proportion double estoit vraye, la proposition de M[r] Roberval le seroit aussy. Car si toutes les lignes PF, EY, etc. estoient doubles des portions FA, GA, etc., puisque nous avons preuvé que les mesmes lignes PF, EY, etc. sont quadruples des lignes EG, DH, etc., il s'ensuivroit que lesdites lignes PF, EY, etc. seroient à la somme des portions AF, GA, et des lignes droites EG, DH, etc. comme 4 à 3. Or la somme des portions AF, GA, etc. et des droites EG, DH, etc. est égale aux droites PF, EO, DN, etc. Donc les lignes PF, EY, etc. seroient aux lignes PF, OE, etc. comme 4 à 3. Et partant, le rectangle AP seroit à la demi-figure PAF comme 4 à 3 et l'entier rectangle PS seroit à la figure PAR comme 4 à 3. Or le rectangle PS est quadruple du cercle qui roule, donc la figure PAR seroit triple du cercle en la première reuolution, et en la seconde quintuple, etc., comme il seroit aisé d'estendre la démonstration.

Mais ie croy que la proportion est fausse. Et peut-estre ay-ie fait et deviné le chemin que M. Roberval a teneu.

---

2. FERMAT A MERSENNE.

TOULOUSE 27 JUILLET 1638.

(Tome II, p. 135, 151.)

[Groningue, Bibl. de l'Université, Ms. 110 (collection van Schooten), f[os] 16 verso-17 recto. — Florence, Bibl. Naz., Mss. Galileiani, *Discepoli*, vol. CIII, f[os] 105 recto-106 verso. — Les deux copies portent en haut : *Suite du même sujet d'une lettre du* 27 *juillet* 1638 (ajouté en F : *R.P.M.*); d'ailleurs celle de Florence porte *Deleatur*. — L'extrait suivant a été publié dans les *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, s. XI, t. V, 1917, p. 80-83. d'après la première seule des deux sources.]

La lettre suivante fait suite immédiate à la précédente. C'est probablement de cette lettre que Descartes écrivit à Mersenne le 23 août 1638 : « *I'ay considéré exactement la démonstration prétendue de la Roulette*