

7.72 — plastyczność, lepko-plastyczność, reologia

35/1982

Marian Grzymkowski

METODY ANALIZY  
PROCESÓW OBRÓBKI PLASTYCZNEJ  
METALI

Część IV

P. 269

WARSZAWA 1982

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 kwietnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 35/1982



57039



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 11,5. Ark.druk.16.

Oddano do drukarni w październiku 1982 r.

Nr zamówienia 607/o/82 Z-86

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Sniadeckich 8

## 10.5. Metoda charakterystyk

## 10.5.1. Wstęp

W niektórych procesach obróbki plastycznej jak i przy badaniu metali częste występuje zjawisko sieci linii o regularnym przebiegu. Linie takie zaobserwował Plobert w 1842r., a następnie W. Lüders w 1860r. na powierzchni zginanych próbek z miękkiej stali. W 1884r. D.K. Czernow zauważył podobne linie na próbkach rozciąganych i dookoła otworów przebijanych w podkładkach szyn kolejowych. Linie te szczegółowo zbadał i opisał Alfons Rzeszetarski, a następnie L. Hartmann w 1896r. Linie te tworzą ortogonalną sieć krzywych i są zawsze nachylone pod kątem  $45^{\circ}$  do kierunku naprężeń głównych, a więc przebiegają zgodnie z kierunkiem największych naprężeń stycznych. Zauważono, że wzdłuż tych charakterystycznych linii występuje wzajemne przesunięcie materiału i z tego powodu nazwano je liniami poślizgów.

Obrazem matematycznym zauważonych linii są równania różniczkowe zwyczajne zwane równaniami charakterystyk. Nazwa ich pochodzi od zastosowanej metody charakterystyk rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego. A więc linie te to charakterystyki, wzdłuż których spełnione są pewne zależności naprężeń i prędkości płynięcia. Dla płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia są one jednocześnie liniami największych naprężeń stycznych.

Rozwój metody charakterystyk dla stanów płaskich czyli rozwój teorii linii poślizgowych zawdzięczamy pracom B.de Saint-Venanta, L. Prandtl'a, H. Hencky'ego i A. Nadai'a. Dalszy rozwój tej teorii nastąpił dzięki pracom W.W. Sokołowskiego, A.A. Iliuszyna, R. Hilla i W. Pragera. Zastosowanie metody charaktery-

styk do analizy procesów obróbki plastycznej, przede wszystkim w zastosowaniu do kucia, walcowania, wyciskania i tłoczenia poświęcone były prace A.D. Tomlenowa, L.A. Szofmana, L.M. Kaczanowa, N.N. Malinina i W. Szczepińskiego.

Metoda charakterystyk stosowana jest do analizy rozkładu naprężeń i odkształceń oraz obliczania wielkości nacisków występujących w płaskich i osiowo-symetrycznych procesach obróbki plastycznej metali. Metoda charakterystyk jak i inne zagadnienia teorii plastyczności przyjmują model materiału sztywno-idealnie plastyczny znacznie odbiegający od materiału rzeczywistego.

L. Dietrich podjął pierwszą próbę uwzględnienia wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia.

Metoda charakterystyk rozwiązywania procesów obróbki plastycznej metali polegająca na numerycznym całkowaniu równań różniczkowych ma głównie zastosowanie do sprawdzenia dokładności metod inżynierskich jako przybliżonych ale powszechnie stosowanych w obliczeniach technologiczno-konstrukcyjnych.

Procesów obróbki plastycznej przebiegających w warunkach płaskiego stanu odkształcenia czy naprężenia jest wiele. Procesy obróbki plastycznej metali możemy podzielić na stacjonarne i na niestacjonarne.

Do procesów stacjonarnych, czyli procesów, w których stan naprężenia i odkształcenia nie zmienia się w czasie względem przyjętego nieruchomego układu współrzędnych należą: procesy przeciągania przez matrycę, walcowanie i wyciskanie prętów i tulejek. Są to procesy ciągłe. Odkształcenia występują tylko w niewielkim obszarze w sąsiedztwie roboczych powierzchni narzędzia. Poza tym obszarem materiał nie doznaje odkształceń plastycznych, a jedynie porusza się jako bryła sztywna. Wszystkie

cząstki materiału wchodzące w obszar odkształceń plastycznych w tym samym punkcie doznają jednakowych odkształceń i opuszczają ten obszar również w jednym punkcie (rys.10.93b). Rozwiązanie polega na wyznaczeniu stanu naprężenia i odkształcenia w każdym punkcie obszaru odkształcenia. Stany te zależne są tylko od położenia, a nie zależą od czasu.

Do procesów niestacjonarnych czyli procesów, w których stan naprężenia i odkształcenia zmienia się w czasie względem przyjętego układu współrzędnych należą: wciskanie płaskiego, kulistego czy stożkowego stempla w półprzestrzeń, przecinanie bloku materiału płaskim czy klinowym stemplem, prasowanie bloków, kucie w matrycach, wyciskanie mieszane. Analizę tych procesów należy prowadzić stopniowo, dzieląc cały proces na szereg etapów porządkowanych określonym położeniem narzędzia. Dla każdego etapu siatka linii poślizgu jak i hodograf będą miały inną postać. Analiza procesów niestacjonarnych jest trudna, szczególnie dla zaawansowanego stadium wyciskania. Często analizę procesu ograniczamy tylko do początkowej fazy płynięcia.

W metodzie charakterystyk posługujemy się modelem materiału sztywno-idealnie plastycznym. Model ten chociaż teoretycznie znacznie odbiega od materiału rzeczywistego, to jednak wyniki teoretyczne uzyskane na tym materiale są porównywalne z wynikami doświadczalnymi otrzymanymi z materiałów rzeczywistych. W technice spotyka się wiele materiałów o charakterystyce dość płaskiej dla dużych odkształceń. Szczególnie metale odkształcane na gorąco swoją charakterystyką znacznie zbliżone są do modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego.

## 10.5.2. Płaski stan odkształcenia

### 10.5.2.1. Wiadomości ogólne

Płaskim stanem odkształcenia materiału plastycznego nazywamy taki jego stan fizyczny, w którym przemieszczenia wszystkich cząstek są równoległe do jednej płaszczyzny np. płaszczyzny  $Oxy$ , której punkty mają współrzędne  $x, y$  (rys. 10.82). Ruch każdej cząstki materiału jest opisany przez składowe

$$v_x^l = v_x^l(x, y), \quad v_y^l = v_y^l(x, y), \quad v_z^l = 0, \quad (10.273)$$

które nie zależą od współrzędnej  $z$ . We wszystkich przekrojach prostopadłych do osi  $z$  stan naprężenia ( $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \sigma_z = \text{const.}$ ) i stan odkształcenia będzie taki sam.

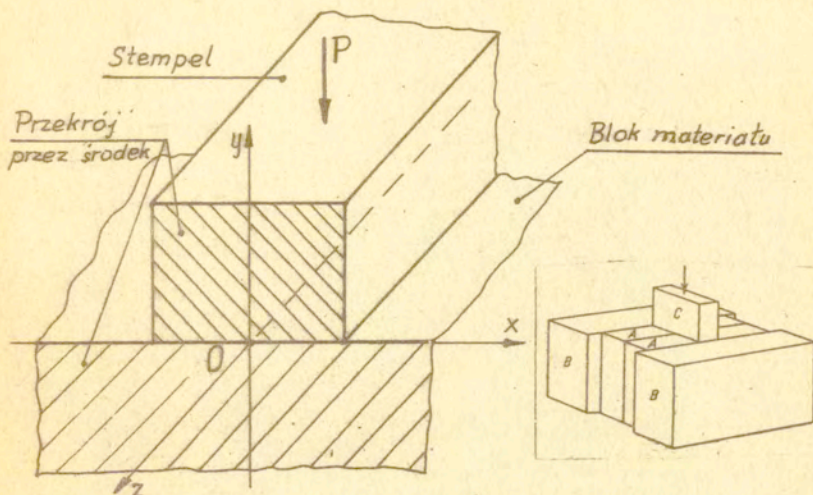
W każdym punkcie materiału należy wyznaczyć cztery składowe naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$  i dwie składowe prędkości płynięcia  $v_x^l, v_y^l$ . Składowe naprężenia  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{yz}$  są w tym stanie równe zero. Zagadnienie to najłatwiej rozwiązać dla ciała idealnie plastycznego bez wzmocnienia i izotropowego.

Równania ruchu dla zagadnień przebiegających w warunkach płaskiego stanu odkształcenia upraszczają się do postaci

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \left( \frac{\partial v_x^l}{\partial t} + \frac{\partial v_x^l}{\partial x} v_x^l + \frac{\partial v_x^l}{\partial y} v_y^l \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \left( \frac{\partial v_y^l}{\partial t} + \frac{\partial v_y^l}{\partial x} v_x^l + \frac{\partial v_y^l}{\partial y} v_y^l \right),$$

gdzie  $\rho = \frac{m}{V}$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] jest gęstością materiału.



Rys. 10.82. Ilustracja płaskiego stanu odkształcenia

Analityczne rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych (10.274) z uwzględnieniem sił bezwładności na obecnym etapie wiedzy jest nieosiągalne. Z drugiej strony w większości procesów obróbki plastycznej przyspieszenie cząstek materiału jest niewielkie i wpływ sił bezwładności może być pominięty. W procesach kształtowania impulsowego (np. wybuchowego) siły bezwładności cząstek materiału nie mogą być pominięte. Wobec tego zagadnienia obróbki plastycznej należy rozpatrywać jako quasi-statyczne (kwaśi - jakby, rzekomo) i wówczas różniczkowe równania ruchu przechodzą w różniczkowe równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (10.275)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zx} = 0$  i wobec ważności warunku nieści-

śliwości  $\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y$ . Z prawa plastycznego płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\tau_{xy}}, \quad (10.276)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x^p}{\partial x} = v_{x,x}^p$ ,  $\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y^p}{\partial y} = v_{y,y}^p$ ,  $\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x^p}{\partial y} + \frac{\partial v_y^p}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (v_{x,y}^p + v_{y,x}^p)$ ,  $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ,

i równości prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y$ , otrzymujemy  $\left( \frac{1}{\sigma_x - \sigma} = -\frac{1}{\sigma_y - \sigma} \right)$  naprężenie normalne  $\sigma_z$  w kierunku osi z

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (10.277)$$

Zależność naprężeń (10.277) jest podstawową zależnością dla płaskiego stanu odkształcenia. Wobec istnienia warunku  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  naprężenie  $\sigma_z$  jest naprężeniem głównym, co możemy zapisać  $\sigma_z^2 = \sigma_3^2$ .

Warunek plastyczności zarówno Treski jak i Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia ma postać

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (10.278)$$

gdzie  $k = \frac{\sigma_p}{2}$  dla warunku plastyczności Treski lub  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  dla warunku plastyczności Hubera-Misesa. Odwzorowaniem geometrycznym warunku (10.278) w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  jest nieskończenie długi walec o osi leżącej w płaszczyźnie  $\sigma_x \sigma_y$  i stanowiącej dwusieczną kąta pomiędzy osiami  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ . Wobec różnicy w wielkościach k wymiary walca dla warunku Hubera-Misesa są nieco większe niż dla warunku Treski. Dla obu warunków walce te będą jednak geometrycznie podobne. W osiach głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  warunek (10.278) przedstawia dwie proste oddalone od



siebie o wielkość  $2k\sqrt{2}$ .

Wobec tego, że dla płaskiego stanu odkształcenia warunków plastyczności Treski i Hubera-Misesa wyrażają się tym samym równaniem (10.278), to prawo plastycznego płynięcia stowarzyszone z tym warunkiem plastyczności, czyli związek między prędkościami płynięcia a naprężeniami ma również wspólną dla obu warunków postać

$$\frac{1}{\sigma_x - \sigma_y} \frac{\partial v_x^p}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_y - \sigma_x} \frac{\partial v_y^p}{\partial y} = \frac{1}{4\tau_{xy}} \left( \frac{\partial v_x^p}{\partial y} + \frac{\partial v_y^p}{\partial x} \right). \quad (10.279)$$

Do pełnego rozwiązania zagadnienia obróbki plastycznej, przebiegającego w płaskim stanie odkształcenia, dzięki zależności (10.277), należy wyznaczyć trzy składowe naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  oraz dwie składowe prędkości płynięcia  $v_x^p$  i  $v_y^p$ . Do wyznaczenia tych wielkości mamy: dwa równania równowagi (10.275), warunek plastyczności (10.278) oraz równanie fizyczne (10.279) i warunek nieściśliwości,  $\frac{\partial v_x^p}{\partial x} + \frac{\partial v_y^p}{\partial y} = 0$ . Dzięki temu, że w równaniach równowagi (10.275) i w warunku (10.278) nie występują prędkości płynięcia (10.273), a tworzą one układ trzech równań z trzema niewiadomymi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  i przy znanym statycznym warunku brzegowym można wyznaczyć osobno stan naprężenia w rozpatrywanym obszarze, a następnie wyznaczyć prędkości płynięcia i sprawdzić czy są one kinematycznie dopuszczalne.

### 10.5.2.2. Wyznaczenie stanu naprężenia

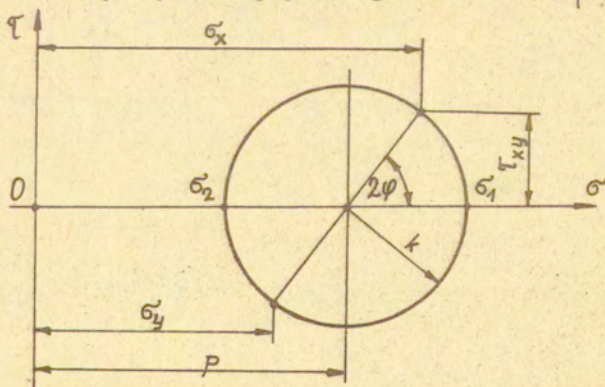
Wyznaczenie naprężeń w każdym punkcie zadania sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań (10.275) i (10.278). Układ ten rozwiązujemy przez podstawienie zależności na naprężenia (10.280), które tożsamościowo spełniają warunek plastyczności (10.278). Zależności te wynikają bezpośrednio z koła Mohra (rys.10.83) i mają postać

$$\begin{aligned}\sigma_x &= p + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= p - k \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi,\end{aligned}\tag{10.280}$$

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

$$k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Zależności (10.280) do rozwiązania układu równań (10.275) i (10.278) wprowadzają nowe niewiadome, a mianowicie: średnie naprężenie główne  $p$ , granicę plastyczności na ścinanie  $k$  oraz kąt  $\varphi$  jaki tworzy większe naprężenie główne z osią  $x$  (rys.10.84).

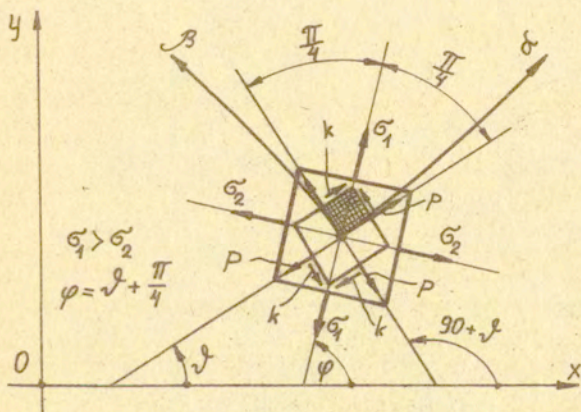


Rys.10.83. Koło Mohra dla płaskiego stanu odkształcenia

Jeśli chcemy poszukiwać linii naprężeń głównych, to w równaniach (10.280) powinien być kąt  $\varphi$ , a gdy chcemy poszukiwać linii maksymalnych naprężeń stycznych, to do równań (10.280) wprowadzamy kąt  $\vartheta$ , który jest zawarty między osią  $x$  i charakterystyką  $\alpha$ , za pomocą zależności  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \vartheta$  (rys.10.84). Wówczas równania (10.280) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \rho - k \sin 2\vartheta, \\ \sigma_y &= \rho + k \sin 2\vartheta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\vartheta, \\ \rho &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \end{aligned} \quad (10.281)$$

Zależności (10.281) po raz pierwszy zostały wprowadzone przez M. Levy'ego do wyeliminowania warunku plastyczności (10.278), które go spełniają tożsamościowo.



Rys.10.84. Umowa oznaczania naprężeń, kątów i charakterystyk

Różniczkując zależności (10.281) względem  $x$  (np.  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2k \cos 2\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -2k \sin 2\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ )

i względem  $y$  i wstawiając obliczone pochodne cząstkowe do równań równowagi (10.275) otrzymamy układ dwóch równań różniczkowo-

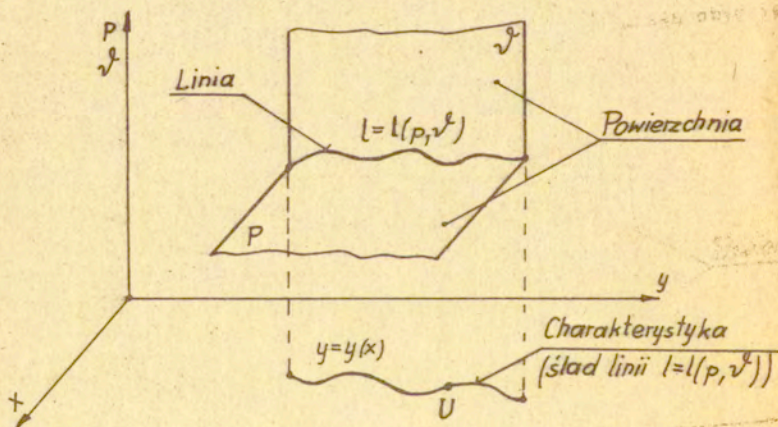
wych quasi-liniowych z dwiema poszukiwanymi funkcjami  $p$  i  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - 2k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} - 2k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.282)$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych (10.282) jest typu hiperbolicznego i może być rozwiązany metodą charakterystyk. Metoda ta polega na powiązaniu funkcji  $p$  i  $\varphi$  z linią zwaną charakterystyką i znalezieniu równania różniczkowego zwyczajnego na kierunku tej linii (charakterystyki).

Jeśli nad płaszczyznę  $xy$  mamy rozpięte funkcje  $p$  i  $\varphi$  tworzące powierzchnie przecinające się, to linia przecięcia tych powierzchni w przestrzeni  $l = l(p, \varphi)$  na płaszczyźnie  $xy$  daje ślad oznaczony tutaj przez  $y = y(x)$  będący poszukiwaną linią zwaną charakterystyką (rys.10.85).

Wszystkie punkty leżące na linii  $y = y(x)$  spełniają obydwie funkcje  $p$  i  $\varphi$ .



Rys. 10.85. Ilustracja metody charakterystyk

Jeśli wzdłuż linii  $y = y(x)$  pochodne cząstkowe funkcji  $p = p(x, y)$  i  $v = v(x, y)$  istnieją i są ciągłe, to mając rozwiązanie w punkcie  $U$  na linii, potrafimy również znaleźć rozwiązanie w jego otoczeniu (rys. 10.85). Funkcje  $p = p(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  dają nam dwa równania różniczkowe cząstkowe wiążące funkcje  $p$  i  $v$  z charakterystyką (linią  $y = y(x)$ )

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (10.283)$$

Równania (10.282) i (10.283) tworzą układ czterech równań różniczkowych cząstkowych o poszukiwanych pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

Aby rozwiązać układ równań różniczkowych cząstkowych (10.282) i (10.283) należy zbudować wyznacznik charakterystyczny utworzony ze współczynników przy pochodnych tego układu o kolejności kolumn  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2k \cos 2v & -2k \sin 2v \\ 0 & 1 & -2k \sin 2v & 2k \cos 2v \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = W. \quad (10.284)$$

Pochodne cząstkowe  $\frac{\partial p}{\partial x} \dots \frac{\partial v}{\partial y}$  są jednoznacznie określone wzdłuż linii  $y = y(x)$ , gdy wyznacznik charakterystyczny  $W \neq 0$ , w przeciwnym razie są one nieokreślone. Wartości tych pochodnych znajdziemy rozwiązując względem nich powyższy układ czterech

równań (np.  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{W_1}{W}$ ,  $W_1$  jest wartością wyznacznika (10.284), gdy w miejsca wyrazów kolumny  $\frac{\partial p}{\partial x}$  wchodzi wyrazy wolne układu czterech równań). Jeśli wyznacznik charakterystyczny  $W = 0$ , to rozwiązując go otrzymamy kwadratowe równanie różniczkowe zwyczajne na kierunki (cosinusy kierunkowe) linii nazywanych charakterystykami

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} 2ctg 2\vartheta - 1 = 0. \quad (10.285)$$

Linia zwana charakterystyką jest śladem, na płaszczyźnie  $xy$ , linii w przestrzeni, gdzie zachodzi rozwiązanie (rys.10.85). Wyróżnik równania kwadratowego (10.285) ( $\Delta = b^2 - 4ac = = 4ctg^2 2\vartheta + 4$ ,  $\sqrt{\Delta} = \frac{2}{\sin 2\vartheta}$ ) jest większy od zera, a zatem równanie (10.285) jest hiperboliczne i ma dwa pierwiastki rzeczywiste, znaczy to, że na płaszczyźnie  $xy$  są dwa kierunki charakterystyczne (jeśli  $\Delta = 0$ , to równanie (10.285) jest paraboliczne, a gdy  $\Delta < 0$ , to równanie (10.285) jest eliptyczne).

Równanie (10.285) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2ctg 2\vartheta \pm \frac{2}{\sin 2\vartheta}}{2},$$

a zatem

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= tg \vartheta && \text{na linii } \alpha, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 &= -ctg \vartheta && \text{na linii } \beta. \end{aligned} \quad (10.286)$$

Z geometrii analitycznej wiemy, że iloczyn  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1$ , znaczy to, że na płaszczyźnie  $xy$  kierunki charakterystyk są do siebie wzajemnie prostopadłe. A zatem równania (10.286) przedstawiają dwie rodziny charakterystyk  $\alpha$  i  $\beta$ , które są do siebie ortogonalne (rys.10.84).

Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione pewne zależności pomiędzy poszukiwanymi funkcjami  $p$  i  $v^l$ . Układ równań (10.282) nie zależy od osi współrzędnych, wobec tego układ współrzędnych  $x, y$  możemy obrócić tak, aby jego początek leżał w punkcie przecięcia charakterystyk i był do nich styczny, a ta sytuacja będzie wtedy, gdy  $v^l = 0$ . Kładąc  $v^l = 0$  w równaniu (10.282) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - 2k \frac{\partial v^l}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (p - 2k v^l) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} + 2k \frac{\partial v^l}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (p + 2k v^l) = 0. \end{aligned} \quad (10.287)$$

Całkując równania (10.287), pierwsze względem  $dx$ , drugie względem  $dy$ , otrzymamy zależności występujące na charakterystykach

$\alpha$  i  $\beta$

$$\begin{aligned} p - 2k v^l &= C_1, \\ p + 2k v^l &= C_2. \end{aligned} \quad (10.288)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe charakterystyk i związki zachodzące wzdłuż tych charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} v^l, \quad p - 2k v^l = C_1 \quad \text{dla linii } \alpha, \quad (10.289)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} v^l, \quad p + 2k v^l = C_2 \quad \text{dla linii } \beta.$$

Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych (10.282) zostało sprowadzone do całkowania zwyczajnych równań różniczkowych (10.289). Rozwiązanie równań różniczkowych charakterystyk (10.289) jest jednocześnie rozwiązaniem układu wyjściowego (10.282).

W teorii płaskiego stanu odkształcenia charakterystyki odgrywają zasadniczą rolę. Pozwalają one uzyskać efektywne rozwiązanie, a poza tym mają one znaczenie fizyczne. Nachylone są one pod kątem  $\pm \frac{\pi}{4}$  względem kierunków głównych określonych kątem  $\varphi$ . Kierunki charakterystyk są kierunkami działania maksymalnych naprężeń stycznych, charakterystyki zaś są liniami, na których naprężenia styczne są maksymalne. Linie największych naprężeń stycznych nazywane są liniami poślizgu, które można obserwować po odpowiednim trawieniu w odkształconym metalu. Mają one postać ciemnych pasm na powierzchni trawionej, a bieg tych linii bardzo dobrze pokrywa się z charakterystykami. Charakterystyki bowiem są tylko liniami wynikłymi z rozwiązania równania różniczkowego.

Jeśli układ współrzędnych  $xy$  (rys.10.84) obrócimy lokalnie do układu  $\alpha, \beta$ , wówczas kąt  $\varphi = 0$ , a naprężenia z podstawienia Levy'ego (10.281) mają wartości

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p, \\ \sigma_y &= p, \\ \tau_{xy} &= k. \end{aligned} \quad (10.290)$$

A zatem naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y$  są sobie równe i równe średniemu naprężeniu  $p$ , naprężenie styczne  $\tau_{xy}$  jest równe granicy plastyczności na ścinanie  $k$ . Biorąc związki Levy-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\dot{\epsilon}_x = \frac{\lambda}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ ,  $\dot{\epsilon}_y = \frac{\lambda}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$ ,  $\dot{\epsilon}_{xy} = \lambda \tau_{xy}$ ) w obróconym układzie  $\alpha, \beta$  po wykorzystaniu zależności (10.290) otrzymamy prędkości odkształcenia

$$\dot{\epsilon}_\alpha = 0, \quad \dot{\epsilon}_\beta = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \lambda k, \quad (10.291)$$

które mówią, że charakterystyki  $\alpha, \beta$  się nie wydłużają, a wzdłuż nich zachodzi ścinanie. Stąd też twierdzimy, że charakte-



rystyki  $\alpha, \beta$  są liniami poślizgu, gdyż wzdłuż nich zachodzi ścinanie.

Linie poślizgu nazywane są trajektoriami maksymalnych naprężeń stycznych. Przy założeniu, że  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  maksymalne naprężenie styczne ma wartość

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k. \quad (10.292)$$

Charakterystyki  $\alpha$  i  $\beta$  nachylone są pod kątem  $\pm \frac{\pi}{4}$  do kierunku naprężenia głównego  $\sigma_1$  określonego kątem  $\varphi$  (rys.10.84).

Wyznaczenie stanu naprężenia w konkretnych przypadkach polega na kolejnym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych typu Cauchy'ego, zagadnień charakterystycznych oraz mieszanych.

#### 10.5.2.3. Wyznaczenie prędkości płynięcia

Po wyznaczeniu stanu naprężeń w rozpatrywanym obszarze należy wyznaczyć prędkości płynięcia i sprawdzić czy siatka linii poślizgu jest kinematycznie dopuszczalna. Gdy siatka linii poślizgu jest kinematycznie niedopuszczalna, to takie rozwiązanie jest niepoprawne.

Równania różniczkowe charakterystyk i równania związków prędkości po charakterystykach otrzymamy rozwiązując układ równań składający się z: prawa plastycznego płynięcia, warunku nieściśliwości i dwóch równań różniczkowych cząstkowych wiążących funkcje prędkości  $v_x^p = v_x^p(x, y)$ ,  $v_y^p = v_y^p(x, y)$  z charakterystykami. Prawo płynięcia (10.279) można napisać w postaci

$$\left( \frac{\partial v_x^p}{\partial y} + \frac{\partial v_y^p}{\partial x} \right) (\sigma_x - \sigma_y) - 4 \frac{\partial v_x^p}{\partial x} \tau_{xy} = 0,$$

a po wykorzystaniu podstawienia Levy'ego (10.281) spełniającego

Łącząc warunek plastyczności (10.278) i zależności  
 $2 \frac{\partial v_x^e}{\partial x} = \frac{\partial v_x^e}{\partial x} - \frac{\partial v_y^e}{\partial y}$  wynikającej z warunku nieściśliwości  
 $\frac{\partial v_x^e}{\partial x} + \frac{\partial v_y^e}{\partial y} = 0$  ( $\frac{\partial v_y^e}{\partial y} = -\frac{\partial v_x^e}{\partial x}$ ) będzie ono miało postać

$$\left( \frac{\partial v_x^e}{\partial y} + \frac{\partial v_y^e}{\partial x} \right) (-2k \sin 2\vartheta) - 2k \cos 2\vartheta \left( \frac{\partial v_x^e}{\partial x} - \frac{\partial v_y^e}{\partial y} \right) = 0. \quad (10.293)$$

A zatem, aby wyznaczyć prędkości płynięcia ośrodka plastycznego należy rozwiązać następujący układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$-2k \cos 2\vartheta \frac{\partial v_x^e}{\partial x} - 2k \sin 2\vartheta \frac{\partial v_x^e}{\partial y} - 2k \sin 2\vartheta \frac{\partial v_y^e}{\partial x} + 2k \cos 2\vartheta \frac{\partial v_y^e}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x^e}{\partial x} + \frac{\partial v_y^e}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x^e}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x^e}{\partial y} dy = d v_x^e, \quad (10.294)$$

$$\frac{\partial v_y^e}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y^e}{\partial y} dy = d v_y^e.$$

Układ równań (10.294)<sub>1,2</sub> jest typu hiperbolicznego i może być rozwiązany metodą charakterystyk. Po dołączeniu do niego zależności (10.294)<sub>3,4</sub> tworzymy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników przy pochodnych cząstkowych o kolejności kolumn

$$\frac{\partial v_x^e}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x^e}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_y^e}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y^e}{\partial y}$$

$$\begin{vmatrix} -\cos 2\vartheta & -\sin 2\vartheta & -\sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = W. \quad (10.295)$$

Po obliczeniu wyznacznika  $W$  (10.295) i przyrównaniu jego do zera, otrzymujemy kwadratowe równanie różniczkowe zwyczajne na kierunku linii

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin 2\vartheta - 2 \frac{dy}{dx} \cos 2\vartheta + \sin 2\vartheta = 0,$$

które po rozwiązaniu daje dwa rzeczywiste pierwiastki

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= \operatorname{tg} \vartheta, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 &= -\operatorname{ctg} \vartheta. \end{aligned} \quad (10.296)$$

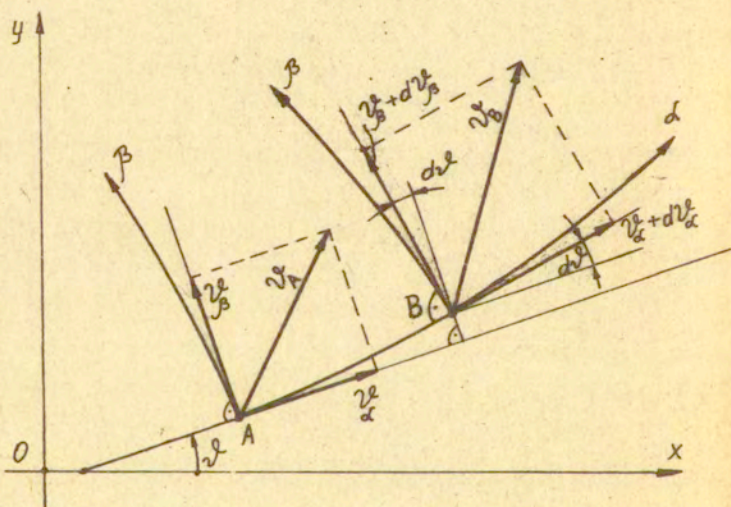
Równania (10.296) są równaniami różniczkowymi charakterystyk dla prędkości, które są takie same jak dla stanu naprężeń (10.286). Z tego wypływa bardzo ważny wniosek, że jeśli znamy siatkę linii poślizgu, to do rozwiązania zadania wystarczy znaleźć prędkości płynięcia  $v_x^e$  i  $v_y^e$  na liniach poślizgu.

Jeśli do równania (10.293) wstawimy kąt  $\vartheta = 0$ , czyli układ współrzędnych  $x, y$  obrócimy do układu  $\alpha, \beta$ , to otrzymamy zależność  $-\frac{\partial v_x^e}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_y^e}{\partial \beta} = 0$ , która w połączeniu z warunkiem nieściśliwości  $\frac{\partial v_x^e}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_y^e}{\partial \beta} = 0$ , daje związki zachodzące wzdłuż charakterystyki  $\alpha$  i  $\beta$ .

$$\frac{\partial v_{\alpha}^2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_{\beta}^2}{\partial \beta} = 0 \quad (10.297)$$

mówiące, że charakterystyki się nie wydłużają (długość charakterystyk nie ulega zmianie). Jest to ich bardzo ważna własność fizyczna.

Związki prędkości zachodzące wzdłuż charakterystyk znajdziemy, jeśli rozważymy prędkości płynięcia występujące w punkcie A i w punkcie B na charakterystyce  $\alpha$  (rys.10.86). Przyjmujemy, że odległość między punktami A i B jest mała, to i przyrost kąta  $d\psi$  jest bardzo mały. Kąt nachylenia linii przy przejściu od punktu A do punktu B zmienił się o wielkość  $d\psi$  a prędkości płynięcia w punkcie B wzrosły o wielkość  $dv_{\alpha}^2$  i  $dv_{\beta}^2$ .



Rys.10.86. Szkic do wyprowadzenia związków prędkości wzdłuż charakterystyk

Rzutuąc składowe prędkości w punkcie A i B na kierunek  $v_{\alpha}^2$  styczny do charakterystyki  $\alpha$  w punkcie A, znajdziemy przyrost

prędkości w punkcie B, inaczej mówiąc znajdziemy zmianę prędkości płynięcia między punktem A i B

$$v_{\alpha} = (v_{\alpha} + dv_{\alpha}) \cos d\vartheta - (v_{\beta} + dv_{\beta}) \sin d\vartheta.$$

Po redukcji i odrzuceniu małych wyższego rzędu ( $\cos d\vartheta \cong 1$ ,  $\sin d\vartheta \cong d\vartheta$ ,  $dv_{\beta} d\vartheta = 0$ ), otrzymamy przyrost prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyki  $\alpha$  od punktu A do punktu B

$$dv_{\alpha} - v_{\beta} d\vartheta = 0. \quad (10.298a)$$

Podobnie rzutując na kierunek  $v_{\beta}$

$$v_{\beta} = (v_{\beta} + dv_{\beta}) \cos d\vartheta + (v_{\alpha} + dv_{\alpha}) \sin d\vartheta;$$

otrzymamy zmianę prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyki  $\beta$

$$dv_{\beta} + v_{\alpha} d\vartheta = 0. \quad (10.298b)$$

Związki (10.298) jakie zachodzą wzdłuż charakterystyk dla prędkości zostały podane przez H. Gieringer w 1930r. Dla prostoliniowej siatki charakterystyk, gdzie przyrost kąta  $d\vartheta = 0$ , równania zgodności prędkości (10.298) mają postać

$$dv_{\alpha} = 0, \quad dv_{\beta} = 0. \quad (10.299)$$

Ostatecznie równania różniczkowe charakterystyk i związki zgodności prędkości wzdłuż charakterystyk można napisać

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad dv_{\alpha} - v_{\beta} d\vartheta = 0 \text{ dla linii } \alpha, \\ \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \vartheta, \quad dv_{\beta} + v_{\alpha} d\vartheta = 0 \text{ dla linii } \beta. \end{aligned} \quad (10.300)$$

Wyznaczenie prędkości płynięcia w konkretnych przypadkach polega na kolejnym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych. Podobnie

jak dla naprężeń mamy tu zagadnienia typu Cauchy'ego, zagadnienia charakterystyczne oraz mieszane.

Zadanie będzie poprawnie rozwiązane, jeśli moc dysypowana (rozproszona) w każdym punkcie ciała odkształcanego nie będzie ujemna

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0. \quad (10.301)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia moc dysypowaną można zapisać

$$D = \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} \geq 0, \quad (10.302a)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ ,  $\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$ ,  $\sigma_{xy} = \pm k$ .

W osiach głównych jest ona równa

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 \geq 0. \quad (10.302b)$$

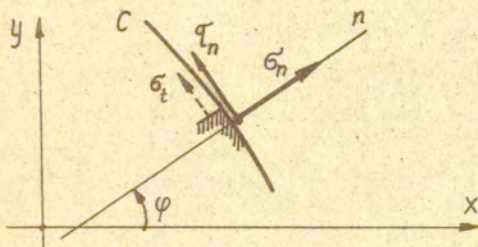
Moc dysypowana jest dodatnia wtedy, gdy idziemy po linii prądu (linią prądu nazywamy taką linię, do której wektory prędkości są styczne) długość wektora prędkości będzie rosła, czyli jego przyrost będzie dodatni,  $\frac{\partial v}{\partial s} > 0$ .

#### 10.5.2.4. Zagadnienia brzegowe

Przy rozwiązywaniu zagadnień plastycznego płynięcia metodą charakterystyk spotykamy się z warunkiem brzegowym typu statycznego i kinematycznego oraz zagadnieniami na wartości brzegowe typu Cauchy'ego, typu charakterystycznego i typu mieszanego.

### 1. Warunki brzegowe dla naprężeń

Na powierzchni (brzegu) swobodnej odkształcanego materiału mamy znane naprężenia (są one równe zero), prędkości płynięcia nie są znane. Taki warunek brzegowy nazywamy statycznym lub naprężeniowym. Weźmy zatem brzeg C w układzie współrzędnych  $x, y$  wolny od obciążeń,  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau_n = 0$  (rys.10.87).



Rys.10.87. Warunek brzegowy dla naprężeń

Tuż pod powierzchnią C występują naprężenia normalne i styczne, które można określić ze wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{10.303a}$$

Podstawiając do nich zależności (10.281) przyjmują one postać

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \rho - k \sin 2(\vartheta - \varphi), \\ \tau_n &= k \sin 2(\vartheta - \varphi).\end{aligned}\tag{10.303b}$$

Jeśli naprężenie styczne  $\tau_n = 0$ , to kąt  $\vartheta = \varphi \pm \frac{\pi}{4} + m\pi$  ( $m = 0$ , to jest pierwsza ćwiartka), wówczas  $\rho = \sigma_n + k \sin 2(\vartheta - \varphi) = \sigma_n \pm k$ . Jeśli naprężenia na brzegu pokrywają się z kierunkami głównymi, to kąt  $\varphi = 0$ , a kąt pochylenia charakterystyk  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$ . Gdy naprężenie normalne  $\sigma_n = 0$ , to naprężenie średnie  $\rho = k \sin 2(\vartheta - \varphi) = k \sin 2(\varphi \pm \frac{\pi}{4} - \varphi) = \pm k$ ,

a naprężenie wzdłużne  $\sigma_t = \pm 2k$  ( $\rho = \frac{\sigma_n + \sigma_t}{2} = \frac{\sigma_t}{2}$ ).

Znak "+" lub "-" bierzemy zgodnie z sensem fizycznym zadania.

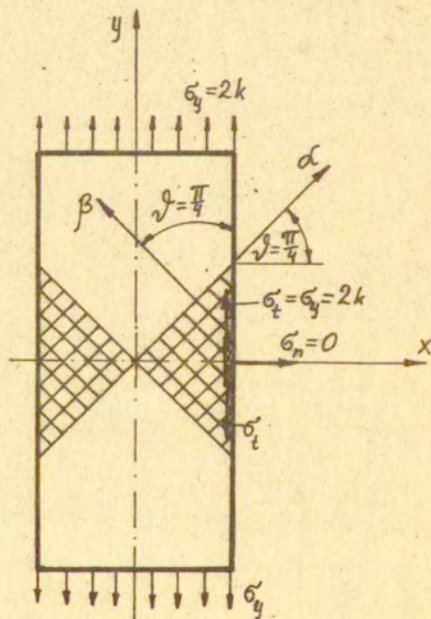
Dla przypadku jednoosiowego rozciągania (rys.10.88) kierunki  $x, y$  są główne. Na powierzchni próbki naprężenie normalne  $\sigma_n$

i naprężenie styczne  $\tau_n$  z założenia są równe zeru,  $\sigma_n = 0,$

$\tau_n = 0$ . Kąt pochylenia naprężenia głównego do osi  $x$  jest równy zeru,  $\varphi = 0$ . Z poprzedniego wyводу kąt  $\psi$  podejścia charakterystyki  $\alpha$  do brzegu równa się  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\psi = \frac{\pi}{4}$ , a to dowodzi,

że charakterystyki są prostoliniowe, bo  $\psi = \text{const}$ . Biorąc pod uwagę rysunek 10.84 określamy kierunki charakterystyk dla prostego rozciągania (rys.10.88). Na brzegu próbki rozciąganej musi być spełniony warunek plastyczności  $\sigma_y - \sigma_x = 2k$ , stąd

$\sigma_y = \sigma_t = 2k$ , gdyż  $\sigma_x = \sigma_n = 0$ .



Rys.10.88. Warunki brzegowe dla jednoosiowego rozciągania



## 2. Warunki brzegowe dla prędkości płynięcia

Istnieje cały szereg przypadków plastycznego płynięcia, dla których nie można ustalić warunku brzegowego typu statycznego, można natomiast ustalić warunek brzegowy dla prędkości. Na linii styku metalu ze stemplem nie znamy rozkładu naprężeń normalnych, ale znamy normalną składową prędkości równą prędkości ruchu narzędzia  $v_0$ . W wielu procesach obróbki plastycznej metali znamy prędkość wpływu metalu z matrycy. Jest to warunek brzegowy kinematyczny.

## 3. Zagadnienie Cauchy'ego

Przy analizowaniu procesów technologicznych obróbki plastycznej metali często zachodzi konieczność określania wartości naprężeń na swobodnym brzegu. Jednym ze znanych sposobów jest metoda Cauchy'ego.

Założmy, że na nieobciążonym brzegu AB (rys.10.89) rozpatrywanego obszaru w płaszczyźnie  $xy$  dane są w każdym punkcie naprężenia normalne  $\sigma_n$  i styczne  $\tau_n$ . Naprężenie styczne  $\tau_n$  w praktyce najczęściej jest równe zeru. Jeśli materiał znajduje się w stanie plastycznym, to z warunku plastyczności (10.278) można wyznaczyć naprężenie  $\sigma_t$  działające w przekroju prostopadłym do AB

$$\sigma_t = \sigma_n \pm 2k .$$

Znak wybiera się zgodnie z sensem fizycznym zadania.

Zadanie Cauchy'ego polega na tym, że jeśli na brzegu AB nie będącym charakterystyką znane są wszystkie funkcje: naprężenie średnie  $p = \frac{\sigma_n + \sigma_t}{2}$ , kąt  $\psi$  między charakterystyką  $\mathcal{A}$  a osią  $x$ , współrzędne punktów na brzegu AB  $x, y$  oraz ich pochodne, to można wyznaczyć stan naprężenia przy brzegu ograniczonym charakterysty-



charakterystyce  $\alpha$  mamy różnicę współrzędnych tego punktu

$$y_M - y_2 = (x_M - x_2) \operatorname{tg} \nu_2^l, \quad (10.304a)$$

a idąc po charakterystyce  $\beta$  mamy

$$y_M - y_1 = -(x_M - x_1) \operatorname{ctg} \nu_1^l. \quad (10.304b)$$

Z rozwiązania tych równań znajdujemy współrzędne  $x_M, y_M$  punktu M, gdyż  $x_1, x_2, y_1, y_2$  oraz kąty  $\nu_1^l$  i  $\nu_2^l$  są znane.

Po wyznaczeniu współrzędnych  $x_M, y_M$  punktu M wyznaczamy stan naprężenia w punkcie M z zależności na charakterystykach (10.288):

- wzdłuż linii  $\alpha$ ;  $P_M - 2k\nu_M^l = C_1, P_2 - 2k\nu_2^l = C_1,$

- wzdłuż linii  $\beta$ ;  $P_M + 2k\nu_M^l = C_2, P_1 + 2k\nu_1^l = C_2.$

Przyrównując do siebie

$$P_M - 2k\nu_M^l = P_2 - 2k\nu_2^l,$$

$$P_M + 2k\nu_M^l = P_1 + 2k\nu_1^l$$

oraz odejmując i następnie dodając stronami otrzymamy

$$\nu_M^l = \frac{\nu_2^l + \nu_1^l}{2} + \frac{P_1 - P_2}{4k}, \quad (10.305)$$

$$P_M = \frac{P_1 + P_2}{2} - k(\nu_2^l - \nu_1^l).$$

Czyli w punkcie M mamy naprężenie  $p_M$  i kąt  $\nu_M^l$ .

Po wyznaczeniu wszystkich wartości w punkcie M ( $x_M, y_M, p_M, \nu_M^l$ )

w celu zwiększenia dokładności obliczenia, następnie należy

przyjąć zamiast kąta

$$\nu_1^l = \frac{\nu_1^l + \nu_M^l}{2},$$

$$\nu_2^l = \frac{\nu_2^l + \nu_M^l}{2}$$

i ponownie przeprowadzić obliczenie położenia punktu M. Jeśli otrzymamy w drugim przybliżeniu wartości  $x_M$ ,  $y_M$  bliskie wartościom poprzedniego przybliżenia, to obliczenia przerywamy. W praktyce wystarcza obliczenie drugiego przybliżenia.

Postępując podobnie możemy wyznaczyć położenie punktu N i wszystkich innych punktów sąsiadujących z linią AB. Do wyznaczenia punktu P bierzemy wartości w punktach M i N i korzystamy z tych samych wzorów, które mają charakter wzorów rekurencyjnych.

Jeśli brzeg AB jest prostoliniowy i jest wolny od obciążeń zewnętrznych, to w polu ABC mamy jednorodny stan naprężenia, a siatka linii poślizgu składa się z dwóch rodzin linii prostych przecinających brzeg pod kątem  $\frac{\pi}{4}$ .

Aby wyznaczyć składowe prędkości płynięcia w węzłach siatki charakterystyk (rys.10.89) zakładamy, że na brzegu AB znamy składowe prędkości  $v_\alpha^e$  i  $v_\beta^e$  (lub  $v_x^e$  i  $v_y^e$ ). Składowe prędkości w punkcie M obliczamy numerycznie z równań (10.298) zastępując różniczkami różnicami skończonymi idąc do punktu M po charakterystyce  $\alpha$  i po charakterystyce  $\beta$

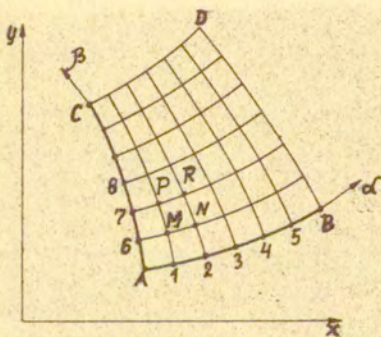
$$\begin{aligned} v_{\alpha M}^e - v_{\alpha 2}^e - \frac{1}{2}(v_{\beta M}^e + v_{\beta 2}^e)(v_M^e - v_2^e) &= 0, \\ v_{\beta M}^e - v_{\beta 1}^e + \frac{1}{2}(v_{\alpha M}^e + v_{\alpha 1}^e)(v_M^e - v_1^e) &= 0. \end{aligned} \quad (10.306)$$

Dla zwiększenia dokładności obliczeń przyjęto średnią wartość prędkości między punktami 1-M i 2-M. Wszystkie wartości oprócz  $v_{\alpha M}^e$  i  $v_{\beta M}^e$  są znane.

Po obliczeniu składowych prędkości w węzłach siatki przy brzegu AB, w dalszych punktach siatki charakterystyk składowe prędkości obliczamy analogicznie do sposobu wyżej opisanego.

#### 4. Zagadnienie charakterystyczne

Zagadnienie charakterystyczne polega na tym, że jeśli mamy dwie charakterystyki AC i AB należące do różnych rodzin, na których dane są wszystkie wartości współrzędnych  $x, y$  przyjętych punktów, kąt  $\psi$  i funkcję  $p$  i jeżeli są one ciągłe i różniczkowalne, to pozwalają na wyznaczenie pola charakterystyk w całym czworokącie krzywoliniowym ABDC ograniczonym przez dwie pary charakterystyk z różnych rodzin. Obliczenia numeryczne przeprowadza się za pomocą tych samych wzorów rekurencyjnych co i w zagadnieniu Cauchy'ego. Po obraniu szeregu punktów wyjściowych na charakterystykach i określeniu ich współrzędnych (rys.10.90) obliczamy wszystkie wartości w punkcie M, następnie w punkcie N i P. Mając dane wszystkie wartości w punktach P i N możemy obliczyć wszystkie wartości w punkcie R. Postępując podobnie wyznaczmy wszystkie punkty pola charakterystyk zawarte w obszarze ABDC.

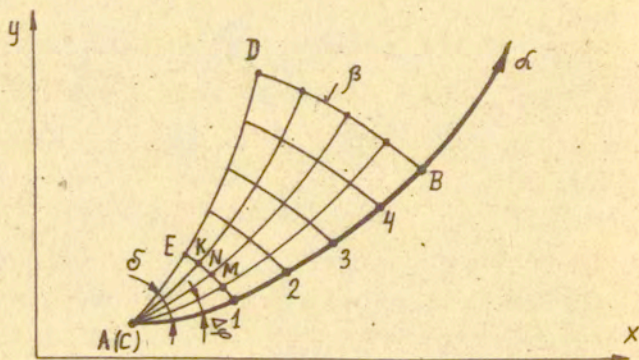


Rys.10.90. Schemat brzegowego zagadnienia charakterystycznego

Jeśli wzdłuż łuków AB i AC dane są składowe prędkości  $v_\alpha^x$ ,  $v_\beta^y$ , to we wszystkich węzłach siatki czworoboku krzywoliniowego ABDC można obliczyć składowe prędkości płynięcia ze związków

prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyk (10.298). Obliczenia prędkości płynięcia przeprowadzamy analogicznie jak naprężenia z zagadnienia brzegowego charakterystycznego.

Odmianą zagadnienia charakterystycznego jest zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne (rys.10.91). Przykładem zagadnienia zdegenerowanego jest siatka biegunowa BCD przy wciskaniu płaskiego stempla w półprzestrzeń (rys.10.94). Charakterystyka  $\beta$  zeszyła do punktu A (punkt C jest w punkcie A), a kąt prosty przeszedł w skończoną wartość kąta  $\mathcal{S}$ . W punkcie A mamy znane współrzędne  $x, y$ , kąt  $\mathcal{V}$  i naprężenie  $p$ . Na charakterystyce AB ( $\alpha$ ) znamy wszystkie wartości: współrzędne założonych punktów, kąty  $\mathcal{V}$  i naprężenia średnie  $p$ .



Rys.10.91. Schemat zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego

Siatkę charakterystyk w obszarze ABD (rys.10.91) wyznaczamy rozpoczynając od równomiernego podziału kąta  $\mathcal{S}$  na jednakowe małe kąty  $\Delta\mathcal{S}$ . Obrany punkt 1 na charakterystyce  $\alpha$  w pobliżu punktu A pozwala wyznaczyć wartości punktu M. Z pierwszej zasady Hencky'ego wynika od razu wartość kąta w punkcie M

$$\nu_M^{\ell} = \nu_1^{\ell} + \Delta \delta.$$

Współrzędne punktu M ( $x_M, y_M$ ) obliczymy ze wzorów: idąc po charakterystyce  $\beta$  —  $y_M - y_1 = -(x_M - x_1) \operatorname{ctg} \nu_1^{\ell}$ , idąc po charakterystyce  $\alpha$  —  $y_M - y_A = (x_M - x_A) \operatorname{tg} \nu_{AM}^{\ell}$ , gdzie kąt  $\nu_{AM}^{\ell} = \nu_A^{\ell} + \Delta \delta$ .

Wartość naprężenia p w punkcie M wyznaczmy z zależności na charakterystyce  $\beta$  (odcinek 1-M) ( $P_M + 2k\nu_M^{\ell} = C_2$ ,  $P_1 + 2k\nu_1^{\ell} = C_2$ )

$$P_M = P_1 - 2k(\nu_M^{\ell} - \nu_1^{\ell}). \quad (10.307)$$

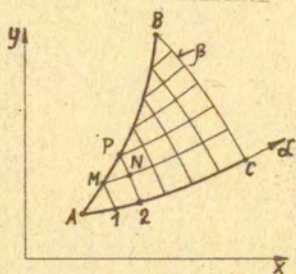
Mając wyznaczony punkt M możemy wyznaczyć punkt N przyjmując, że w punkcie M znane są wszystkie wartości. Kąt  $\nu_{AN}^{\ell} = \nu_A^{\ell} + 2\Delta \delta$ , a przy obliczaniu punktu K, kąt  $\nu_{AK}^{\ell} = \nu_A^{\ell} + 3\Delta \delta$  i tak dalej.

W ten sposób wyznaczmy cały łuk 1-E. W punkcie A zmienia się wartość kąta  $\nu^{\ell}$  i wartość naprężenia p, współrzędne  $x_A$  i  $y_A$  są stałe. W punkcie A kąt  $\nu^{\ell}$  zmienia się o kąt  $\delta$ . A zatem na linii AB (linia  $\alpha$ ) mamy:  $P_A - 2k\nu_A^{\ell} = C_1$ , a na linii AD (linia  $\alpha$ ) mamy  $P_A - 2k(\nu_A^{\ell} + \delta) = C_1$ . Punkt A jest punktem osobliwym.

Obliczone wszystkie wartości na łuku 1-E będącym charakterystyką  $\beta$  i dane wyjściowe na łuku AB (linia  $\alpha$ ) tworzą już zagadnienie charakterystyczne. Dalej postępując analogicznie jak w zagadnieniu charakterystycznym wyznaczmy pole charakterystyk w całym krzywoliniowym trójkącie ABD.

## 5. Zagadnienie mieszane

Zagadnienie mieszane to jest takie zagadnienie brzegowe, w którym mamy brzeg AB nie będący charakterystyką i jedną charakterystykę np. rodziny  $\alpha$  przecinającą brzeg AB w punkcie A (rys.10.92).



Rys.10.92. Schemat mieszanego zagadnienia brzegowego

Na odcinku AC charakterystyki  $\alpha$  mamy dane wszystkie wartości  $p$ ,  $v^l$  oraz współrzędne  $x, y$  założonych punktów, natomiast na brzegu AB o równaniu  $y = y(x)$  znamy tylko kąt  $v^l$ . Dane te wystarczą do wyznaczenia wielkości poszukiwanych w całym krzywoliniowym trójkącie ABC.

Po obraniu punktu 1 na charakterystyce  $\alpha$  możemy obliczyć naprężenie  $p$  poszukiwanego punktu M z równania

$$P_M = P_1 - 2k(v_M^l - v_1^l). \quad (10.308)$$

Współrzędne punktu M obliczamy ze wzoru

$$y_M - y_1 = -(x_M - x_1) \operatorname{ctg}\left(\frac{v_M^l + v_1^l}{2}\right) \quad (10.309)$$

oraz równania brzegu AB

$$y = y(x), \quad (10.310)$$

które muszą spełniać współrzędne punktu M,  $x_M$ ,  $y_M$ .

Następnie z zagadnienia charakterystycznego wyznaczamy punkt N i dalej podobnie punkt P. Postępując podobnie do sposobu opi-



sanego wyznaczmy siatkę charakterystyk w całym krzywoliniowym trójkącie ABC.

Jeśli wzdłuż brzegu AB dany jest związek prędkości  $f(v_{\alpha}^l, v_{\beta}^l) = 0$ , a wzdłuż linii  $\alpha$  (łuk AC) dana jest tylko składowa normalna  $v_{\beta}^l$ , to możemy znaleźć prędkości w całym krzywoliniowym trójkącie ABC. Prędkości w punkcie M znajdujemy ze związku (10.298b)

$$v_{\beta M}^l - v_{\beta 1}^l + \frac{1}{2}(v_{\beta M}^l + v_{\beta 1}^l)(v_M^l - v_1^l) = 0 \quad (10.311)$$

i równania prędkości na brzegu AB

$$f(v_{\alpha M}^l, v_{\beta M}^l) = 0. \quad (10.312)$$

W równaniach tych oprócz  $v_{\alpha M}^l, v_{\beta M}^l$  pozostałe wielkości są znane. W punktach nie leżących na brzegu AB obliczenia przeprowadzamy jak w zagadnieniu charakterystycznym.

### 10.5.3. Procesy płaskiego stanu odkształcenia

#### 10.5.3.1. Wprowadzenie

W wielu procesach obróbki plastycznej metali odkształcenia zachodzą jedynie w dwóch kierunkach. Przy walcowaniu cienkich blach, długość walcowanej blachy zwiększa się kosztem jej grubości, natomiast szerokość nie ulega zmianie. Podobnie przy walcowaniu prętów w zamkniętych profilach występuje wzrost długości kosztem grubości, gdyż szerokość jest ograniczona ściankami wykroju. Płaski stan odkształcenia występuje również w procesach kucia płaskowników i prostopadłościennych kostek.

W procesach płaskiego stanu odkształcenia jedna składowa odkształcenia jest równa zero. Zgodnie z prawem stałej objętości

$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ , gdy odkształcenie w kierunku szerokości  $\varphi_2 = \ln \frac{b_1}{b_0} = 0$ , odkształcenie wzdłużne  $\varphi_1 = \ln \frac{L_1}{L_0}$  jest równe co do wartości odkształceniu w kierunku grubości  $\varphi_3 = \ln \frac{g}{g_0}$  lecz ze znakiem przeciwnym,  $\varphi_1 = -\varphi_3$ .

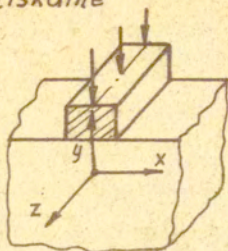
Na rysunku 10.93 przykładowo pokazano niektóre typowe procesy przebiegające w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Sposób podejścia do otrzymania rozwiązania procesów obróbki plastycznej metali przebiegających w warunkach płaskiego odkształcenia zostanie podany na typowym procesie wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń. Inne ważne dla praktyki procesy zostaną tylko ogólnie omówione z uwypukleniem wyniku analizy przydatnego w obliczeniach technologicznych.

#### 10.5.3.2. Wciskanie płaskiego stempla w półprzestrzeń

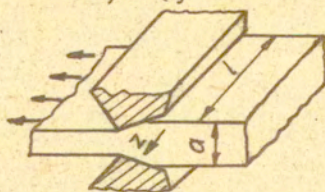
Rozpatrzmy wciskanie płaskiego, nieodkształcalnego i o idealnie gładkiej powierzchni czołowej stempla w ośrodek plastyczny o dużych wymiarach. Dla zrealizowania płaskiego stanu odkształcenia stempel musi być nieskończenie długi w kierunku prostopadłym do rysunku 10.94a. Szerokość stempla niech wynosi  $2b$ . Założona gładkość czołowej powierzchni stempla stwarza warunki braku tarcia na powierzchni styku stempla z materiałem.

Wciskanie stempla w półprzestrzeń jest zagadnieniem, gdzie są znane warunki brzegowe typu statycznego i kinematycznego. Pod stemplem nie znany jest rozkład naprężeń normalnych, ale znana jest składowa normalna prędkości  $v_n^p$  równa prędkości

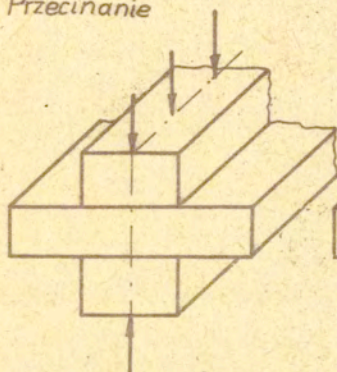
a) Wciskanie



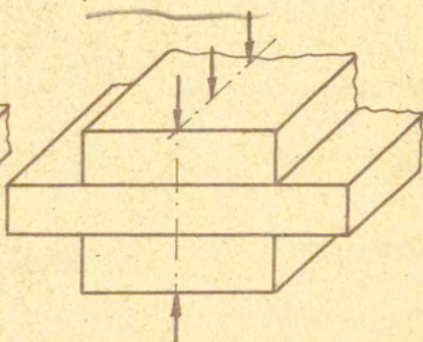
b) Ciągnienie



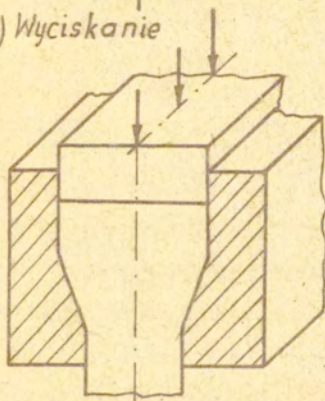
c) Przekinanie



d) Prasowanie



e) Wyciskanie



f) Rozciąganie



Rys. 10.93. Przykłady procesów przebiegających w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

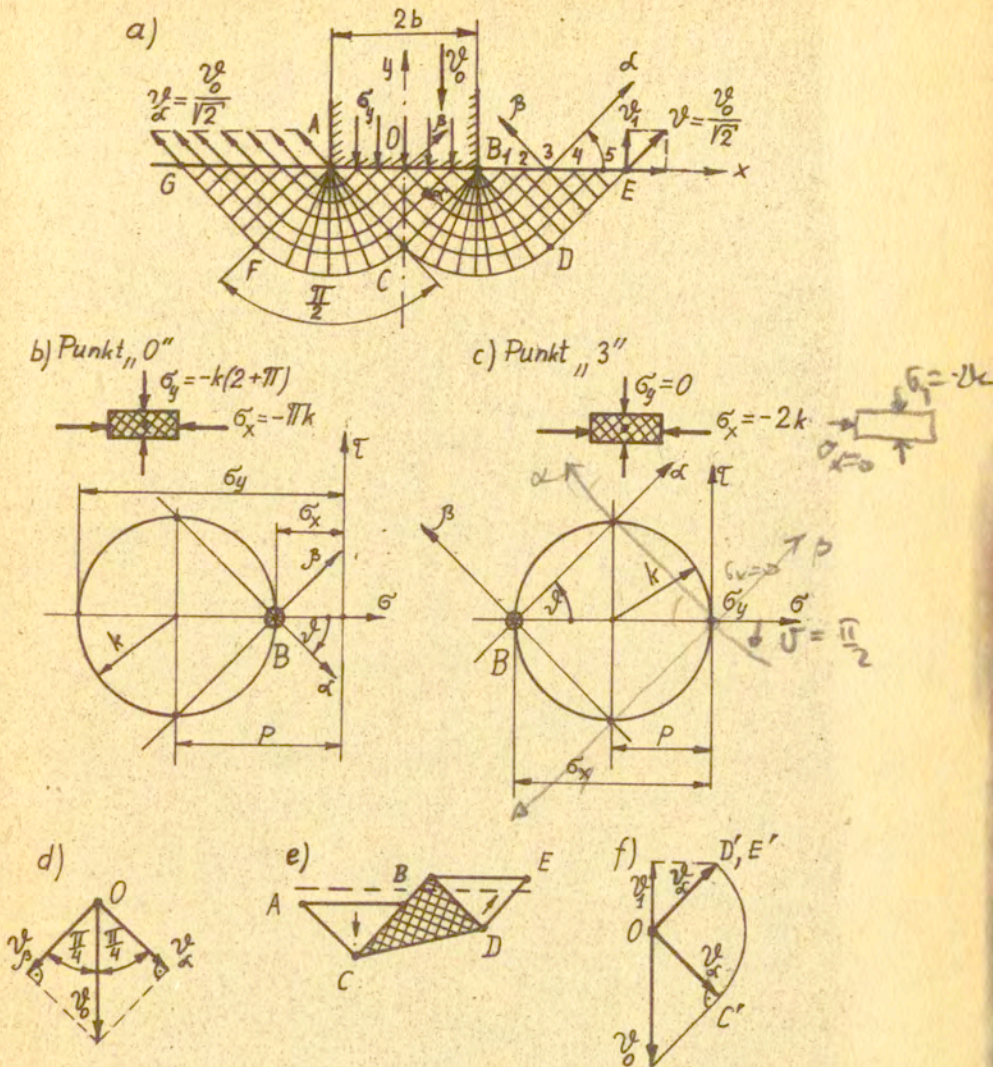
ruchu stempla  $v_0^x, v_n^x = v_0^x$ . Na brzegu poza stemplem nie znamy prędkości  $v^x$  wypływu materiału, ale znamy naprężenia normalne, które są równe zeru.

Zagadnienie wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń po raz pierwszy zostało rozwiązane przez L. Prandla, a później uzupełnione przez R. Hilla i innych. Rozwiązania te dotyczą początkowego płynięcia, to znaczy gdy stempel nie pogrążył się jeszcze w materiał. Jest to typowe zagadnienie teorii plastyczności.

Zadanie wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń można rozwiązać (znaleźć pole naprężeń i pole prędkości płynięcia) wychodząc ze swobodnego brzegu BE i rozwiązywać zagadnienia na wartości brzegowe lub też rozwiązać metodą odwrotną.

Metoda odwrotna rozwiązania zadania polega na założeniu równomiernego nacisku  $p$  na całej szerokości stempla  $2b$ . Równomierny rozkład nacisku  $p$ , brak tarcia na kontakcie, powodują prostoliniowość charakterystyk i ich pochylenie pod kątem  $45^\circ$  do powierzchni bloku (linia styku jest jednym kierunkiem głównym).

Ze względu na symetrię wygodnie jest rozważyć tylko połowę obszaru plastycznego (rys. 10.94a). W trójkącie ABC istnieje jednorodny stan naprężenia, a punkty A i B są punktami osobliwymi, w których następuje przeskok stanu naprężenia. W trójkącie BED jest jednorodny stan naprężenia określony przez warunki na swobodnej powierzchni BE. Cała półprzestrzeń ABCDE znajduje się w stanie plastycznym, gdyż związki naprężeń (rów. 10.281) tam zachodzące tożsamościowo spełniają warunek plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia (rów. 10.278).



Rys.10.94. Wciskanie płaskiego stempla w półprzestrzeń;  
 a/ schemat wciskania i charakterystyki; b/ stan naprężenia pod stemplem; c/ stan naprężenia pod swobodnym brzegiem;  
 d/ rozkład prędkości na krawędzi AB; e/ schemat odkształcenia; f/ hodograf prędkości.

Na krawędzi swobodnej BE naprężenie główne  $\sigma_y = 0$ , bo nie działa żadna siła. Kąt  $\varphi$  jaki tworzy większe naprężenie główne  $\sigma_y$  z osią  $x$  wynosi  $\frac{\pi}{2}$ , natomiast charakterystyki  $\alpha$  podchodzą do osi  $x$  pod kątem  $\psi = \frac{\pi}{4}$ . Z równania (10.281)<sub>2</sub> otrzymujemy średnie naprężenie  $p = -k$ , a z równania (10.281)<sub>4</sub> mamy główne naprężenie  $\sigma_x = -2k$ .

Zatem w całym obszarze BED panuje jednorodny stan naprężenia:  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = -2k$  (rys. 10.94 c), a charakterystyki są prostoliniowe, gdyż kąt ich pochylenia do krawędzi swobodnej BE jest stały,  $\psi = \frac{\pi}{4} = \text{const.}$

W obszarze pod stemplem ABC mamy z założenia  $\sigma_y = -p$  oraz z obrotu kąt  $\psi = -\frac{\pi}{4}$ . Idąc po charakterystyce  $\alpha$  ( $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \psi$ ) z punktu D do punktu C związku naprężenia w tych punktach są równe (rów. 10.288).

$$P_D - 2k\psi_D^{\frac{\pi}{4}} = C_1,$$

$$P_C - 2k\psi_C^{\frac{\pi}{4}} = C_1,$$

ponieważ  $P_D = -k$ ,  $\psi_D = \frac{\pi}{4}$ ,  $\psi_C = -\frac{\pi}{4}$ , to z przyrównania powyższych związków, otrzymujemy naprężenie średnie w punkcie

C

$$P_C = -k - \pi k.$$

Ponieważ obszar ABC jest plastyczny i są spełnione w nim związki naprężeń (10.281), z których przy zależnościach  $P = P_C$ ,  $\psi = -\frac{\pi}{4}$ , otrzymujemy wartości na naprężenie osiowe  $\sigma_y$  i naprężenie poziome  $\sigma_x$ .

$$\sigma_y = -k(2 + \pi),$$

$$\sigma_x = -\pi k.$$

(10.313)

W całym obszarze ABC panują naprężenia ściskające o wartościach  $\sigma_y = -k(2 + \pi)$ ,  $\sigma_x = -\pi k$  (rys. 10.94 b). Jeśli

przyjmujemy, że naprężenie normalne  $\sigma_y = -\bar{p}$ , to nacisk jednostkowy stępła na materiał przy wciskaniu płaskiego stępła w półprzestrzeń będzie równy

$$\bar{p} = k(2 + \pi) = k \cdot 5,14, \quad (10.314)$$

a przy przyjęciu granicy plastyczności na ścinanie  $k$ :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sigma_p}{2}, & \bar{p} &= 2,57 \sigma_p, \\ k &= \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}, & \bar{p} &= 2,97 \sigma_p. \end{aligned} \quad (10.315)$$

Warunkiem wyjścia do znalezienia prędkości wypływania materiału spod stępła jest przyrównanie składowej normalnej prędkości  $v_n^l$  do prędkości ruchu stępła  $v_0^l$

$$v_n^l = v_y^l = v_0^l.$$

Wzdłuż linii CDE należącej do rodziny  $\alpha$  składowa prędkości  $v_\beta^l = 0$ , gdyż obszar poniżej znajduje się w stanie sztywnym. Składowa prędkości  $v_\alpha^l \neq 0$ .

W obszarze ABC kąt  $v = -\frac{\pi}{4}$ , a jego przyrost  $dv = 0$ , to ze związków prędkości po charakterystyce  $\alpha$  i po charakterystyce  $\beta$  (rów. 10.298), otrzymujemy

$$dv_\alpha^l = 0, \quad \text{a po scałkowaniu} \quad v_\alpha^l = \text{const},$$

$$dv_\beta^l = 0, \quad \text{a po scałkowaniu} \quad v_\beta^l = \text{const}.$$

Wzdłuż różnych charakterystyk tej samej rodziny wartości prędkości mogą być inne. Gdy stempel jest gładki (na linii styku OB prędkość  $v_x^l = \frac{x}{b} v_0^l$ , w punkcie B,  $v_x^l = v_0^l$ ), to charakterystyki podchodzą do brzegu AB pod kątem  $\frac{\pi}{4}$  i wówczas składowe prędkości na linii AB (rys. 10.94 d) są równe

$$v_\alpha^l = v_0^l \sin \frac{\pi}{4} = \frac{v_0^l}{\sqrt{2}}, \quad (10.316)$$

$$v_\beta^l = v_0^l \sin \frac{\pi}{4} = \frac{v_0^l}{\sqrt{2}}.$$

Gdy stempel jest chropowaty, to  $v_y^e = -v_0^e$ ,  $v_x^e = 0$  i wówczas obszar ABC porusza się pionowo w dół wraz ze stemplem jako sztywna całość. Obszar BED porusza się jako sztywny element w kierunku równoległym do DE z prędkością  $\frac{v_0^e}{\sqrt{2}}$  podobnie jak trójkąt AGF, który przesuwa się równoległe do FG. Obszar BCD jest najbardziej zdeformowany (rys. 10.94 e). Linia GFCDE jest linią nieciągłości prędkości.

Znalezienie pola naprężeń i pola prędkości płynięcia zagadnienia wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń metodą rozwiązywania kolejnych zagadnień brzegowych polega na przyjęciu statycznego warunku brzegowego na linii BE i rozwiązaniu brzegowego zagadnienia Cauchy'ego, zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego i zagadnienia brzegowego mieszanego i następnie z rozkładu naprężenia pod stemplem (linia AB) obliczeniu nacisku jednostkowego. Jest to metoda analityczna rozwiązania zagadnienia i po opracowaniu programu nadaje się na maszynę cyfrową.

Ze względu na symetrię względem osi  $y$  można rozwiązać tylko prawą stronę zadania (rys. 10.94 a). Rozwiązanie zaczynamy od swobodnego brzegu BE, na którym  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = -2k$ ,  $p = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} = -k$ , kąt  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , kąt  $\nu^e = \frac{\pi}{4}$  ( $\sigma_y = p + k \sin 2\nu^e = 0$ ). Po przyjęciu punktów 1, 2, 3, 4, 5 na brzegu BE z równań (10.286) obliczamy (brzegowe zagadnienia Cauchy'ego) współrzędne  $x$ ,  $y$  punktów przecięcia siatki charakterystyk, a z równań (10.288) otrzymujemy kąt  $\nu^e = \frac{\pi}{4}$  i  $p = -k$  w trójkącie BED. Z obliczeń wynika, że w całym trójkącie BED mamy charakterystyki prostoliniowe i jednorodny stan naprężenia ( $p = -k$ ).



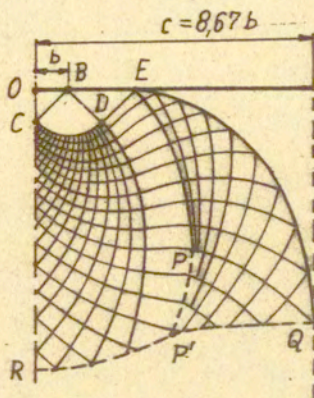
Z punktu B wyprowadzamy co kąt  $\Delta\delta$  np.  $5^\circ$  linie  $\beta$  począwszy od linii BD aż do przecięcia z osią  $y$  w punkcie C. Na linii BD mamy wszystkie wartości już obliczone. W obszarze BDC wyznaczamy punkty przecięć siatki z zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego. Punkt B jest biegunem siatki złożonej z prostoliniowych promieni i łuków kół.

W obszarze OBC punkty przecięcia siatki otrzymujemy z rozwiązania brzegowego zagadnienia mieszanego. Na linii BC mamy już wszystkie dane obliczone. Postępując w sposób opisany w podpunkcie 5 punktu 10.5.2.4 obliczymy naprężenia na linii OB, które po scałkowaniu i podzieleniu przez szerokość stempla 2b dadzą nam średni nacisk jednostkowy wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń,

W celu znalezienia pola prędkości płłynięcia przyjmujemy kinematyczny warunek brzegowy na linii styku AB stempla z blokiem. Przyjmijmy również, że cały obszar ABC pod stemplem jest sztywny i porusza się pionowo w dół z prędkością  $v_0^l = 1$ . Linia BC jest linią nieciągłości prędkości. Zatem na linii BC mamy dane współrzędne przecięć siatki charakterystyk  $x, y$  kąt  $\nu^l$  oraz składowe prędkości płłynięcia  $v_\alpha^l$  i  $v_\beta^l$ . Siatka charakterystyk dla prędkości (10.296) jest taka sama jak dla naprężeń. Składowe prędkości  $v_\alpha^l, v_\beta^l$  w polach BCD, BDE obliczamy z równań (10.298) rozwiązując odpowiednie zagadnienia brzegowe.

Aby schemat odkształcenia podany na rysunku 10.94a występował, to szerokość bloku materiału musi wynosić  $2c \gg 17,34b$ . Szerokość tę otrzymuje się z przedłużenia siatki linii poślizgu (rys. 10.94a) w obszar sztywny położony poniżej

linii CDE. Przedłużenie to wykonał J.F.W. Bishop zakładając, że obszar poniżej linii CDE znajduje się w stanie granicznym (rys. 10.95).



Rys. 10.95 . Przedłużenie pola linii poślizgu w obszar sztywny dla wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń

Na hipotetycznym brzegu EQ panuje zerowy stan naprężenia. Poniżej linii  $QP'R$  występuje stan jednoosiowego ściskania naprężeniami równoległymi do osi  $OR$ , przy czym naprężenia te nigdzie nie powodują przekroczenia warunku plastyczności. Całe obciążenie wciskania stempla w półprzestrzeń przenoszone jest przez kolumnę podpierającą o szerokości równej od  $Q$  do  $R$  (rys. 10.95).

### 10.5.3.3. Ściskanie pasma

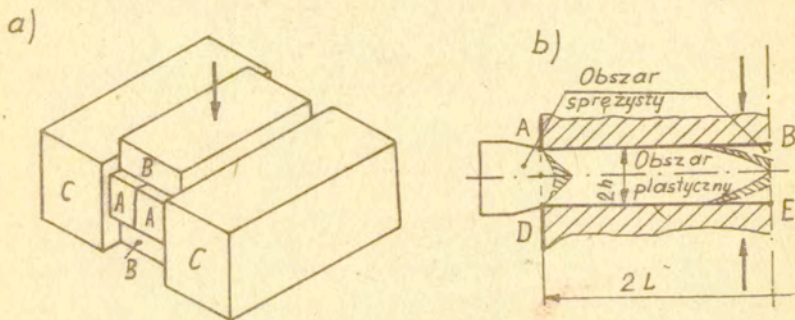
Prasowanie (ściskanie) plastycznego pasma między dwiema sztywnymi i równoległymi płytami jest zagadnieniem często spotykanym w praktyce. Dla zapewnienia płaskiego stanu odkształcenia doświadczenie ściskania pasma przeprowadza się w przyrzą-

dzie, którego schemat pokazano na rysunku 10.96a.

Teoretycznie proces ściskania pasma przeprowadza się przy założeniu istnienia różnego tarcia na styku materiału z płytami B. Jednostkową siłą tarcia  $t$  na kontakcie ogólnie można wyrazić

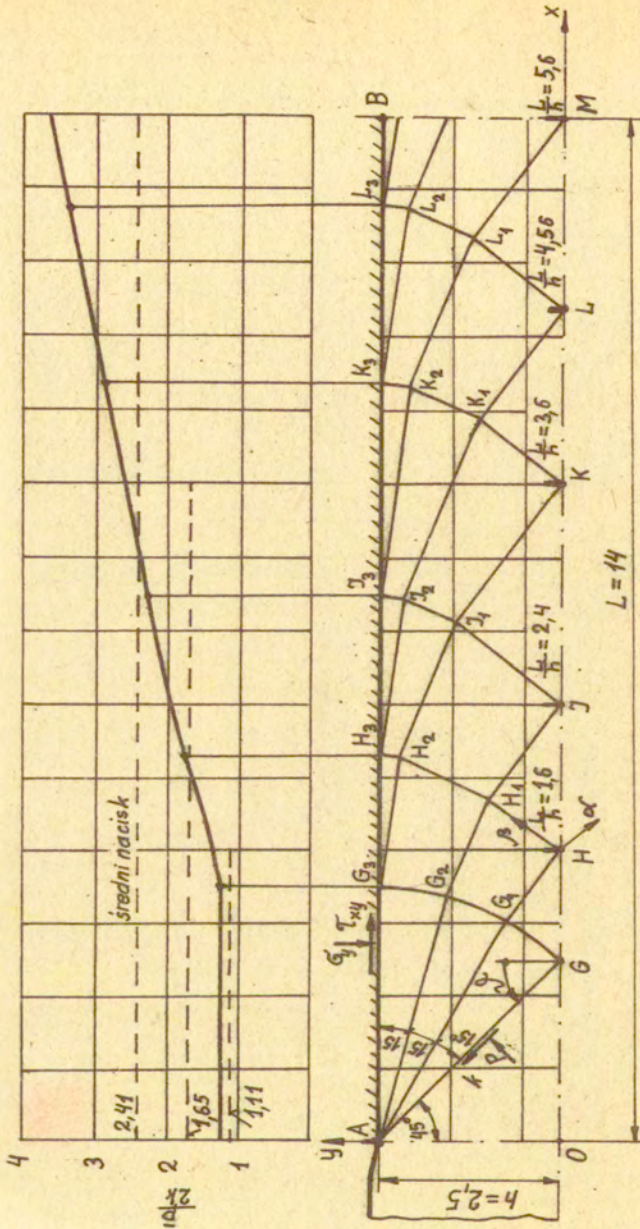
$$t = \mu \sigma_y,$$

gdzie:  $\sigma_y$  jest naprężeniem normalnym,  $t$  jest naprężeniem stycznym równym  $\tau_{xy}$  na kontakcie,  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia. Dla założonego współczynnika tarcia  $\mu$  podejścia charakterystyk do kontaktu muszą być takie, aby stosunek naprężenia stycznego  $\tau_{xy}$  do normalnego  $\sigma_y$  w każdym punkcie równał się wartości  $\mu$  ( $\mu = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y}$ ). Jeśli  $\tau_{xy} = k$ , to mamy tarcie przyłgowe (linie poślizgu są styczne do kontaktu), a gdy  $\tau_{xy} = 0$ , to ściskanie przebiega bez tarcia, a linie poślizgu do kontaktu podchodzą pod kątem  $45^\circ$  na całej długości  $2L$ .



Rys. 10.96. Schemat prasowania bloku: a/. Schemat doświadczenia, b/. Oznaczenie wymiarów i obszarów

Na rysunku 10.97 pokazano siatkę charakterystyk dla pasma ściskanego pokazanego na rysunku 10.96b. Ze względu na symetrię osiową (oś  $y$ ) i symetrię względem płaszczyzny środkowej



Rys. 10.97. Siatka charakterystyk i średni nacisk jednostkowy dla ściskania pasma między dwiema równoległymi i sztywnymi płytami ( $\mu = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} = 0,39$ )

pokazano rozwiązanie tylko dla  $\frac{1}{4}$  bloku .

Wyznaczenie pola linii poślizgu rozpoczynamy od wyprowadzenia linii prostych z punktu A, który jest punktem osobliwym. Obszar na lewo od linii AG jest sztywny. W obszarze AOG i na linii AG mamy  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = -2k$ ,  $\rho = -k$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\nu = \frac{\pi}{4}$  (linia AG jest linią  $\alpha$ ). Pole linii poślizgu w trójkącie AOG otrzymujemy z rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, a w obszarze AGG<sub>3</sub> — z zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego. Dane wzdłuż linii GG<sub>3</sub> pozwalają wyznaczyć wszystkie wielkości w obszarze GG<sub>3</sub>K. W trójkącie krzywoliniowym G<sub>3</sub>KK<sub>3</sub> mamy zagadnienie mieszane, gdyż wzdłuż linii G<sub>3</sub>K mamy wszystkie wartości już wyznaczone, a wzdłuż kontaktu G<sub>3</sub>K<sub>3</sub> mamy dane naprężenie styczne  $\tau_{xy}$  (z założonego tarcia) i kąt  $\nu = -\frac{\pi}{4}$ . Postępując analogicznie można wykonać rozwiązanie aż do chwili, gdy linie poślizgu obu rodzin przetną się w geometrycznym środku bloku (np. w punkcie M).

Na pionowej osi symetrii naprężenie styczne  $\tau_{xy} = 0$ , a zatem siła tarcia  $t = 0$ . Na odcinku J<sub>3</sub>B siła tarcia maleje od pewnej założonej wartości do zera. Obszar J<sub>3</sub>BM jest sztywny, a stan naprężenia w nim jest nieokreślony, odkształcenie niewielkie. W obszar J<sub>3</sub>BM można przedłużyć siatkę charakterystyk zakładając, że jest on w stanie granicznym.

#### 10.5.3.4. Przeciąganie blachy przez klinową matrycę

Na rysunku 10.98 przedstawiono schemat przeciągania blachy przez klinową matrycę bez tarcia dla redukcji przekroju

$$r = \frac{H-h}{H} .$$

Konstrukcję pola linii poślizgu rozpoczynamy od wyprowadzenia linii prostych z obu biegunów  $O$ . Założenie to powoduje, że na prawo od linii  $OA$  występuje jednorodny stan naprężenia z głównymi kierunkami wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Naprężenie  $\sigma_x^j$  jest nieznane, oznaczamy je przez  $p$ ,  $\sigma_x = p$ . Naprężenie  $\sigma_y = p - 2k$  wynika z warunku plastyczności. Siatka linii poślizgu składa się z dwóch trójkątów  $OBD$  oraz z dwóch wycinków biegunowych  $OAB$ . Liniami nieciągłości prędkości są linie  $DBAO$  i  $D'B'A'O$ . Materiał na lewo od linii  $DBAB'D'$  znajduje się w stanie sztywnym.

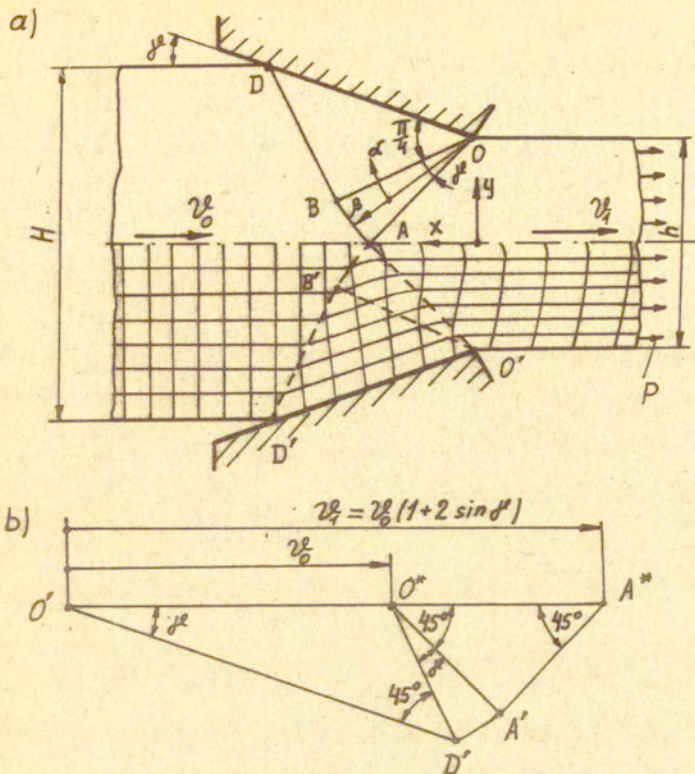
Wielkość naprężenia ciągnącego  $p$  w przekroju wyjściowym oblicza się z równania

$$p = 2k(1 + \mu) \frac{H-h}{H} \quad (10.317)$$

Prędkość płynięcia materiału w trójkącie  $OBD$  jest stała i skierowana równoległe do  $DO$ . Jej wielkość otrzymujemy przez porównanie normalnych składowych na linii  $BD$ . Oznaczając prędkość materiału przy wejściu do matrycy przez  $v_0^e$ , otrzymamy w trójkącie  $OBD$  prędkość:  $v = \sqrt{2} v_0^e \cos(\frac{\pi}{4} - \mu)$ , a na łuku  $AB$   $v_n^e = v_0^e \cos(\frac{\pi}{4} - \omega)$ . Prędkość  $v_n^e$  ma stałą wartość na każdej prostej linii  $\beta$  zbiegającej się w punkcie  $O$ . Wzdłuż linii  $\alpha$  równoległych do łuku  $AB$  składowe  $v_\alpha^e$  obliczamy z równania (10.298a). Prędkość ciągnięcia  $v_1^e$  jest znana. Wychodząc z warunku stałej objętości ( $v_1^e h = v_0^e H$ ) obliczymy prędkość materiału na wejściu do matrycy (rys. 10.98a)

$$v_0^e = v_1^e \frac{h}{H} \quad (10.318)$$

Na rysunku 10.98b przedstawiono hodograf (wykres) prędkości płynięcia materiału przy przeciąganiu blachy przez matrycę. Wektor  $\vec{O^*O^*}$  przedstawia prędkość wejścia materiału w matrycę



Rys. 10.98. Przeciąganie blachy przez klinową matrycę bez tarcia:  
a/ schemat siatki linii poślizgu i odkształcenia siatki kwadratowej; b/ hodograf prędkości

na całej linii nieciągłości DBA. Odcinek  $O'D'$  jest równoległy do krawędzi matrycy DO i przedstawia prędkość płynięcia w trójkącie DBO. Odcinek  $O''D'$  jest równoległy do linii nieciągłości DB. Prędkości po prawej stronie łuku BA linii nieciągłości reprezentowane są przez łuk  $D'A'$  zakreślony z punktu  $O''$ . Odcinek  $A'A''$  przedstawia skok prędkości na linii nieciągłości AO. Po prawej stronie linii AO prędkość płynięcia jest

równa

$$v_y^l = v_0^l (1 + 2 \sin \mu). \quad (10.319)$$

Prędkość tę przedstawia wektor  $\vec{0A^*}$ .

### 10.5.3.5. Wyciskanie

Sposobów wyciskania jest wiele. Kształt matrycy może być klinowy, kątowy lub kształtowy. Poniżej przykładowo zostanie omówiony tylko proces współbieżnego wyciskania pręta (rys.10.99)

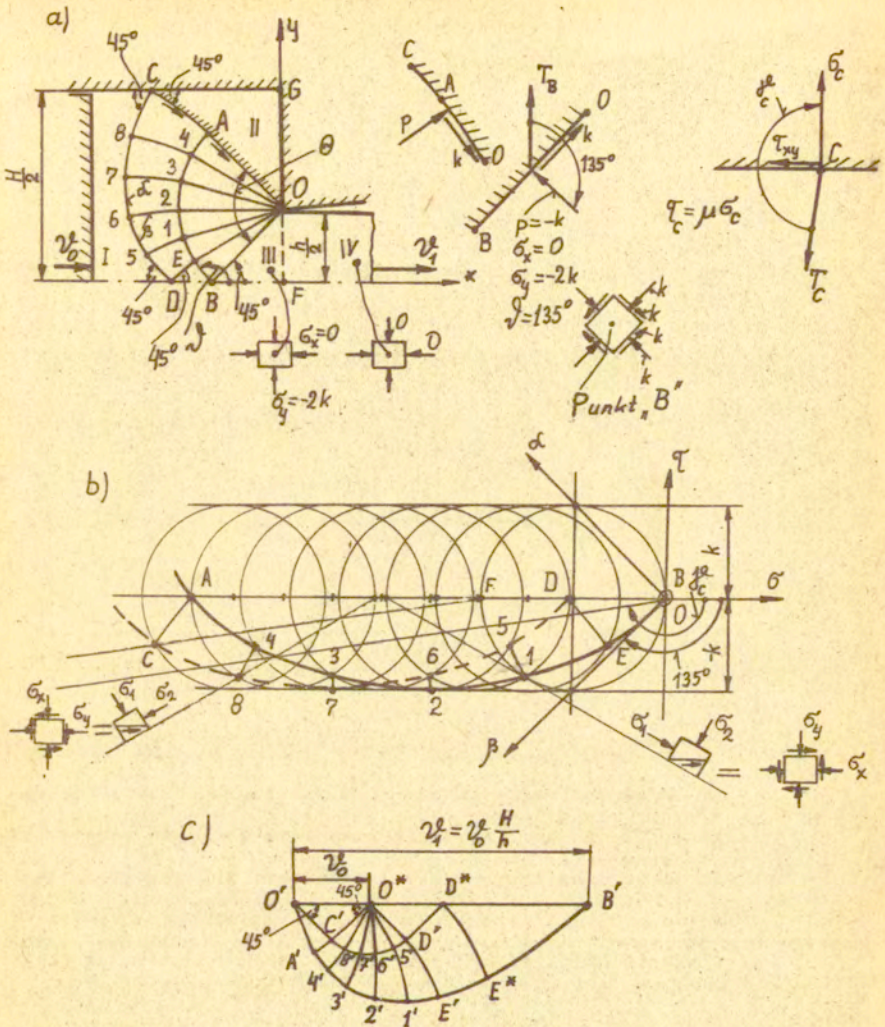
Wyciskanie polega na tym, że materiał zamknięty w nieodkształcalnej matrycy pod naciskiem stempla wypływa przez otwór o określonym kształcie. W pobliżu otworu tworzy się obszar dużych odkształceń plastycznych. Proces wyciskania można rozpatrywać bez tarcia lub z założonym tarcieciem na styku materiału z narzędziem. Rozwiązanie procesu wyciskania przebiegającego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia polega na wyznaczeniu siatki linii poślizgu, hodografu prędkości i wielkości nacisku jednostkowego.

Siatkę charakterystyk zaczynamy konstruować od założenia, że w obszarze III występuje jednoosiowy stan naprężenia

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -2k, \quad p = -k, \quad v^l = \frac{3}{4}\pi, \quad \varphi = 0.$$

Na linii OB mamy zatem wszystkie dane. Obszar II jest sztywny, a linia OAC jest linią nieciągłości, gdyż po niej przesuwają się materiały. Na tej linii naprężenie styczne równa się granicy plastyczności na ścinanie  $k$ . W obszarze IV mamy zerowy stan naprężenia. Natomiast w obszarze I stan naprężenia jest niezany, a linia C8765D jest linią nieciągłości.





Rys.10.99. Wyciskanie współbieżne pręta: a/ siatka linii poślizgu na płaszczyźnie fizycznej, b/ płaszczyzna naprężeń, układ kół Mohra dla wykreślenia linii poślizgu, c/ hodograf prędkości.  
 Redukcja  $r = (H-h)/H$

Punkt 0 jest biegunem siatki (rys. 10.99a), z którego wyprowadzamy charakterystyki  $\beta$  co  $15^\circ$ . W obszarze OBF charakterystyki są prostoliniowe. Współrzędne przecięć linii poślizgu wyznaczamy z równań (10.286), a stan naprężenia w tych punktach określamy z równań (10.288). Idąc z punktu B do punktu E po charakterystyce  $\alpha$  ( $P_B - 2k\sqrt{\beta} = C_1$ ,

$$P_E - 2k\sqrt{\beta} = C_1) \quad \text{znajdujemy naprężenie w punkcie E}$$

$$P_E = -k\left(1 + \frac{\pi}{6}\right).$$

Postępując podobnie z każdym punktem na linii BA określimy naprężenie w punkcie A

$$P_A = -k(1 + \pi).$$

Mając naprężenie w punkcie E znajdujemy naprężenie w punkcie

$$D \text{ ze związków po charakterystyce } \beta \quad (P_E + 2k\sqrt{\beta} = C_2, \\ P_D + 2k\sqrt{\beta} = C_2)$$

$$P_D = -k\left(1 + \frac{\pi}{3}\right),$$

a w punkcie C

$$P_C = -k(1 + \pi).$$

Naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  oraz  $\tau_{xy}$  obliczamy ze wzorów (10.281) po uwzględnieniu naprężenia  $p$  i kąta  $\beta$  dla odpowiedniego punktu.

Ze stanu naprężenia na ostatniej charakterystyce, w tym przypadku C8765D, obliczamy siłę  $P$  potrzebną do wyciskania. Dokonując sumy iloczynów naprężeń i długości boków, na których działają naprężenia równoległe do osi  $x$ , otrzymamy siłę wyciskania (grubość elementu zakładamy 1)

$$P = 2 \sum (\sigma_x l_y + \tau_{xy} l_x). \quad (10.320a)$$

Sredni bezwymiarowy nacisk jednostkowy obliczamy z równania

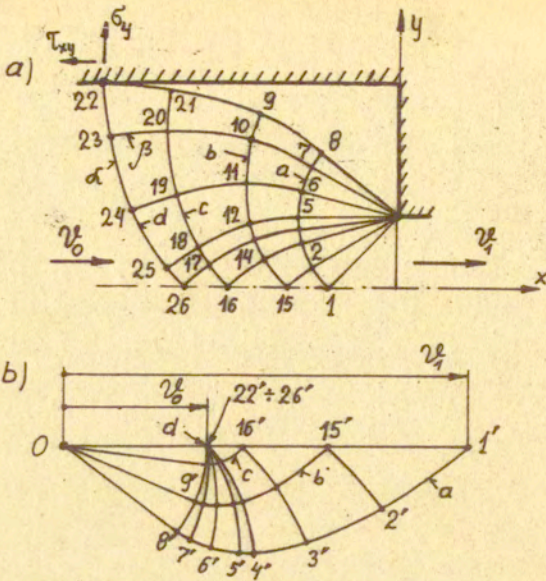
$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{P}{2kH} \quad (10.320b)$$

Linie OAC i CD są liniami nieciągłości (rys. 10.99a). Wzdłuż linii CD prędkość  $v_0^e$  rozkładamy na składową normalną  $v_n^e$  i składową styczną  $v_s^e$ . Składowa normalna  $v_n^e$  po obu stronach linii CD jest taka sama, ponieważ w materiale nie może być szczeliny. Przy obliczaniu prędkości płynięcia w punkcie 8, składową styczną  $v_s^e$  bierzemy z punktu C, gdyż punkty te są blisko siebie. Prędkości  $v_n^e$  w punkcie 8 i  $v_s^e$  wzięte z punktu C pozwalają wyznaczyć prędkość płynięcia w punkcie 8 po jego prawej stronie. Wzdłuż linii nieciągłości OAC składowa normalna  $v_n^e$  musi być równa zeru, ponieważ obszar II jest sztywny. Dane te wystarczają do wyznaczenia prędkości płynięcia w całym obszarze plastycznym OBDCAO. Prędkości te można wyznaczyć analitycznie posługując się równaniami (10.298) lub określić z hodografu prędkości (rys. 10.99c).

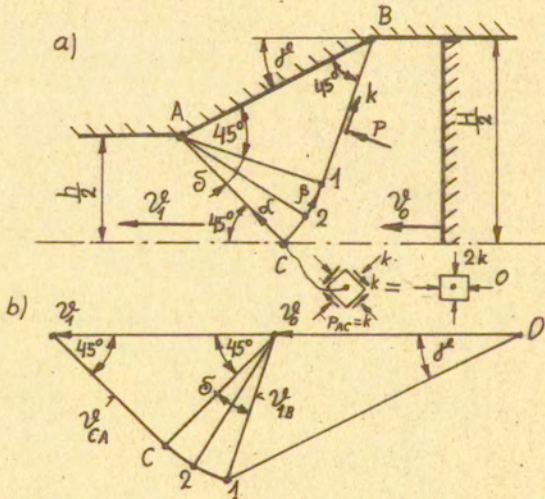
Hodograf prędkości (rys. 10.99c) zaczynamy konstruować od obrania bieguna  $O'$ , z którego odkładamy prędkość  $v_0^e$  ruchu stempla. Prędkość w punkcie C rozkładamy na składowe  $O'C'$  i  $O^*C'$ . Linie nieciągłości CD odwzorowuje łuk kołowy  $C'D'$  ze środkiem w punkcie  $O^*$ , a linie nieciągłości CAO łuk  $C'A'$  ze środkiem w punkcie  $O'$ . Obie strony linii DEO odwzorowują łuki  $E'E^*$  i  $D'D^*$  na hodografie. Odcinki  $E'E^*$  i  $D'D^*$  są skokami prędkości w punktach D i E. Prędkość wypływu materiału z matrycy wynosi

$$v_1^e = v_0^e \frac{H}{h} \quad (10.321)$$

Na rysunku 10.100 pokazano siatkę linii poślizgu i hodograf prędkości dla współbieżnego wyciskania pręta z tarciem przylgowym. Natomiast na rys. 10.101 pokazano wyciskanie w



Rys. 10.100. Wyciskanie współbieżne pręta z tarcie kontakto-  
wym: a/ linie poślizgowe, b/ hodograf



Rys.10.101. Wyciskanie w matrycy stożkowej: a/ linie poślizgu,  
b/ hodograf

matrycy stożkowej bez uwzględnienia tarcia.

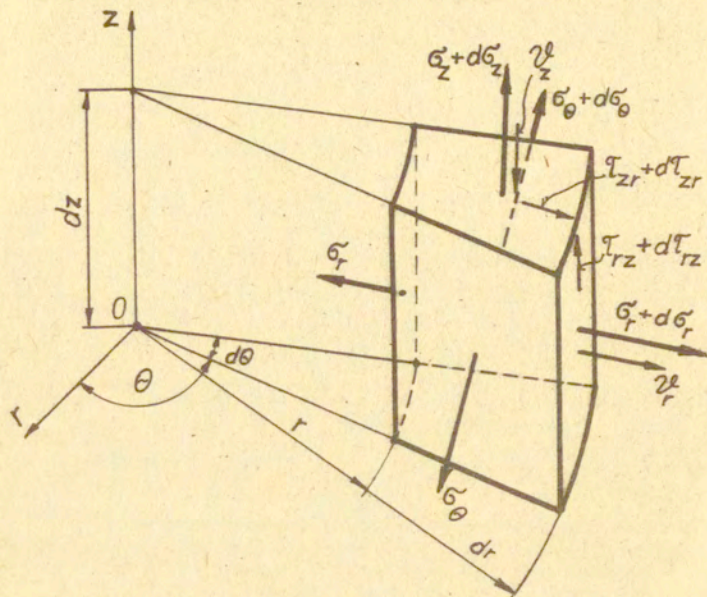
#### 10.5.4. Osiowo - symetryczny stan naprężenia i odkształcenia

##### 10.5.4.1. Wiadomości ogólne

Procesy obróbki plastycznej metali takie jak: ciągnięcie drutu, prętów, wyciskanie prętów, tulei, wytłaczanie i przetłaczanie miseczek oraz kucie swobodne lub matrycowe krążków i pierścieni przebiegają w warunkach osiowej symetrii. Do opisanego stanu naprężenia, prędkości płynięcia i odkształcenia zagadnień osiowo - symetrycznych najwygodniejszym jest walcowy układ współrzędnych  $r, \theta, z$ . W układzie tym stan naprężenia opisany jest składowymi  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ , zaś stan prędkości płynięcia przez dwie składowe  $v_r^e$  i  $v_z^e$ . Pozostałe składowe naprężenia  $\tau_{\theta z}, \tau_{\theta r}$  i składowa prędkości płynięcia  $v_\theta^e$  w kierunku obwodowym ze względu na osiową symetrię są równe zeru (nie występuje skręcanie elementu). Próbka walcowa po odkształceniu zmienia swoje wymiary zachowując pierwotną symetrię obrotową. Wszelkie procesy, w których występuje skręcanie plastyczne są pominięte.

Zagadnienie osiowo - symetryczne jest rozwiązane, jeśli w każdym jego punkcie wyznaczone są cztery składowe naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  oraz dwie składowe prędkości płynięcia  $v_r^e, v_z^e$ . Składowe te są funkcjami promienia  $r$  i współrzędnej  $z$ .

Do analizy stanu osiowej symetrii przyjmujemy quasistatyczny proces odkształcenia. Po pominięciu sił masowych  $X_r, X_z$



Rys. 10.102. Element we współrzędnych walcowych

równania różniczkowe równowagi wewnętrznej elementu (rys.10.102.) przyjmują postać

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (10.322)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Jeżeli przyjmiemy warunek plastyczności Hubera - Misesa

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 - 6k^2 = f_1 \quad (10.323)$$

to stowarzyszone z nim prawo plastycznego płynięcia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (10.324)$$

przyjmie postać  $\left( \frac{\partial f}{\partial r} = 2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z, \right.$   
 $\left. \frac{\partial f}{\partial z} = 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta, \frac{\partial f}{\partial \tau_{rz}} = 3\tau_{rz} \right)$

$$\frac{\dot{\epsilon}_r}{\sigma_r - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\sigma_\theta - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma_z - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_{rz}}{\tau_{rz}}, \quad (10.325)$$

gdzie  $\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}$ ,  $\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_r}{r}$ ,  $\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ,

$\dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$ ,  $\dot{\gamma}_{rz} = 2\dot{\epsilon}_{rz}$ ,  $v_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $v_\theta = \frac{u_r}{r} = 0$ ,

$v_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ . Równania (10.322) <sup>(10.323)</sup> i (10.325) tworzą

układ sześciu równań zawierających sześć poszukiwanych wielkości  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, v_r, v_z$ . Układ ten nie jest hiperboliczny i nie można go rozwiązać metodą charakterystyk. Nie można również rozdzielić pola naprężeń i pola prędkości.

Jeżeli zamiast warunku plastyczności Hubera - Misesa przyjmiemy warunek plastyczności Treski, to otrzymamy efektywne rozwiązanie stanu naprężenia i stanu odkształcenia.

Przyjmiemy zatem warunek plastyczności Treski wyrażony w naprężeniach głównych  $(\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k)$  w postaci

$$\sigma_i - \sigma_k = 2k, \quad (10.326a)$$

który po rozpisaniu ( $i \neq k = 1, 2, 3$ ) przyjmie postać:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2k, \quad (10.326b)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2k,$$

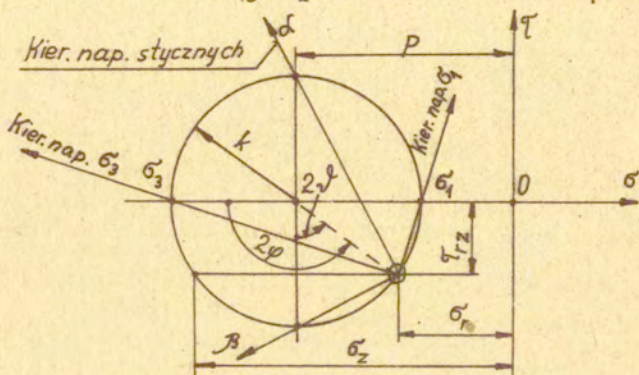
$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm 2k,$$

a przy założeniu  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  wyrazi się równaniem

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \quad (10.326c)$$

Warunek plastyczności Treski (10.326c) w przybliżeniu odzwierciedla własności materiału, ale daje efektywne rozwiązanie.

Z warunku osiowej symetrii wynika, że naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  jest naprężeniem głównym. Przyjmijmy, że w płaszczyźnie  $r, z$  działają naprężenia główne  $\sigma_1 > \sigma_3$  (rys.10.103), a naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta = \sigma_2$  spełnia nierówność  $\sigma_1 \gg \sigma_\theta = \sigma_2 \gg \sigma_3$ .



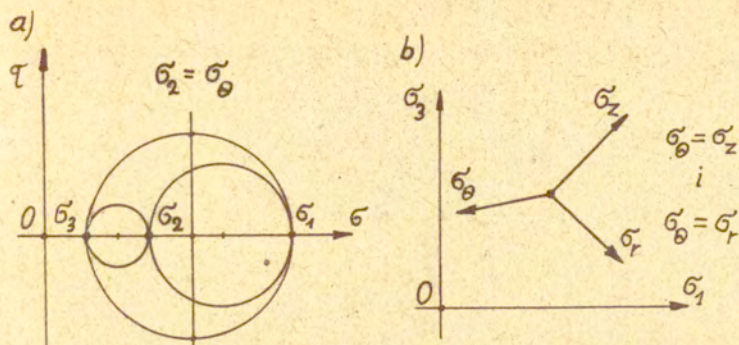
Rys. 10.103 . Koło Mohra dla naprężeń

A. Haar i T. Karman w 1909 r. wprowadzili pojęcie pełnej plastyczności dla zagadnień osiowo - symetrycznych. Ich hipoteza odnosi się do naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Założyli oni, że główne naprężenie pośrednie  $\sigma_2 = \sigma_\theta$  przy płynięciu materiału na zewnątrz jest równe większemu algebraicznie naprężeniu  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1$ , a przy płynięciu materiału do środka przyjętego układu współrzędnych, jest równe naprężeniu mniejszemu  $\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Zatem naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  może równać się jednemu z naprężeń głównych  $\sigma_1$  lub  $\sigma_3$

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \quad \text{lub} \quad \sigma_\theta = \sigma_3 . \quad (10.327)$$

Jeśli przyjmijemy prędkość płynięcia  $v_r > 0$ , a co za tym idzie i obwodową prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_2 = \frac{v_r}{r} > 0$





Rys. 10.104 . Ilustracja postulatu Haara - Kármána

oraz główne prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_1$  i  $\dot{\epsilon}_3$  wynikające z prawa płynięcia plastycznego (10.324) stowarzyszonego z warunkiem plastyczności (10.326c), to otrzymamy znaki głównych prędkości odkształcenia

$$\dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_2 > 0, \quad \dot{\epsilon}_3 < 0,$$

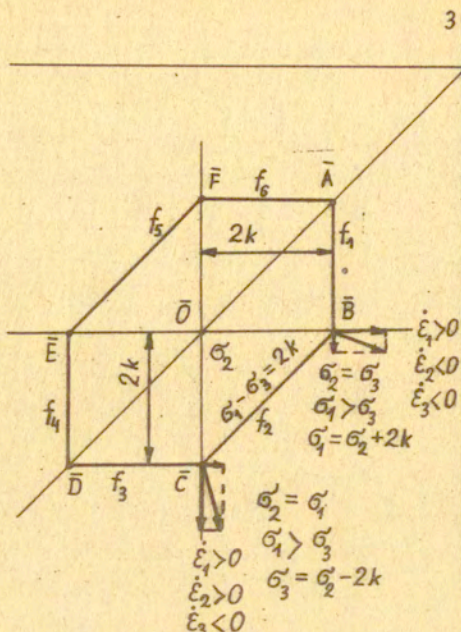
które są zgodne ze stanem naprężenia określonym punktem  $\bar{C}$  warunku plastyczności Treski (rys. 10.105). Jeśli natomiast przyjmiemy, że  $\nu_r < 0$ , a zatem  $\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_2 = \frac{\nu_r}{r} < 0$ , to wówczas główne prędkości odkształceń mają znaki

$$\dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_2 < 0, \quad \dot{\epsilon}_3 < 0.$$

Ten stan odkształcenia jest zgodny ze stanem naprężenia w punkcie B warunku plastyczności Treski. Zasada Haara - Kármána spełniona jest w punkcie  $\bar{C}$  i  $\bar{B}$  warunku plastyczności Treski (rys. 10.105).

Warunek plastyczności Treski (10.326c) wyrażony przez składowe w układzie  $r, z$  przyjmie postać

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2. \quad (10.328)$$



Rys. 10.105. Warunek plastyczności Treski. Na krawędziach  $\bar{B}$  i  $\bar{C}$  występuje zgodność stanu naprężenia ze stanem prędkości odkształcenia.

Pole prędkości płynięcia  $v_r^p, v_z^p$  wyznacza się z warunku nieściśliwości materiału

$$\frac{\partial v_r^p}{\partial r} + \frac{v_r^p}{r} + \frac{\partial v_z^p}{\partial z} = 0 \quad (10.329)$$

oraz z warunku izotropii

$$\frac{\dot{\epsilon}_{rz}}{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z} = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z} \quad (10.330a)$$

lub zapisanego w postaci

$$\frac{\frac{1}{2}(v_{r,z}^p + v_{z,r}^p)}{v_{r,r}^p - v_{z,z}^p} = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z} \quad (10.330b)$$

Warunek izotropii wymaga, aby główne osie tensora prędkości odkształcenia pokrywały się z głównymi osiami tensora naprężenia. Korzystając z konstrukcji koła Mohra dla naprężeń (rys. 10.103) i prędkości odkształceń (rys. 10.106) na płaszczyźnie  $r$  z warunek izotropii wyraża się następującym równaniem :

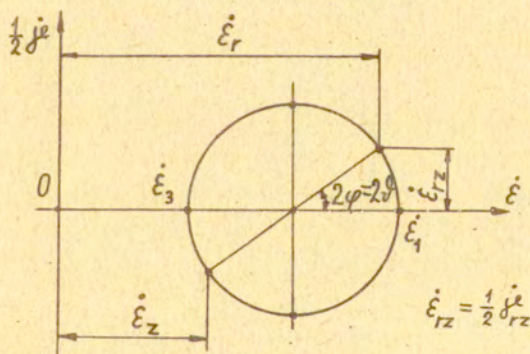
$$\frac{\partial v_r^e}{\partial z} + \frac{\partial v_z^e}{\partial r} - \left( \frac{\partial v_r^e}{\partial r} - \frac{\partial v_z^e}{\partial z} \right) \operatorname{tg} 2\varphi = 0 \quad (10.330c)$$

lub

$$\frac{\partial v_r^e}{\partial z} + \frac{\partial v_z^e}{\partial r} + \left( \frac{\partial v_r^e}{\partial r} - \frac{\partial v_z^e}{\partial z} \right) \operatorname{ctg} 2\varphi = 0. \quad (10.330d)$$

Równanie (10.330d) można otrzymać również przez podstawienie do warunku (10.330b) zależności (10.335) .

Pole naprężeń dla osiowej symetrii znajdziemy rozwiązując układ czterech równań (10.322) , (10.327) i (10.328) z czterema niewiadomymi naprężeniami  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  . Pole prędkości płynięcia  $v_r^e$ ,  $v_z^e$  znajdujemy z rozwiązania układu równań (10.330d) i (10.329) . Układy te są hiperboliczne i dają się rozwiązać metodą charakterystyk.



Rys. 10.106. Koło Mohra dla prędkości odkształceń

Z koła Mohra dla naprężeń (rys.10.103) wynikają zależności między naprężeniami głównymi a naprężeniami w układzie  $r, z$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}, \quad (10.331)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2},$$

$$\sigma_2 = \sigma_\theta.$$

Z koła Mohra dla prędkości odkształceń (rys. 10.106) wynikają zależności między głównymi prędkościami odkształceń a prędkościami odkształceń w układzie  $r, z$

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + 4\dot{\epsilon}_{rz}^2}, \quad (10.332)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + 4\dot{\epsilon}_{rz}^2},$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_r^t}{r}.$$

Naprężenia  $\sigma$  wyrażamy w  $N/m^2$ , prędkość płynięcia  $v$  w  $m/s$ , a prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  w jednostkach  $s^{-1}$ .

W każdym punkcie zadania musi być spełniony warunek dodatności mocy dysypowanej,  $D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$ . Przyjęte prawo płynięcia plastycznego wymaga spełnienia warunku izotropii. Zatem w każdym punkcie zadania należy wyznaczyć główne naprężenia  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  i główne prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ . Warunek mocy dysypowanej przyjmie postać

$$D = \sigma_{ii} \dot{\epsilon}_{ii} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 \geq 0. \quad (10.333)$$

W danym punkcie zadania jedno naprężenie może dawać moc ujemną, ale pozostałe moc dodatnią, tak aby sumaryczna moc była dodatnia lub co najniżej równa zeru. Dla osiowej symetrii, przy przyjęciu warunku plastyczności Treski, hipotezy Haara-Kármána i po uwzględnieniu warunku nieściśliwości moc dysypowaną można zapisać:

1. dla płynięcia materiału na zewnątrz ( $\sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_1, \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r} > 0$ )

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 = \sigma_1 (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 > 0,$$

2. dla płynięcia materiału do środka układu współrzędnych ( $\sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_3, \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r} < 0$ )

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 (\dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3) > 0.$$

#### 10.5.4.2. Równania stanu naprężenia

Do wyznaczenia stanu naprężenia dysponujemy układem

następujących czterech równań na cztery poszukiwane naprężenia

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$

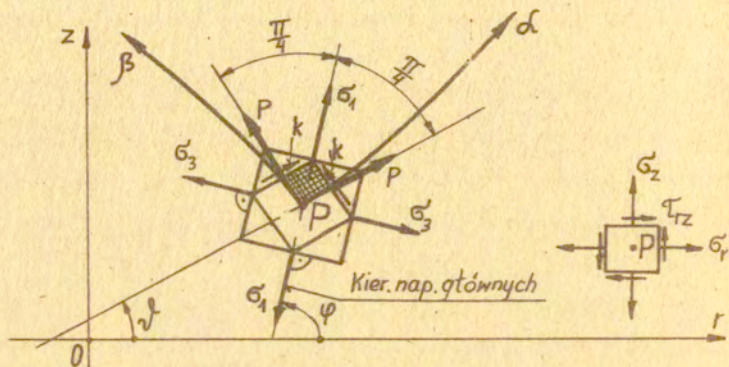
$$\sigma_\theta = \sigma_1 \quad i \quad \sigma_\theta = \sigma_3,$$

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2.$$

(10.334)

Wprowadźmy dwie funkcje  $p$  i  $\nu$ , gdzie  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  jest średnim naprężeniem głównym, a  $\nu$  jest kątem, jaki tworzy normalna do płaszczyzny maksymalnych naprężeń stycznych z osią  $r$ .

Kąt  $\varphi$  jest kątem, jaki tworzy większe algebraiczne naprężenie główne z osią  $r$  ( $\nu = \varphi - \frac{\pi}{4}$ ).



Rys. 10.107. Umowa oznaczania kątów i charakterystyk

Pomiędzy naprężeniami  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta$ , a funkcjami  $p$  i  $\nu$  zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p - k \sin 2\nu, \\ \sigma_z &= p + k \sin 2\nu, \\ \tau_{rz} &= k \cos 2\nu, \\ p &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \\ k &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \\ \sigma_\theta &= p \pm k. \end{aligned} \quad (10.335)$$

Zależności (10.335) tożsamościowo spełniają warunek plastyczności (10.334)<sub>4</sub> i bezpośrednio wynikają z koła Mohra dla naprężeń o średnicy  $2k = \sigma_1 - \sigma_3$  (rys.10.103).

Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  zgodnie z zasadą Haara-Kármána przyjmuje postać:

$\sigma_{\theta} = \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_3 + 2k = p + k$  — płynięcie materiału następuje w kierunku dodatnim osi  $r$ ,

$\sigma_{\theta} = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 - 2k = p - k$  — płynięcie następuje w kierunku ujemnym osi  $r$ .

Podstawiając zależności (10.335) do równań równowagi (10.334) otrzymujemy dla wszystkich wartości  $p$  i  $\nu$  hiperboliczny układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - 2k \cos 2\nu \frac{\partial \nu}{\partial r} - 2k \sin 2\nu \frac{\partial \nu}{\partial z} &= \frac{k}{r} (\sin 2\nu \pm 1), \\ \frac{\partial p}{\partial z} - 2k \sin 2\nu \frac{\partial \nu}{\partial r} + 2k \cos 2\nu \frac{\partial \nu}{\partial z} &= -\frac{k}{r} \cos 2\nu, \end{aligned} \quad (10.336)$$

który może być rozwiązany metodą charakterystyk. Ponieważ funkcje  $p = p(r, z)$  i  $\nu = \nu(r, z)$  zależą od współrzędnych  $r, z$  to ich różniczki zupełne będą

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz, \\ d\nu &= \frac{\partial \nu}{\partial r} dr + \frac{\partial \nu}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (10.337)$$

Z równań (10.336) i (10.337) układamy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników przy niewiadomych  $\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial \nu}{\partial r}, \frac{\partial \nu}{\partial z}$  i przyrównując go do zera

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2k \cos 2\nu & -2k \sin 2\nu \\ 0 & 1 & -2k \sin 2\nu & 2k \cos 2\nu \\ dr & dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dr & dz \end{vmatrix} = 0,$$

po obliczeniu otrzymamy równanie różniczkowe na kierunku charakterystyk

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 2 \frac{dz}{dr} \operatorname{ctg} 2\nu - 1 = 0.$$

Pierwiastki rzeczywiste (wyróżnik  $\Delta = 4 \operatorname{ctg}^2 2\nu + 4, \sqrt{\Delta} = \frac{2}{\sin 2\nu}$ )

tego równania są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi linii zwanych charakterystykami

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)_1 = \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{linia } \alpha,$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)_2 = -\operatorname{ctg} \vartheta \quad \text{linia } \beta. \quad (10.338)$$

Równania (10.338) spełniają warunek prostopadłości linii

$$\left(m_1 = -\frac{1}{m_2}\right), \text{ a więc są wzajemnie ortogonalne.}$$

Jeśli w wyznaczniku charakterystycznym pierwszą kolumnę współczynników  $\frac{\partial p}{\partial r}$  zastąpimy kolumną wyrazów wolnych i

przyrównamy ten wyznacznik do zera i rozwiążemy go, to otrzymamy związki wzdłuż charakterystyk

$$dp - 2k d\vartheta = \frac{k}{r}(dz + dr) \quad \text{dla linii } \alpha,$$

$$dp + 2k d\vartheta = -\frac{k}{r}(dz - dr) \quad \text{dla linii } \beta. \quad (10.339)$$

Równania różniczkowe charakterystyk i związków wzdłuż charakterystyk dla płynięcia materiału na zewnątrz (znaki górne) jak i do środka przyjętego układu osi współrzędnych (znaki dolne) ogólnie można zapisać

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad dp - 2k d\vartheta = \frac{k}{r}(dz \pm dr) \quad \text{dla linii } \alpha,$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \vartheta, \quad dp + 2k d\vartheta = -\frac{k}{r}(dz \mp dr) \quad \text{dla linii } \beta. \quad (10.340)$$

Wyrażając różniczki  $dz$  i  $dr$  przy pomocy elementarnych długości linii  $dS_\alpha$ ,  $dS_\beta$  oraz kąta  $\vartheta$  (rys.10.115a)

$$dz_\alpha = dS_\alpha \sin \vartheta,$$

$$dr_\alpha = dS_\alpha \cos \vartheta,$$

$$dz_\beta = dS_\beta \cos \vartheta,$$

$$dr_\beta = -dS_\beta \sin \vartheta, \quad (10.341)$$

to związki po charakterystykach (10.340) można wyrazić zależnościami

$$dp - 2k d\vartheta = \frac{k}{r} dS_\alpha (\sin \vartheta \pm \cos \vartheta) \quad \text{dla linii } \alpha, \quad (10.342)$$



$$dp + 2k dv^\ell = -\frac{k}{r} dS_\beta (\cos v^\ell \pm \sin v^\ell) \quad \text{dla linii } \beta.$$

Jeżeli w równaniach równowagi (10.322) uwzględnimy siły bezwładności  $X_r$  i  $X_z$ , to związki po charakterystykach (10.339) dla płynięcia materiału na zewnątrz będą miały postać

$$dp - 2k dv^\ell - \frac{k}{r} dS_\alpha (\sin v^\ell + \cos v^\ell) + dS_\alpha (X_z \cos v^\ell - X_r \sin v^\ell) = 0$$

dla linii  $\alpha$ ,

$$dp + 2k dv^\ell + \frac{k}{r} dS_\beta (\cos v^\ell + \sin v^\ell) + dS_\beta (X_r \cos v^\ell + X_z \sin v^\ell) = 0$$

dla linii  $\beta$ . (10.343)

#### 10.5.4.3. Równania prędkości płynięcia

Prędkość płynięcia promieniową  $v_r^\ell$  i osiową  $v_z^\ell$  wyznaczamy z warunku izotropii i warunku nieściśliwości

$$\frac{\partial v_r^\ell}{\partial r} \operatorname{ctg} 2v^\ell + \frac{\partial v_r^\ell}{\partial z} + \frac{\partial v_z^\ell}{\partial r} - \frac{\partial v_z^\ell}{\partial z} \operatorname{ctg} 2v^\ell = 0, \quad (10.344)$$

$$\frac{\partial v_r^\ell}{\partial r} + \frac{\partial v_z^\ell}{\partial z} = -\frac{v_r^\ell}{r}.$$

Układ równań (10.344) jest typu hiperbolicznego i może być rozwiązany metodą charakterystyk. Niewiadome  $v_r^\ell$  i  $v_z^\ell$ , które chcemy wyznaczyć zależą od współrzędnych  $r$ ,  $z$  tak, że ich różniczki zupełne są

$$dv_r^\ell = \frac{\partial v_r^\ell}{\partial r} dr + \frac{\partial v_r^\ell}{\partial z} dz, \quad (10.345)$$

$$dv_z^\ell = \frac{\partial v_z^\ell}{\partial r} dr + \frac{\partial v_z^\ell}{\partial z} dz.$$

Kąt  $v^\ell$  został już wyznaczony przez równania dla naprężeń. Jeśli utworzymy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników przy pochodnych i przyrównamy go do zera i następnie obliczy-

-my ten wyznacznik, to otrzymamy równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{dla linii } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \vartheta \quad \text{dla linii } \beta. \end{aligned} \quad (10.346)$$

Równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości (10.346) są takie same jak równania różniczkowe charakterystyk dla naprężeń (10.338), a więc charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń. Z tego względu do pełnego wyznaczenia pola kinematycznego pozostaje jedynie wyznaczyć wektory prędkości płynięcia metalu we wszystkich punktach siatki charakterystyk naprężeń.

Związki wzdłuż charakterystyk dla prędkości otrzymujemy z wyznacznika utworzonego z układu równań (10.344) i (10.345) przez zastąpienie jednej kolumny wyrazów w wyznaczniku charakterystycznym kolumną wyrazów wolnych i przyrównanie tego wyznacznika do zera. Po rozwiązaniu otrzymujemy związki w postaci

$$d\mathcal{V}_r^{\vartheta} \cos \vartheta + d\mathcal{V}_z^{\vartheta} \sin \vartheta = -\frac{\mathcal{V}_r^{\vartheta}}{2r} (dr \cos \vartheta + dz \sin \vartheta)$$

wzdłuż linii  $\alpha$ ,

(10.347)

$$d\mathcal{V}_r^{\vartheta} \sin \vartheta - d\mathcal{V}_z^{\vartheta} \cos \vartheta = \frac{\mathcal{V}_r^{\vartheta}}{2r} (dz \cos \vartheta - dr \sin \vartheta)$$

wzdłuż linii  $\beta$ .

Ze związków (10.347) łatwo można obliczyć prędkości płynięcia  $\mathcal{V}_r^{\vartheta}$ ,  $\mathcal{V}_z^{\vartheta}$  numerycznie.

Między składowymi  $\mathcal{V}_r^{\vartheta}$ ,  $\mathcal{V}_z^{\vartheta}$  wektora prędkości wzdłuż osi  $r$ ,  $z$ , a jego składowymi  $\mathcal{V}_\alpha^{\vartheta}$ ,  $\mathcal{V}_\beta^{\vartheta}$  wzdłuż charakterystyki  $\alpha$ ,

$\beta$  istnieje oczywista zależność (rys. 10.108)

$$\begin{aligned} v_\alpha^l &= v_\alpha^l \cos \nu^l - v_\beta^l \sin \nu^l, \\ v_z^l &= v_\alpha^l \sin \nu^l + v_\beta^l \cos \nu^l \end{aligned} \quad (10.348)$$

oraz zależność odwrotna

$$\begin{aligned} v_\alpha^l &= v_r^l \cos \nu^l + v_z^l \sin \nu^l, \\ v_\beta^l &= -v_r^l \sin \nu^l + v_z^l \cos \nu^l. \end{aligned} \quad (10.349)$$

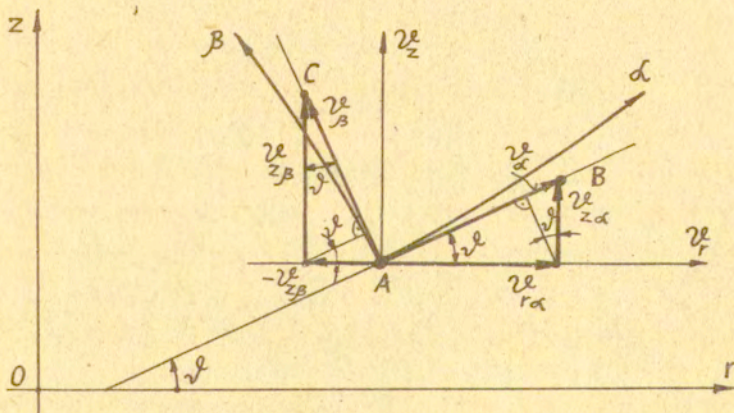
Wprowadzając do równań (10.347) elementarne długości linii  $dS_\alpha$ ,  $dS_\beta$  wzdłuż linii  $\alpha$ ,  $\beta$  od punktu A do punktu B

i od punktu A do punktu C (rys. 10.115a) oraz

wykorzystując zależności (10.348) i (10.349) otrzymamy zależności wzdłuż charakterystyk w postaci

$$\begin{aligned} dv_\alpha^l - v_\beta^l d\nu^l &= -\frac{v_r^l}{2r} dS_\alpha \quad \text{wzdłuż linii } \alpha, \\ dv_\beta^l + v_\alpha^l d\nu^l &= -\frac{v_r^l}{2r} dS_\beta \quad \text{wzdłuż linii } \beta. \end{aligned} \quad (10.350)$$

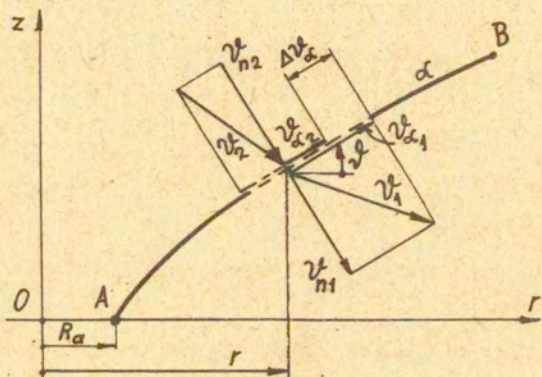
Zależności (10.350) będą wykorzystane do określenia skoku prędkości wzdłuż linii nieciągłości i konstrukcji hodografu.



Rys. 10.108 . Rozkład prędkości płynięcia w punkcie A

10.5.4.4. Równanie prędkości wzdłuż linii nieciągłości

Przyjmijmy, że linia AB (rys. 10.109) jest linią nieciągłości prędkości i nazwijmy ją charakterystyka  $\alpha$ . Nieciągłość prędkości na tej linii możliwa jest tylko w składowej stycznej  $v_{\alpha}^{\ell}$ . Składowa normalna  $v_n^{\ell}$  po obu stronach linii musi być



Rys. 10.109. Skok prędkości na linii

taka sama (czyli ciągła), aby była zachowana ciągłość materiału (nie było pustki lub też, aby materiał nie zachodził na siebie). Wielkość skoku prędkości na linii nieciągłości otrzymujemy wychodząc ze związku prędkości po charakterystyce  $\alpha$  (10.350), zależności na  $v_r^{\ell}$  (10.348) oraz długości linii elementarnej  $dS_{\alpha} = \frac{dr}{\cos \varphi}$ . Odejmując stronami związek wzdłuż charakterystyki  $\alpha$  napisany po obu stronach linii i uporządkowując go otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{d(v_{\alpha_1}^{\ell} - v_{\alpha_2}^{\ell})}{v_{\alpha_1}^{\ell} - v_{\alpha_2}^{\ell}} = - \frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$|\Delta v_{\alpha}^{\ell}| = v_{\alpha_1}^{\ell} - v_{\alpha_2}^{\ell} = \frac{C}{\sqrt{r}} .$$

Stałą całkowania  $C$  znajdujemy z warunku brzegowego. Jeśli promień  $r = R_a$ , to skok prędkości  $|\Delta v_{\alpha}^{\ell}|$  jest równy prędkości w punkcie  $A$   $|v_{\alpha}^{\ell}|$  ( $|\Delta v_{\alpha}^{\ell}| = |v_{\alpha}^{\ell}|$ ) i wówczas równanie na skok prędkości na linii  $\alpha$  przyjmuje następującą postać:

$$|\Delta v_{\alpha}^{\ell}| = \frac{|v_{\alpha}^{\ell}| \cdot \sqrt{R_a}}{\sqrt{r}} . \quad (10.351)$$

Zatem skok prędkości na linii nieciągłości jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z promienia  $r$  w danym punkcie na charakterystyce  $\alpha$ . W równaniu (10.351)  $R_a$  jest promieniem punktu  $A$  przecięcia rozpatrywanej linii z osią  $r$ ,  $v_{\alpha}^{\ell}$  jest składową styczną (do linii  $\alpha$ ) prędkości w tym punkcie,  $r$  jest współrzędną punktu, w którym wartość skoku składowej prędkości  $\Delta v_{\alpha}^{\ell}$  jest obliczana. Analogiczny wzór obowiązuje, gdy linią nieciągłości jest linia  $\beta$ .

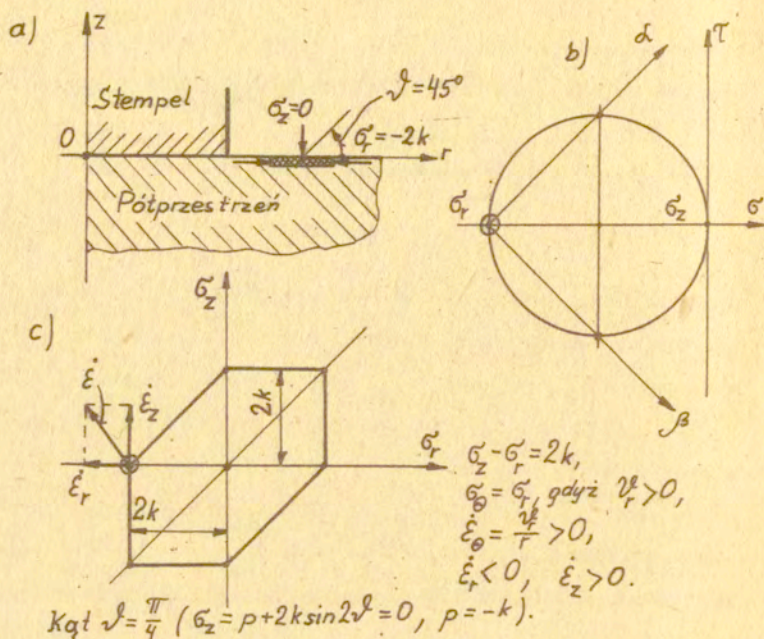
#### 10.5.4.5. Zagadnienia brzegowe

##### 1. Warunki brzegowe

##### a. Warunki brzegowe dla naprężeń

Zakładamy, że na swobodnej powierzchni materiału odkształcanego naprężenie jest równe zero. Drugie naprężenie działające na wyodrębniony element wynika z przyjętego warunku plastyczności. Stan naprężenia i kierunki charakterystyk określamy przy pomocy koła Mohra, natomiast warunek plastyczności i składowe prędkości odkształcenia przedstawiamy na sześcioboku Treski. Dla procesu wciśnięcia cylindrycznego stempla w półprzestrzeń warunek brzegowy dla naprężeń przedstawione na

poniższej ilustracji.



Dla procesu ściskania pierścieni warunek brzegowy dla naprężeń dla wypływu materiału zarówno na zewnątrz jak i do środka układu przedstawiono na poniższym szkicu.

Na brzegu jest spełniony warunek plastyczności  $\sigma_r - \sigma_z = 2k$ .

Gdy materiał płynie na zewnątrz to,  $\nu_r > 0, \sigma_\theta = \sigma_r$ ,

$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\nu_r}{r} > 0, \dot{\epsilon}_r > 0, \dot{\epsilon}_z < 0$ .

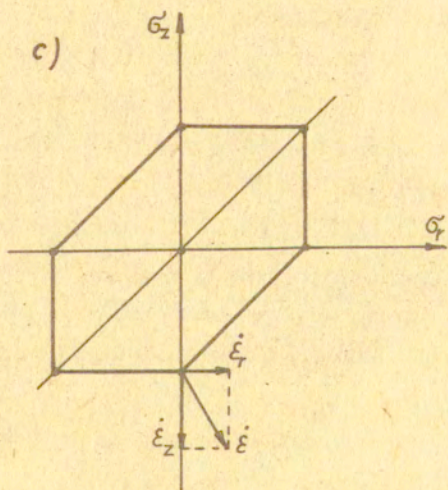
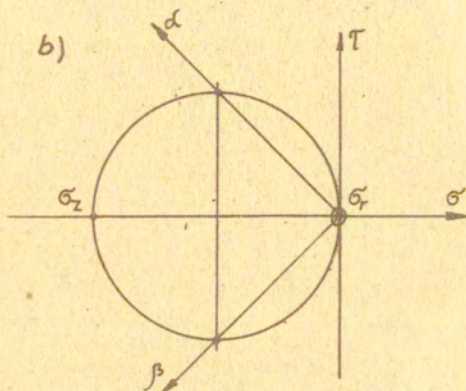
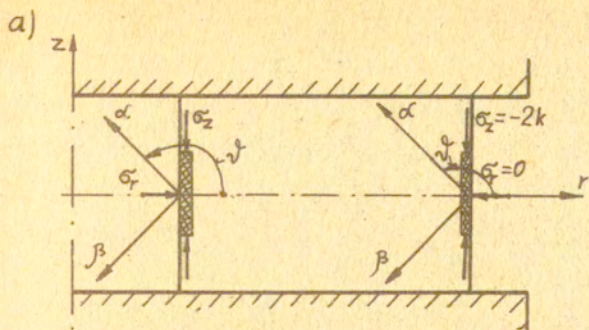
Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  jest rozciągające.  $\dot{\epsilon}_z < 0$ ,

bo jest ściskanie. Kąt  $\varphi = 135^\circ$ , gdyż  $\sigma_r = p - k \sin 2\varphi = 0$

$p = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} = -k$ . Dla płynięcia materiału do środka układu

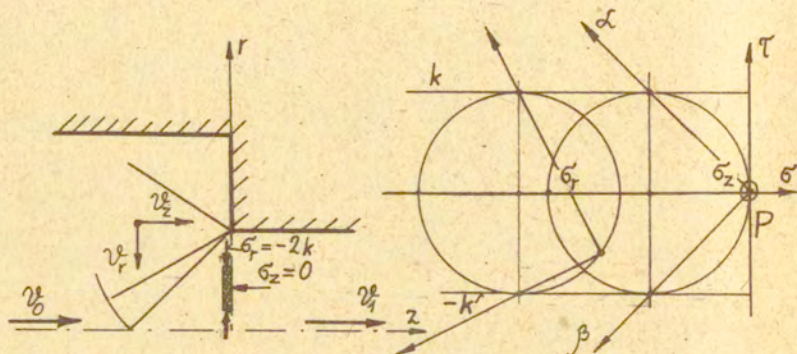
współrzędnych:  $\nu_r < 0, \dot{\epsilon}_\theta < 0, \dot{\epsilon}_z < 0$  (bo jest ściskanie),  $\dot{\epsilon}_r > 0$  (gdyż  $\dot{\epsilon}_r = \frac{\nu_r}{r}$ , a r się zmniejsza).

Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta = \sigma_z$ , a warunek plastyczności



$\sigma_r - \sigma_z = 2k$ . Kąt  $\nu = 135^\circ$  ( $\sigma_r = p - k \sin 2\nu = 0$ ,  
 $p = -k$ ). Dla punktów leżących głębiej koło Mohra i warunek  
 plastyczności Treski przemieszcza się względem początku przyję-  
 tego układu współrzędnych.

Dla procesu wyciskania w matrycy kątowej (pokazanego  
 poniżej) warunek brzegowy jak i koło Mohra są podobne



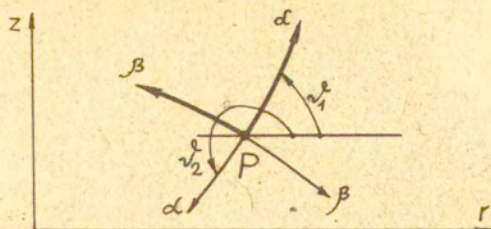
do poprzednio opisanych procesów. Kierunki charakterystyk w  
 różnych punktach materiału na płaszczyźnie fizycznej jak i na  
 kole Mohra obracają się w prawo.

Kierunki charakterystyk dla danego zadania określamy:

- 1) z umowy określania kąta  $\nu$  i kąta  $\varphi$  (rys. 10.107),  
 układ, bez osi, obracamy w kierunku większego naprężenia  
 głównego warunku brzegowego,
- 2) z położenia bieguna naprężenia P na kole Mohra, charakte-  
 rystyka  $\alpha$  łączy biegun z punktem największych naprężeń  
 stycznych na kole Mohra, a charakterystyka  $\beta$  łączy  
 biegun naprężenia z punktem najmniejszych naprężeń styczn-  
 ych na kole Mohra.

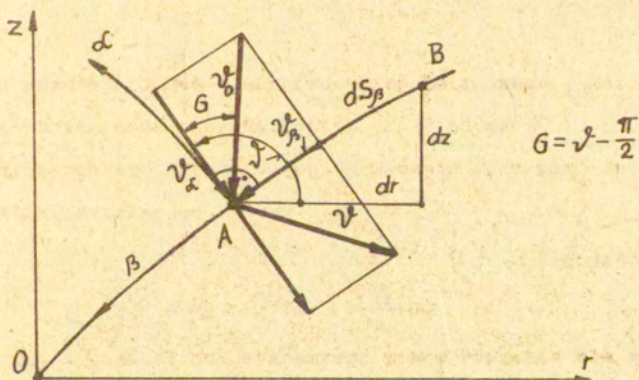
Zwrot charakterystyk nie ma znaczenia, ponieważ  $\nu_2^l = 180 + \nu_1^l$ ,  
 $\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \nu_1^l$ ,  $\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \nu_2^l = \operatorname{tg}(180 + \nu_1^l) = \operatorname{tg} \nu_1^l$ .





b. Warunki brzegowe dla prędkości

Przyjmijmy, że mamy linię OAB będącą charakterystyką  $\beta$  (rys.10.110). Nad linią jest obszar sztywny, pod linią jest obszar plastyczny. Na całej długości linii OAB występuje prędkość ruchu stempla  $v_0^z$ , a w każdym punkcie linii jest inny kąt  $\nu$ . Zakładamy, że siatka charakterystyk w obszarze plastycznym jest już wyznaczona. Punkt O jest środkiem symetrii zadania względem osi z i względem płaszczyzny środkowej.



Rys. 10.110. Warunek brzegowy dla prędkości procesu ściskania krążka.

Prędkość  $v_0^l$  można rozłożyć na składowe

$$\begin{aligned} v_\alpha^l &= v_0^l \sin \psi^l, \\ v_\beta^l &= -v_0^l \cos \psi^l \end{aligned} \quad (10.352a)$$

lub na składowe

$$\begin{aligned} v_z^l &= -v_0^l = -1, \\ v_r^l &= 0. \end{aligned} \quad (10.352b)$$

Charakterystyka OAB (rys. 10.110) w zagadnieniach osiowo-symetrycznych nie jest linią nieciągłości prędkości w przeciwieństwie do zagadnień płaskich. Po obu stronach linii OAB składowa normalna musi być taka sama,  $v_\alpha^l = v_\alpha^r$ . z

równania (10.350)<sub>2</sub> i równania (10.348)<sub>1</sub> oraz zależności

$dS_\beta = -\frac{dr}{\sin \psi^l}$  otrzymujemy równanie

$$\frac{d(v_\beta^l + \cos \psi^l)}{v_\beta^l + \cos \psi^l} = -\frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$v_\beta^l + \cos \psi^l = \frac{A}{r}.$$

Aby  $v_\beta^l$  była skończona w punkcie 0, to stała A musi być równa zero. Wówczas wzdłuż linii OAB po stronie plastycznej mamy składowe prędkości

$$\begin{aligned} v_\beta^l &= -\cos \psi^l, \\ v_\alpha^l &= \sin \psi^l, \end{aligned} \quad (10.353)$$

a więc takie same jak po stronie sztywnej. Wynika stąd wniosek, że na linii OAB nie ma skoku prędkości.

Punktem wyjścia do wyznaczenia prędkości w obszarze plastycznym jest przyjęcie wzorów G.Easona i R.T. Shielda na składowe prędkości płynięcia w otoczeniu punktu 0

$$v_r^l = \frac{2v_0^l}{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad (10.354a)$$

$$v_z^l = \frac{2v_0^l}{\pi} \arccos(\operatorname{tg} \psi).$$

Kąt  $\psi$  jest zawarty między promieniem wodzącym OP punktu P a osią  $r$ . W naszym przypadku  $\psi = 0$ , zatem w otoczeniu punktu O będą prędkości

$$\begin{aligned} v_r^e &= \frac{2v_0^e}{\pi}, \\ v_z^e &= 0. \end{aligned} \quad (10.354b)$$

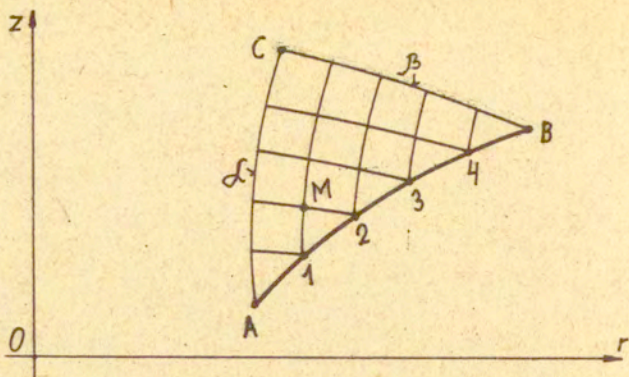
W innych punktach na linii OAB składowe prędkości są:

$v_r^e = 0$ ,  $v_z^e = -v_0^e = -1$ . Na linii OAB mamy dane wszystkie wartości. Dalej składowe prędkości  $v_r^e$  i  $v_z^e$  obliczamy ze związków po charakterystykach  $\alpha$  i  $\beta$  (10.347) rozwiązując odpowiednie zagadnienia brzegowe.

W punkcie O (rys.10.110) nie można stosować związków po charakterystykach (10.347), gdyż promień  $r$  w punkcie O dąży do zera, a w związkach (10.347) promień  $r$  występuje w mianowniku, co powoduje, że  $v_r^e$  dąży do nieskończoności, a to jest fizycznie niemożliwe.

## 2. Zagadnienie Cauchy'ego

Zagadnienie Cauchy'ego (rys.10.111) polega na tym, że jeżeli w płaszczyźnie  $r, z$  dany jest brzeg AB, na którym dane są wszystkie wartości  $r, z, p, v^e$ , a z punktów A i B wychodzą charakterystyki  $\alpha$  i  $\beta$  przecinające się w punkcie C, to w całym obszarze ABC można wyznaczyć charakterystyki. Brzeg AB może przeciąć jedna charakterystyka rodziny  $\alpha$  lub  $\beta$  tylko w jednym punkcie. Funkcje  $p$  i  $v^e$  są ciągłe i różniczkowalne. Często linią AB jest swobodna, nieobciążona powierzchnia materiału odkształcanego.



Rys. 10.111. Ilustracja brzegowego zagadnienia Cauchy'ego.

W trójkącie krzywoliniowym ABC rozwiązania poszukuje się przez numeryczne całkowanie równań różniczkowych charakterystyk (10.338) zastępując różniczki zwyczajne różnicami skończonymi. W tym celu na linii AB obieramy szereg punktów 1, 2, ..., dla których znane są współrzędne  $r$ ,  $z$ , kąt  $\nu$  oraz naprężenie  $p$ . Współrzędne  $r_M$ ,  $z_M$  punktu  $M$  znajdujemy z rozwiązania równań

$$\begin{aligned} z_M - z_1 &= (r_M - r_1) \operatorname{tg} \nu_1^l, \\ z_M - z_2 &= -(r_M - r_2) \operatorname{ctg} \nu_2^l. \end{aligned} \quad (10.355)$$

Po wyznaczeniu współrzędnych punktu  $M$  wyznaczamy w nim naprężenie  $p_M$  i kąt  $\nu_M^l$  ze związków po charakterystykach (10.339) zastępując w nich różniczki różnicami skończonymi

$$\begin{aligned} p_M - p_1 - 2k(\nu_M^l - \nu_1^l) &= \frac{k}{r_{1M}} (\Delta z_1 + \Delta r_1), \\ p_M - p_2 + 2k(\nu_M^l - \nu_2^l) &= -\frac{k}{r_{2M}} (\Delta z_2 - \Delta r_2), \end{aligned} \quad (10.356)$$

gdzie  $r_{1M} = \frac{r_1 + r_M}{2}$ ,  $r_{2M} = \frac{r_2 + r_M}{2}$ ,  $\Delta z_1 = z_M - z_1$ ,  
 $\Delta z_2 = z_M - z_2$ ,  $\Delta r_1 = r_M - r_1$ ,  $\Delta r_2 = r_M - r_2$ .

W celu zwiększenia dokładności wyznaczonych wielkości

obliczenia należy powtórzyć wstawiając zamiast kąta

$$v_1^l = \frac{v_1^l + v_M^l}{2}, \quad v_2^l = \frac{v_2^l - v_M^l}{2}.$$

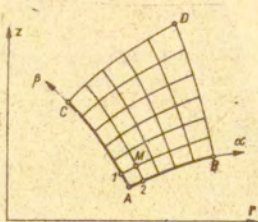
Jeśli w drugim przybliżeniu wartości  $r_M$ ,  $z_M$  będą dostatecznie bliskie wartościom z poprzedniego obliczenia, to obliczenia przerywamy.

W praktyce wystarcza drugie przybliżenie.

W opisany sposób obliczamy wszystkie punkty sąsiadujące z brzegiem AB, które następnie są podstawą do obliczenia pozostałych punktów w całym obszarze ABC.

### 3. Zagadnienie charakterystyczne

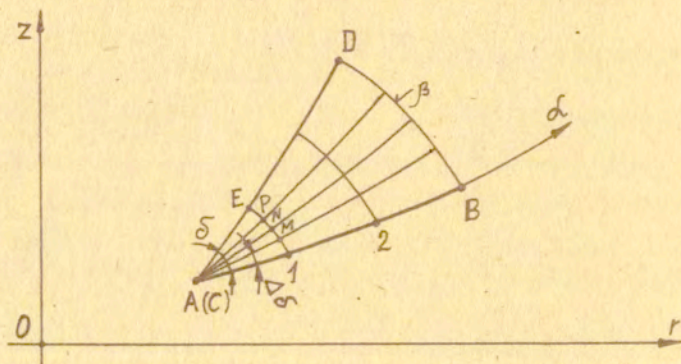
Zagadnienie charakterystyczne polega na tym, że jeśli mamy dwie charakterystyki AB i AC należące do różnych rodzin (rys.10.112), na których dane są wszystkie wartości, to można znaleźć rozwiązanie w całym trójkącie krzywoliniowym ABDC.



Rys.10.112. Ilustracja brzegowego zagadnienia charakterystycznego.

Obliczenia numeryczne przeprowadza się za pomocą tych samych wzorów rekurencyjnych (10.355) i (10.356) po obraniu szeregu punktów wyjściowych na charakterystykach i wyznaczeniu ich wartości. Obliczenia rozpoczynamy od punktów sąsiadujących z punktem A, w którym przecinają się dwie charakterystyki.

Przy rozwiązywaniu procesów obróbki plastycznej często występuje zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne. W zagadnieniu tym jedna charakterystyczna schodzi do punktu (rys.10.113). Przyjmijmy, że charakterystyka AC schodzi do



Rys. 10.113 . Ilustracja zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego.

punktu A. Kąt  $\psi$  na charakterystyce AC jest taki jak w punkcie A.

Rozwiązanie rozpoczynamy od podzielenia kąta  $\delta$  na szereg małych jednakowych kątów  $\Delta\delta$ . Na charakterystyce  $\alpha$  (AB) obieramy cały szereg punktów. Obrany punkt 1 w pobliżu punktu A pozwala wyznaczyć wartości w punkcie M. W punkcie M kąt  $\psi_M^l = \psi_1^l + \Delta\psi^l$ . Wzdłuż charakterystyki  $\beta$  (linia 1-M) mamy zależność

$$P_M - P_1 + 2k(\psi_M^l - \psi_1^l) = -\frac{k}{r_{1M}} (\Delta z_1 - \Delta r_1), \quad (10.357)$$

gdzie  $\Delta z_1 = z_M - z_1$ ,  $\Delta r_1 = r_M - r_1$ ,  $r_{1M} = \frac{r_1 + r_M}{2}$ ,  
z którego wyznaczamy  $\rho_M$ . Współrzędne punktu  $M(r_M, z_M)$   
obliczamy z równań ( $v_A^l$  i  $v_1^l$  są znane)

$$\begin{aligned} z_M - z_A &= (r_M - r_A) \operatorname{tg}(v_A^l + \Delta v^l), \\ z_M - z_1 &= -(r_M - r_1) \operatorname{ctg} v_1^l. \end{aligned} \quad (10.358)$$

Mając wyznaczony punkt M przystępujemy do wyznaczenia punktu N przyjmując kąt  $v^l$  w punkcie A  $v^l = v_A^l + 2\Delta v^l$ . Przy obliczaniu punktu P mamy kąt  $v^l = v_A^l + 3\Delta v^l$  i tak dalej. W ten sposób wyznaczymy całą linię 1-E, aż do wyczerpania kąta  $\delta$ . Obliczone wartości wzdłuż linii 1-E i dane wyjściowe wzdłuż linii 1-B tworzą już zagadnienie charakterystyczne.

W punkcie A funkcja  $\rho$  nie ma stałej wartości, ale zmienia się o wielkość kąta  $\delta$ . Zatem w punkcie A mamy przeskok naprężenia  $\rho_A$  od wartości (po scałkowaniu równania) na linii AB

$$\rho_A + 2k v_A^l = -\frac{k}{r_A} (z_A - r_A) \quad (10.359a)$$

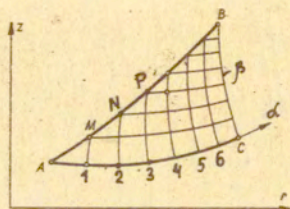
do wartości na linii AD

$$\rho_A + 2k(v_A^l + \delta) = -\frac{k}{r_A} (z_A - r_A). \quad (10.359b)$$

#### 4. Zagadnienie mieszane

Zagadnienie mieszane składa się ze znanego brzegu AB nie będącego charakterystyką (równanie  $z = z(r)$ ) oraz charakterystyki AC (rys. 10.114). W zagadnieniach obróbki plastycznej tym znanym brzegiem AB jest oś symetrii lub płaszczy-

-na symetrii, na których znany jest kąt  $\nu^l$  podejścia charakterystyk, a obliczyć należy współrzędne  $r$  i  $z$  oraz naprężenie  $p$  w poszukiwanych punktach. Na charakterystyce  $\alpha$  dane są



Rys. 10.114 . Schemat mieszane zagadnienia brzegowego współrzędne  $r$  , z kąt  $\nu^l$  i naprężenie  $p$  . Dane te wystarczą do znalezienia rozwiązania w całym krzywoliniowym trójkącie ABC utworzonym przez brzeg AB i charakterystykę  $\alpha$  (rys.10.114)  
W punkcie M współrzędne  $r$  i  $z$  obliczamy z równania

$$z_M - z_1 = -\frac{1}{2}(r_M - r_1)(\operatorname{ctg} \nu_1^l + \operatorname{ctg} \nu_M^l), \quad (10.360)$$

gdzie albo  $z_M$  , albo  $r_M$  jest znane. Naprężenie  $P_M$  obliczamy ze związku

$$P_M - P_1 + 2k(\nu_M^l - \nu_1^l) = -\frac{k}{r_{1M}}(\Delta z_1 - \Delta r_1), \quad (10.361)$$

gdzie  $r_{1M} = \frac{r_1 + r_M}{2}$  ,  $\Delta z_1 = z_M - z_1$  ,  $\Delta r_1 = r_M - r_1$  .

Prędkość płynięcia  $\nu_\alpha^l$  ,  $\nu_\beta^l$  (lub  $\nu_r^l$  ,  $\nu_z^l$ ) wyznaczamy rozwiązując takie same zagadnienia brzegowe jak dla  $r$  ,  $z$  ,  $p$  i  $\nu^l$  stosując związki prędkości po charakterystykach  $\alpha$  i  $\beta$  (10.347) .



10.5.4.6. Wykreślna metoda rozwiązywania zagadnień osiowej symetrii

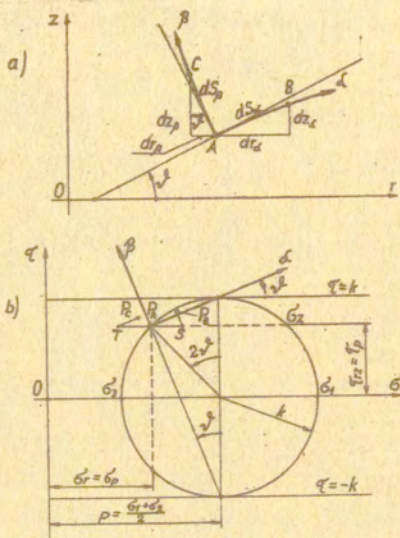
Z równań (10.340), (10.346), (10.347) i (10.351) wyznacza się rozwiązanie statyczne i kinematyczne zadania w sposób analityczny na maszynie cyfrowej. Rozwiązanie statyczne jak i kinematyczne dla zagadnień osiowej symetrii można znaleźć w sposób wykreślny.

1. Wykreślne rozwiązanie stanu naprężenia

Stan naprężenia w dowolnym punkcie A płaszczyzny fizycznej (rys. 10.115a) można przedstawić na płaszczyźnie naprężeń (rys. 10.115b) za pomocą koła Mohra o promieniu równym granicy plastyczności materiału na ścinanie  $k$  i ze środkiem umieszczonym na osi  $\sigma$  w odległości  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  od początku układu współrzędnych  $\sigma, \tau$  (Z. Mróz). Zależności wzdłuż charakterystyk (10.340) można wyrazić w funkcji współrzędnych położenia bieguna  $P_A$  ( $\sigma_p = \sigma_r$ ,  $\tau_p = \tau_{rz}$ ), które po uwzględnieniu związków (10.335) wyrażają się w postaci:

$$\begin{aligned} d\sigma_p + d\tau_p \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{k}{r} (dz \pm dr) \text{ wzdłuż } \alpha, \\ d\sigma_p - d\tau_p \operatorname{ctg} \vartheta &= -\frac{k}{r} (dz \mp dr) \text{ wzdłuż } \beta. \end{aligned} \quad (10.362)$$

Przy nieskończenie małym przemieszczeniu wzdłuż linii  $\alpha$  od punktu A do B (rys. 10.115a), bieguna  $P_A$  odpowiadający punktowi A przesunie się wzdłuż cykloidy powstałej przez odcinanie koła Mohra po prostej  $\tau = k$  i jednocześnie przesunie się w kierunku równoległym do osi  $\sigma$  o wartości  $P_A S$  (rys.



Rys.10.115. Stan naprężenia w punkcie  $\dot{A}$  w warunkach osiowej symetrii : a - płaszczyzna fizyczna , b - płaszczyzna naprężeń.

10.115b) zajmując ostateczne położenie  $P_B$ . Podobnie nieskończenie małemu przemieszczeniu wzdłuż linii  $\beta$  od punktu  $A$  do  $C$  biegun  $P_A$  przemieści się do położenia  $P_C$ . Na przemieszczenie to złoży się ruch wzdłuż cykloidy powstałej przez odtaczanie koła Mohra po prostej  $\tau = -k$  oraz ruch w kierunku równoległym do osi  $\sigma$  o wartości  $P_A T$ . Wartości przemieszczeń równoległych do osi  $\sigma$  są równe prawym stronom równań (10.362) . I tak, gdy płynięcie materiału występuje na zewnątrz przyjętego układu ( $\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_1$ ,  $\nu_r^e > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 < 0$ ),

to wzdłuż osi  $\sigma$  odkładamy wartości równe

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= P_A S = \frac{k}{r_s} (dz_\alpha + dr_\alpha), \\ \Delta\beta &= P_A T = -\frac{k}{r_s} (dz_\beta - dr_\beta),\end{aligned}\quad (10.363)$$

a gdy płynięcie materiału występuje do środka przyjętego układu ( $\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\nu_r^l < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 < 0$ ), to wzdłuż osi  $\sigma$  odkładamy wartości równe

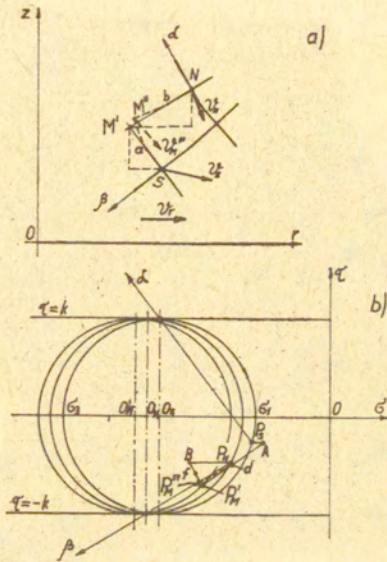
$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= P_A S = \frac{k}{r_s} (dz_\alpha - dr_\alpha), \\ \Delta\beta &= P_A T = -\frac{k}{r_s} (dz_\beta + dr_\beta).\end{aligned}\quad (10.364)$$

We wzorach (10.363) i (10.364)  $dr_\alpha$  i  $dz_\alpha$  są rzutami przemieszczenia  $dS_\alpha$  na kierunek  $r$  i  $z$  i podobnie  $dr_\beta$  i  $dz_\beta$  są rzutami przemieszczenia  $dS_\beta$  na kierunek  $r$  i  $z$ ,  $r_s$  jest średnią wartością promienia wymienionych rzutów przemieszczeń. W obu przypadkach dodatnie wartości  $\Delta\alpha$  i  $\Delta\beta$  odkładamy w kierunku dodatnim osi  $\sigma$ , a ujemne wartości w kierunku ujemnym osi  $\sigma$ .

Omówione zależności między przemieszczeniami wzdłuż linii poślizgu i przemieszczeniami bieguna na płaszczyźnie naprężeń mogą być wykorzystane do konstrukcji siatki charakterystyk i określania stanu naprężenia w obszarze plastycznym. Weźmy dwa sąsiednie punkty  $S$  i  $N$  na płaszczyźnie fizycznej (rys. 10.116a), których stan naprężenia przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń położeniem biegunów  $P_S$  i  $P_N$  (rys. 10.116b). Należy określić położenie punktu  $M$  powstające z przecięcia się charakterystyki  $\alpha$  i  $\beta$  wyprowadzonych z punktu  $S$  i  $N$  oraz odpowiadający temu punktowi stan naprężenia reprezentowany położeniem bieguna  $P_M$  na płaszczyźnie kół Mohra.

W tym celu wyznaczamy pierwsze przybliżenie położenia punktu  $M$ , jako punkt  $M'$ , powstały z przecięcia linii prostych wyprowadzonych z punktu  $S$  i  $N$  w kierunku linii poślizgu a określonych przez bieguny  $P_S$  i  $P_N$ . Mając wyznaczone położenie punktu  $M'$  obliczamy ze wzorów (10.363) lub (10.364) przy płynięciu metalu do środka układu współrzędnych, wartości  $\Delta\alpha$  i  $\Delta\beta$ , które następnie odkładamy na płaszczyźnie naprężeń. Wartość  $\Delta\alpha$  odkładamy od bieguna  $P_S$ , a wartość  $\Delta\beta$  odkładamy od bieguna  $P_N$ . Następnie z wyznaczonego przez  $\Delta\alpha$  punktu  $A$  rysujemy prostopadłą do kierunku charakterystyki  $\alpha$  w punkcie  $S$ , a z punktu  $B$  rysujemy prostopadłą do kierunku charakterystyki  $\beta$  w punkcie  $N$ . Punkt przecięcia obu prostych stanowi pierwsze przybliżenie bieguna  $P_M'$ . Kierunki charakterystyk bieguna  $P_M'$  odkładamy na płaszczyźnie fizycznej odpowiednio od punktów  $a$  i  $b$  zachowując równości  $Sa = aM''$  i  $Nb = bM''$ . W przecięciu tych prostych otrzymujemy drugie przybliżenie punktu  $M$  oznaczone na rysunku jako  $M''$ , któremu odpowiada drugie przybliżenie bieguna  $P_M''$ . Odcinki  $fP_M''$ ,  $dP_M''$  są odpowiednio równoległe do kierunków charakterystyk na płaszczyźnie fizycznej. Trzecie przybliżenie położenia punktu  $M$  jako  $M'''$  i bieguna  $P_M'''$  znajdziemy powtarzając opisaną procedurę od początku. Przy dalszym przybliżaniu wyznaczone punkty wpadają na siebie, co oznacza, że zostały wyznaczone dokładnie.

W przedstawionej procedurze łuki cykloid zastąpione są przez odcinki linii prostych poprowadzonych z punktów  $A$  i  $B$ , nie dają dużych błędów szczególnie w przypadku, gdy siatka charakterystyk jest dostatecznie gęsta.



Rys. 10.116. Wykreślna konstrukcja siatki linii poślizgu dla zagadnień osiowo-symetrycznych : a- płaszczyzna fizyczna , b- płaszczyzna naprężeń.

## 2. Wykres prędkości (hodograf)

W warunkach osiowej symetrii wzdłuż charakterystyk zachodzą związki

$$dV_{\alpha}^2 - V_{\beta}^2 dV^2 = -\frac{V_r^2}{2r} dS_{\alpha} \quad \text{wzdłuż linii } \alpha, \quad (10.365)$$

$$dV_{\beta}^2 + V_{\alpha}^2 dV^2 = -\frac{V_r^2}{2r} dS_{\beta} \quad \text{wzdłuż linii } \beta,$$

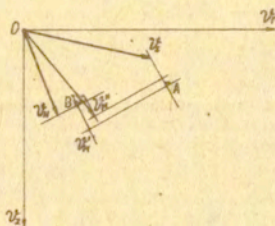
których prawe strony powodują skracanie charakterystyk w

przypadku, gdy  $v_r^e > 0$  lub wydłużanie, gdy  $v_r^e < 0$ . Konstrukcja hodografu będzie następująca. Załóżmy, że mamy określone prędkości punktów S i N (rys. 10.116a), które odkładamy od bieguna O na płaszczyźnie prędkości (rys. 10.117). Następnie z końca wektora  $v_S^e$  odkładamy odcinek

$$\overline{v_S^e A} = \frac{1}{2} \frac{(v_r^e)_S}{r_S} dS_\alpha \quad (10.366)$$

równoległe do cięciwy łączącej punkt S i M". I analogicznie z końca wektora  $v_N^e$  odkładamy odcinek

$$\overline{v_N^e B} = \frac{1}{2} \frac{(v_r^e)_N}{r_S} dS_\beta \quad (10.367)$$



Rys. 10.117. Wykreślna konstrukcja pola prędkości dla zagadnień osiowo-symetrycznych

równoległe do cięciwy NM". Gdy w punktach S i N prędkości  $v_r^e > 0$ , to charakterystyki ulegają skróceniu i wartości  $\overline{v_S^e A}$  i  $\overline{v_N^e B}$  odkładamy jak na rysunku 10.117, gdy natomiast prędkości  $v_r^e < 0$ , charakterystyki ulegają wydłużeniu i wówczas wartości  $\overline{v_S^e A}$  i  $\overline{v_N^e B}$  odkładamy w kierunku przeciwnym. Następnie z punktów A i B prowadzimy proste prostopadłe

do odpowiednich odcinków linii siatki charakterystyk. I tak z punktu A prowadzimy linię prostopadłą do cięciwy  $S M''$ , a z punktu B rysujemy linię prostopadłą do cięciwy  $N M''$ . W przecięciu tych linii otrzymujemy punkt  $v_M^r$  określający wektor prędkości w punkcie  $M''$  na płaszczyźnie fizycznej. Mając prędkość  $v_M^r$  w punkcie  $M''$  możemy wyznaczyć jej składową promieniową  $v_r^r$ . Wstawiając do wzoru (10.366) średnią prędkość promieniową między punktem S i  $M''$   $\left\{ (v_r^r)_S = \frac{1}{2} \left[ (v_r^r)_S + (v_r^r)_M + (v_r^r)_M'' \right] \right\}$  i analogicznie do wzoru (10.367) średnią prędkość promieniową między punktami N i  $M''$  znajdziemy drugie przybliżenie położenia punktu  $v_M^{r,r}$  na płaszczyźnie hodografu. Stosując opisaną procedurę możemy znaleźć pole prędkości w całym obszarze plastycznego płynięcia.

#### 10.5.4.7. Nacisk jednostkowy

##### 1. Oceny nośności granicznej

W teorii plastyczności znane są twierdzenia o dolnej i górnej ocenie nośności granicznej.

Dolna ocena wartości nośności jest obliczona z rozwiązania statycznego (pola naprężeń). Pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne, jeśli w każdym punkcie zadania znane są naprężenia i spełnione są:

- równania równowagi,
- w żadnym punkcie nie jest przekroczony warunek plastyczności,
- spełnione są warunki brzegowe dla naprężeń.

Dolną ocenę nośności granicznej oblicza się z siły otrzymanej przez całkowanie stanu naprężenia występującego na ostatniej

charakterystyce rozwiązania statycznego zadania. Wartość tej siły obliczana jest ze wzoru

$$P = 2\pi \int (\sigma_z r_s dr \mp \tau_{rz} r_s dz), \quad (10.368)$$

w którym znak minus dotyczy płynięcia materiału na zewnątrz, znak plus dotyczy płynięcia materiału w kierunku ujemnym przyjętego układu współrzędnych. Naprężenia  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$  wyznaczone są ze wzoru (10.335). Natomiast  $r_s$  jest średnim promieniem między dwoma punktami na tej charakterystyce oddalonymi od siebie o wartość  $dr$  i  $dz$  mierzoną w kierunku promienia  $r$  i wysokości  $z$ .

Górna ocena wartości nośności obliczona jest z rozwiązania kinematycznego (pola prędkości). Pole jest kinematycznie dopuszczalne, jeśli znane są prędkości we wszystkich punktach obszaru i jeśli spełnione są warunki :

- ciągłość materiału,
- nieściśliwość,
- spełnione są warunki brzegowe dla prędkości,
- możliwy jest wypływ materiału.

Górną ocenę wartości nośności granicznej oblicza się z równań (10.372) i (10.375) lub też z równań (10.374) i (10.375).

Z twierdzeń o nośności granicznej dla ciała idealnie plastycznego wynika, że rozwiązanie ściśle nośności danego zadania otrzymuje się w przypadku, gdy dla otrzymanego pola statycznie dopuszczalnego można zbudować pole kinematycznie dopuszczalne. Jeśli pole statyczne jest polem niedopuszczalnym kinematycznie, to nośność obliczona z rozwiązania statycznego jest jedynie dolną oceną wartości nośności. Samo pole kinematycznie dopuszczalne daje ocenę górną. Gdy pole statycz-



-nie dopuszczalne jest zarazem polem kinematycznie dopuszczalnym, to nośności obliczone z obu pól są identyczne i jest to wówczas rozwiązanie ścisłe.

## 2. Równania dysypacji

Górną ocenę wartości nośności granicznej oblicza się z warunku równości mocy sił zewnętrznych  $D_z = P \mathcal{V}_0^e = \bar{p} \mathcal{V}_0^e F_0$  z mocą sił wewnętrznych  $D_w$ . W przypadku istnienia linii nieciągłości lub tarcia na kontakcie materiału z narzędziem moc sił wewnętrznych jest sumą mocy sił w elementach objętości  $D_0$  i na liniach nieciągłości lub na kontakcie  $D_n$  ( $D_w = D_0 + D_n$ ). Warunek ten w postaci całkowej wyrazić można następująco:

$$\int_{F_0} \bar{p} \mathcal{V}_0^e dF_0 = \int_V \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik} dV + \int_{F_s} \tau_s \mathcal{V}_s^e dF_s. \quad (10.369)$$

W warunkach osiowej symetrii występuje: element objętości  $dV = 2\pi r dr dz$ , powierzchnia oczka siatki charakterystyk —  $dF = dr dz$  i powierzchnia elementu na liniach nieciągłości lub kontakcie materiału z narzędziem —  $dF_s = 2\pi r dr$ . Na liniach nieciągłości  $\tau_s$  jest naprężeniem stycznym równym granicy plastyczności na ścinanie  $k = \frac{\sigma_p}{2}$  ( $\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_3$ ), a na kontakcie materiału z narzędziem  $0 \leq \tau_s \leq k$ . Gdy  $\tau_s = 0$ , to nie ma tarcia w ogóle, a gdy  $\tau_s = k$ , to występuje tarcie przyli-gowe. Przyjęcie pośrednich wartości między zero i  $k$  oznacza uwzględnienie tarcia poślizgowego na kontakcie (tarcia Coulomba). Naprężenie styczne  $\tau_s$  można wyrazić wzorem  $\tau_s = c \cdot k$ , wówczas  $0 \leq c \leq 1$  jest współczynnikiem zmniejszającym

granicę plastyczności na ścinanie.

Dysypację wewnętrzną w elementach objętości (z równania 10.369) po rozpisaniu iloczynu tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia w osiach głównych, można zapisać jako

$$D_0 = \int_F (\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) 2\pi r dF. \quad (10.370)$$

Jeśli w konkretnym zadaniu można zbudować jedynie pole kinematycznie dopuszczalne, to wówczas przyjmujemy, że stan naprężenia w tym polu spełnia warunek plastyczności Treski lub warunek plastyczności Hubera-Misesa. Przy czym ten stan naprężenia nie musi spełniać warunków brzegowych i równań równowagi.

Przyjmując stowarzyszone prawo płynięcia (10.324) z warunkiem plastyczności Treski dla głównych prędkości odkształceń np: w punkcie  $\bar{C}$  (rys. 10.105) równanie (10.370) wyrazi się następująco:

$$D_0 = \int_F (-2k \dot{\epsilon}_2) 2\pi r dF. \quad (10.371)$$

Główne prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  obliczamy z pola kinematycznego  $(v_r^e, v_z^e)$  przy pomocy równania (10.332). Znaki głównych prędkości odkształceń wskazują, w którym punkcie naroża graniastosłupa Treski (rys. 10.105) znajduje się stan prędkości odkształceń, a zarazem i stan naprężenia. Zastępując całki sumami, równanie (10.369) po uwzględnieniu równania (10.371) można zapisać

$$\bar{p} v_0^e F_0 = \sum_{i=1}^n (-2k \dot{\epsilon}_{2i}) 2\pi r_i dF_i + \sum_{j=1}^m k v_{sj}^e 2\pi r_j dr_j. \quad (10.372)$$

Jeśli główne prędkości odkształceń leżą w innych punktach równoległościanu Treski niż w punkcie  $\bar{C}$ , to w równaniu (10.371) zmienia się odpowiednio odkształcenie główne i znak (10.105).

Równania dysypacji jednostkowej podano w tabelicy 1.

Tablica 1

Równania dysypacji jednostkowej i główne prędkości odkształceń dla warunku plastyczności Treski.

L. P.	Warunek plastyczności Treski		Główne prędkości odkształceń	Równanie dysypacji
	miejsce	równanie		
1	$\bar{A}$	$\sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$	$\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$	$D_0 = -2k \dot{\epsilon}_3$
2	$\bar{B}$	$\sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \sigma_2 = \sigma_3, \sigma_1 > \sigma_2$	$\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_1$
3	$\bar{C}$	$\sigma_2 = \sigma_3 - 2k, \sigma_1 = \sigma_2, \sigma_1 > \sigma_2$	$\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$	$D_0 = -2k \dot{\epsilon}_2$
4	$\bar{D}$	$\sigma_1 = \sigma_3 - 2k, \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$	$\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_3$
5	$\bar{E}$	$\sigma_1 = \sigma_3 - 2k, \sigma_2 = \sigma_3, \sigma_2 > \sigma_1$	$\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$	$D_0 = -2k \dot{\epsilon}_1$
6	$\bar{F}$	$\sigma_2 = \sigma_3 + 2k, \sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 > \sigma_1$	$\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_2$
7	Bok $\bar{A}\bar{B}$	$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 = 0, \dot{\epsilon}_3 < 0, \dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_1$
8	Bok $\bar{B}\bar{C}$	$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 = 0, \dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_1$
9	Bok $\bar{C}\bar{D}$	$\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 = 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0, \dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}_2$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_3$
10	Bok $\bar{D}\bar{E}$	$\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 = 0, \dot{\epsilon}_3 > 0, \dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}_1$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_3$
11	Bok $\bar{E}\bar{F}$	$\sigma_2 - \sigma_1 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 = 0, \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_1$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_2$
12	Bok $\bar{F}\bar{A}$	$\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$	$\dot{\epsilon}_1 = 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0, \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_3$	$D_0 = 2k \dot{\epsilon}_2$

Górną ocenę nośności granicznej można również obliczyć przyjmując warunek plastyczności Hubera-Misesa

$$S_{ik} \cdot S_{ik} = 2k^2$$

i prawo płynięcia plastycznego Levy-Misesa

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \lambda S_{ik}, \quad (\lambda^2 = \frac{\dot{\epsilon}_{ik} \cdot \dot{\epsilon}_{ik}}{2k^2})$$

i wówczas równanie jednostkowej dysypacji wewnętrznej wyrazi się w postaci

$$D_0 = \sigma_p \dot{\epsilon}_i \quad (10.373)$$

W równaniu (10.373)  $\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2]} + \sigma_{rz}$

jest naprężeniem uplastyczniającym według hipotezy granicznej energii odkształcenia postaciowego Hubera-Misesa, a

$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ik} \dot{\epsilon}_{ik}}$  jest intensywnością prędkości odkształceń.

Niezmiennik  $\dot{\epsilon}_i$  po rozwinięciu względem współrzędnych  $r, \theta, z$  będzie

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_{rz}^2}$$

W przypadku istnienia linii nieciągłości lub tarcia na kontakcie materiału z narzędziem dyspację wewnętrzną w obszarze plastycznym wyrazić można równaniem ogólnym w postaci

$$D_w = \int_V \sigma_p \dot{\epsilon}_i dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s \quad (10.374a)$$

Gdy zastąpimy całki sumami, równanie (10.374a) przyjmie postać

$$D_w = \sum_{i=1}^n \sigma_p \dot{\epsilon}_i 2\pi r_i dr_i dz_i + \sum_{j=1}^m \tau_s v_{sj} 2\pi r_j dr_j \quad (10.374b)$$

Z równania (10.374b) oblicza się nacisk jednostkowy w przypadku, gdy pole kinematyczne dane jest w postaci założonej funkcji, a nie wyznaczone metodą charakterystyk.

Średni bezwymiarowy jednostkowy nacisk narzędzia na materiał, będący górną oceną nośności, obliczamy z równania

$$\bar{p} = \frac{D_w}{\sigma_p v_0 F_0} \quad (10.375)$$

Jeśli znamy rozkład naprężenia normalnego  $\sigma_z$  wzdłuż promienia na odkształcany materiał, to wielkość średniego nacisku jednostkowego obliczamy z wzoru

$$\bar{p} = \frac{P}{\pi R^2}$$

gdzie

$$P = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_z r dr d\theta = 2\pi \int_0^R \sigma_z r dr$$

jest siłą nacisku stempla na materiał.

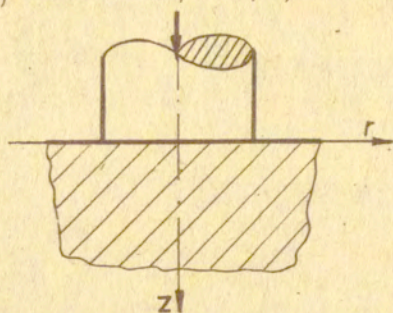
W procesach obróbki plastycznej metali podstawowym zagadnieniem jest określenie nacisków jednostkowych, energii zużytej w czasie procesu oraz mechanizmu płynięcia. Naciski jednostkowe obliczane są z równań (10.368), (10.372), (10.374) i (10.375), a mechanizm płynięcia plastycznego wyznacza się z równania (10.347) i (10.351).

#### 10.5.5. Procesy osiowo-symetryczne obróbki plastycznej metali

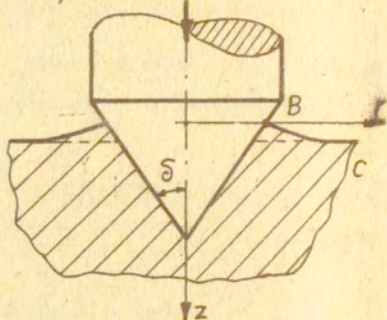
Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali posiadają duże znaczenie praktyczne. Prawie wszystkie procesy kucia na młotach, prasach, kuźniarkach oraz prasowanie na zimno i gorąco, ciągnięcie prętów, wytłaczanie i przetłaczanie przebiegają w warunkach osiowej symetrii. Ważnym i często stosowanym procesem kucia jest kucie swobodne pierścieni i krążków będących odkuwkami wstępnymi do kucia matrycowego lub gotowymi półfabrykatami.

Procesy obróbki plastycznej metali są bardzo ważne dla technologii obróbki części maszyn i urządzeń, ponieważ obniżają one koszt ich wytwarzania i wpływają na wzrost wytrzymałości mechanicznej poprzez zjawisko umocnienia materiału. Niewiele z tych procesów doczekało się analizy teoretycznej opartej na teorii plastyczności. Szczególnie metoda charakterystyk pozwala na obliczenie zarówno nacisków jednostkowych jak i wyznaczenie kinematyki płynięcia materiału. Nacisk obliczony z pola statycznego jest dolną oceną nośności, a obliczony z pola kinematycznego jest górną oceną nośności. Wyznaczone

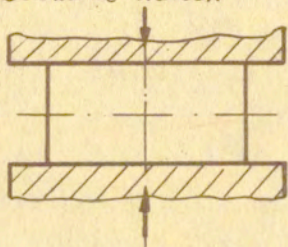
a) Wciskanie stempla w półprzestrzeń



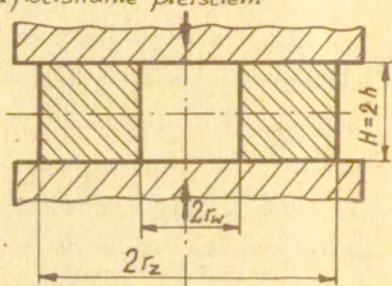
b) Wciskanie stożka



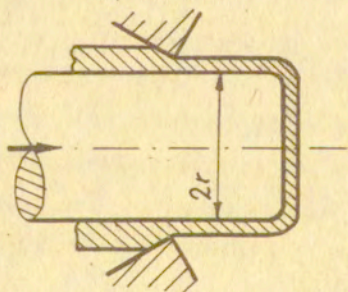
c) Ściskanie walców



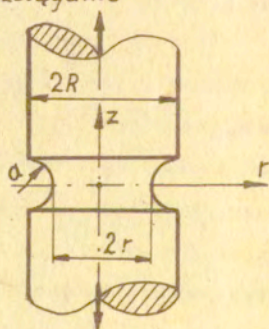
d) Ściskanie pierścieni



e) Wyciąganie



f) Różciąganie



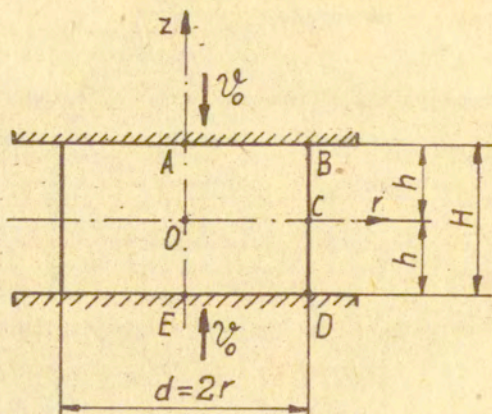
Rys. 10.118. Przykłady procesów przebiegających w warunkach osiowej symetrii.

wektory prędkości płynięcia cząstek materiału przedstawiają mechanizm płynięcia materiału.

Na rysunku 10.118 pokazano niektóre typowe procesy obróbki plastycznej metali przebiegające w warunkach osiowej symetrii. Analiza tych procesów jest znacznie trudniejsza niż procesów przebiegających w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Dokładniejsze rozwiązanie zostanie podane jedynie dla procesu ściskania walców, inne natomiast procesy zostaną tylko krótko omówione.

#### 10.5.5.1. Ściskanie walców

Rozwiązanie zagadnienia ściskania walców (rys. 10.119) metodą charakterystyk polega na znalezieniu pola naprężeń i pola prędkości płynięcia. Z rozwiązania statycznego pola naprężeń zostanie znaleziona dolna granica wartości nośności, a z rozwiązania kinematycznego pola prędkości będzie obliczona górna granica wartości nośności i mechanizm płynięcia. Rozwiązanie statyczne jak i kinematyczne będzie otrzymane przez całkowanie równań różniczkowych charakterystyk (10.338) i (10.346) jak i związków naprężenia (10.339) i prędkości płynięcia (10.347) wzdłuż tych charakterystyk. Obliczenia przeprowadzone są na maszynie cyfrowej metodą różnic skończonych. W pracy [13] zagadnienie ściskania walców rozwiązane zostało metodą wykreślną.



Rys. 10.119. Schemat ściskania walca

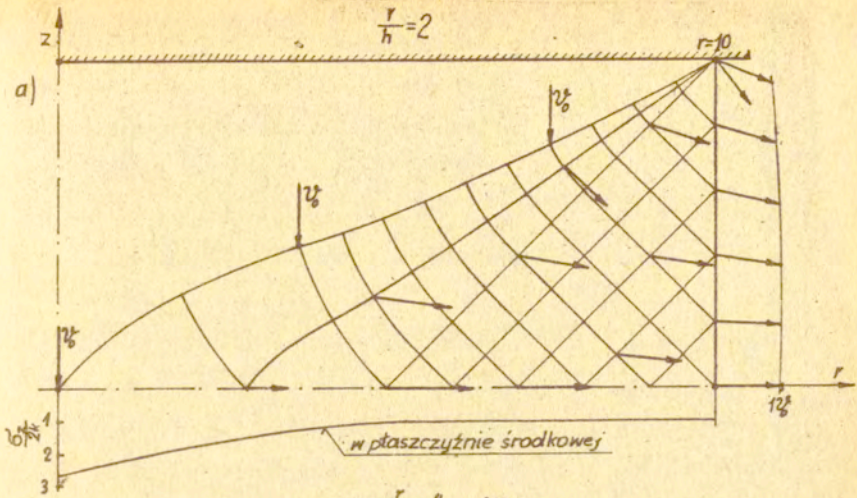
## 1. Rozwiązanie statyczne

Rozwiązanie zagadnienia pola naprężeń przy ściskaniu walca o określonej geometrii zależne jest od warunków brzegowych. Istotny wpływ mają warunki tarcia na kontakcie materiału z narzędziem. Wzięto w pracy pod uwagę tarcie suche Coulomba scharakteryzowane współczynnikiem tarcia  $\mu$ . Ze względu na osiową symetrię zadania (geometrii i warunków brzegowych) poszukiwane pole naprężeń jest symetryczne względem osi  $z$  ( $AO$ ) oraz płaszczyzny środkowej walca ( $OC$ ). Wystarczy zatem rozważyć tylko jedną czwartą część przekroju walca płaszczyzną  $r, z$ . Budowę rozwiązania oraz analizę poszczególnych obszarów wygodnie jest przedstawić na konkretnym przykładzie (rys. 10.120b).

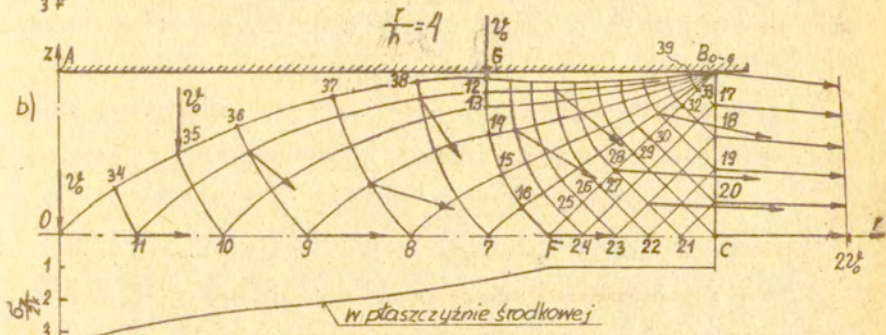
Dla wyznaczenia pola naprężeń przyjmujemy statyczny warunek brzegowy na swobodnej powierzchni bocznej walca  $BC$



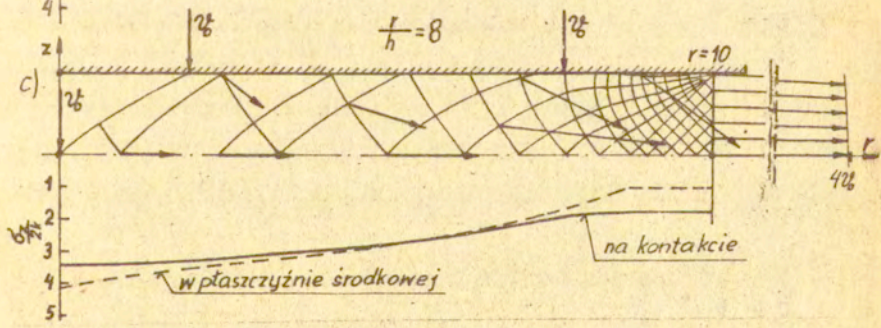
$$\frac{r}{h} = 2$$



$$\frac{r}{h} = 4$$



$$\frac{r}{h} = 8$$



Rys. 10.120 . Pola charakterystyk i rozkład naprężenia normalnego dla ściskania walców

(rys. 10.120b). Na poboczniczy walca BC znany jest stan naprężenia :  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$  i  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = -k$  oraz kąt  $\nu^l = \frac{3}{4}\pi$ . Dane te wystarczą do znalezienia stanu naprężenia w całym obszarze BCF. W obszarze tym jest jednorodny stan naprężenia. Punkty przecięcia charakterystyk leżące w pobliżu brzegu BC wyznaczmy z zagadnienia Cauchy'ego, a w pobliżu brzegu CF — z zagadnienia mieszanego. Pozostałe punkty znajdujemy z zagadnienia charakterystycznego. Linie nachylone pod kątem  $\nu^l = \frac{3}{4}\pi$  do osi r są charakterystykami  $\alpha$ , a ortogonalne do nich — charakterystykami  $\beta$  (linia  $B_0F$ ). Obie charakterystyki są prostoliniowe. W obszarze  $B_{0-6}$  33 39 mamy zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne. Na charakterystyce  $B_0F$  mamy dane wszystkie wartości  $r$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $\nu^l$ . W punkcie B charakterystyka  $\alpha$  redukuje się do punktu (zera), stałe są współrzędne  $r$ ,  $z$ , a zmienia się kąt  $\nu^l$  i średnie naprężenie główne  $p$ . Dane w punkcie B i na charakterystyce  $B_0F$  pozwalają wyznaczyć charakterystyki w całym obszarze B F O G. Najpierw wyznacza się charakterystykę  $\alpha$  (linię 33 39) w pobliżu punktu B. Charakterystyka  $\alpha$  (linia 33 39) z charakterystyką  $\beta$  (linia 33 F) tworzą zagadnienie charakterystyczne w całym obszarze  $\sqrt{F O G}$ . <sup>33 F G 39. W obszarze</sup> W całym obszarze  $\sqrt{F O G}$  mamy zagadnienie mieszane. Na brzegu F O dany jest kąt  $\nu^l = \frac{3}{4}\pi$  i współrzędna  $z = 0$ , a na linii F G, będącej charakterystyką  $\alpha$ , dane są  $r$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $\nu^l$ . Dane te wystarczają do wyznaczenia rozwiązania w całym obszarze F O G.

W punkcie  $B_{0-6}$  charakterystyki  $\beta$  wyprowadzane są pod kątem

$$\nu_M^l = \nu_0^l - \Delta \nu^l = \frac{3}{4}\pi - n5^\circ \quad (10.376)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots, i$

tak, aby ostatnia charakterystyka  $B_0 G O$  wpadła w punkt  $O$ , będący przecięciem osi z płaszczyzną środkową walca  $O F C$ .

Stan naprężenia w punkcie  $B$  oblicza się z równania

$$P_M = P_N + 2k(\nu_M^l - \nu_N^l), \quad (10.377)$$

powstałego ze związku po charakterystyce  $\alpha$  (10.339) przy przyjęciu  $dz = dr = 0$ . Kąt  $\nu_M^l$  jest obliczony z równania (10.376).

Na osi  $r$  (linia  $C F O$ ) współrzędną  $r$  obliczamy z równania charakterystyki  $\beta$  (10.338), a naprężenie  $p$  ze związku po charakterystyce  $\beta$  (10.339). Ponieważ na osi  $r$  współrzędna  $z_M = 0$ , kąt  $\nu_M^l = \frac{3}{4}\pi$ , to równania po rozpisaniu na różnice skończone będą miały postać

$$r_M = r_N + \operatorname{tg} 0,5\left(\frac{3}{4}\pi + \nu_N^l\right) z_N, \quad (10.378)$$

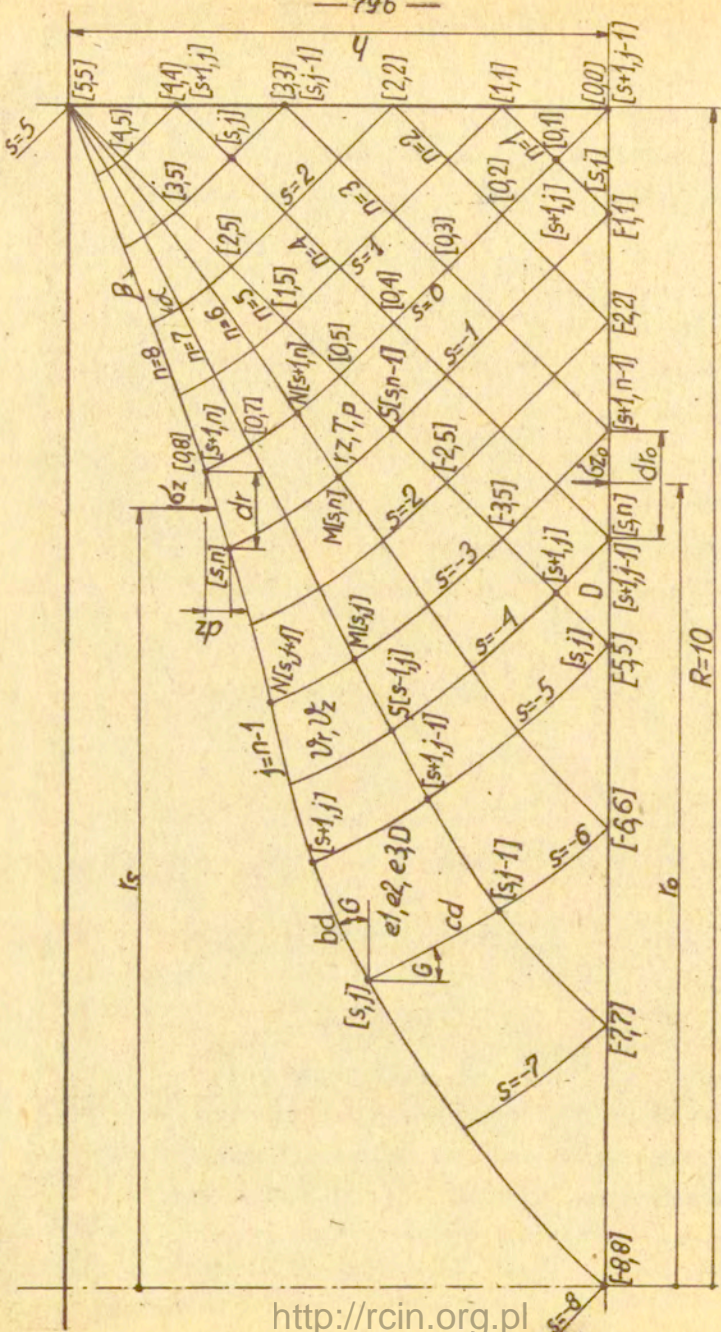
$$P_M = P_N - 2k\left(\frac{3}{4}\pi - \nu_N^l\right) - \frac{k}{r_N}(\Delta z_n - \Delta r_n).$$

W zagadnieniu charakterystycznym współrzędne  $r$ , z obliczamy z równań (10.338) po rozpisaniu ich na różnice skończone

$$r_M = \frac{z_N - z_S + r_S \operatorname{tg} 0,5(\nu_{MS}^l + \nu_S^l) + \frac{r_N}{\operatorname{tg} 0,5(\nu_{MN}^l + \nu_S^l)}}{\operatorname{tg} 0,5(\nu_{MS}^l + \nu_S^l) + \frac{1}{\operatorname{tg} 0,5(\nu_{MN}^l + \nu_S^l)}}, \quad 10.379$$

$$z_M = z_S + (r_M - r_S) \operatorname{tg} 0,5(\nu_{MS}^l + \nu_S^l).$$

Kąty  $\nu_{MN}^l = \nu_N^l$ ,  $\nu_{MS}^l = \nu_S^l$  są pierwszymi przybliżeniami wartości kątów. Naprężenie  $p$  oraz kąt  $\nu$  w punkcie poszukiwanym znajdziemy ze związków po charakterystyce  $\alpha$  i  $\beta$  rozpisanych na różnice skończone.



Rys. 10.121. Oznaczenia węzłów siatki charakterystyk w walcu

$$P_M = \frac{1}{2} [P_S + P_N + \frac{k}{r_s} (\Delta z_s + \Delta r_s) - \frac{k}{r_n} (\Delta z_n - \Delta r_n)] + k(\nu_N^l - \nu_S^l),$$

$$\nu_M^l = \nu_S^l + \frac{1}{2} \left( \frac{P_M + P_S}{k} - \frac{\Delta z_s + \Delta r_s}{r_s} \right). \quad (10.380)$$

Współrzędne siatki charakterystyk  $r$ ,  $z$ , naprężenie  $p$  oraz kąt  $\nu^l$  (rys. 10.120) obliczone są na maszynie cyfrowej "Odra 1204" z równań od (10.376) do (10.380). Sposób oznaczenia węzłów siatki, linii będących charakterystykami i obliczonych punktów siatki pokazano na rysunku 10.121.

Siłę potrzebną do odkształcenia walca, a będącą dolną oceną wartości nośności obliczamy z równania (10.368)

$$P = 2\pi \int (\sigma_z r_s dr - \tau_{rz} r_s dz), \quad (10.381a)$$

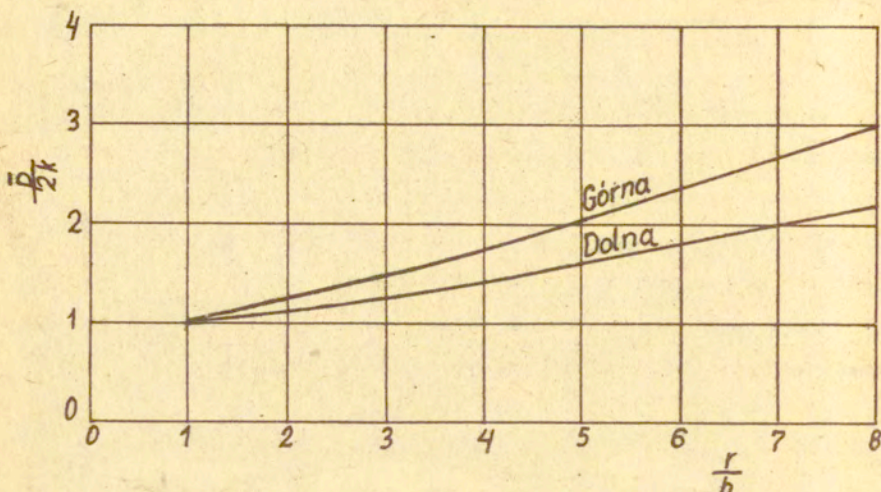
gdzie  $r_s$  jest średnim promieniem między dwoma punktami na ostatniej charakterystyce oddalonymi od siebie o wartość  $dr$  i  $dz$ , mierzoną w kierunku promienia  $r$  i wysokości  $z$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$  są naprężeniami na tej charakterystyce (rys. 10.121). Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy, będący dolną oceną wartości nośności, obliczamy ze wzoru

$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{P}{2k\pi R^2}. \quad (10.381b)$$

Zależność tego nacisku od geometrii walca pokazano na rysunku 10.122.

## 2. Rozwiązanie kinematyczne

Pole kinematyczne zostanie zbudowane na polu statycznym (rys. 10.120b), ponieważ równania charakterystyk dla prędkości są takie same jak równania charakterystyk dla naprężeń.



Rys. 10.122 . Oceny nośności granicznej ściskania walców obliczone metodą charakterystyk

Dla znalezienia pola kinematycznego przyjmujemy kinematyczny warunek brzegowy. Obszar B G O A (rys. 10.120b) jest sztywny i porusza się pionowo w dół z prędkością  $v_0^e$  tak jak górna płyta. Obszar B C F O G jest plastyczny. Linia B G O jest charakterystyką  $\beta$ , na której składowa pionowa prędkości jest  $v_0^e$ , składowa normalna  $v_x^e = -v_0^e \cos \psi = -v_0^e \sin \varphi$ , składowa styczna  $v_\beta^e = v_0^e \sin \psi = -v_0^e \cos \varphi$ . Składowe te wynikają z rzutowania  $v_0^e$  na charakterystykę  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 10.123). Przy wyrażeniu prędkości płynięcia we współrzędnych  $r$ , z warunek brzegowy na linii B G O ma postać

$$\begin{aligned} v_z^e &= -v_0^e = -1, \\ v_r^e &= 0. \end{aligned}$$

Charakterystyka B G O nie jest linią nieciągłości w przeciwieństwie do zagadnień płaskich. Wynika to z rozpatrzenia

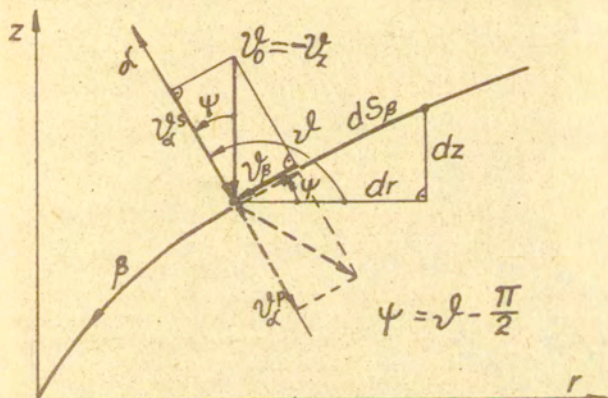
związku  $d v_{\beta}^{\ell} + v_{\alpha}^{\ell} d v^{\ell} = - \frac{v_r^{\ell}}{2r} d S_{\beta}$  wzdłuż linii B G O, zależności  $v_r^{\ell} = v_{\alpha}^{\ell} \cos \vartheta - v_{\beta}^{\ell} \sin \vartheta$ , długości linii elementarnej na charakterystyce  $\beta$ ,  $d S_{\beta} = - \frac{dr}{\sin \vartheta}$  oraz tego, że składowa normalna prędkości  $v_0^{\ell}$  po obu stronach linii B G O musi być taka sama ( $v_{\alpha}^{\ell s} = v_{\alpha}^{\ell p}$ ), aby nie było nakładania obszaru sztywnego na obszar plastyczny.

Otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{d(v_{\beta}^{\ell} + \cos \vartheta)}{v_{\beta}^{\ell} + \cos \vartheta} = - \frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$v_{\beta}^{\ell} + \cos \vartheta = \frac{A}{\sqrt{r}}.$$



Rys. 10.123. Szkic do wyprowadzenia wzorów

Prędkość  $v_{\beta}^{\ell}$  ma skończoną wartość w punkcie O wtedy, gdy stała całkowania  $A = 0$  (bo  $r = 0$ ). Stąd wynikają prędkości

płynięcia wzdłuż charakterystyki B G O po stronie obszaru plastycznego

$$\begin{aligned} v_{\beta}^e &= -\cos \psi^e, \\ v_{\alpha}^e &= -\sin \psi^e. \end{aligned}$$

Składowa styczna prędkości  $v_{\beta}^e$  na linii B G O po stronie obszaru sztywnego równa się składowej stycznej po stronie obszaru plastycznego. Oznacza to, że charakterystyka B G O, oddzielająca obszar sztywny od plastycznego, nie jest linią nieciągłości, gdyż po obu stronach linii wektory prędkości są takie same. Linia B G O może być tylko linią słabej nieciągłości, to znaczy skoku doznawać mogą jedynie pierwsze pochodne prędkości.

W związkach po charakterystykach dla prędkości (10.347) w mianowniku występuje promień  $r$ , a w punkcie O (rys. 10.120b) promień  $r$  dąży do zera, wówczas prędkość  $v_r^e$  dąży do nieskończoności, co jest fizycznie niemożliwe. W otoczeniu punktu O składowe prędkości  $v_r^e$  i  $v_z^e$  obliczamy analitycznie z wzorów podanych przez R.T. Shilda

$$\begin{aligned} v_r^e &= \frac{2v_0^e}{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}, \\ v_z^e &= -\frac{2v_0^e}{\pi} \arccos(\operatorname{tg} \psi), \end{aligned} \quad (10.382a)$$

gdzie  $\psi$  jest kątem zawartym między promieniem obliczanego punktu a osią  $r$ . Przy obliczaniu prędkości na osi  $r$ ,  $\psi = 0$ , równania (10.382a) przyjmują postać

$$\begin{aligned} v_r^e &= \frac{2v_0^e}{\pi}, \\ v_z^e &= 0. \end{aligned} \quad (10.382b)$$



Wygodnie jest przyjąć  $v_0^l = 1$ .

Rozwiązanie kinematyczne walca będzie polegało na znalezieniu pola prędkości płynięcia i prędkości odkształceń materiału walca oraz obliczeniu górnej oceny nośności walców.

Prędkości płynięcia w punkcie 11 (rys.10.120b) obliczamy ze wzoru (10.382b) a w pozostałych punktach obszaru B C F O G B

obliczamy ze związków po charakterystykach dla odpowiednich zagadnień. Prędkości płynięcia na osi r obliczamy z zagadnienia mieszanego przy przyjęciu  $v_{z_M}^l = 0$ ,  $z_M = 0$ ,

$v_M^l = \frac{3}{4}\pi$ . Wychodząc ze związku po charakterystyce  $\alpha$  (10.347) otrzymujemy równanie na prędkość promieniową  $v_r^l$  na osi r

$$v_{rM}^l = \frac{v_{rN}^l \cos A + v_{zN}^l \sin A - \frac{0,5 v_{rN}^l}{R_n} (dR_n \cos A - z_N \sin A)}{\cos A + \frac{0,5}{R_n} (dR_n \cos A - z_N \sin A)}. \quad (10.383)$$

Prędkości w pozostałych punktach obszaru B G O F C obliczamy z zagadnienia charakterystycznego. Na linii B G O mamy dane wszystkie wartości  $r$ ,  $z$ ,  $v_r^l$ ,  $v_z^l$  oraz kąt  $v^l$ , który został wyznaczony przy obliczaniu naprężeń, a na charakterystyce  $\alpha$  w punkcie 11 (na osi r) mamy obliczoną prędkość  $v_r^l$ . Dane te wystarczą do obliczenia pola prędkości płynięcia w całym obszarze plastycznym. Prędkości te obliczamy z równań:

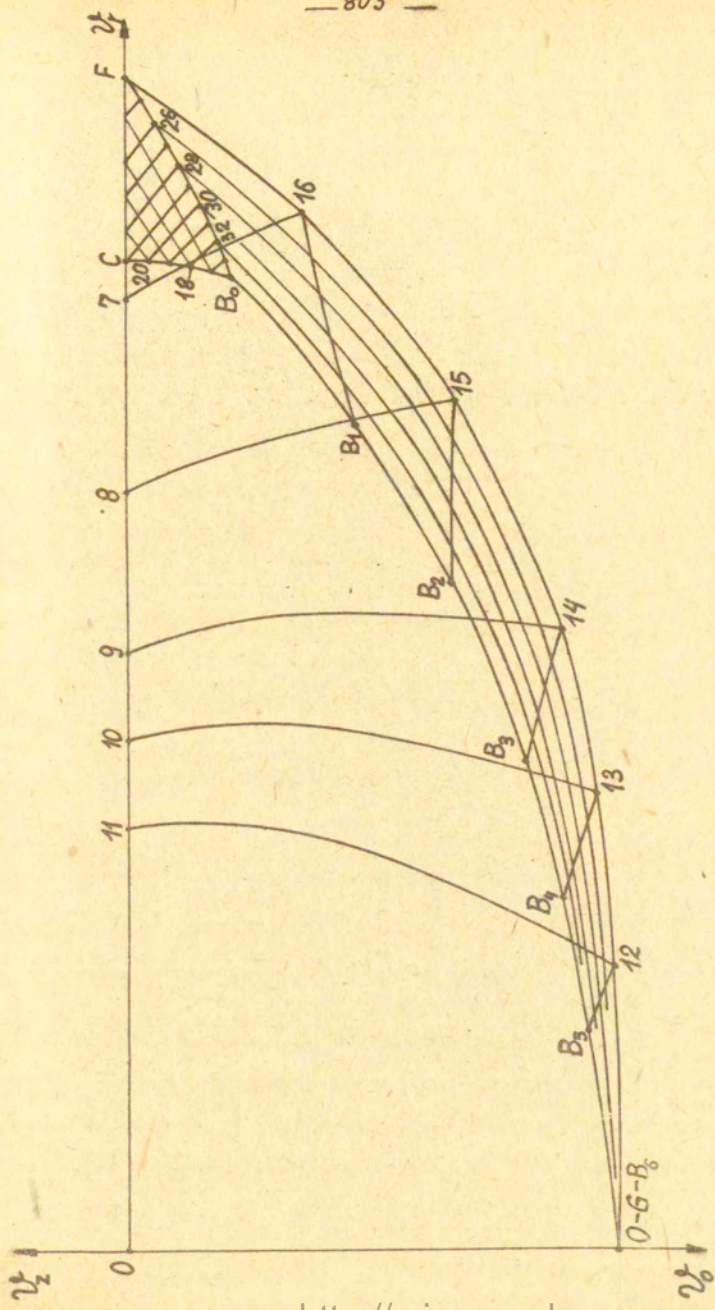
$$v_{z_M}^l = \frac{v_{rM}^l \sin S}{\cos S} - \frac{v_{rS}^l \sin S}{\cos S} - \frac{0,5 v_{rM}^l}{R_s \cos S} (dZ_s \cos S +$$

$$- dR_s \sin S) - \frac{0,5 v_{rS}^l}{R_s \cos S} (dZ_s \cos S - dR_s \sin S) + v_{zS}^l,$$

$$\begin{aligned}
 v_{rM}^e &= \left[ v_{rN}^e \cos N + \frac{v_{rS}^e \sin S \sin N}{\cos S} + \frac{0,5 v_{rS}^e \sin N}{R_s \cos S} \right. \\
 &\quad \cdot (dZ_s \cos S - dR_s \sin S) - v_{zS}^e \sin N + \\
 &\quad \left. + v_{zN}^e \sin N - \frac{0,5 v_{rN}^e}{R_n} (dR_n \cos N + dZ_n \sin N) \right] / \\
 &\quad \left[ \cos N + \frac{\sin S \sin N}{\cos S} - \frac{0,5 \sin N}{R_s \cos S} (dZ_s \cos S + \right. \\
 &\quad \left. - dR_s \sin S) + \frac{0,5}{R_n} (dR_n \cos N + dZ_n \sin N) \right].
 \end{aligned}
 \tag{10.384}$$

Z obliczonych prędkości płynięcia  $v_r^e$  i  $v_z^e$  można wykreślić plan prędkości. Na rysunku 10.124 pokazano hodo-  
 graf prędkości dla walca o wysokości  $h = 2,5$  mm, dla którego  
 siatkę charakterystyk przedstawiono na rysunku 10.120b.

Z wyznaczonych prędkości płynięcia  $v_r^e$ ,  $v_z^e$  obliczamy  
 prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$ ,  $\dot{\epsilon}_z$ ,  $\dot{\epsilon}_{rz}$  w całym obszarze  
 plastycznym B C F O G B ze znanych wzorów zamieniając różni-  
 czki na różnice skończone. Wszystkie prędkości odkształceń  
 obliczane są jako wartości średnie w środku oczek siatki  
 charakterystyk przy spełnionym warunku nieściśliwości materia-  
 łu. W polu B C F, gdzie charakterystyki są prostoliniowe,  
 osiowe prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$ ,  $\dot{\epsilon}_z$  są jedno-



Rys. 10.124. Hodograf prędkości dla walca o wysokości  $h = 2,5 \text{ mm}$   
( $\frac{L}{h} = 4$ , rys. 10.120b)

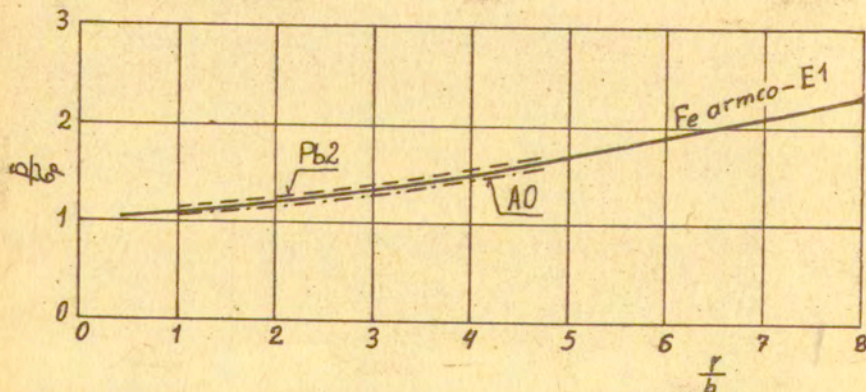
częśnie głównymi prędkościami odkształceń ( $\dot{\epsilon}_{rz} = 0$ ). W polu charakterystyk krzywoliniowych B F O G B z osiowych prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$ ,  $\dot{\epsilon}_z$ ,  $\dot{\epsilon}_{rz}$  obliczane są główne prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$ , które potrzebne są do znalezienia górnej oceny wartości nośności.

Obliczone główne prędkości odkształceń dla zagadnienia ściskania walców mają następujące znaki:

1. w obszarze B C F B —  $\dot{\epsilon}_1 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 > 0$ ;
2. w obszarze B F O G B —  $\dot{\epsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 > 0$ .

Główne prędkości odkształceń nie leżą w jednym punkcie grania-stoślipa Treski i dlatego nie możemy znaleźć rozwiązania ścisłego, a jedynie dolną i górną ocenę wartości nośności.

Średni jednostkowy nacisk obliczony z pola kinematycznie dopuszczalnego jest górną oceną wartości nośności. Wartość tę wyznaczamy z równania (10.372) i (10.375). Górną oceną wartości nośności ściskania walców przedstawiono na rysunku 10.122. Wyniki doświadczalne ściskania walców przedstawiono na rysunku 10.125 .

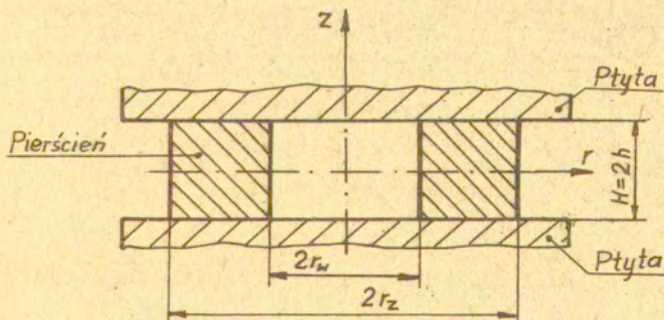


Rys.10.125. Wyniki doświadczalne ściskania walców z żelaza armco E1, ołowiu Pb2 i aluminium AlO o średnicy 20 mm ( $\dot{\epsilon} = 3,3 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ )

## 10.5.5.2. Ściskanie pierścieni

Zagadnienie ściskania pierścieni między dwiema równoległymi i sztywnymi płytami (rys.10.126) występuje przy kuciu swobodnym wszelkiego rodzaju pierścieni oraz częściowo przy wyciskaniu na zimno pierścieni łożysk kulkowych wzdłużnych. Proces ściskania pierścieni przebiega w warunkach osiowej symetrii.

Rozwiązanie zagadnienia ściskania pierścieni metodą charakterystyk polega na znalezieniu dopuszczalnego pola naprężeń i dopuszczalnego pola prędkości płynięcia dla przyjętych warunków brzegowych. Dla wyznaczenia pola naprężeń, z którego obliczamy dolną ocenę wartości nośności, przyjmujemy statyczne warunki brzegowe na swobodnej powierzchni bocznej zewnętrznej i wewnętrznej pierścienia,  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$ . Dla wyznaczenia kinematyki płynięcia materiału obliczamy górną ocenę nośności przyjmujemy kinematyczny warunek brzegowy na powierzchniach czołowych pierścienia, które poruszają się ruchem pionowym ze znaną prędkością narzędzia  $v_0^l$ . Oczywiście z taką samą prędkością  $v_0^l$  poruszają się obszary sztywne przylegające do płyt.



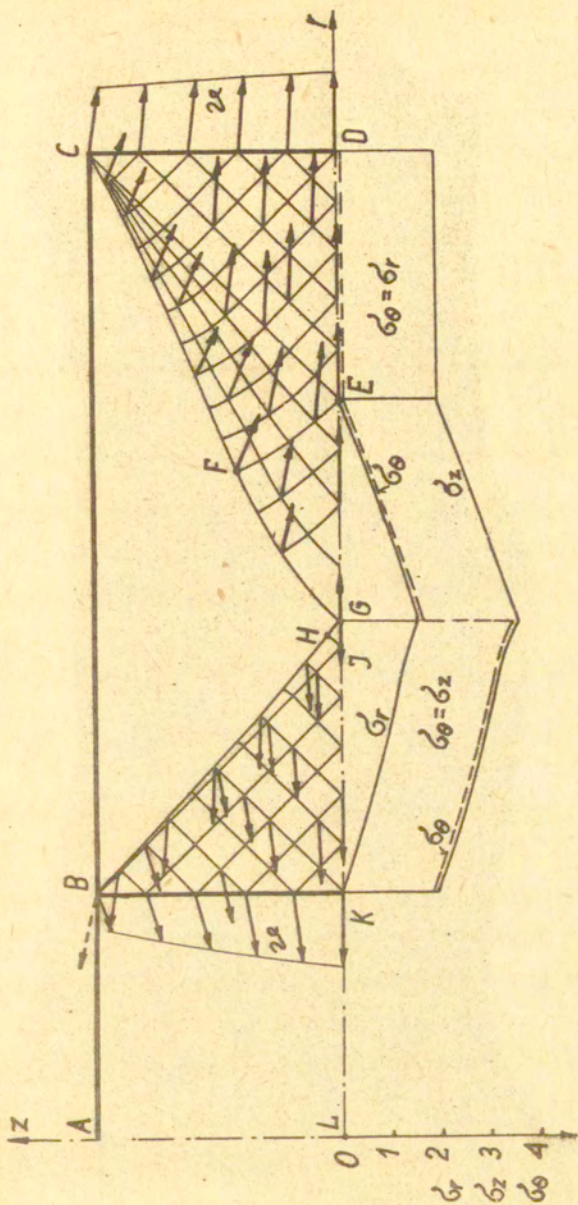
Rys.10.126. Schemat ściskania pierścienia między dwiema równoległymi sztywnymi płytami.

Z doświadczeń ściskania pierścieni wiemy, że pewna część materiału pierścienia płynie na zewnątrz, czyli zgodnie z dodatnim kierunkiem osi  $r$ , a pewna (wewnętrzna) część materiału płynie do środka przyjętego układu osi współrzędnych  $r, z$ . Istnieje zatem promień neutralny  $r_n$  rozdzielający promień na wspomniane strefy ruchu materiału. Warunkiem poprawnego rozwiązania statycznego jest to, aby naprężenia promieniowe  $\sigma_r$ , obliczone dla wpływu na zewnątrz i dla wpływu materiału do środka pierścienia, były ciągłe. Nieciągłe mogą być natomiast naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_z$ . Przy wypływie materiału na zewnątrz pierścienia będziemy mieć inny stan naprężenia niż przy wpływie materiału do środka pierścienia, ponieważ inne są związki po charakterystykach (10.340).

Ze względu na osiową symetrię zadania (geometria pierścienia i warunki brzegowe) poszukiwane pole naprężeń jak i pole prędkości jest symetryczne względem osi  $z$  i płaszczyzny środkowej pierścienia. Wystarczy zatem rozważyć tylko jedną czwartą części przekroju pierścienia płaszczyzną  $r, z$ .

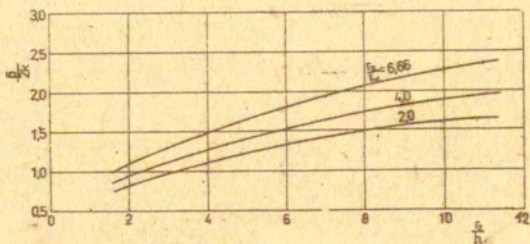
Budowę rozwiązania statycznego i kinematycznego ściskania pierścieni dla wypływu materiału na zewnątrz jak i do środka pierścienia pokazano na rysunku 10.127. Dokładną analizę tego procesu przedstawiono w pracy [5].

Z rozwiązania statycznego (pola naprężeń) obliczono nacisk jednostkowy będący dolną oceną wartości nośności ściskania pierścieni przedstawioną na rysunku 10.128. Nacisk ten obliczono z siły (10.368) otrzymanej przez całkowanie stanu naprężenia na ostatnich charakterystykach BHG i CFG (rys. 10.127).



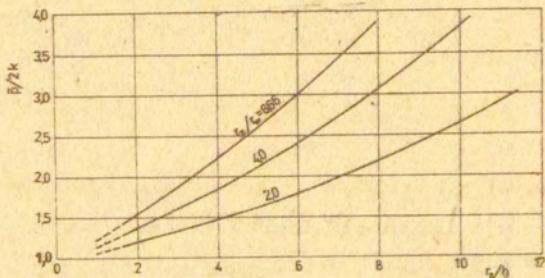
Rys.10.127. Pole naprężeń i pole prędkości płynięcia dla pierścienia o wymiarach

$$\frac{r_2}{h} = 4 \quad ; \quad \frac{r_2}{r_w} = 4$$

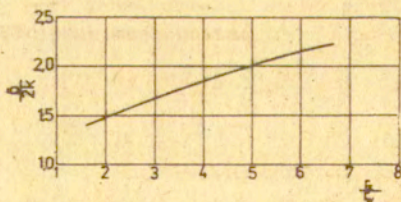


Rys. 10.128. Dolna ocena nośności granicznej pierścieni

Górną ocenę wartości nośności ściskania pierścieni obliczamy z pola kinematycznie dopuszczalnego. Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy, będący górną oceną nośności ściskania pierścieni, wyznaczony z równania (10.372) pokazano na rysunku 10.129 i 10.130

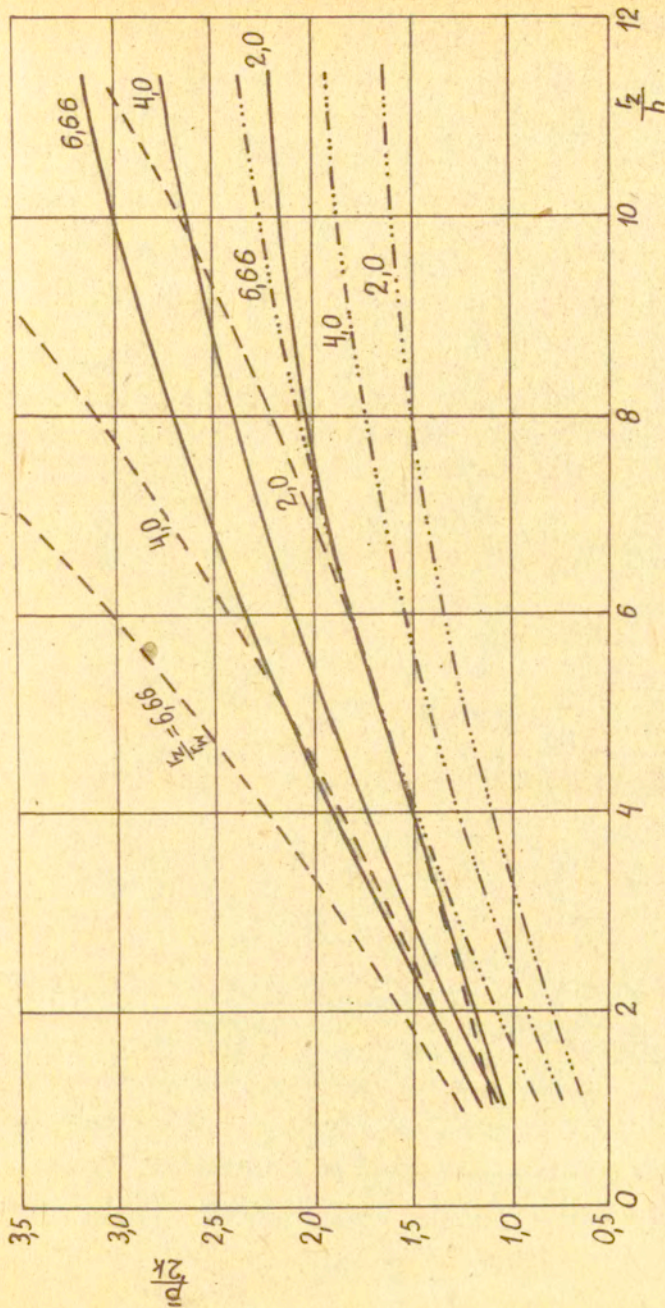


Rys. 10.129. Górną oceną nośności granicznej pierścieni



Rys. 10.130. Górną granicą nacisku jednostkowego pierścienia dla  $\frac{F_z}{h} = 4$





Rys. 10.131. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi; — wyniki doświadczalne, --- górna ocena nośności obliczona metodą charakterystyk, -...-...- ocena dolna nośności obliczona metodą charakterystyk.

Na rysunku 10.131 pokazano jak wyniki doświadczalne leżą w stosunku do wyników teoretycznych obliczonych metodą charakterystyk. Górna ocena nośności leży wyżej wyników doświadczalnych, natomiast ocena dolna leży poniżej wyników doświadczalnych. Znacznie mniejsza rozpiętość wyników występuje dla pierścieni wysokich niż dla pierścieni niskich. Wyniki teoretyczne z doświadczalnymi układają się zgodnie z twierdzeniami nośności granicznej.

Kinematyka płynięcia materiału pierścienia wyznaczona metodą charakterystyk jest bliska kinematyce otrzymanej z doświadczenia.

#### 10.5.5.3. Wciskanie płaskiego cylindrycznego stempla w półprzestrzeń

Wciskanie płaskiego cylindrycznego stempla w materiał idealnie plastyczny zajmujący półprzestrzeń zostało rozwiązane przez R.T. Shieldsa. Założył on brak tarcia na styku stempla z materiałem. Schemat działania nacisku stempla i siatkę charakterystyk pokazano na rysunku 10.132 .

Rozwiązywanie zagadnienia wciskania kołowego stempla w półprzestrzeń rozpoczyna się od swobodnego brzegu AB (rys. 10.132 ), na którym znane są naprężenia  $\sigma_z = 0$ ,  $\sigma_r = -2k$ ,  $\sigma_\theta = 0$ . Na brzegu AB kąt  $\nu = \frac{\pi}{4}$ . Rozwiązując kolejno zagadnienie Cauchy'ego (obszar ABC), zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne (otoczenie punktu A w wachlarzu ACD), zagadnienie charakterystyczne i zagadnienie mieszane (obszar ADO) otrzymujemy siatkę charakterystyk procesu wciskania stempla w



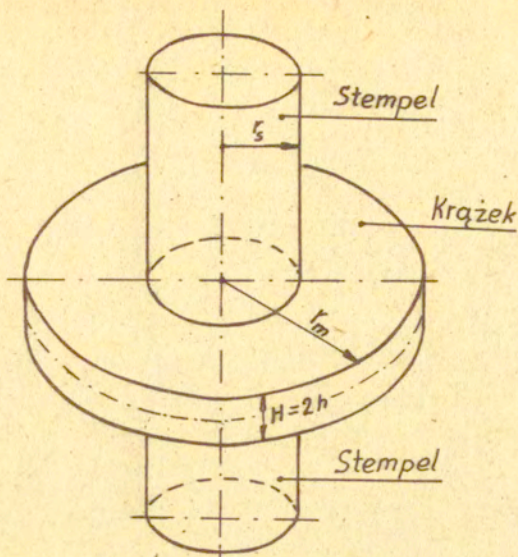
G. Eason i R. T. Shield rozwiązali również zagadnienie wciskania płaskiego kołowego stempla w półprzestrzeń przy założonym tarcu  $\mu = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_z} = 0,139$  (połowę rys. 10.134) i otrzymali nacisk jednostkowy

$$\bar{p} = 3,02 \cdot 2k = 6,04k. \quad (10.387)$$

Jeśli głębokość półprzestrzeni jest ograniczona (z jest mniejsze od największej wysokości siatki charakterystyk), to rozwiązanie Easona i Shilda nie zachodzi.

#### 10.5.5.4. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek

Zagadnienie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek (rys. 10.133) występuje w procesie kucia odkuwek swobodnie kutych z otworem w środku oraz w pierwszej fazie kucia matrycowego wszelkiego rodzaju kół, pierścieni i krążków również z otworem w środku. Dalsze fazy kucia matrycowego odkuwek osiowo-symetrycznych odbywają się już w innych warunkach, ponieważ zaczynają naciskać na krążek inne części matrycy formującej odkuwkę. Rozwiązanie tego procesu polega na znalezieniu pola naprężeń, nacisku jednostkowego i pola prędkości płynięcia metodą charakterystyk. Ze względu na założoną małą wysokość krążka  $H = 2h$  nie możemy zastosować rozwiązania Easona i Shilda (rys. 10.134). Mechanizm płynięcia krążków niskich o dużych promieniach  $r_m > r_s + 2h$  (rys. 10.135a) jest inny niż krążków o mniejszych promieniach  $r_m < r_s + 2h$  (rys. 10.135b).



Rys. 10.133 . Schemat wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempli w krążek

Zadanie wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempli w krążek (rys. 10.133) można rozwiązać metodą charakterystyk rozbijając go na dwa zagadnienia :

1. roztlaczanie pierścienia o promieniu  $r_s \leq r \leq r_m$  naprężeniem promieniowym  $\sigma_r = -q$  działającym na powierzchnię OA, a wynikającym ze ściskania walca o promieniu  $r_s$  stemplami,
2. ściskanie walca o promieniu  $0 \leq r \leq r_s$  dwoma stemplami przy działaniu bocznego promieniowego naprężenia  $\sigma_r = -q$  (na brzeg OA).

Najpierw należy określić wielkość ciśnienia  $q$ , przy którym nastąpi roztlaczanie pierścienia. Następnie ciśnienie to przyjąć do znalezienia charakterystyk w walcu.

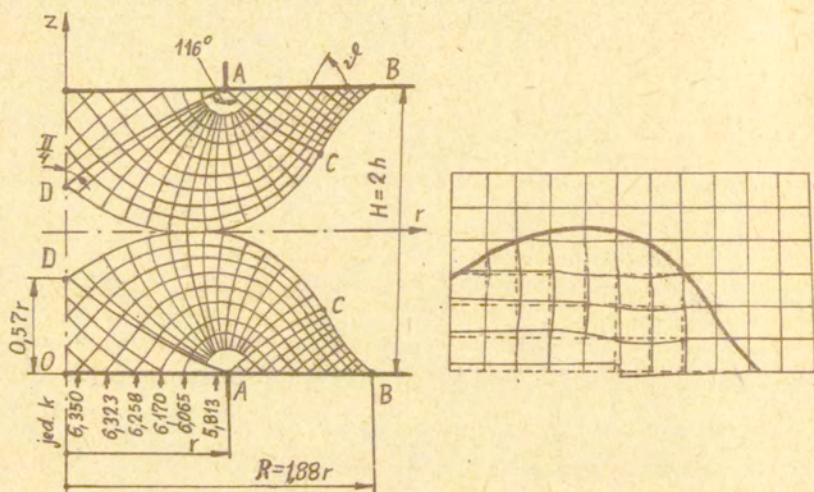
Przyjmując, że pierścien o promieniu  $r_s \leq r \leq r_m$  znajduje się w płaskim stanie naprężenia,  $\sigma_z = 0$  (stan naprężenia w pierścieniu nie zależy od współrzędnej  $z$ ), równanie równowagi elementu pierścienia

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

i warunek plastyczności Treski

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$$

wyznamy naprężenia w pierścieniu



Rys. 10.134. Najmniejsza grubość krążka  $H$ , w którą można wpisać rozwiązanie G.Easona i R.T.Shielda. Rozwiązanie jest ważne, gdy  $\mu > 0,139$

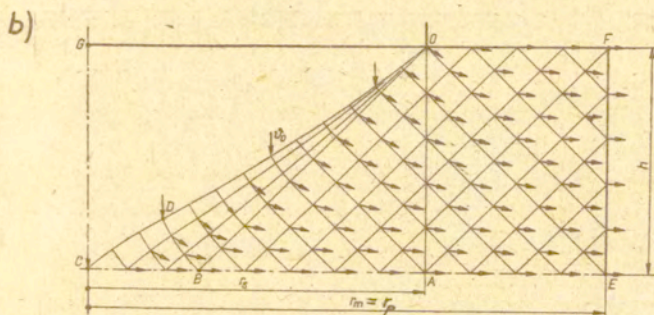
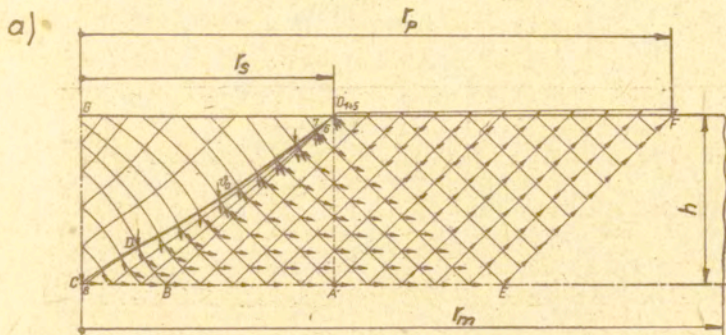
$$\begin{aligned} \sigma_r &= -2k \ln \frac{r_p}{r}, \\ \sigma_\theta &= 2k(1 - \ln \frac{r_p}{r}), \end{aligned} \quad (10.388)$$

gdzie  $r_s \leq r \leq r_p$ . Dla pierścienia  $r_p \leq r \leq r_m$  naprężenia  $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ .

Ciśnienie wewnętrzne  $q$  uplastyczniające pierścień obliczamy z równania

$$q = -\sigma_{r(r=r_s)} = 2k \ln \frac{r_p}{r_s} \quad (10.389)$$

i może przyjmować wartości od zera do  $2k$ . Gdy  $q = 0$ ,



Rys. 10.135. Siatka charakterystyk i pole prędkości płynięcia dla wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek o wymiarach: a)  $\frac{r_s}{h} = 1,5$ ,  $r_m > r_s + 2h$ ; b)  $\frac{r_s}{h} = 1,5$ ,

$$r_m < r_s + 2h$$

to  $\frac{r_p}{r_s} = 1$ , a gdy  $q = 2k$ , to uplastyczniony jest

pierścieni o promieniu  $r_s \leq r \leq r_p = 2,718 r_s$ .

Dalsza część pierścienia,  $r > 2,718 r_s$ , jest sztywna.

Jeśli teraz przyjmiemy, że ciśnienie  $q = 2kln \frac{r_p}{r_s}$

działa na pobocznice walca OA (rys. 10.135) ściskanego stemplami, to uwzględnimy w nim oddziaływanie pierścienia, a zatem rozwiążemy zadanie wciskania stempli w krążek. Na pobocznicę walca OA występują naprężenia  $\sigma_r = -q$ ,  $\sigma_z = -(2k+q)$ ,  $p = -(q+k)$  oraz kąt  $\nu = \frac{3}{4}\pi$ . W obszarze OAB występuje jednorodny stan naprężenia. Punkty charakterystyk leżące w pobliżu brzegu OA, wyznaczamy z zagadnienia Cauchy'ego, a w pobliżu osi AB z zagadnienia mieszanego. Pozostałe punkty znajdujemy z zagadnienia charakterystycznego. Linie nachylone pod kątem  $\nu = \frac{3}{4}\pi$  do osi  $r$  są charakterystykami  $\alpha$ , a ortogonalne do nich charakterystykami  $\beta$ . Obie charakterystyki są prostoliniowe. W obszarze  $O_{1+5}$  mamy zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne. W punkcie O charakterystyka  $\alpha$  redukuje się do punktu. W obszarze 6BD7 mamy zagadnienie charakterystyczne, a w obszarze BCD zagadnienie mieszane. Na osi BC dany jest kąt  $\nu = \frac{3}{4}\pi$  i współrzędna  $z = 0$ . Wszystkie te dane wystarczą do znalezienia rozwiązania w całym obszarze OABCD.

Z pola statycznie dopuszczalnego pod stemplami (rys. 10.135) obliczamy dolną ocenę wartości nośności krążków (rys. 10.136). Siłę na ostatniej charakterystyce  $\beta$  (linia ODC) obliczamy z równania (10.368).

Pole kinematyczne w części zadania pod stemplami (walcu) budujemy na polu statycznym, natomiast w pierścieniu przyjmujemy dowolne prostoliniowe pole kinematyczne. Przyjmujemy, że obszar ODCG jest sztywny i porusza się pionowo w dół z



prędkością  $v_0^z$  tak jak stempel. Obszar OABCD jest plastyczny. Charakterystyka ODC nie jest linią nieciągłości prędkości (rys. 10.135). W pobliżu punktu C na osi poziomej prędkości obliczamy ze wzoru

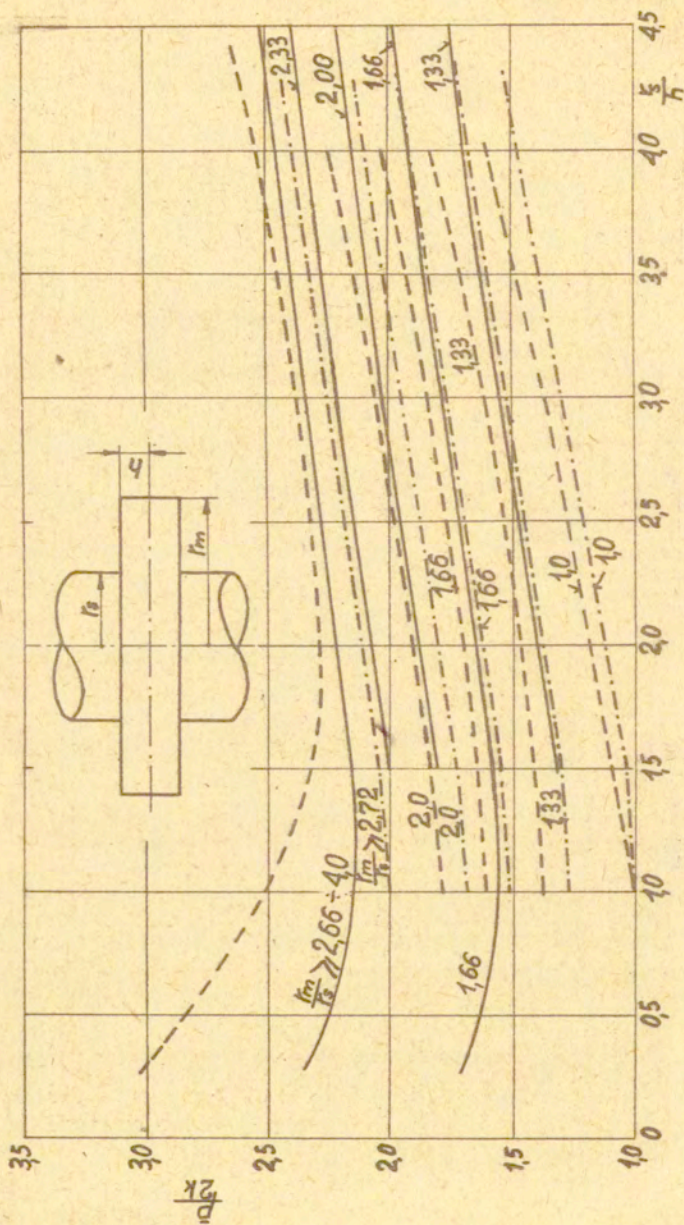
$$v_r^z = \frac{2v_0^z}{\pi}, \quad v_z^z = 0,$$

a w pozostałych punktach obszaru OABCD składowe prędkości płynięcia materiału obliczamy ze związków po charakterystykach (10.347) dla odpowiednich zagadnień brzegowych.

Składowe prędkości płynięcia w pierścieniu OAEF wyznaczamy ze związków po charakterystykach dla zagadnienia mieszane (w obszarze OAE) i zagadnienia charakterystycznego (w pozostałych punktach siatki charakterystyk OAEF) wychodząc ze znanych prędkości na linii OA. W pierścieniu przyjmujemy prostoliniową siatkę kwadratową, będącą przedłużeniem siatki pod stemplami, z dwoma liniami nieciągłości prędkości OE i EF. Obie linie nieciągłości jednoznacznie ustalają obszar plastyczny w pierścieniu OAEF (rys. 10.135). Na liniach nieciągłości skok prędkości propaguje się według wzoru (10.351).

Z wyznaczonych składowych prędkości płynięcia  $v_r^z$  i  $v_z^z$  w całym obszarze plastycznym krążka ODCBAEF obliczamy główne prędkości odkształceń  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$ , ponieważ są one potrzebne do znalezienia wartości górnej oceny nośności krążka. Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy oblicza się z równania (10.372). Wartości nacisków jednostkowych wciskania stempli w krążek, będących górną oceną nośności, pokazano na rysunku 10.136.

Ocena dolna i ocena górna wciskania stempli w krążek



Rys. 10.136. Wyniki doświadczalne i teoretyczne obliczone metodą charakterystyk dla wciągania stempli w krążek: — wyniki doświadczalne, - - - - - górna granica, - - - - - dolna granica

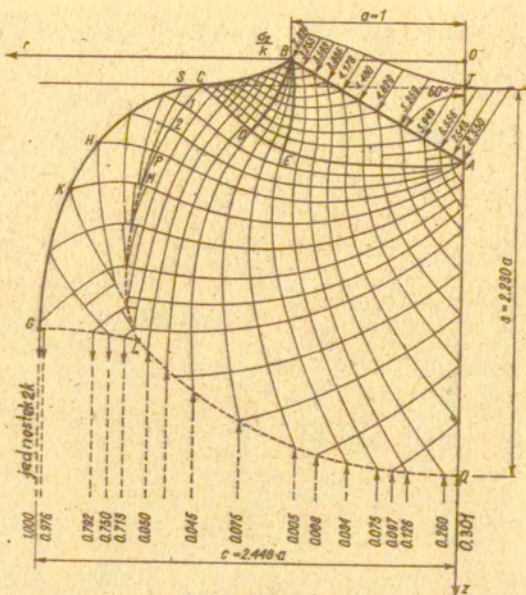
obliczone metodą charakterystyk układają się zgodnie z twierdzeniami nośności granicznej i znajdują potwierdzenie w doświadczeniu (rys. 10,136).

#### 10.5.5.5. Wciskanie stożka w półprzestrzeń

Wciskanie kołowego stożka o kącie  $2\delta$  w ośrodek plastyczny zajmujący półprzestrzeń ma duże znaczenie praktyczne, gdyż odpowiada problemowi pomiaru twardości metodą Rockwella. Aby pomiar był właściwy, to element (próbka) musi mieć odpowiednie wymiary. Mała średnica sprzyja rozepchnięciu próbki, a mała grubość próbki wpływa na zwiększony opór płyty podpierającej.

Zagadnienie wciskania stożka w materiał (rys. 10.137) w sposób wyczerpujący zostało rozwiązane w pracy [21]. Obszar ABCDE jest plastyczny, a obszar AEDCHKGLQ jest sztywny, w który wpisano przedłużenie rozwiązania problemu wciskania stempla w materiał. W rozwiązaniu tym zakłada się brak tarcia na kontakcie między stożkiem a badanym materiałem oraz to, że brzeg powierzchni BC wypchniętego materiału przez naciskający stożek zachowuje, w czasie całego procesu wciskania, podobieństwo geometryczne. Ten nieznaną brzeg BC określamy funkcją  $z = f(r)$  przy zachowaniu warunku nieściśliwości (objętość zagłębionego stożka równa się objętości wypchniętej osiowo-symetrycznej powierzchni).

Najmniejsze wymiary badanej próbki wynikają z przedłużenia siatki charakterystyk w obszar sztywny. Wymiary te wynoszą: średnica próbki  $d = 4,896 \cdot a$ , wysokość próbki  $H = 2,23 \cdot a$ , gdzie  $a$  jest promieniem wgłębienia.



Rys. 10.137. Rozwiązanie zagadnienia wciskania stożka w półprzestrzeń.

Przedłużone pole naprężeń od dołu jest ograniczone linią nieciągłości naprężeń GLQ, poniżej której występują tylko naprężenia ściskające (odcinek GL) i naprężenia rozciągające (odcinek LQ) nie przekraczające granicy plastyczności  $2k$  (rys. 10.137).

Siłę potrzebną do zagłębienia stożka obliczamy ze wzoru

$$P = 2\pi \int_0^1 \sigma_z r dr . \quad (10.390)$$

## 10.6. Metoda elementów skończonych

### 10.6.1. Wstęp

Istotą metody elementów skończonych jest podział obszaru na skończoną liczbę elementów połączonych ze sobą za pomocą skończonej liczby węzłów. W węzłach występują siły węzłowe, powstałe w wyniku przemieszczenia, które dają równowagę węzłów, elementów i całego układu /zadania/. Węzły doznają przemieszczeń, za pomocą których obliczane są odkształcenia, a następnie naprężenia we wszystkich punktach obszaru. Metoda elementów skończonych podaje sposób łączenia założonych elementów w jedną całość, biorąc pod uwagę równania równowagi elementów, warunki brzegowe dla przemieszczeń i sił, przemieszczenia, odkształcenia, warunki ciągłości, prawo fizyczne, prawo płynięcia plastycznego i warunek plastyczności.

Początkowo metoda elementów skończonych stosowana była wyłącznie do sprężystej analizy konstrukcji, później zaczęto stosować ją do zagadnień nieliniowych natury fizycznej (plastyczności, pełzania) oraz natury geometrycznej (dużych deformacji). Metoda elementów skończonych szczególnie nadaje się do analizy zagadnień fizycznie nieliniowych i dla materiału sprężysto-plastycznego izotropowego lub anizotropowego. Można nią rozwiązywać zagadnienia wszystkich stanów naprężenia i odkształcenia, przyjmując prawo płynięcia Prandtla-Reussa, stowarzyszone lub niestowarzyszone prawo płynięcia z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa oraz izotropowe lub kinematyczne wzmocnienie materiału.

Sprężysto-plastyczna analiza metodą elementów skończonych stosowana jest wszędzie tam, gdzie dopuszcza się powstanie pewnych obszarów plastycznych, np. do obliczania nośności platform i szybów wiertniczych, kadłubów statków i obiektów techniki nuklearnej. Stosowana jest w mechanice górotworu do analizy zawalów i do wytrzymałościowych obliczeń elementów i zespołów maszyn i urządzeń technicznych, np. korbowodów, tarcz, zbiorników ciśnieniowych i obudów reaktorów atomowych. Metoda elementów skończonych stosowana jest również do analizy procesów obróbki plastycznej metali i procesu skrawania.

Operacje rachunkowe metody elementów skończonych sformułowane są w zapisie macierzowym bardzo dogodnym przy układaniu programów na maszyny cyfrowe. Związki fizyczne w przypadku przyjęcia przyrostowych teorii plastycznego płynięcia Levy-Misesa czy Prandtla-Reussa ustalane są dla przyrostów  $\{d\sigma\}$  i  $\{d\varepsilon\}$ , co implikuje przykładanie obciążeń w formie przyrostów. Natomiast dla deformacyjnej teorii plastyczności Hencky-Iliuszina związki fizyczne zapisane są dla całkowitych wartości naprężeń i odkształceń.

Nieliniowe zagadnienia sprężysto-plastyczne mechaniki można rozwiązywać najprościej na drodze iteracyjnej stosując sposób modyfikacji:

- zmiennej sztywności,
- naprężeń początkowych,
- odkształceń początkowych,
- zmiennej sztywności w połączeniu z naprężeniami lub odkształceniami początkowymi.

Wybór metody obliczeń podyktowany jest względami ekonomicznymi, rodzajem zadania i przewidywaną wielkością odkształceń.

Duża liczba publikacji, ukazująca się na temat stosowania metody elementów skończonych w czasopismach fachowych na całym świecie, ma charakter komunikatów, ograniczających się do podania ogólnych zależności i uzyskanych wyników obliczeń i to dla zagadnień wytrzymałości konstrukcji. Na podstawie tych fragmentarycznych informacji trudno jest rozwiązać problem i zbudować efektywnie działający program obliczeniowy.

### 10.6.2. Konstytutywne prawo liniowej sprężystości

Sprężyste zachowanie materiału izotropowego opisuje związek fizyczny (zależność między naprężeniami i odkształceniami), który ogólnie można zapisać w postaci tensorowej

$$\sigma_{ij}^e = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)\varepsilon_{ij}^e + \nu\varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}]. \quad (10.391)$$

Przedstawiając równanie (10.391) w układzie kartezjańskim  $x, y, z$  ( $ij = x, y, z$ ) otrzymamy znane w teorii sprężystości związki fizyczne (prawo Hooke'a) dla przestrzennego stanu naprężenia

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)],$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)],$$

(10.392)

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)],$$

$$\tau_{xy} = G\delta_{xy}^p, \quad \tau_{yz} = G\delta_{yz}^p, \quad \tau_{zx} = G\delta_{zx}^p,$$

gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\nu = \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_w} \right|$ ,  $\delta_{xy}^p = 2\varepsilon_{xy}$ ,  $\delta_{yz}^p = 2\varepsilon_{yz}$ ,  $\delta_{zx}^p = 2\varepsilon_{zx}$ .

Dla płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ) równania (10.391) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G \mu_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \mu_{xy},\end{aligned}\quad (10.393)$$

a dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\varepsilon_z = 0$ ,  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ,  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ ) sprowadzają się do zależności

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x], \\ \tau_{xy} &= 2G \left(\frac{1}{2} \mu_{xy}\right).\end{aligned}\quad (10.394)$$

Dla liniowego (osiowego) stanu naprężenia ( $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ,  $\varepsilon_x > 0$ ,  $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ ) równania (10.391) przyjmują zależność

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = 2G(1+\nu)\varepsilon_x. \quad (10.395)$$

Równania (10.392) można zapisać za pomocą rachunku macierzeowego

$$\{\sigma\} = [D^e] \{\varepsilon^e\}, \quad (10.396a)$$

lub w przyrostach

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\varepsilon^e\}, \quad (10.396b)$$

gdzie  $[D^e]$  jest symetryczną konstytutywną macierzą sprężystości,  $\{\varepsilon^e\}$  jest macierzą kolumnową składowych tensora odkształcenia,  $\{\sigma\}$  jest macierzą kolumnową składowych tensora na-



prężenia. Równanie (10.396a) dla przestrzennego stanu naprężenia można napisać w konkretnej postaci

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yz} \\ \delta_{zx} \end{Bmatrix} \quad (10.397)$$

*symetria*

Dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , macierz  $[D^e]$  przybiera postać

$$[D^e] = \frac{2G}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.398)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia,  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  macierz sprężysta  $[D^e]$  ma postać

$$[D^e] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.399)$$

Związek fizyczny liniowej sprężystości odwrotny do równania (10.391) w zapisie tensorowym ma postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (10.400)$$

a po rozwinięciu względem  $x, y, z$  otrzymujemy następujące składowe tensora odkształcenia dla przestrzennego stanu:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ d_{xy}^e &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad d_{yz}^e = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad d_{zx}^e = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (10.401)$$

Związki fizyczne (10.401) w zapisie macierzowym przyjmą postać

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (10.402)$$

*symetria*

W mechanice ciał fizycznie nieliniowych związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami są nieliniowe i możliwe są do ustalenia za pomocą przyrostów naprężeń  $d\sigma$  i przyrostów odkształceń  $d\varepsilon$ . Równania (10.391 do 10.402) można zapisać w przyrostach. Często spotykane są równania konstytutywne liniowej sprężystości (uogólnione prawo Hooke'a) w postaci

$$d\sigma_{ij}^e = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e \quad (10.403a)$$

lub w postaci odwrotnej

$$d\varepsilon_{ij}^e = H_{ijkl} d\sigma_{kl}^e \quad (10.403b)$$

gdzie  $D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \chi (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})$

jest symetrycznym tensorem stałych materiałowych (macierzą sprężystą),  $\lambda, \mu, \chi$  są skalarnymi mnożnikami,

$H_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}$  jest tensorem rzędu czwartego, w którym  $E=2G(1+\nu)$  jest modułem Younga,  $\nu$  jest liczbą Poissona,

$\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera.

### 10.6.3. Związki fizyczne dla materiału sprężysto-plastycznego

Dla materiału sprężysto-plastycznego związki fizyczne stosowane do obliczeń w metodzie elementów skończonych należy formułować w przyrostach, ponieważ dla dużych odkształceń zależność między naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa.

Odkształcenie po osiągnięciu stanu naprężenia, zwanego granicą plastyczności, jest nieodwracalne.

Dla materiału sprężysto-plastycznego (rys.10.138) zachodzi addytywność przyrostów odkształceń sprężystych  $d\varepsilon_{ij}^e$  i plastycznych  $d\varepsilon_{ij}^p$ , to znaczy

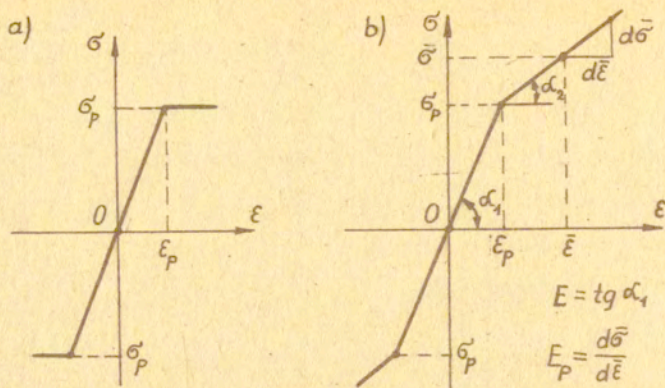
$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (10.404)$$

Wprowadzając za przyrost odkształceń sprężystych  $d\varepsilon_{ij}^e = (D_{ijkl})^{-1} \cdot d\sigma_{kl}$  i odwracając równanie (10.404) otrzymamy przyrost naprężenia sprężystego zapisany tensorowo

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (10.405a)$$

lub zapisany w postaci macierzowej

$$\{d\sigma\} = [D^e] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \quad (10.405b)$$



Rys.10.138. Modele materiału: a/ materiał sprężysto-idealnie plastyczny, b/ materiał sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem

Przyrost odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{ij}^P$ , występujący w równaniu (10.405), spełnia stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego dla każdej składowej i wyraża się równaniem

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10.406a)$$

lub zapisanym macierzowo

$$\{d\varepsilon^P\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}. \quad (10.406b)$$

Po wprowadzeniu odpowiednio równań (10.406) do zależności (10.405) otrzymujemy zależność między naprężeniami i odkształceniami dla materiału sprężysto-plastycznego

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (10.407a)$$

lub krócej

$$\{d\sigma\} = [D^e] \left( \{d\varepsilon\} - d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right), \quad (10.407b)$$

lub w postaci odwrotnej

$$\{d\varepsilon\} = [D^e]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}, \quad (10.407e)$$

gdzie  $d\lambda$  jest dodatnim współczynnikiem proporcjonalności,  $f$  jest potencjałem plastycznym.

Wektor przyrostu odkształcenia plastycznego  $\{d\varepsilon^P\}$  (10.406b) jest prostopadły do powierzchni płynięcia  $f(\sigma)$  w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń (rys.10.139). Gdy wektor  $\{d\varepsilon\}$  (ma sześć składowych) nie jest ortogonalny do powierzchni płynięcia, to równanie (10.406a) nazywamy niestowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego.

Powierzchnię płynięcia plastycznego (rys.10.139) dla materiału izotropowego nie umacniającego się ogólnie wyrazić można

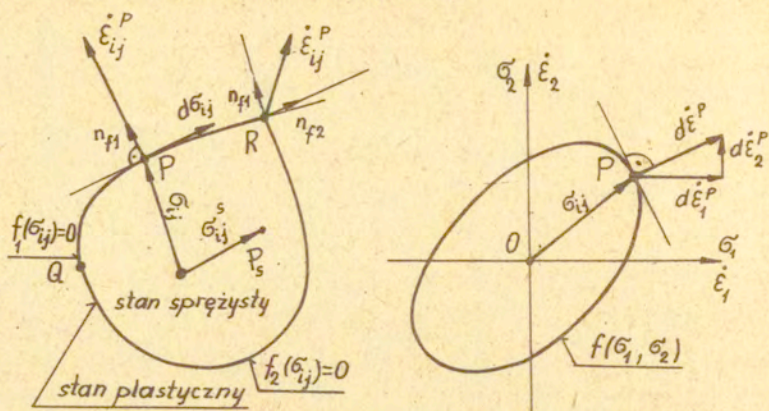
$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (10.408)$$

a dla materiału podlegającego wzmocnieniu izotropowemu lub kinematycznemu

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = 0. \quad (10.409)$$

Gdy stan naprężenia osiągnie poziom, przy którym  $f = 0$ , to nastąpi uplastycznienie materiału. Dla materiałów idealnie plastycznych przyrost naprężenia  $d\sigma$  jest najwyżej styczny do powierzchni płynięcia (rys.10.139a). Stan obciążenia, czyli proces czynny, definiowany jest iloczynem skalarnym

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = 0$$



Rys.10.139. Powierzchnia plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia: a/ powierzchnia płynięcia plastycznego z punktami osobliwymi R i Q. W punktach osobliwych jest

$$\{d\epsilon^P\} = \{\dot{\epsilon}^P\} = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right\} + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\},$$

b/ warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia i wektor przyrostu odkształcenia

lub przyrostem energii dysypacji

$$dL^P = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^P\} \geq 0.$$

Współczynnik  $d\lambda > 0$ , ponieważ musi istnieć przyrost odkształcenia plastycznego. Dla stanu odciążenia, czyli procesu biernego, nie ma przyrostu odkształcenia plastycznego i wówczas  $d\lambda = 0$ ,  $f < 0$  (rys.10.139).

Można również analizować powierzchnię płynięcia, zależną nie tylko od naprężenia  $\sigma_{ij}$ , ale i od odkształcenia  $\epsilon_{ij}^P$  i temperatury T, co ogólnie można zapisać

$$f(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, T) = 0. \quad (10.410)$$

Materiał sprężysto-idealnie plastyczny (rys.10.138a) opisywany jest równaniem fizycznym Prandtla-Reussa, które dla ogólnego przypadku ma postać

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{dS_{ij}}{G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (10.411)$$

gdzie  $d\sigma = \frac{1}{3} d\sigma_{kk}$  jest przyrostem średniego naprężenia,  $dS_{ij} = d\sigma_{ij} - d\sigma \delta_{ij}$  jest przyrostem dewiatora naprężenia,  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera,  $d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{ij}^P$  jest przyrostem odkształcenia plastycznego ortogonalnym do powierzchni płynięcia  $f$ ,  $\frac{dS_{ij}}{2G} = de_{ij}^e$  jest dewiatorem odkształcenia sprężystego,  $\frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij}$  jest kulistym tensorem odkształcenia sprężystego sprężyste odkształcenie objętościowe. Związki (10.407) nazywamy również związkami fizycznymi Prandtla-Reussa.

Jeśli za potencjał plastyczny  $f$  przyjmiemy warunek plastyczności Hubera-Misesa i uwzględnimy wzmocnienie materiału, to otrzymamy prawo fizyczne dla materiału sprężysto-plastycznego ulegającego umocnieniu (rys.10.138b).

Warunek plastyczności Hubera-Misesa ogólnie można przedstawić dewiatorowo

$$f = S_{ij} S_{ij} - 2k^2 = 0, \quad k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}, \quad (10.412a)$$

lub jawnie

$$(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - 2\sigma_p^2 = 0. \quad (10.412b)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma'_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , warunek plastyczności Hubera-Misesa przyjmuje postać

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_p^2 = 0, \quad (10.412c)$$

a dla płaskiego stanu odkształcenia,  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\sigma'_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , wyraża się zależnością

$$\frac{3}{4}\sigma_x^2 + \frac{3}{4}\sigma_y^2 - \frac{3}{2}\sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_p^2 = 0. \quad (10.412d)$$

Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia (10.406) podczas płynięcia materiału jest spełnione dla stanów naprężenia  $\sigma$  i  $\sigma + d\sigma$ . Jeśli stany te znajdują się na powierzchni plastyczności, to wolno różniczkować warunek plastyczności względem czasu. Pochodną warunku plastyczności (10.412) można zapisać

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{lub} \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = 0. \quad (10.413)$$

Warunek (10.413) definiuje czynny proces odkształcania.

Jeśli warunek plastyczności (10.412b) napiszemy dla materiału umacniającego się (wówczas  $\sigma_p = \bar{\sigma}$ , rys.10.138b) w postaci

$$\frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{3}(\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2$$

i obliczymy z niego różniczkę zupełną

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)d\sigma_x + \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)d\sigma_y + \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)d\sigma_z + \\ & + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + 2\tau_{zx} d\tau_{zx} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma}, \end{aligned}$$

do której wprowadzimy dewiatory naprężenia  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$   
 [dewiatory naprężenia równają się odpowiedniej pochodnej cząstkowej warunku plastyczności, np.  $S_x = \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) =$   
 $= \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}$ ,  $S_y = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)$ ,  
 $S_z = \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)$ ,  $S_{xy} = 2\tau_{xy}$ ,  $S_{yz} = 2\tau_{yz}$ ,  
 $S_{zx} = 2\tau_{zx}$  ],

to otrzymamy równanie



$$S_x d\bar{\sigma}_x + S_y d\bar{\sigma}_y + S_z d\bar{\sigma}_z + S_{xy} d\bar{\tau}_{xy} + S_{yz} d\bar{\tau}_{yz} + S_{zx} d\bar{\tau}_{zx} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma},$$

które można zapisać

$$S_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} = 0. \quad (10.414)$$

Równanie (10.414) jest słuszne dla wszystkich stanów warunku plastyczności (10.412).

Podstawiając do równania (10.414) umocnienie materiału  $E_p = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$  ( $d\bar{\sigma} = E_p d\bar{\epsilon}$ ), wynikające z próby jednoosiowego rozciągania (rys.10.138b) oraz przyrost odkształcenia wynikający z prawa płynięcia (10.406a)  $d\bar{\epsilon} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = d\lambda \frac{2}{3} \bar{\sigma}$ , otrzymamy ostatecznie zależność między naprężeniami całkowitymi a przyrostem naprężeń dla materiału umacniającego się

$$S_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} = \frac{4}{9} E_p \bar{\sigma}^2 d\lambda. \quad (10.415)$$

Współczynnik proporcjonalności  $d\lambda$  i ostateczną zależność między naprężeniami i odkształceniami dla materiału sprężysto-plastycznego umacniającego się liniowo (rys.10.138b), dla którego ważny jest warunek plastyczności Hubera-Misesa (10.412b) i związek fizyczny Prandtla-Reussa (10.407a) można wyznaczyć dwójako.

#### Sposób I

Wprowadzając prawo płynięcia (10.407a) do warunku plastyczności (10.413) otrzymamy wyrażenie

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \left[ D_{ijkl} (d\bar{\epsilon}_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}}) \right] = 0,$$

z którego wyznaczamy współczynnik proporcjonalności

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_{kl} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} .$$

Zatem związek fizyczny (10.407b.) ostatecznie przyjmie postać

$$d\sigma_{ij} = \left( D_{ijkl} - \frac{D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) d\varepsilon_{kl} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (10.416a)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\{d\sigma\} = ([D^e] - [D^p]) \{d\varepsilon\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\}, \quad (10.416b)$$

gdzie  $[D^{ep}]$  jest konstytutywną macierzą sprężysto-plastyczną.

Jest to macierz symetryczna, czyli zachodzi zależność  $D_{ijkl} = D_{klij}$ . W przypadku zastosowania niestowarzyszonego prawa płynięcia macierz ta nie będzie symetryczna.

Sposób II

Mnożąc prawo fizyczne zapisane w przyrostach (10.391) przez dewiator  $S_{ij}$  i przyrównując go do równania (powierzchni płynięcia) (10.415) oraz wprowadzając zależność  $d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  otrzymamy wyrażenie

$$\frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)(d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}) S_{ij}] = \frac{4}{9} E_p \bar{\sigma}^2 d\lambda,$$

z którego wyznaczamy współczynnik proporcjonalności

$$d\lambda = \frac{2G d\varepsilon_{ij} S_{ij}}{\frac{4}{9} E_p \bar{\sigma}^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} S_{ij}},$$

lub w postaci macierzowej

$$d\lambda = \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{S_x}{S} \frac{S_y}{S} \frac{S_z}{S} \frac{S_{xy}}{S} \frac{S_{yz}}{S} \frac{S_{zx}}{S} \right) \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\delta_{xy}^e \\ d\delta_{yz}^e \\ d\delta_{zx}^e \end{Bmatrix},$$

gdzie  $S = \frac{1}{2G(1-2\nu)} \left( \frac{4}{9} E_p \bar{\sigma}^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}} S_{ij} \right)$ .

Przyrost tensora naprężenia otrzymamy z równania (10.391) zapisanego przyrostowo i równania (10.404) oraz prawa (10.406a) dla zagadnień sprężysto-plastycznych wyrazi się ostatecznie zależnością

$$d\delta_{ij}^e = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-2\nu) d\varepsilon_{ij} + \nu d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] - 2G d\lambda \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}}, \quad (10.417a)$$

a po wprowadzeniu zależności za  $d\lambda$  wyrazi się w ogólnej postaci macierzowej następująco:

$$\{d\delta\} = [D^e] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\delta_{xy}^e \\ d\delta_{yz}^e \\ d\delta_{zx}^e \end{Bmatrix} - \frac{2G}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2S_{xy} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{zx} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{S_x}{S} \frac{S_y}{S} \frac{S_z}{S} \frac{S_{xy}}{S} \frac{S_{yz}}{S} \frac{S_{zx}}{S} \right\} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\delta_{xy}^e \\ d\delta_{yz}^e \\ d\delta_{zx}^e \end{Bmatrix} \quad (10.417b)$$

lub krócej

$$\{d\delta\} = [D^e] \{d\varepsilon\} - [D^p] \{d\varepsilon\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\}. \quad (10.417c)$$

W równaniu (10.417c) i (10.416b)  $[D^{ep}]$  jest symetryczną macierzą sprężysto-plastyczną i ma konkretną następującą postać:

1. Dla przestrzennego stanu naprężenia

$$[D^{ep}] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu - \frac{S_x^2}{S} & \nu - \frac{S_x S_y}{S} & \nu - \frac{S_x S_z}{S} & \frac{S_x S_{xy}}{S} & \frac{S_x S_{yz}}{S} & \frac{S_x S_{zx}}{S} \\ & 1-\nu - \frac{S_y^2}{S} & \nu - \frac{S_y S_z}{S} & \frac{S_y S_{xy}}{S} & \frac{S_y S_{yz}}{S} & \frac{S_y S_{zx}}{S} \\ & & 1-\nu - \frac{S_z^2}{S} & \frac{S_z S_{xy}}{S} & \frac{S_z S_{yz}}{S} & \frac{S_z S_{zx}}{S} \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \frac{S_{xy}^2}{S} & \frac{S_{xy} S_{yz}}{S} & \frac{S_{xy} S_{zx}}{S} \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} \frac{S_{yz}^2}{S} & \frac{S_{yz} S_{zx}}{S} \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \frac{S_{zx}^2}{S} \end{bmatrix} \quad (10.418)$$

symetria

gdzie  $S_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)$  i odpowiednio  $S_y, S_z, S_{xy} = \tau_{xy}, \dots, S = \frac{2}{9} E_p \bar{\sigma}^2 \frac{1-2\nu}{G} + (1-\nu)(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + 2\nu(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x) + 2(1-2\nu)(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)$ .

2. Dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$[D^{ep}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{(S_x + \nu S_y)^2}{S} & \nu - \frac{(S_x + \nu S_y)(S_y + \nu S_x)}{S} & \frac{(1-\nu)(S_x + \nu S_y)S_{xy}}{S} \\ & 1 - \frac{(S_y + \nu S_x)^2}{S} & \frac{(1-\nu)(S_y + \nu S_x)S_{xy}}{S} \\ & & \frac{1-\nu}{2} \frac{(1-\nu)^2 S_{xy}^2}{S} \end{bmatrix} \quad (10.419)$$

symetria

gdzie  $S_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y)$ ,  $S_y = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x)$ ,  $S_{xy} = \tau_{xy}$ ,  $S = \frac{4}{9} \frac{1-\nu^2}{E} \bar{\sigma}^2 E_p + S_x^2 + S_y^2 + 2\nu S_x S_y + 2(1-\nu) S_{xy}^2$ .

3. Dla płaskiego stanu odkształcenia

$$[D^{ep}] = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x^2}{S} & \nu & \frac{S_x S_y}{S} & \frac{S_x S_{xy}}{S} \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_y^2}{S} & \nu & \frac{S_y S_{xy}}{S} \\ & & & \frac{1}{2} - \frac{S_{xy}^2}{S} \end{bmatrix} \quad (10.420)$$

symetria

gdzie  $S_x = \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)$ ,  $S_y = -S_x$ ,  $S_{xy} = \tau_{xy}$ ,  $S = \frac{2}{9} \frac{\bar{\sigma}^2}{G} E_p + S_x^2 + S_y^2 + 2S_{xy}^2$ .

Macierz sprężysto-plastyczna  $[D^{ep}]$  obliczana jest w elementach uplastycznionych i zależy ona od aktualnego stanu naprężenia, a zatem nie jest stała.

Dewiatory naprężeń macierzowo można zapisać

$$\{S\} = \{\sigma - \sigma_s\} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (10.421a)$$

*symetria*

lub symbolicznie

$$\{S\} = [d_n] \{\sigma\} \quad (10.421b)$$

Naprężenie średnie można zapisać

$$\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (10.422a)$$

*symetria*

lub symbolicznie

$$\sigma_s = [n_s] \{\sigma\} \quad (10.422b)$$

Podobnie można zapisać dewiatory odkształceń, a mianowicie

$$\{e\} = [d_o] \{\varepsilon\}, \quad (10.423a)$$

$$\varepsilon_s = [o_s] \{\varepsilon\}, \quad (10.423b)$$

przy czym

$$[d_0] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ \text{symetria} & & & & & 3 \end{bmatrix},$$

macierz naprężeń średnich  $[n_s]$  równa jest macierzy średnich odkształceń  $[0_s]$ ,  $[n_s] = [0_s]$ .

Poniżej zostanie przedstawiony sposób wyprowadzenia zależności między przyrostami naprężeń i przyrostami odkształceń dla płaskiego stanu odkształcenia.

Jeśli do związku fizycznego (10.394)<sub>1</sub> zapisanego w przyrostach wprowadzimy zależności  $d\varepsilon_x^e = d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p$ ,  $d\varepsilon_y^e = d\varepsilon_y - d\varepsilon_y^p$ ,  $d\varepsilon_x^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = d\lambda S_x$ ,  $d\varepsilon_y^p = d\lambda S_y$ , to otrzymamy równanie na przyrost naprężenia w kierunku osi x

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu)(d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p) + \nu(d\varepsilon_y - d\varepsilon_y^p) \right] = \\ &= \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu)d\varepsilon_x + \nu d\varepsilon_y - d\lambda [(1-\nu)S_x + \nu S_y] \right\}. \end{aligned} \quad (10.424a)$$

Pozostałe przyrosty naprężeń wyprowadzane są analogicznie i są równe

$$d\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu)d\varepsilon_y + \nu d\varepsilon_x - d\lambda [(1-\nu)S_y + \nu S_x] \right\}, \quad (10.424b)$$

$$d\tau_{xy} = 2G \left( \frac{1}{2} d\gamma_{xy}^e - d\lambda S_{xy} \right), \quad (10.424c)$$

gdzie  $S_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ ,  $S_y = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) = -S_x$ ,  $\tau_{xy} = S_{xy}$ .

Podstawiając związki (10.424) do warunku plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia (10.412d) i po wyko-

rzystaniu umocnienia materiału  $d\sigma = E d\lambda \frac{2}{3} \bar{\sigma}$  zapisanego w postaci różniczkowej

$$S_x d\sigma_x + S_y d\sigma_y + 2S_{xy} d\tau_{xy} = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 E_p d\lambda,$$

obliczymy współczynnik proporcjonalności

$$d\lambda = \frac{S_x d\varepsilon_x + S_y d\varepsilon_y + S_{xy} d\delta_{xy}^e}{\frac{2}{9G} \bar{\sigma}^2 E_p + S_x^2 + S_y^2 + 2S_{xy}^2}. \quad (10.425)$$

Następnie wprowadzając wyznaczony współczynnik proporcjonalności (10.425) do związków (10.424) otrzymamy związki fizyczne dla materiału umacniającego się Hubera-Misesa odkształcanego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

$$d\sigma_x = 2G \left[ \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x^2}{S} \right) d\varepsilon_x + \left( \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x S_y}{S} \right) d\varepsilon_y - \frac{S_x S_{xy}}{S} d\delta_{xy}^e \right];$$

$$d\sigma_y = 2G \left[ \left( \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x S_y}{S} \right) d\varepsilon_x + \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_y^2}{S} \right) d\varepsilon_y - \frac{S_y S_{xy}}{S} d\delta_{xy}^e \right], \quad (10.426a)$$

$$d\tau_{xy} = 2G \left[ \frac{S_x S_{xy}}{S} d\varepsilon_x - \frac{S_y S_{xy}}{S} d\varepsilon_y + \left( \frac{1}{2} - \frac{S_{xy}^2}{S} \right) d\delta_{xy}^e \right],$$

gdzie  $S = \frac{2}{9G} \bar{\sigma}^2 E_p + S_x^2 + S_y^2 + 2S_{xy}^2$ .

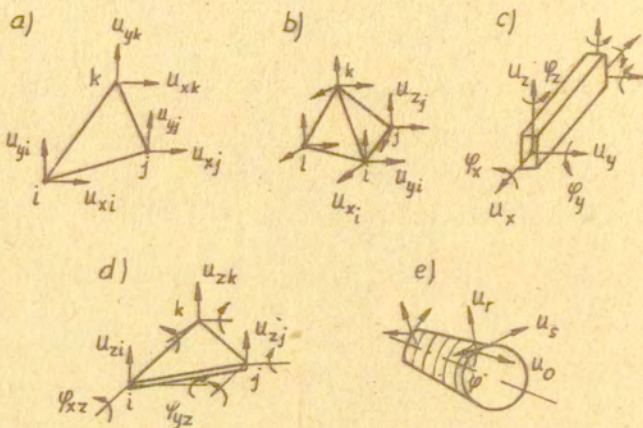
Związki fizyczne (10.426a) macierzowo można zapisać

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\}, \quad (10.426b)$$

gdzie  $[D^{ep}]$  jest sprężysto-plastyczną macierzą symetryczną zapisaną w postaci konkretnej równaniem (10.420).

#### 10.6.4. Związki geometryczne

Obszar rozwiązania należy podzielić na skończoną liczbę elementów a o prostoliniowych brzegach za pomocą punktów węzłowych. Elementami (podobszarami) mogą być trójkąty, kwadraty, ostrosłupy, sześciiany itd. (rys.10.140).



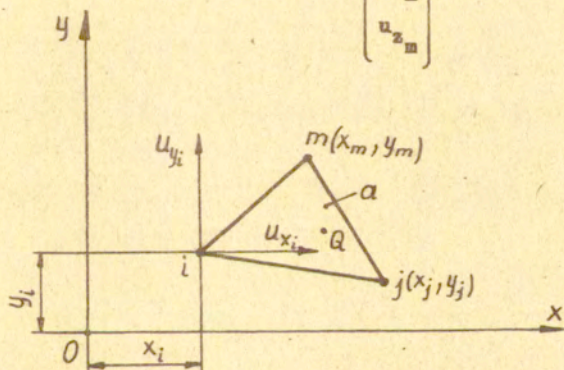
Rys.10.140. Rodzaje elementów wraz z zaznaczonymi stopniami swobody

Płaski element trójkątny (10.140a) posiada 6 stopni swobody. Element czworościenny (rys.10.140b) posiada cztery węzły, a każdy z nich ma trzy składowe przemieszczenia  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , zatem element ten ma 12 stopni swobody. Element belkowy (rys. 10.140c) ma dwanaście stopni swobody, a element płytowy (rys. 10.140d) ma 9 stopni swobody (3 przemieszczenia, 6 obrotów). Element powłokowy osiowo-symetryczny (rys.10.140e) posiada dwa węzły w postaci okręgów, w każdym węźle są trzy przemieszczenia  $u_r$ ,  $u_s$ ,  $u_o$  oraz kąt obrotu  $\varphi$ , zatem element ten ma 8 stopni swobody.



Przyjmijmy, że obszar podzielony jest na skończoną liczbę elementów trójkątnych  $a$  o prostoliniowych brzegach połączonych punktami węzłowymi  $i, j, m$  (rys.10.141). W punktach węzlowych określony jest wektor przemieszczenia  $\{\delta\}$ , który dla stanu przestrzennego ma składowe

$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{z_1} \\ u_{x_j} \\ u_{y_j} \\ u_{z_j} \\ u_{x_m} \\ u_{y_m} \\ u_{z_m} \end{Bmatrix} \quad (10.427)$$



Rys.10.141. Element  $a$  na płaszczyźnie  $xy$ :  $i, j, m$  - węzły elementu,  $Q$  - punkt wewnątrz elementu

Każdy węzeł  $i, j, m$  ma tyle składowych, ile ma stopni swobody. Funkcja przemieszczeń  $\{\delta\}$  musi spełniać warunki ciągłości materiału pomiędzy stykającymi się elementami. Przeszaczenia węzłów elementu  $\{\delta\}$  pozwalają określić przeszaczenie do-

wolnego punktu Q wewnątrz elementu a za pomocą funkcji kształtu

$$\{df\}^a = \begin{Bmatrix} du_x(x,y,z) \\ du_y(x,y,z) \\ du_z(x,y,z) \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} d\delta_i \\ d\delta_j \\ d\delta_m \end{Bmatrix} = [N_i, N_j, N_m] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}, \quad (10.428)$$

gdzie  $[N]$  jest macierzą funkcji kształtu.

Funkcją kształtu jest wielomian o liczbie członów zwykle równej liczbie niewiadomych w węźle elementu.

Dla płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia przyjmujemy najczęściej element trójkątny (rys.10.141), który ma sześć składowych przemieszczeń  $u_x$ ,  $u_y$ . Przemieszczenia te najprościej można wyznaczyć z dwóch wielomianów liniowych

$$u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

$$u_y = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

Współczynniki liczbowe  $\alpha_{1+6}$  muszą spełniać warunki brzegowe w węzłach i wyznaczamy je z rozwiązania dwóch układów trzech równocześnie spełnionych równań

$$u_{x_i} = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \quad u_{y_i} = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i,$$

$$u_{x_j} = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \quad u_{y_j} = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j,$$

$$u_{x_m} = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \quad u_{y_m} = \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m.$$

Rozwiązując te układy względem współczynników  $\alpha_{1+6}$  otrzymamy przemieszczenia  $u_x$  i  $u_y$

$$u_x = \frac{1}{2F} [N_i u_{x_i} + N_j u_{x_j} + N_m u_{x_m}],$$

$$u_y = \frac{1}{2F} [N_i u_{y_i} + N_j u_{y_j} + N_m u_{y_m}],$$

gdzie  $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) \frac{1}{2F}$ ,  $N_j = (a_j + b_j x + c_j y) \frac{1}{2F}$ ,

$$N_m = (a_m + b_m x + c_m y) \frac{1}{2F}, \quad a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m,$$

$$c_i = x_m - x_j, \quad b_j = y_m - y_i, \quad c_j = x_i - x_m,$$

$$b_m = y_i - y_j, \quad c_m = x_j - x_i,$$

F jest polem trójkąta i, j, m

$$F = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}.$$

Rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu a macierzowo można zapisać

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ u_{x_j} \\ u_{y_j} \\ u_{x_m} \\ u_{y_m} \end{Bmatrix}. \quad (10.429)$$

Znane przemieszczenia  $\{\delta\}$  węzłów elementu, jak i każdego punktu wewnątrz elementu, pozwalają wyznaczyć odkształcenia  $\{\epsilon\}$  w dowolnym punkcie elementu, co ogólnie w postaci przyrostowej macierzowej można zapisać

$$\{d\varepsilon\}^a = [B] \{d\delta\}^a, \quad (10.430)$$

gdzie  $[B]$  jest macierzą przyjętych funkcji kształtu elementu i przyjętych geometrycznych związków odkształceń. Odkształcenia dla stanu przestrzennego można zapisać

$$\{d\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\delta_{xy}^e \\ d\delta_{yz}^e \\ d\delta_{zx}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{Bmatrix}.$$

Dla płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia znikają odpowiednie składowe i wówczas zależność (10.430) dla najprostszej funkcji kształtu elementu (10.429) ma konkretną postać

$$\{d\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\delta_{xy}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_{x_i} \\ du_{y_i} \\ du_{x_j} \\ du_{y_j} \\ du_{x_m} \\ du_{y_m} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_j - y_m & 0 & y_m - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_m - x_j & 0 & x_i - x_m & 0 & x_j - x_i \\ x_m - x_j & y_j - y_m & x_i - x_m & y_m - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_{x_i} \\ du_{y_i} \\ du_{x_j} \\ du_{y_j} \\ du_{x_m} \\ du_{y_m} \end{Bmatrix} \cdot (10.431)$$

Mając przyrost odkształcenia (10.431) można określić przyrost naprężenia w całym elemencie dla zagadnień sprężystych ze wzoru (10.396), a dla zagadnień sprężysto-plastycznych ze wzoru (10.416). Zależność (10.416) po rozpisaniu dla płaskiego stanu odkształcenia ma postać

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x^2}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_x S_y}{S} & -\frac{S_x S_{xy}}{S} \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{S_y^2}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{S_y S_x}{S} & -\frac{S_y S_{xy}}{S} \\ \text{symetria} & & \frac{1}{2} - \frac{S_{xy}^2}{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\delta_{xy}^2 \end{Bmatrix} \cdot (10.432)$$

### 10.6.5. Równania równowagi

W węzłach elementu a występują siły  $\{P\}$ , wywołane przemieszczeniami  $\{\delta\}$ , a będące reakcjami węzłów. Ilość reakcji węzła jest równa sumie liczby stopni swobody węzła i liczby zbiegających się w nim elementów. W węźle 1 (rys.10.141) siła  $P_1$  o składowych  $P_{x_1}$ ,  $P_{y_1}$  związana jest z przemieszczeniem

$\delta_i$  o składowych  $u_{x_1}$ ,  $u_{y_1}$  poprzez macierz sztywności  $[k]$  elementu a, co można zapisać następująco

$$\{P_i\}^a = [k] \{\delta_i\}^a. \quad (10.433a)$$

W ogólnym przypadku do równania (10.433a) mogą dochodzić jeszcze siły wywołane naprężeniami i odkształceniami początkowymi oraz obciążeniami rozłożonymi

$$\{P_i\}^a = [k] \{\delta_i\}^a + \{P_i\}_{\sigma_0}^a + \{P_i\}_{\epsilon_0}^a + \{P_i\}_p^a. \quad (10.433b)$$

Suma wszystkich sił  $\{P_1\}$  w węźle 1 (od wszystkich elementów zbiegających się w węźle) daje siłę zewnętrzną  $\{R_i\}$ ,

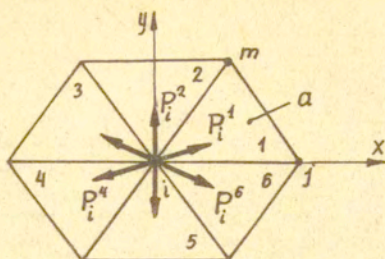
$$\{R_i\} = \sum_1^w \{P_i\} = \{P_i^1\} + \{P_i^2\} + \dots = \left( \sum_1^w [k_{i1}]^a \right) \{\delta_1\} + \\ + \left( \sum_1^w [k_{i2}]^a \right) \{\delta_2\} + \dots + \sum_1^w \{P_i\}_{\sigma}^a + \dots,$$

powodującą równowagę węzła 1 elementu a. Suma wszystkich sił P w elemencie daje równoważną siłę zewnętrzną, powodującą równowagę elementu, którą można wyrazić wzorem

$$\{R\}^a = [k] \{\delta\}^a, \quad (10.434)$$

gdzie  $[k] = \int_V [B]^T [D^e] [B] dV$  i oznacza macierz sztywności elementu,  $[D^e]$  jest macierzą konstytutywną sprężystości, opisującą własności fizyczne materiału,  $[B]^T$  jest transponowaną macierzą funkcji kształtu elementu i geometrycznych związków odkształceń. Przyjmując grubość elementu g, objętość  $dV = g \cdot dx \cdot dy$ , powierzchnię  $F = dx \cdot dy$  można wyrazić macierz sztywności  $[k]$  w postaci prostej, dogodnej do obliczeń na maszynach cyfrowych

$$[k] = [B]^T [D^e] [B] \cdot g \cdot F. \quad (10.435)$$



Rys.10.142. Siły P w węźle i

Bardziej konkretną postać równania (10.433b) otrzymuje się z przyrównania pracy sił zewnętrznych  $L_z = (\{d\delta\}^a)^T \{P\}^a$  wykonaną przez siły węzłowe  $\{P\}^a$  i ich wirtualne przemieszczenia  $\{d\delta\}^a$  z pracą sił wewnętrznych  $L_w = (\{d\varepsilon\}^a)^T \{\sigma\} - \{df\}^T \{p\}$  wykonaną przez naprężenia i siły równomiernie rozłożone całego elementu. Zatem można napisać

$$(\{d\delta\}^a)^T \{P\}^a = [B]^T (\{d\delta\}^a)^T \{\sigma\} - [N]^T (\{d\delta\}^a)^T \{p\},$$

a po uproszczeniu i scałkowaniu

$$\{P\}^a = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV.$$

Po wprowadzeniu za naprężenia  $\{\sigma\}$  zależności najogólniejszej

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\},$$

(gdzie  $\{\varepsilon_0\}$  jest odkształceniem początkowym wywołanym temperaturą, skurczem, rozwojem kryształów,  $\{\sigma_0\}$  jest naprężeniem początkowym) równanie powyższe przyjmie ostateczną postać

$$\begin{aligned} \{P\}^a = & \int_V [B]^T [D] [B] dV \{d\delta\}^a - \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV + \\ & + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV, \end{aligned} \quad (10.436)$$

gdzie  $\int_V [B]^T [D] [B] dV = [k]$  jest macierzą sztywności elementu,  
 $-\int_V [B]^T [D] \cdot \{\epsilon_0\} dV = \{P\}_{\epsilon_0}^a$  — siły w węzłach wywołane odkształceniami początkowymi  $\epsilon_0$ ,  $\int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV = \{P\}_{\sigma_0}^a$   
 — siły w węzłach wywołane naprężeniami początkowymi  $\sigma_0$ ,  
 $-\int_V [N]^T \{p\} dV = \{P\}_p^a$  — siły w węzłach wywołane siłami masowymi.

Macierz sztywności elementu  $[k]$  (10.435) jest zbudowana ze stałych wyrazów i stałych materiałowych i może być zapisana w postaci

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1j} & k_{1m} \\ k_{j1} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{m1} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}. \quad (10.436)$$

Podmacierze macierzy (10.436) obliczane są ze wzoru

$$[k_{1j}] = [B_i]^T [D^e] [B_j] gF, \quad (10.437)$$

gdzie

$$[B_i] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_j - y_m & 0 \\ 0 & x_m - x_j \\ x_m - x_j & y_j - y_m \end{bmatrix},$$



$$[B_j] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_m - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_m \\ x_i - x_m & y_m - y_i \end{bmatrix},$$

$$[B_m] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_j - x_i \\ x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix},$$

zgodnie z macierzą  $[B] = [B_1, B_j, B_m]$  ze wzoru (10.431).

Macierz  $[B_1]^T$  nazywa się macierzą transponowaną w stosunku do macierzy  $[B_1]$  i jest zapisana

$$[B_1] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad [B_1]^T = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix}.$$

Dla elementów uplastycznionych macierzy sprężystości  $[D^e]$  zastąpiona jest macierzą sprężysto-plastyczną  $[D^{ep}]$  obliczaną ze wzoru (10.420). Macierz  $[D^{ep}]$  nie jest stała i zależy od aktualnego stanu naprężenia.

Macierz sztywności układu  $[K]$  otrzymuje się z macierzy sztywności elementów  $[k]$ . Wyrazy macierzy sztywności układu  $[K_{im}]$  są podmacierzami, otrzymanymi z sumowania odpowiednich wyrazów (podmacierzy) macierzy sztywności elementów  $[k_{im}]$ .

$$[K_{im}] = \sum [k_{im}]^a \quad (10.438)$$

przy czym sumowanie obejmuje wszystkie elementy.

Dla całego układu elementów (zadania) równanie równowagi sił ma postać

$$\{R\} = [K] \{\delta\}. \quad (10.439)$$

Macierz sztywności układu  $[K]$  jest stała, gdyż jest zbudowana ze stałych wyrazów zależnych od geometrii zadania i stałych materiałowych i nie ulega zmianie ani w procesie obciążania, ani w procesie odciążania.

Całkowitą siłę  $R$  działającą na element można również otrzymać z równowaznego równania

$$\{R\}^a = [B]^T \{\sigma\}^a \cdot g \cdot F. \quad (10.440)$$

Naprężenia  $\{\sigma\}$  obliczane są z równania (10.396) dla sprężystego zachowania się materiału, a w przypadku pojawienia się odkształceń plastycznych — z równania (10.416b).

W zagadnieniach sprężystych mamy liniowe związki geometryczne (10.430) i fizyczne (10.396). Natomiast w zagadnieniach sprężysto-plastycznych liniowe pozostają związki geometryczne (10.430), a związki fizyczne (10.416b) są nieliniowe. Nieliniowość związków fizycznych powoduje, że układ równań równowagi (10.434) dla całego układu jest również nieliniowy. Rozwiązanie takiego układu równań może nastąpić jedną z wcześniej wymienionych metod iteracyjnych.

## 10.6.6. Sposoby obliczeń

Wybór sposobu (metody) rozwiązania nieliniowego układu równań podyktowany jest względami ekonomicznymi, rodzajem zadania i przyjętym modelem fizycznym materiału. Rozwiązania poszukuje się na drodze iteracyjnej doprowadzając do zgodności naprężeń i odkształceń w elementach i w całym zadaniu stosując modyfikowanie macierzy konstytutywnej  $[D]$  (przez zmianę macierzy sztywności  $[K]$ ) lub zmieniając naprężenia początkowe  $\{\sigma_0\}$ , czy też zmieniając odkształcenia początkowe  $\{\xi_0\}$ . Często wybór metody analizy zagadnienia zależy od przyjętego aparatu numerycznego.

## 1. Metoda zmiennej sztywności

Dla zagadnień sprężysto-plastycznych mamy macierz konstytutywną sprężysto-plastyczną  $[D^{ep}]$  zależną od aktualnego stanu naprężenia. Zmieniona macierz  $[D^{ep}]$  powoduje zmianę macierzy sztywności układu  $[K]$ , a ta z kolei wpływa na zmianę sił, przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w zadaniu. Jeśli związki fizyczne ustalone są dla całkowitych wartości naprężeń i odkształceń, to i obciążenia przykładamy w postaci całkowitych wartości przemieszczeń lub sił. Gdy mamy związki fizyczne ustalone w przyrostach, to i obciążenia realizujemy w formie przyrostów. Rozpatrzmy metodę przyrostową.

Tok postępowania jest następujący:

1. Całe obciążenie  $\{R\}$  dzielimy na przyrosty obciążeń  $\{dR_n\}$

$$\{dR_1\} + \{dR_2\} + \dots + \{dR_n\} = \{R\}$$

i związane z nimi przyrosty przemieszczeń

$$\{d \delta_1\} + \{d \delta_2\} + \dots + \{d \delta_n\} = \{\delta\}.$$

2. Przykładamy pierwszy przyrost obciążenia  $\{dR_1\}$ , przyjmujemy macierz sztywności  $[K_0]$  jak dla liniowej sprężystości i wyznaczamy pierwszy przyrost przemieszczeń

$$\{d \delta_1\} = [K_0]^{-1} \{dR_1\}.$$

2. Obliczamy naprężenia związane ze stanem  $\{d \delta_1\}$

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\},$$

$$\{d\varepsilon\} = [B] \{d \delta_1\},$$

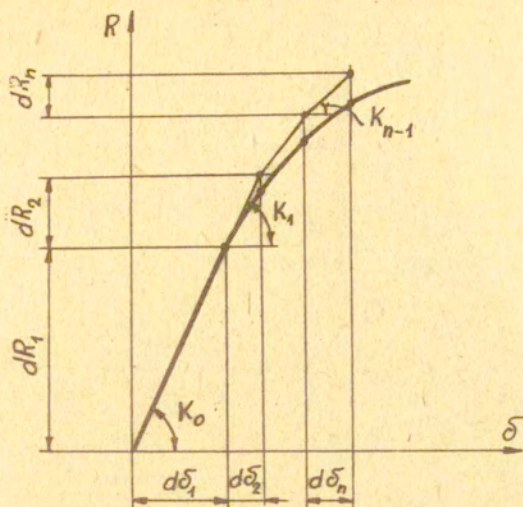
sprawdzamy warunek plastyczności i w elementach uplastycznionych dokonujemy modyfikacji macierzy  $[D^{ep}]$  i następnie modyfikacji macierzy  $[k]^a = \int_V [B]^T [D^{ep}] [B] dV$ .

3. Zmienione macierze sztywności uplastycznionych elementów  $[k]^a$  wstawiamy do macierzy sztywności całego układu  $[K_1]$  i znajdujemy drugie przybliżenie wektora przemieszczenia

$$\{d \delta_2\} = [K_1]^{-1} \{dR_2\}.$$

Obciążenia zwiększamy tak długo aż wyczerpana zostanie nośność układu, czyli wszystkie elementy zostaną uplastycznione. Sumując odpowiednie przyrosty obciążeń i przemieszczeń otrzymamy rozwiązanie problemu (rys.10.143). Dokładność rozwiązania zwiększymy, jeśli będziemy przyjmować średnią macierz sztywności dla początku i końca kroku

$$[K'] \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} ([K_{(\delta_i)}] + [K_{(\delta_{i+1})}]).$$



Rys.10.143. Ilustracja metody zmiennej sztywności w ujęciu pośrednim

Możemy również zadawać obciążenie w formie geometrycznej czyli za pomocą przyrostu przemieszczeń  $\{d\delta\}$ .

## 2. Metoda naprężeń początkowych

Metoda naprężeń początkowych polega na określeniu sił korekcyjnych węzłowych (nazywane obciążeniami początkowymi), które przyłożone do konstrukcji sprężystej wywołują przemieszczenia i siły wewnętrzne spełniające związki konstytutywne sprężysto-plastyczności. Taki proces poszukiwania rozwiązania nazywa się procesem iteracyjnym.

Odmianą procesu iteracyjnego jest przyrostowy proces iteracyjny, dla którego sposób postępowania jest następujący. Do konstrukcji przykładamy obciążenie  $\{R_0\}$  (dla którego poszukujemy rozwiązania  $\{\delta\}$ ) i wyliczamy pierwsze przybliżenie przemieszczenia

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1} \{R_0\}$$

oraz związane z nim naprężenia będące różnicą między rozwiązaniem sprężystym a sprężysto-plastycznym

$$\{\sigma_0\} = ([D] - [D^{ep}]) [B] \{\delta_0\},$$

a także obciążenia początkowe  $\{\Delta R_1\}$  (korekcyjne siły węzłowe) wywołane przez  $\{\sigma_0\}$

$$\{\Delta R_1\} = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV.$$

Stan naprężenia sprowadzamy na powierzchnię plastyczności (płynięcia)  $f(\sigma_p) = 0$ , po przez

$$\{\sigma_p\} = \{\sigma\} - \{\sigma_0\},$$

gdzie  $\{\sigma\} = [D][B]\{\delta_0\}$ . Następnie wyznaczamy przyrost przemieszczeń w węzłach wywołany zmianą obciążenia

$$\{\Delta \delta_1\} = [K_0]^{-1} \{\Delta R_1\}$$

i obliczamy przyrost naprężenia związany z tym stanem przemieszczenia

$$\{\sigma_1\} = ([D] - [D^{ep}]) [B] \{\Delta \delta_1\}$$

i przyrost wektora obciążenia

$$\{\Delta R_2\} = \int_V [B]^T \{\sigma_1\} dV.$$

Następnie sprowadzamy stan naprężenia na powierzchnie płynięcia

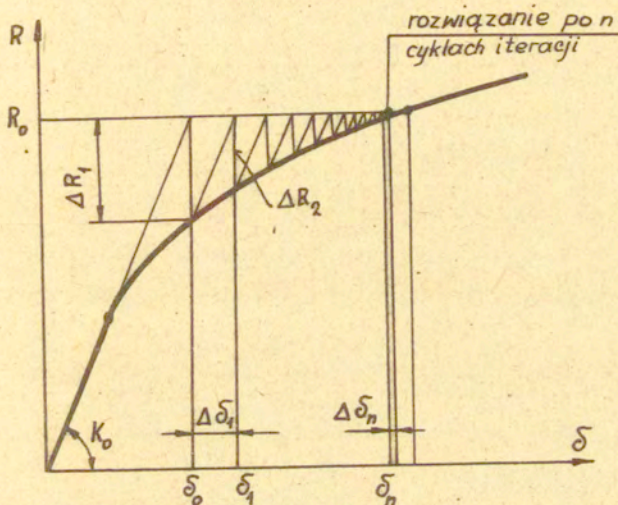
$$\{\sigma_p\} = \{\sigma\} - \{\sigma_f\},$$

gdzie  $\{\sigma\} = \{\sigma_p\} + \{\Delta\sigma_f\}$ ,  $\{\Delta\sigma_f\} = [D][B]\{\Delta\delta_f\}$ .

Obliczenia w pętli iteracyjnej powtarzamy tak długo aż kolejne

$$\{\Delta\delta_n\} = [K_0]^{-1} \{\Delta R_n\}$$

będą dostatecznie małe (rys. 10.144).



Rys. 10.144. Ilustracja metody naprężeń początkowych w ujęciu przyrostowym iteracyjnym

Całkowita wielkość przemieszczeń jest sumą przyrostów przemieszczeń na poszczególnych krokach iteracji

$$\{\delta_c\} = \{\Delta\delta_0\} + \{\Delta\delta_1\} + \dots + \{\Delta\delta_n\}.$$

Zaletą metody naprężeń początkowych jest możliwość stosowania w całym procesie iteracyjnym tej samej macierzy sztywności  $[K_0]$  odwróconej tylko jeden raz. Wadą natomiast jest powolna zbieżność rozwiązania.

### 3. Metoda odkształceń początkowych

Metoda odkształceń początkowych stosowana jest w zagadnieniach, w których związki konstytutywne zapisane są w postaci

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}) \text{ lub } \{d\varepsilon\} = f(\{d\sigma\}).$$

Odształcenia początkowe definiujemy jako różnicę odkształceń z rozwiązania sprężysto-plastycznego i sprężystego

$$\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^e\},$$

przy czym  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\}$ , , stąd  $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon^p\}$ . Odształcenia sprężyste obliczamy ze wzoru

$$\{\varepsilon^e\} = [D]^{-1} \{\sigma\},$$

a odkształcenia całkowite

$$\{\varepsilon\} = [D^{ep}]^{-1} \{\sigma\}.$$

Odształcenia początkowe wyrażą się zależnością

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\} &= ([D^{ep}]^{-1} - [D^e]^{-1}) \{\sigma\} = \\ &= ([D^{ep}]^{-1} - [D^e]^{-1}) [D] [B] \{\sigma\} = \\ &= ([D^{ep}]^{-1} [D] - [I]) [B] \{\sigma\}, \end{aligned}$$

gdzie  $[I]$  jest macierzą jednostkową z zerami poza główną przekątną.

Rozwiązania poszukujemy na drodze iteracyjnej stosując zwykły proces iteracyjny lub przyrostowy proces iteracyjny. W obu przypadkach posługujemy się stałą macierzą sprężystą  $[K_0]$  do



wyznaczenia pierwszego przybliżenia wektora przemieszczenia

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1} \{R_0\}.$$

W przypadku zwykłego procesu iteracyjnego postępujemy następująco:

1. wyznaczamy odkształcenie początkowe na podstawie przemieszczeń z poprzedniego kroku

$$\{\varepsilon_0\} = ([D^{ep}]^{-1}[D] - [I])[B]\{\delta_0\},$$

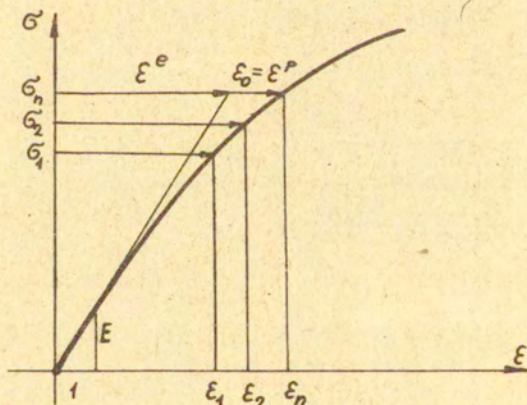
2. obliczamy wektor początkowych obciążeń

$$\{\Delta R_i\} = -\int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV,$$

3. obliczamy nowy wektor przemieszczeń

$$\{\delta_i\} = [K_0]^{-1} \{R_0 + \Delta R_i\}.$$

Jeśli różnica  $\{\delta_i\} - \{\delta_{i-1}\}$  jest znikomo mała, to iterację kończymy. Jeśli nie, to powtórnie wykonujemy operacje 1, 2, 3. Przebieg iteracji pokazano na rysunku 10.145.



Rys.10.145. Ilustracja iteracji metodą odkształceń początkowych

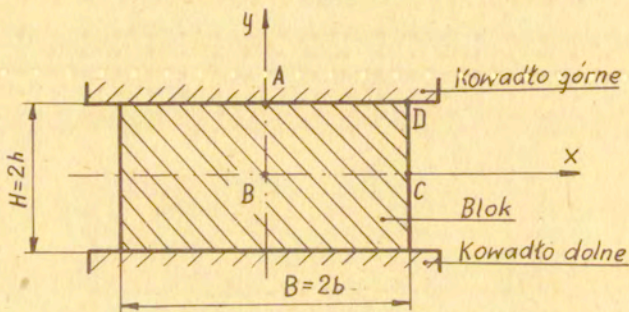
## 10.6.7. Przykłady obliczeniowe

Do rozwiązania zagadnienia płynięcia plastycznego potrzebne są:

- prawo konstytutywne dla danego stanu,
- warunek plastyczności np. Hubera-Misesa dla danego stanu,
- stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia,
- umocnienie materiału z próby jednoosiowego rozciągania,
- związki geometryczne dla odkształceń,
- podział zadania na elementy skończone,
- warunki brzegowe dla przemieszczeń i sił.

## 1. Ściskanie bloków

Zagadnienie ściskania (prasowania) bloków występuje w procesie kucia swobodnego prętów o przekroju prostokątnym i kwadratowym i fizycznie przebiega w płaskim stanie odkształcenia (rys. 10.146).



Rys.10.146. Schemat prasowania bloku (pasma)

Sprężysto-plastyczna analiza prasowania bloków metodą elementów skończonych polega na wyznaczeniu sił i nacisków jednostkowych, potrzebnych do wywołania odkształceń plastycznych, analizy naprężeń i odkształceń oraz określania obszarów uplastycznionych

w czasie prasowania [9].

Do rozwiązania zadania (rys.10.146) zbudowano program na EMC Odra 1204 w języku ALGOL. Program obliczeniowy składa się z następujących części:

1. program główny "Zadanie równowagi, w skład którego wchodzi podprogramy ( procedury ) "Pamiętaj", "Dołącz", "Wyrazy wolne" i "Macierz",
2. program pomocniczy "Numer",
3. program pomocniczy "Macel".

Tabulogram programu zawiera 900 wierszy.

Program pomocniczy "Numer" dokonuje podziału zadania na elementy, numeracji elementów i stopni swobody węzłów oraz zapisuje wyrazy macierzy sprężystości  $[D^e]$ . Program "Macel" oblicza pola elementów F i wyrazy macierzy  $[B]$ . Procedura "Pamiętaj" bada znak stopni swobody węzłów, oblicza macierze sztywności elementów  $[k]$  i zapisuje w pamięci maszyny. Procedura "Dołącz" składa macierze sztywności elementów  $[k]$  w macierz sztywności zadania (układu)  $[K]$  i odwraca je. Procedura "Wyrazy wolne" rozwiązuje równania równowagi przez przekształcenie wyrazów wolnych równań i oblicza wszystkie przemieszczenia i reakcje węzłów i zapisuje w pamięci maszyny. Procedura "Macierz" sprawdza warunek plastyczności, oblicza naprężenia spełniające warunek plastyczności, oblicza odkształcenia i znajduje elementy uplastycznione. W elementach uplastycznionych oblicza macierz sprężysto-plastyczną  $[D^{ep}]$  i macierz sztywności  $[k]$  elementów uplastycznionych i wstawia do macierzy sztywności całego układu  $[K]$ . Następnie oblicza siłę R i przemieszczenie  $\delta$  wszystkich węzłów i całego układu. Program "Zadanie równowagi" steruje obliczeniami przez wywołanie odpowiednich procedur do przeprowa-

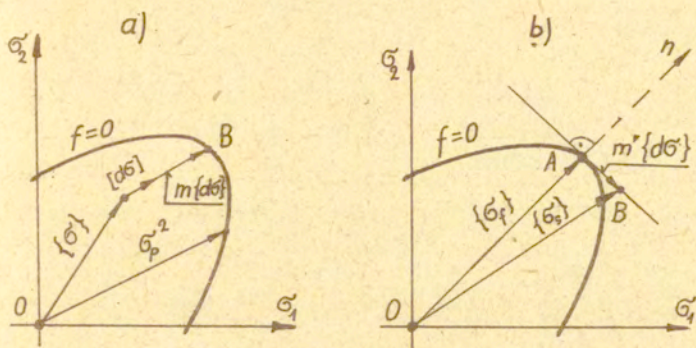
dzenia obliczeń i wydrukowania żądanych wielkości.

Do obliczenia zadania zastosowano metodę zmiennej sztywności w wersji przyrostowej, polegającą na modyfikacji macierzy sztywności po każdym przyroście obciążenia realizowanego w sposób geometryczny. Przyrosty te były stosunkowo małe i dlatego nie poprawiono dokładności metodami iteracyjnymi. Metodę tę zastosowano celowo, gdyż dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego i obciążeniach bliskich nośności granicznej iteracyjne metody naprężeń lub odkształceń początkowych są wcnio zbieżne i wymagają długiego czasu pracy maszyny.

Obliczenia przeprowadzane są według następującego schematu:

1. Wprowadzenie danych takich jak: własności materiału, numerację elementów i węzłów, wyrazy macierzy  $[B]$  i  $[D]$ , zadawany początkowy przyrost przemieszczenia  $d\delta$ .
2. Obliczenie próbnych odkształceń  $\{d\epsilon\}$  i naprężeń  $\{d\sigma\}$  według wzorów (10.430) i (10.396b) z zadanego przemieszczenia  $d\delta$ .
3. Obliczenie macierzy sztywności elementów  $[k]$  i macierzy sztywności układu  $[K]$  zgodnie z równaniami (10.436 + 10.438).
4. Sprawdzenie warunku plastyczności (10.412d) i obliczenie najmniejszego mnożnika  $m$  przyrostu naprężenia  $d\sigma$  do osiągnięcia powierzchni plastyczności (rys.10.470). Obliczenia naprężenia  $\sigma_s$  spełniającego warunek plastyczności (rys.10.147b) z dokładnością do 0,5%.
5. Obliczenie siły  $R$  dla elementów z równania (10.440).
6. Obliczenie przemieszczeń

$$\{d\delta\} = [K]^{-1} \{R\}.$$

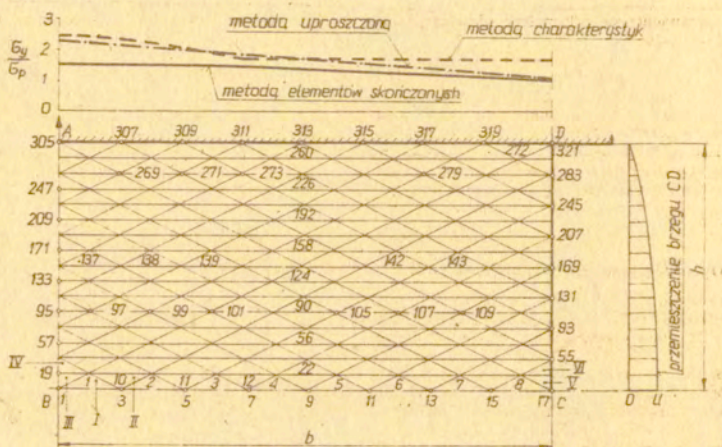


Rys.10.147. Obciążenie elementów do osiągnięcia powierzchni płynięcia; a/ wyznaczenie mnożnika  $m$  do obciążenia, które spowoduje uplastycznienie elementu, b/ wyznaczenie najmniejszego mnożnika  $m^r$  przyrostu obciążenia, aby punkt B wektora  $m^r\{d\sigma\}$  był oddalony od powierzchni płynięcia np. o 0,5%  $\sigma_s$

7. Obliczenie odkształceń w elementach ze wzoru (10.430).
8. Sprawdzenie dodatniości dysypacji energii w elementach i znalezienie elementów uplastycznionych.
9. Obliczenie macierzy sprężysto-plastycznej  $[D^{ep}]$  (10.420) i macierzy sztywności  $[k]$  (10.436 + 10.437) w elementach uplastycznionych i wprowadzenie jej do macierzy sztywności układu  $[K]$  (10.438). Zmodyfikowana macierz sztywności układu wpływa na zmianę sił.
10. Obliczenie sił  $R$  w węzłach (10.439)
 
$$\{R\} = [K] \{d\delta\} .$$
11. Obliczenie całkowitej siły zewnętrznej  $R$  i całkowitego przemieszczenia  $\delta$ .
12. Obliczenie naprężeń w elementach uplastycznionych (10.416b) i sprężystych (10.396).
13. Drukowanie żądanych wielkości.
14. Zakończenie jednego cyklu obliczeniowego dla pierwszego przyrostu obciążenia.

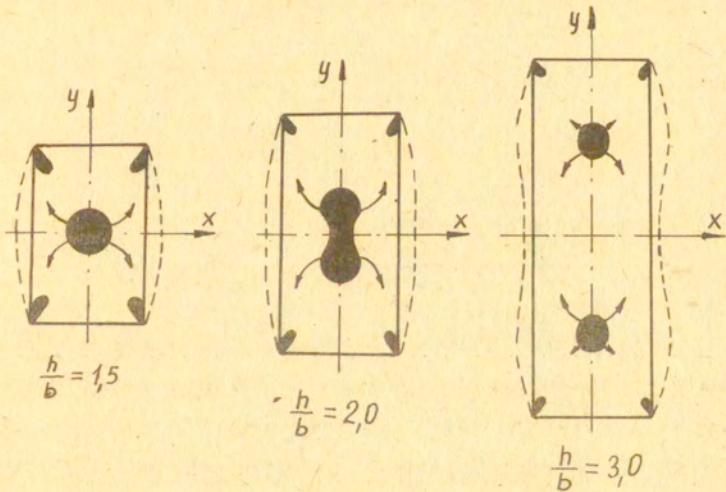
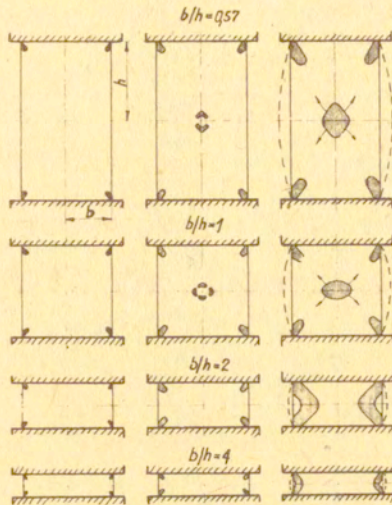
Do obliczeń przyjęto warunki brzegowe dla przemieszczeń: założono brak przemieszczeń poziomych na kontakcie i w osi  $y$  zadania, w płaszczyźnie środkowej założono brak przemieszczeń pionowych. W pozostałych węzłach siatki elementów istnieją przemieszczenia poziome i pionowe.

Na rysunku 10.148 pokazano podział zadania na elementy, oznaczenia elementów, węzłów, pokazano rozkład naprężenia normalnego na kontakcie obliczonego metodą elementów skończonych, metodą uproszczoną i metodą charakterystyk oraz przemieszczenie swobodnego brzegu.



Rys.10.148. Podział zadania na elementy, rozkład naprężeń normalnych na kontakcie i przemieszczenie brzegu DC bloku: 1+272 (w środku elementu) - numery elementów; 1+322 z zaznaczonym punktem to stopnie swobody węzłów; I+VI typy elementów

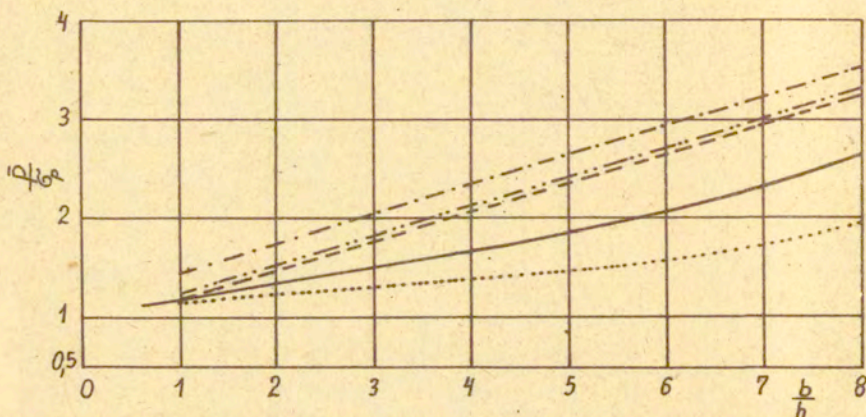
W wyniku zadawanych przemieszczeń w odkształcanym materiale zaczynają uplastyczniać się określone elementy, których liczba i kolejność uplastycznienia wzrasta wraz z obciążeniem. Rozwój stref plastycznych prasowanego bloku zależy od jego geometrii i pokazany jest na rysunku 10.149 ( $b = 20 \text{ mm}$ ).



Rys. 10, 150. Obszary uplastycznione i odkształcenie ściskanych bloków

Wyniki nacisków jednostkowych obliczone metodą elementów skończonych oraz wyniki doświadczalne ściskania płaskich próbek (bloków) ze stali armco E04 pokazano na rysunku 10.151. Dla porównania tych wyników, na wykres naniesiono wyniki teoretyczne obliczone metodą charakterystyk, metodą uproszczoną i metodą ślizgających bloków.

Z porównania linii przedstawiających wyniki z poszczególnych metod widać, że naciski obliczone metodą elementów skończonych leżą najbliżej wyników doświadczalnych. Metoda elementów skończonych daje oszacowanie nośności bloków od góry.



Rys.10.151. Porównanie średnich nacisków jednostkowych teoretycznych z doświadczalnymi:

- · — · — metoda charakterystyk,
- - - - - metoda uproszczona,
- · - · - · metoda ślizgających bloków,
- · · · · wyniki doświadczalne,
- metoda elementów skończonych

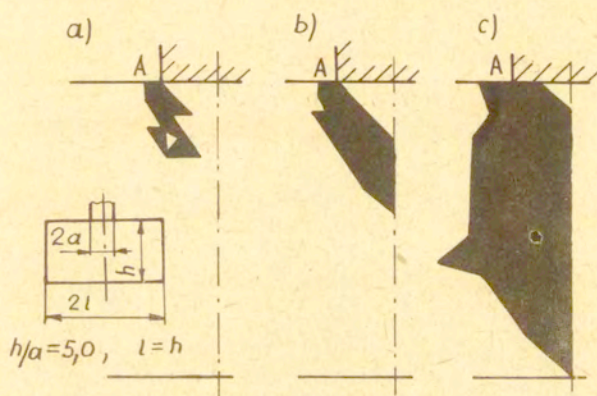
Z przeprowadzonej analizy sprężysto-plastycznej prasowania bloków wynika, że metoda elementów skończonych nadaje się do analizy procesów obróbki plastycznej metali. Pozwala ona obliczyć średni nacisk jednostkowy, naprężenia na kontakcie dla każdego warunku tarcia, przemieszczenia swobodnego brzegu,



naprężenia i odkształcenia w każdym punkcie zadania. Daje ona możliwość określania kolejności i położenia uplastycznionych elementów i powstania całych obszarów plastycznych, czego nie można otrzymać żadną inną metodą. W związku z tym, szczególnie nadaje się ona do analizy odkształceń i naprężeń przy tłoczeniu dużych wytłoczek karoseryjnych. Wyniki obliczeń metodą elementów skończonych są wyższe od wyników doświadczalnych, czyli metoda ta daje oszacowanie nośności od góry, co jest jej dodatkową zaletą.

## 2. Wciskanie stempla w blok

Na rysunku 10.152 pokazano rozwój obszaru plastycznego przy wciskaniu płaskiego sztywnego stempla w blok o grubości  $h$ .



Rys.10.152. Schemat wciskania stempla w blok oraz rozwój obszaru plastycznego

Podczas obciążania bloku stemplem w materiale zaczynają pojawiać się elementy uplastycznione w pobliżu krawędzi stempla (rys.10.152a). Dalsze obciążanie powoduje uplastycznianie się kilku elementów wzdłuż swobodnego brzegu bloku i w głąb materiału.

Rozwiązanie ( znalezienie pola uplastycznionego ) procesu wciśnięcia stempla w blok metodą elementów skończonych (rys.10.152c) jest podobne do rozwiązania Prandtla metodą charakterystyk procesu przecinania bloku materiału płaskim stemplem.

## 10.7. Metody wariacyjne

## 10.7.1. Wstęp

Zastosowanie metody wariacyjnej (odchylenia od pewnego stanu równowagi) do analizy procesów obróbki plastycznej metali wprowadził I. Ja. Tarnowski [38]. Metoda wariacji opiera się na założeniu, że suma prac wszystkich zewnętrznych i wewnętrznych sił na możliwych przemieszczeniach bliskich stanowi równowagi jest równa zeru. Pozwala ona określić oprócz nacisku jednostkowego również rozkład naprężeń i odkształceń w odkształcanym metalu oraz kształt i wymiary ciała po odkształceniu plastycznym z uwzględnieniem nierównomierności odkształceń.

Rachunek wariacyjny zajmuje się poszukiwaniem ekstremów (minimum i maksimum) funkcjonałów. Przez funkcjonał rozumiemy przyporządkowanie funkcji liczbie rzeczywistej. Przykładem funkcjonału jest całka oznaczona np. długości łuku krzywej między dwoma punktami. Funkcjonałem fizycznym jest np. całkowita energia ciała odkształcanego.

W matematyce wariacją lub przyrostem  $\delta y$  argumentu (zmienna niezależna) funkcjonału  $\mathcal{J} = \mathcal{J}[y(x)]$  ( $\mathcal{J} = \mathcal{J}[y(x)]$  jest wartością funkcjonału na funkcji  $y(x)$ ) nazywamy różnicę  $y_1(x) - y(x) = \delta y$ , przy czym funkcje  $y(x)$ ,  $y_1(x)$  są ciągle i różniczkowalne ( $y_1(x) = y(x) + \delta y$  jest dowolną krzywą, a  $y(x)$  jest krzywą, na której występuje ekstremum funkcjonału  $\mathcal{J}$ ). Przyrost funkcjonału  $\mathcal{J}$  spowodowany jest zmianą argumentu  $y(x)$  o  $\delta y$  tzn.  $\Delta \mathcal{J} = \mathcal{J}[y(x) + \delta y] - \mathcal{J}[y(x)]$ . Jeśli funkcjonał  $\mathcal{J}$  posiada wariację  $\delta \mathcal{J} = \mathcal{J}[y(x), \delta y]$  (wariacja funkcjonału  $\delta \mathcal{J}$  zależy od funkcji  $y(x)$  będącej argumentem funkcjonału  $\mathcal{J}$  i od wariacji funkcji  $y(x)$ ,  $\delta y(x)$ ) i osiąga ekstremum na krzywej

$y(x)$ , to jest on równy zeru, dla wartości argumentu  $y(x)$

$$\delta \Pi = 0.$$

Zatem warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału  $\Pi$  jest znikanie wariacji funkcjonału  $\delta \Pi$  dla wszystkich wariacji  $\delta y$ .

Wariacja dla funkcjonału jest tym, czym różniczka dla funkcji. W rachunku różniczkowym ekstremum funkcji określa się dla odpowiedniej zmiennej, natomiast w rachunku wariacyjnym określa się funkcję, która zabezpiecza minimalną wartość drugiej funkcji zależnej od niej, a nazywanej funkcjonałem. Twierdzenia wariacyjne opierają się na wypukłości funkcji. Funkcja wypukła posiada jedno minimum.

Rozwiązanie zagadnienia obróbki plastycznej metali metodą wariacji polega na uzależnieniu całkowitej energii procesu plastycznego od takiej funkcji przemieszczeń lub prędkości płynięcia zależnej od parametrów i współrzędnych, dla której całkowita energia procesu będzie przyjmować wartość najmniejszą.

Jeśli funkcjonał  $\Pi$  uzależniony jest od funkcji  $u(x_j)$  o zmiennych niezależnych  $x_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spełniającej wszystkie warunki brzegowe, a funkcja  $\varphi(x_j)$  (należąca do zbioru funkcji  $u(x_j)$ ) nadaje minimum funkcjonałowi  $\Pi(u)$ , to rozwiązania można poszukiwać:

1. metodą różnic skończonych: pochodne funkcji  $\varphi(x_j)$  mogą być zastąpione różnicami skończonymi, a jej całkowanie sumami skończonymi, funkcjonał  $\Pi(u)$  będący już funkcją  $\varphi(y_1, y_2, \dots)$  osiąga minimum, gdy  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n,$

2. metodą Rayleigha-Ritza: jeśli przyjmiemy funkcję  $y(x_j) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi(x_j)$  (funkcja  $\varphi(x_j)$  jest wybraną i znaną funkcją), to funkcjonał  $\Pi(u)$  staje się funkcją  $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_N)$  i wówczas minimum będzie dla współczynników wyznaczonych z pochodnej  $\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = 0, j = 1, 2, \dots,$
3. metodą Kantorowicza, która różni się <sup>od</sup> metody Ritza tym, że współczynniki  $a$  są uzmiennione w sposób  $a_k(x_1)$ ,
4. metodą Galerkiną polegającą na poszukiwaniu minimum błędu lub też metodą Trefftza.

Dla procesów obróbki plastycznej metali najlepiej nadaje się metoda Rayleigha-Ritza.

#### 10.7.2. Podstawowe równania pracy

Pracę sił zewnętrznych  $P_1$  działających na odpowiadającym im przemieszczeniach  $u_1$  oblicza się

$$L_z = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \vec{u}_i. \quad (10.441a)$$

Pracę tę można przedstawić jako sumę jednostkowych sił powierzchniowych  $p_1$  i jednostkowych sił masowych  $X_1$

$$L_z = \int_S p_i u_i dS + \int_V X_i u_i dV. \quad (10.441b)$$

Wyrażając siły powierzchniowe przez naprężenia  $p_i = \sigma_{ij} n_j$  i przekształcając całkę powierzchniową na całkę objętościową

$$\begin{aligned} \left( \int_S p_i u_i dS = \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ij,j} u_i) dV = \right. \\ \left. = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V X_i u_i dV, \right. \end{aligned}$$

ponieważ  $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ ,  $\omega_{ij} \sigma_{ij} = 0$ ,  $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$ ),  
otrzymamy równanie na pracę zewnętrzną w postaci

$$L_z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (10.441c)$$

Pracę sił zewnętrznych można również przedstawić w postaci

$$L_z = \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS, \quad (10.441d)$$

gdzie  $P_x, P_y, P_z$  są rzutami sił na osie współrzędnych,  $u_x, u_y, u_z$  są składowymi przemieszczenia.

Pracę sił wewnętrznych na jednostkę objętości oblicza się z równania

$$L_w = \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (10.442a)$$

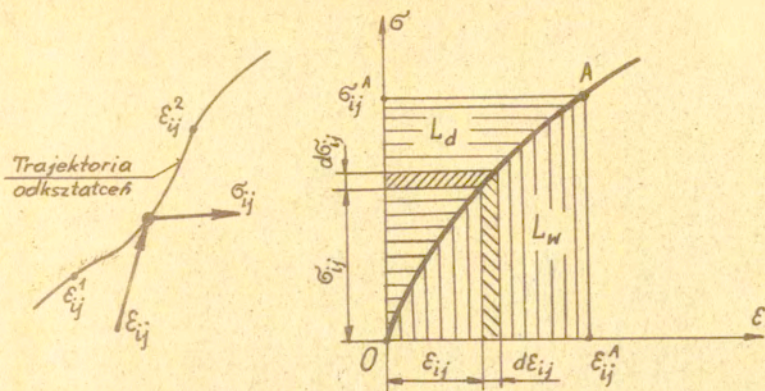
a pracę całkowitą sił wewnętrznych wyraża się

$$L_w = \int_V \left( \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dV. \quad (10.442b)$$

Praca sił wewnętrznych ma prostą interpretację geometryczną i dla jednoosiowego rozciągania przedstawia pole pod krzywą wykresu  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  — rys.10.153.

Jednostkową dopełniającą pracę sił wewnętrznych  $L_d$  określa się wzorem

$$L_d = \int_{\sigma_{ij}^1}^{\sigma_{ij}^2} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad (10.443a)$$



Rys.10.153. Geometryczna interpretacja pracy wewnętrznej i pracy dopełniającej ( $L_d + L_w = \sigma_{ij}^A \cdot \varepsilon_{ij}^A$ )

a całkowitą pracę dopełniającą wyraża się zależnością

$$L_d = \int_V \left( \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) dV. \quad (10.443b)$$

Jednostkową pracę sił wewnętrznych  $L_w$  nazywamy potencjałem sił wewnętrznych (energią potencjalną) i oznaczamy go przez  $\Pi$  ( $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\Pi$ )

$$L_w = \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \Pi, \quad (10.444)$$

a jednostkową pracę dopełniającą — potencjałem pracy dopełniającej

$$L_d = \int_{\sigma_{ij}^1}^{\sigma_{ij}^2} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \Omega. \quad (10.445)$$

Między potencjałem  $\Pi$  i  $\Omega$  istnieje zależność

$$\Pi = \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} - \Omega, \quad (10.446)$$

a między tymi potencjałami a naprężeniami lub odkształceniami zachodzą związki

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial L_w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}^0} = \frac{\partial L_d}{\partial \sigma_{ij}^0}. \quad (10.447)$$

Dla ciała liniowo-sprężystego ( $d\varepsilon_{ij} = a_{ijkl} d\sigma_{kl}^0$ ) wychodząc z zależności  $\sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij} = d\Pi$  ( $d\Pi = \sigma_{ij}^0 a_{ijkl} d\sigma_{kl}^0 = d(\frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0)$ ) otrzymamy potencjał sił wewnętrznych

$$\Pi = \frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \sigma_{kl}^0 \quad (10.448)$$

i analogicznie potencjał pracy dopełniającej

$$\Omega = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}. \quad (10.449)$$

Całkowita praca sił wewnętrznych dla ciała liniowo-sprężystego będzie miała postać

$$L_w^c = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{kl}^0 \varepsilon_{kl} dV. \quad (10.450)$$

Dla materiału opisanego równaniami teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych ( $S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} e_{ij}$ ,  $\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$ ,  $\sigma_i^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ ,  $S_{11} = 0$ ) elementarna praca właściwa (przyrost potencjału) wyrazi się następująco:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij} &= (S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk}^0 \delta_{ij}) [d(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} S_{ij}) + \frac{1}{3} d\varepsilon_{rr} \delta_{ij}] = \\ &= \frac{1}{3} \sigma_{kk}^0 d\varepsilon_{rr} + d(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} S_{ij}) S_{ij} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + \frac{3}{2} d\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) S_{ij} S_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} dS_{ij} S_{ij} = \\
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + 3 d\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) \sigma_i^2 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} d\left(\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}\right) = \\
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + \frac{3}{2} d\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_i^2\right) + \frac{3}{2} d\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) \sigma_i^2 = \\
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + \frac{3}{2} d(\varepsilon_i \sigma_i) + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i \sigma_i - \varepsilon_i d\sigma_i}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 = \\
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + \frac{3}{2} d\varepsilon_i \sigma_i + \frac{3}{2} \varepsilon_i d\sigma_i + \frac{3}{2} d\varepsilon_i \sigma_i - \frac{3}{2} \varepsilon_i d\sigma_i = \\
 &= \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + 3 d\varepsilon_i \sigma_i .
 \end{aligned}$$

Przyrost potencjału jest równy

$$d\Pi = \frac{1}{3} \sigma_{kk} d\varepsilon_{rr} + 3 d\varepsilon_i \sigma_i = d\left(\frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2\right) + 3 \sigma_i d\varepsilon_i ,$$

a potencjał dla tego ciała wyraża się zależnością

$$\Pi = \int d\left(\frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2\right) + 3 \int \sigma_i d\varepsilon_i = \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2 + 3 \int \sigma_i d\varepsilon_i , \quad (10.451)$$

gdzie  $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$

jest intensywnością naprężeń stycznych,

$$\varepsilon_i = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} (d_{xy}^2 + d_{yz}^2 + d_{zx}^2)$$

jest intensywnością odkształcenia postaciowego.

W analizie procesów obróbki plastycznej metali metoda wariacji przyjmujemy pracę sił wewnętrznych, niezbędną do odkształcenia metalu, w postaci

$$L_p = \int_V \sigma_i \varepsilon_i dV . \quad (10.452a)$$

Wyrażając intensywność naprężenia  $\sigma_1$  za pomocą granicy plastyczności na ścinanie  $k$ , praca (10.452a) może być zapisana w formie

$$L_p = k \int_V \varepsilon_i dV. \quad (10.452b)$$

W mechanice płynięcia plastycznego w przestrzeni mamy pole naprężeń  $\sigma_{ij}(x,y,z)$ , pole przemieszczeń  $u_i(x,y,z)$ , pole odkształceń  $\varepsilon_{ij}(x,y,z)$  oraz pole sił masowych  $X_i$ . Jeśli na te pola nałożone są ograniczenia, to nie są one swobodne.

Na pole naprężeń  $\sigma_{ij}$  nałożone są ograniczenia (więzy) w postaci warunku równowagi

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

i warunku brzegowego (na powierzchni  $S_p$  działają naprężenia zewnętrzne  $p_i$ )

$$p_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Takie pole naprężeń nazywa się polem statycznie dopuszczalnym i oznaczone jest przez  $\sigma_{ij}^s$ .

Pole przemieszczeń  $u_i$  na brzegu  $S_u$  spełnia warunek:  $u_i = u_{i0}$  i nazywa się polem kinematycznie dopuszczalnym i oznaczone jest przez  $u_i^k$ . Pole odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  związane jest z polem przemieszczeń  $u$  związkiem

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k) = u_{(i,j)}^k.$$

Pole odkształceń  $\varepsilon_{ij}^k$  musi spełniać warunki nierozdzielności odkształceń.

Iloczyn pola naprężeń  $\sigma_{ij}^s$  i pola odkształceń  $\varepsilon_{ij}^k$  utworzą iloczyn,  $\sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k$ , który przedstawia jednostkową pracę wirtualną.

Równanie pracy wirtualnej ostatecznie ma postać (7.14)

$$\int_V \sigma_{ij}^k \varepsilon_{ij}^k dV = \int_{S_u} p_i u_i^o dS_u + \int_{S_p} p_i^o u_i^k dS_p + \int_V X_i u_i^k dV. \quad (10.453)$$

### 10.7.3. Równania wariacyjne

Jeśli na ciało odkształcane plastycznie znajdujące się w równowadze pod działaniem zadanych sił i zadanych przemieszczeń nałożymy nieskończenie małe przemieszczenia  $\delta u_x$ ,  $\delta u_y$ ,  $\delta u_z$ , to te przemieszczenia nie naruszą globalnej równowagi tego odkształcanego ciała (równowagi układu występujących sił i przemieszczeń). Przemieszczenia te są równe zeru tam, gdzie przemieszczenia są zadane warunkami zadania. Na przykład przy spęcznieniu, przemieszczenia w kierunku działania siły na styku metalu z narzędziem są określone ruchem narzędzia, to przyrost przemieszczenia (wariacja) na tej powierzchni jest równy zeru,  $\delta u_z = 0$ .

Wariację całkowitej pracy sił wewnętrznych dla materiału plastycznego o izotropowym wzmocnieniu i gładkiej powierzchni plastyczności można napisać

$$\begin{aligned} \delta \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV &= \int_V \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{S=S_u+S_p} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \end{aligned}$$

$$= \int_{S_p} p_i \delta u_i dS_p = \delta \int_{S_p} p_i u_i dS_p. \quad (10.454)$$

Wariacja przemieszczenia  $\delta u$  na powierzchni  $S_u$  znika, gdyż na powierzchni  $S_u$  przemieszczenie  $u$  jest zadane, a zatem nie może być żadnego przyrostu przemieszczenia. Funkcjonał energii wewnętrznej (10.444) wyrazi się zależnością

$$\mathbb{I}(\varepsilon_{ij}) = \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_p} p_i u_i dS_p \quad (10.455)$$

a jego wariacja będzie równa

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{I}(\varepsilon_{ij}) &= \delta \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - \delta \int_{S_p} p_i u_i dS_p = \\ &= \delta \left( \int_V \Pi(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_p} p_i u_i dS_p \right). \end{aligned} \quad (10.456)$$

Zgodnie z twierdzeniem o minimum energii potencjalnej funkcyjonał  $\mathbb{I}(\varepsilon_{ij})$  przyjmuje najmniejszą wartość dla wszystkich stanów kinematycznie dopuszczalnych.

Jeśli dla ciała odkształcanego w pobliżu stanu równowagi mamy pracę zewnętrzną  $L_z$  i pracę wewnętrzną  $L_w$ , to możemy napisać ich wariację

$$\delta L_z = \delta L_w$$

i wariację funkcyjonału tych prac

$$\delta \mathbb{I} = \delta L_w - \delta L_z = \delta(L_w - L_z) = 0.$$

Jest to warunek konieczny równowagi układu.

Przyjmując wariację pracy sił zewnętrznych w postaci

$$\delta L_z = \int_S (P_x \delta u_x + P_y \delta u_y + P_z \delta u_z) dS = \delta \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS$$

i wariację pracy wewnętrznej

$$\delta L_w = \int_V \sigma_i \delta \epsilon_i dV = \delta \int_V \sigma_i \epsilon_i dV,$$

to wariacja funkcjonału tych prac wyrazi się zależnością

$$\delta \Pi = \delta \left( \int_V \sigma_i \epsilon_i dV - L_z \right) = 0. \quad (10.457)$$

Gdy na powierzchni styku metalu z narzędziem występują przemieszczenia  $u$ , to można te przemieszczenia poddać wariacji tylko wzdłuż tej powierzchni. Wówczas do równania bilansu energii dochodzi człon sił tarcia. Wariację pracy sił tarcia można zapisać

$$\delta L_t = \int_{S_t} \tau_t \delta u dS_t = \delta \int_{S_t} \tau_t u dS_t. \quad (10.458)$$

Wariacja bilansu energii odkształcenia plastycznego

( $\delta L_p + \delta L_t - \delta L_z = 0$ ) będzie równa ( $\sigma_i = k$ )

$$k \int_V \delta \epsilon_i dV + \tau_t \int_{S_t} \delta u dS_t - \int_S (P_x \delta u_x + P_y \delta u_y + P_z \delta u_z) dS = 0,$$

$$\delta \left[ k \int_V \epsilon_i dV + \tau_t \int_{S_t} u dS_t - \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS \right] = 0. \quad (10.459)$$

Równanie (10.459) jest funkcją przemieszczeń  $u$ , a przemieszczenia te zależą od współrzędnych  $x, y, z$ .

Jeśli na stan równowagi pracy wirtualnej (10.453) nałożymy mały dodatek przemieszczenia  $\delta u_i^k$  zapisany

$$\bar{u}_i^k = u_i^k + \delta u_i^k,$$

to wówczas przyrost funkcjonału energii będzie związany tylko z tym dodatkiem przemieszczenia w sposób

$$\Delta \Pi = \Pi[u_i^k + \delta u_i^k] - \Pi[u_i^k] = \Pi[\delta u_i^k].$$

Zatem wariację pracy wirtualnej (po zniknięciu wariacji na powierzchni  $S_u$ ,  $\delta u_i^k = 0$ ) można zapisać

$$\int_V \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^k dV = \int_{S_p} p_i^o \delta u_i^k dS_p + \int_V X_i \delta u_i^k dV, \quad (10.460)$$

gdzie  $\delta \varepsilon_{ij}^k$  i  $\delta u_i^k$  są małymi polami w okolicy równowagi. Przyjmując  $\delta$  jako parametr wariacji, równanie (10.460) przyjmie postać

$$\delta \int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k dV = \delta \int_{S_p} p_i^o u_i^k dS_p + \delta \int_V X_i u_i^k dV, \quad (10.461)$$

a funkcjonal będący energią potencjalną będzie

$$J(\varepsilon_{ij}) = \int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k dV - \int_{S_p} p_i^o u_i^k dS_p - \int_V X_i u_i^k dV, \quad (10.462)$$

a wariacja tego funkcjonału jest równa

$$\begin{aligned} \delta J(\varepsilon_{ij}) &= \int_V \delta \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^k dV - \int_{S_p} p_i^o \delta u_i^k dS_p - \int_V X_i \delta u_i^k dV = \\ &= \delta \left[ \int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k dV - \int_{S_p} p_i^o u_i^k dS_p - \int_V X_i u_i^k dV \right] = 0 \quad (10.463) \end{aligned}$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń. Daje ona najmniejszą energię układu badanego.

W przypadku rozwiązywania zadań w ramach teorii plastycznego płynięcia zamiast pracy (według teorii odkształceniowej) w powyższych równaniach występuje moc, a przemieszczenie u zastąpione jest przez prędkość płynięcia  $v^k$ . Wówczas funkcjonal przedstawia minimalną moc idącą na plastyczne odkształcanie ciała.

#### 10.7.4. Funkcje przemieszczeń i prędkości płynięcia

Ważnym początkowym etapem metody wariacji jest ustalenie kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń u lub pola prędkości płynięcia  $v^k$ .

##### 1. Funkcja przemieszczeń

Do analizy procesów obróbki plastycznej metali metodą wariacji poszukiwaną funkcją przemieszczeń może być funkcja o ogólnej postaci

$$u(x, y, z) = a_1 \varphi_1(x, y, z) + a_2 \varphi_2(x, y, z), \quad (10.464)$$

gdzie  $a_1$  i  $a_2$  są parametrami nieokreślonymi podlegającymi wariacji,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  są funkcjami współrzędnych  $x, y, z$  procesu. Funkcja (10.464) jest dowolna, ale musi spełniać warunki brzegowe, odzwierciedlać charakter procesu i odpowiadać danym doświadczalnym. Funkcja przemieszczenia  $u$  jest funkcją, która nadaje minimum funkcjonałowi  $\Pi$  dla odpowiednich parametrów  $a_1$  i  $a_2$ . Dla określenia sił z zadawalającą dokładnością wystarczy funkcja  $u$  o dwóch członach (10.464). Funkcji  $u(x, y, z)$  może być wiele.

I. Ja. Tarnowski, dla procesu spęczania płaskownika, proponuje funkcję przemieszczania w kierunku osi  $x$  o dwóch parametrach wariacyjnych  $a_1$  i  $a_2$

$$u_x = a_1 x + a_2 x \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3b^2}\right). \quad (10.465)$$

Przyjmując, że spęczanie płaskownika odbywa się w płaskim stanie odkształcenia ( $u_x \neq 0, u_z \neq 0, u_y = 0$ ) z funkcji (10.465) określamy odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 + a_2 \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right), \\ \varepsilon_y &= 0, \end{aligned} \quad (10.466)$$

$$\varepsilon_z = -\varepsilon_x = -\left[ a_1 + a_2 \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \right].$$

Przemieszczenie w kierunku osi  $z$  będzie równe

$$u_z = \int \varepsilon_z dz = -\left[ a_1 z + a_2 z \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \right] + C.$$



Stałą całkowania  $C$  określamy z warunku brzegowego: gdy  $z = 0$ , to  $u_z = 0$  i wówczas  $C = 0$ . Ostatecznie przemieszczenie  $u_z$  wyrazi się zależnością

$$u_z = -\left[ a_1 z + a_2 z \left( 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right]. \quad (10.467)$$

Kąt odkształcenia postaciowego w płaszczyźnie  $xz$  jest równy

$$(d_{yz}^{\ell} = d_{xy}^{\ell} = 0)$$

$$\begin{aligned} d_{xz}^{\ell} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 2a_2 \frac{xz}{b^2} \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) - 6a_2 \frac{xz}{h^2} \left( 1 - \frac{x^2}{3b^2} \right) = \\ &= \frac{2a_2 xz}{b^2 h^2} \left[ (h^2 - z^2) - (3b^2 - x^2) \right]. \quad (10.468) \end{aligned}$$

Wstawiając odkształcenia (10.466) i (10.468) do wzoru na intensywność odkształcenia  $\varepsilon_1$  i następnie przemieszczenia  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  i intensywność odkształcenia  $\varepsilon_1$  do wariacyjnej postaci bilansu energii (10.459 - wariacja funkcjonału) otrzymamy określone parametry  $a_1$ ,  $a_2$  dające funkcję przemieszczeń  $u$  zabezpieczającą najmniejszą wartość całkowitej energii. Parametry  $a_1$ ,  $a_2$  otrzymujemy z układu dwóch równań

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left[ k \int_V \varepsilon_i dV + \tau_t \int_{S_t} u dS_t - \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS \right] = 0, \quad (10.469)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \left[ k \int_V \varepsilon_i dV + \tau_t \int_{S_t} u dS_t - \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS \right] = 0.$$

Wyznaczone parametry  $a_1$ ,  $a_2$  służą do obliczenia przemieszczenia  $u$ , odkształcenia  $\varepsilon$  oraz nacisku jednostkowego  $\bar{p}$ . W praktyce inżynierskiej jeden z parametrów wyznacza się z warunków granicznych zadania, a drugi z warunku minimum funkcjonału.

## 2. Funkcja prędkości płynięcia

Dla analizy procesu ściskania prostopadłościanów o wymiarach  $l$ ,  $b$ ,  $h$  można przyjąć funkcję prędkości płynięcia

$$v_z^l = -\frac{2v_0^l}{h}z, \quad v_x^l = a\frac{2v_0^l}{h}x, \quad v_y^l = (1-a)\frac{2v_0^l}{h}y, \quad (10.470)$$

spełniające warunki brzegowe: gdy  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ , to odpowiednio  $v_y^l = 0$ ,  $v_z^l = 0$ ,  $v_x^l = 0$ . Z zależności (10.470) obliczamy prędkości odkształcenia spełniające warunek nieściśliwości materiału

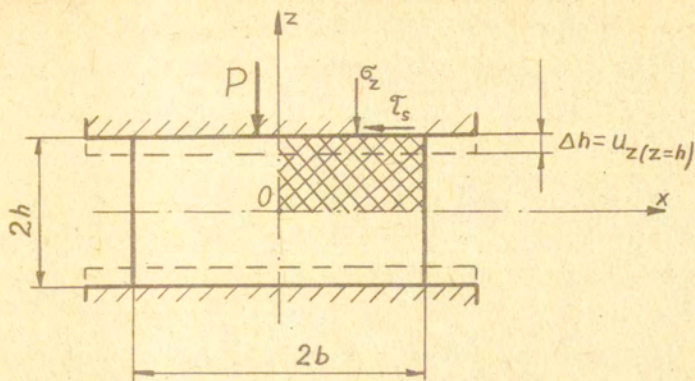
$$\dot{\varepsilon}_z = -\frac{2v_0^l}{h}, \quad \dot{\varepsilon}_x = a\frac{2v_0^l}{h}, \quad \dot{\varepsilon}_y = (1-a)\frac{2v_0^l}{h}, \quad (10.471)$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem poszerzenia prostopadłościanu podlegający wariacji,  $v_0^l$  jest prędkością ruchu narzędzia.

## 10.7.5. Przykłady

### Przykład 1

Przeanalizujemy metodą wariacji spęczanie płaskownika o szerokości  $2b$ , wysokości  $2h$  i długości  $l$  między dwiema sztywnymi i równoległymi płytami z uwzględnieniem tarcia na kontakcie. Spęczany płaskownik znajduje się w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.



Rys.10.154. Schemat spęczania płaskownika

## Rozwiązanie

Z powodu symetrii względem osi  $z$  i płaszczyzny środkowej  $Ox$  wystarczy rozpatrzyć  $\frac{1}{4}$  część płaskownika.

Pracę sił zewnętrznych ściskania płaskownika wyznaczamy ze wzoru

$$L_z = P u_{z(z=h)} = P \Delta h,$$

a pracę sił wewnętrznych w objętości materiału określamy z równania (10.452b)

$$L_p = k \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz.$$

Na powierzchni kontaktu płaskownika z płytą występuje naprężenie styczne  $\tau_s$  dające pracę tarcia

$$L_t = \tau_s \int_S \sqrt{u_{x(z=h)}^2 + u_{y(z=h)}^2} dS,$$

która dla płaskiego stanu odkształcenia ( $u_{y(z=h)} = 0$ ) będzie równa

$$L_t = \tau_s \int_0^b u_{x(z=h)} dx.$$

Przyjmujemy, że naprężenie styczne  $\tau_s$  jest równe

$$\tau_s = ck,$$

gdzie  $c$  jest współczynnikiem określonym z zależności doświadczalnej podanej przez I. Ja. Tarnowskiego,  $c = \mu + \frac{b}{8h}(1-\mu)\sqrt{\mu}$ .  
Zatem pracę sił tarcia można przedstawić

$$L_t = ck \int_0^b u_x dx.$$

Bilans prac ściskania płaskownika można przedstawić w postaci

$$P\Delta h = k \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz + ck \int_0^b u_x dx.$$

Natomiast wariacja bilansu prac na możliwych przemieszczeniach  $\delta$  będzie równa (na powierzchni styku,  $z = h$ , wariacja pracy zewnętrznej jest równa zero,  $P \cdot \delta \Delta h = 0$ )

$$k\delta \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz + ck\delta \int_0^b u_x dx = 0.$$

Po wprowadzeniu zależności za  $u_x$  i  $\varepsilon_i$  i zróżniczkowaniu względem parametrów  $a_1$  i  $a_2$  wyznaczymy poszukiwane parametry  $a_1$  i  $a_2$  z następujących równań:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz + \frac{\partial}{\partial a_1} c \int_0^b u_x dx = 0, \quad (10.472)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz + \frac{\partial}{\partial a_2} c \int_0^b u_x dx = 0.$$

Wartość parametru  $a_1$  możemy określić z warunku: gdy  $z = h$ ,  
to  $u_z = -\frac{\Delta h}{2}$  i równania (10.467)

$$\frac{\Delta h}{2} = a_1 h,$$

$$a_1 = \frac{\Delta h}{2h} = \varepsilon.$$

Parametr  $a_2$  obliczamy z równania (10.472)<sub>2</sub>. W tym celu wyznaczamy przemieszczenie  $u_x$  na powierzchni kontaktu  $z = h$

$$u_x = \frac{\Delta h}{2h} x - 2a_2 x + a_2 \frac{2x^3}{3b^2}$$

i obliczamy pochodną pracy tarcia podzieloną przez  $k$

$$\frac{\partial L_t}{k \partial a_2} = c \frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^b u_x dx = c \int_0^b \frac{\partial u_x}{\partial a_2} dx =$$

$$= c \int_0^b \left( -2x + \frac{2x^3}{3b^2} \right) dx = c \left( -x^2 + \frac{x^4}{6b^2} \right) \Big|_0^b = -0,833b^2 c. \quad (10.473)$$

Pochodną pracy wewnętrznej  $L_p$  względem parametru  $a_2$  podzieloną przez  $k$  obliczymy z równania

$$\frac{\partial L_p}{k \partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^b \int_0^h \varepsilon_i dx dz = \iint_{00}^{bh} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_2} dx dz. \quad (10.474)$$

Intensywność odkształcenia postaciowego  $\varepsilon_1$  dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\varepsilon_y = 0$ ,  $d_{yz}^e = d_{xy}^e = 0$ ,  $\varepsilon_z = -\varepsilon_x$ ) wynosi

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^2 + 4\varepsilon_x^2 + \frac{3}{2} d_{zx}^e{}^2} = \sqrt{4\varepsilon_x^2 + d_{zx}^e{}^2} =$$

$$= \sqrt{4 \left[ \frac{\Delta h}{2h} + a_2 \left( 1 - \frac{3z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right]^2 + \left\{ \frac{2a_2 x z}{b^2 h^2} \left[ (h^2 - z^2) - (3b^2 - x^2) \right] \right\}^2} \quad (10.475)$$

i jest niemożliwa do scałkowania bezpośredniego, a jedynie metodą przybliżoną. Oznaczając

$$\varepsilon_i = \sqrt{\varphi\left(\frac{x}{b}, \frac{z}{h}, a_2\right)}$$

i różniczkując względem parametru  $a_2$  otrzymamy

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_2} = \frac{\frac{\partial}{\partial a_2} \varphi\left(\frac{x}{b}, \frac{z}{h}, a_2\right)}{2 \sqrt{\varphi\left(\frac{x}{b}, \frac{z}{h}, a_2\right)}} = \frac{\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial a_2}}{2 \varepsilon_i} = \frac{\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial a_2}}{2 \varepsilon_{i\bar{s}r}}$$

Przyjmując, że  $\varepsilon_1$  występująca w mianowniku jest równa średniej intensywności odkształcenia  $\varepsilon_{i\bar{s}r}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{i\bar{s}r} = \text{const.}$  Tarnowski wykazał, że średnia wartość intensywności odkształcenia  $\varepsilon_{i\bar{s}r}$  jest bliska intensywności odkształcenia przy równomiernym odkształcaniu. Dla równomiernego odkształcania osie współrzędnych  $x$  i  $z$  pokrywają się z kierunkami głównymi, a kąt  $d_{zx}^e = 0$ . Wobec powyższego średnia intensywność odkształcenia postaciowego jest równa

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i\bar{s}r} = \sqrt{4\varepsilon_z^2} = 2\varepsilon_z = 2\varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  jest wielkością zgniotu względnego,  $\varepsilon = \frac{\Delta h}{2h}$ .

Teraz równanie (10.474) przyjmie postać

$$\frac{\partial L_p}{k \partial a_2} = \frac{1}{2 \varepsilon_{i, sr}} \int_0^b \int_0^h \frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial a_i} dx dz. \quad (10.476)$$

Po zróżniczkowaniu  $\varepsilon_i^2$  określonego równaniem (10.475) względem parametru  $a_2$  i podstawieniu do równania (10.476), scałkowaniu i przekształceniu otrzymamy

$$\frac{\partial L_p}{k \partial a_2} = \frac{2}{\varepsilon} a_2 b h (0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2}).$$

Równanie (10.472)<sub>2</sub> można teraz napisać

$$\frac{2}{\varepsilon} a_2 b h (0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2}) = 0,833 b^2 c,$$

z którego parametr  $a_2$  wynosi

$$a_2 = \frac{0,417 \varepsilon c \frac{b}{h}}{0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2}}.$$

Mając początkowe wymiary ściskanego płaskownika  $2b$  i  $2h$ , wartość zgniotu  $\varepsilon$  i współczynnik tarcia  $\mu$  można określić wartości parametrów  $a_1$  i  $a_2$  i następnie wartość przemieszczeń i odkształceń (stosując równania 10.465; 10.467; 10.466 i 10.468) w dowolnym punkcie ściskanego płaskownika. Z powodu występowania nierównomierności odkształcenia w procesie spęszczania wystąpi beczkowatość płaskownika. Można obliczyć szerokość płaskownika na dowolnie założonej wysokości. Wykorzystując równanie (10.465) wyznaczmy połowę szerokości kownika :

- na styku metalu z narzędziem ( $z = h, x = b$ )

$$b_{zs} = b + u_x = b(1 + \varepsilon - \frac{4}{3} a_2),$$

- w połowie wysokości odkształcanego płaskownika ( $z=0, x=b$ )

$$b_{zc} = b + u_x = b(1 + \varepsilon + \frac{2}{3} a_2).$$

Całkowitą wartość siły potrzebną do spęczania płaskownika, przypadającą na połowę długości i połowę szerokości płaskownika, określić można z równania ( $L_z = L_p + L_t$ )

$$P = \frac{L_p + L_t}{\Delta h} = \frac{1}{\Delta h} \left( k \int_0^b \int_0^h \xi_i dx dz + ck \int_0^b u_{x(z=h)} dx \right). \quad (10.477)$$

Praca odkształcenia plastycznego  $L_p$  jest równa

$$L_p = \frac{k}{2\varepsilon} \int_0^b \int_0^h \xi_i dx dz,$$

a po uwzględnieniu zależności (10.475) i po scałkowaniu wynosi

$$L_p = 2k\varepsilon bh \left[ 1 + \left( \frac{a_2}{\varepsilon} \right)^2 \left( 0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2} \right) \right]. \quad (10.478)$$

Natomiast praca tarcia  $L_t$ , po uwzględnieniu przemieszczenia  $u_x$  na kontakcie, wynosi

$$L_t = ck \int_0^b \left( \varepsilon x - 2a_2 x + a_2 \frac{2x^3}{3b^3} \right) dx,$$



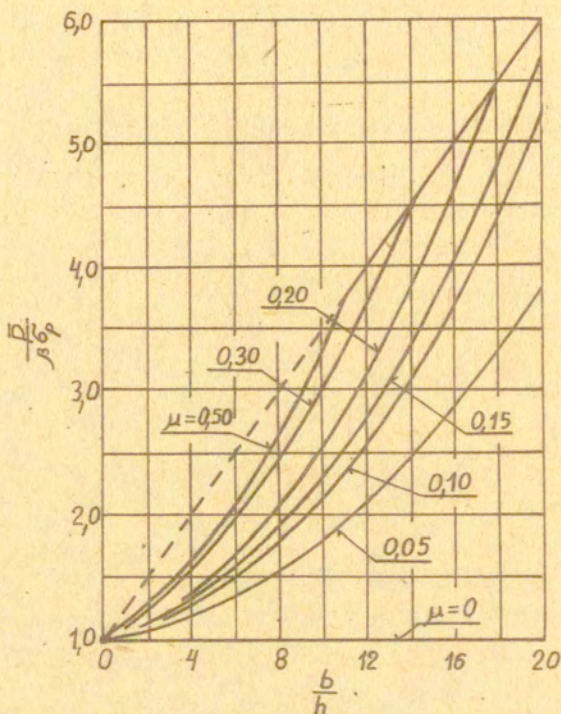
a po scałkowaniu

$$L_t = ck\varepsilon b^2 \left( 0,5 - 0,833 \frac{a_2}{\varepsilon} \right). \quad (10.479)$$

Podstawiając pracę plastyczną (10.478) i pracę tarcia (10.479) do równania siły (10.477) i mnożąc całość przez dwa otrzymamy wzór na całkowitą siłę potrzebną do spęcznienia płaskownika. Natomiast średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy wyrazi się zależnością. ( $k = \frac{\sigma_s}{2} \beta$ ,  $\beta = 1,15$ )

$$\frac{\bar{P}}{\beta \sigma_p} = \frac{P}{b \beta \sigma_p} = 1 + \left( \frac{a_2}{\varepsilon} \right)^2 \left( 0,213 + 0,648 \frac{b^2}{h^2} + 0,026 \frac{h^2}{b^2} \right) + c \frac{b}{h} \left( 0,25 - 0,416 \frac{a_2}{\varepsilon} \right). \quad (10.480)$$

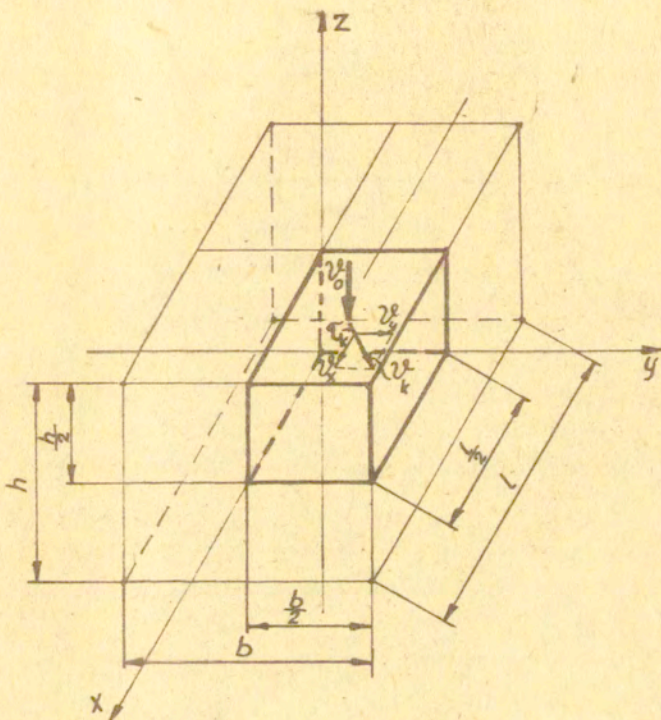
Na rysunku 10.155 przedstawiono wyniki teoretyczne nacisku jednostkowego obliczone metodą wariacji (z zależności (10.480)) dla ściskania płaskowników (rys. 10.154) o różnym stosunku wymiarów  $\frac{b}{h}$  i różnym współczynniku tarcia  $\mu$ . Naciski te są bliskie naciskom obliczonym metodą uproszczonych równań różniczkowych równowagi.



Rys.10.155. Zależność średniego bezwymiarowego nacisku jednostkowego  $\frac{P}{\beta \sigma_p}$  od wymiarów  $\frac{b}{h}$  i współczynnika tarcia  $\mu$  obliczona metodą wariacji (z rów. 10.480) dla ściskania płaskowników (wg. Tarnowskiego)

Przykład 2

Obliczyć metodą wariacji średni nacisk jednostkowy spęczania prostopadłościanu o wymiarach początkowych  $l, b, h$  (rys.156) oraz jego wymiary po odkształceniu. Obliczenia przeprowadzić w ramach teorii plastycznego płynięcia.



Rys.156. Analizowany prostopadłościan

Rozwiązanie

Założmy, że w kierunku ściskania prostopadłościanu z prędkością  $v_0^p$  prędkość płynięcia cząstek materiału wynosi

(rów. 10.470)

$$v_z^e = -\frac{2v_0^e}{h} z, \quad (10.481a)$$

a w kierunku swobodnego odkształcenia prędkości płynięcia wynoszą

$$v_x^e = a \frac{2v_0^e}{h} x, \quad (10.481b)$$

$$v_y^e = (1-a) \frac{2v_0^e}{h} y. \quad (10.481c)$$

Prędkości płynięcia (10.481) spełniają warunki brzegowe:

gdy  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , to  $v_z^e = 0$ ,  $v_x^e = 0$ ,  $v_y^e = 0$ .

Natomiast obliczone prędkości odkształcenia wyrażają się zależnościami

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{2v_0^e}{h}, \quad \dot{\epsilon}_x = a \frac{2v_0^e}{h}, \quad \dot{\epsilon}_y = (1-a) \frac{2v_0^e}{h}, \quad (10.482)$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem poszerzenia prostopadłościanu podlegającym wariacji,  $v_0^e$  jest prędkością ruchu narzędzia.

Do obliczenia nacisku narzędzia na odkształcany prostopadłościan wychodzimy z zasady równości mocy sił zewnętrznych z mocą sił wewnętrznych ( $D_w = D_o + D_t$ ).

Moc sił zewnętrznych jest równa

$$D_z = \int_S \bar{p} v_0^e dS = \bar{p} v_0^e S_o. \quad (10.482)$$

Moc sił wewnętrznych w elementach objętości można wyrazić w postaci

$$D_o = \int_V \sigma_i \dot{\epsilon}_i dV, \quad (10.483a)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_o}{h} \sqrt{1-a+a^2}$

jest intensywnością prędkości odkształcenia postaciowego,  $\sigma_i = \sigma_p$   
 jest intensywnością naprężenia.

Dysypacja wewnętrzna w rozpatrywanym prostopadłościennym będzie  
 równa

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} D_o &= \sigma_p \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_o}{h} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1-a+a^2} dx dy dz = \\ &= \sigma_p \frac{v_o}{2\sqrt{3}} \frac{lbh}{h} \sqrt{1-a+a^2}. \end{aligned} \quad (10.483b)$$

Moc sił tarcia jest równa

$$D_t = \int_S \tau_k v_k dS. \quad (10.484a)$$

Przyjmując naprężenie styczne na kontakcie

$$\tau_k = c k$$

i prędkość przemieszczania cząstek materiału po powierzchni  
 narzędzia

$$v_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2v_o}{h} \sqrt{a^2 x^2 + (1-a)^2 y^2},$$

to moc sił tarcia będzie równa

$$\frac{1}{8} D_t = c k \frac{2\tau_0^2}{h} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{a^2 x^2 + (1-a)^2 y^2} dx dy, \quad (10.484b)$$

gdzie  $0 \leq c \leq 1$  jest współczynnikiem zmniejszającym granicę plastyczności materiału na ścinanie  $k$  ( $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ ).

Całka równania (10.484b) w przybliżeniu jest równa  $\left( \int_a^b p(x) dx \cong \sqrt{(b-a) \int_a^b p^2(x) dx} \right)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{a^2 x^2 + (1-a)^2 y^2} dx dy &= \sqrt{\frac{lb}{4}} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} [a^2 x^2 + (1-a)^2 y^2] dx dy = \\ &= \frac{lbh}{8\sqrt{3}} \sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}. \end{aligned}$$

Zatem moc sił tarcia jest równa

$$\frac{1}{8} D_t = c \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{2\tau_0^2}{h} \frac{lbh}{8\sqrt{3}} \sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}. \quad (10.484c)$$

Porównując moc sił zewnętrznych  $D_z$  z mocą sił wewnętrznych

$D_w = D_o + D_t$  otrzymamy średni jednostkowy nacisk ściskania prostopadłościanu

$$\frac{lb}{4} \bar{p} \gamma_0 = \sigma_p \frac{\gamma_0}{2\sqrt{3}} \frac{lbh}{h} \sqrt{1-a+a^2} + c \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{2\gamma_0}{h} \frac{lbh}{8\sqrt{3}} \sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}$$

i ostatecznie

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{1-a+a^2} + \frac{c}{2\sqrt{3}} \sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2} \right]. \quad (10.485)$$

Nacisk jednostkowy będzie najmniejszy wówczas, gdy współczynnik poszerzenia a podlegający wariaacji obliczymy z pochodnej

$$\frac{dD_w}{da} = 0, \quad (10.486)$$

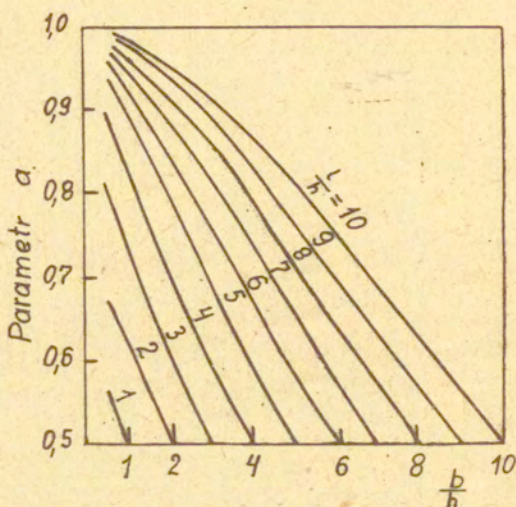
gdzie

$$D_w = \sigma_p \frac{\gamma_0}{2\sqrt{3}} lb \sqrt{1-a+a^2} + c \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_0}{4\sqrt{3}} lb \sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}.$$

Parametr wariaacji a jest funkcją uwikłaną

$$a = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{c \sqrt{1-a+a^2} \left[ (1-a) \left(\frac{b}{h}\right)^2 - a \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right]}{\sqrt{a^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + (1-a)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}} \right\} \quad (10.487)$$

i można go przedstawić w postaci wykresu jak na rysunku 157.



Rys.157. Zależność parametru  $a$  od wymiarów prostopadłościanu  $l, b, h$  ( $\frac{l}{h}, \frac{b}{h}$ ) dla  $c=0,5$  [46]

Wstawiając do równania (10.485) odpowiednią wartość parametru  $a$  i odpowiadające mu stosunki wymiarów  $\frac{l}{h}$  i  $\frac{b}{h}$ , otrzymamy najmniejszy nacisk jednostkowy ściskania prostopadłościanu.

Po ustaleniu, dla danego prostopadłościanu, parametru  $a$  i przyjęciu wielkości spęcenia  $\frac{dh}{h}$  i zachowaniu warunku stałej objętości, otrzymamy następujące wymiary prostopadłościanu  $l_1, b_1, h_1$  po odkształceniu:

$$\frac{dl}{l} = a \frac{dh}{h}, \ln \frac{l_1}{l} = a \ln \frac{h}{h_1}, \frac{l_1}{l} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^a, \text{ czyli } l_1 = l \left(\frac{h}{h_1}\right)^a,$$

$$\frac{db}{b} = (1-a) \frac{dh}{h}, \ln \frac{b_1}{b} = (1-a) \ln \frac{h}{h_1}, \frac{b_1}{b} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^{1-a}, \text{ czyli } b_1 = b \left(\frac{h}{h_1}\right)^{1-a}, \quad (10.488)$$

$$\frac{dh}{h} = \frac{h-h_1}{h}, \text{ czyli } h_1 = h - dh.$$



Literatura do rozdziału X

1. G.L. Baraya, W. Johnson and R.A.C. Skater. The dynamic compression of circular cylinders of super-pure aluminium at elevated temperatures. Appendix I. International Journal of Mechanical Sciences. Nr 9, 1965.
2. R.L. Carlson. Compression of viscoplastic disk. Journal of Basic Engineering. December 1964.
3. M. Grzymkowski. Podstawowe równania plastycznego płynięcia w stanie osiowej symetrii. Archiwum Hutnictwa, tom XXI, z.1, 1976.
4. M. Grzymkowski. Uproszczona metoda obliczania średniego nacisku jednostkowego ściskania pierścieni. Archiwum Hutnictwa, tom XXI, z.2, 1976.
5. M. Grzymkowski. Ściskanie pierścieni. Archiwum Hutnictwa, z.1, t.23, 1978.
6. M. Grzymkowski, Z. Mróz. Slip-line solutions of some axisymmetric problems of plastic compression of cylinders and rings. Rozprawy Inżynierskie, 24, 1, 171-183, 1976.
7. M. Grzymkowski. Wybrane osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 12, 1974.
8. M. Grzymkowski, Z. Mróz. Metoda równowagi przy górnej ocenie sił w płaskich zagadnieniach obróbki plastycznej z uwzględnieniem tarcia Coulomba. Archiwum Hutnictwa, tom XVII, z.1, 1972.
9. M. Grzymkowski. Analiza metodą elementów skończonych sprężysto-plastycznego prasowania bloków. Obróbka Plastyczna, t.XVI, z.1, 1977.
10. J.B. Haddow. On the compression of a thin disk. Inst. J. Mechanical Sciences. Vol.7, nr 10, 1965.
11. S. Kobayashi and E.G. Thomsen. Upper and lower bound solutions to axis-symmetric compression and extrusion problems. Int. J. Mech. Sciences. Vol.7, nr 2, 1965.

12. H. Kudo. Some analytical and experimental studies of axisymmetric cold forging and extrusion I. *Int.J.Mech.Sciences*, Vol.2, nr 1/2, 1960.
13. K. Kwasczyńska, Z. Mróz. A theoretical analysis of plastic compression of short circular cylinders. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 5, 19, 1967.
14. W. Schroeder, D.A. Webster. Press forging thin sections effect of friction, area and thickness on pressures required. *J.Appl.Mech.* Vol.16, 1949, pp.289-294.
15. E. Siebel. *Stahl und Eisen*, 43, 1925, 1295.
16. E. Thomsen, C.T. Yang, S. Kobayashi. *Mechanics of plastic deformation in metal processing*. The Macmillan Company, New York, 1965.
17. O. Hoffman, G. Sachs. *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWT, Warszawa, 1959.
18. M. Morawiecki, L. Sadok, E. Wosiek. *Teoretyczne podstawy technologicznych procesów przeróbki plastycznej*. Wyd. "Śląsk", Katowice, 1977.
19. I.F. Adie, I.M. Alexander. A graphical method of obtaining hodographs for upper-bound solutions to axisymmetric problems. *Inter.J.of Mech.Sciences*, Vol.9, nr 6, 1967.
20. J. Halling, L.A. Mitchell. An upper-bound solution for axisymmetric extrusion. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.7, nr 4, 1965.
21. Dao-Duy-Tien. Próba twardości Rockwella jako problem teorii plastyczności. *Rozprawy Inżynierskie*, 21, 4, 709-721, 1973.
22. I.F. Collins. The upper bound theorem for rigid-plastic solids generalized to include Coulomb friction. *Journ.Mech.Phys. Solids*, vol.17, 5, 1969.
23. W. Johnson, R. Sowerby and J.B. Haddow. *Plane-Strain Slip-Line Fields*. London, 1970.
24. R.H. Wood. *Plastic and elastic design of slabs and plates*. London, 1962.

25. H. Ford. Advances mechanics of materials. Longmas, Green and co LTD. 1963.
26. W. Johnson, P.B. Mellor. Plasticity for mechanical engineers. D. Van Nostrand Company LTD. London, 1962.
27. I.D. Lubahn, R.P. Felgar. Plasticity and creep of metals. London, 1961.
28. C.R. Calladine. Engineering plasticity. London, 1969.
29. N.H. Polakowski, E.J. Ripling. Strength and structure of engineering materials. Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
30. Y. Fung. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa, 1969.
31. Praca zespołowa pod red. W. Olszaka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
32. T. Trajdos-Wróbel. Matematyka dla inżynierów. WNT, Warszawa, 1966.
33. M.T. Huber. Stereomechanika techniczna. PWN, Warszawa, 1958.
34. Z. Marciniak. Mechanika procesów toczenia blach. WNT, Warszawa, 1961.
35. Z. Marciniak. Odształcenia graniczne przy tłoczeniu blach. WNT, Warszawa, 1971.
36. С.И. Губкин. Пластическая деформация металлов. Metallurgizdat, 1960.
37. В. Бакофен. Процессы деформации. Изд. "Металлургия", Москва, 1977.
38. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Машиностроение, Москва, 1968.
39. А.М. Греков. К вопросу определения удельного давления при цилиндрических заготовок с учетом зоны прилипания. Труды Института Ядерной Физики АНК ССР, том 8, 1967.
40. Н.П. Громов. Теория обработки металлов давлением. Изд. "Металлургия", Москва, 1978.

41. И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. "Наука", Москва, 1971.
42. И. Я. Тарновский, А.А. Поздеев, О.А. Ганаго. Деформации и усилия при обработке металлов давлением. Машгиз, Москва, 1959.
43. Сборная работа под ред. И.Я. Тарновского. Инженерные методы расчета технологических процессов обработки металлов давлением. Изд. "Государственное Н.Т.", Москва, 1964.
44. А.Д. Томленов. Теория пластического деформирования металлов. Изд. "Металлургия", Москва, 1972.
45. А.Д. Томленов. Механика процессов обработки металлов давлением. Машгиз, Москва, 1963.
46. В.С. Смирнов. Теория обработки металлов давлением. Metallургия, Москва, 1973.
47. Г.А. Смирнов-Аляев, В.М. Розенберг. Теория пластических деформаций металлов. Машгиз, 1956.
48. М.В.Сторожев, Е.А. Попов. Теория обработки металлов давлением. Изд. "Машиностроение", Москва, 1977.
49. Е.П. Унков. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. Машгиз, Москва, 1955.
50. Е.П. Унков. Инженерная теория пластичности. Машгиз, Москва, 1959.
51. Р. Хилл. Математическая теория пластичности. ГИИТЛ, 1956.
52. В. Прагер. Введение в механику сплошных сред. Москва, 1963.
53. Л.М. Качанов. Основы механики разрушения. Изд. "Наука", Москва, 1974.
54. Л.М. Качанов. Основы теории пластичности. Изд. "Наука", Москва, 1969.
55. А.А. Ильющин. Механика сплошной среды. Изд. "Московского Университета", 1971.
56. В.П. Северденко, С.А. Пасечный. Метал для листовой штамповки. Минск, 1961.

Dodatek

WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

Zrozumienie podstaw stosowanej teorii plastyczności wymaga od czytelnika opanowania podstawowych wiadomości z matematyki i mechaniki ośrodków ciągłych. W rozwiązaniach poszczególnych działów stosowanej teorii plastyczności będą często występować pojęcia, które z braku miejsca i w trosce o przejrzystość wykładu nie będą tam wyjaśniane. Celowym więc jest krótkie omówienie znaczenia niektórych pojęć przed rozpatrywaniem właściwych zagadnień stosowanej teorii plastyczności.

Do podstawowych wiadomości z matematyki należy zaliczyć: ogólne wiadomości o tensorach, twierdzenia całkowe, pojęcie funkcji jednorodnej, pojęcie wypukłości funkcji, pojęcie potencjału, gradientu, pola skalarowego i pola tensorowego.

Z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych należy wyjaśnić pochodną materialną i zasadę obiektywności.

W analizie złożonych zagadnień sprężystych i plastycznych stosowany jest rachunek macierzowy. Złożone związki fizyczne w zapisie macierzowym wyrażają się prosto, zwięźle i zrozumiale. Z tych względów podanie podstaw rachunku macierzowego jest konieczne.

## 1. Ogólne wiadomości o tensorach

W mechanice i naukach technicznych występują pewne wielkości /punkt, wektor, naprężenie, odkształcenie/, które określe się układem współrzędnych wielowskaźnikowych, przy czym współrzędne te przy przejściu z układu  $/x_i/$  do układu  $/x'_j/$  transformują się /przekształcają/ według określonego wzoru, równania. Wielkości te nazywamy tensorami kartezjańskimi, w odróżnieniu od tensorów w układzie krzywoliniowym. Występują one w trójwymiarowej przestrzeni, którą nazywamy przestrzenią fizyczną lub euklidesową. Do opisu zjawisk zachodzących w tej przestrzeni stosowany będzie kartezjański układ współrzędnych  $/x_i/$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$ . Na osiach tego układu mamy wektory jednostkowe /wersory/  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  /ogólnie  $\vec{e}_i/$ .

### 1.1. Wektory

Wielkości występujące w mechanice można podzielić na wielkości skalarne i wektorowe. Krótko przypomnijmy najważniejsze pojęcia.

Iloczynem skalarnym wersorów  $\vec{e}_i$  i  $\vec{e}_j$  nazywamy iloczyn długości tych wersorów przez cosinus kąta zawartego między nimi

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cos \varphi = \cos /x_i, x'_j/ = c_{ij} \quad (1)$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest niezmiennikiem, ponieważ nie zmienia się przy obrocie układu współrzędnych. Zatem nakładając obrót na wektor  $a_i$  i na wektor  $b_i$ , otrzymamy

$$a_i \cdot b_i = a'_k \cdot b'_k, \\ \underbrace{c_{ij}}_{a_i} \underbrace{a'_j}_{b_i} \underbrace{c_{ik}}_{\delta_{jk}} \underbrace{a'_j}_{a'_k} \underbrace{b'_k}_{b'_k} = \underbrace{\delta_{jk}}_{a'_k} a'_j b'_k = a'_k \cdot b'_k.$$

Wektor natomiast jest to wielkość, która posiada wartość, kierunek i zwrot. Praca jest iloczynem skalarnym,  $L = \vec{P} \cdot \vec{s} = |\vec{P}| |\vec{s}| \cos \varphi$ . Jeżeli weźmiemy wektor w układzie  $/x_i/$   $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$ , który w układzie obróconym  $/x'_j/$  jest  $v'_j \vec{e}'_j$  to mnożąc obie strony skalarnie przez wersor  $\vec{e}_i$

$$v_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = v'_j \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i,$$

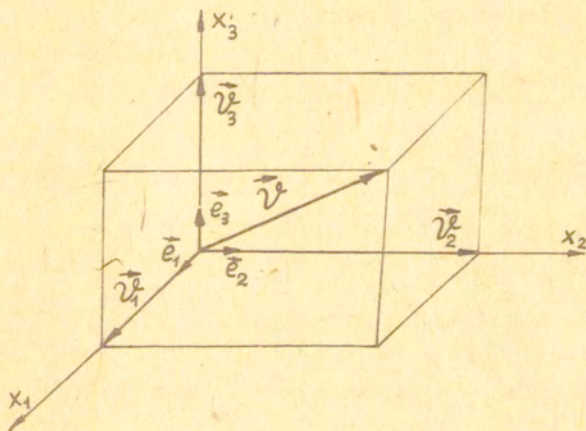
otrzymamy równość

$$v_i = v'_j c_{ji}, \quad (2)$$

którą nazywamy tensorem. Wektor jest sumą składowych i można go zapisać

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \quad (3)$$

i graficznie przedstawić jak na rysunku 1.



Rys. 1. Rozkład wektora  $\vec{v}$  na składowe /rzuty na osie/  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Składowa  $\vec{v}_i$  wektora  $\vec{v}$  jest skalarem i równa się iloczynowi modułu wektora  $|\vec{v}|$  i cosinusa kąta zawartego między wektorem  $\vec{v}$  i o-

się  $x_1$

$$\varphi = |\vec{V}| \cos(x_1, \vec{V}). \quad (4)$$

Iloczyn skalarny wektorów jednostkowych równoległych jest równy jedności

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1, \quad (5)$$

prostopadłych natomiast — równy zeru

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0. \quad (6)$$

Wektory można zapisywać symbolowo

$$\begin{aligned} \vec{p} + \vec{q}, \quad \vec{p} \cdot \vec{V}, \quad \vec{W} = \vec{u} * \vec{V}, \\ \lambda(\vec{u} * \vec{V}) = \lambda \vec{u} + \vec{V} = \vec{u} + \lambda \vec{V} \end{aligned} \quad (7)$$

lub indeksowo

$$\vec{p}_i = \vec{u}_i + \vec{V}_i, \quad \vec{W}_i = \varepsilon_{ijk} \vec{u}_j \vec{V}_k, \quad \vec{p}_i = \lambda \vec{u}_i, \quad (8)$$

gdzie

$i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $\lambda$  jest liczbą rzeczywistą.

Iloczyn skalarny wektora przez ten sam wektor jest równy

$$\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

a różnych wektorów

$$\vec{V}_i \cdot \vec{u}_i = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów tworzy tensor drugiego rzędu

$$\vec{a}_i \vec{b}_j = T_{ij}.$$

Zapis symbolowy

$$\vec{t} * (\vec{u} * \vec{V}) = \vec{u}(\vec{t} \cdot \vec{V}) - \vec{V}(\vec{t} \cdot \vec{u})$$

udowadnia się następująco:

iloczyn  $\vec{u} * \vec{V} = \varepsilon_{mjp} u_j v_p = W_m$ , iloczyn  $\vec{t} * (\vec{u} * \vec{V}) = \varepsilon_{klm} t_l W_m = P_k$ .

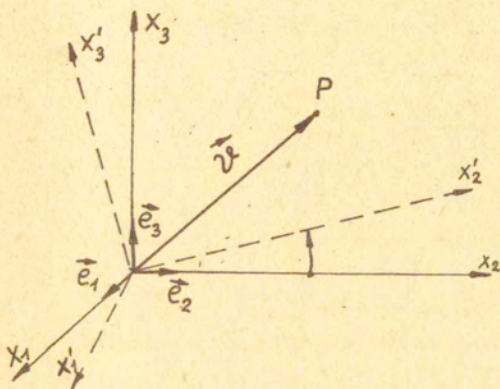
Lewa strona równa się

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm} t_l \varepsilon_{mjp} u_j v_p &= \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mjp} t_l u_j v_p = (\delta_{lj} \delta_{kp} - \delta_{lp} \delta_{kj}) t_l u_j v_p = \\ &= t_l u_l v_k - t_l v_l u_k = P_k. \end{aligned}$$



### 1.2. Przekształcenie ortogonalne

Rozpatrzmy zachowanie się wielkości geometrycznych, współrzędnych punktu P i współrzędnych wektora  $\vec{v}$  przy zmianie układu współrzędnych kartezjańskich  $/x_i/$  na obrócony układ współrzędnych kartezjańskich  $/x'_j/$ .



Rys. 2. Obrót lewoskrętnego układu współrzędnych kartezjańskich

Współrzędne punktu P w obróconym układzie  $/x'_j/$  zależne są od współrzędnych tego punktu w układzie pierwotnym  $/x_i/$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos/x_1, x'_1/ + x_2 \cos/x_2, x'_1/ + x_3 \cos/x_3, x'_1/ , \\ x'_2 &= x_1 \cos/x_1, x'_2/ + x_2 \cos/x_2, x'_2/ + x_3 \cos/x_3, x'_2/ , \\ x'_3 &= x_1 \cos/x_1, x'_3/ + x_2 \cos/x_2, x'_3/ + x_3 \cos/x_3, x'_3/ , \end{aligned} \quad (9)$$

co w skrócie można napisać

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 x_i c_{ij} , \quad (10)$$

gdzie  $c_{ij} = \cos/x_1, x_j^i/$  jest cosinusem kierunkowym między osią  $x_1$  i osią obróconą  $x_j^i$ . Inaczej mówiąc  $c_{ij}$  jest macierzą /tablica prostokątna o  $i$  wierszach i  $j$  kolumnach/, w której  $i, j$  przyjmują wartości 1, 2, 3. Macierz nie jest obiektem geometrycznym, ale opisuje obiekt - tensor. Wyznacznik natomiast jest tablicą kwadratową utworzoną z  $n^2$  liczb, zwanych elementami wyznacznika, rozmieszczonych w  $n$  wierszach i w  $n$  kolumnach. Wyznacznik macierzy kwadratowej  $[a_{ij}]$  zapisuje się  $\det |a_{ij}| = |a_{ij}|$ , gdzie wskaźniki  $i, j$  przyjmują wartości 1, 2, 3, ...,  $n$ . Wskaźnik  $i$  podaje numer wiersza, wskaźnik  $j$  - numer kolumny

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \quad (11)$$

W równaniu /10/  $i$  jest indeksem sumowania (indeks niemy) i przyjmuje wartości 1, 2, 3, a wskaźnik  $j$  przyjmuje jedną wartość

$$x_1^i = x_1 c_{11} + x_2 c_{21} + x_3 c_{31},$$

gdzie  $c_{11} = \cos/x_1, x_1^i/$ ,  $c_{21} = \cos/x_2, x_1^i/$ ,  $c_{31} = \cos/x_3, x_1^i/$ .

Odwrotna transformacja współrzędnych punktu (10) jest określona wzorem

$$x_k = \sum_{j=1}^3 x_j^i c_{kj} \quad (12)$$

a po rozwinięciu

$$x_1 = x_1^i c_{11} + x_2^i c_{12} + x_3^i c_{13} \text{ itd. ,}$$

gdzie  $c_{11} = \cos/x_1, x_1^i/$ ,  $c_{12} = \cos/x_1, x_2^i/$ ,  $c_{13} = \cos/x_1, x_3^i/$ .

Przyjmując umowę, zwaną konwencją sumacyjną Einsteina, polegającą na opuszczeniu znaku sumy przed jednomianem (10), (12) i

sumowaniu po powtarzających się indeksach po prawej stronie. Wskaźniki nie powtarzające się /nie występują dwa razy po lewej lub prawej stronie/ nazywamy swobodnymi i muszą być one takie same po prawej jak i po lewej stronie równania. Równania (10) i (12), według których transformują się współrzędne punktu można zapisać

$$x'_j = x_i c_{ij} \quad (13)$$

i transformacja odwrotna

$$x_k = x'_j c_{kj} \quad (14)$$

W przypadku uwzględnienia przesunięcia układu transformacja współrzędnych wyrazi się wzorem

$$x'_j = x_i c_{ij} + b_j \quad (15)$$

Cosinusy kierunkowe mają tę własność, że ich iloczyn skalarny jest równy delcie Kroneckera

$$c_{ij} \cdot c_{kj} = \delta_{ik} \quad (16a)$$

Wzór (16a) nazywany jest również macierzą jednostkową. Delta (symbol) Kroneckera określa się następująco:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = k \\ 0 & \text{jeśli } i \neq k \end{cases} \quad (16b)$$

i nazywa się również tensorem jednostkowym (izotropowym), który ma składowe (jeśli  $i, k = 1, 2, 3$ ),

$$\delta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (17)$$

Symbol Kroneckera stosuje się do wymiany wskaźników swobodnych przy otrzymywaniu niezmienników i do zwięzania tensorów. Nasu-

wając tensor  $\delta_{ip}$  (nakładamy obrót) na dowolny tensor  $a_{klmp}$ , otrzymuje się nowy tensor o innych indeksach

$$a_{klmp} \delta_{ip} = c_{klmi} \quad (18)$$

i z tego powodu tensor  $\delta_{ip}$  nazywa się tensorem podstawienia.

Przy pomocy tensora  $\delta_{ij}$  można przedstawić powierzchnię kuli

$$\lambda \delta_{ij} x_i x_j = 1 \quad (19)$$

i z tego powodu nazywa się on również tensorem kulistym. Nasuwając tensor  $\delta_{ij}$  na siebie, otrzymamy zwężenie tensora

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{11} = \delta_{jj} = 3 \quad (20)$$

Tensor  $\delta_{11}$  po rozwinięciu ma postać

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad .$$

Transformacji tensora jednostkowego  $\delta_{ik}$  dokonuje się w ten sposób, że na niego nakłada się obrót

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= c_{ij} \quad c_{kj} \quad | \cdot \quad c_{kl} \\ \underbrace{\delta_{ik} \quad c_{kl}}_{\delta'_{il}} &= c_{ij} \quad \underbrace{c_{kj} \quad c_{kl}}_{\delta_{jl}} \\ \delta'_{il} &= c_{ij} \delta_{jl} \end{aligned} \quad (21)$$

Gdy przyjmiemy, że  $i = k = 1$ , to po rozwinięciu równania (16a) otrzymamy

$$c_{11} c_{11} + c_{12} c_{12} + c_{13} c_{13} = 1$$

czyli inaczej

$$\cos^2 /x_1, x'_1/ + \cos^2 /x_1, x'_2/ + \cos^2 /x_1, x'_3/ = 1,$$

jeśli  $i = 1, k = 2$ , to

$$c_{11} c_{21} + c_{12} c_{22} + c_{13} c_{23} = 0$$

czyli

$$\cos/x_1 x_1' / \cos/x_2 \cdot x_1' + \cos/x_1, x_2' / \cos/x_2, x_2' + \cos/x_1, x_3' / \cos/x_2, x_3' = 0.$$

### 1.3. Tensor rzędu pierwszego

Wektor  $\vec{v}$  (może być siłą, prędkością) w przestrzeni trójwymiarowej określony jest przez trzy ponumerowane liczby  $v_1, v_2, v_3$ , będące jego współrzędnymi w obranym układzie odniesienia. Jeżeli współrzędne wektora  $v_i$  z układu  $/x_i/$  transformują się do układu nowego, obróconego  $/x_j'/$ , podobnie jak współrzędne punktu, według wzoru

$$v_j' = v_i c_{ij} \quad (22)$$

lub transformują się odwrotnie zgodnie z równaniem poniższym

$$v_k = v_j' c_{kj}, \quad (23)$$

to mówimy, że te równania są tensorami rzędu pierwszego - inaczej tensorami jednowskaźnikowymi. Czy zależność /22/ jest tensorem, czy ta zależność się transformuje, czy się nie zmienia przy obrocie? Aby sprawdzić, to trzeba nałożyć obrót

$$\begin{aligned} v_j' &= v_i c_{ij} \quad | \cdot c_{kj} \\ v_j' c_{kj} &= v_i \delta_{ik} \\ v_j' c_{kj} &= v_k \end{aligned} \quad (24)$$

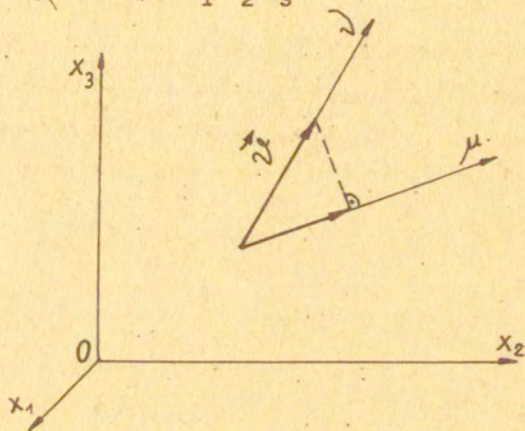
Równanie (22) w rozpisaniu ma postać

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 c_{11} + v_2 c_{21} + v_3 c_{31}, \\ v_2' &= v_1 c_{12} + v_2 c_{22} + v_3 c_{32}, \\ v_3' &= v_1 c_{13} + v_2 c_{23} + v_3 c_{33}, \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie  $c_{11} = \cos /x_1, x_1'/$ ,  $c_{21} = \cos/x_2, x_1'/$ ,  $c_{12} = \cos/x_1, x_2'/$  itd.,

a równanie (23) ma postać podobną do równania (22).

Jeśli mamy wektor  $\vec{v}$  o dowolnym kierunku  $\nu$  i chcemy go rzutować na dowolny kierunek  $\mu$  (rys. 3), to można rzutować go bezpośrednio na ten kierunek lub pośrednio rzutując najpierw na osie układu współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ .



Rys. 3. Rzutowanie wektora  $\vec{v}$  na kierunek  $\mu$

Miarę rzutu wektora  $\vec{v}$  o kierunku  $\nu$  na kierunek  $\mu$  wyrazić można za pomocą wzoru

$$v^\mu = v \cos(\mu, \nu). \quad (26)$$

Gdy znane są miary rzutu wektora  $\vec{v}$  na osie  $x_1, x_2, x_3$  jako  $v_1^v = v \cos(x_1, \nu)$ ,  $v_2^v = v \cos(x_2, \nu)$ ,  $v_3^v = v \cos(x_3, \nu)$ , to miara rzutu wektora  $\vec{v}$  na kierunek  $\mu$  będzie wyrażona wzorem

$$v^\mu = v_1^v \cos(\mu, x_1) + v_2^v \cos(\mu, x_2) + v_3^v \cos(\mu, x_3) \quad (27)$$

lub

$$v^\mu = v \left[ \cos(x_1, \nu) \cos(\mu, x_1) + \cos(x_2, \nu) \cos(\mu, x_2) + \cos(x_3, \nu) \cos(\mu, x_3) \right]. \quad (28)$$

Oznaczając  $\cos(\mu, x_i) = \mu_i$ , równanie (27) można napisać

$$v^\mu = v_i^\nu \mu_i. \quad (29)$$

W równaniu (29)  $v^\mu$  i  $v_i^\nu$  są skalarami. Można podać następującą definicję afiniczną o przekształceniu wzajemnie jednoznacznym.

„Każdemu wektorowi  $v$  w przestrzeni o dowolnym kierunku można przyporządkować skalar, przy czym przyporządkowanie to jest liniowe i jednorodne względem cosinusów kierunkowych dla obranego układu współrzędnych”.

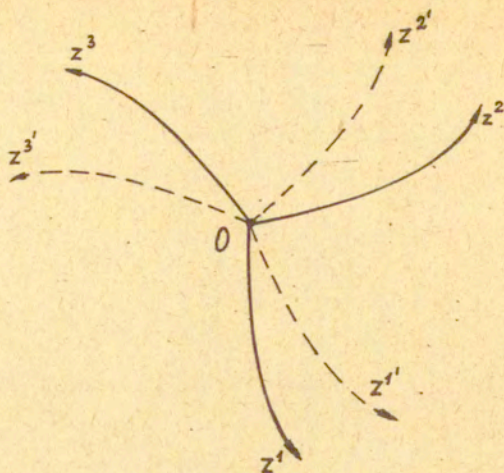
W krzywoliniowym /rys. 4/ układzie współrzędnych  $/z^k/$  w przestrzeni euklidesowej transformacja wektora z układu  $/z^k/$  do układu  $/z^{k'}/$  będzie przebiegać według wzoru

$$v^{k'} = v^k C_k^{k'} \quad (30)$$

lub odwrotna według wzoru

$$v^k = v^{k'} C_{k'}^k, \quad (31)$$

gdzie  $C_{k'}^k$  jest macierzą cosinusów kierunkowych. Np.  $C_1^{3'}$  jest cosinusem kierunkowym od osi  $z^1$  do osi  $z^{3'}$ .



Rys. 4. Układ krzywoliniowy

Wskaźniki pisane u góry litery  $C^{k'}$  są wskaźnikami kontrawariantnymi, a pisane u dołu litery  $C_k$  są wskaźnikami kowariantnymi.

#### 1.4. Tensor rzędu zerowego

Skalary /masa, temperatura, gęstość/ są tensorami rzędu zerowego. Skalar bowiem określony jest tylko jedną liczbą  $\phi$ , której wartość nie zależy od współrzędnych. Prawo transformacji skalaru ma postać

$$\phi' = \phi . \quad (32)$$

#### 1.5. Tensor rzędu drugiego

Definicja transformacyjna. W dowolnym układzie współrzędnych prostokątnych kartezjańskich  $/x_i/$  tensor rzędu drugiego wyznaczony jest przez 9 składowych liczb  $/3^2 - \text{macierz } 3 \text{ na } 3/$ , będących składowymi tensora, ponumerowanych za pomocą dwóch



wskaźników, które przy zmianie układu współrzędnych /obrocie układu/ przekształcają się /transformują się, przeliczają się/ zgodnie ze wzorem

$$T'_{kl} = c_{ik} c_{jl} T_{ij}, \quad (33)$$

w którym wskaźniki  $k, l = 1, 2, 3$ ,  $c_{ik}$  i  $c_{jl}$  są macierzami cosinusów kierunkowych, a nie tensorami. Jeśli obie strony równania /33/ pomnożymy przez  $c_{mk} c_{nl}$

$$T'_{kl} c_{mk} c_{nl} = c_{ik} c_{jl} c_{mk} c_{nl} T_{ij} = \delta_{im} \delta_{jn} T_{ij} = \delta_{jn} T_{mj} = T_{nm},$$

to otrzymamy transformację odwrotną

$$T_{nm} = c_{nl} c_{mk} T'_{kl}. \quad (34)$$

Tensor  $T_{ij}$  w osiach głównych ma składowe

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

które wyznaczają hiperpowierzchnię.

Jeśli  $T_{ij} = T_{ji}$ , to tensor  $T$  jest symetryczny i ma sześć różnych składowych. W macierzy mogą być poprzerastawiane kolumny wskaźników względem przekątnej i wartość macierzy nie zmienia się. Jeśli natomiast przy zmianie kolumn wskaźników otrzymuje się zmianę znaku tensora, to taki tensor nazywa się antysymetryczny ( $T_{ij} = -T_{ji}$ ). Tensor  $T_{ij}$  równy jest sumie tensora symetrycznego  $T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  i tensora antysymetrycznego  $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (36)$$

Transformacja afiniczna (przekształcenie wzajemnie jednoznaczne) tensora rzędu drugiego. Dla dowolnego kierunku w przestrzeni tensorowi rzędu drugiego można przyporządkować wektor (tensor rzędu pierwszego), przy czym przyporządkowanie to jest liniowe i jednorodne względem cosinusów kierunkowych dla dowolnego układu współrzędnych.

Wielkość wyrażona równaniem (33) jest tensorem wtedy, jeżeli nasuniemy na nią tensor jednostkowy  $\delta'_{kl}$  i nie ulegnie zmianie

$$T'_{kl} \cdot \delta'_{kl} = c_{ik} c_{jl} \delta'_{kl} T_{ij}$$

$$T'_{kk} = \delta'_{11} c_{j1} T_{ij}$$

$$T'_{kk} = \delta'_{ij} T_{ij}$$

$$T'_{kk} = T_{ii}$$

Przez nasunięcie tensora symetrycznego  $T_{(ij)}$  na tensor antysymetryczny  $T_{[ij]}$  otrzymuje się wartość równą zeru

$$T_{(ij)} \cdot T_{[ij]} = 0.$$

Jeżeli na tensor  $T_{ij}$  nasuniemy wektor  $a_i$ , to otrzymamy wektor  $b_j$

$$T_{ij} \cdot a_i = b_j,$$

gdy natomiast na tensor  $T_{ij}$  nasuniemy tensor jednostkowy  $\delta_{ij}$ , to otrzymamy ślad tego tensora, który jest skalarem

$$T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii}.$$

W układzie współrzędnych krzywoliniowych składowe kontrawariantne tensora rzędu drugiego przekształcają się wg wzoru

$$\underbrace{A^{k'l'}}_{\text{punkt}} \underbrace{(x^{j'})}_{\text{pole tensorowe}} = A^{mn} (x^i) \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}, \quad (37)$$

pole tensorowe

a składowe kowariantne

$$A_{k'1'}(x^{j'}) = A_{mn}(x^i) \frac{\partial x^m}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} \quad (38)$$

i składowe mieszane według wzoru

$$A_{1'}^{k'}(x^{j'}) = A_n^m(x^i) \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} \quad (39)$$

### 1.6. Tensor rzędu trzeciego

Tensor rzędu trzeciego wyznaczony jest przez  $3^3$  liczb, składowych tensora, ponumerowanych za pomocą trzech wskaźników, które przy zmianie układu współrzędnych przeliczają się według równania

$$T'_{lmn} = c_{i1'} \cdot c_{jm'} \cdot c_{kn'} \cdot T_{ijk} \quad (40)$$

Podobnie można zapisać tensor rzędu n-tego (posiada  $3^n$  składowych liczb)

$$T'_{lmnpr\dots} = c_{i1'} \cdot c_{jm'} \cdot c_{kn'} \cdot c_{qp'} \cdot c_{wr'} \cdot \dots \cdot T_{ijkqw\dots} \quad (41)$$

W dowolnym układzie współrzędnych prostokątnych kartezjańskich tensor rzędu n-tego reprezentowany jest przez  $3^n$  składowych liczb, które przy zmianie układu współrzędnych przeliczają się według równania (41).

Tensor rzędu trzeciego  $\xi_{ijk}$  nazywa się tensorem Riccie'go i posiada następującą własność:

$$\xi_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ dla parzystej permutacji wskaźników } 1,2,3 \\ -1 \text{ dla nieparzystej permutacji wskaźników } 1,2,3, \\ 0 \text{ dla powtórzenia wskaźników} \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \xi_{123} &= \xi_{231} = \xi_{312} = 1 \\ \xi_{213} &= \xi_{132} = \xi_{321} = -1 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{111} &= \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{122} = 0 \\ \varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} \end{aligned}$$

Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pqr} \cdot \varepsilon_{pqr} &= 6 = c_{ip} c_{jq} c_{kr} T_{ijk} c_{ip} c_{jq} c_{kr} T_{ijk} \\ \varepsilon_{pqi} \cdot \varepsilon_{pqj} &= 2 \delta_{ij} = c_{kp} c_{nq} c_{mi} T_{knm} c_{kp} c_{nq} c_{lj} T_{knl} \quad (44) \\ \varepsilon_{pij} \cdot \varepsilon_{prl} &= \delta_{ir} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jr} \end{aligned}$$

Tensor  $\varepsilon_{ijk}$  został wprowadzony dla wygodnego indeksowego zapisu iloczynu wektorowego dwóch wektorów  $(\mathcal{V}_j^i * u_k)$

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \mathcal{V}_j^i u_k \quad (45)$$

(zapis symbolowy  $\vec{w} = \vec{\mathcal{V}} * \vec{u}$ ) oraz zapisu objętości zbudowanej na trzech dowolnych wektorach (tensorach rzędu pierwszego)  $u_i, \mathcal{V}_j^i, w_k$

$$V = \varepsilon_{ijk} u_i \mathcal{V}_j^i w_k \quad (46)$$

Objętość zbudowaną na trzech wektorach można również zapisać w postaci wyznacznika

$$V = \begin{vmatrix} u_1 & \mathcal{V}_1^i & w_1 \\ u_2 & \mathcal{V}_2^i & w_2 \\ u_3 & \mathcal{V}_3^i & w_3 \end{vmatrix} \cdot$$

Za pomocą tensora  $\varepsilon_{ijk}$  z tensora rzędu drugiego  $T_{jk}$  można otrzymać wektor  $\mathcal{V}_i^i$

$$\mathcal{V}_i^i = \varepsilon_{ijk} \cdot T_{jk} \quad (47)$$

Tensor  $\sigma_{ij}$  (np. naprężenia) zapisuje się w postaci macierzy (tablicy 3 x 3)

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \cdot \quad (48)$$

Wskaźniki  $i, j$  mogą przyjmować wartości  $x, y, z$  dla ogólnego uk-

ładu współrzędnych lub 1,2,3 dla głównych osi układu współrzędnych.

### 1.7. Tensor rzędu czwartego

Tensor rzędu czwartego wyznaczony jest przez  $3^4$  liczb, będących składowymi tensora, ponumerowanych za pomocą czterech wskaźników. Najprostszym tensorem rzędu czwartego jest tensor symetryczny o następującej postaci:

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (48a)$$

gdzie  $\lambda, \mu, \nu$  są skalarnymi mnożnikami,  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera. Tensor  $D_{ijkl}$  jest tensorem modułów materiałowych czwartego rzędu. Jest on symetryczny względem wskaźników  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

Jeśli zachodzi symetria

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{klij}, \quad (48b)$$

to modułów sprężystości będzie  $6 \cdot 6 = 36$ .

Tensor  $D_{ijkl}$  występuje w uogólnionym związku fizycznym liniowej sprężystości

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (48c)$$

### 1.8. Działania na tensorach

Na tensorach można wykonywać następujące działania: mnożenie tensora przez skalar, mnożenie skalarne tensora przez tensor, dodawanie i odejmowanie tensorów, potęgowanie tensorów oraz zwięzanie (zwijanie) tensorów.

1. Mnożenie tensora  $(T_{ij})$  przez skalar  $\lambda$

$$\lambda T_{ij} = \lambda \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}, \quad \lambda \delta_{ij} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}. \quad (49)$$

2. Iloczyn skalarny tensorów przy pełnym nasunięciu

$$P_{ij} \cdot T_{ij} = K_{jj} = K_{ii} = \begin{vmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{vmatrix}, \quad (50)$$

$$T_{ij} \cdot P_{ij} = T_{(ij)} P_{(ij)} + T_{[ij]} \cdot P_{[ij]},$$

$$K_{ii} = \sum_{i=1}^3 K_{ii} = K_{11} + K_{22} + K_{33}.$$

Jest to sumowanie po powtarzających się indeksach zgodnie z konwencją sumacyjną. Energię na jednostkę objętości (dla tensorów symetrycznych) można napisać

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \varepsilon_{31}). \quad (51)$$

3. Iloczyn skalarny tensorów przy nasunięciu po jednym wskaźniku

$$T_{ij} \cdot P_{ik} = C_{jk} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}, \quad (52)$$

gdy  $j, k = 1$ , to mamy sumowanie po  $i$

$$C_{11} = T_{11} P_{11} + T_{21} P_{21} + T_{31} P_{31},$$

a gdy  $j = 2, k = 3$ , to będzie

$$C_{23} = T_{12} P_{13} + T_{22} P_{23} + T_{32} P_{33}.$$

4. Iloczyn tensorów przy różnych wskaźnikach

$$T_{ij} \cdot P_{kl} = C_{ijkl} = [\text{macierz } 9 \times 9 = 81 \text{ liczb}], T_p \cdot U_{qr} = S_{pqr} \quad (53)$$

### 5. Potęgowanie tensorów

$$\begin{aligned} P_{ij}^2 &= P_{ik} \cdot P_{kj} , \\ P_{ij}^3 &= P_{ik} P_{kl} P_{lj} , \\ \sigma_{ii}^2 &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 , \\ (\sigma_{ii})^2 &= (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 , \end{aligned} \quad (54)$$

$$B_{ij}^n = \begin{vmatrix} B_I^n & 0 & 0 \\ 0 & B_{II}^n & 0 \\ 0 & 0 & B_{III}^n \end{vmatrix} \quad (\text{w osiach głównych}).$$

### 6. Dodawanie tensorów tego samego rzędu o takich samych wskaźnikach

$$T_{ij} + P_{ij} = C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} + P_{11} & T_{12} + P_{12} & T_{13} + P_{13} \\ T_{21} + P_{21} & T_{22} + P_{22} & T_{23} + P_{23} \\ T_{31} + P_{31} & T_{32} + P_{32} & T_{33} + P_{33} \end{vmatrix} \quad (55)$$

### 7. Odejmowanie tensorów tego samego rzędu

$$P_{pqr} - T_{pqr} = U_{pqr} \quad (56)$$

Dodawanie i odejmowanie tensorów różnych rzędów czyli o różnych wskaźnikach  $T_{ij} + P_{kl}$  lub  $T_{ij} - P_{kl}$  jest nie zdefiniowane.

### 1.9. Tensor izotropowy

Współrzędne tensora izotropowego nie ulegają zmianie przy obrocie układu osi współrzędnych. Dla tensora rzędu pie-

rwszego  $\mathcal{U}'_j$  definicja izotropii ma postać

$$\mathcal{U}'_j = c_{ij} \mathcal{U}_i = \mathcal{U}'_j \quad (57)$$

Tensorom izotropowym rzędu drugiego jest

$$I_{kl} = \lambda \delta_{kl} = I'_{kl} \quad (58)$$

gdzie  $\lambda$  - mnożnik skalarny, a  $\delta_{kl}$  - tensor jednostkowy.

Za pomocą tensorów izotropowych zapisuje się związki fizyczne dla ośrodków izotropowych (własności materiału nie zależą od orientacji obranego układu osi współrzędnych). Materiał izotropowy opisuje się za pomocą tensorów izotropowych.

Tensor nazywa się izotropowym, jeśli ma takie same składowe w dowolnym układzie współrzędnych prostokątnych. Elementy macierzy tensora rzędu drugiego ( $\lambda \delta_{ij}$ ) na głównej przekątnej nie zmieniają się przy obrocie układu współrzędnych. Stąd wniosek, że tensor izotropowy rzędu drugiego ma postać

$$I_{kl} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad (59)$$

### 1.10. Tensor metryczny

Tensorom metrycznym nazywamy iloczyn tensorowy dwóch wektorów bazy. Jest on miarą długości.

Wektor bazy jest to pochodna cząstkowa wektora wodzącego punktu P względem jego współrzędnych

$$\vec{g}_k = \frac{df}{dz_k} = \frac{\partial x_m}{\partial z_k} e_m = \frac{\partial x_1}{\partial z_k} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial z_k} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z_k} e_3 \quad (60)$$

Zależność odwrotna

$$e_m = \frac{\partial z_k}{\partial x_m} g_k$$



Wektor bazy jest trójką wzajemnie prostopadłych wektorów w punkcie P, a więc jest tensorem rzędu pierwszego. Tensor metryczny zatem będzie

$$g_{km} = g_k \cdot g_m = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{\partial x_i}{\partial z_m} = \frac{\partial x_1}{\partial z_k} \frac{\partial x_1}{\partial z_m} + \frac{\partial x_2}{\partial z_k} \frac{\partial x_2}{\partial z_m} + \frac{\partial x_3}{\partial z_k} \frac{\partial x_3}{\partial z_m}. \quad (61)$$

Weźmy przestrzeń euklidesową, w której dopuszczalna jest transformacja współrzędnych kartezjańskich  $x_1, x_2, x_3$  na współrzędne bardziej ogólne, krzywoliniowe  $z_1, z_2, z_3$  (rys.6).

← Każdemu punktowi  $(x_1, x_2, x_3)$  odpowiada jeden i tylko jeden punkt  $(z_1, z_2, z_3)$  i odwrotnie czyli istnieje funkcja jednoznacznego przekształcania współrzędnych punktu z układu prostokątnego w układ krzywoliniowy, którą zapisuje się w postaci

$$z_i = z_i(x_1, x_2, x_3) \quad (62)$$

i odwrotnie

$$x_i = x_i(z_1, z_2, z_3). \quad (63)$$

Różniczkując funkcję (63) jako złożoną, otrzymamy jej różniczkę w postaci

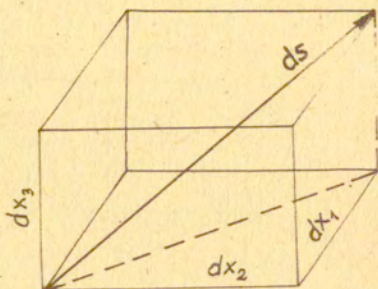
$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} dz^k. \quad (64)$$

Funkcje (62 i 63) posiadają ciągle pochodne i jacobian różny od zera,  $J \neq 0$ ,

$$J = \left| \frac{\partial x_k}{\partial z_l} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jeżeli weźmiemy element prostopadłościenny (rys. 5), to na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymamy zależność

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_i dx_i = dx_i dx_j \delta_{ij} \quad (65)$$



Rys. 5. Składowe wektora

Podstawiając zależności (64) do równania (65), otrzymamy

$$(ds)^2 = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} dz^k \frac{\partial x_i}{\partial z_m} dz^m \quad (66)$$

i następnie zależność (61), to otrzymamy długość elementu liniowego w układzie krzywoliniowym

$$(ds)^2 = g_{km} dz^k dz^m \quad (67)$$

Funkcja  $g_{km}(z_1, z_2, z_3) = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{\partial x_i}{\partial z_m}$  jest symetryczna względem wskaźników  $k$  i  $m$  i nazywa się tensorem metrycznym w krzywoliniowym układzie  $z_1, z_2, z_3$ .

Tensor metryczny w układzie kartezjańskim jest równy delcie Kroneckiera  $\delta_{km}$ , ponieważ

$$g_{km} = g_k g_m = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial x_m} = \delta_{km} \quad (68)$$

Składowe tensora kontrawariantnego  $\delta^{ij}$ , kowariantnego  $\delta_{ij}$  i mieszanego  $\delta_j^i$  w prostokątnym układzie współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$  są równe sobie i wynoszą

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases} . \quad (69)$$

Kowariantne składowe tensora metrycznego

$$g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^n}{\partial z^j} \delta_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^n}{\partial z^j} . \quad (70)$$

Kontrawariantne składowe tensora *metrycznego*

$$g^{ij} = \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \delta^{mn} = \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} . \quad (71)$$

Mieszane składowe tensora metrycznego

$$g_j^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial z^j} \delta_n^m = \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial z^j} = \delta_j^i . \quad (72)$$

Można mówić również o wektorach bazy w układzie o współrzędnych początkowych

$$G_k = \frac{\partial x_i^0}{\partial z_k} \quad (73)$$

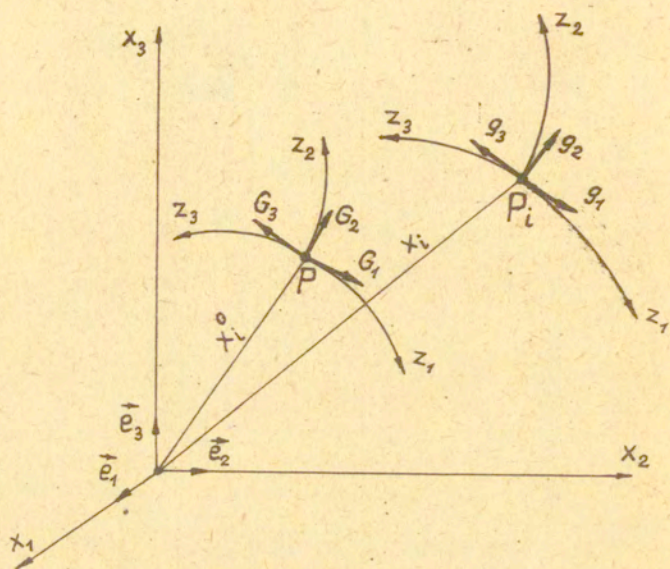
lub o współrzędnych końcowych

$$g_k = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} . \quad (74)$$

Zależność między wektorami bazy:

$$g_k g_l = g_{kl} \left( \text{tensor metryczny} \right), \quad g_{kl} = \begin{vmatrix} g_1 g_1 & g_1 g_2 & g_1 g_3 \\ g_2 g_1 & g_2 g_2 & g_2 g_3 \\ g_3 g_1 & g_3 g_2 & g_3 g_3 \end{vmatrix} ,$$

$$g^k \cdot g_l = \delta_l^k ,$$



Rys. 6. Wektory bazy

$$g_{kl} \cdot g^{km} = \delta_l^m, \text{ wyznacznik } g_{kl} \cdot g^{km} = \left| \delta_l^m \right| = 1,$$

$$g^{kl} \cdot g_l = g^k \text{ — wektor bazy,} \quad (75)$$

$$g^k \cdot g^l = g^{kl} \text{ — tensor metryczny,}$$

$$g_{kl} \cdot g^l = g_k \text{ — wektor bazy.}$$

Przykład

Obliczyć wektory bazy w układzie krzywoliniowym walcowym  $z_1 = r, z_2 = \theta, z_3 = z$  przetransformowanym na współrzędne prostokątne  $x_1, x_2, x_3$  (rys. 7) o zależnościach

$$x_1 = z_1 \cos z_2, \quad x_2 = z_1 \sin z_2, \quad x_3 = z_3.$$

1. Obliczenie różniczek cząstkowych:

$$J = x_1 \left( \text{jakobian} \right),$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial z_1} = \cos z_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial z_1} = \sin z_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial z_2} = -z_1 \sin z_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial z_2} = z_1 \cos z_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial z_2} = 0,$$

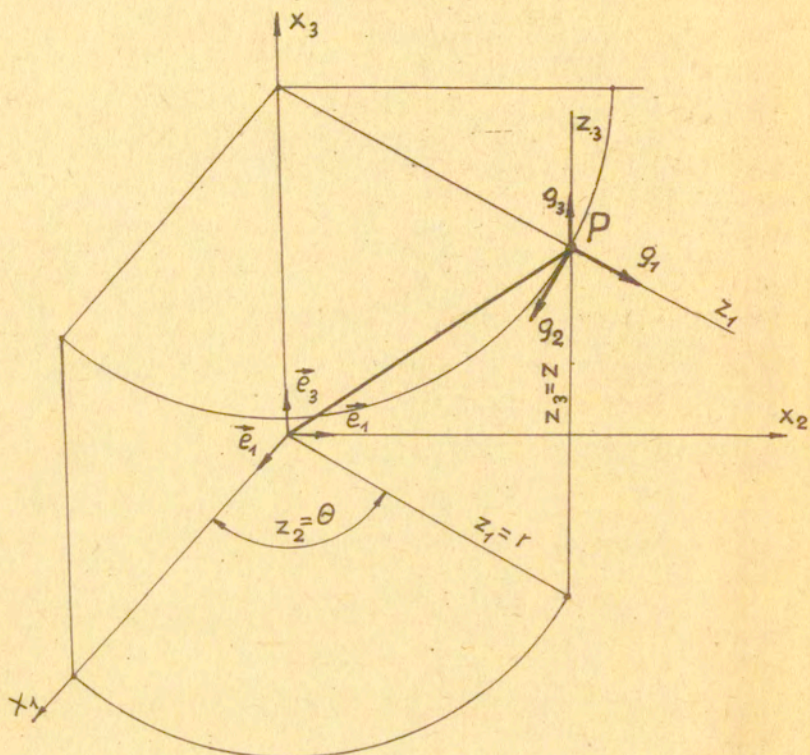
$$\frac{\partial x_1}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial z_3} = e_3.$$

2. Obliczenie wektorów bazy:

$$g_1 = \frac{\partial x_1}{\partial z_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z_1} + \frac{\partial x_3}{\partial z_1} = e_1 \cos z_2 + e_2 \sin z_2,$$

$$g_2 = \frac{\partial x_1}{\partial z_2} + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} + \frac{\partial x_3}{\partial z_2} = -e_1 z_1 \sin z_2 + e_2 z_1 \cos z_2,$$

$$g_3 = \frac{\partial x_1}{\partial z_3} + \frac{\partial x_2}{\partial z_3} + \frac{\partial x_3}{\partial z_3} = e_3.$$



Rys. 7. Współrzędne prostokątne, walcowe i wektory bazy

### 1.11. Tensor a dewiator

Tensor  $T_{ij}$  daje się rozłożyć na część kulistą (izotropową)  $T \delta_{ij}$  i dewiator  $S_{ij}$  następująco:

$$T_{ij} = S_{ij} + T \delta_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}, \quad T = \frac{1}{3} T_{kk} \quad (76)$$

Dewiator  $S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}$  ma pięć niezależnych współrzędnych (bo  $S_{ii} = 0$  i  $S_{ij} = S_{ji}$ ), które razem z tensorem

kulistym określają symetryczny tensor  $T_{ij}$ .

Niezmienniki dwiatora  $S_{ij}$  konstruuje się podobnie jak niezmienniki tensora  $T_{ij}$ . Pierwszy niezmiennik dwiatora jest równy zeru

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= S_{ij} \delta_{ij} = T_{ij} \delta_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} = 0, \\ \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3, \quad T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii}, \\ \mathcal{I}_1 &= S_{ii} = T_{ii} - T_{kk} = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Drugi niezmiennik dwiatora naprężenia jest równy

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij}. \quad (78)$$

Z tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$  otrzymujemy dwiator naprężenia  $S_{ij}$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_s \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (79a)$$

który może być wyrażony w postaci

$$S_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (79b)$$

gdzie  $\frac{1}{3} \sigma_{kk} = \sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ .

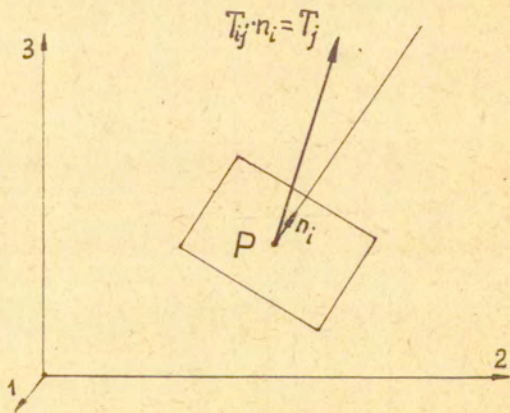
W osiach głównych rozłożenie tensora naprężeń  $\sigma_{ij}$  na dwiator i tensor kulisty wyrazi się następująco:

$$\underbrace{\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}}_{\text{tensor}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{vmatrix}}_{\text{tensor kulisty}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_s \end{vmatrix}}_{\text{dwiator}}. \quad (80)$$

1.12. Osie główne tensora symetrycznego rzędu drugiego

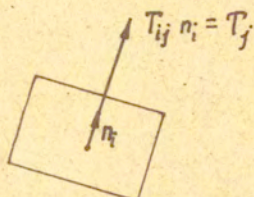
Założmy, że w punkcie P działa tensor  $T_{ij}$ , przez ten punkt można przeprowadzić płaszczyznę wyznaczoną przez jednostkowy wektor normalny  $n_i$ . Dla kierunku  $n_i$  tensorowi  $T_{ij}$  można przyporządkować wektor ( $T_{ij} \cdot n_i = T_j$ , wektor  $T$  o składowych  $j$ ) tzn. stowarzyszyć z nim wektor. Wektor ten może być równoległy do kierunku  $n_i$ , ale nie musi. Wektor  $T_{ij} \cdot n_i$  (jak jest równoległy do  $n_i$ ) ma pewną długość, którą nazywamy wartością własną tensora. Przyjmijmy, że kierunek  $n_i$  jest kierunkiem głównym i wektor  $T_{ij} \cdot n_i = T_j$  jest równoległy do tego kierunku głównego (rys. 9). Wektor  $T_j = T_{ij} \cdot n_i$  ( $n$ -wersor) po rozpisaniu ma postać:

- $T_1 = T_{11}n_1 + T_{21}n_2 + T_{31}n_3$  - tensor rzucony na oś 1,
- $T_2 = T_{12}n_1 + T_{22}n_2 + T_{32}n_3$  - tensor rzucony na oś 2,
- $T_3 = T_{13}n_1 + T_{23}n_2 + T_{33}n_3$  - tensor rzucony na oś 3.



Rys. 8. Tensor  $T_{ij}$  w układzie współrzędnych prostokątnych





Rys. 9. Pokrywanie się wektora z kierunkiem  $n_i$

Pokrywanie się wektora z kierunkiem  $n_i$  najprościej udowodnić to dla tensora kulistego  $T_{kk} \delta_{ij}$ , dla którego zachodzi tożsamościowa równość

$$T_{kk} \cdot \delta_{ij} \cdot n_i = T_{kk} \cdot n_j \equiv T n_j .$$

Kierunkowi głównemu  $n_i$  przyporządkowane są wartości główne  $T$  tensora  $T_{ij}$ . Zachodzi następująca równość

$$T_{ij} n_i = T n_j , \quad (81)$$

gdzie  $T$  jest skalarą i przedstawia wartości własne tensora  $T_{ij}$ ;  $n_j$  jest wersorem kierunku głównego. Tensor  $T_{ij}$  będzie miał trzy kierunki główne, gdy go pomnożymy przez wektor jednostkowy kierunku głównego  $n_i$ . Równanie (81) posiada rozwiązanie

$$\begin{aligned} T_{ij} n_i - T n_j &= 0 , \\ (T_{ij} - T \delta_{ij}) n_i &= 0 , \end{aligned} \quad (82)$$

gdzie  $\delta_{ij} \cdot n_i = n_j$ .

Równanie (82) jest równaniem trzeciego stopnia ze względu na skalar  $T$  i ma rozwiązanie trywialne dla  $n_i = 0$ . Gdy  $n_i \neq 0$ ,

to związek (82) przedstawia układ trzech równań liniowych jednorodnych i przyjmie postać

$$T_{ij} - T \delta_{ij} = 0. \quad (83)$$

Równanie (83) rozwiążemy przez utworzenie wyznacznika

$$|T_{ij} - T \delta_{ij}| = 0,$$

które po rozpisaniu wyznacznika daje równanie

$$T^3 - J_1 T^2 + J_2 T - J_3 = 0. \quad (84)$$

Funkcje  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  noszą nazwę pierwszego, drugiego i trzeciego niezmiennika tensora  $T_{ij}$ . Są to funkcje stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego współrzędnych tensora  $T_{ij}$  i mają tę własność, że wielkość ich nie ulega zmianie przy obrocie układu  $(x_i)$  do układu  $(x'_j)$ . Niezmienniczość tych związków sprawdza się stosując reguły transformacji. Dla niezmiennika pierwszego przedstawia się to następująco :

$$J_1 = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} = c_{ip} c_{jq} T'_{pq} \quad \delta_{ij} = c_{jp} c_{iq} T'_{pq} = \delta_{pq} T'_{pq} = T'_{pp} = T'_{qq}.$$

Dla pozostałych niezmienników dowód opiera się na tej samej zasadzie. Niezmiennik  $J_1$  przedstawia sumę wyrazów po przekątnej macierzy  $T_{ij}$ , a więc jest śladem tensora. Funkcja  $J_2$  jest sumą dopełnień algebraicznych wyrazów przekątnych, funkcja  $J_3$  jest wyznacznikiem macierzy  $T_{ij}$ . Każda funkcja skalarna tych niezmienników jest również niezmiennikiem. Niezmienniki te można napisać w postaci ogólnej i rozpisanej następująco:

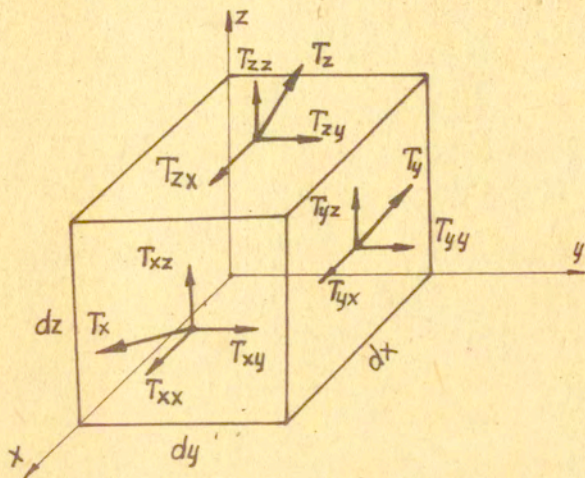
$$J_1 = T_{ii} = T_x + T_y + T_z,$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (T_{ij} T_{ji} - T_{ii} T_{jj}) = - (T_{xx} T_{yy} + T_{yy} T_{zz} + T_{zz} T_{xx} + T_{xy}^2 + T_{yz}^2 + T_{zx}^2),$$

$$J_3 = \frac{1}{6} (\epsilon_{pqr} \epsilon_{ijk} T_{pi} T_{qj} T_{rk}) = \frac{1}{6} (2T_{ij} T_{jk} T_{ki} - 3T_{ij} T_{ji} T_{kk} +$$

$$+T_{ii}T_{jj}T_{kk}) = T_{xx}T_{yy}T_{zz} + 2T_{xy}T_{yz}T_{zx} - T_{xx}T_{yz}^2 - T_{yy}T_{zx}^2 - T_{zz}T_{xy}^2 \quad (85)$$

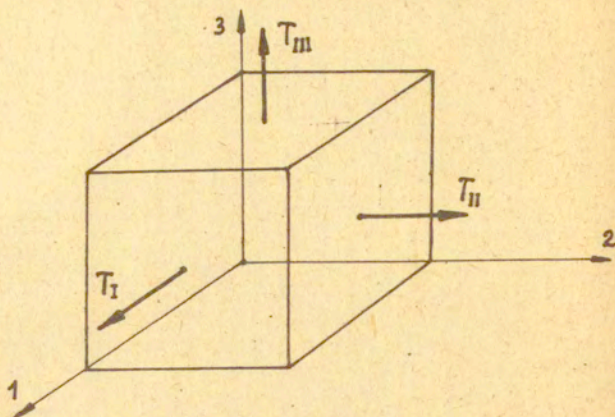
Tensor  $T_{ij}$  można przedstawić graficznie jak na rysunku 10.



Rys. 10. Graficzna interpretacja tensora w osiach współrzędnych:  $T_x, T_y, T_z$  — wektory,  $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}$  itd. — rzuty wektorów na osie.

Tensor symetryczny rzędu drugiego  $T_{ij}$  posiada zawsze trzy rzeczywiste wartości główne  $T_I, T_{II}, T_{III}$  na kierunkach głównych 1, 2, 3 (tensor pokrywa się z osiami głównymi), które przedstawiono poglądowo na rysunku 11 i w postaci wyznacznika (86)

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{vmatrix} \quad (86)$$



Rys. 11. Wartości główne tensora

### 1.13. Funkcje tensorowe argumentów tensorowych

Jeśli mamy tensor  $\underline{A} = A_{ij}$  i tensor  $\underline{B} = B_{ij}$ , to można powiedzieć, że tensor  $\underline{A}$  jest funkcją tensora  $\underline{B}$

$$\underline{A} = f(\underline{B})$$

$$\underline{A} = f(\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots, \underline{B}_n). \quad (87)$$

Funkcja tensorowa jednego argumentu tensorowego o postaci

$$\underline{A} = f(\underline{B}, \underline{H}_1, \underline{H}_2, \dots, \underline{H}_n), \quad (88)$$

(  $\underline{H}_i = \lambda_i \underline{\mathcal{E}}$  jest tensorem parametrycznym,  $\lambda_i$  - mnożnik skalarny,  $\underline{\mathcal{E}}$  - tensor jednostkowy  $\underline{B}$  - tensor zmienny ), jest izotropowa i nie zmienia postaci we wszystkich układach współrzędnych. Każdą funkcję izotropową można rozłożyć w szereg potęgowy Maclaurina ( dla potrzeb mechaniki potrzebny jest tylko tensor rzędu drugiego )

$$\underline{A} = k_0 \underline{\mathcal{E}} + k_1 \underline{B} + k_2 \underline{B}^2, \quad (89)$$

gdzie  $k_0, k_1, k_2$  są funkcjami niezmienników,  $\underline{\delta}$  - tensorem jednostkowym. Równanie (89) można zapisać

$$A_{ij} = k_0 \delta_{ij} + k_1 B_{ij} + k_2 (B_{ip} B_{pj}), \quad (90)$$

gdzie  $B_{ip} \cdot B_{pj} = B_{ij}^2$ .

W osiach głównych tensory  $\underline{B}$  (z równania 89) można zapisać

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} B_I & 0 & 0 \\ 0 & B_{II} & 0 \\ 0 & 0 & B_{III} \end{vmatrix}, \quad \underline{B}^2 = \begin{vmatrix} B_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_{III}^2 \end{vmatrix}$$

i one pokrywają się z tensorami  $\underline{A}$

$$\underline{A}_I = f(B_I), \quad \underline{A}_{II} = f(B_{II}), \quad \underline{A}_{III} = f(B_{III}).$$

## 2. Pojęcia podstawowe

### 2.1. Funkcja jednorodna

Funkcja  $U = f(x, y, z, \dots, t)$  jest jednorodna stopnia  $n$ , gdy zachodzi warunek

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots, \lambda t) = (\lambda)^n f(x, y, z, \dots, t),$$

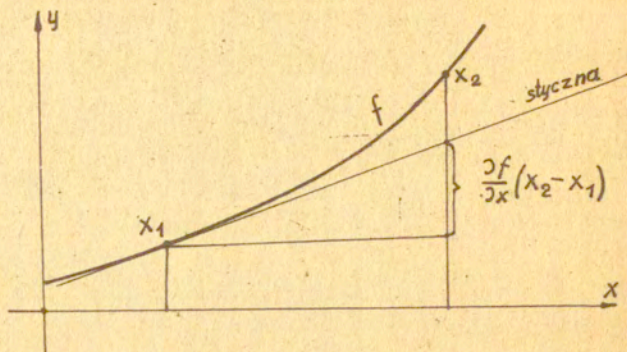
gdzie  $\lambda$  jest dowolną liczbą różną od zera,  $n$  stopniem jednorodności. Warunek jednorodności funkcji w postaci ogólnej można zapisać

$$f(\lambda x_i) = (\lambda)^n f(x_i). \quad (91)$$

### 2.2. Wypukłość funkcji

Pojęcie wypukłości funkcji w teorii plastyczności jest pojęciem podstawowym. Funkcja jest wypukła, gdy spełnia warunek

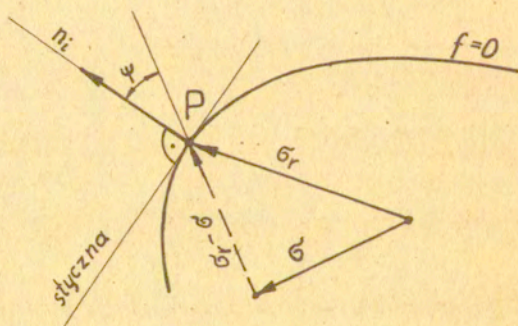
$$f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} > 0. \quad (92)$$



Rys. 12. Wypukłość funkcji w układzie współrzędnych kartezjańskich.

Funkcja  $f = 0$  jest wypukła wtedy, gdy wektor normalny  $n_i$  jest prostopadły do stycznej poprowadzonej w jakimś punkcie na linii i jeśli różnica wektorów  $\sigma_r - \sigma$  z wektorem  $n_i$  daje iloczyn większy lub równy zeru

$$(\sigma_r - \sigma) \cdot n_i \geq 0. \quad (93)$$



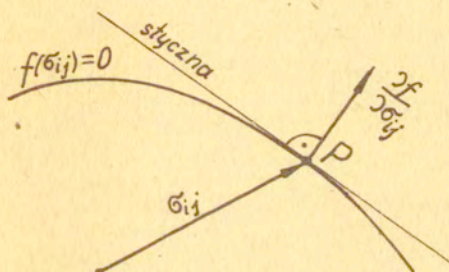
Rys. 13. Wypukłość funkcji. Kąt  $\psi$  jest zawsze ostry

### 2.3. Gradient pola skalarnego

Gradientem funkcji  $f = f(x, y, z)$  nazywamy wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji  $f$  względem współrzędnych

$$\text{grad } f \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (94)$$

Gradient jest wektorem prostopadłym do powierzchni wyznaczonej przez tę funkcję. Współrzędnymi wektora (lub całego pola wektorowego) są pochodne cząstkowe względem zmiennych. Gradient jest niezmiennikiem, ponieważ nie zmienia się przy obrocie układu. Gradient pola skalarnego  $f(\sigma_{ij}) = 0$  (równanie powierzchni) jest wektorem o długości określonej przez pochodną cząstkową  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  i jest normalnym do powierzchni tego pola w danym punkcie. Interpretację geometryczną gradientu pokazuje rysunek 14.



Rys. 14. Geometryczna interpretacja gradientu funkcji

Gradient naprężenia określa zmianę naprężenia między dwoma punktami.

## 2.4. Potencjał

Potencjałem nazywamy wielkość charakteryzującą dany stan np. pola elektrycznego, pola ciężenia grawitacyjnego. Potencjał plastyczny jest to stan naprężenia, który powoduje odkształcenie plastyczne. Potencjał jest wielkością fizyczną zawartą w ciele. Jako potencjał plastyczny przyjmuje się warunek plastyczności  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Potencjałem dla naprężeń jest funkcja  $\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  ( $\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$ ), potencjałem sprężystym jest  $W = \int_0^{\varepsilon} \sigma' d\varepsilon'$ , potencjał jako energia dopełniająca  $\Omega = \int_0^{\varepsilon} \varepsilon d\sigma$  oraz potencjał jako dysypacja  $D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ . Funkcja  $f$  w związku  $\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  jest potencjałem.

## 2.5. Pochodna materialna

Pochodna materialna służy do wyrażania zmiany pewnej wielkości (temperatury, prędkości, naprężenia itp.) w rozpatrywanej części w czasie. Najprościej wyraża się ona we współrzędnych prostokątnych kartezjańskich, gdyż składa się ona ze zwykłych pochodnych. We współrzędnych krzywoliniowych występują pochodne kowariantne. Pochodna materialna funkcji złożonej przedstawia się jako pochodna funkcji złożonej typu

$$\left\{ f[x(t), y(t)] \right\}' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (95)$$

Pochodna materialna funkcji  $f[x_{1,2,3}(t), t]$  będzie

$$\left\{ f[x_{1,2,3}(t), t] \right\}' = \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial x(t)} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \quad (96)$$

Człon pierwszy pochodnej (96) jest pochodną po zmiennej i przedstawia zmianę stanu np. naprężenia w cząstkach, człon drugi pochodnej przedstawia pochodną po czasie czyli zmianę np. stanu naprężenia w cząstce. Pochodna  $\frac{\partial t}{\partial t} = 1$ , a pochodna zmiany cząstki względem czasu przedstawia prędkość,  $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = v$ .



Ponizej zostaną przedstawione pochodne materialne najczęściej używanych wielkości:

1. Pochodna materialna wektora

$$\{f_k(x, t)\}' = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial t},$$

którą można w skrócie przedstawić

$$f_k' = \mathcal{V}_1^l \partial_1 f_k + \partial_0 f_k. \quad (97)$$

2. Pochodna materialna funkcji temperatury

$$\{f [T(x_1, t)]\}' = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t}. \quad (98)$$

Ze względu na zapis wygodnie jest pochodną temperatury po czasie pisać na początku, przedstawia ona zmianę temperatury cząstki w czasie, człon drugi pochodnej przedstawia zmianę temperatury w cząstkach.  $\frac{\partial x_1}{\partial t} = \mathcal{V}_1^l$  przedstawia prędkość lokalną.

3. Pochodna materialna prędkości  $\mathcal{V}_i^l = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \mathcal{V}_i^l(x, t)$  jest przyspieszeniem  $a_i$  i równa się

$$a_i = \mathcal{V}_i^l' = \frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial t} + \mathcal{V}_p^l \text{grad } \mathcal{V}_i^l, \quad (99)$$

gdzie  $i, p = 1, 2, 3$ ,  $a_i$  jest składową wektora przyspieszenia,  $\frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial t}$  nazywa się lokalną częścią pochodnej,  $\frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t}$  nazywa się członem unoszenia. Gdy nie ma ruchu, to człon unoszenia równy jest zeru. Dla ruchu stacjonarnego pochodna lokalna równa się zeru.

4. Pochodna materialna pola tensorowego  $T_{ijk\dots n}[x_g(a_p, t), t]$  dla ustalonej cząstki  $a_p$  jest równa

$$\left\{ T_{ijk\dots n}[x_g(a_p, t), t] \right\} = \frac{\partial T_{ijk\dots n}[x_g(a_p, t), t]}{\partial x_g} \frac{\partial x_g}{\partial t} + \frac{\partial T_{ijk\dots n}[x_g(a_p, t), t]}{\partial t} = \mathcal{V}_g^l \partial_g T_{ijk\dots n} + \mathcal{J}_0 T_{ijk\dots n}, \quad (100)$$

gdzie  $\mathcal{J}_0 T_{ijk\dots n}$  jest lokalną częścią pochodnej materialnej,

$$\mathcal{V}_g^l \partial_g T_{ijk\dots n} = \mathcal{V}_1^l \frac{\partial T_{ijk\dots n}}{\partial x_1} + \mathcal{V}_2^l \frac{\partial T_{ijk\dots n}}{\partial x_2} + \mathcal{V}_3^l \frac{\partial T_{ijk\dots n}}{\partial x_3}$$

jest członem unoszenia pochodnej materialnej.

5. Pochodna materialna całki objętościowej jest równa sumie całki objętościowej i powierzchniowej

$$\left\{ \int_V T_{ijk\dots n} dV \right\} = \int_V \mathcal{J}_0 T_{ijk\dots n} dV + \int_S T_{ijk\dots n} \mathcal{V}_p^l \mathcal{V}_p dS, \quad (101)$$

gdzie  $\mathcal{V}_p^l$  - wektor,  $dV$  - objętość początkowa elementu poddanej deformacji.

6. Pochodna materialna jakobianu  $J = |\mathcal{J}_j \mathcal{V}_i^l| = \left| \frac{\partial \mathcal{V}_i^l}{\partial x_j} \right|$

$$J^* = J \mathcal{J}_k \mathcal{V}_k^l = J \operatorname{div} \mathcal{V}^l. \quad (102)$$

Jakobian jest stosunkiem zmiany objętości elementu odkształconego  $dV = \varepsilon_{ijk} dx_i \delta x_j \Delta x_k$  do elementu objętości (prostopadłościanu) początkowego  $dV_0 = \varepsilon_{pqr} da_p \delta a_q \Delta a_r$

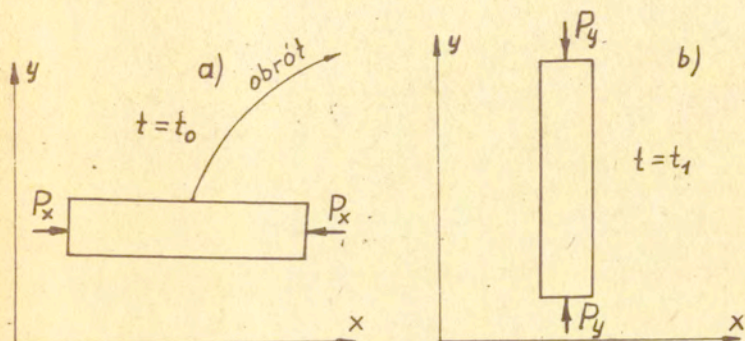
$$J = \frac{dV}{dV_0}.$$

## 2.6. Zasada obiektywności

Równania konstytutywne (związki fizyczne) opisujące stan materiału (np. naprężenia lub odkształcenia) muszą być obiektywne, to znaczy nie mogą zależeć od obrotu i translacji układu współrzędnych oraz od czasu.

Związki fizyczne opisujące materiał są obiektywne, gdy wchodzą w nie pochodne konstytutywne. Dwóch obserwatorów ob-

serwujących rozciąganie sprężyny na stole obrotowym musi wiedzieć to samo, sztywność sprężyny nie może zależeć od obrotu stołu, a jedynie od jej własności i siły ściskania. Walec ściskany siłą  $P_x$  w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y$  (rys.15a), a obrócony o  $90^\circ$  (rys.15b) jest ściskany siłą  $P_y$ . Stan naprężenia w walcu nie uległ zmianie przez obrót, ale zmieniły się w nim oznaczenia naprężeń.



Rys. 15. Ściskanie walca i jego obrót

Układ prostokątny  $x_j, y_j$  do układu  $x'_i, y'_i$  transformuje się podobnie jak współrzędne punktu według równania

$$x'_i(x, t) = Q_{ij}(t) \cdot x_j(x, t) + b_i(t), \quad (103)$$

w którym  $Q_{ij}$  jest macierzą ortogonalną cosinusów kierunkowych (uwzględnia obrót),  $x$  jest współrzędną cząstki,  $b_i(t)$  jest translacją.

Różniczkując równanie (103) względem czasu, otrzymamy

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dQ_{ij}}{dt} x_j + Q_{ij} \frac{dx_j}{dt} + \frac{db_i}{dt},$$

następnie wprowadzając oznaczenia  $\frac{dx'_i}{dt} = v'_i, \frac{dx_j}{dt} = v_j$ ,

ostatecznie można napisać równanie

$$v_i' = Q_{ij}^{\cdot} x_j + Q_{ij} v_j^{\cdot} + b_i^{\cdot} . \quad (104)$$

Równanie (104) nie transformuje się jak wektor, bo występuję w nim dwa dodatkowe człony;  $Q_{ij}^{\cdot} x_j$ ,  $b_i^{\cdot}$ . Następnie różniczkując równanie (104) względem współrzędnej  $x_k'$ , otrzymamy gradient prędkości

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_k'} = Q_{ij}^{\cdot} \frac{\partial x_j}{\partial x_k'} + Q_{ij} \frac{\partial v_j^{\cdot}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_k'} ,$$

a po wprowadzeniu  $\frac{\partial x_j}{\partial x_k'} = Q_{kj}$ ,  $Q_{km} = \frac{\partial x_m}{\partial x_k'}$ ,  $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_k^j$ ,

ostatecznie otrzymamy gradient prędkości

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_k'} = Q_{ij}^{\cdot} Q_{kj} + Q_{ij} Q_{km} \frac{\partial v_j^{\cdot}}{\partial x_m} , \quad (105)$$

który nie jest obiektywny, bo nie transformuje się jak tensor (posiada człon dodatkowy  $Q_{ij}^{\cdot} Q_{kj}$ ).

Wektor w ruchu jest obiektywny, jeżeli transformuje się według wzoru

$$v_i'(x, t) = Q_{ij}(t) \cdot v_j^{\cdot}(x, t) . \quad (106)$$

Różniczkując równanie (106) względem współrzędnej  $x_i'$  w układzie obróconym otrzymamy

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = Q_{ij} \frac{\partial v_j^{\cdot}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'}$$

i wprowadzając  $\frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = Q_{ik}$ , otrzymamy równanie

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = Q_{ij} Q_{ik} \frac{\partial v_j^{\cdot}}{\partial x_k} , \quad (107)$$

które transformuje się jak tensor.

Tensor jest obiektywny, gdy transformuje się według wzoru

$$T_{ij}'(x, t) = Q_{ik}(t) \cdot Q_{jl} T_{kl}(x, t) . \quad (108)$$

Różniczkując równanie (108) względem czasu

$$\frac{dT'_{ij}}{dt} = Q_{ik} Q_{jl} \frac{dT_{kl}}{dt} + \dot{Q}_{ik} Q_{jl} T_{kl} + Q_{ik} \dot{Q}_{jl} T_{kl}$$

i podstawiając prawo transformacji  $\dot{Q}_{ik} = Q_{pk} \omega_{ip} - Q_{im} \omega_{mk}$

$$\begin{aligned} \frac{dT'_{ij}}{dt} = & Q_{ik} Q_{jl} \frac{dT_{kl}}{dt} + Q_{pk} \omega_{ip} \cdot Q_{jl} T_{kl} - Q_{im} \omega_{mk} Q_{jl} T_{kl} + \\ & + Q_{ik} Q_{pl} \omega_{jp} T_{kl} - Q_{ik} Q_{jm} \omega_{ml} T_{kl} . \end{aligned}$$

Można teraz napisać, zamieniając indeksy nieme  $m \rightarrow k$ ,  $m \rightarrow l$ ,  $l \rightarrow s$ ,

$$\frac{dT'_{ij}}{dt} - T'_{ip} \omega_{jp} - T'_{pj} \omega_{ip} = Q_{ik} Q_{jl} \left( \frac{dT_{kl}}{dt} - T_{ks} \omega_{sl} - T_{sl} \omega_{ks} \right).$$

Wprowadzając oznaczenia jako pochodne materialne

$$\frac{DT_{ij}}{Dt} = \frac{dT_{ij}}{dt} - T'_{ip} \omega_{jp} - T'_{pj} \omega_{ip} ,$$

$$\frac{DT_{kl}}{Dt} = \frac{dT_{kl}}{dt} - T_{ks} \omega_{sl} - T_{sl} \omega_{ks} ,$$

otrzymamy ostatecznie pochodną, którą nazywa się strumieniem naprężenia (podany został przez Zarębę<sup>i</sup> Jaumana), jest on obiektywny

$$\frac{DT'_{ij}}{Dt} = Q_{ik} Q_{jl} \frac{DT_{kl}}{Dt} . \quad (109)$$

Strumień naprężenia Jaumana jest obiektywny

$$\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^s - \sigma'_{ip} \mathcal{V}_{[j,P]} - \sigma'_{jp} \mathcal{V}_{[i,P]} . \quad (110)$$

Jeżeli weźmiemy prędkość odkształcenia

$$\dot{\xi}_{kl} = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{k,1} + \mathcal{V}_{1,k}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_k} \right) = \mathcal{V}_{(k,1)} \quad (111)$$

i podstawiając do niej zależność (105), otrzymamy wyrażenie

$$\dot{\xi}_{kl} = Q_{km} Q_{ln} \dot{\xi}_{mn} + \frac{1}{2} (Q_{km} \dot{Q}_{lm} + Q_{lm} \dot{Q}_{km}),$$

które po wykorzystaniu warunku ortogonalności

$$Q_{km} \dot{Q}_{lm} = - Q_{km} \dot{Q}_{lm},$$

przyjmuje w układzie obróconym postać

$$\dot{\xi}'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} \dot{\xi}_{mn}. \quad (112)$$

Prędkość odkształcenia (112) jest obiektywna, bo transformuje się jak tensor. Zwykła prędkość  $v^i$  nie jest obiektywna.

Jeżeli weźmiemy spin,  $\omega_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = v_{[k,l]}$ ,

to po wykonaniu podstawienia (równania 105), otrzymamy równanie spinu

$$\omega_{kl} = Q_{ki} Q_{lj} \omega_{ij} + \frac{1}{2} (Q_{ki} \dot{Q}_{li} - Q_{li} \dot{Q}_{ki})$$

lub po wykorzystaniu warunku ortogonalności

$$\omega_{kl} = Q_{ki} Q_{lj} \omega_{ij} + \dot{Q}_{ki} Q_{li}. \quad (113)$$

Równanie (113) nie transformuje się tensorowo, bo posiada dodatkowy człon  $\dot{Q}_{ki} Q_{li}$ .

Gradient odkształcenia jest równy sumie części symetrycznej i niesymetrycznej gradientu odkształcenia

$$\xi_{m,k} = \xi_{(m,k)} + \omega_{[m,k]}$$

lub inaczej pisząc

$$u_{m,k} = u_{(m,k)} + u_{[m,k]},$$

który po rozpisaniu przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right). \quad (114)$$

## 2.7. Twierdzenie całkowe

Jeśli na objętość  $V$  ograniczoną powierzchnią  $S$  działa pole tensorowe  $T_{jk\dots r}$ , a na element tej objętości  $dV$  dzia-

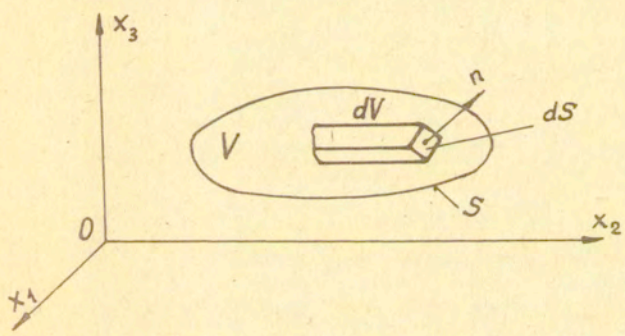
ła gradient tego pola tensorowego  $\partial_i T_{jk\dots r}$ , (iloczyn jest siłą jednostkową), to siłę działającą na całą objętość  $V$ ,  $\int_V \partial_i T_{jk\dots r} dV$ , można zamienić na siłę działającą na powierzchnię  $S$ ,  $\int_S n_i T_{jk\dots r} dS$ , według równania

$$\int_V \partial_i T_{jk\dots r} dV = \int_S n_i T_{jk\dots r} dS. \quad (115)$$

W równaniu (115)  $T_{jk\dots r}$  jest funkcją różniczkowalną,  $n_i$  jest wektorem normalnym do powierzchni,  $\partial_i$  jest symbolem różniczkowania po współrzędnych  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

np. 
$$\frac{\partial T_{jk\dots r}}{\partial x_i} = \partial_i T_{jk\dots r}.$$

Równanie (115) jest równaniem zamiany całki objętościowej (potrójnej) na całkę powierzchniową (podwójną) i nazywa się twierdzeniem Gaussa.



Rys. 16. Ilustracja zamiany całki objętościowej na powierzchniową

Gdy przyjmiemy, że funkcja  $T_{jk\dots r} = \mathcal{U}_i$  (wektor — ruch płaski), to wówczas równanie (115) będzie miało postać

$$\int_V \text{div } \mathcal{U}_i dV = \int_S n_i \mathcal{U}_i dS, \quad (116)$$

gdzie  $\text{div } \mathcal{V}_i^g$  jest dywergencją wektora  $\mathcal{V}_i^g$  ( $\text{div } \mathcal{V}_i^g = \partial_i \mathcal{V}_i^g = \frac{\partial \mathcal{V}_i^g}{\partial x_i} = \mathcal{V}_{i,i}^g$ ).

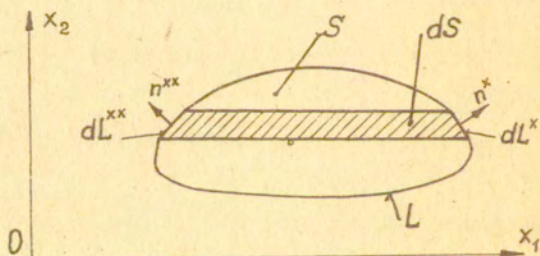
Jeśli założymy, że  $T_{jk} \dots r = \varphi_p$  przedstawia współrzędne wektora, to równanie (115) będzie miało postać

$$\int_V \text{grad } \varphi_p \, dV = \int_S n_i \varphi_p \, dS, \quad (117)$$

gdzie  $\text{grad } \varphi_p = \partial_i \varphi_p = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} = \varphi_{p,i}$ .

W płaskim stanie mamy powierzchnię  $S$  ograniczoną linią  $L$  i wówczas mamy zamianę całki powierzchniowej na liniową

$$\int_S \partial_i T_{jk} \dots r \, dS = \int_L n_i T_{jk} \dots r \, dL. \quad (118)$$



Rys. 17. Ilustracja zamiany całki powierzchniowej na całkę liniową



### 3. Podstawy rachunku macierzowego

Rachunek macierzowy znajduje zastosowanie przy rozwiązywaniu złożonych układów mechanicznych, przy obliczaniu zagadnień teorii sprężystości i plastyczności. Przy pomocy rachunku macierzowego można prosto i zwięźle zapisać złożony stan naprężenia i odkształcenia, a ponadto zapis macierzowy jest bardzo dogodny przy układaniu programów na maszyny cyfrowe.

#### 3.1. Definicja i rodzaje macierzy

Macierzą nazywamy zbiór  $m \times n$  wielkości uporządkowanych w prostokątną tablicę, mającą  $m$  wierszy i  $n$  kolumn, co można zapisać następująco:

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (119)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, m$  jest numerem wiersza,  $j = 1, 2, \dots, n$  jest numerem kolumny. Poszczególne wielkości  $a_{ij}$  (bez nawiasów) noszą nazwę elementów (wyrazów) macierzy. Mówi się, że macierz (119) jest stopnia ( $m \times n$ ). Jeśli liczba wierszy  $m$  i kolumn  $n$  jest jednakowa, to taka macierz nazywa się macierzą kwadratową. W macierzy można wyróżnić linię, którą tworzą elementy o jednakowych wskaźnikach  $a_{ii}$  (rów. 119).

Gdy elementy macierzy kwadratowej względem głównej przekątnej  $a_{ii}$  są sobie równe, tzn.  $a_{ij} = a_{ji}$ , to taka macierz nazywa się macierzą symetryczną. Jeśli natomiast elementy ma-

cierzy kwadratowej względem głównej przekątnej są równe co do wartości, ale mają przeciwny znak, co można zapisać  $a_{ij} = -a_{ji}$ , to taką macierz nazywamy macierzą antysymetryczną.

Macierz kwadratowa, mająca same zera poza główną przekątną (elementy  $a_{ii}$ ) nazywa się macierzą diagonalną ( $[a_{ij}] = [a_j]$ ). Jeśli elementy macierzy diagonalnej są sobie równe ( $a_{ii} = a$ ), to taka macierz nazywa się macierzą skalarną ( $[a \delta_{ij}]$ ), gdy natomiast elementy macierzy diagonalnej są równe jedności, to taka macierz nazywa się macierzą jednostkową ( $I = [\delta_{ij}]$ ) oznaczoną symbolem I.

W rachunku macierzowym stosowana jest często macierz kolumnowa, macierz wierszowa i macierz transponowana.

Macierz kolumnową, inaczej nazywaną wektorem kolumnowym, można zapisać następująco:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \{x_i\} \quad (120)$$

Macierz (120) ma tylko jedną kolumnę, a więc jest stopnia  $(n \times 1)$ . Wektor kolumnowy musi mieć tyle wierszy, ile kolumn ma macierz. Dla ułatwienia identyfikacji macierz kolumnowa oznaczona jest nawiasem sześciennym zamiast nawiasem klamrowym (120).

Macierz wierszowa, inaczej wektor wierszowy, ma tylko jeden wiersz i jest stopnia  $(1 \times n)$ . Macierz wierszową można zapisać w postaci

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [x_i] \quad (121)$$

Macierz transponowana  $[A]^T$  jest to macierz powstała z macierzy  $[A]$  przez zamianę wierszy na kolumny i odwrotnie — kolumny na wiersze. Matematycznie można ją zapisać

$$[A]^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = [A]. \quad (122)$$

Na przykład:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ to } [A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Macierz transponowana względem macierzy kolumnowej jest macierzą wierszową i odwrotnie.

Aby odróżnić wyznacznik od macierzy, należy podać definicję wyznacznika. Wyznacznikiem nazywamy tablicę kwadratową utworzoną z  $n^2$  liczb  $a_{ij}$ , rozmieszczonych w  $n$  wierszach i w  $n$  kolumnach.

Wyznacznik oznacza się przez  $|a_{ij}|$  lub  $|A| = \det |A| = \det |a_{ij}|$ . Rozwiązaniem wyznacznika (metoda Sarrusa) jest liczba, a macierz jest tablicą.

### 3.2. Zapisywanie równań w postaci macierzowej

Układ równań liniowych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \quad (123a)$$

macierzowo można zapisać

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (123b)$$

gdzie  $[A]$  jest macierzą współczynników przy niewiadomych,  $\{x\}$  jest macierzą kolumnową,  $\{b\}$  jest również macierzą kolumnową, ale po prawej stronie równania macierzowego. Równanie (123b) można zapisać

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (123c)$$

Mnożenie macierzy  $[A]$  przez wektor kolumnowy  $\{x\}$  odbywa się w

ten sposób, że wszystkie elementy wektora kolumnowego  $\{x\}$  mnożone są przez odpowiednie elementy wiersza macierzy  $[A]$ , iloczyn ten jest równy odpowiedniemu elementowi wektora kolumnowego  $\{b\}$  po prawej stronie równania macierzowego. Wektor kolumnowy, przez który mnożymy macierz, musi mieć tyle wierszy ile kolumn ma macierz.

Praca obliczana jest jako suma iloczynów sił  $P_i$  przez odpowiadające im przemieszczenia  $\delta_i$

$$L = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = [P_i] \{\delta_i\} \equiv \{P_i\}^T \{\delta_i\} \equiv \{P_i\} \{\delta_i\}^T, \quad (124a)$$

natomiast przyrost pracy wykonanej na odkształceniach plastycznych można zapisać w postaci

$$dL^P = \sigma_1 d\varepsilon_1^P + \sigma_2 d\varepsilon_2^P + \dots = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^P\}, \quad (124b)$$

gdzie  $\{\sigma\}^T = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n]$ ,  $\{d\varepsilon^P\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$  jest odkształceniem wynikającym ze stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa  $f(\sigma_{ij})=0$  wyrażony w formie różniczkowej

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} d\sigma_n = 0 \quad (125a)$$

można zapisać przy pomocy rachunku macierzowego

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = 0. \quad (125b)$$

Podobnie można zapisać warunek plastyczności dla materiału umacniającego się  $f(\sigma_{ij}, \alpha) = 0$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + A d\alpha = 0, \quad (126)$$

gdzie  $A = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha$ . Przyrost parametru wzmocnienia  $d\alpha$ , który jest przyrostem pracy odkształcenia plastycznego (zmiana położenie powierzchni płynięcia), można zapisać następująco:

$$d\sigma = \bar{\sigma}_1 d\varepsilon_1^p + \bar{\sigma}_2 d\varepsilon_2^p + \dots = \{\bar{\sigma}\}^T \{d\varepsilon^p\}. \quad (127)$$

Równania odkształceń Cauchy'ego dla stanu płaskiego

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

macierzowo można zapisać

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (128a)$$

lub symbolicznie

$$\{\varepsilon\} = [N] \{u\}. \quad (128b)$$

Uogólnione związki Hooke'a ( $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, \nu)$ ) macierzowo można zapisać

$$\{\varepsilon\} = [D^s]^{-1} \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (129)$$

lub w postaci odwrotnej ( $\sigma = \sigma(\varepsilon, \nu)$ )

$$\{\sigma\} = [D^s] \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (130a)$$

sym.

gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Z równania (130a) bezpośrednio otrzymujemy związki fizyczne dla przestrzennego stanu naprężenia

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \\ \tau_{xy} &= G\delta_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G\delta_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G\delta_{zx}.\end{aligned}\tag{130b}$$

Dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , macierz sprężysta  $[D^s]$  przybiera postać

$$[D^s] = \frac{2G}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.\tag{131}$$

### 3.3. Działania na macierzach

#### 1. Równość macierzy

Dwie macierze  $[A] = [a_{ij}]_{(m \times n)}$  i  $[B] = [b_{ij}]_{(k \times l)}$  są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam stopień i gdy ich wszystkie odpowiadające sobie elementy są równe. Równość macierzy można napisać

$$[A] = [B], \text{ jeśli } m = k, n = l \text{ oraz } a_{ij} = b_{ij}.$$

#### 2. Dodawanie macierzy

Dodawać można macierze tylko tego samego stopnia. Sumą dwóch macierzy  $[A]$  i  $[B]$  jest macierz  $[C] = [c_{ij}]$ , której elementy są utworzone zgodnie z zależnością  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ; to znaczy  $[C] = [A] + [B]$ , jeśli  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Na przykład:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + (-6) & 1 + 3 \\ 7 + 2 & 3 + (-1) \\ (-2) + 4 & (-1) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dodawanie macierzy jest przemienne.

### 3. Mnożenie macierzy przez skalar

Macierz  $[A]$  mnożymy przez skalar  $\lambda$  w ten sposób, że każdy wyraz  $a_{ij}$  macierzy  $[A]$  mnożymy przez ten skalar. Wynikiem mnożenia jest macierz  $[B]$  o elementach  $b_{ij}$ . Mnożenie macierzy przez skalar jest przemienne i możemy zapisać w postaci

$$[B] = \lambda [A], \text{ jeśli } b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Na przykład:

$$4 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 5 & 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 7 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 28 & 12 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

### 4. Mnożenie dwóch macierzy

Mnożąc macierz  $[A] = [a_{ij}]_{(m \times n)}$  przez macierz  $[B] = [b_{jk}]_{(n \times p)}$  otrzymujemy macierz  $[C] = [c_{ik}]_{(m \times p)}$ . Elementy macierzy  $[C]$  są utworzone zgodnie z zależnością  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ .

Mnożyć można tylko macierze o różnych stopniach, to znaczy takie, których ilość wierszy  $m$  macierzy  $[A]$  musi równać się ilości kolumn  $p$  macierzy  $[B]$ . Mnożenie macierzy można zapisać następująco:

$$[C] = [A] \cdot [B], \text{ jeśli } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}.$$

Na przykład macierz  $[A]$  jest stopnia  $(2 \times 3)$ , a macierz  $[B]$  jest stopnia  $(3 \times 2)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-8) + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-11) \\ 4 \cdot (-7) + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-8) + 5 \cdot 10 + 6 \cdot (-11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -21 \\ 17 & -48 \end{bmatrix}$$

Uwagi:

1. Mnożenie macierzy prostokątnych nie jest wykonalne.
2. Mnożenie macierzy nie jest przemienne.
3. Wynikiem mnożenia dwóch macierzy różnych od zera, może być macierz zerowa.
4. Wynikiem mnożenia dowolnej macierzy  $[A]$  lewostronnie lub prawostronnie przez macierz jednostkową  $[I]$  jest ta sama macierz  $[A]$ .

#### 5. Macierz odwrotna

Dla macierzy kwadratowej

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

macierz odwrotną będzie macierz

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix},$$

gdzie  $|A|$  jest wartością wyznacznika tablicy macierzy  $[A]$ .

Mnożąc macierz  $[A]$  przez macierz odwrotną  $[A]^{-1}$ , otrzymujemy macierz jednostkową,  $[A] \cdot [A]^{-1} = [I]$ .

Na przykład:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-1} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{-3}{-1} & \frac{1}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$



Literatura do dodatku

1. Y.Fung. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa, 1969.
2. Praca zespołowa pod red. W.Olszaka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
3. T.Trajdos - Wróbel. Matematyka dla inżynierów. WNT, Warszawa, 1966.
4. В.Прагер. Введение в механику сплошных сред. Москва, 1963.
5. T.Trajdos - Wróbel. Algebra. Wyznaczniki, macierze, liczby zespolone. Skrypt PW, 1970.