XXXII.

DREI VORLESUNGEN ÜBER NEUERE FORTSCHRITTE DER MATHEMATISCHEN PHYSIK (*)

gehalten im September 1909 an der Clark–University
„Archiv der Mathematik und Physik", III R., Bd. XXII, 1914, pp. 97-181.

VORREDE.

Die folgenden drei Vorlesungen sind in Worcester, Mass., bei Gelegenheit der Feier des zwanzigsten Jahrestags der Gründung der Clark-Universität gehalten worden.

Ich spreche dem Lehrkörper der Clark–Universität meinen vollen Dank für die Ehre aus, die man mir durch die Aufforderung erwiesen hat, vor den bei dieser Gelegenheit versammelten Mathematikern und Physikern einige Fragen der mathematischen Physik zu behandeln.

Bei diesen Vorlesungen habe ich nur die Entwicklung einiger Grundgedanken der mathematischen Physik im Auge gehabt und nur einzelne Punkte näher ausgeführt, die meine eigenen Untersuchungen betreffen. Die interessanten Vorlesungen des Herrn WEBSTER über mathematische Physik an der Clark-Universisät enthoben mich der Notwendigkeit, allgemeine Sätze zu wiederholen, die er in systematischer Weise in seinen Vorlesungen gegeben hat.

Ich drücke Herrn Dr. ERNST LAMLA meinen herzlichsten Dank aus für die Sorgfalt und den Eifer, mit welchem er an der Übersetzung meines Werkes gearbeitet hat (**).

(*) È questa la traduzione di *Trois leçons sur quelques progrès récents de la Physique mathématique* in *Lectures delivered at the celebration of the twentieth Anniversary of the Foundation of Clark-University*, Worcester, Mass., September 7–11, 1909, «Clark–University», 1912, pp. 1-82. — In luogo del testo originale si pubblica questa traduzione, perché l'Autore vi ha introdotto qualche aggiunta. [N. d. R.].

(**) VORWORT DES ÜBERSETZERS. Die vorliegende deutsche Ausgabe ist gegenüber der amerikanischen (Clark-University 1912) durch eine Reihe von Zusätzen des Verfassers vermehrt worden. Dadurch ist der Wert der Vorlesungen wesentlich erhöht worden, der vor allen Dingen darin liegt, dass sie eine grössere Reihe von Problemen der modernen mathematischen Physik klar und knapp zeichnen, die Lösungsmethoden, soweit sie bekannt sind, andeuten und darüber hinaus zu neuen Forschungen anregen. — An einigen wenigen Stellen sind für die deutsche Ausgabe mit Genehmigung des Verfassers einige nicht wesentliche Änderungen vorgenommen worden. ERNST LAMLA.

INHALT

Erste Vorlesung.

Zweite Vorlesung.

Dritte Vorlesung.

Erste Vorlesung.

1. Analysis und mathematische Physik.

Fragt man einen Mathematiker, ob er einen Unterschied mache zwischen der Elastizitätstheorie und der elektrodynamischen Theorie, so wird er die Frage verneinen; denn die Art der Differentialgleichungen, denen er begegnet, und die Methoden zur Lösung der sich darbietenden Probleme, stimmen in beiden Fällen genau überein.

Andrerseits hat die Übereinstimmung der analytischen Beziehungen auf einfache und natürliche Weise zu einem Übergang von der Theorie der Elastizität zur elektromagnetischen Lichttheorie geführt, und diese hat nach sehr vielem Hin- und Hertasten für den Fall bewegter Körper die klassische Form angenommen, die LORENTZ ihr gegeben hat.

Ich zögere nicht, diese ganz und gar moderne Geistesbewegung mit dem philosophischen Geist in Zusammenhang zu bringen, der aus dem grossen Werk von LAGRANGE erstanden ist.

LAGRANGE hat die Mechanik auf eine einzige Formel zurückgeführt. Ebenso haben die Schöpfer der hauptsächlichsten Theorien der mathematischen Physik, z. B. FOURIER, die verschiedenen Phänomene als abhängig dargestellt von einer gewissen Zahl von Hauptgleichungen, die alle möglichen Fälle umfassen, und sie haben die meisten Schwierigkeiten auf analytische Schwierigkeiten zurückgeführt.

So haben in der Tat, wie schon so oft wiederholt worden ist, die Wurzeln für die grössten Entdeckungen der Analysis in Problemen der Naturwissenschaften gelegen. Zugleich kann man sagen, dass jede Vervollkommnung der analytischen Methoden zum Fortschritt der mathematischen Physik beigetragen hat.

Manche Köpfe haben das Bedürfnis, bei jeder analytischen Untersuchung durch eine Interpretation unterstützt zu werden, die den Inhalt ihres Denkens mit konkreten Erscheinungen verknüpft. Und andrerseits, wie viele Ergebnisse, die die blosse Rechnung unbewusst und mechanisch gewonnen hat, und die, vom algebraischen Standpunkte aus betrachtet, uns so gut wie gar nichts sagen, gewinnen plötzlich grosses Interesse und ungeahnte Bedeutung, sobald man ihnen eine physikalische Deutung gibt!

2. Zusammenhang zwischen der Maxwellschen Theorie und der Variationsrechnung.

Es dürfte nicht nötig sein, Beispiele anzuführen, um die allbekannte Wahrheit zu beweisen, die ich soeben ausgesprochen habe; aber ich kann nicht umhin, einen typischen Fall auseinanderzusetzen, der uns zur Einführung sehr nützlich sein und uns zugleich zur Betrachtung der Variationsrechnung führen wird, von der wir in dieser Vorlesung zu sprechen haben werden.

Wir werden sehen, dass ein grundlegender Gedanke und eine berühmte Theorie MAXWELLS in dem Ausdruck für die Variation eines dreifachen Integrals enthalten sind; man muss nur gelernt haben, aus dieser elementaren Formel alles herauszulesen, was in ihr verborgen steckt.

Ich berechne die Variation des dreifachen Integrals

$$(1)\qquad P = \int\limits_S F\left(V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}, x_1, x_2, x_3\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

wobei x_1, x_2, x_3 die kartesischen Koordinaten sind und V eine Funktion von x_1, x_2, x_3 bedeutet. Ich setze voraus, dass sich erstens die Funktion V unendlich wenig ändert, und dass sich zweitens der Raum S, der von der Fläche σ begrenzt wird, unendlich wenig verschiebt und deformiert.

Um diese Variation zu berechnen, genügt es, nach dem von LAGRANGE in der Hydrodynamik gegebenen Vorbild jeden einzelnen materiellen Punkt durch Parameter, die unabhängig sind von der Deformation, zu kennzeichnen. Diese Parameter seien u_1, u_2, u_3. Setzt man

$$D = \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{d(V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D}\cdot\frac{d(V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{d(V, x_3, x_1)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D}\cdot\frac{d(V, x_3, x_1)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_3 = \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{d(V, x_1, x_2)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D}\cdot\frac{d(V, x_1, x_2)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

so erhält man, da ja $dS = dx_1\, dx_2\, dx_3 = D\, du_1\, du_2\, du_3$ ist,

$$P = \int\limits_S F(V, V_1, V_2, V_3, x_1, x_2, x_3)\, D\, du_1\, du_2\, du_3\,,$$

und folglich

$$\delta P = \int\limits_S \left\{\frac{\partial F}{\partial V}\delta V + \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\delta V_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + F\cdot\frac{\delta D}{D}\right\} D\, du_1\, du_2\, du_3\,.$$

Nun ist $\delta D = \left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}\right)\cdot D$;

$$\delta V_1 = \frac{1}{D}\frac{d(\delta V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \frac{1}{D}\cdot\frac{d(V, \delta x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \frac{1}{D}\frac{d(V, x_2, \delta x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} - \frac{1}{D^2}\cdot\frac{d(V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)}\cdot\delta D$$

$$= \frac{d(\delta V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} + \frac{d(V, \delta x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} + \frac{d(V, x_2, \delta x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} - \frac{\delta D}{D}\cdot\frac{d(V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)}$$

$$= \frac{\partial\delta V}{\partial x_1} + \frac{d(V, \delta x_2)}{d(x_1, x_2)} + \frac{d(V, \delta x_3)}{d(x_1, x_3)} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{\delta D}{D} =$$

$$=\frac{\partial\delta V}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2}-\frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}-\frac{\partial V}{\partial x_3'}\cdot\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_1}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}\right);$$

da nun $\partial V/\partial x_1 = V_1$ usf., so wird

$$\delta V_1=\frac{\partial\delta V}{\partial x_1}-V_1\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1}-V_2\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_1}-V_3\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_1},$$

$$\delta V_1=\frac{\partial\delta V}{\partial x_1}-\sum_{\varkappa=1}^{3}V_\varkappa\cdot\frac{\partial\delta x_\varkappa}{\partial x_1},$$

und allgemein

$$\delta V_\lambda=\frac{\partial\delta V}{\partial x_\lambda}-\sum_\varkappa V_\varkappa\cdot\frac{\partial\delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda}.$$

Durch Einsetzen erhält man nun

$$\delta P=\int_S\left\{\frac{\partial F}{\partial V}\delta V+\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\cdot\frac{\partial\delta V}{\partial x_\lambda}-\sum_\lambda\sum_\varkappa\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}V_\varkappa\frac{\partial\delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda}\right.$$

$$\left.+\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda+F\cdot\sum_\lambda\frac{\partial\delta x_\lambda}{\partial x_\lambda}\right\}dS.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_S\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\cdot\frac{\partial\delta V}{\partial x_\lambda}dS=-\int_\sigma\delta V\cdot\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\cos(n, x_\lambda)\,d\sigma$$

$$-\int_S\delta V\cdot\sum_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\right)\cdot dS.$$

Hierbei ist n innere Normale der den Raum S begrenzenden Fläche σ. Hiernach ergibt sich

$$\delta P=\int_S\left\{\frac{\partial F}{\partial V}-\sum_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\right)\right\}\delta V\cdot dS-\int_\sigma\delta V\cdot\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\cos(n, x_\lambda)\,d\sigma$$

$$+\int_S\left\{\sum_\lambda\frac{\partial F}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda-\sum_\varkappa\sum_\lambda V_\varkappa\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\frac{\partial\delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda}+F\cdot\sum_\lambda\frac{\partial\delta x_\lambda}{\partial x_\lambda}\right\}dS.$$

An Stelle der Verrückungen $\delta x_1, \cdots$ sollen jetzt die Komponenten der Rotation jedes Teilchens des Mediums

$$p_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_3}\right),\quad p_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_1}\right),\quad p_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_2}\right)$$

und die Deformationsgrössen eingeführt werden:

$$\gamma_{11}=\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1},\quad \gamma_{22}=\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2},\quad \gamma_{33}=\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{23}=\frac{\partial\delta x_3}{\delta x_2}+\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_3},\quad \gamma_{31}=\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_1},\quad \gamma_{12}=\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_2}.$$

Durch Einführung dieser Grössen kann man die Doppelsumme

$$R = -\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} V_{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial V_{\lambda}} \frac{\partial \delta x_{\varkappa}}{\partial x_{\lambda}}$$

in Ausdruck für δP umformen. Man kann R in drei einfache Summen zerlegen, in denen bzw. $\lambda - \varkappa = 0, 1$ oder -1 ist. Es wird (wenn $x_4 = x_1$ ist usf.)

$$R = -\sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha+2} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+1}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} - \sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha+1} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+2}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}} \cdot$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} - \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}}\right) = p_{\alpha},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} + \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1\,\alpha+2},$$

daher

$$R = -\sum_{\alpha} V_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha}} \gamma_{\alpha\alpha} - \sum_{\alpha} \Big\{ V_{\alpha+2} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1,\alpha+2} + p_{\alpha}\right)$$

$$+ V_{\alpha+1} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+2}} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1,\alpha+2} - p_{\alpha}\right)\Big\}.$$

Führt man jetzt die Abkürzungen ein

$$M_1 = \frac{\partial F}{\partial V_3} V_2 - \frac{\partial F}{\partial V_2} V_3,$$

$$M_2 = \frac{\partial F}{\partial V_1} V_3 - \frac{\partial F}{\partial V_3} V_1,$$

$$M_3 = \frac{\partial F}{\partial V_2} V_1 - \frac{\partial F}{\partial V_1} V_2;$$

$$t_{11} = F - V_1 \frac{\partial F}{\partial V_1} \quad ; \quad t_{23} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_3} V_2 + \frac{\partial F}{\partial V_2} V_3\right),$$

$$t_{22} = F - V_2 \frac{\partial F}{\partial V_2} \quad ; \quad t_{31} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_1} V_3 + \frac{\partial F}{\partial V_2} V_1\right),$$

$$t_{33} = F - V_3 \frac{\partial F}{\partial V_3} \quad ; \quad t_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_2} V_1 + \frac{\partial F}{\partial V_1} V_2\right),$$

so wird

$$R = \sum_{\lambda} \{(t_{\lambda\lambda} - F)\gamma_{\lambda\lambda} + t_{\lambda,\lambda+1}\gamma_{\lambda,\lambda+1} + M_{\lambda} p_{\lambda}\}.$$

Setzt man endlich noch

$$W_1 = \frac{\partial F}{\partial V} - \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\lambda}}\right),$$

$$W_2 = \Sigma \frac{\partial F}{\partial x_{\lambda}} \cos(n, x),$$

$$X_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3},$$

so nimmt δP die Gestalt an:

$$\delta P = \int_S W_1\, \delta V\, dS - \int_\sigma W_2\, \delta V\, d\sigma$$

$$+ \int_S \sum_\lambda \{X_\lambda\, \delta x_\lambda + M_\lambda\, p_\lambda + t_{\lambda\lambda}\, \gamma_{\lambda\lambda} + t_{\lambda,\lambda+1}\, \gamma_{\lambda,\lambda+1}\}\, dS.$$

$$\delta P = A_1 + A_2 + A_3,$$

wo

$$A_1 = \int_S W_1\, \delta V\, \delta S - \int_\sigma W_2\, \delta V\, d\sigma,$$

$$A_2 = \int_S (X_1\, \delta x_1 + X_2\, \delta x_2 + X_3\, \delta x_3 + M_1\, p_1 + M_2\, p_2 + M_3\, p_3)\, dS,$$

$$A_3 = \int_S (t_{11}\, \gamma_{11} + t_{22}\, \gamma_{22} + t_{33}\, \gamma_{33} + t_{23}\, \gamma_{13} + t_{31}\, \gamma_{31} + t_{12}\, \gamma_{12})\, dS.$$

Die durchgeführte Rechnung ist eine der elementaren Operationen der Variationsrechnung.

In Worten lässt sich die gewonnene Formel folgendermassen ausprechen: Die Variation des dreifachen Integrals kann als Summe von drei Ausdrücken angesehen werden. Der erste (A_1) hängt von der Variation der Funktion V ab; den zweiten (A_2) kann man deuten als Arbeit, die bei der Verschiebung und Drehung der Teilchen des Mediums geleistet wird; der dritte Ausdruck (A_3) endlich kann als Arbeit gedeutet werden, die zur Deformation des Mediums selbst verwandt wird.

Jedesmal, wenn A_1 und A_2 null sind, kann δP der Arbeit elastischer Kräfte gleichgesetzt werden, und daher charakterisiert die Gesamtheit der Grössen $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ den Spannungszustand.

Nehmen wir nun an, dass P die Energie NEWTONscher Kräfte ist, z. B. die elektrostatische Energie eines Mediums, so verschwinden A_1 und A_2. Es genügt hierfür, P durch den wohl bekannten Ausdruck zu ersetzen

$$\int_S V\rho\, dS - \frac{1}{8\pi} \int_S (\mathrm{grad}\ V)^2\, dS,$$

wo V das Potential und ρ die Dichte der Massenverteilung bezeichnet. Berechnet man die Spannung, so findet man die MAXWELLschen Spannungen, d. h.

$$t_{11} = \frac{1}{8\pi} (\mathrm{grad}\ V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \quad t_{23} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$t_{22} = \frac{1}{8\pi} (\mathrm{grad}\ V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2, \quad t_{31} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$t_{33} = \frac{1}{8\pi} (\mathrm{grad}\ V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \quad t_{12} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Die Formel (1) ist weit allgemeiner und umfasst, wie man leicht sieht, auch andere Theorien, von denen die MAXWELLsche nur ein besonderer Fall ist [1].

Indes will ich diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen; denn gar viele Probleme haben wir noch zu besprechen, bei denen die Variationsrechunng eine grosse Rolle spielen wird. Ich habe die vorstehenden Fragen nur berührt, um eine, wie mir scheint, sehr lehrreiche Nutzanwendung der Gedanken zu geben, die ich oben in allgemeiner Form ausgesprochen habe.

3. Herleitung der elektrodynamischen Gleichungen aus der Variationsrechnung.

Ich habe soeben von den Methoden der Mechanik gesprochen. Sehr viele Fortschritte in diesem grundlegenden Zweig der mathematischen Physik verdanken wir HAMILTON. Ich brauche nur daran zu erinnern, dass sich jede Frage der Mechanik, sobald nur ein Potential vorhanden ist, durch das HAMILTONsche Prinzip auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückführen lässt. Zwei Prinzipien gehen daraus hervor: das Prinzip der stationären Wirkung und das Prinzip der variierenden Wirkung [2]. Es erscheint überflüssig, noch ausdrücklich auf die bedeutsame Rolle hinzuweisen, die das zweite Prinzip bei allen folgenden Untersuchungen gespielt hat. Das Genie eines Mathematikers wie JACOBI hat hier Spuren hinterlassen, die niemals wieder untergehen werden können.

Auch die Gleichungen für das elastische Gleichgewicht können auf eine Minimumaufgabe zurückgeführt werden, wenn man der zuerst von GREEN angewandten Methode folgt. Ebenso kann die Theorie der Schwingungen elastischer Körper in das Gebiet der Variationsrechnung hinübergespielt werden, wenn man das Potential der elastischen Kräfte und die lebendige Kraft der Schwingungsbewegung ins Auge fasst.

Ich werde jetzt auf dieselbe Frage für den Fall der Elektrodynamik näher eingehen.

Es gibt wohl bekannte Untersuchungen hierüber, und es gibt klassische Vorlesungen und Abhandlungen (ich will hier nur die von BOLTZMANN erwähnen), wo diese Ableitung vorgenommen worden ist. In gewissen besonderen Fällen ergibt sich die Herleitung fast unmittelbar. Worauf ich besonders hinweisen möchte, ist die Tatsache, dass man im allgemeinen Fall (ich nehme an, dass das Medium in Ruhe ist) auf unendlich viele Arten zum Ziel gelangen kann, d. h., dass eine grosse Freiheit in der Wahl der Pro-

(1) Vgl. MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*. 1ère partie, chap. 5; 4ème partie, chap. 11. Siehe auch E. BELTRAMI, *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche*. « Rend. del R. Istituto Lombardo » (2) 17, 581. 1884.

(2) Vgl. z. B. *Handbuch der theoretischen Physik* von W. THOMSON und P. G. TAIT. Übers. von H. HELMHOLTZ und G. WERTHEIM, Braunschweig 1874. Band I, erster Teil. §§ 318–320.

bleme der Variationsrechnung besteht, die zu den ins Auge gefassten allgemeinen Beziehungen führen. Später werde ich etwas ausführlicher auf die Anwendungen dieses Gedankens eingehen.

Ich beschränke mich darauf, einer der Wege aufzuzeigen, die man einschlagen kann (3). Wir setzen

$$\xi_r = \frac{d}{dt}\sum_s \varepsilon_{rs}\,\mathrm{X}_s - \frac{\partial \mathrm{L}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial \mathrm{L}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + 4\pi \sum_h \partial_{rh}\,\mathrm{X}_h\,,$$

$$\eta_r = \frac{d}{dt}\sum_s \mu_{rs}\,\mathrm{L}_s - \frac{\partial \mathrm{X}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial \mathrm{X}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\,,$$

$$u_r = \frac{d}{dt}\sum_s \varepsilon_{rs}\,\mathrm{Y}_s - \frac{\partial \mathrm{M}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial \mathrm{M}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - 4\pi \sum_h \partial_{rh}\,\mathrm{Y}_h\,,$$

$$v_r = \frac{d}{dt}\sum_s \mu_{rs}\,\mathrm{M}_s - \frac{\partial \mathrm{Y}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial \mathrm{Y}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\,,$$

wobei die Indices die Werte 1, 2, 3 annehmen können und die Koeffizienten ε_{rs}, μ_{rs}, ∂_{rs}, den Bedingungen genügen:

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} \quad , \quad \mu_{rs} = \mu_{sr} \quad , \quad \partial_{rs} = \partial_{sr}\,.$$

Man sehe nunmehr x_1, x_2, x_3 als kartesische Koordinaten der Punkte eines Raumes S an und betrachte die beiden Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathrm{S}} \sum_r (\xi_r\,\delta\mathrm{Y}_r + \eta_r\,\delta\mathrm{M}_r)\,d\mathrm{S}$$

und

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathrm{S}} \sum_r (\mathrm{X}_r\,\delta u_r + \mathrm{L}_r\,\delta v_r)\,d\mathrm{S}.$$

Die Differenz beider hängt, wie leicht zu zeigen ist, nur von den Werten der Funktionen X_r, Y_r, L_r, M_r an den Grenzen der Integrale ab. Es ist nämlich diese Differenz

$$\mathrm{D} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\mathrm{S} \sum_r (\xi_r\,d\mathrm{Y}_r + \mathrm{X}_r\,\delta u_r + \eta_r\,\delta\mathrm{M}_r + \mathrm{L}_r\,\delta v_r)\,.$$

Nun ist

$$\sum_r (\xi_r\,\delta\mathrm{Y}_r + \mathrm{X}_r\,\delta u_r)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\sum_r\sum_s \varepsilon_{rs}\,\mathrm{X}_s\,\delta\mathrm{Y}_r\Big) + \sum_r\Big(\frac{\partial \mathrm{L}_{r+1}}{\partial x_r}\,\delta\mathrm{Y}_{r+2} + \mathrm{X}_{r+2}\,\frac{\partial\delta \mathrm{M}_{r+1}}{\partial x_r}\Big)$$

$$-\sum_r\Big(\frac{\partial \mathrm{L}_{r+2}}{\partial x_r}\,\delta\mathrm{Y}_{r+1} + \mathrm{X}_{r+1}\,\frac{\partial\delta \mathrm{M}_{r+2}}{\partial x_r}\Big)$$

(3) V. Volterra, *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* « Rend. Acc. dei Lincei » (4) **7** (1. Sem.), 177, 1891. « Nuovo Cimento » (3) **29**, 147, 1891. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXI, pp. 496–501; XXXII, pp. 502–513].

und

$$\sum_r (\eta_r \,\delta \mathrm{M}_r + \mathrm{L}_r \,\delta v)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\sum_r \sum_s \mu_{rs}\, \mathrm{L}_s \,\delta \mathrm{M}_r\Big) + \sum_r \Big(\frac{\partial \mathrm{X}_{r+2}}{\partial x_r}\,\delta \mathrm{M}_{r+1} + \mathrm{L}_{r+1}\frac{\partial \delta \mathrm{Y}_{r+2}}{\partial x_n}\Big)$$

$$- \sum_r \Big(\frac{\partial \mathrm{X}_{r+1}}{\partial x_r}\,\delta \mathrm{M}_{r+2} + \mathrm{L}_{r+2}\frac{\partial \delta \mathrm{Y}_{r+1}}{\partial x_r}\Big).$$

Daher wird

$$\mathrm{D} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\mathrm{S} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\frac{d}{dt}\sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\, \mathrm{X}_r \,\delta \mathrm{Y}_r + \mu_{rs}\, \mathrm{L}_s \,\delta \mathrm{M}_r) \\ \displaystyle + \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}(\mathrm{L}_{r+1}\,\delta \mathrm{Y}_{r+2} - \mathrm{L}_{r+2}\,\delta \mathrm{Y}_{r+1} + \mathrm{X}_{r+2}\,\delta \mathrm{M}_{r+1} - \mathrm{X}_{r+1}\,\delta \mathrm{M}_{r+2}) \end{array} \right\}.$$

In der Tat erhält man nunmehr

$$\mathrm{D} = \Big[\int_{\mathrm{S}} d\mathrm{S} \sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\, \mathrm{X}_s \,\delta \mathrm{Y}_r + \mu_{rs}\, \mathrm{L}_s \,\delta \mathrm{M}_r)\Big]_{t=t_1}$$

$$- \Big[\int_{\mathrm{S}} d\mathrm{S} \sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\, \mathrm{X}_s \,\delta \mathrm{Y}_r + \mu_{rs}\, \mathrm{L}_s \,\delta \mathrm{M}_r)\Big]_{t=t_0}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_r \int_\sigma (\mathrm{L}_{r+1}\,\delta \mathrm{Y}_{r+2} - \mathrm{L}_{r+2}\,\delta \mathrm{Y}_{r+1} + \mathrm{X}_{r+2}\,\delta \mathrm{M}_{r+1} - \mathrm{X}_{r+1}\,\delta \mathrm{M}_{r+2}) \cos(nx_r)\, d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ ein Element der Grenzfläche des Raumes S, n die äussere Normale ist.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir nehmen an, dass

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

$$b = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, wobei $\alpha_{rs} = \alpha_{rs}$, $\beta_{rs} = \beta_{sr}$ $(s, r = 1, 2, 3)$ Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, und setzen

$$a_{rs} = \frac{\partial \log a}{\partial \alpha_{rs}} \quad , \quad b_{rs} = \frac{\partial \log b}{\partial \beta_{rs}},$$

$$\sum_s a_{rs}\, u_s = \mathrm{Z}_r \quad , \quad \sum_s b_{rs}\, v_s = \mathrm{N}_r.$$

Man erhält hieraus

$$\sum_r \sum_s \alpha_{\varkappa r}\, a_{rs}\, u_s = \sum_s \alpha_{\varkappa r}\, \mathrm{Z}_r;$$

da

$$\sum_r \alpha_{\varkappa r} a_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varkappa \neq s \\ 1, & \;\;,, \quad \varkappa = s, \end{cases}$$

so wird

$$u_s = \sum_r \alpha_{sr} Z_r$$

und daher

$$\sum_s \alpha_{rs} \delta Z_s = \delta u_r \quad ; \quad \sum_s \beta_{rs} \delta N_s = \delta v_r .$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left[\sum_r \sum_s (\alpha_{rs} X_r \delta Z_s + \beta_{rs} L_r \delta N_s) dS \right.$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (X_r \delta u_r + L_r \delta v_r)\, dS ,$$

so wird dieses nach dem eben bewiesenen Satz gleich dem Integral

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (\xi_r \delta Y_r + \eta_r \delta M_r)\, dS ,$$

vermehrt um Glieder, die von den Funktionswerten an den Integralgrenzen abhängen.

Diese Relation führt uns sofort auf die gesuchten Aufgaben der Variationsrechnung. Man braucht nämlich nur

$$Z_r = X_r \quad , \quad N_r = L_r$$

anzusetzen und findet daraus durch Nullsetzen der Variation von

$$P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\, dt \int_S \sum_r \sum_s (\alpha_{rs} X_r X_s + \beta_{rs} L_r L_s)\, dS$$

die Gleichungen

$$\xi_r = 0 \quad , \quad \eta_r = 0 ;$$

das sind aber die Gleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

Da die Grössen α_{rs} und β_{rs} völlig unbestimmt und willkürlich sind, ist es auf unendlich viele Arten möglich, die Gleichungen der Elektrodynamik auf ein Problem der Variationsrechnung zurückzuführen.

Ich muss noch hinzufügen, dass die Mittel, die ich hier besprochen habe, nicht die einzigen sind, die zum Ziele führen, sondern dass es auch noch andere gibt.

4. Die Bedeutung der im 3. Kapitel gegebenen Ableitungen und Folgerungen daraus.

In der Geschichte der Untersuchungen über die elektrodynamischen Gleichungen hat die oben beschriebene Zurückführung grosse Wichtigkeit erlangt; wir werden jetzt einige Anwendungen kennen lernen.

a) Zunächst ist die Möglichkeit vorhanden, mechanische Erklärungen oder mechanische Modelle für die Elektrodynamik zu geben.

Durch die energetischen Prinzipien ist nämlich die Bestimmung des kinetischen Potentials bei jeder physikalischen Aufgabe mit einem Problem der Variationsrechnung verknüpft. Nun kann man den Ausdruck für das kinetische Potential in zwei Summanden zerlegen, deren Differenz die Gesamtenergie des Systems darstellt; der erste Ausdruck ist ein Polynom zweiten Grades aus den ersten zeitlichen Ableitungen der Parameter, die den Zustand des Systems bestimmen, während der zweite von diesen Ableitungen unabhängig ist. Daraus ergibt sich sofort eine mechanische Deutung, denn man kann die Gleichungen auf solche vom LAGRANGEschen Typus zurückführen.

In unserem Fall gibt es unendlich viele Deutungen, und das ist nicht überraschend. Wir wissen seit POINCARÉ, dass, sobald eine mechanische Erklärung einer Erscheinung existiert, es unendlich viele solche Erklärungen gibt.

Man kann sehr wohl den vorstehenden Entwicklungen viele Theorien anschliessen, z. B. die Theorie der Wirbelatome von Lord KELVIN und die so berühmten und wichtigen Theorien von JOSEPH LARMOR (4).

Ganz kürzlich haben E. und F. COSSERAT (5) in einem interessanten Buch Fragen behandelt, die mit dem hier Gesagten in Verbindung stehen.

b) Indes wollen wir diese Überlegungen beiseite lassen und beachten, dass die Zurückführung auf eine Frage der Variationsrechnung ebenso für analytische Zwecke angewandt werden kann wie die Transformation der Gleichungen in krummlinige Koordinaten. Zu diesem Zweck braucht nur an die von JACOBI zuerst angegebene Methode zur Transformation des Differentialparameters zweiter Ordnung erinnert zu werden. Durch ein ganz entsprechendes Verfahren haben mehrere Autoren die Gleichungen der Elastizität in krummlinige Koordinaten umgeformt, und durch dasselbe Verfahren ist es BELTRAMI sogar gelungen, sich von den Bedingungen freizumachen, denen die Koeffizienten des Quadrats des Linienelements im euklidischen Raum genügen müssen (6).

Auf diese Weise wird die Grundlage für eine Optik in solchen Räumen gelegt, die nicht das Krümmungsmass Null haben.

(4) LARMOR, *Aether and Matter*. Cambridge 1900.

(5) E. et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*. Paris 1909.

(6) E. BELTRAMI, *Sulle equazioni generali dell'elasticità*. « Ann. di Mat. » (2) **10**, 188, 1880, 82.

Aber die Transformation, von der die Rede ist, kann auch noch nach andern Verfahren vorgenommen werden, die schneller und kürzer zum Ziele führen; deshalb will ich den eingeschlagenen Weg nicht weiter verfolgen.

c) Gehen wir von den oben angegebenen Formeln [7] aus, so finden wir durch sehr einfache Rechnungen folgende Umformung des Ausdrucks

$$\sum_r\left(\xi_r \frac{dY_r}{dt}+\eta_r\frac{dM_r}{dt}\right).$$

Nach S. 397 ist, wenn man das Symbol δ durch d/dt ersetzt,

$$\sum_r\left(\xi_r \frac{dY_r}{dt}+X_r\frac{du_r}{dt}+\eta_r\frac{dM_r}{dt}+L_r\frac{dv_r}{dt}\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left\{\sum_r\sum_s\left(\varepsilon_{rs}\, X_r\frac{dY_s}{dt}+\mu_{rs}\, L_r\frac{dM_s}{dt}\right)\right\}+A,$$

wobei

$$A=\sum_r\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{L_{r+1}\frac{dY_{r+2}}{dt}-L_{r+2}\frac{dY_{r+1}}{dt}+X_{r+2}\frac{dM_{r+1}}{dt}-X_{r+1}\frac{dM_{r+2}}{dt}\right\}.$$

Um zu der gesuchten Formel zu gelangen, subtrahiere man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\sum_r\left(X_r\frac{du_r}{dt}+L_r\frac{dv_r}{dt}\right).$$

Dann wird die rechte Seite der Gleichung gleich C_1+C_2+A; dabei ist

$$C_1=\frac{d}{dt}\left(\sum_r\sum_s\varepsilon_{rs}\, X_r\frac{dY_s}{dt}\right)-\sum_r X_r\frac{du_r}{dt}.$$

Entnimmt man $\sum_s \varepsilon_{rs}\,(dY_s/dt)$ aus dem Ausdruck für u_r (S. 397), so wird

$$C_1=\sum_r\frac{d}{dt}\left\{X_r\, u_r+X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)+4\pi\sum_h\partial_{rh}\, X_r\, Y_h\right\}-\sum_r X_r\frac{du_r}{dt}$$

oder

$$C_1=\sum_r u_r\frac{dX_r}{dt}+\sum_r\frac{d}{dt}\left\{X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)+4\pi\sum_h\partial_{rh}\, X_r\, Y_h\right\}.$$

Da nun $Z_r=X_r$ nach S. 399, so folgt nach S. 399 $u_r=\sum_s\alpha_{rs}\, X_s$,

$$\sum_r u_r\frac{dX_r}{dt}=\sum_r\sum_s \alpha_{rs}\, X_s\frac{dX_r}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_r\sum_s\alpha_{rs}\, X_r\, X_s\right).$$

Daher

$$C_1=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_r\sum_s\alpha_{rs}\, X_r\, X_s+\sum_r X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)+4\pi\sum_r\sum_h\partial_{rh}\, X_r\, Y_h\right\}.$$

Entsprechendes ergibt sich für

$$C_2=\frac{d}{dt}\left(\sum_r\sum_s\mu_{rs}\, L_r\frac{dM_s}{dt}\right)-\sum_r L_r\frac{dv_r}{dt}.$$

(7) S. Anm. (3).

Daher erhält man

$$(2) \qquad \sum_r \left(\xi_r \frac{d\mathrm{Y}_r}{dt} + \eta_r \frac{d\mathrm{M}_r}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_r \sum_s (\alpha_{rs}\,\mathrm{X}_r\,\mathrm{X}_s + \beta_{rs}\,\mathrm{L}_r\,\mathrm{L}_s) - \sum_r \left[\mathrm{L}_r\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \mathrm{Y}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{X}_r\left(\frac{\partial \mathrm{M}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \mathrm{M}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right] + 4\pi \sum_r \sum_h \partial_{rh}\,\mathrm{X}_r\,\mathrm{Y}_h\right\} + \mathrm{A},$$

also ein vollständiges Differential nach der Zeit und eine Summe von Ausdrücken, die Ableitungen nach den Koordinaten sind, nämlich

$$\mathrm{A} = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\mathrm{L}_{r+1}\frac{d\mathrm{Y}_{r+2}}{dt} - \mathrm{L}_{r+2}\frac{d\mathrm{Y}_{r+1}}{dt} + \mathrm{X}_{r+2}\frac{d\mathrm{M}_{r+1}}{dt} - \mathrm{X}_{r+1}\frac{d\mathrm{M}_{r+2}}{dt}\right).$$

Sind daher die Gleichungen

$$\xi_r = 0 \quad , \quad \eta_r = 0$$

erfüllt und werden im Unendlichen die Grössen X_r, Y_r, L_r, M_r unendlich klein von passender Ordnung, so wird das über den ganzen Raum erstreckte Integral des Ausdrucks (2) verschwinden. Daraus findet man durch Integration nach t

$$\int\left\{\frac{1}{2}\sum_r \sum_s (\alpha_{rs}\,\mathrm{X}_r\,\mathrm{X}_s + \beta_{rs}\,\mathrm{Y}_r\,\mathrm{Y}_s) - \sum_r \left[\mathrm{L}_r\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \mathrm{Y}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{X}_r\left(\frac{\partial \mathrm{M}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \mathrm{M}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right] + 4\pi \sum_r \sum_h \partial_{rh}\,\mathrm{X}_h\,\mathrm{Y}_r\right\} d\mathrm{S} = \text{Const.},$$

wo das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist.

Wir sind so zu einem invarianten Integral gelangt. Es gibt eine andere, sogar noch weit merkwürdigere Beziehung, die man nach dem gleichen Verfahren herleiten kann.

Wir werden in der folgenden Vorlesung Gelegenheit haben, von der Entwicklung des GREENschen Satzes zu sprechen.

Der Inhalt dieses bemerkenswerten Satzes, der die fruchtbarste Grundlage für die analytische Entwicklung fast aller Zweige der mathematischen Physik gewesen ist, besteht in einer wechselseitigen Beziehung zwischen zwei Lösungen desselben Systems von Differentialgleichungen. Ich habe früher einmal gezeigt (8), dass alle Gleichungen, die von Aufgaben der Variationsrechnung herrühren, auf einen Reziprozitätssatz führen können, der dem GREENschen Satz entspricht. Ich will ihn für unseren Fall wirklich herleiten. Es mögen zwei Wertsysteme für die Grössen X_r, Y_r, L_r, M_r, ξ_r, η_r, u_r betrachtet und durch Anhängen von einem bzw. zwei Strichen

(8) V. VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni*. « Rend. Acc. Lincei » (4) **6** (1. Sem.), 43, 1890. [In queste « Opere »: vol. primo, XXVII, pp. 454–463].

unterschieden werden. Ist

$$X'_r = Z'_r \quad , \quad X''_r = Z''_r \, ,$$

$$L'_r = N'_r \quad , \quad L''_r = N''_r \, ,$$

$$\xi'_r = \eta'_r = \xi''_r = \eta''_r = 0 ,$$

so findet man durch Anwendung derselben Transformationen, von denen wir bereits Gebrauch gemacht haben,

$$\frac{d}{dt}\int_S \left\{ \sum_r \sum_s \left[\varepsilon_{rs} (X'_s Y''_r - X''_s Y'_r) + \mu_{rs} (L'_s M''_r - L''_s M'_s)\right] \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \sum_r (Y''_{r+1} L'_{r+2} - Y''_{r+2} L'_{r+1} - Y'_{r+1} L''_{r+2} + Y'_{r+2} L''_{r+1}$$

$$- M''_{r+1} X'_{r+2} + M''_{r+2} X'_{r+1} + M'_{r+1} X''_{r+2} - M'_{r+2} X''_{r-1}) \cos (n , x_r) \, d\sigma .$$

Hierbei ist, wie früher, $d\sigma$ ein Element der Grenzfläche von S und n die äussere Normale von $d\sigma$. Die Gleichung stellt nun gerade die reziproke Beziehung dar, die wir im Auge hatten. Man kann sie mit der vergleichen, die BETTI für den Fall der Elastizität als eine Erweiterung der GREENschen Formel gegeben hat, und von der wir in der nächsten Vorlesung sprechen werden.

Wir gehen nunmehr zu einem Punkte über, der meiner Ansicht nach viel des Interessanten und Anregenden bietet; denn man kann ein ganzes Gebiet völlig neuer Untersuchungen daran anschliessen.

Wir wollen noch einmal auf die Mechanik und das HAMILTONsche Prinzip zurückkommen und uns an die Frage erinnern, auf die es führt. Man hat ein Integral

$$P = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x_1 , x_2 , \cdots , x_n , \frac{dx_1}{dt} , \cdots , \frac{dx_n}{dt}\right) dt ,$$

in dem die Funktionen $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ von t, die Koordinaten des Systems, erscheinen. Man muss die Variation von P gleich null setzen, unter der Voraussetzung, dass man $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ unendlich kleine Variationen erteilt. Man kommt auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen $x_1 , \cdots , x_n$ genügen müssen. Wir nehmen an, dass die willkürlichen Konstanten bestimmt werden können, sobald man die Werte der Funktionen $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ für die Zeiten t_0 und t_1 kennt.

Betrachtet man P als Funktion der Werte von $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ für die obere Grenze des Integrals, so hat man also eine Funktion von n Variabeln. Die Theorie von HAMILTON und JACOBI, die CLEBSCH, MAYER und sehr viele andere vervollkommnet haben, ist aufgebaut auf der Auffindung der Beziehungen zwischen dieser Funktion von mehreren Variabeln und den Integralen der Differentialgleichungen, die dem Problem der Variationsrechnung entsprechen, und der Beziehung zwischen diesen Integralen und der partiellen

Differentialgleichung, der jene Funktion von mehreren Variabeln genügen muss.

Nach dieser Vorbemerkung wollen wir uns der Fragen der mathematischen Physik erinnern, die wir oben betrachtet haben. Was können wir jetzt darüber Neues aussagen?

Alles kann auch hier auf Fragen der Variationsrechnung zurückgeführt werden; aber man hat es nicht mehr mit einer endlichen Zahl von Variabeln zu tun wie in der klassischen Mechanik, wo die Anzahl der Koordinaten des Systems endlich ist. Man muss vielmehr eine stetige Gesamtheit von Koordinaten betrachten. In der Tat ist ja das Medium, in dem die Erscheinung sich abspielt, ein Kontinuum, und jedem Punkt des Mediums entsprechen Parameter, die den physikalischen Zustand dieses Punktes bestimmen, ebenso wie in der klassischen Mechanik die Koordinaten die Lage der verschiedenen bewegten Punkte charakterisieren.

Blicken wir auf die Formeln zurück, denen wir begegnet sind, so werden wir bemerken, dass in den Aufgaben der mathematischen Physik Integrale erscheinen, die an die Stelle der in der gewöhnlichen Mechanik auftretenden Summen treten.

Andererseits drängt sich die Erkenntnis der Verallgemeinerung und Erweiterung auf, und man übersieht, dass man ein ganz neues Feld von Untersuchungen vor sich hat, für welche durch die JACOBI-HAMILTONsche Theorie in der Mechanik das Vorbild geliefert wird, und bei welchen jedes analytische Ergebnis eine physikalische Bedeutung hat.

5. Erweiterung des Funktionsbegriffs.

Wir werden sehen, welchen Schwierigkeiten man begegnet, wenn man den geschilderten Weg einschlägt. Wir wollen eine Frage von noch allgemeinerem Charakter in Angriff nehmen als die, auf die man durch die oben erwähnte Verallgemeinerung stossen würde [(9)].

Bei den einfachen Integralen gibt es zwei Grenzen; geht man zu Doppelintegralen über, so werden die Grenzen von Linien gebildet, und wenn man zu mehrfachen Integralen mit einer noch grösseren Zahl von Variabeln kommt, so wird der Integrationsbereich von mehrdimensionalen Flächen oder Räumen begrenzt.

Für den Fall einfacher Integrale kommen die Werte einer gewissen Zahl von Parametern an den Grenzen des Integrals in Betracht, und das Integral selbst muss als Funktion dieser Werte angesehen werden. Ganz anders ist es, wenn man zu mehrfachen Integralen übergeht. In diesem Falle hat man es mit den Werten gewisser Funktionen an der Grenze des

(9) V. VOLTERRA, *Sopra una estensione della teoria* JACOBI–HAMILTON *del calcolo delle variazioni*. « Rend. Acc. Lincei » (4) **6** (1. Sem.), 127, 1890. [In queste « Opere »: vol. primo, XXVIII, pp. 464–475].

Integrationsbereichs zu tun, und man muss das Integral als eine Grösse ansehen, die von allen Werten dieser Funktion auf der Grenze abhängt. Die Art der Abhängigkeit ändert sich also vollkommen, und es ist verständlich, dass man auf Beziehungen trifft, die eine völlig neue Bedeutung haben, abgesehen von den gewöhnlichen, die den Zusammenhang zwischen Funktionen und Variabeln zum Ausdruck bringen.

Aber ich füge hinzu, dass man notwendig diesen Schritt tun und diese Gedanken aufnehmen, d. h., den gewöhnlichen Begriff der Funktion erweitern muss, wenn anders man nicht für immer darauf verzichten will, die fruchtbarsten und allgemeinsten Schöpfungen der Mechanik in klarer und strenger Weise auf die mathematische Physik allgemein zu übertragen.

Der Weg, den man in letzter Zeit in Richtung der angedeuteten Ausdehnung der Funktionentheorie und ihrer Anwendung zurückgelegt hat, ist sehr bedeutend, seit man die Grundgedanken und die Methoden erweitert hat. Aber vieles bleibt noch von der Zukunft zu erhoffen [10].

Gestatten Sie mir, daran zu erinnern, dass ich seit langem den Begriff der von allen Werten einer Funktion oder von der Gestalt einer Linie oder Fläche abhängigen Grössen eingeführt habe, und dass ich versucht habe, dafür allgemein die analytische Entwicklung anzugeben, die im Grunde nur eine Erweiterung der Entwicklung einer analytischen Funktion ist, d. h. der TAYLORschen Entwicklung [11].

Wir werden in der letzten Vorlesung Gelegenheit haben, hierauf zurückzukommen. Ein bestimmtes Integral

$$\Phi(x) = \int_a^b f(\xi)\, \mathrm{F}(x, \xi)\, d\xi,$$

bei dem unter dem Integralzeichen $f(\xi)$ auftritt, liefert eine lineare Abhängigkeit der Funktionen $f(\xi)$ und $\Phi(x)$ von einander und entspricht dem Falle der Funktionen ersten Grades.

Das Problem der Umkehrung bestimmter Integrale oder, wie man es später genannt hat, das Problem der Auflösung linearer Integralgleichungen, entspricht der algebraischen Lösung von Gleichungssystemen ersten Grades.

Ich bin in der Tat von der Anschauung ausgegangen, dass eine Integralgleichung den Grenzfall eines Systems von Gleichungen ersten Grades mit unendlich vielen Unbekannten darstellt, und ich habe die Lösung für den Fall erhalten, dass die unendliche Determinante, die den Nenner bildet, gleich 1 ist. FREDHOLM hat später die Lösung für beliebige Werte der Determinante gegeben. Ich und SCHMIDT haben auch solche Fälle behandelt,

(10) Vgl. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* und *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris 1913, Gauthier-Villars.

(11) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. « Rend. Acc. Lincei » (4) **3** (2. Sem.), 97, 141, 153; 1887. [In queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314]. — V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee*. « Rend. Acc. Lincei » (4) **3** (2. Sem.), 225, 274; 1887. [In queste « Opere »: vol primo, XVIII, pp. 315–328].

wo die Integralgleichung nicht linear ist. Ganz jüngst habe ich durch Verwendung der Methoden der vertauschbaren Funktionen das Gebiet der Theorie der Integralgleichungen so erweitert, dass die untersuchten allgemeinen Fälle alle früher betrachteten umfassen [12].

All das ist nichts anderes als die algebraische Lösung der Gleichungen ersten Grades, von dem Falle endlich vieler Variabeln auf den Fall unendlich vieler übertragen.

Die neueren Arbeiten von HADAMARD [13] und PAUL LEVY [14] sind eng mit der hier besprochnen Ausdehnung der Funktionentheorie verknüpft. Insbesondere erscheinen auf diese Weise die Eigenschaften der GREENschen Funktionen in ganz neuem Lichte.

Die Aufgabe, die ich soeben über die Ausdehnung der JACOBI–HAMILTONschen Theorie gestellt habe, geht weit über diese Untersuchungen hinaus. Zwischen diesen Untersuchungen und der Erweiterung, von der ich gesprochen habe, besteht dasselbe Verhältnis wie zwischen der algebraischen Lösung der Gleichungen und dem Studium der Differentialgleichungen.

Gar viele Wege stehen offen; doch dieselben allgemeinen Prinzipien, die zur Aufstellung der Grundlagen für die Lösung der Integralgleichungen geführt haben, leisten auch in diesem weit verwickelteren Fall ihre Dienste. Immer liefert der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen in der Zahl der unabhängigen Variabeln den Schlüssel zur Lösung der verschiedenen Fragen. Bevor ich den Gegenstand verlasse, möchte ich den Typus der Ergebnisse angeben, auf die man bei dem Versuche stösst, die JACOBI–HAMILTONsche Theorie auf einen besonderen Fall von Doppelintegralen auszudehnen [15].

Die Differentialgleichungen

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(x_i, x_s)}{d(u,v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}}, \\ &\sum_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u,v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

haben eine Gestalt, ähnlich der der kanonischen Gleichungen der Mechanik; man kann sie sehr leicht dadurch herleiten, dass man die Variation des Integrals

$$\iint \left(\Sigma p_{ih} \frac{d(x_i, x_h)}{d u, v)} - H \right) du\, dv$$

gleich Null setzt.

(12) V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Kap. 9, 10, 11, 12, 13.

(13) J. HADAMARD, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. «Mémoires prés. par divers savants à l'Ac. des Sc. de l'Institut de France», **33**, Nr. 4. 1908.

(14) PAUL LEVY, *Les équations intégro–differentielles définissant des fonctions des lignes*. Diss. 1911.

(15) S. Anm. (3).

Es mögen jetzt π_1, π_2, π_3 drei Funktionen von x_1, x_2, x_3 sein, derart, dass

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_3} = 0$$

ist.

Das Integral

$$W = \int_\sigma (\pi_1\, dx_2\, dx_3 + \pi_2\, dx_3\, dx_1 + \pi_3\, dx_1\, dx_2),$$

erstreckt über eine Fläche σ, hängt nur von der Randlinie s dieser Fläche σ ab. Ich nenne es eine Funktion ersten Grades der Linie s und schreibe

$$\pi_1 = \frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \quad \pi_2 = \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \quad \pi_3 = \frac{dW}{d(x_1, x_2)}.$$

Zwischen den Gleichungen (3) und der Gleichung

$$\text{(4)} \qquad H\left(\frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \frac{dW}{d(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0,$$

in der p_{23}, p_{31}, p_{12} durch $dW/d(x_2, x_3)$, $dW/d(x_3, x_1)$, $dW/d(x_1, x_2)$ ersetzt sind, gelten dieselben Beziehungen, die JACOBI zwischen den kanonischen Gleichungen und seiner partielle Differentialgleichung entdeckt hat. Wir sehen, dass durch den Satz, den ich betrachtet habe, ein Schritt getan ist: die kanonischen Gleichungen sind durch partielle Differentialgleichungen ersetzt worden (Gl. (3)), und die partielle Differentialgleichung von JACOBI ist durch die Gleichung (4) ersetzt worden, die man eine funktionale Differentialgleichung nennt. In Betreff der Entwicklungen verweise ich auf die schönen Arbeiten von FRÉCHET [16], der diesen Gedanken in einer bemerkenswerten Abhandlung verallgemeinert und entwickelt hat. Andre Fälle sind in meinen S. 406 erwähnten Vorlesungen über Linienfunktionen behandelt. Die hier auftretenden Gleichungen heissen ,, Funktionaldifferentialgleichungen ''.

6. DIE MINKOWSKISCHE WELT.

Die verschiedenen Fragen, die wir behandelt haben, treten in der allgemeinen Wellentheorie wieder auf. Hier muss nun bemerkt werden, dass in anderer Richtung das Studium der Charakteristiken diese Theorie erneuert hat. Man würde die Charakteristiken nicht haben untersuchen hönnen, wenn man nicht darauf gekommen wäre, die Zeit als eine Koordinate anzusehen. Ganz neuerdings ist MINKOWSKI in einer schönen und gehaltvollen

(16) M. FRÉCHET, *Sur une extension de la méthode de* JACOBI–HAMILTON. « Ann. di Matematica » (3), **11**, 187, 1905. Vgl. auch « Ann. de l'Éc. Norm. » (3), **27**, 1910.

Abhandlung [17]) und einem für einen weiteren Kreis bestimmten Vortrag [18] darauf zurückgekommen und hat die Gedanken von LORENTZ und EINSTEIN über die Beziehungen zwischen Raum und Zeit in ganz neuem Lichte erscheinen lassen.

Es ist nich möglich, die Begriffe der Zeit und des Raumes voneinander zu trennen. Ein Ort wird immer zu einer gewissen Zeit beobachtet und eine Zeit wird immer an einem gewissen Ort bestimmt. Wird der Raum auf die Koordinaten x, y, z bezogen und nennt man die Zeit t, so wird ein zu einer gewissen Zeit betrachteter Raumpunkt durch die Gesamtheit der Werte x, y, z, t bestimmt; MINKOWSKI nennt das einen „Weltpunkt". Die Gesamtheit aller möglichen Werte von x, y, z, t stellt die ganze Welt dar. Was wir im dreidimensionalen Raum beobachten, ist nur ein Schatten oder eine Projektion eines Raumes, der eine Dimension mehr besitzt.

Hier liegt eine Schwierigkeit. Will man die ganze Welt umfassen, so muss man einen vierdimensionalen Raum betrachten. Indes kann man diese Schwierigkeit durch ein wohlbekanntes Verfahren beseitigen. Man braucht nur von dem gewöhnlichen Raum eine Dimension abzutrennen und sich ein Flächenwesen vorzustellen, das diesen zweidimensionalen Raum bewohnt. HELMHOLTZ und CLIFFORD haben uns an derartige Vorstellungen gewöhnt und auf diese Weise selbst noch schwierigere und verwickeltere Gedanken anschaulich und verständlich gemacht, nämlich den Begriff der Krümmung des Raumes. Es ist einleuchtend, dass für ein zweidimensionales Wesen die Welt MINKOWSKIs dreidimensional ist, und wenn man noch weiter geht und das wurmförmige Wesen CLIFFORDS, d. h. ein Wesen mit nur einer Ausdehnung, betrachtet, so ist die MINKOWSKIsche Welt für dieses Wesen zweidimensional.

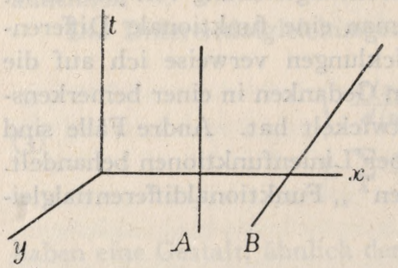


Fig. 1.

Für das Flächenwesen wird die Welt durch den Raum x, y, t dargestellt. Was wird nun der MINKOWSKIsche Beobachter sehen, wenn ein Punkt sich in Ruhe befindet?

Ganz augenscheinlich wird er eine Parallele zur t–Achse sehen. Hat der Punkt umgekehrt eine gleichförmige Bewegung, so wird er eine gegen die t–Achse geneigte gerade Linie sehen. Der Schatten oder die Projektion des bewegten Punktes wird gewonnen, wenn sich der Beobachter mit der xy–Ebene gleichförmig in Richtung der t–Achse bewegt. Die verschiedenen Punkte x, y, in denen die geneigte „Weltlinie" die Ebene schneidet, ergeben die Bewegung des Punktes B.

(17) H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* «Göttinger Nachrichten», 1908, S. 58. Abgedruckt «Math. Annalen», 68, 472, 1910.

(18) H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit.* «Jahresber. der D. Math.–Ver.», **18**, 75, 1909.

7. Zwei-, drei- und vierdimensionale Welten.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir zur Wellentheorie für ruhende Medien übergehen. Wir werden da neuen Schwierigkeiten begegnen, und es muss von vornherein gesagt werden, dass man gar leicht in Irrtum verfallen könnte, wollte man sich nur durch die einfache Anschauung leiten lassen.

Der Mechanismus der Wellen in elastischen zweidimensionalen Medien ist nämlich sehr verschieden von dem in dreidimensionalen Medien, und wenn man die Theorie der Ausbreitung einer Kreiswelle aufstellt, so hat man damit noch keine Theorie gewonnen, die vergleichbar wäre mit der für die Ausbreitung einer Kugelwelle für dreidimensionale Wesen (19). Um es deutlicher und klarer auszudrücken: das Flächenwesen hat uns gegenüber, die wir dreidimensional sind, eine Dimension verloren, aber dafür hat es umgekehrt an Einfachheit inbezug auf den Mechanismus der Wellenausbreitung eingebüsst.

Augenscheinlich ist dieser Umstand die Ursache einer Schwierigkeit; aber es ist unmöglich, sie zu umgehen, da sie in der Natur begründet liegt. Dieser Umstand ist sehr eigenartig, denn es kommt äusserst selten vor, dass die Dinge durch Weglassung einer Dimension schwieriger und verwickelter werden.

Wollte man dieselbe Einfachheit wie für die Wellen in dreidimensionalen Räumen wiederfinden, so müsste man die Flächenwesen beiseite lassen und zu den Wellen für das wurmförmige oder eindimensionale Wesen übergehen, für welches die Minkowskische Welt zweidimensional ist.

Kurz gesagt, der Mechanismus der Wellenausbreitung in Räumen mit einer ungeraden Zahl von Dimensionen ist einfacher als in solchen mit einer geraden Zahl von Dimensionen.

Wir wollen jetzt näher auf diese Fragen eingehen. Wir betrachten die Welt des wurmförmigen Wesens, also die xt-Ebene.

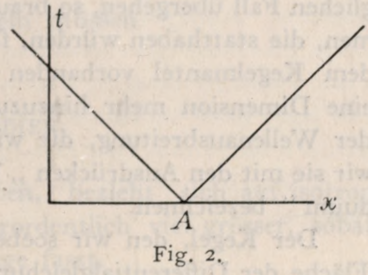


Fig. 2.

Ist A das Zentrum einer Erschütterung in einem isotropen Medium, und ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen gleich 1, so ziehen wir durch A die unter 45° gegen die Achsen geneigten, auf der Seite der positiven t gelegenen Strahlen. (Fig. 2).

Für den Minkowskischen Beobachter wird sich jede Erschütterung längs der beiden Geraden ausbreiten, die wir gezogen haben, und ausserhalb ihrer wird keine Erschütterung in seiner Welt vorhanden sein.

(19) V. Volterra, *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi*. « Rend. Acc. Lincei » (5) 1 (2. Sem.), 161, 1892. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXIV, pp. 559-567].

Vom analytischen Standpunkt sind die Geraden, die wir gezogen haben, die Charakteristiken der d'ALEMBERTschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

Verschieben wir die x–Achse gleichmässig in der Richtung der t, so bezeichnen die Punkte, in denen die Charakteristiken die x–Achse schneiden, die nacheinander von der Welle erreichten Stellen.

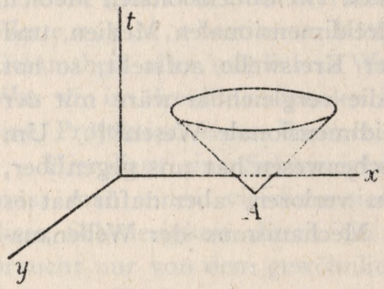


Fig. 3.

Wir kehren zu dem Flächenwesen zurück, für das die MINKOWSKIsche Welt der Raum x, y, t ist. Es sei A wieder ein Erregungszentrum in einem isotropen Medium und die Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich eins. (Fig. 3).

Wir zeichnen nach der Seite der positiven t den Kegel, der A zum Scheitel hat, und dessen Erzeugende unter 45° gegen die t–Achse geneigt sind.

Ohne nähere Prüfung könnte man leicht zu dem Analogieschluss verleitet werden, dass sich für den MINKOWSKIschen Beobachter jede Erschütterung längs der Kegelfläche ausbreitet, und dass es ausserhalb dieser Fläche keinerlei Erschütterung in seiner Welt gebe. Aber dem ist in Wahrheit nicht so. Die Erschütterung erfüllt das ganze Innere des Kegels, und ausserhalb ist keine Erregung vorhanden.

Hierin besteht die grössere Kompliziertheit des Mechanismus in diesem Fall im Vergleich zu dem vorher besprochenen.

Wollten wir zu dem nun folgenden, auf dreidimensionale Wesen bezüglichen Fall übergehen, so brauchten wir nur auf die Vorgänge zurückzukommen, die statthaben würden, falls die Erschütterungen einzig und allein auf dem Kegelmantel vorhanden wären, und hätten in der Vorstellung noch eine Dimension mehr hinzuzufügen. Um die beiden verschiedenen Arten der Wellenausbreitung, die wir gefunden haben, zu unterscheiden, werden wir sie mit den Ausdrücken „ Welle ohne Residuum " und „ Welle mit Residuum " bezeichnen.

Der Kegel, den wir soeben betrachtet haben, ist die charakteristische Fläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

In dem folgenden Fall, in dem wir in der Vorstellung eine Dimension hinzugefügt haben, würde man einen Kegel finden, der die charakteristische Hyperfläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist.

8. Variationsrechnung und Theorie des Stosses.

Die charakteristischen Linien und Flächen, die wir soeben betrachtet haben, spielen eine Rolle in der Theorie des Stosses oder der Ausbreitung diskontinuierlicher Erregungen. Ich werde die allgemeinen Theorien beiseite lassen, die für den Fall der Hydrodynamik und der Elastizität von Hugoniot, Christoffel, Hadamard entwickelt worden sind, und mich auf die Aufstellung einer sehr einfachen Beziehung beschränken, die zwischen der Variationsrechnung, der Ausbreitung diskontinuierlicher Erregungen und den charakteristischen Flächen besteht [20].

Ich betrachte den sehr einfachen Fall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

die den Schwingungen einer Membran entspricht. Das Problem der Variationsrechnung, von dem sie abhängt, besteht in der Nullsetzung der Variation des Integrals

$$V = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dt.$$

Wir nehmen jetzt an, dass es im Innern des Raumes x, y, t Flächen gibt, auf denen u stetig ist, seine Ableitungen aber unstetig sein hönnen.

Man kann sich die Fragen vorlegen: Auf welchen Flächen werden die Ableitungen in der Art unstetig sein können, dass die Variation von V immer verschwindet? Welchen Bedingungen werden die Werte der Ableitungen auf den beiden Seiten der Unstetigkeitsflächen genügen müssen?

Die Frage bietet keine Schwierigkeit; man findet, dass die Flächen Einhüllende der charakteristischen Kegel sein müssen.

9. Anisotrope Medien.

Was wir über die Wellen gesagt haben, bezieht sich auf isotrope Medien. Die Schwierigkeiten werden ausserordentlich viel grösser, sobald man Wellen in anisotropen Medien ins Auge fasst.

Der Grund ist der, dass die Theorie der Erregungszentren, die wir für isotrope Medien skizziert haben, versagt, wenn man zu zweiachsigen anisotropen Medien übergeht. Es gewährt einen eigenen Reiz, die Arbeiten von Lamé über diesen Gegenstand zu verfolgen. Seine Ergebnisse sind analytisch einwandfrei, aber sie können wegen der Singularitäten der Lösung nicht die Theorie des Erregungszentrums geben. Wir wollen die Formeln

(20) V. Volterra, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*. (Art. 12). « Acta Math. », **18**, 161, 1894. [In queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19-73].

nehmen, die LAMÉ (21) für das einem bestimmten Punkt entsprechende Erregungszentrum gegeben hat, und durch diesen Punkt die optischen Achsen legen.

Die Komponenten der Verschiebung sind längs der beiden Geraden unendlich, und beim Umkreisen dieser Geraden sind die Verschiebungen vieldeutig, d. h., geht man von einem bestimmten Punkt mit einem gewissen Wert einer der Verschiebungskomponenten auf geschlossener Bahn um die optische Achse herum, so findet man, wenn man immer die stetig aufeinander folgenden Werte der Komponente nimmt und schliesslich zum Ausgangspunkt zurückkehrt, in diesem einen ganz neuen Wert für dieselbe Verschiebungskomponente (22). Man müsste also annehmen, dass das Medium längs zweier ebenen Bezirke, die zwischen den optischen Achsen genommen sind, derart in Teile zerlegt ist, dass die Teilchen des Mediums auf den beiden Seiten dieser Bezirke unabhängig voneinander schwingen könnten. Das entspricht augenscheinlich nicht der Vorstellung, die wir uns von dem Medium machen, denn es handelt sich um die Vorstellung eines kontinuierlichen Mediums.

LAMÉ hat zu beweisen versucht, dass seine Formeln die einzigen sind, die einem Erregungszentrum in einem doppelbrechenden Medium entsprechen können; daher würde man zu dem Schluss geführt werden, dass es nicht möglich ist, in einem derartigen Medium ein Leuchtzentrum zu finden.

Es ist klar, dass das alles nicht richtig ist, aber man muss die analytischen Ergebnisse interpretieren, um zu verstehen, woher der Widerspruch kommt.

Wir wollen mit der Spezialisierung der Formeln von LAMÉ auf den Fall eines einachsigen Mediums beginnen. Man findet Lösungen, welche längs der ganzen optischen Achse unendlich werden. Das ist eine Singularität, die nicht verträglich ist mit dem Vorhandensein eines einzigen Erregungszentrums. Aber wir wollen noch weiter gehen und auf den Fall des isotropen Mediums spezialisieren. Die Singularität der Verschiebungen, die in der Tatsache besteht, dass sie längs einer Geraden unendlich werden, ist auch jetzt noch vorhanden. Es könnte also kein Leuchtzentrum in einem isotropen Medium geben! Das schliesst augenscheinlich einen Widerspruch ein.

Andererseits wissen wir seit EULER, dass wir durch die Ableitungen der Funktion

$$\frac{f(r+t)}{r},$$

wo r die Entfernung vom Erregungszentrum darstellt, die Schwingungskomponenten ohne jede Singularität berechnen können, ausgenommen für das Zentrum selbst. Die Deutung, die LAMÉ seinen Formeln gegeben hat,

(21) LAMÉ, *Leçons sur la théorie math. de l'élasticité des solides.* 22ème Leçon. Paris 1852.

(22) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* « Acta Math. », 16, 153; 1892/93. [In queste « Opere »: vol primo, XXXIII, pp. 514-558].

enthält also einen prinzipiellen Fehler, und dieser besteht in folgendem. LAMÉ wusste nicht, dass der Mechanismus der Wellen derart sein kann, dass die Welle ein Residuum hat, d. h. er vermutete keinen anderen Mechanismus als den, der, wie wir gesehen haben, für isotrope Medien mit einer ungeraden Zahl von Dimensionen vorhanden ist. Deshalb gab er seinen Formeln von Anfang an eine Gestalt, die dem Mechanismus ohne Residuen entsprach, und das musste ihn notwendig zu einem Irrtum führen. Jetzt können wir daraus entnehmen, dass der Mechanismus der Wellen für den Fall dreidimensionale, doppelbrechender, zweiachsiger Medien sich dem Mechanismus der Wellen mit Residuum annähern muss und nicht dem ohne Residuum.

Abgesehen von der hier wiedergegebenen negativen Kritik der LAMÉschen Ergebnisse, ist man kaum weiter gekommen als er, denn die Formeln für das Lichtzentrum in anisotrope zweiachsigen Medien sind noch zu finden. Es ist daran zu erinnern, dass die FRESNELsche Wellenfläche nicht als Folge der von einem Erregungszentrum ausgehenden Wellen gefunden worden ist, sondern man hat sie aus der Fortpflanzung ebener Wellen, und zwar als Einhüllende dieser Wellen hergeleitet. Der Schritt, der zu tun bleibt, ist gross und schwierig, und ich weise gern auf ihn hin, weil es äusserst wichtig wäre, ihn zu tun.

Ein neuer Zweig der Optik würde sich der Lösung dieser Frage anschliessen.

Es ist noch hinzuzufügen, dass man für das anisotrope einachsige Medium das Problem lösen kann.

Ich will in kurzen Worten den Weg dazu angeben.

Die Gleichungen der Optik für anisotrope Medien sind

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial W}{\partial y} - b^2 \frac{\partial V}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial U}{\partial z} - c^2 \frac{\partial W}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial V}{\partial x} - a^2 \frac{\partial U}{\partial y} ,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 ,$$

wobei

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

Die Gleichungen kann man zusammenfassen zu einer einzigen, der man eine völlig symmetrische Gestalt geben kann. Setzen wir

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = A_1 \quad , \quad \frac{c^2 + a^2}{ca} = A_2 \quad , \quad \frac{a^2 + b^2}{ab} = A_3 ;$$

$$t = x_1 \sqrt{-1} \quad , \quad \frac{x}{\sqrt{bc}} = x_2 \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{ca}} = x_3 \quad , \quad \frac{z}{\sqrt{ab}} = x_4 ,$$

so ist die fragliche Gleichung die folgende:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega f = {} & \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_4^4} + A_1\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_4^2}\right) \\ & + A_2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_4^2}\right) + A_3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Komponenten der Verschiebung müssen den Gleichungen genügen

$$\Omega u = 0 \quad , \quad \Omega v = 0 \quad , \quad \Omega w = 0 \, ,$$

und umgekehrt können alle Integrale der optischen Gleichungen in der Form geschrieben werden

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 F_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \\ v &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta^2 F_2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \\ w &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 F_3 + \frac{\partial}{\partial z}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \end{aligned}\right.$$

wobei

$$(9)\quad F_1 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \quad , \quad F_3 = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

ist.

f_1, f_2, f_3 sind drei Integrale der Gleichung

$$\Omega f = 0 \, .$$

In der Tat, setzt man die vorstehenden Ausdrücke in Gleichung (6) ein, so findet man, dass sie befriedigt wird, und setzt man sie in die Gleichungen (5) ein, so nehmen diese die Gestalt an

$$(10)\quad \frac{\partial \Omega f_2}{\partial z} - \frac{\partial \Omega f_3}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega f_3}{\partial x} - \frac{\partial \Omega f_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega f_1}{\partial y} - \frac{\partial \Omega f_2}{\partial x} = 0 \, .$$

Genügen daher f_1, f_2, f_3 der Gleichung (7), so werden die vorstehenden Gleichungen und daher auch die Gleichungen (5) befriedigt.

Wir wollen nun umgekehrt voraussetzen, dass (5) und (6) befriedigt werden. Wir berechnen zunächst F_1, F_2, F_3 derart, dass die Beziehungen (8) erfüllt sind. Infolge der Beziehung (6) hat man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = 0 \, .$$

Daher kann man F_1, F_2, F_3 so wählen, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

erfüllt wird.

Darauf berechnen wir f_1, f_2, f_3 so, dass die Gleichungen (9) befriedigt werden. Man erhält dann die Gleichungen (10) und infolgedessen

$$\Omega f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \Omega f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \Omega f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \, .$$

Ist daher

$$\Omega\Phi = \varphi\,,$$

so kann man f_1, f_2, f_3 durch

$$f_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad , \quad f_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad , \quad f_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

ersetzen, und diese neuen Funktionen befriedigen die Gleichung (7).

Wenn wir nun voraussetzen, dass das Medium einachsig ist, d. h. $b = c$, so zerfällt die Gleichung $\Omega f = 0$ in zwei Gleichungen vom Typus der LAPLACEschen Gleichung, von der man zum retardierten Potential übergehen kann; deshalb kann man in diesem Fall ohne Schwierigkeit das Problem des Lichtzentrums lösen.

Ist nämlich $b = c$, so erhält man

$$A_1 = 2 \quad , \quad A_2 = A_3 = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

und

$$\Omega f = \left[\frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)\right]\cdot\left[a\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_4^2}\right)\right] f$$

$$= \left[b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right]\left[b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right].$$

Die Lösungen der Gleichung

$$\Omega f = 0$$

sind die Lösungen der Gleichungen

$$b^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,,$$

und die Lösungen der Gleichungen (5) und (6) vereinfachen sich in diesem Fall sehr.

Man kann die hier mögliche Zerlegung mit dem Zerfall der Wellenfläche in Kugel und Ellipsoid vergleichen [23].

Betrachten wir einmal die Wellenfläche für den allgemeinen Fall. Jeder Schnitt durch eine der Symmetrie- (oder Koordinaten-) ebenen zerfällt in einen Kreis und eine Ellipse. Diesem Zerfall entspricht eine analoge Zerlegung der Gleichung (7), wenn man zylindrische Wellen parallel zu den Koordinatenachsen betrachtet. Setzen wir nämlich voraus, dass f von x_4 unabhängig ist, so erhält Gleichung (7) die Gestalt

$$0 = \Omega f\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{b}{c}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{a}{c}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{c}{b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{c}{a}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f$$

$$= \left(b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\left(c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right).$$

(23) Ich habe diese Frage in meiner Vorlesung über mathematische Physik an der Universität Rom i. J. 1901 behandelt.

Das Problem der Fortpflanzung zylindrischer Wellen parallel zu den Koordinatenachsen kann man daher restlos behandeln (24).

10. Einführung symmetrischer Gleichungen.

Bei den vorstehenden Betrachtungen haben wir gelegentlich t durch $x\sqrt{-1}$ ersetzt und auf diese Weise eine Symmetrie in den Gleichungen erzielt, die vorher nicht vorhanden war. Da sich hier Gelegenheit bietet, wollen wir ein paar Worte über die Einführung imaginärer Grössen in die mathematische Physik sagen, ohne auf irgendwelche Einzelheiten einzugehen, die uns gar zu weit ablenken könnten.

Man braucht gar nicht erst bis zu den Schwingungen in anisotropen Medien zu gehen, um ein dem angegebenen ähnliches Ergebnis zu finden. Die Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

nimmt die Form an

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{11}$$

wenn man z durch it ersetzt.

Auch in der Potentialtheorie selbst ist es zuweilen nützlich, reelle Massen durch solche zu ersetzen, die sich in imaginären Punkten befinden und dasselbe Potential haben (25).

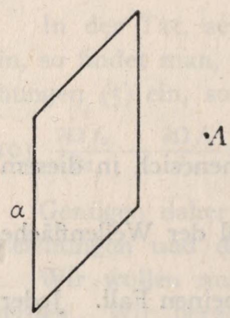


Fig. 4.

Ist A ein beliebiger Punkt und α eine beliebige Ebene (Fig. 4), so kann man Massen m und eine Doppelschicht μ in imaginären Gebieten von α finden mit demselben Potential wie die Masseneinheit in A.

Ist V die Potentialfunktion, die von Massen M herrührt, so findet man daher nach dem Gaussschen Satz, dass der Wert von V im Punkt A dem Potential der Massen M auf die Massen m und die Doppelschicht μ gleich ist.

Auf solche Weise kann man, wenn man auf α den Wert von V und der normalen Ableitung von V kennt, den Wert von V in A finden und das allgemeine Integral der Laplaceschen Gleichung berechnen, aus dem dann das allgemeine Integral der Gleichung (11) zu entnehmen ist.

Durch ein entsprechendes Verfahren kann man auch ein symmetrisches Potential berechnen, wenn man seine Werte auf der Symmetrieachse kennt,

(24) Vgl. die zweite Vorlesung, Kap. 18.

(25) V. Volterra, *Esercizi di fisica matematica*. « Rivista di Mat. », **4**, 1. 1894. [In queste « Opere »: vol. secondo, IV, pp. 74–86].

ohne dass man auf die Entwicklung in Reihen zurückgeht. Ein interessantes Ergebnis findet man, wenn man das Prinzip der Abbildungen von der LAPLACEschen Gleichung auf die Gleichung (11) überträgt.

Dazu braucht man nur die durch das Linienelement

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

bestimmte Metrik durch die andere zu ersetzen, die durch das Linienelement

$$dt^2 - dx^2 - dy^2$$

bestimmt wird.

Die Bilder in Bezug auf Kugeln werden zu Bildern in bezug auf gleichseitige Hyperboloide, und darauf kann man eine Theorie der Wellenlehre aufbauen [26].

11. Transformation der Lorentzschen Gleichungen durch Minkowski und Folgerungen daraus.

Man verdankt MINKOWSKI eine Transformation der LORENTZschen Gleichungen der Elektrodynamik derart, dass durch Ersetzung von it durch x_4 den 8 Grundgleichungen eine symmetrische Gestalt gegeben wird [27].

Dadurch findet er das LORENTZsche Theorem der Relativität und — das liegt in diesen Betrachtungen — die analytische Grundlage für seine tiefgründigen Ansichten über Raum und Zeit.

Wir wollen ihm nicht auf dem analytischen Wege folgen, sondern vielmehr versuchen, seine Grundgedanken in fast anschaulicher Darstellung und in sehr elementarer Gestalt zu geben [28].

Wir wollen daher die Betrachtungen wieder aufnehmen, die wir soeben abgebrochen haben, und die uns sehr nützlich sein werden.

Man fasse das wurmförmige Wesen ins Auge, dessen zweidimensionale Welt die xt-Ebene ist; welche Änderung wird man vornehmen müssen, wenn sich der Beobachter selbst mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt und die relative Bewegung beobachten will?

Augenscheinlich genügt es, nach den NEWTONschen Prinzipien die t-Achse in eine geneigte t'-Achse zu verwandeln und immer dieselbe x-Achse

(26) V. VOLTERRA, *Sull'applicazione del metodo delle imagini alle equazioni di tipo iperbolico.* « Atti del IV Congr. intern. dei Matematici ». Roma 1908. Bd. II, 90, 1909. [In questo vol.: XVI, pp. 265–268].

(27) Vgl. Anm. 17.

(28) Es gibt eine grosse Zahl elementarer Darstellungen dieser Theorie. Ich erwähne z. B. die von G. CASTELNUOVO, *Sulla evoluzione delle misure dello spazio e del tempo.* « Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze ». V. Riunione. Roma, Okt. 1911, S. 47. — Die vollständigte und umfassendste Darstellung der Relativitätstheorie findet sich in dem Buch: MAX LAUE, *Das Relativitätsprinzip*, 2. Auflage, Braunschweig 1913. (Sammlung « Wissenschaft », Bd. 38). Dort werden auch alle bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand zitiert.

beizubehalten. Tatsächlich wird ja jeder Punkt A, der dieselbe gleichförmige Geschwindigkeit besitzt, durch eine Parallele zur t'–Achse dargestellt und erscheint daher ruhend (Fig. 5). Andererseits bleiben die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik ungeändert, wenn man die Koordinaten x und t in $x - at$ und t verwandelt; das entspricht nach den Sätzen der analytischen Geometrie einem Übergang vom xt–System zum xt'–System.

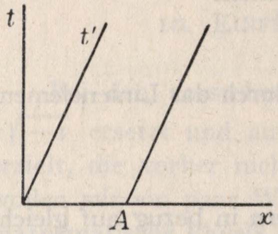


Fig. 5.

Man kann daher den Satz aussprechen: „ Das NEWTONsche Relativitätsprinzip besteht in der Möglichkeit, vom xt–System zum xt'–System überzugehen, ohne dabei die Ausdrücke für die Gesetze der Mechanik zu ändern. " Das hat statt für den Fall der zweidimensionalen MINKOWSKIschen Welt. Für den Fall der vierdimensionalen MINKOWSKIschen Welt lässt sich dasselbe Gesetz dahin aussprechen, dass man vom System x, y, z, t übergehen kann zum System x, y, z, t', d. h. die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik sind invariant gegen die Gruppe von Transformationen $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, t, wobei a, b, c drei beliebige Konstanten bezeichnen.

Wir wollen jetzt zur Ausbreitung des Lichts übergehen. Die Lichtgeschwindigkeit werde gleich 1 gesetzt. Wir zeichnen die Charakteristiken, von denen wir oben gesprochen haben, d. h., die durch den Anfangspunkt gehenden Winkelhalbierenden i, j, des Winkels zwischen x– und t–Achse (Fig. 6) und stellen das Postulat auf, dass die Geschwindigkeit des Lichts unveränderlich sei, auf welches System auch man immer sich beziehen möge.

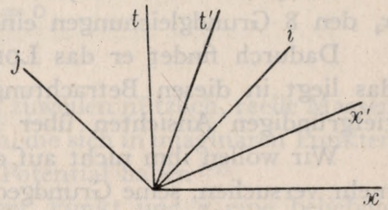


Fig. 6.

Es ist augenscheinlich, dass dieses Postulat im Widerspruch steht mit dem NEWTONschen Relativitätsprinzip, denn da i, j nicht die Winkel zwischen x– und t'–Achse halbieren, wird die Lichtgeschwindigkeit im neuen System einen andern Wert haben.

Wie muss man nun das NEWTONsche Relativitätsprinzip abändern, um diesen Widerspruch zu beseitigen?

Man ersieht sofort, dass man beim Übergang von der t'– zur t–Achse auch die x– in die x'–Achse verwandeln muss, damit die Geraden i, j immer die Gleichung haben

$$x' = \pm t'.$$

Betrachten wir nun ebenso das Flächenwesen und die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt. Wir zeichnen (Fig. 7) den charakteristischen Kegel, der die Gleichung hat

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Gehen wir von der t-Achse zu einer t'-Achse im Innern des Kegels über, so müssen wir zugleich auch die x- und die y-Achse derart in eine x'-bzw. y'-Achse verwandeln, dass die Gleichung des Kegels auch in Bezug auf die neuen Achsen die Gestalt behält

$$x'^2 + y'^2 - t'^2 = 0.$$

Gehen wir schliesslich zu den dreidimensionalen Wesen über, deren Welt vier Dimensionen hat, so haben wir eine derartige Transformation der Koordinaten und der Zeit vorzunehmen, dass die Gleichung

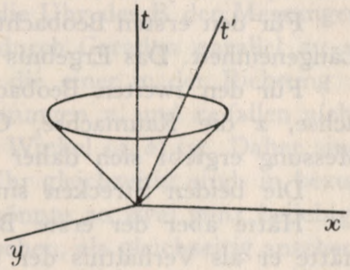


Fig. 7.

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

übergeht in

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0.$$

Wir haben also die NEWTONsche Transformationsgrupppe durch eine Gruppe von Transformationen zu ersetzen, die die quadratische Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in sich selbst überführt. Gegen diese Gruppe sind die LORENTZschen Gleichungen invariant.

Wir wollen zu dem einfacheren Fall zurückkehren. Wir zeichnen (Fig. 8) die Hyperbeln mit den Gleichungen

$$x^2 - t^2 = \pm 1.$$

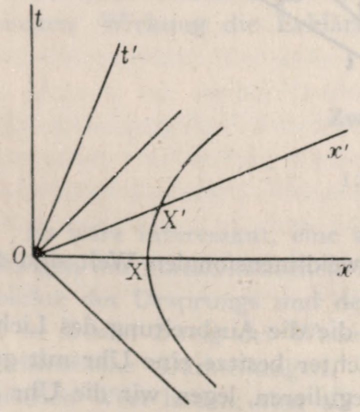


Fig. 8.

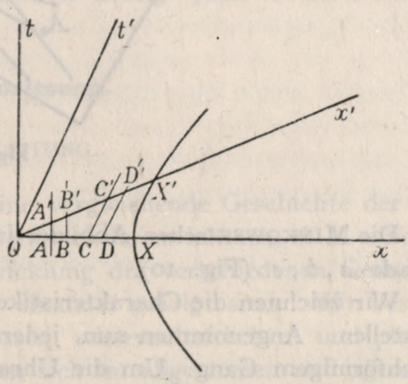


Fig. 9.

Die den verschiedenen Räumen x, x' entsprechenden Längeneinheiten sind die Abschnitte zwischen dem Anfangspunkt und der Kurve, d. h. OX, OX', · ·

Wir wollen jetzt zwei Strecken AB, CD auf der x-Achse ins Auge fassen, von denen die erste in Ruhe sei (Fig. 9). Diese wird durch einen

Streifen parallel zur t–Achse dargestellt. Die zweite Strecke bewege sich gleichförmig, daher wird sie durch einen gegen die x–Achse geneigten Streifen dargestellt. Zum Vergleich der Längen muss man sich zwei Beobachter denken, deren jeder relativ zu der Strecke ruht, welche er ausmisst.

Für den ersten Beobachter ist t die Zeitachse, x die Raumachse, OX die Längeneinheit. Das Ergebnis seiner Messung ist daher die Masszahl AB/OX.

Für den zweiten Beobachter ist t' parallel zum Streifen CD die Zeitachse, x die Raumachse, OX′ die Längeneinheit. Als Resultat seiner Messung ergiebt sich daher C′D′/OX′.

Die beiden Strecken sind gleich, wenn AB/OX = C′D′/OX′ ist.

Hätte aber der erste Beobachter beide Messungen vorgenommen, so hätte er als Verhältnis der beiden Strecken gefunden

$$\frac{CD}{AB} = \sqrt{1 - a^2}\,,$$

wenn a die Bewegungsgeschwindigkeit der Strecke ist. Daraus ergibt sich als Folgerung die LORENTZ–Kontraktion bewegter Körper.

Durch die vorstehenden Betrachtungen werden wir auf die Frage nach der Gleichzeitigkeit von Ereignissen geführt. Es seien A, B, C Punkte, die in gleichförmiger Bewegung längs einer Geraden x begriffen seien.

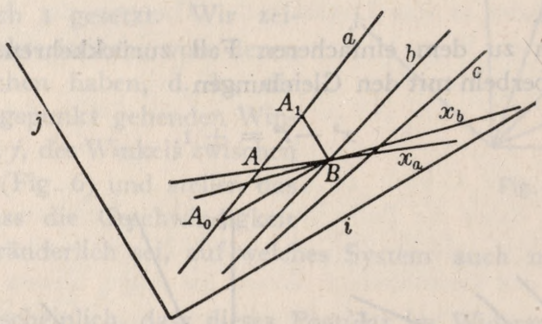


Fig. 10.

Die MINKOWSKIschen Abbilder in der zweidimensionalen Welt sind drei Gerade a, b, c. (Fig. 10).

Wir zeichnen die Charakteristiken i, j, die die Ausbreitung des Lichtes darstellen. Angenommen nun, jeder Beobachter besitze eine Uhr mit ganz gleichförmigem Gang. Um die Uhren zu regulieren, legen wir die Uhr des Beobachters A zugrunde. Wenn er sich zu der Zeit t_0 in A_0 befindet, gebe er ein Lichtsignal ab, das den zweiten Beobachter in B trifft. Dort wird das Signal des ersten Beobachters reflektiert und trifft diesen in A zur Zeit t_1. Die Geraden A_0B und BA_1 sind zu i bzw. j parallel.

Es werde nun das Übereinkommen getroffen, dass in dem Augenblick, wo der zweite Beobachter das Signal empfängt, die Uhr des B die Zeit $(t_0 + t_1)/2$ anzeigen soll.

Daher enthalten die Gerade AB und alle ihr parallelen Geraden ,, Orte der Gleichzeitigkeit " in bezug auf die Uhr des A. Man sieht nun sehr leicht, dass die Gerade AB die Richtung der Raumachse angibt, wenn man a als Richtung der Zeitachse annimmt.

Daraus ist zu schliessen, dass, wenn man die Uhr des B den Messungen zugrunde legt, die Orte der Gleichzeitigkeit durch Geraden parallel zu x_b gebildet würden, d. h. zu der Raumachse, die einer in der Richtung b gewählten Zeitachse entspricht. Aber die Richtungen x_a und x_b fallen nicht zusammen, da der Winkel (x_a, x_b) gleich dem Winkel (a, b) ist. Daher sind solche Ereignisse, die in Bezug auf die erste Uhr gleichzeitig sind, in bezug auf die zweite Uhr nicht gleichzeitig. Man könnte so zwei ganz beliebige Ereignisse, die zwei Punkten A und B entsprechen, als gleichzeitig ansehen, vorausgesetzt nur, dass die Gerade AB um weniger als 45° gegen die x-Achse geneigt ist.

Wir haben von der LORENTZ-Transformation und der LORENTZ-Kontraktion gesprochen. Zum Schluss wollen wir noch die Beziehungen berühren, die zwischen dieser Transformation und den Fragen der Variationsrechnung bestehen, welche den Gegenstand eines Teils dieser Vorlesung gebildet haben.

Wir haben die Herleitung der elektrodynamischen Gleichungen aus den Aufgaben der Variationsrechnung für den Fall ruhender Systeme gezeigt. Aber LORENTZ hat gezeigt, dass man für den Fall bewegter Körper ein ähnliches Ergebnis erhalten kann; POINCARÉ [29] ist darauf zurückgekommen und hat bewiesen, dass die LORENTZ-Transformation die Eigenschaft hat, den Ausdruck, der bei den Aufgaben der Variationsrechnung unter dem Integral erscheint, unverändert zu erhalten; d. h., die sogenannte ,, Wirkung " ändert sich bei einer LORENTZ-Transformation nicht. So liefert das Prinzip der kleinsten Wirkung die Erklärung für den Erfolg jener Transformation.

Zweite Vorlesung.

12. EINLEITUNG.

Es wäre interessant, eine allgemeine vergleichende Geschichte der Forschungen der mathematischen Physik entwickeln zu können, d. h. eine Geschichte des Ursprungs und der Entwicklung der verschiedenen Gedanken, die in diesem Zweig der Wissenschaft einander gefolgt sind. Wir besitzen geschichtliche Darstellungen, die grossen wissenschaftlichen und philosophischen Wert haben; aber sie beziehen sich im allgemeinen auf irgend ein spezielles Kapitel.

Der berühmte Verfasser der ,, Mechanik in ihrer Entwicklung ", E. MACH, der ausgezeichnete Philosoph, der mächtig zur modernen Entwicklung der Philosophie der Wissenschaften beigetragen hat, hat uns Abhandlungen geschenkt, die das grösste Interesse besitzen.

(29) H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron.* «Circ. mat. Pal.», **21**, 129, 1906.

TODHUNTER und PEARSON haben eine sehr wertvolle Geschichte der Untersuchungen über die Elastizität veröffentlicht, in der die Fortschritte dieser Theorie mit grösster Sorgfalt und Ausführlichkeit klargelegt werden, und auch andre Schriftsteller haben einzelne Punkte beleuchtet; aber im ganzen bliebe doch meiner Meinung nach noch viel zu sagen.

Es wäre lehrreich, den nimmer ruhenden Kampf zu verfolgen zwischen den Emissions- und den Undulationstheorien, zwischen den atomistischen und den antikorpuskularen Theorien, zwischen den mechanischen Erklärungen der Erscheinungen und den empirischen Theorien, und es wäre nützlich, die Stellung zu untersuchen, die die verschiedenen Geister gegenüber der Frage der Fernwirkung und der Nahewirkung eingenommen haben.

Der Krieg gegen die ,, mechanische Mythologie '', die Entstehung und die Wandlungen der Energetik sind Merksteine auf dem Wege wissenschaftlichen Fortschritts, die man mit grossem Gewinn einer nochmaligen Betrachtung unterziehen könnte. Solche Studien würden den Geist der verschiedenen Schulen, man könnte sagen, der einzelnen Rassen klar und scharf hervortreten lassen. Man würde endlich noch erkennen, wie sich manchmal daneben, manchmal vorauseilend und am häufigsten hinterher die mathematische Analysis allmählich entwickelt. Aber hierzu mangelt uns die Zeit, und es wäre für mich zu schwierig, selbst nur im Abriss ein Bild von diesen geistigen Strömungen zu geben die seit mehr als einem Jahrhundert mit so grossem Erfolg zur Förderung des wissenschaftlichen Geistes und zu zahlreichen praktischen Anwendungen beigetragen haben.

Ich werde mich bei diesen Vorlesungen in engen Grenzen halten und nur einen besondern Zweig ins Auge fassen, und auch diesen nur von einem bestimmten Gesichtspunkt aus.

Ich werde mich darauf beschränken, einige Punkte aus der Entwicklung der Elastizitätstheorie zu behandeln, die aber doch sehr treffende Beispiele für einige der eben erwähnten Fragen abgeben können.

Zugleich werde ich einerseits an die vorhergehende Vorlesung anknüpfen, weil gerade die Elastizitätstheorie eine Zeitlang die Wellentheorie beherrscht hat, und andrerseits wird das, was ich sagen will, eine Einleitung in die folgende Vorlesung sein, teils in Bezug auf die analytischen Methoden, teils in Bezug auf die physikalischen Gedanken, die dem Ganzen zugrunde liegen.

Ich habe soeben von dem grossen Werk von TODHUNTER und PEARSON gesprochen. Mein kurzer Abriss wird zwar nichts mit dieser ins Einzelne gehenden Geschichte zu tun haben; aber andrerseits sind bei der Anlage jenes Werkes die neuesten Arbeiten nicht berücksichtigt, und gerade mit diesen will ich mich heute hauptsächlich beschäftigen.

13. Alte und neue Probleme der Elastizitätstheorie.

Seit GALILEI, der zum erstenmal die Frage nach der Biegung eines Balkens gestellt hat, hat man immer versucht, die Mathematik auf die Probleme der Elastizität anzuwenden.

Man hatte dabei keine theoretischen Fragen im Auge und war weit entfernt von dem Gedanken, auf diese Weise die Grundlagen der modernen Optik vorzubereiten; man war durch praktische Fragen, die das Gebiet der Baukunst betrafen, auf diese Aufgaben geführt worden.

Nach sehr vielen Versuchen ist es gelungen, die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper aufzustellen. Das sogenannte HOOKEsche Gesetz ist die Grundlage gewesen, aber man hat den ursprünglichen Ausdruck dafür erst umformen müssen, um es auf den allgemeinen Fall anwenden zu können. Wir werden dieses Gesetz in der nächsten Vorlesung näher kennen lernen.

Wir wollen uns jetzt auf die Feststellung beschränken, dass das Verdienst, eine allgemeine Gleichung gewonnen zu haben, NAVIER gebührt, aber man muss zu seinem Namen noch die Namen von LAMÉ, CAUCHY, POISSON, GREEN u. a. m. hinzufügen.

Ich möchte noch bemerken, dass diese Forscher Gleichungen aufgestellt haben, die in erster Annäherung ganz allgemein allen Problemen entsprechen, die sich überhaupt darbieten können, und das hängt wieder, wie schon in der ersten Vorlesung gesagt, mit dem philosophischen Geist zusammen, der schon in der klassischen Mechanik herrschte.

Jeder kennt den Unterschied, den POISSON zwischen der analytischen und der physikalischen Mechanik gemacht hat, welche er jener gegenüberstellte. Die von LAGRANGE eingeführten Zwangskräfte herrschen in jener; die Spannungen sind von diesem Standpunkt aus Zwangskräfte. Demgegenüber sind sie nach POISSON das Ergebnis molekularer Wirkungen. Die Materie ist kontinuierlich für die analytische Mechanik, für die physikalische Mechanik ist sie diskontinuierlich und aus Teilchen zusammengesetzt.

LAPLACE hat den Vorschlag gemacht, die verschiedenen Theorien auf der Grundlage der Molekularhypothese und der Fernwirkung aufzubauen, und POISSON hat diesen Grundgedanken ausgeführt.

Man kann sich der Erkenntnis nicht verschliessen, dass die Elastizitätstheorie aus diesen erwähnten Theorien zuerst hervorgegangen ist. Tatsächlich sind NAVIER und seine Nachfolger von Molekularhypothesen ausgegangen, und durch Grenzübergang und Ersetzung der Summen durch Integrale sind sie zu den Differentialgleichungen gelangt. Erst später hat man die Methoden der analytischen Mechanik und der Energetik angewandt, um die allgemeinen Elastizitätsgleichungen zu erhalten.

POISSON und CAUCHY nahmen an, dass die wirkenden Kräfte Zentralkräfte seien. Auf Grund dieser Annahme kommt man, wie wohl bekannt ist, zu Ergebnissen, die mit den Beobachtungen in Widerspruch stehen. Will man daher die Methoden der physikalischen Mechanik befolgen, so muss man die Hypothese der Zentralkräfte aufgeben und annehmen, dass die inneren Kräfte von der Stellung der Molekeln abhängen. Auf diese Weise kann man dasselbe Ergebnis erhalten wie bei Zugrundelegung der Hypothese der kontinuierlichen Raumerfüllung und bei Anwendung der allgemeinen Grundsätze der Energetik.

Man hat auch Versuche gemacht, die Hypothese der Zentralkräfte mit den Ergebnissen der Beobachtung in Einklang zu setzen, und zwar dadurch, dass man die Bewegung der Molekeln berücksichtigte; aber ich will darauf nicht weiter eingehen. Im Anschluss an die Auseinandersetzung in der ersten Vorlesung muss ich hinzufügen, dass, wenn man die Fernwirkungen durch elastische Wirkungen zwischen benachbarten Teilchen zu erklären sucht, wie es MAXWELL getan hat, man vom ersten Augenblick an die Elastizitätstheorie auf den Methoden der analytischen Mechanik aufbauen muss, weil sonst die Fernwirkung, die auf der einen Seite beseitigt wird, auf der andern wiedererscheinen würde.

14. ELASTIZITÄT UND RAUMKRÜMMUNG.

Ich habe vom HOOKEschen Gesetz gesprochen. Dieses Gesetz führt auf eine lineare Beziehung zwischen der Deformation und der Spannung, und darauf beruht der ganze analytische Erfolg der Elastizitätstheorie. Es ist, wie wir sehen werden, gelungen, die Differentialgleichungen in Integralgleichungen überzuführen, und in einigen Fällen ist man dadurch zu Ergebnissen von grosser Wichtigkeit gelangt. Auch die so gefundenen Integralgleichungen sind linear.

Aber das HOOKEsche Gesetz ist nur ein Annäherungsgesetz. Über diesen Punkt werden wir in der folgenden Vorlesung ausführlicher sprechen. Vorläufig kann man darüber Folgendes sagen: Versucht man, sich von den Gliedern höherer Ordnung Rechenschaft abzulegen, d. h. setzt man voraus, dass zwischen Deformation und Spannung keine einfache lineare, sondern eine verwickeltere Beziehung besteht, so sind die Differentialgleichungen nicht mehr linear, und die klassischen analytischen Methoden können nicht mehr unmittelbar angewandt werden.

Ich habe in der vorhergehenden Vorlesung von der Transformation der Elastizitätsgleichungen gesprochen und habe gesagt, man könne sogar annehmen, dass der Raum ein von Null verschiedenes Krümmungsmass habe.

Man braucht dazu nur die Bedingungen wegzulassen, denen die Koeffizienten des Quadrats des Linienelements genügen müssen, damit der Raum euklidisch sei. BELTRAMI, CESÀRO, PADOVA und andere Geometer haben die Frage in dieser Art angefasst [30].

Man hoffte, von hier aus durch Vergleich der Beobachtungen einiger Erscheinungen mit den Ergebnissen der Rechnung Aufschluss über das Krümmungsmass unseres Raumes zu gewinnen. Dieses Problem war das Hauptziel, das sich BELTRAMI im letzten Teil seiner wissenschaftlichen Laufbahn gesteckt hatte. Deshalb hat er die Theorie mehrerer physikalischer Erscheinungen in gekrümmten Räumen aufgestellt. Indes hat man daraus irgend ein positives Ergebnis nicht gewinnen können. KLEIN hat in Bezug

(30) Vgl. Anm. (6).

hierauf die Bemerkung gemacht, dass, wenn unser Raum wirklich eine Krümmung besässe, diese so klein sein würde, dass die den gewöhnlichen Elastizitätsgleichungen hinzuzufügenden Korrektionsglieder höchst wahrscheinlich von den Gliedern völlig verdeckt werden würden, die man vernachlassigt, um die Gleichungen linear zu machen. Immerhin haben die Versuche BELTRAMIS, eine mathematische Physik für Medien mit Raumkrümmung aufzustellen, ein Interesse, das über die blosse analytische Merkwürdigkeit hinausgeht. Vielleicht liegen darin Geheimnisse der Natur verborgen.

15. METHODEN ZUR INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Wir wollen jetzt zu der Frage nach der Integration der Elastizitätsgleichungen übergehen, mit der wir uns eingehend beschäftigen werden. Zunächst müssen wir einige Unterscheidungen treffen. Auf die eine Seite haben wir die Probleme des Gleichgewichts zu stellen, auf die andere die der Bewegung. Die Differentialgleichungen, die man in den beiden Fällen findet, gehören verschiedenen Typen an. Die ersten gehören zum elliptischen, die andern zum hyperbolischen Typus. Um an Beispielen den Unterschied zwischen den beiden Typen zu zeigen, betrachte ich die LAPLACEsche Gleichung, die elliptischen Typus hat,

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

und die Gleichung der verzögerten Potentiale dreier Variabeln, die vom hyperbolischen Typus ist,

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Wir haben schon in der vorigen Vorlesung gesehen, dass man von dem einen Typus zum andern dadurch übergehen kann, dass man die Zeit als imaginäre Koordinate ansieht.

Im Hinblick auf die funktionalen Eigenschaften bestehen die wesentlichen Merkmale der beiden Typen in Folgendem: Im ersten (elliptischen) Fall bestimmen die Werte von u auf der Umrandung eines gewissen Feldes die Werte im Innern, und eine Unstetigkeit oder Singularität auf dem Rande pflanzt sich nicht ins Innere fort. Im zweiten Fall muss der durch die Variabeln x, y, t bestimmte Raum in Bezug auf jeden inneren Punkt A durch denjenigen charakteristischen Kegel in drei Bezirke I, II, III geteilt werden, der seine Spitze in A hat (Fig. 11). Zeichnet man eine Fläche, für die A ein innerer Punkt ist, so wird diese durch den Kegel in drei Teile 1, 2, 3 geteilt. Der Wert von u im Scheitel des Kegels kann aus den

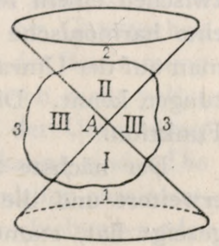


Fig. 11.

Werten von u und seinen Ableitungen auf einem der drei Teile 1, 2, 3 berechnet werden [31].

Ausserdem pflanzen sich Singularitäten auf der Oberfläche ins Innere fort.

Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn man von den betrachteten einfachen Gleichungen zu den Gleichungssystemen übergeht, welche die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Körper angeben.

Was die allgemeinen Methoden zur Integration der Differentialgleichungen anbetrifft, so kann man sie in zwei grosse Klassen einordnen: solche, die sich mehr oder weniger unmittelbar dem Grundgedanken von GREEN anschliessen, und die der einfachen Lösungen, die von FOURIER stammen.

Man kann die ersten Methoden unterscheiden in reine Methoden, bei denen der unveränderte GREENsche Gedankengang allein hinreichend ist, und in solche Methoden, bei denen der ursprüngliche GREENsche Gedanke durch die offene oder versteckte (KIRCHHOFF) Einführung eines neuen Gedankens weiter entwickelt worden ist, nämlich durch die Einführung der Charakteristiken. Jene Methoden werden für die elliptischen, diese für die hyperbolischen Gleichungen benutzt.

Es ist schliesslich noch hinzuzufügen, dass in letzter Zeit alle diese Methoden durch die Verwendung der Integralgleichungen einen neuen Aufschwung gewonnen haben. Der Übertragungsgedanke ist Ursache dafür gewesen, dass diese Methoden auch auf ein neues Gebiet übertragen worden sind, von dem in der letzten Vorlesung die Rede sein soll.

16. ENTWICKLUNG DER GREENSCHEN METHODE.

Wir wollen uns zunächst an die GREENsche Methode halten und ihre Entwicklung verfolgen. Ich will mit ein paar Worten die aufeinanderfolgenden Hauptpunkte der Entwicklung beschreiben. Zuerst hatte man die reine, auf die LAPLACEsche Gleichung angewandte GREENsche Methode.

Zwei beliebige reguläre Funktionen, die der Gleichung $\triangle^2 u = 0$ genügen, erfüllen ein allgemeines Reziprozitätsgesetz. Nimmt man eine dieser Funktionen gleich der Fundamentallösung $1/r$, wobei r die Entfernung zwischen einem festen und einem veränderlichen Punkt ist, so gelingt es, eine harmonische Funktion im Innern eines Feldes zu bestimmen, sobald man auf der Umrandung die Werte der Funktion und ihrer normalen Ableitungen kennt. Die letzteren verschwinden bei Einführung der GREENschen Funktion.

Der nächste Schritt, der mit einem Schlage die GREENsche Methode erweitert und die Fruchtbarkeit seines Gedankens in ganz neuem Lichte gezeigt hat, stammt von BETTI. Er hat nämlich die GREENsche Methode auf ein elastisches Feld übertragen bei dem man nicht mehr eine einzelne

(31) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*. «Acta Math.», **18**, 161, 1894. [In queste «Opere»: vol. secondo, III, pp. 19–73].

Differentialgleichung, sondern ein System von Differentialgleichungen hat (32). BETTI hat zuerst das Reziprozitätstheorem durch folgenden Satz erweitert:

„Wenn zwei Systeme von äusseren Kräften zwei Systeme von Verschiebungen an einem elastischen Körper bestimmen, so ist die Arbeit, welche das erste Kraftsystem leistet, wenn es dem Körper die zweite Verschiebung erteilt, gleich der Arbeit, die das zweite Kraftsystem bei Eintritt der ersten Verschiebung an dem Körper leistet“.

Nachdem dieser Satz entdeckt war, hatte man ihn zur Bestimmung der Werte der Verschiebungen im Innern des Körpers anzuwenden, wenn auf der Umrandung die Werte der Verschiebungen selbst oder die Spannungen gegeben und die inneren Massenkräfte bekannt waren.

Zwei Wege boten sich zur Lösung dieser Aufgabe für den Fall isotroper Körper dar; den einen hat BETTI zuerst eingeschlagen, den andern hat SOMIGLIANA später betreten. BETTI eliminierte zunächst die Massenkräfte, was keine Schwierigkeit bot. Er hat dann vier Fundamentallösungen berechnet, die ihm zur Bestimmung der Dilatation und der drei Rotationskomponenten jedes Teilchens des elastischen Mediums als Funktionen der Verschiebungen und der Spannungen an der Umrandung gedient haben. Er hat dann gezeigt, dass man von hier aus die inneren Verschiebungen finden kann.

Obschon dieses Verfahren einfach ist, so ist es doch nicht unmittelbar zu nennen. SOMIGLIANA hat dem gegenüber einen unmittelbaren Weg eingeschlagen; er hat nämlich Fundamentallösungen bestimmt, die ihm unter Anwendung des Reziprozitätsgesetzes zur Bestimmung der Verschiebungen ohne den Umweg über die Dilatation und die Rotationen gedient haben (33).

Es hat keine Schwierigkeit, zwischen den Ergebnissen von BETTI und denen von SOMIGLIANA die Brücke zu schlagen und zu zeigen, dass sich die einen aus den andern herleiten lassen.

Eine andere, ganz ähnliche Erweiterung der GREENschen Methode, die an ein sehr modernes Problem anknüpft, bezieht sich auf die verallgemeinerte LAPLACEsche Gleichung, d. h. auf die Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 = 0$ und allgemein $\triangle^2 \triangle^2 \cdots \triangle^2 = 0$.

Wir werden in kurzem die Wichtigkeit dieses Problems kennen lernen.

Wir haben schon gesagt, dass durch die Auffindung der GREENschen Formel zur Lösung der LAPLACEschen Gleichung das Problem der Bestimmung einer harmonischen Funktion bei gegebenen Randwerten noch nicht gelöst ist. Die GREENsche Formel löst das Problem, wenn auf der Umrandung die Werte der Funktion und der normalen Ableitung bekannt sind. Die letzteren werden, wie schon gesagt, durch die GREENsche Funktion eliminiert. Ebenso werden im Elastizitätsprobleme die Werte der Verschiebungen oder

(32) E. BETTI, *Teoria della elasticità.* « Nuovo Cimento » (2), **7–8**, 5; 69; 158; 357. 1872; **9**, 34; **10**, 58, 1873.

(33) C. SOMIGLIANA, *Sulle equazioni della elasticità.* « Annali di Mat. » (2), **17**, 37, 1889/90.

die Drucke an der Umrandung durch entsprechende Funktionen eliminiert. Ihre Bestimmung lässt sich vollständig vornehmen für den Fall der Kugel und, wenn man das zweidimensionale Problem betrachtet, für den Fall des Kreises. Deshalb nehmen das Problem der Kugel und das des Kreises im Felde dieser Fragen eine bevorzugte Stellung ein. Die Fälle der Eben und der Geraden können als Grenzfälle angesehen werden. Dasselbe lässt sich für den Fall der verallgemeinerten LAPLACEschen Gleichung wiederholen.

17. Untersuchungen von Kirchhoff, Huygens und Poisson.

Wir wollen jetzt zu den Anwendungen der GREENschen Methode auf die Gleichungen vom hyperbolischen Typus übergehen und uns zuerst an die Arbeiten von KIRCHHOFF (34) halten.

Der Fall, den er behandelt hat, ist der der Gleichung

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ,$$

d. h. der Fall des verzögerten Potentials mit 4 Variabeln.

Der Raum, mit dem er es zu tun hat, ist ein vierdimensionaler Raum, der, wie wir in der ersten Vorlesung gesehen haben, die MINKOWSKIsche Welt bildet; aber bei seiner Methode treten die auf die Überwelt bezüglichen Betrachtungen nicht als solche hervor. Er beginnt mit dem Reziprozitätssatz und nimmt darauf als Fundamentallösung die EULERsche Lösung, die die Form $f(r+t)/r$ hat. Von hier aus gelangt er zum Ziele, so dass seine Methode deswegen erfolgreich ist, weil dieses Integral besteht. Wie in der ersten Vorlesung bemerkt, ist die Existenz dieses Integrals mit der Tatsache verknüpft, dass die Kugelwelle für den Fall eines isotropen dreidimensionalen Mediums eine Welle ohne Residuum ist.

Die KIRCHHOFFsche Formel hat den Schlüssel zum HUYGENSschen Prinzip gegeben. Zwar wurde dieses Prinzip auch vor KIRCHHOFF angewandt, aber man verband keinen ganz exakte Begriff damit. Tatsächlich haben auch die Erörterungen und Streitigkeiten über dieses Prinzip erst nach der Entdeckung jener Formel aufgehört.

Bei dieser Gelegenheit ist es interessant, auf eine Frage zurückzukommen, über die ein heftiger Streit zwischen FRESNEL und POISSON geführt worden ist. Wir wollen sogleich mit einigen Worten darauf eingehen. Zuvor aber müssen wir von einer berühmten, von POISSON entdeckten Formel sprechen. Wenn der betrachtete Raum sphärisch ist und der Pol sich im Mittelpunkte der Kugel befindet, so führt die GREENsche Formel auf einen wohlbekannten Satz von GAUSS, welcher besagt, dass für jede harmonische Funktion der Wert im Mittelpunkte der Kugel gleich dem Mittel aus ihren

(34) G. KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*. « Sitz.-Ber, d. Akad. d. Wiss. », zu Berlin 1882 (2 Sem.), S. 641.

Werten auf der Kugeloberfläche ist. Wenden wir ebenso die KIRCHHOFFsche Formel auf den Fall einer Kugel an, und befindet sich der Pol im Mittelpunkte, so erhalten wir das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$, das POISSON längst vor der KIRCHHOFFschen Formel gegeben hatte (35). POISSON hat dieses Integral nach ganz anderen Methoden erhalten, Methoden, die man heute fast ganz aufgegeben hat, die aber doch ein grosses Interesse besitzen; denn sie sind ausserordentlich fruchtbar gewesen und haben ihm die Integration einer grossen Zahl von Differentialgleichungen ermöglicht. Die POISSONsche Methode bestand darin, dass er das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$ in eine Reihe von Potenzen von t entwickelte und darauf die Reihe durch bestimmte Integrale summierte. Will man heutzutage das POISSONsche Integral erhalten, so kann man unmittelbar aufs Ziel losgehen ohne den Umweg über die KIRCHHOFFsche Formel, und es ist auch ebensowenig nötig, POISSON zu folgen. Die neueren Abhandlungen geben tatsächlich sehr elegante und sehr einfache Methoden, durch die alles auf die Aufsuchung des d'ALEMBERTschen Integrals der Gleichung für schwingende Saiten zurückgeführt wird. Alles, was mit der Gleichung $\square u = 0$ in Beziehung steht, ist in dem POISSONschen Integral enthalten, und wenn man darin zu lesen versteht, so sieht man darin selbst ganz klar und deutlich das HUYGENSsche Prinzip in seiner vollen Allgemeinheit erscheinen.

Das hat BELTRAMI (36) in einer seiner schönen Abhandlungen gezeigt; er hat dort bewiesen, dass POISSON vom analytischen Standpunkte aus alles besass, was nötig war, um in den Geist jenes Prinzips einzudringen.

POISSON selbst dagegen glaubte nicht daran, wie sein Streit mit FRESNEL beweist, der in ausgedehntem Masse das HUYGENSsche Prinzip in intuitiver Weise anwandte, ohne dafür einem vollständigen Beweis zu haben, wenn schon er es in klarer und treffender Darstellung rechtfertigte.

Das ist ein Beispiel dafür, dass das geistige Auge des Physikers durch die unmittelbare, nicht auf Beweis beruhende Erkenntnis der Erscheinungen weiter reicht als das des Mathematikers. Aber solche Intuition kann auch gefährlich sein.

Tatsächlich würde man in Irrtum verfallen, wenn man die gleichen intuitiven Betrachtungen auf die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

anwenden wollte. Wie wir in der ersten Vorlesung gezeigt haben, besitzt in diesem Falle die Welle Residuen, und das HUYGENSsche Prinzip gilt nicht, wenigstens nicht in der klassischen Form, wie HUYGENS es ausgesprochen hat.

(35) POISSON, *Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques.* « Mém. de l'Acad. des Sc. de l'Institut de France ». **3**, 121, 1818.

(36) E. BELTRAMI, *Sul principio di Huygens.* « Rend. Ist. Lombardo » (2). **22**, 428. 1889.

18. Die Charakteristiken.

Wollen wir die Entwicklung der Grundvorstellungen von GREEN weiter verfolgen, so müssen wir von der Gleichung $\square u = 0$ mit vier Variabeln zu der Gleichung mit drei Variabeln übergehen. Dieser Übergang stellt, wie er auch immer auf den ersten Anblick scheinen möge, einen Schritt vorwärts dar, denn der Fall dreier Variabeln ist schwieriger als der Fall von vier Variablen.

Die GREENsche Methode könnte, so wie sie KIRCHHOFF für die hyperbolischen Gleichungen umgestaltet hat, auch auf die Gleichung mit drei Variabeln

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

angewandt werden, aber man müsste ein Fundamentalintegral finden, dessen Natur von dem von KIRCHHOFF verwandten EULERschen Integral gänzlich verschieden ist.

Das Integral, das an die Stelle des EULERschen treten muss, ist dadurch komplizierter als dieses, dass es bestimmte Integrale enthält. Ich will das Endergebnis aussprechen, das man auf diesem Wege findet (37).

Fassen wir die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt ins Auge und betrachten wir einen beliebigen Zylinder, dessen Erzeugende parallel zur t–Achse sind (Fig. 12). Wir nehmen einen Punkt im Innern des Zylinders und zeichnen den charakteristischen Kegel, dessen Mantel den Zylinder längs einer Linie s schneidet. Man kann den Wert des Integrals für den Scheitel des Kegels durch die Werte ausdrücken, die des Integral und seine normale Abgeleitete auf dem Teil der Zylinderoberfläche von der Linie s bis ins Unendliche besitzt.

Andererseits haben wir soeben von dem allgemeinen POISSONschen Integral gesprochen. Man kann es durch die Annahme spezialisieren, dass es unabhängig von z sei.

Es gibt alsdann das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$ mit drei Variabeln an und wird PARSEVALsches Integral genannt. Betrachten wir die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt und den charakteristischen Kegel eines Punktes (Fig. 13). Der Kegel schneidet die xy–Ebene in einem Kreise. Die PARSEVALsche Formel liefert den Wert des Integrals im Scheitel des Kegels ausgedrückt durch die Werte, die das Integral selbst und seine normale Abgeleitete auf dem Kreise besitzt.

Bei Vereinigung der beiden Formeln wird man auf die Aufgabe geführt, das Integral zu bestimmen, wenn man den Wert des Integrals selbst und den seiner normalen Ableitung auf einer durch den Kegel begrenzten Fläche

(37) V. VOLTERRA, *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi*. « Rend. Acc. dei Lincei » (5) **1** (2 Sem.), 161, 1892. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXIV, pp. 559–567]. (Vgl. Anm. 19).

σ kennt, die aus einem zylindrischen und einem ebenen Teile besteht (Fig. 14), oder die ganz allgemein irgendwie gestaltet ist (Fig. 15).

Zur Lösung dieser Aufgabe ist die reine GREENsche Methode ebenso unzureichend wie die GREEN-KIRCHHOFFsche. Ich habe da zu anderen

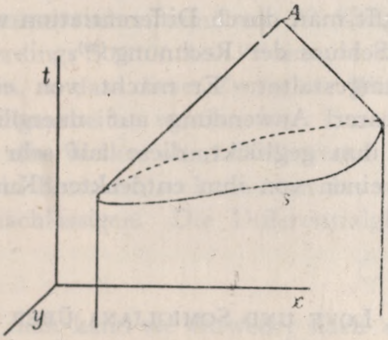


Fig. 12.

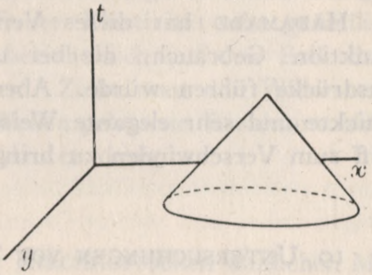


Fig. 13.

Methoden greifen müssen, d. h. ich habe von vornherein die Hauptrolle dem charakteristischen Kegel zugewiesen, der in den Ergebnissen hervortrat, ohne in den Rechnungen zu erscheinen (38). Um nun dem charakteristischen Kegel diese grundlegende Bedeutung zuzuteilen, war es zweckmässig, sich den von RIEMANN im Fall zweier Variabeln angewandten Methoden anzunähern.

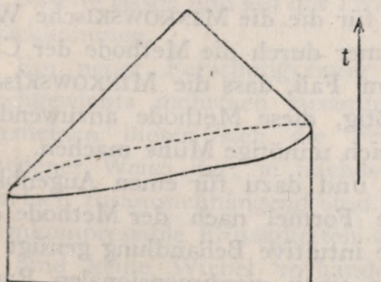


Fig. 14.

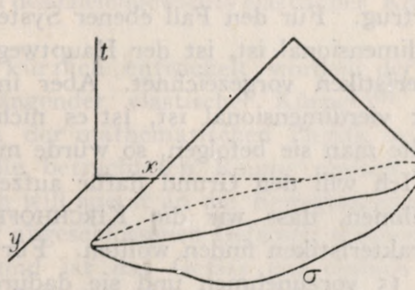


Fig. 15.

Die Methode der Charakteristiken, von der wir eben gesprochen haben, stellt die letzte Phase in der Entwicklung des ursprünglichen Gedankens dar. Man muss auch bei dieser Methode einen Reziprozitätssatz verwenden und sich einer Lösung bedienen, die die Rolle der Fundamentallösung spielt.

(38) V. VOLTERRA, « Rend. Linc. » (5), **1**, 265 (1892) und **2**, 389, 549, 1893 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXV, pp. 568-579 e vol. secondo, I-II, pp. 1-18]; « Acta math. », **18**, 161, 1894 [in queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19-73]; *Leçons sur l'intégration des équations diff.* gehalten in Stockholm 1912, 8. Vorl. [In questo vol.; X, pp. 63-141].

Für den Fall der Gleichung $\Box u = 0$ mit drei Variabeln wird die Lösung so gewählt, dass in der Reziprozitätsformel alle über die charakteristische Fläche erstreckten Glieder verschwinden, und dass nur ein über σ und ein über die Parallele zur t–Achse durch den Kegelscheitel erstrecktes Integral übrig bleibt.

Das zweite der beiden Integrale schafft man durch Differentiation weg, und der Wert im Scheitel erscheint am Schluss der Rechnung [39].

HADAMARD hat dieses Verfahren umgestaltet. Er macht von einer Funktion Gebrauch, die bei unmittelbarer Anwendung auf unendliche Ausdrücke führen würde. Aber es ist ihm geglückt, diese auf sehr geschickte und sehr elegante Weise durch einen von ihm entdeckten Kunstgriff zum Verschwinden zu bringen [40].

19. UNTERSUCHUNGEN VON TEDONE, LOVE UND SOMIGLIANA ÜBER SCHWINGUNGEN ELASTISCHER KÖRPER.

Die eben auseinandergesetzten Verfahren beziehen sich auf den Fall der Gleichung für das verzögerte Potential; will man aber das vollständige Problem ins Auge fassen, das sich in der Elastizitätslehre darbietet, so muss man auch die Systeme der Differentialgleichungen in Betracht ziehen, die die Gesetze für die Schwingungen elastischer Körper enthalten. Es ist daher nötig, einen ähnlichen Übergang zu machen, wie ihn BETTI vorgenommen hat, als er die GREENsche Methode von der LAPLACEschen Gleichung auf das System der Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Körper übertrug. Für den Fall ebener Systeme, für die die MINKOWSKIsche Welt dreidimensional ist, ist der Hauptweg immer durch die Methode der Charakteristiken vorgezeichnet. Aber in dem Fall, dass die MINKOWSKIsche Welt vierdimensional ist, ist es nicht nötig, diese Methode anzuwenden. Wollte man sie befolgen, so würde man sich unnötige Mühe machen.

Ich will den Grund dafür aufzeigen und dazu für einen Augenblick annehmen, dass wir die KIRCHHOFFsche Formel nach der Methode der Charakteristiken finden wollten. Für eine intuitive Behandlung genügt es, Fig. 15 vorzunehmen und sie dadurch in einen vierdimensionalen Raum zu versetzen, dass man allen ihren Teilen eine Dimension zufügt.

Bei diesem Übergang wird nun die Betrachtung von σ zwecklos, denn der Integralwert für den Kegelscheitel hängt nur von den Werten ab, die das Integral uns seine Ableitungen auf dem der Linie s entsprechenden Schnitt annehmen. Darum ist es nicht notwendig, ein Verfahren anzuwenden, bei dem σ und S in Betracht gezogen werden.

TEDONE hat gezeigt, dass σ tatsächlich herausfällt, und zwar dadurch, dass er die KIRCHHOFFsche Formel nach der Methode der Charakteristiken

(39) Die so gefundene Formel umfasst alle früheren. Vgl. D'ADHÉMAR, « Journ. de Math. » (5), **10**, 131, 1094.

(40) J. HADAMARD, « Acta Math. », **31**, 333, 1908.

berechnete. Er ist auch der erste gewesen, der dasselbe Verfahren auf die Gleichungen für die Schwingungen dreidimensionaler elastischer Körper ausgedehnt und so die allgemeinen Formeln gefunden hat, die den KIRCHHOFFschen entsprechen. Er hat aber bewiesen, dass man diese Formeln unmittelbar erhalten kann, wenn man einen Weg einschlägt, der sich dem KIRCHHOFFschen annähert. (41) Einige Zeit später haben LOVE (42) und ganz neuerdings SOMIGLIANA (43) unmittelbarere und vollständigere Methoden angegeben, so dass dieser Zweig der Wissenschaft der Elastizität sehr gründlich durchgearbeitet worden ist. Das Gesagte bezieht sich auf den Fall, dass sich die Wellen ohne Widerstand ausbreiten. Zieht man den Widerstand mit in Betracht, so kann man das von den Wellen gelassene Residuum nicht vernachlässigen. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\Box u = hu,$$

und man kann sie entweder nach einer der KIRCHHOFFschen ähnlichen Methode behandeln oder nach der Methode der Charakteristiken für vierdimensionale Räume. Nur nach der letzten Methode kann man allgemeine Ergebnisse finden (44).

20. Mehrfach zusammenhängende elastische Körper. Probleme der Distorsionen.

Wir wollen jetzt einen Schritt zurückgehen, die Fragen der Dynamik beiseite lassen und auf das Problem des Gleichgewichts elastischer Körper zurückkommen.

Ein neuer Forschungszweig ist kürzlich entwickelt worden: der des Gleichgewichts mehrfach zusammenhängender elastischer Körper (45). Im allgemeinen bieten sich die Fragen der mathematischen Physik in verschiedener Weise dar, je nachdem die betrachteten Räume einfach oder mehrfach zusammenhängend sind. Ich will zuerst an die Bewegungsgesetze für inkompressible Flüssigkeiten völlig abgeschlossenen Gefässen erinnern.

Sind keine Wirbel vorhanden, und ist das Gefäss ein einfach zusammenhängender Raum, so muss die Flüssigkeit notwendig in Ruhe sein. Sie kann dagegen in Bewegung sein, wenn das Gefäss röhrenförmig, d. h.,

(41) O. TEDONE, *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei isotropi*. «Mem. Acc. di Torino» (2), **47**, 181, 1897.

(42) LOVE, *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium*. «Proc. London Math. Soc.» (2), **1**, 91, 1904.

(43) C. SOMIGLIANA, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi* «Atti Acc. di Torino», **42**, 765, 1907.

(44) COULON, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques*. Paris 1902.

(45) V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. «Ann. de l'École Normale Paris», 24, 401, 1907 [in questo vol.: XIII, pp. 153-242].

allgemein mehrfach zusammenhängend ist. Die Ursache dieses Unterschieds liegt in Folgendem.

Wenn keine Wirbel vorhanden sind, so gibt es ein Geschwindigkeitspotential. Nun kann dieses Potential im Falle eines mehrfachen Zusammenhanges vieldeutig sein, im Falle des einfachen Zusammenhanges muss es aber eindeutig sein, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteilchen regulär sind.

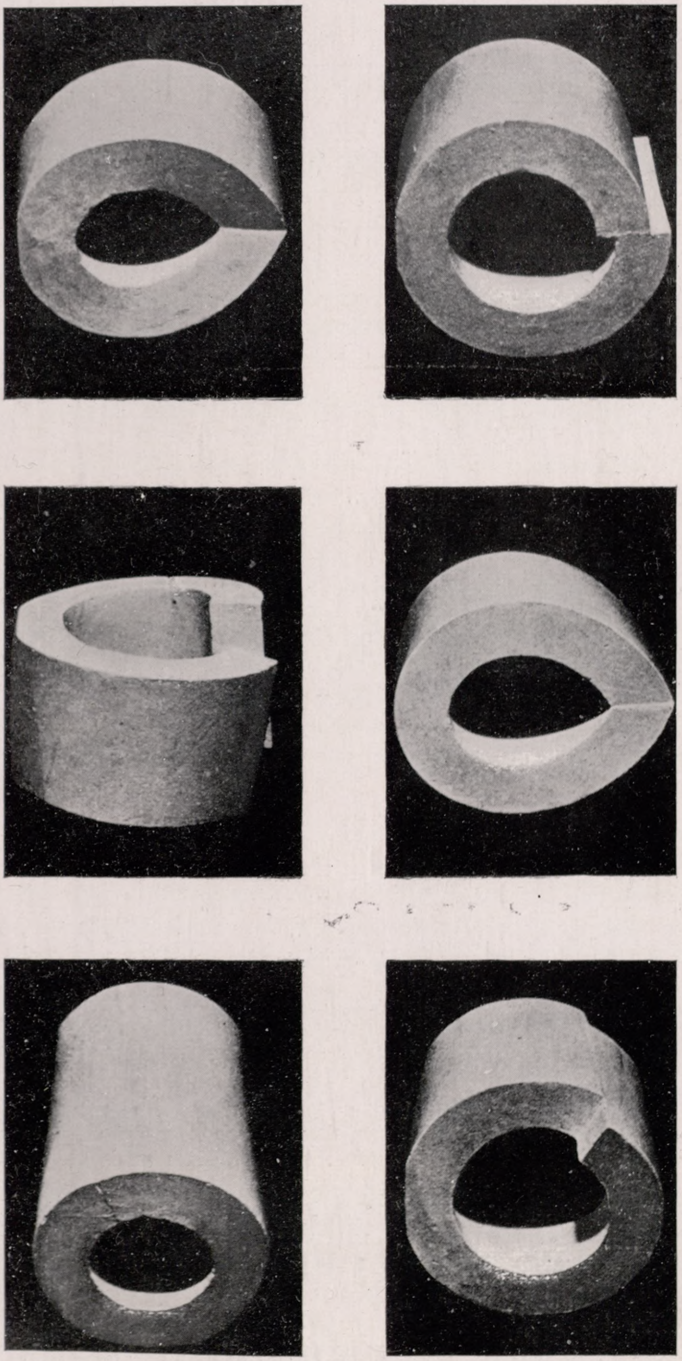
Ganz entsprechende Eigentümlichkeiten finden wir für das Gleichgewicht elastischer Körper. Bevor wir hierauf näher eingehen, müssen wir festsetzen, was man unter „reguläer Deformation" eines elastischen Körpers versteht. Wenn die Elemente, die die Deformation bestimmen, innerhalb eines bestimmten Gebiets eindeutige, endliche und stetige Funktionen sind und in dem Gebiet auch eindeutige, endliche und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen, so sagt man, in diesem Gebiet sei die Deformation regulär. Man kann Formeln aufstellen, mit deren Hilfe man aus der Deformation die Verschiebungen der Punkte des elastischen Körpers ermittelt. Wenn nun die Deformation regulär ist und der Körper einen einfach zusammenhängenden Raum einnimmt, so sind die Verschiebungen, eindeutige Funktionen; ist hingegen der Raum mehrfach zusammenhängend, so können sich die Verschiebungen mehrdeutig ergeben.

Man kann für diesen kinematischen Satz über die Deformation eine mechanische Deutung geben, und zwar folgendermassen: Ist ein elastischer Körper von einfach zasammenhängender Gestalt keinen äusseren Einwirkungen unterworfen, so muss er sich im natürlichen Zustand befinden, falls die Deformation regulär ist. Dagegen kann sich ein mehrfach zusammenhängender Körper in einem Spannungszustand befinden, selbst wenn die Deformation regulär und der Körper keinen äusseren Kräften unterworfen ist.

Es gibt daher für mehrfach zusammenhängende Körper Gleichgewichtsfälle, die für andere Körper nicht bestehen. In diesen Fällen wird die Spannung nicht durch äussere Kräfte hervorgebracht. Sie kann dadurch erhalten werden, dass man Distorsionen anwendet. Es ist ja wohl bekannt, dass ein mehrfach zusammenhängender Körper zerschnitten werden kann, ohne dass er dadurch in verschiedene Teile zerfällt. Nachdem wir den Körper durchgeschnitten haben, verschieben wir bei jedem Schnitt die beiden Schnittflächen gegeneinander, so dass die relativen Verschiebungen der verschiedenen Teilchenpaare (die vorher zusammenhielten, und die der Schnitt getrennt hat) sich aus gleichen Rotationen und Translationen zusammensetzen.

Schliesslich stellen wir den Zusammenhang und die Stetigkeit dadurch wieder her, dass wir, wo es nötig ist, Materie wegnehmen oder zufügen und die Teile unter sich wieder verbinden. Alle für jeden Schnitt vorgenommenen Operationen heissen zusammen eine Distorsion. Ist diese einmal ausgeführt worden, so ist die Deformation längs des Schnittes regulär ebenso wie in jedem anderen Teile des Körpers, so dass es unmöglich ist, den Ort zu finden, wo der Schnitt geführt worden ist, wenn man ihn an irgend einer

Tafel I.



Singularität in der Deformation zu erkennen versucht. Die Deformation ist sonach überall regulär, aber die Verschiebungen besitzen längs des Schnitts eine Unstetigkeit, und das bedeutet vom analytischen Standpunkte eine Vieldeutigkeit der Verschiebungen.

Da eine Distorsion durch eine Schraubenbewegung der Teilchenpaare gegeneinander bestimmt wird, die vor dem Schnitt zusammenhingen, und da ja jede Schraubenbewegung in drei Translationen und drei Rotationen in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt werden kann, so wird man jede Distorsion durch sechs Elemente bestimmen können, die den drei Translationen und den drei Rotationen entsprechen. Ist eins dieser Elemente gleich eins und sind die andern gleich null, so hat man eine „ elementare Distorsion ". Auf Tafel I sind Gipsmodelle der Gestalten abgebildet, die dicke Kautschukringe annehmen, wenn man sie den sechs elementaren Distorsionen unterwirft.

Vergleicht man sie mit den Ergebnissen der Rechnung, so bestätigen Messung und Beobachtung alle Einzelheiten, die die Rechnung vorausgesagt hatte. Wir werden sogleich von einer experimentellen Bestätigung sprechen, die eine noch weit grössere Genauigkeit besitzt.

Wir haben gesehen, dass sich das GREENsche Reziprozitätsprinzip auf die Elastizitätstheorie übertragen lässt, und dass es zu dem BETTIschen Satz führt. Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn die Verschiebungen infolge von Distorsionen vieldeutig werden, aber man erhält dann ein neues Reziprozitätsprinzip von ganz anderem Aussehen, welches die gesamte Theorie beherrscht.

Um dieses zu finden, setzen wir die Spannungen zusammen, die auf die Elemente einer Schnittfläche nach Vornahme der Distorsion ausgeübt werden. Man wird als Resultante eine Kraft und ein Kräftepaar erhalten. Man nennt das die „ Distorsionsdyname "[46], die auf die Schnittfläche ausgeübt wird. Zerlegt man die Kraft und das Kräftepaar nach den Koordinatenrichtungen, so erhält man sechs Elemente, die jede Distorsionsdyname bestimmen, ebenso wie jede Distorsion durch sechs Elemente bestimmt wird. Ist der Körper $(n + 1)$–fach zusammenhängend, so kann man n Schnitte vornehmen, und folglich hat man $6n$ Bestimmungsgrössen für die Dynamen: $S_1, S_2, \cdots, S_6$ und $6n$ Bestimmungsgrössen für die Distorsionen $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$. Diese Grössen entsprechen sich gegenseitig, d. h. S_i entspricht s_i, wenn man als entsprechende Elemente die Komponenten von Kräften und Translationen, von Kräftepaaren und Rotationen in Bezug auf die gleiche Richtung und denselben Schnitt ansieht. Nun kann man die charakteristischen Bestimmungsstücke der Distorsionsdynamen durch die der Distorsionen linear ausdrücken:

$$S_i = \sum_h E_{ih} s_h .$$

(46) « effort de distorsion ».

Die Koeffizienten E_{ih} sind symmetrisch, d. h. $E_{ih} = E_{hi}$. Hierin besteht das Reziprozitätstheorem. Schliesslich kann man auch noch eine mechanische Deutung dafür gewinnen.

Die Grundaufgabe der Theorie der Distorsionen besteht in der Bestimmung der Distorsionsdynamen, wenn die Distorsionen bekannt sind. Das eben ausgesprochene Reziprozitätstheorem beschränkt die Zahl der Unbekannten bei dem Problem erheblich.

Einer der Fälle, in denen die Grundaufgabe gelöst werden kann, ist der, dass der Körper aus einem Gitter gerader oder krummliniger Stäbe oder aus Spiralfedern gebildet wird. Die Theorie, die man hierüber entwickeln kann, entspricht der KIRCHHOFFschen über die Verteilung elektrischer Ströme in leitenden Drähten, aber die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten ist versechsfacht.

21. Experimentelle Bestätigungen der Elastizitätstheorie.

Ich will die Theorie der Distorsionen nicht verlassen, ohne von neuerdings gemachten Anwendungen zur experimentellen Bestätigung der theoretischen Gesetze der Elastizität zu sprechen.

Man stösst auf zwei verschiedene Schwierigkeiten, wenn man die Elastizitätstheorie experimentell bestätigen will. Einerseits ist es fast unmöglich, die äusseren Wirkungen auf die Oberfläche in stetiger Weise zu verteilen, ohne bei gar zu einfachen Fällen stehen zu bleiben.

Andererseits ist die experimentelle Bestätigung unvollständig, wenn man sich darauf beschränkt, nur die sichtbare Deformation des Körpers zu bestimmen, denn am interessantesten ist es gerade, die von der Rechnung vorausgesagte Verteilung der inneren Spannung zu bestätigen.

Die erste Schwierigkeit kann man dadurch umgehen, dass man jede äussere Einwirkung vermeidet und den Körper Distorsionen unterwirft. Dann wird die Deformation einzig und allein durch die Wirkungen hervorgerufen, die die verschiedenen Körperteile aufeinander ausüben. Die andere Schwierigkeit verschwindet, wenn man einen durchsichtigen elastischen Körper, etwa Gelatine, verwendet. Die auftretende Doppelbrechung zeigt die Verteilung der inneren Spannung an.

CORBINO und TRABACCHI haben diesen Gedanken mit grossem Erfolg verwirklicht [47]. Sie verwandten einen Hohlzylinder aus Gelatine von geringer Höhe, an dem sie dadurch Distorsionen erzeugten, dass sie Stücke mit radial gerichteten oder parallelen Grenzflächen herausschnitten und nachher die Schnittflächen wieder zusammenbrachten und verschmolzen.

(47) O. M. CORBINO, *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di* VOLTERRA *e la conseguente doppia rifrazione accidentale*. « Rend. Acc. dei Lincei » (5), **18** (1 Sem.), 437, 1909. G. C. TRABACCHI, *I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di* VOLTERRA. « Rend. Acc. dei Lincei » (5), **18** (1 Sem.), 444, 1909.

Sie beobachteten den Zylinder im polarisierten Licht, das sich in Richtung der Zylinderachse fortpflanzt, durch einen Analysator.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 16 skizziert. B ist eine Schale, in welche die den Distorsionen unterworfenen Gelatinezylinder gesetzt werden; P ist ein schwarzer Spiegel, der als Polarisator dient und ein Bündel polarisierten Lichts vertikal emporsendet.

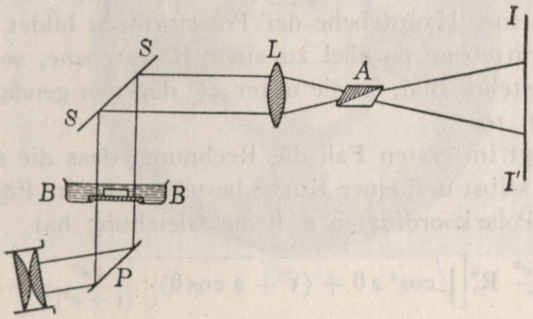


Fig. 16.

Nachdem das Lichtbündel den Zylinder durchsetzt hatte, wurde es durch den gewöhnlichen Spiegel S in horizontale Richtung gebracht, durch eine Linse L gesammelt und auf eine photographische II' Platte geworfen. In A war ein Nicol angebracht, das als Analysator diente.

Tafel II enthält die Photographien bei gekreuzten Nicols. Fig. 17 bezieht sich auf einen Zylinder, aus dem ein Sektor mit radial gerichteten Grenzflächen herausgeschnitten worden war. Man erhält ein schwarzes Kreuz und einen weissen Kreis. Das Bild ändert sich nicht, wenn man den Zylinder um seine Achse dreht. Die schwarzen Linien des Kreuzes entsprechen immer den Hauptebenen der gekreuzten Polarisatoren.

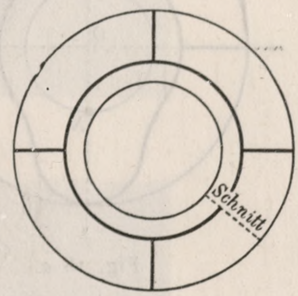


Fig. 17 *a*.

Andrerseits hat CORBINO auf Grund der Theorie der Doppelbrechung und der Theorie der Distorsionen die Intensität J der verschiednen Lichtstrahlen berechnet, die aus dem Gelatinezylinder herauskommen. Für J = 0 erhält man die Gleichung der schwarzen Linien. Man findet so drei Linien, nämlich die beiden Arme des Kreuzes und einen Kreis, dessen Radius

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}.$$

ist, wobei R_1 den äussern, R_2 den innern Radius des Hohlzylinders bedeutet. (Fig. 17 *a*). Daher kann die experimentelle Nachprüfung sehr streng vorgenommen werden, und man findet Werte, die mit grosser Genauigkeit mit den durch die Rechnung gelieferten zusammenfallen.

Die Figuren 18 und 19 auf Tafel II entsprechen der Distorsion, die durch Herausnahme eines Stücks mit parallelen Grenzflächen verursacht wird.

In diesem Fall ändert sich das Bild des Zylinders mit dem Winkel, den der Schnitt mit einer Hauptebene der Polarisatoren bildet.

Ist die Schnittebene parallel zu einer Hauptebene, so erhält man das in Fig. 18 dargestellte Bild; ist sie unter 45° dagegen geneigt, so erhält man das Bild in Fig. 19.

Dagegen zeigt im ersten Fall die Rechnung, dass die schwarzen Linien aus dem Schnitt selbst und einer Kurve bestehen, die in Fig. 18 *a* gezeichnet ist, und die in Polarkoordinaten r, θ die Gleichung hat

$$r^2 = \frac{1+e^2}{2e^2} R_1^2 \left[\sqrt{\cos^2 2\theta + (1 + 2\cos\theta) \cdot \frac{4e^2}{(1+e^2)^2}} - \cos 2\theta \right],$$

wobei e gleich dem Verhältnis R_1/R_2 ist.

Berechnet man ebenso im zweiten Fall die Beschaffenheit der schwarzen Linien, so findet man die Fig. 19 *a*. Der Vergleich zwischen den Figuren 18 und 18 *a*, 19 und 19 *a* zeigt eine vollkommene Übereinstimmung. Und

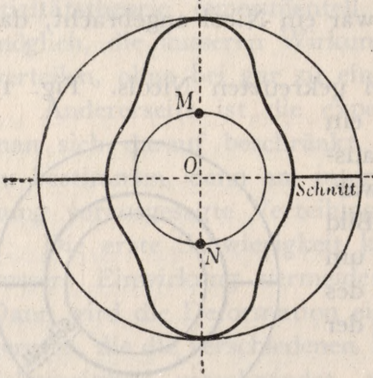


Fig. 18 *a*.

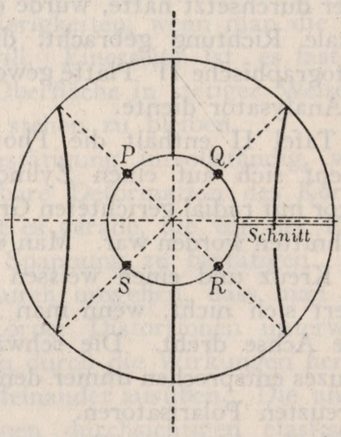


Fig. 19 *a*.

selbst wenn man den qualitativen und quantitativen Vergleich der Ergebnisse der Beobachtung mit denen der Rechnung weiter treibt bis zu den kleinsten Eigentümlichkeiten, wie sie etwa in der Existenz der schwarzen Punkte M, N, P, Q, R, S zum Ausdruck kommen, so findet man immer die wollkommenste Übereinstimmung. Diese ganz neuen Ergebnisse beweisen vollständig und schlagend, mit welch hohem Grade der Genauigkeit die mathematische Theorie der Elastizität alle Erscheinungen voraussagt. Zugleich erkennt man die praktische Bedeutung der modernen Methoden der Analysis und der geometrischen Ideen und Begriffe, wie die des Begriffs mehrfach zusammenhängender Räume.

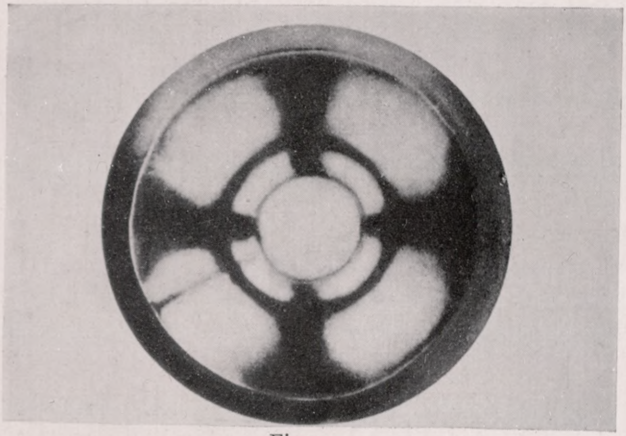


Fig. 17.

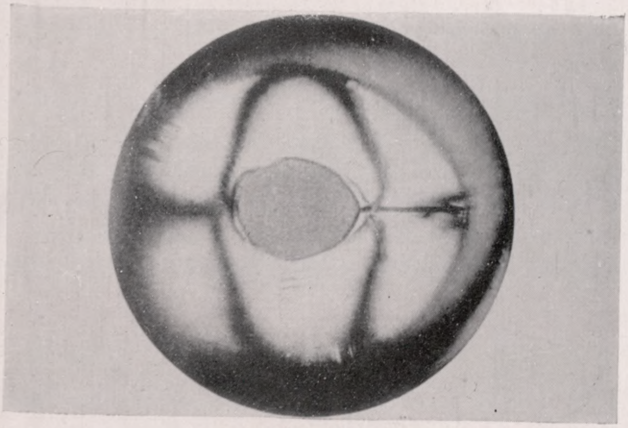


Fig. 18.

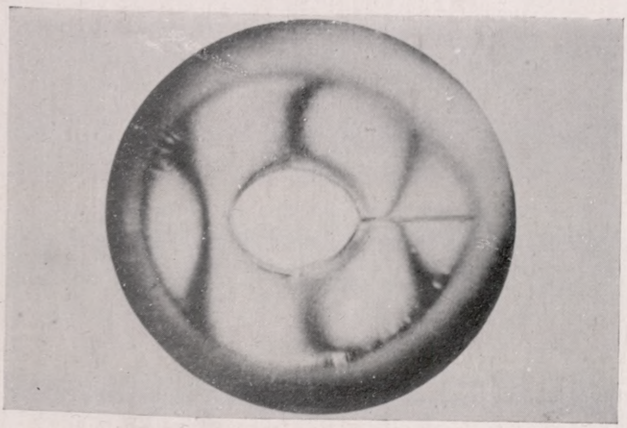


Fig. 19.

22. Die Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$.

In Kap. 16 haben wir bereits die verallgemeinerte LAPLACEsche-Gleichung betrachtet. Sie spielt in der Elastizitätstheorie eine bedeutende Rolle und ist in letzter Zeit Gegenstand einer grossen Zahl von Untersuchungen gewesen. Die Akademie der Wissenschaften in Paris hat die Wichtigkeit des eingehenden Studiums dieser Gleichung erkannt und den VAILLANT–Preis für 1907 auf die Behandlung dieser Gleichung ausgesetzt.

Nehmen wir an, dass ein elastischer Körper keinen Massenkräften unterworfen ist, so genügen die Komponenten der Verschiebungen der Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$. Das ist hinreichend, um das Band aufzuzeigen, das zwischen dieser Gleichung und der Elastizitätstheorie besteht. Andrerseits lässt sich die Theorie des Gleichgewichts elastischer Platten ohne weiteres auf die genannte Gleichung für zwei Variable zurückführen. Für das Studium der Gleichung bieten sich mehrere Wege dar. Auf der einen Seite liefert die Anwendung der GREENschen Methode, von der wir schon gesprochen haben, ein Mittel, um viele Fragen zu lösen. Man könnte auch die Integralgleichungen verwenden, wie LAURICELLA gezeigt hat, und wie wir sogleich sehen werden. Aber es gibt noch eine andre Methode, mit deren Hilfe man jede biharmonische Funktion (d. h, jede Funktion, die der Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$ genügt), als abhängig von zwei harmonischen Funktionen darstellen kann. Auch diese letzte Methode hat in ganz überraschender Weise die Lösung mehrerer, auf die Elastizitätstheorie bezüglicher Fragen vereinfacht.

VENSKE hatte über diesen Gegenstand 1891 eine schöne Arbeit veröffentlicht; leider ist sie nicht in allen Teilen exakt (48). ALMANSI hat die Frage von neuem behandelt (49). Das Grundprinzip, von dem er ausgeht, lässt sich so aussprechen: jede biharmonische Funktion dreier Variabeln x, y, z lässt sich in zwei Ausdrücke zerlegen nach der Formel

$$\Phi_1 + (ax + by + cz)\,\Psi_1 \tag{12}$$

oder nach der Formel

$$\Phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\,\Psi_2\,, \tag{13}$$

wobei $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ harmonische Funktionen und a, b, c Konstanten sind. Entsprechende Zerlegungen lassen sich für den Fall biharmonischer Funktionen zweier Variabeln vornehmen. Auch GOURSAT ist auf diesen Punkt in einer kurzen Darstellung der Frage zurückgekommen (50).

(48) O. VENSKE, *Zur Integration der Gleichung* $\triangle\triangle u = 0$ *für ebene Bereiche.* « Göttinger Nachrichten », 1891, S. **27**.

(49) E. ALMANSI, *Sulla integrazione della equazione differenziale* $\triangle^{2n} = 0$. « Annali di Mat. » (3), **2**, 1, 1899.

(50) E. GOURSAT, *Sur l'équation* $\triangle\triangle u = 0$. « Bull. Soc. Math. de France », **26**, 236, 1898.

Das Vorhandensein des linearen oder des quadratischen Faktors in den vorstehenden Formeln erklärt die Leichtigkeit, mit welcher man das Problem der Integration der Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$ bei gegebnen Randwerten des Integrals und seiner normalen Ableitung für den Fall lösen kann, dass die Umrandung eine Ebene oder eine Kugel ist. Tatsächlich kann man diese Probleme ohne weiteres auf entsprechende Fragen der Theorie der harmonischen Funktionen zurückführen.

Ebenso können die drei Komponenten der Verschiebungen eines isotropen elastischen Körpers auf die Form gebracht werden

$$\Phi_1 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,, \quad \Phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \quad \Phi_3 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial z}\,,$$

wobei die vier Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ harmonische Funktionen sind. ALMANSI hat von hier aus die Lösung des Gleichgewichtsproblems für eine elastische Kugel unmittelbar und fast augenblicklich erhalten (51).

Ein andres interessantes Ergebnis, das sich an die Ausdrücke (12) und (13) anschliesst, ist die Anwendung des Prinzips der Inversion auf biharmonische Funktionen (52). LEVI-CIVITA hatte es auf anderem Wege für den Fall zweier Variabeln gefunden (53), und MICHELL hat ebenfalls die Frage studiert (54).

Aber die eleganteste und zugleich am tiefsten gehende Anwendung der Formeln (12) und (13) ist von ALMANSI vorgenommen worden. Wir wollen darüber ein paar Worte sagen.

Das Prinzip der konformen Abbildungen liefert bei gegebenen Randwerten die Lösung der LAPLACEschen Gleichung für alle Flächen, die man auf die Fläche eines Kreises abbilden kann. Die entsprechende Frage für die Gleichung $\triangle^2\triangle^2 u = 0$, d. h. die Bestimmung der unbekannten Funktion, wenn man ihre Werte und die Werte ihrer normalen Ableitung auf der Umrandung kennt, ist von ALMANSI für jede Fläche gelöst worden, die man mit Hilfe eines ganzen rationalen Polynoms auf die Fläche eines Kreises abbilden kann (55).

Man brauchte nur den gleichen Weg einzuschlagen, um ein ganz entsprechendes Ergebnis für den Fall des elastischen Gleichgewichts für zwei Variable, also für elastische Membranen zu finden. Das hat BOGGIO in einer interessanten Arbeit getan (56).

(51) E. ALMANSI, *Sulla deformazione della sfera elastica.* «Mem. Acc. di Torino» (2). **47**, 103, 1897.

(52) V. VOLTERRA, *Sulle funzioni poliarmoniche.* «Atti dell'Istituto Veneto» [Bd. 57 der ganzen Folge] (7), **10**, 233, 1898 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXXII, pp. 574-575].

(53) T. LEVI-CIVITA, *Sopra una trasformazione in sé stessa della equazione* $\triangle^2\triangle^2 = 0$). «Atti dell'Istituto Veneto» [Bd. 56 der ganzen Reihe], (7), **9**, 1399. 1897/98.

(54) J. H. MICHELL, *The Inversion of Plane Stress.* «Proc. London Math. Soc.» (1), **34**, 134, 1902.

(55) E. ALMANSI, *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche in un'area piana semplicemente connessa, per date condizioni al contorno.* «Circ. Mat. di Palermo», **13**, 225, 1899.

(56) T. BOGGIO, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*». Atti Acc. di Torino», **35**, 219, 1899-1900.

Auf diese Art kann beispielsweise das PASCALsche Problem des Gleichgewichts einer gespannten elastischen Membran, deren Umrandung eine PASCALsche Schnecke ist, gelöst werden.

Diese Ergebnisse erstrecken sich nicht auf den dreidimensionalen Raum, denn es ist wohl bekannt, dass in diesem Raum die konformen Abbildungen auf die Transformationen durch reziproke Radien beschränkt sind; es muss aber bemerkt werden, dass die Methode von ALMANSI auch noch andere als die klassischen Fälle umfasst, wo die Umrandung durch Kreise oder Geraden gebildet wird. Deshalb eröffnet sie ein neues Feld der Untersuchungen.

Wir wollen noch einmal zu der Anwendung der GREENschen Methode auf die Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$ zurückkehren.

Man kann selbst in diesem Fall eine der GREENschen entsprechende Funktion bilden.

Es ist das eine biharmonische Funktion, wo die Werte der Funktion selbst und die der normalen Ableitung auf dem Rande gewisse Bedingungen erfüllen. LAURICELLA und BOGGIO haben sie in mehreren Fällen verwandt. HADAMARD hat diese Funktion von einem neuen Gesichtspunkt aus betrachtet. Er hat sie als abhängig angesehen von der Gestalt des Randes, d. h. als Funktion der Flächen oder der Linien, die den Rand bilden. Auf diese Weise hat er sich dem Gedankengang angeschlossen, von dem wir in der ersten Vorlesung gesprochen haben; er hat sich das Problem der Maxima und der Minima bei variabler Umrandung vorgelegt. Diese Untersuchung, die auf ganz neue Weise und nach sehr eleganten Methoden durchgeführt ist, bildet einen sehr eigenartigen und sehr anziehenden Teil seiner schönen grundlegenden Arbeit [57].

23. Das Existenztheorem und das Fredholmsche Theorem.

Es wäre unmöglich, das Gebiet der Untersuchungen, über die wir bisher gesprochen haben, zu verlassen, ohne eine Frage zu berühren, die in letzter Zeit Gegenstand einer grossen Zahl von Arbeiten gewesen ist.

Es ist das die Frage nach den Existenztheoremen. Diese Theoreme interessieren im allgemeinen Sinne kaum den Physiker, der sich darum nicht kümmert; dagegen werden sie als grundlegend von dem Mathematiker angesehen, der in diesen Theorien Satz für Satz ein festgefügtes logisches Gebäude zu errichten trachtet. Auf den ersten Anblick scheint der Wortlaut der Existenztheoreme diesen Zwiespalt zu rechtfertigen, denn in den meisten Fällen beschränken sie sich auf die Feststellung, dass es unter gewissen Bedingungen Lösungen gibt. Bei näherem Zusehen aber erkennt man, dass

(57) Vgl Anm. (11). Die Arbeit HADAMARDs ist von der Akad. der Wissenschaften preisgekrönt worden ebenso wie die von LAURICELLA, KORN und BOGGIO, die wir später erwähnen werden. – Zu nennen sind hier die Arbeiten von A. HAAR, « Gött. Nachr. », 1907, S. 280; und von ZAREMBA, « Krak. Anz. », 1907, S. 147. Ferner A. KORN, *Über die allgemeine Lösung des biharmonischen Problems in Raume.* « Anz. d. Krakauer Akad. », 1907, S. 837.

man sich sehr oft irrt, wenn man sie nicht gebührend beachtet. Man muss nämlich, um die Beweise zu führen, oft die Lösungen für die allgemeinsten Fälle wirklich bilden. Deshalb sind diese Beweise oft die Quelle von Ergebnissen, die für die Anwendungen von grosser Wichtigkeit sind, und die eine theoretische und praktische Bedeutung haben. Wir werden das einsehen, wenn wir jene Theoreme und die allgemeinen Lösungen zugleich betrachten. Bekanntlich haben diese Fragen viele Schwierigkeiten geboten.

Die Wege, die man in der Elastizitätslehre eingeschlagen hat, nähern sich den bei der LAPLACEschen Gleichung befolgten Wegen. Die Anwendung der NEUMANNschen Methode ist zuerst von LAURICELLA versucht worden, der von den Formeln von SOMIGLIANA ausging [(58)]. Aber das von ihm gewonnene Ergebnis erfasste wegen der Hypothesen, die er über die Koeffizienten machen musste, nicht das eigentliche Elastizitätsproblem. Später hat er sich immer mehr der endgültigen Lösung der Frage genähert, indem er sich alle Hilfsmittel zu Dienste machte, die ihm die Analysis in den Methoden der sukzessiven Approximationen und der Integralgleichungen darbot.

Durch Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen hat KORN viele Erfolge erzielt [(59)]. Dieser Mathematiker hat die Lösung in Potenzreihen für einen Parameter entwickelt, der von den Elastizitätskonstanten abhängt, und er hat auf diese Weise das Gleichgewichtsproblem sowohl für den Fall gelöst, dass die Verschiebungen am Rande gegeben sind, als auch für den Fall, dass die Spannungen gegeben sind.

Es ist hier zu bemerken, dass bis jetzt die KORNsche Methode die einzige ist, die im letzten Falle auf eine vollständige Lösung geführt hat. Auch ist die elegante Art und Weise bemerkenswert, wie er die sich darbietende Schwierigkeit zu überwinden verstanden hat.

Schreibt man nämlich die Gleichungen der Elastizität in der Form

$$\Delta^2 u + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta^2 v + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \quad , \quad \Delta^2 w + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 ,$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

und setzt man voraus, dass die Spannungen auf dem Rande gegeben sind, so haben die Entwicklungen von u, v, w in Potenzreihen für das Argument K eine wesentlich singuläre Stelle für $\mathrm{K} = 0$. E. und F. COSSERAT hatten diese Eigentümlichkeit für den speziellen Fall der Kugel bereits bemerkt [(60)].

Um zum Ziel zu gelangen, hat KORN aus diesem Grunde die Potenzreihen in der Umgebung von $\mathrm{K} = 1$ betrachtet.

(58) G. LAURICELLA, *Equilibrio dei corpi elastici isotropi*. « Ann. Scuola Normale superiore di Pisa », **17**. Scienze fisiche e matem., **7**. No. 6, 1895.

(59) A. KORN, *Sur les équations de l'élasticité*. « Ann. de l'Ec. Norm. », **24**, 9, 1907. — A. KORN, *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas ou les efforts sont donnés à la surface*. « Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse » (2), **10**, 165, 1908.

(60) E. und. F. COSSERAT, *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données*. « Comptes Rendus », **133**, 271, 1901.

Seit einigen Jahren ist man mit der Methode der Integralgleichungen an die Fragen herangegangen.

Der von FREDHOLM entwickelte sehr wichtige Grundgedanke hierbei ist der, dass eine in einem zweidimensionalen Bereich definierte harmonische Funktion als Potential einer über die Umrandung verteilten Doppelschicht aufgefasst wird (61). Ist $u(s_1)$ der Wert der harmonischen Funktion für einen Punkt s_1 der Grenze s, und ist $f(s)$ die Dichte der Doppelschicht, so hat man die Beziehung

$$u(s_1) = \pi f(s_1) + \int_s f(s) \cdot F(s, s_1) \cdot ds,$$

wobei $F(s, s_1)$ eine reguläre Funktion ist, falls die Umrandung regulär ist. Die Bestimmung der Funktion $f(s)$ ist also auf die Lösung der vorstehenden Integralgleichung zurückgeführt. Von dieser Lösung werden wir in der folgenden Vorlesung sprechen. Nach Verfahren, die sich auf denselben Grundsätzen aufbauen, kann man den Fall der Elastizität behandeln. Man wird dadurch auf Systeme von Integralgleichungen geführt. Die wieder erscheinenden Schwierigkeiten kommen von den Unendlichkeitsstellen der Funktionen her, die unter den Integralen auftreten, und sie sind für den Fall, dass die Spannungen gegeben sind, bisher noch nicht überwunden worden.

FREDHOLM, LAURICELLA, BOGGIO und MARCOLONGO haben geistreiche Arbeiten über diesen Gegenstand veröffentlicht, und es muss auch hier an die Namen E. und F. COSSERAT erinnert werden, die zuerst interessante Beziehungen zwischen Integralen aufgestellt haben (62).

Die Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$ kann nebenfalls nach entsprechenden Methoden gelöst werden. KORN hat die sukzessiven Approximationen verwendet (63), LAURICELLA die Methode der Integralgleichungen (64); es muss aber vorausgesetzt werden, dass der Rand keine singulären Punkte enthält.

Betrachten wir nun den besonderen Fall zweier Variabeln. Wir wollen voraussetzen, dass die Umrandung ein Rechteck ist; es entspricht das dem Problem des Gleichgewichts einer rechteckigen elastischen Platte. Das Problem lässt sich nach den vorstehenden Methoden nicht angreifen. LAURICELLA hat es dadurch gelöst, dass er auf die alten Methoden zurückgriff,

(61) I. FREDHOLM, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* « Stockholm Ofv., », **57**, 39, 1900.

(62) Die Literatur über diesen Gegenstand ist sehr ausgedehnt. Die Arbeit von FREDHOLM: *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* ist im « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik », Bd. **2**, No. 1906, veröffentlicht worden. — Betreffs der anderen Autoren verweise ich auf: « Rendiconti Acc. dei Lincei », « Nuovo Cimento », « C. R. de l'Ac. des Sc. », « Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse » usw. — Die allererste Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie überhaupt findet sich in der Arbeit von A. KORN, *Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.* I. *Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche.* «Münch. Ber. », **36**, 37, 1906.

(63) A. KORN, *Sur l'equilibre des plaques élastiques encastrées.* « Ann. de l'Éc. Norm. », **25**, 529, 1908.

(64) G. LAURICELLA, *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* « Acta Math. », **32**, 201, 1909.

deren sich MATHIEU zum Studium des Gleichgewichts eines rechtwinkligen Prismas bedient hatte. Diese Methoden schliessen sich an die Methoden der einfachen Lösungen an.

24. DIE METHODE DER EINFACHEN LÖSUNGEN.

Wir wollen diese Vorlesung damit abschliessen, dass wir ein paar Worte der allgemeinen Methode der einfachen Lösungen widmen, von der wir im letzten Kapitel gesprochen haben, und die ganz kürzlich durch fruchtbare Verwendung der Integralgleichungen erneuert worden ist.

Die ersten Ansätze dazu findet man in den Versuchen, an die Behandlung der partiellen Differentialgleichungen heranzugehen. Für die Gleichung der schwingenden Saiten

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wo die Variabeln getrennt sind, hat TAYLOR die Lösung in der Form

$$u = f(t) \cdot \varphi(x)$$

angegeben.

Es ist dies das erste Beispiel für eine einfache Lösung. Die Zusammenstellung einfacher Lösungen vom TAYLORschen Typ hat zur FOURIERschen Reihe geführt. Ich will hier nicht die so wohlbekannte Geschichte dieser Entdeckung wiedergeben, in der physikalische und analytische Gedankengänge sich verschlingen, und in der die berühmten Namen BERNOULLI, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE erscheinen. Die Methode der einfachen Lösungen, für die wir ein typisches Beispiel gegeben haben, besteht in dem Auffinden partikulärer Lösungen, bei denen alle oder einige Variable getrennt auftreten. Durch Konstruktion einer Reihe von einfachen Lösungen kann man dann mittels Koeffizientenberechnung die allgemeine Lösung erhalten. Diese Methode lässt sich auf die verschiedenen Typen von Differentialgleichungen anwenden, mögen sie nun elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein.

Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir einmal eine Gleichung der letzten Art betrachten, und zwar im besonderen den Fall der Schwingungen ebener, am Rande eingespannter Membranen. In der dreidimensionalen Welt, die wir betrachten müssen, wollen wir die Zeit t von den Raumkoordinaten x, y trennen und, da die zu integrierende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14}$$

lautet, Lösungen der Form

$$u = f(t) \cdot \varphi(x, y)$$

betrachten.

φ muss dann der Gleichung genügen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K \cdot \varphi = 0, \tag{15}$$

wobei φ auf dem Rande gleich null und K eine Konstante ist. Zuerst muss man diejenigen Werte K aufsuchen, für die von null verschiedene Lösungen φ existieren. Das sind die Ausnahmewerte. Die Existenz des kleinsten Ausnahmewertes ist von SCHWARZ bewiesen worden, die Existenz aller Ausnahmewerte aber ist in dem grossen Werk von POINCARÉ über die Gleichungen der mathematischen Physik nachgewiesen worden (65). Man kann die Ausnahmewerte als Wurzeln einer transzendenten Gleichung ansehen. Das Prinzip von Lord RAYLEIGH gab zwar einen Überblick über die Art und Weise, wie das Ganze sich abspielt; aber erst die Methoden der Integralgleichungen haben zu den einfachsten und unmittelbarsten Ergebnissen geführt.

Man sieht ja leicht ein, dass man die homogene Differentialgleichung (15) nebst der Randbedingung $\varphi = 0$ durch eine lineare homogene Integralgleichung ersetzen kann. Wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, ist eine Integralgleichung nichts anderes als der Grenzfall eines Systems linearer algebraischer Gleichungen, wenn die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten unbegrenzt wächst. Daher erhält man als Bedingung dafür, dass die lineare homogene Integralgleichung eine von null verschiedene Lösung besitzt, das Verschwinden eines Ausdrucks, den man als Grenzwert der Determinante eines Systems linearer algebraischer Gleichungen ansehen kann. Dieser Ausdruck, den FREDHOLM Determinante genannt hat (66), ist eine ganze Funktion von K, und daraus erhält man das Ergebnis, dass die Ausnahmewerte Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind (67).

Die Werte φ, die die Gleichung (15) befriedigen, und die den Ausnahmewerten von K entsprechen, sind die Ausnahmelösungen. Man muss nun die FOURIERsche Methode verallgemeinern und die allgemeine Lösung durch eine Reihe von Ausnahmelösungen auszudrücken versuchen.

HILBERT (68), SCHMIDT (69) und andere Autoren haben diese Fragen in allgemeiner Weise behandelt und vertieft. HILBERT hat das Studium der unendlichen Formen, die er auf die kanonische Form zurückgeführt hat, zum Ausgangspunkt genommen. Es ist hier nicht möglich, diese Untersuchungen weiter darzulegen, die ein neue interessantes Kapitel der Analysis bilden.

(65) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique.* « Circolo Mat. di Palermo », **8**, 57, 1894.

(66) J. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* « Acta Math. », **27**, 365, 1903.

(67) Das Problem der Schwingungen schwerer Flüssigkeiten (problème des seiches) ist eine ähnliche Frage, die man ebenfalls durch ein auf die Verwendung unendlicher Determinanten führendes Verfahren lösen kann. Ich habe dieses Verfahren ersonnen und in einer Vorlesung vorgetragen, die ich 1898 in Turin vor der Physikalischen Gesellschaft gehalten habe. (Vgl. V. VOLTERRA, *Sul fenomeno delle Seiches*, Conferenza. « Nuovo Cimento (4), **8**, 270, 1898 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXVIII, pp. 370-378] und *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Kap. III, § 15).

(68) D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* « Gött. Nachr. », 1904, S. 49 u. 213; 1905, S. 307; 1906, S. 157 u. 439; 1910, S. 355 u. 595. B. G. Teubner, Leipzig 1912.

(69) E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* « Math. Ann. », **63**, 433; **64**, 161, 1907. — Vgl. hierzu auch A. KORN, *Freie und erzwungene Schwingungen.* B. G. Teubner, Leipzig 1910.

Dritte Vorlesung.

25. Abhängigkeit des Zustandes von der Vorgeschichte eines elastischen Körpers.

Das Hookesche Gesetz, das die Grundlage der gewöhnlichen mathematischen Theorie der Elastizität bildet, ist nur ein Annäherungsgesetz. Wir haben das schon in der vorigen Vorlesung gestreift. Man kann sich durch eine zweifache Modifikation den Beobachtungsergebnissen anzunähern versuchen. Man kann nämlich zunächst daran denken, dass sich die Elastizitätserscheinungen deshalb vom Hookeschen Gesetz entfernen, weil es Deformation und Spannung in lineare Abhängigkeit von einander setzt, während diese Grössen in Wirklichkeit durch nichtlineare Beziehungen mit einander verknüpft sind.

Aber eine weitergehende Prüfung der Erscheinungen lehrt uns, dass die auf Grund dieses Gedankenganges anzubringenden Modifikationen nicht ausreichend sind; denn das Hookesche Gesetz entfernt sich auch noch aus anderen Gründen von den natürlichen Tatsachen.

Betrachten wir die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung. Wird ein elastischer Körper äusseren Kräften unterworfen, so nimmt er keine endgültige Gleichgewichtsgestalt an, sondern er ändert sich langsam und strebt asymptotisch einer gewissen Gestalt zu. Ebenso kehrt der elastische Körper, wenn die äusseren Kräfte aufgehört haben zu wirken, nicht sofort in die natürliche Gestalt zurück, sondern die Gestalt, die er annimmt, ändert sich langsam nach bestimmten Gesetzen.

Diese Erscheinungen beweisen, dass die Deformation in jedem Augenblicke nicht nur von der gegenwärtigen Spannung abhängt, sondern auch von den Spannungen, die in der vorhergehenden Zeit auf den Körper gewirkt haben. Deshalb könnte keine Beziehung, die man als in jedem Augenblick zwischen den gegenwärtigen Werten von Deformation und Spannung bestehend ersinnen könnte, diese Abhängigkeit wirklich darstellen. Man muss daher das Hookesche Gesetz von dem Grundsatz aus modifizieren, dass der gegenwärtige Zustand des elastischen Systems von der Geschichte der Einwirkungen abhängt, denen das System ausgesetzt war.

26. Unterschied zwischen der Mechanik mit und ohne Vererbungserscheinungen.

Bevor wir tiefer in die Frage eindringen, wollen wir ein Wort über den Namen sagen, den man den betrachteten Erscheinungen geben kann. Zunächst ist zu bemerken, dass man ähnlichen Erscheinungen in der Lehre vom Magnetismus, von den Dielektriken und noch in anderen Fällen begegnet. Bezeichnungen wie Hysteresis, traînage u. ä., die manche Autoren angewandt haben, können, wenn man sie auch im allgemeinen Fall gebraucht, zu Missverständnissen Anlass geben. Deshalb wollen wir alle diese Erscheinungen als ,, Vererbungserscheinungen '' [70] bezeichnen. Wir knüpfen damit an die Einteilung der Mechanik in Mechanik mit Vererbung und Mechanik ohne Vererbung an.

PICARD macht in einem schönen Artikel über die klassische Mechanik und ihre sukzessiven Approximationen die Bemerkung, dass man diese Einteilung vornehmen kann [71]. In der Mechanik ohne Vererbung hängt der künftige Zustand eines Systems in einem gegebenen Augenblick nur vom gegenwärtigen Zustand ab oder, allgemeiner gesprochen (da die Kräfte möglicherweise auch von den Geschwindigkeiten abhängen können), von dem gegenwärtigen und dem unmittelbar vorhergehenden Zustand. In der Mechanik mit Vererbung hingegen hinterlässt jede Einwirkung eine bleibende Beeinflussung des Systems, und der gegenwärtige Zustand hängt von der gesamten Vorgeschichte ab.

Es ist augenscheinlich, dass das Grundproblem der Astronomie zur ersten Gruppe gehört, während die im vorigen Paragraphen berührten Fragen zur zweiten gehören. PAINLEVÉ stellt in einem interessanten der Mechanik gewidmeten Kapitel [72] die Behauptung auf, dass die Probleme der Vererbungserscheinungen von einem bestimmten Gesichtspunkte aus nur scheinbare Probleme sind, weil sie nicht als solche auftreten würden, wenn man eine vollkommenere Kenntnis von der Konstitution der Körper hätte. Immerhin ist es im gegenwärtigen Augenblick notwendig, sie zu betrachten und tiefer in sie einzudringen. In gewissen Fällen sind die Gleichungen, auf die sie führen, seit langem bekannt gewesen. Ich brauche hierfür nur an die schöne Arbeit über die Elastizität von BOLTZMANN aus dem Jahre 1874 [73] zu erinnern, in der die Gleichungen unter gewissen Bedingungen von empirischen Gesichtspunkten aus aufgestellt worden sind, und an die später erschienene interessante Arbeit von WIECHERT [74], die auf anderen Grundgedanken beruht. Ich will alsbald sagen, welche Schwierigkeiten sich einem allgemeinen Studium dieser Gleichungen entgegenstellten, und will zeigen, dass es bis in die letzte Zeit hinein keine analytischen Methoden gab, die sie allgemein und vollständig zu behandeln erlaubten.

27. TORSION EINES FADENS.

Um zunächst einmal die Dinge auf elementare Weise zu betrachten, fassen wir die Torsion eines Fadens ins Auge.

Der Torsionswinkel sei ω, das Torsionsmoment M.

(70) « Phénomènes d'hérédité ».

(71) É. PICARD, *La mécanique classique et ses approximations successives.* « Rivista di Scienza » (Bologna) **1**, 4, 1907.

(72) PAINLEVÉ, *De la méthode dans les sciences.* Paris (Alcan) 1909.

(73) L. BOLTZMANN, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.* « Wiener Ber. », **70**, 275, 1874. « Pogg. Ann. Arg. », Bd. **7**, 634. 1876. « Abhandl. », Bd. I, 616.

(74) E. WIECHERT, *Gesetze der elastischen Nachwirkung für konstante Temperatur.* « Wiedemanns Ann. », **50**, 335 u. **50**, 546, 1893.

In der gewöhnlichen Elastizitätstheorie führt uns das HOOKEsche Gesetz auf die Proportionalität von ω und M.

Das wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$\omega = K \cdot M, \tag{16}$$

wobei K ein konstanter Koeffizient ist. Auf diese Weise ist eine in jedem Augenblick bestehende angenäherte Beziehung zwischen Torsion und äusserer Wirkung aufgestellt. Schriebe man allgemein

$$\omega = F(M),$$

wo F eine noch unbekannte Funktion von M ist, so könnte man die Funktion F so bestimmen, dass sich die analytische Darstellung des Phänomens den tatsächlichen Erscheinungen besser annähert. Man könnte beispielsweise die Funktion F in eine Potenzreihe entwickeln,

$$\omega = K \cdot M + K_1 \cdot M^2 + K_2 \cdot M^3 + \cdots,$$

und man könnte eine grössere Annäherung, als Formel (16) sie bietet, dadurch zu erzielen versuchen, dass man eine bestimmte Anzahl von Gliedern berücksichtigt und die Koeffizienten $K, K_1, K_2, \cdots$ nach bekannten Methoden bestimmt. Aber auf diese Weise würde man die Vererbungserscheinungen ausser Betracht lassen; denn sobald man eine Beziehung zwischen der gegenwärtigen Torsion und der gegenwärtigen äusseren Einwirkung aufstellt, kommen dabei die früheren Einwirkungen nicht in Anrechnung.

Will man also, dass ω von der Geschichte des Torsionsmoments M abhängt, so wird man die Gleichung (16) in folgender Weise abändern müssen

$$\omega = KM + \varphi,$$

wobei φ eine von all den Werten abhängige Grösse ist, die M von der Zeit $-\infty$ bis zur Gegenwart angenommen hat. Man kann eine Vereinfachung dadurch erzielen, dass man die vor einer bestimmten Zeit t_0 ausgeübten Wirkungen vernachlässigt; denn dann hängt φ nur von all den Werten ab, die M von der Zeit t_0 bis zur Gegenwart angenommen hat. Stellt man die Zeit als Abszisse und das Torsionsmoment als Ordinate einer Kurve dar, so erhält man ein geometrisches Abbild der Funktion $M(t)$, und man kann daher sagen, dass φ von der Gestalt der erhaltenen Kurve abhängt. Man kommt von hier aus zu einem Gedanken, wie wir ihn ganz ähnlich in der ersten Vorlesung betrachtet haben. Wir brauchen uns nämlich nur daran zu erinnern, dass man, wenn man das Prinzip der variierenden Wirkung erweitern will, ein Doppelintegral als abhängig von der Begrenzungslinie des Integrationsgebiets betrachten muss, allgemein als abhängig von allen Werten, die gewisse Funktionen längs dieser Linie annehmen.

Wir können jetzt das eben Gesagte zu dem in der ersten Vorlesung Auseinandergesetzten in Beziehung setzen.

In Kap. 5 haben wir eine unendliche und stetige Gesamtheit von Variabeln ins Auge gefasst. Wir haben gezeigt, dass diese Betrachtungen der Vorstellung von Grössen entspringen, welche von allen Werten einer oder mehrerer Funktionen abhängen, und wir haben von ihrem Zusammenhang mit den Integralgleichungen gesprochen. Man versteht es daher, dass man durch Anlehnung an jene Theorie zur Lösung der Probleme gelangen wird, die sich in der Mechanik mit Vererbung darbieten.

Aber man kann nunmehr hinzufügen, dass die Integralgleichungen nicht ausreichen, um den allgemeinen Fall der Vererbungsprobleme zu umfassen.

Man muss zu gänzlich neuen und weit verwickelteren Fragen übergehen: ich nenne sie die Probleme der Integraldifferentialgleichungen.

Diese Probleme sind verschieden von denen, welche sich bei der in der ersten Vorlesung (Kap. 4, 5) behandelten Erweiterung der JACOBIschen Gleichung darbieten. Damals haben wir zwischen den Koeffizienten Beziehungen angetroffen, die Differentiale der Linienfunktionen enthielten (Gleichung (4) in Kap. 5), während die Integraldifferentialgleichungen, die wir in den folgenden Kapiteln finden werden, Beziehungen darstellen, die zugleich vom Typ der Differentialgleichungen und der Integralgleichungen sind. Ausserdem ist die Verknüpfung beider Typen derart, dass die bekannten Methoden für Differentialgleichungen und für Integralgleichungen in den allgemeinen Fällen nicht die Lösung liefern, wenn man sie getrennt anwendet. Das Problem der Integraldifferentialgleichungen unterscheidet sich wesentlich von dem der Differential– und dem der Integralgleichungen. Um es zu lösen, muss man beide Methoden durch ein neues analytisches Verfahren verbinden.

28. Analytischer Ausdruck für Grössen, die von allen Werten einer Variabeln abhängen.

Wir wollen jetzt auf die Grösse φ zurückkommen, die von allen Werten $M(t)$ von $t = t_0$ bis zum gegenwärtigen Wert t abhängt. Die erste Frage, die sich aufdrängt, ist offenbar die: Kann man diese Beziehung analytisch zum Ausdruck bringen? Um hierauf die Antwort zu geben, muss man die allgemeine Frage nach der analytischen Darstellung einer Grösse behandeln, die von allen Werten einer Funktion abhängt. (Vgl. Kap. 5). Man stösst so auf ähnliche Schwierigkeiten, wie man sie in der gewöhnlichen Analysis antrifft, wenn man eine Funktion nach DIRICHLETscher Art definiert hat und nun zu ihrem analytischen Ausdruck, etwa der TAYLORschen Reihe, übergehen will. Ich brauche nicht daran zu erinnern, dass man in Bezug auf die Differenzierbarkeit, die Konvergenz und das Restglied Voraussetzungen machen muss, damit die Entwicklung möglich sei.

Ebenso kann man in dem Fall einer Grösse, die von allen Werten einer Funktion abhängt, unter gewissen ähnlichen Voraussetzungen zu einer Entwicklung gelangen, die der TAYLORschen vollkommen ähnlich ist.

Wendet man sie auf die von $M(t)$ abhängige Grösse φ an, so findet man

$$(17)\qquad \varphi = \int_{t_0}^{t} M(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2\, M(\tau_1)\,M(\tau_2)\,\varphi(t,\tau_1,\tau_2) + \cdots$$

Bevor wir weiter gehen, wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Tragweite der eben besprochenen Erweiterung des TAYLORschen Satzes richten. Es ist das nämlich das erste Beispiel für die Anwendung des Überganges zu einer unendlichen stetigen Mannigfaltigkeit von Variabeln einer Funktion und ist infolgedessen der Ausgangspunkt für die folgenden Gedankengänge gewesen. Ich werde zeigen, dass diese Entwicklung nichts anderes ist als der Grenzfall der TAYLORschen Reihe für mehrere Variable, wenn man voraussetzt, dass die Anzahl der Variabeln unbegrenzt wächst. Man wird das leicht einsehen, wenn man den Weg verfolgt, auf dem ich 1887 dorthin gelangt bin [75]. Wir zerlegen das Intervall $(t_0 \cdots t)$ in n Teile $h_1, h_2, \cdots, h_n$; es seien

$$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_n$$

diejenigen Werte von $\mathrm{M}(t)$, die zu den Werten von t innerhalb der Intervalle

$$(t_0, t_0 + h_1), (t_0 + h_1, t_0 + h_1 + h_2), \cdots, (t_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}, t)$$

gehören. Wir fassen zunächst eine Funktion von

$$h_1 \mathrm{M}_1, h_2 \mathrm{M}_2, h_3 \mathrm{M}_3, \cdots, h_n \mathrm{M}_n$$

ins Auge, die mit diesen Grössen zugleich verschwindet. Entwickeln wir diese Funktion in eine TAYLORsche Reihe — die Möglichkeit der Entwicklung werde vorausgesetzt —, so finden wir den Ausdruck

$$\sum_i h_i \mathrm{M}_i \mathrm{G}_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_i h_i \mathrm{M}_i \sum_k h_k \mathrm{M}_k \mathrm{G}_{ik} + \cdots$$

Wir gehen nun dadurch zur Grenze über, dass wir die Zahl der Intervalle $(h_1 \cdots h_n)$ unbegrenzt wachsen und die Ausdehnung eines jeden unbegrenzt abnehmen lassen. Der erste Ausdruck, der durch eine einfache Summe gebildet wird, gibt im Grenzfall zu einem einfachen Integral Veranlassung; der zweite Ausdruck, welcher durch eine Doppelsumme gebildet wird, im Grenzfall ein Doppelintegral ergibt, und aus den folgenden Summen werden mehrfache Integrale von immer wachsender Ordnungszahl. Man kommt auf diese Weise zu der vorstehenden Entwicklung (17). Das Auseinandergesetzte ist nur das Schema der Schlussweise. Erst durch ziemlich verwickelte Kunstgriffe wird sie vollständing und streng.

Die eben gefundene Entwicklung einer von allen Werten einer Funktion abhängigen Grösse führt leicht zu einer entsprechenden Klassifikation wie bei den Funktionen verschiedenen Grades.

Man braucht hierzu nur die Glieder der Reihe (17) zu sondern, und man erhält augenscheinlich Ausdrücke ersten, zweiten, dritten Grades. Hieran knüpft sich eine grosse Zahl von Fragen, und die interessantesten Aufgaben sind die, bei denen die Funktionen, von denen jene Ausdrücke abhängen,

(75) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nota 1, § 3. « Rend. Acc. dei Lincei » (4), **3**, 97, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314]. Vgl. Anm. (11).

unbekannt sind. Durch diese Betrachtungen bin ich seit 1896 (76) auf das Studium der Lösung der Integralgleichungen geführt worden; ich habe dabei einen Gedankengang zugrunde gelegt ähnlich dem, der mich auf die Entwicklung (17) geführt hatte, d. h. ähnlich dem Grundgedanken der Integralrechnung. Wie ich nämlich in meiner ersten Mitteilung von 1896 (77) gezeigt habe, und wie in der ersten Vorlesung zum Ausdruck gebracht ist (s. Kap. 5), ergibt sich ihre Lösung aus der Erweiterung des Verfahrens zur Lösung algebraischer Gleichungen, wenn man voraussetzt, dass die Zahl der Variabeln in derselben Weise unbegrenzt wächst, wie die Zahl der Glieder einer Summe, um ein Integral entstehen zu lassen.

Wir werden das im nächsten Kapitel sehen.

29. Lineare Vererbung. Allgemeine Probleme der Vererbung.

Wenden wir die Entwicklung (17) auf die Grundgleichung der Torsion an, so wird diese

$$\omega = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,dt$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2\, \mathrm{M}(\tau_1)\,\mathrm{M}(\tau_2)\,\varphi(t,\tau_1,\tau_2) + \cdots$$

Es ist augenscheinlich, dass wir die vollständige Geschichte des Torsionsmoments dann betrachten, wenn wir als untere Grenze der Integrale $t_0 = -\infty$ nehmen.

Wir wollen nun annehmen, man könne in erster Annäherung alle Glieder der Entwicklung (17) für φ bis auf das erste vernachlässigen; dann wird aus der vorstehenden Gleichung die folgende:

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Also wird immer noch eine lineare Beziehung die beiden Grössen ω und M miteinander verknüpfen; aber diese Beziehung hat den algebraischen Typus (16) verloren und ist infolge der Vererbung zu einer Beziehung vom integralen Typus geworden. Da die Beziehung linear ist, so kann man sie

(76) V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV. « Atti Torino », **31**, 311, 400, 557, 693, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–254]. — Rend. Acc. Lincei (5) **5** (1 Sem.), 177, 1896 [ibidem, XIX, pp. 255–262]. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Ebenda [ibidem, XX, pp. 263–275]. — *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.* « Ann. di Mat. » (2), **25**, 139. 1897 [ibidem, XXII, pp. 279–313].

(77) Vgl. insbesondere § 3 der Nota I: *Sulla inversione degli integrali definiti.* « Atti Torino », **31**, 311, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225].

vom physikalischen Gesichtspunkt aus dahin deuten, dass die Wirkungen der sich überlagernden Torsionsmomente sich summieren. In der Tat, setzt man diese Eigenschaft voraus, so geht die vorstehende Gleichung daraus als Folgerung hervor. Deshalb bezeichnen wir die betrachtete Vererbung als linear.

Ich will nun die Probleme aufstellen, die auftauchen, sobald die von uns studierte spezielle Frage auf die vorstehende Form gebracht worden ist:

1. Welche Bedeutung hat der Koeffizient $\varphi(t, \tau)$?

2. Wie kann man, wenn die Funktion $\varphi(t, \tau)$ bekannt ist, bei gegebenem $\omega\ (t)$ das Moment $M(t)$ bestimmen?

3. Wie kann man die Funktion $\varphi(t, \tau)$ bestimmen, wenn man annimmt, sie sei unbekannt?

4. Ist es möglich, die vorstehenden, auf die Torsion bezüglichen Gedankengänge auf den allgemeinen Fall der Elastizität auszudehnen?

5. Ist es möglich, sie auf die magnetischen und dielektrischen Erscheinungen auszudehnen?

6. Welche Erscheinungen gehören in den Bereich der Lösungen, die man findet?

Wir wollen diese verschiedenen Probleme ganz rasch besprechen.

30. Integralgleichungen und Systeme von Gleichungen ersten Grades.

Es hat keine Schwierigkeit, die erste Frage zu beantworten. Man sieht nämlich leicht ein, dass $\varphi(t, \tau)$ die Torsion misst, die zurzeit t durch ein Torsionsmoment veranlasst wird, das gleich der Einheit ist, und das im Zeitintervall $(\tau \cdots \tau + d\tau)$ ausgeübt wird. Deshalb wird man annehmen müssen, dass $\varphi(t, \tau)$ mit wachsender Differenz $t - \tau$ abnimmt. Wir werden auch voraussetzen, dass $\varphi(t, \tau)$ für unendlich grosses $t - \tau$ unendlich klein ist. Ausserdem wollen wir die Annahme machen, dass, wenn $t - \tau$ unendlich gross von erster Ordnung wird, die Funktion $\varphi(t, \tau)$ unendlich klein von der Ordnung $1 + \varepsilon$ wird, wo $\varepsilon > 0$ ist. Dann ist das Integral

$$\int_{t_0}^{t} M(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau$$

konvergent, wenn man die untere Grenze $t_0 = -\infty$ setzt.

Wir wollen $\varphi(t, \tau)$ den V e r e r b u n g s k o e f f i z i e n t e n nennen.

Wir wollen nun zur zweiten der im vorigen Paragraphen aufgestellten Fragen übergehen. Man muss die Gleichung (18) nach M auflösen, also $M(t)$ als unbekannt, alle anderen Grössen als bekannt ansehen. Man erhält eine sogenannte Integralgleichung.

Wir werden zeigen, wie man zu ihrer Auflösung gelangen kann, und dabei die allgemeinen Grundsätze entwickeln, nach denen man alle ähnlichen Integralgleichungen lösen kann. Wie schon im voraufgehenden Kapitel gesagt, entsprechen diese Grundsätze wollkommen denen, die wir zuvor bei der Erweiterung der TAYLORschen Reihenentwicklung verwandt haben. Man hat folgenden Weg einzuschlagen.

Zur Vereinfachung setzen wir $K = 1$. Wir teilen das Intervall (t_0, t) in n Teile $h_1, h_2, \cdots, h_n$; $t_1, t_2, \cdots, t_n$ seien n Werte von t innerhalb dieser Teilintervalle.

Wir schreiben nun die Gleichungen auf

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega(t_1) = M(t_1)\\ &\omega(t_2) = h_1 M(t_1)\varphi(t_2, t_1) + M(t_2)\\ &\omega(t_3) = h_1 M(t_1)\varphi(t_3, t_1) + h_2 M(t_2)\varphi(t_3, t_2) + M(t_3),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\omega(t_n) = h_1 M(t_1)\varphi(t_n, t_1) + h_2 M(t_2)\varphi(t_n, t_2) + \cdots\\ &\qquad\qquad + h_{n-1} M(t_{n-1})\varphi(t_n, t_{n-1}) + M(t_n). \end{aligned}\right.$$

Man hat so ein System von n Gleichungen mit den n Unbekannten $M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n)$. Es ist klar, dass, wenn wir zur Grenze übergehen und $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen lassen, die vorstehenden Gleichungen sich auf die Integralgleichung (18) reduzieren. Um also jene Integralgleichung zu lösen, lösen wir zuerst das System algebraischer Gleichungen (19) und gehen danach in der Lösung zur Grenze über, indem wir $h_1, h_2, \cdots, h_n$, unbegrenzt abnehmen lassen. Auf diese Weise wird man sehr leicht die Lösung der Integralgleichung erhalten.

In dem Fall nun, den wir vor Augen haben, tritt ein besonders günstiger Umstand hinzu; die Determinante, die im Nenner erscheint, wird nämlich gleich eins. Deshalb wird die Lösung eine einfache Gestalt haben, denn man braucht nur die Determinanten der Zähler nach den gewöhnlichen Regeln zu berechnen und darauf ihre Grenzwerte zu ermitteln. Augenscheinlich findet man Lösungsformeln folgender Gestalt

$$\begin{aligned} &M(t_1) = \omega(t_1),\\ &M(t_2) = h_1\omega(t_1)A_{21} + \omega(t_2),\\ &M(t_3) = h_1\omega(t_1)A_{31} + h_2\omega(t_2)A_{32} + \omega(t_3),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &M(t_n) = h_1\omega(t_1)A_{n1} + h_2\omega(t_2)A_{n2} + \cdots + h_{n-1}\omega(t_{n-1})A_{nn-1} + \omega(t_n). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten A_{ik} $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ nehmen wir die Determinanten, welche sie als Funktionen der Grössen $\varphi(t_i, t_k)$ ausdrücken, und trennen beim Aufschreiben die Glieder ersten Grades, zweiten Grades, dritten Grades usw. Man findet so zuerst $\varphi(t_i, t_k)$ und danach einfache Summen, Doppelsummen, dreifache Summen usf. Lassen wir jetzt die Intervalle $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen, so werden diese verschiedenen Summen beim Grenzübergang einfache, doppelte, dreifache usw. Integrale.

Die Lösungsformel, die man auf diese Weise erhält, ist (78)

$$\mathrm{M}(t) = \omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,\psi(t, \tau)\,d\tau .$$

Dabei ist

$$\psi(t, \tau) = -\varphi(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\,\varphi(\xi, t)\,d\xi$$

$$-\int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\,d\xi \int_{\xi}^{t} \varphi(\xi, \xi_1)\,\varphi(\xi_1, t)\,d\xi_1$$

$$+\int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\,d\xi \int_{\xi}^{t} \varphi(\xi, \xi_1)\,d\xi_1 \int_{\xi_1}^{t} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\varphi(\xi_2, \xi_1)\,d\xi_2$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man kann daher den Schluss ziehen, dass die Operation der Auflösung einer Integralgleichung, wie ich sie in meinen Arbeiten über die Inversion bestimmter Integrale gegeben habe, im allgemeinen keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, die grösser wären als bei der Auflösung gewöhnlicher Gleichungen ersten Grades. Betrachten wir die Gleichung vom Typus

$$\mathrm{M}(\Theta) = \omega(\Theta) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,\varphi(\Theta, \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqq \Theta \leqq t),$$

d. h. die FREDHOLMsche Gleichung (79), bei der die obere Grenze konstant ist, so kann die Auflösung nach einer ähnlichen Methode bewerkstelligt werden. Man ersetzt sie zunächst durch das System

$$\mathrm{M}(t_1) = \omega(t_1) + h_1\,\omega(t_1)\,\varphi(t_1, t_1) + h_2\,\omega(t_2)\,\varphi(t_1, t_2) + \cdots + h_n\,\omega(t_n)\,\varphi(t_1, t_n),$$

$$\mathrm{M}(t_2) = \omega(t_2) + h_1\,\omega(t_1)\,\varphi(t_2, t_1) + h_2\,\omega(t_2)\,\varphi(t_2, t_2) + \cdots + h_n\,\omega(t_n)\,\varphi(t_2, t_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{M}(t_n) = \omega(t_n) + h_1\,\omega(t_1)\,\varphi(t_n, t_1) + h_2\,\omega(t_2)\,\varphi(t_n, t_2) + \cdots + h_n\,\omega(t_n)\,\varphi(t_n, t_n).$$

Dieses System löst man nach der Methode der Determinanten auf, dann geht man zur Grenze über, indem man die Intervalle $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen lässt. In diesem Falle muss man sowohl Zähler als auch Nenner berechnen, während im vorigen Fall der Nenner gleich eins war.

Wir haben so das Prinzip für die Lösung linearer Integralgleichungen angegeben. Von hier aus kann man ohne jede Schwierigkeit die zweite der oben aufgestellten Fragen beantworten.

(78) Vgl. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*. Kap. II, § 2.

(79) Vgl. Anm. 66.

31. Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses.

Wir gehen zur dritten Frage über.

Um tiefer in sie einzudringen, wollen wir mit einigen Vorbetrachtungen beginnen.

In allen Fällen der Hysteresis und allgemein der Vererbungswirkungen spielt die Frage der geschlossenen Kreisprozesse eine sehr wichtige Rolle. Wir wollen das Torsionsmoment M und den Torsionswinkel ω als Abszisse und Ordinate eines Punktes A betrachten. Wir setzen voraus, dass sich M seit der Zeit $-\infty$ periodisch ändert. Ändert sich ω nun auch periodisch, und zwar mit derselben Periode, so wird der Punkt A eine geschlossene Kurve durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man, welches auch immer die Periode des Torsionsmoments sein möge, beweisen, dass $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion der Differenz $t-\tau$ sein muss. Umgekehrt, ist $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion der Differenz $t-\tau$, so lässt sich zeigen, dass A eine geschlossene Kurve durchläuft, wenn M sich periodisch ändert [80].

Ist nun $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion von $t-\tau$, so bedeutet dies, dass die von einem gegebenen Torsionsmoment nach einer bestimmten Zeit veranlasste Torsion nur von der Grösse des verflossenen Zeitintervalls und nicht von dem Zeitpunkt abhängt, in dem das Moment wirkte. Diese Eigenschaft kann die U n v e r ä n d e r l i c h k e i t der V e r e r b u n g genannt werden. Man folgert den Satz, dass die Existenz des geschlossenen Kreisprozesses die Unveränderlichkeit der Vererbung als Folge nach sich zieht und umgekehrt. Deshalb kann man die beiden Eigenschaften als gleichwertig ansehen. Ich nenne das vorstehende Theorem das P r i n z i p d e s g e s c h l o s s e n e n K r e i s p r o z e s s e s.

Wir haben das Prinzip hier in dem besonderen Fall linearer Vererbung angewandt; es ist aber weit allgemeiner [81].

Ist nun $\varphi(t, \tau) = \varphi(t, -\tau)$, so kann man die Integralgleichung

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau$$

leicht umformen in

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{0}^{t-t_0} \mathrm{M}(t-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

(80) V. Volterra, *Sulle equazioni della elettrodinamica.* « Rend. Acc. Lincei » (5), **18**, 203, 1909 (1 Sem.). [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283]; V. Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* « Acta Math. », **35**, 295, 1912. [in questo vol.: XXXV, pp. 487–538].

(81) V. Volterra, *Sui fenomeni ereditarii.* « Rend. Acc. Lincei » (5) **22** (1 Sem.) 9, 1913. [in questo vol.: XL, pp. 597–606]. Vgl. auch Kap. 7 der schon erwähnten *Leçons sur les fonctions de lignes.*

und nach der angegebenen Methode zur Lösung von Integralgleichungen kann man den Nachwirkungskoeffizienten $\varphi(\xi)$ bestimmen, wenn man $M(t)$ und $\omega(t)$ kennt.

Somit ist die dritte Frage gelöst. Für die Probleme, die wir bis jetzt behandelt haben, genügt also die gewöhnliche Analysis der Integralgleichungen.

32. Schwingungen infolge von Torsion. Integraldifferentialgleichungen.

Wir werden alsbald zeigen, dass man zu den Integraldifferentialgleichungen greifen muss, will man die entwickelten speziellen Betrachtungen auf allgemeine Fälle ausdehnen. Bevor wir indes an diese Erweiterung herangehen, ist es nützlich, zunächst Gleichungen dieser Art zu betrachten, ohne das spezielle Problem der Torsion zu verlassen; allerdings werden wir die Torsion nicht mehr vom Standpunkt der Statik aus betrachten, wie wir es bisher getan haben. Wir wollen eine dynamische Frage untersuchen, d. h. die Frage nach den Schwingungen einer Saite. Es ist klar, dass es nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip für den Übergang von der Statik zur Dynamik genügt, das Torsionsmoment M durch die Differenz $M - \mu\, \partial^2\omega/\partial t^2$ zu ersetzen, wobei μ eine konstante Grösse ist. Man findet dann

$$\omega(t) = K \cdot \left[M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2}\right] + \int_{t_0}^{t} \left[M(\tau) - \mu \frac{\partial^2 \omega(\tau)}{\partial \tau^2}\right] \varphi(t, \tau)\, d\tau. \tag{20}$$

Man kann diese Gleichung durch die reziproke ersetzen, die man durch Auflösung der Integralgleichung erhält:

$$M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{K}\, \omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, \chi(t, \tau)\, d\tau.$$

Richten wir unsere Aufmerksamkeit zuerst auf die Natur der eben gefundenen Gleichung. Sie ist zugleich eine Differentialgleichung und eine Integralgleichung; denn nehmen wir $\omega(t)$ als Unbekannte, so erscheint diese Funktion unter einem bestimmten Integral, und sie ist auch zweimal nach t differenziert. Diese Gleichung ist daher vom Typus der Integraldifferentialgleichungen. Man kann aber zeigen, dass man bei dieser besonderen Integraldifferentialgleichung die Ableitungen durch zweimalige Integration nach t wegschaffen und sie so in eine gewöhnliche Integralgleichung umformen kann.

Deswegen kann man diese Gleichung eine scheinbare Integraldifferentialgleichung nennen; denn ihre differentiale Natur kann zum Verschwinden gebracht werden, und ihre Doppelnatur ist infolgedessen keine wesentliche Eigenschaft.

Wir wollen auf diese besondere Gleichung nicht weiter eingehen. Sie kann uns indes dazu dienen, um vom Standpunkt der Physik eine interessante Bemerkung zu machen. Wir haben im voraufgehenden Kapitel gesehen, dass man den Vererbungskoeffizienten durch Auflösung einer Integralgleichung bestimmen kann, die eine statische Beziehung zum Ausdruck bringt. Ebenso ersieht man leicht, dass sich der Vererbungskoeffizient auch auf dynamischem Wege durch Beobachtung der Saitenschwingungen und Auflösung der Integralgleichung (20) nach φ bestimmen lässt, wenn man voraussetzt, dass φ eine Funktion von $t - \tau$ ist [82].

33. Allgemeiner Fall der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbung.

Wir wollen nun zum allgemeinen Problem der Elastizität übergehen, und zwar unter Berücksichtigung der Vererbungserscheinungen [83].

Das HOOKEsche Gesetz stellt lineare Beziehungen auf zwischen den sechs Elementen die die Spannungen in jedem Punkt bestimmen, und den sechs Elementen, die die Deformation bestimmen (vgl. Kap. 14).

Bezeichnen wir diese Elemente mit

$$t_{is} \quad \text{und} \quad \gamma_{is} \qquad (i, s = 1, 2, 3),$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\gamma_{is} = \Sigma \alpha_{is|hk} t_{hk}. \tag{21}$$

Man vernachlässigt so die Vererbungserscheinungen, denn man setzt ja voraus, dass die augenblickliche Deformation nur von den augenblicklichen Spannungen abhängt. Wollen wir uns aber darüber Rechenschaft ablegen, dass irgendeine Spannung in einem Teilchen des elastischen Mediums auf alle künftigen Deformationen ihren Einfluss geltend macht, so wird man, wie wir es in dem speziellen Fall der Torsion getan haben, die vorstehende Gleichung dadurch berichtigen müssen, dass man einen Ausdruck φ_{is} hinzufügt, der von all den Spannungen abhängt, die seit der Zeit $-\infty$ bis zum gegenwärtigen Augenblick auf das Teilchen gewirkt haben. Unter ähnlichen Voraussetzungen, wie wir sie im Fall der Torsion gemacht haben kann man φ_{is} in eine Reihe entwickeln, die ähnlichen Typus wie die TAYLORsche besitzt, und die sich der bereits im Kap. 28 besprochenen Reihe annähert. Man erhält so eine unendliche Summe von Ausdrücken, die nacheinander von einfachen, doppelten, dreifachen usf. Integralen gebildet werden.

Machen wir die Annahme, dass man in dieser Reihe alle Glieder vernachlässigen kann bis auf das erste, d. h. bis auf dasjenige, das die einfachen

(82) V. VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità.* « Rend. Acc. Lincei » (5), **21** (2. Sem.), 3, 1912 [in questo vol. : XXXVIII, pp. 569–577].

(83) Vgl. V. VOLTERRA, *Sur les équations intégro-differentielles et leurs applications.* « Acta Math. », 35, 295, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487–538].

Integrale umfasst, so ist die Beziehung (21) durch die Gleichung zu ersetzen

$$\gamma_{is}(t) = \Sigma\alpha_{is/hk}\, t_{hk}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Sigma\varphi_{is/hk}(t, \tau)\cdot t_{hk}(\tau)\, d\tau .$$

Diese Gleichung vereinfacht sich durch die Annahme, dass man alle vor der Zeit t_0 erfolgten Wirkungen vernachlässigen darf. Sie wird dann

$$\gamma_{is}(t) = \Sigma\alpha_{is/hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \Sigma\varphi_{is/hk}(t, \tau)\, t_{hk}(\tau)\, d\tau . \tag{22}$$

Die so am HOOKEschen Gesetz angebrachte Modifikation ändert den Typus der Grundbeziehungen, denn sie verwandelt diese in integrale Beziehungen. Immerhin bleiben die Beziehungen linear, und daher werden wir wie früher die hier betrachtete Vererbung eine l i n e a r e V e r e r b u n g nennen. Vom Standpunt der Physik ist diese Eigenschaft charakteristisch dafür, dass das Prinzip der Superposition für die Wirkungen der Spannungen gilt, die in allen dem gegenwärtigen voraufgegangenen Zeitpunkten ausgeübt worden sind. Diese Wirkungen werden im Verhältnis der Koeffizienten $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ verkleinert, die man V e r e r b u n g s k o e f f i z i e n t e n nennen kann. Sie werden im allgemeinen von den Variabeln t und τ und ausserdem von den Raumkoordinaten x, y, z des betrachteten Teilchens abhängen. Es ist klar, dass diese Koeffizienten mit wachsendem $t - \tau$ abnehmen und schliesslich unendlich klein werden müssen, wenn $t - \tau$ unendlich gross wird. Wir wollen voraussetzen, dass, wenn $t - \tau$ unendlich gross erster Ordnung wird, $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ unendlich klein von der Ordnung $1 + \varepsilon$ wird ($\varepsilon > 0$). Die Grundbeziehungen (22) bilden Systeme von Integralgleichungen, und es hat keine Schwierigkeit, sie nach $t_{hk}(t)$ auf dieselbe Weise aufzulösen, wie wir eine einzelne Integralgleichung gelöst haben, d. h. wir haben zuerst die Integrale durch Summen zu ersetzen und dann zur Grenze überzugehen. Es genügt hierfür die Voraussetzung, dass die Determinante D der Grössen $\alpha_{is/hk}$ von Null verschieden ist.

Man drückt so die Spannungen linear durch die Deformationen aus und findet

$$t_{hk} = \Sigma A_{is/hk}\, \gamma_{is}(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi_{is/hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(\tau)\, d\tau . \tag{23}$$

Die Koeffizienten $A_{is/hk}$ sind die Verhältnisse der den Elementen $\alpha_{is/hk}$ der Determinante D zugeordneten Unterdeterminanten zur Determinante D selbst. Die Funktionen $\Phi_{is/hk}(t, \tau)$ werden, ähnlich wie im Kap. 30, aus den Funktionen $\varphi_{is/hk}$ mit Hilfe von Quadraturen berechnet.

Die im Kap. 31 angestellten Betrachtungen sind auf diesen Fall anwendbar, d. h. man kann das Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses erweitern.

Es lässt sich nämlich beweisen, dass, wenn jeder periodischen Änderung der Grössen t_{is} periodische Änderungen der Grössen γ_{hk} mit derselben Periode entsprechen sollen, dann die Koeffizienten $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ Funktionen der Differenz $t - \tau$ sein müssen. Man schliesst hieraus, dass die Existenz des geschlossenen Kreisprozesses und der Unveränderlichkeit der Vererbung gleichwertige Eigenschaften sind. Sind die Koeffizienten $\varphi_{is/hk}$ Funktionen von $t - \tau$, so kann man sie leicht berechnen, wenn die Funktionen γ_{hk} und t_{is} durch die Lösung eines Systems von Integralgleichungen ermittelt sind.

Sobald wir die Spannungen t_{hk} durch die Deformationen γ_{is} ausgedrückt haben (Formeln (23)), können wir ohne Schwierigkeit die Gleichgewichtsbedingungen hinschreiben. Es genügt, die unbestimmten Bedingungen für das elastische Gleichgewicht anzuwenden, d. h.

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} &= \rho X, \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} &= \rho Y, \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} &= \rho Z, \end{aligned} \right.$$

wobei ρ die Dichte und X, Y, Z die Komponenten der Massenkräfte sind. Dazu kommen die Grenzbedingungen

$$(24') \qquad \left\{ \begin{aligned} t_{11} \cos(n, x) + t_{12} \cos(n, y) + t_{13} \cos(n, z) &= X_\sigma, \\ t_{21} \cos(n, x) + t_{22} \cos(n, y) + t_{23} \cos(n, z) &= Y_\sigma, \\ t_{31} \cos(n, x) + t_{32} \cos(n, y) + t_{33} \cos(n, z) &= Z_\sigma, \end{aligned} \right.$$

wobei $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ die Spannungen an der Grenze bedeuten.

Wir drücken jetzt die Grössen γ_{hk} durch die Komponenten der Verschiebung u, v, w aus; man erhält:

$$(24'') \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir in den Gleichungen (24) und (24') für die Grössen t_{hk} die Ausdrücke (23) ein, und ersetzen wir weiter in den so gefundenen Formeln die Grössen γ_{hk} durch die Ausdrücke (24''), so werden die Beziehungen (24) und (24') zu Integraldifferentialgleichungen; denn die unbekannten Grössen u, v, w erscheinen in diesen Gleichungen unter den Integralen und werden ausserdem nach den Variabeln x, y, z differenziert.

Wir sehen also, wenn man das allgemeine Problem der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbung ins Auge fasst, so wird man auf Integraldifferentialgleichungen geführt. Durch sehr einfache Betrachtungen findet man, dass im Fall eines homogenen und isotropen elastischen Körpers diese

Gleichungen die Form annehmen

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&K \triangle^2 u(t) + (L+K)\frac{\partial \theta(t)}{\partial x} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \left[\psi(t,\tau)\triangle^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right] d\tau = \rho X(t), \\
&K \triangle^2 v(t) + (L+K)\frac{\partial \theta(t)}{\partial y} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \left[\psi(t,\tau)\triangle^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y}\right] d\tau = \rho Y(t), \\
&K \triangle^2 w(t) + (L+K)\frac{\partial \theta(t)}{\partial z} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \left[\psi(t,\tau)\triangle^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z}\right] d\tau = \rho Z(t).
\end{aligned}
\right.
$$

Hierbei sind L und K konstante Grössen und

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Gleichungen reduzieren sich augenscheinlich auf die wohlbekannten Gleichungen des gewöhnlichen elastischen Gleichgewichts, sobald man die Integralausdrücke weglässt, die wegen der Vererbung auftreten.

Die eben gefundenen Gleichungen entsprechen den statischen Problemen. Sie sind vom elliptischen Typus. Es hat keine Schwierigkeit, die Schwingungsgleichungen zu bestimmen, denn nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip braucht man nur die Massenkräfte ρX, ρY, ρZ durch die Differenzen zu ersetzen

$$\rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \quad \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right), \quad \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

Man findet auch in diesem Fall Integraldifferentialgleichungen; aber diese sind jetzt vom hyperbolischen Typus.

34. Die elektromagnetischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Vererbung.

Bevor wir in den vorstehenden Untersuchungen weiter fortschreiten, wollen wir das Problem des Elektromagnetismus für ruhende Körper unter Berücksichtigung der Nachwirkung in Angriff nehmen. (5. Frage des Kap. 29).

Wir müssen von den HERTZschen Gleichungen ausgehen, von denen wir in der ersten Vorlesung gesprochen haben (84), d. h. von den Gleichungen

(84) S. Anm. 83.

$$(26) \qquad A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$(26') \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u, \\ A\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v, \\ A\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w. \end{aligned} \right.$$

Hierbei sind $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w die Komponenten der elektrischen Verschiebung, der elektrischen Feldstärke und des elektrischen Stromes, während $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N die Komponenten der magnetischen Verschiebung und der magnetischen Feldstärke sind.

Die gewöhnlichen Bedingungen, die man zu den vorstehenden Gleichungen hinzufügt, sind lineare, ganze algebraische Beziehungen zwischen den Komponenten der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung und zwischen den Komponenten der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Verschiebung. Berücksichtigen wir aber die Vererbung, so muss man diese Beziehungen durch Integralbeziehungen ersetzen, die den eben im Fall der Elastizität betrachteten vollkommen analog sind. Setzen wir die Gültigkeit des Prinzips der Superposition für solche Wirkungen voraus, die von sich überlagernden Ursachen herrühren, so finden wir lineare Integralbeziehungen, und zwar von folgendem Typus:

$$\mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t,\tau)]\, d\tau,$$

$$\mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{23}(t,\tau)]\, d\tau,$$

$$\mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{33}(t,\tau)]\, d\tau.$$

$$\mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [L(\tau)\psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{13}(t,\tau)]\, d\tau,$$

$$\mathfrak{M}(t) = \mu_{21}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{22}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{23}\,\mathrm{N}(t)$$

$$+\int_{t_0}^{t}[\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{21}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{22}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{23}(t,\tau)]\,d\tau\,,$$

$$\mathfrak{N}(t) = \mu_{31}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{32}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{33}\,\mathrm{N}(t)$$

$$+\int_{t_0}^{t}[\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{31}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{32}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{33}(t,\tau)]\,d\tau\,.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die HERTZschen Gleichungen (26) und (26′) ein, so finden wir auch in diesem Fall Integraldifferentialgleichungen. Durch Auflösung der vorstehenden Integralgleichungen können wir die elektrische und die magnetische Feldstärke durch die elektrische und die magnetische Verschiebung ausdrücken. Man kann auch das in den vorhergehenden Kapiteln über das Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses Gesagte hier wiederholen.

Wir wollen jetzt einen besonderen Fall betrachten, und zwar den Fall der Statik. Das ist der einfachste Fall, der überhaupt vorkommen kann. Hierbei ändern sich

$$\mathfrak{L}\,,\mathfrak{M}\,,\mathfrak{N}\quad;\quad\mathfrak{X}\,,\mathfrak{Y}\,,\mathfrak{Z}$$

so langsam, dass man die Grössen

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}\quad:\quad\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}$$

vernachlässigen kann; ausserdem ist das Medium nichtleitend. In diesem Fall existiert ein elektrisches und ein magnetisches Potential.

Es sei V das elektrische Potential. Wir wollen voraussetzen, dass die Grössen ε_{rs} und φ_{rs} für $r \gtrless s$ verschwinden.

Man erhält dann die Gleichung

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial z^2}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2}\,\varphi_{11}(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2}\,\varphi_{22}(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2}\,\varphi_{33}(t,\tau)\right)d\tau = 0\,,$$

eine Gleichung, die leicht in die folgende übergeführt werden kann

$$(27)\qquad \Delta^2\mathrm{V}(t) + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2}\,f(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2}\,\varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2}\,\psi(t,\tau)\right)d\tau = 0.$$

Vernachlässigt man die Vererbung, so reduziert sich diese Gleichung auf die LAPLACEsche $\Delta^2\mathrm{V} = 0$.

Wir können die Gleichung (27) als Typus der elliptischen Integraldifferentialgleichungen ansehen, ebenso wie die LAPLACEsche Gleichung den

Typus der elliptischen Differentialgleichungen darstellt. Die Methoden, die man für die Gleichung (27) verwendet, können leicht auf die verwickeltsten Fälle ausgedehnt werden. Wir wollen uns den Grundgedanken dieser Methoden im folgenden Kapitel zuwenden.

35. Erweiterung der Greenschen Methode.

Wir wollen zunächst einmal annehmen, dass die rechte Seite der Gleichung (27) zwar nicht null, aber doch eine gegebene Funktion $F(x, y, z, t)$ ist. Wir wollen die Gleichung dann mit (27') bezeichnen.

Ist $f = \varphi = \psi$, so kann man die Gleichung schreiben

$$\Delta^2 V(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, \tau) \Delta^2 V(\tau) d\tau = F.$$

Löst man die Integralgleichung nach $\Delta^2 V$, so findet man

$$\Delta^2 V = \varphi(x, y, z, t), \tag{28}$$

wobei φ eine bekannte Funktion ist.

Die Aufgabe lässt sich daher in zwei verschiedene Aufgaben zerlegen, nämlich 1. die Lösung einer Integralgleichung, 2. die Integration der Differentialgleichung (28), d. h. der POISSONschen Gleichung. Die Analysis der Integral- und der Differentialgleichungen reicht daher zur Behandlung der Integraldifferentialgleichung aus, wenn $f = \varphi = \psi$ ist. Diese stellt daher in diesem besonderen Fall kein neues Problem dar. Nehmen wir aber an, dass die Funktionen f, φ und ψ nicht einander gleich sind, so reicht die Lehre von den Integral- und von den Differentialgleichungen nicht zur Lösung des Problems aus, und man muss zur Erreichung dieses Ziels einen neuen Zweig der Analysis entwickeln.

Um in das eben Gesagte noch tiefer einzudringen, kann man das Problem noch auf andere Weise umformen. Wir setzen

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau) f(t, \tau) d\tau = V_1(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau) \varphi(t, \tau) d\tau = V_2(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau) \psi(t, \tau) d\tau = V_3(x, y, z, t)$$

und lösen diese Integralgleichungen nach V auf. Nach dem auseinandergesetzten Verfahren erhalten wir

$$V(x,y,z,t) = V_1(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_1(x,y,z,\tau) f_1(t,\tau)\, d\tau$$

$$= V_2(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_2(x,y,z,\tau) \varphi_1(t,\tau)\, d\tau$$

$$= V_3(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_3(x,y,z,\tau) \psi_1(t,\tau)\, d\tau.$$

Dabei können die Funktionen f_1, φ_1, ψ_1 durch Quadraturen berechnet werden. Zugleich erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = F. \tag{29}$$

Daher lässt sich unsere Integraldifferentialgleichung umformen in zwei Integralgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} & V_1(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_1(x,y,z,\tau) f_1(t,\tau)\, d\tau \\ & = V_2(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_2(x,y,z,\tau) \varphi_1(t,\tau)\, d\tau \\ & = V_3(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_3(x,y,z,\tau) \psi_1(t,\tau)\, d\tau \end{aligned}\right. \tag{30}$$

und in die Gleichung (29). Diese Gleichungen sind simultan und im allgemeinen nicht voneinander trennbar.

Wird aber $f = \varphi = \psi$, so werden V_1, V_2 und V_3 einander gleich; infolgedessen reduziert sich (29) auf die POISSONsche Gleichung, und die Integralgleichungen (30) werden zu Identitäten.

Wir wollen daher annehmen, dass die Funktionen f, φ und ψ nicht einander gleich sind, und wollen ferner annehmen, dass $F = 0$ ist. Wir wollen allgemeine Ergebnisse mitteilen, die sich in diesem Fall finden lassen, und die man mit den Eigenschaften der LAPLACEschen Gleichung vergleichen kann [85]. Zunächst kann man zeigen, dass es im Innern eines Raumes S nur eine einzige Funktion V gibt, die für die Werte con t zwischen t_0 und T ($T > t_0$) bestimmte Werte auf der Umgrenzung des Gebietes S annimmt.

Daher kann man sich die Aufgabe stellen, die Funktion V zu berechnen, wenn ihre Randwerte für die Werte von t zwischen t_0 und T gegeben sind.

(85) V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali*. « Rend. Acc. Lincei » (5), **18** (1. Sem.), 167, 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269-275]. — V. VOLTERRA, *Sur les équations intégro-differentielles*. « Acta Math. », **35**, 295, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487-538].

Die Analogie, die zwischen diesem Problem und dem gewöhnlichen Problem der LAPLACEschen Gleichung besteht, ist augenscheinlich.

Die Rolle, die der GREENsche Satz spielt, ist wohlbekannt. Er stellt ein Reziprozitätsverhältnis zwischen zwei beliebigen regulären Lösungen der LAPLACEschen Gleichung auf. Man kann nun fragen, ob es für Integraldifferentialgleichung einen entsprechenden Satz gibt. Die Antwort fällt bejahend aus; aber in diesem Fall muss man ein Reziprozitätsverhältnis zwischen einer Lösung der Gleichung (27) und einer Lösung der adjungierten Gleichung

$$(31)\qquad \Delta^2 U(t) + \int_t^\theta \left(\frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right) d\tau = 0$$

aufstellen.

Man muss bei dieser Gelegenheit daran erinnern, dass man in der RIEMANNschen Theorie ebenfalls den GREENschen Satz durch Einführung der adjungierten Gleichungen verallgemeinert; aber der Typus der adjungierten Gleichung ist in dem hier betrachteten Fall vollkommen anders.

Die in unserem Falle dem GREENschen Satz entsprechende Reziprozitätsbeziehung zwischen einer regulären Lösung V der Gleichung (27) und einer regulären Lösung U der Gleichung (31) lautet nun folgendermassen:

$$(A)\qquad H_\sigma([V, U], \theta) = 0 .$$

Dabei ist

$$H_\sigma([V, U], \theta) = \int_{t_0}^\theta dt \int_\sigma \left(U(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} - V(t) \cdot \frac{\partial U(\tau)}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$+ \int_{t_0}^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \Big\{ \left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial x} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos(n, x)$$

$$+ \left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial y} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos(n, y)$$

$$+ \left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial z} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos(n, z) \Big\} d\sigma ;$$

n bedeutet die Normale der Umgrenzung.

Um diese Formel anzuwenden, muss man eine Fundamentallösung der adjungierten Gleichung ermitteln, d. h. eine Funktion, die der Gleichung genügt, und die in einem innerhalb des Gebietes S gelegenen Pole unendlich wird. Ich will zeigen, wie sie aus bekannten Fundamentallösungen hergeleitet werden kann. Das wird uns zugleich zeigen, wie die Lösung der Integraldifferentialgleichungen an den Grundgedanken anknüpft, auf dem sich die Auflösung der verschiedenen auf die Integralgleichungen bezüglichen Fragen aufbaut, d. h. den Gedanken, sie als Grenzfall von Systemen linearer Gleichungen anzusehen.

Wir wollen einmal wirklich das System simultaner Differentialgleichungen hinschreiben

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta^2 v_1 = 0\,,\\
&a_{21}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \Delta^2 v_2 = 0\,,\\
&a_{31}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{31}\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + a_{32}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{32}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{32}\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \Delta^2 v_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Integraldifferentialgleichung (27) nichts anderes ist als der Grenzfall dieses Systems, wenn man voraussetzt, dass die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen ins Unendliche wächst.

Das dem vorstehenden adjungierte System ist

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta^2 u_1 + a_{21}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_{31}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{31}\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \cdots = 0\,,\\
&\qquad\qquad \Delta^2 u_2 + a_{32}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{32}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + c_{32}\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \cdots = 0\,.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Es ist nun nicht schwer, die Fundamentallösung des Systems (32) oder des Systems (33) zu berechnen, wenn man von der Fundamentallösung $1/r$ der LAPLACEschen Gleichung ausgeht. (r ist dabei die Entfernung zwischen dem Punkt x, y, z und dem Pol). Für das System (32) finden wir so die Lösung

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{r}\,,\\
v_2 &= -a_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x^2} - b_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial y^2} - c_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial z^2}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Ebenso erhalten wir die Lösung

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{r}\,,\\
v_2 &= \frac{1}{r} - a_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x^2} - b_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial y^2} - c_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial z^2}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Durch Grenzübergang ergibt sich schliesslich die Fundamentallösung der Gleichung (27). Eine entsprechende Rechnung kann man für die Gleichungen (33) anstellen. Und durch einen ganz ähnlichen Grenzübergang ist auch die Reziprozitätsgleichung (A) gefunden. Andererseits kann man sie auch direkt erhalten. Zur Vereinfachung wollen wir die Fundamentallösung der adjungierten Gleichung (31) nicht explizit hinschreiben, sondern sie mit W bezeichnen. Wenn wir dann in der Formel (A) U durch W ersetzen und den Pol aus dem Gebiet durch eine Kugel ausschliessen, deren Radius wir unbegrenzt abnehmen lassen, so gelingt es, den Wert von V in dem innerhalb des Gebietes S gelegenen Pol durch die Werte von V und seinen Ableitungen auf der Umrandung auszudrücken. Die Rechnungen bis zum Auffinden der endgültigen Formel sind sehr verwickelt, aber infolge glücklicher Umstände verschwinden einige Glieder, so dass sich das Ergebnis vereinfacht. Die endgültige Formel lautet

$$\text{(A')} \qquad V_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma([V, W], \theta).$$

$V_0(\theta)$ stellt dabei den Wert dar, den $V(x, y, z, t)$ annimmt, wenn $t = \theta$ und x, y, z die Koordinaten des Poles sind. Es ist das die Grundformel der ganzen Theorie; sie ist auch leicht auf den Fall der Gleichung auszudehnen, die wir am Anfange des Kapitels 35 mit (27') bezeichnet haben.

36. Methoden zur Lösung der Integraldifferentialgleichungen der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbungserscheinungen

Wir haben in der zweiten Vorlesung von der Bettischen Methode zur Integration der Differentialgleichungen für das elastische Gleichgewicht (Kap. 16) und von der Kirchhoffschen Methode (Kap. 17) gesprochen. Wir wollen jetzt zeigen, dass sich im Falle der Vererbung ebenso allgemeine Lösungen angeben lassen. Man muss hierfür Methoden anwenden, die eine Verallgemeinerung der eben für die Gleichung (27) entwickelten darstellen, die sich daher aus der Vereinigung der Grundgedanken für die Behandlung der Differential- und Integralgleichungen ergeben.

Wir kehren zu den Beziehungen (23), (24), (24'), (24'') zurück, die die Bedingungen für das elastische Gleichgewicht im Falle der Vererbung ausdrücken. Wollen wir einen grundlegenden Reziprozitätssatz aufstellen, so müssen wir eine Lösung dieser Gleichungen zu einer Lösung eines adjungierten Systems in Beziehung setzen.

Um das adjungierte System zu erhalten, braucht man nur die Gleichung (23) durch die Gleichung

$$t'_{hk} = \Sigma A_{is/hk} \gamma'_{si}(t) + \int_t^\tau \Sigma \psi_{is/hk}(t, \tau) \gamma'_{is}(\tau)\, d\tau$$

zu ersetzen und die übrigen Gleichungen beizubehalten, d. h. zu schreiben

$$\frac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X',$$

$$\frac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y',$$

$$\frac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z';$$

$$t'_{11} \cos(n, x) + t'_{12} \cos(n, y) + t'_{13} \cos(n, z) = X'_\sigma,$$
$$t'_{21} \cos(n, x) + t'_{22} \cos(n, y) + t'_{23} \cos(n, z) = Y'_\sigma,$$
$$t'_{31} \cos(n, x) + t'_{32} \cos(n, y) + t'_{33} \cos(n, z) = Z'_\sigma;$$

$$\gamma'_{11} = \frac{\partial u'}{\partial x} \quad , \quad \gamma'_{23} = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z},$$
$$\gamma'_{22} = \frac{\partial v'}{\partial y} \quad , \quad \gamma'_{31} = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x},$$
$$\gamma'_{33} = \frac{\partial w'}{\partial z} \quad , \quad \gamma'_{12} = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Der Reziprozitätssatz lautet folgendermassen:

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} dt \int_S \rho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\,d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{T} dt \int_S \rho\,(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\,d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist S der Raum, in dem die elastischen Kräfte wirken, und σ seine Umgrenzung. Um den Satz zu verwenden, muss man Fundamentallösungen berechnen. Man erhält sie leicht im Falle der Isotropie, wo die Gleichungen die Form (25) annehmen.

Differenziert man nämlich die erste Gleichung des Systems (25) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z, so erhält man durch Addition die Beziehung

$$(L + 2K)\,\Delta^2 \beta + \int_{t_0}^{t} (\varphi + 2\psi)\,\Delta^2 \theta\, d\tau = \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}.$$

Hieraus kann man durch Auflösen einer Integralgleichung den Wert von $\Delta^2 \theta$ ermitteln. Sind die Massenkräfte null, so ist θ harmonisch.

Ebenso lassen sich durch Auflösen von Integralgleichungen die Werte von

$$\Delta^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad \Delta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \Delta^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ermitteln; man ersieht so, dass

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

harmonisch sind, wenn die Massenkräfte null sind.

Hieraus kann man dann die Fundamentallösungen der adjungierten Gleichungen erhalten. Durch Anwendung der Reziprozitätsformel (B) lassen sich sowohl die Dilatation und die Rotation als auch die Komponenten der Verschiebung als Funktionen der Verschiebungen und der Spannungen an der Umgrenzung ausdrücken. Im Falle der Kugel ergeben besondere Methoden die Lösung unmittelbar.

Bevor wir schliessen, wollen wir nur noch ein Wort über den typischen Fall der hyperbolischen Integraldifferentialgleichungen sagen, die der KIRCHHOFFschen Differentialgleichung entsprechen.

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - \Delta^2 u(x,y,zt) + \int_{t_0}^{t} \left[f(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + \varphi(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + \psi(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2} \right] d\tau = 0 .$$

Sind die Funktionen f, φ und ψ einander gleich, so kann man ähnlich verfahren wie früher, als wir uns mit dem Problem der Torsionsdynamik beschäftigt haben; sind aber f, φ und ψ nicht einander gleich, so muss man zuerst unmittelbar einen Reziprozitätssatz herleiten. Man muss sodann eine Fundamentallösung berechnen, und zwar gelangt man dazu durch ein besonderes Verfahren, das wir hier nicht entwickeln wollen. Schliesslich kann man durch Einführung der Fundamentalfunktion in die Reziprozitätsformel die Gültigkeit der Formel (A′) vom elliptischen auf den hyperbolischen Fall erweitern.

Wir haben hier nur einen ersten kurzen Abriss der Theorie der Integraldifferentialgleichungen gegeben; aber ihr Studium kann weitergeführt werden, und man gelangt zu speziellen Anwendungen und zur vollständigen Lösung der sich darbietenden Probleme. So ist beispielsweise das Problem des Gleichgewichts einer isotropen elastischen Kugel unter Berücksichtigung linearer Vererbung vollständig gelöst. Die Lösung dieses Problems wird durch sehr stark konvergente Reihen gegeben [86].

Die Analysis der vertauschbaren Funktionen [87] ist ein sehr nützliches Hilfsmittel für alle diese Fragen; wollten wir sie aber darstellen, so würde uns das sehr weit wegführen [88]. Deshalb beschränken wir uns hinsichtlich der Vererbungserscheinungen auf die vorstehenden Ergebnisse.

(86) V. VOLTERRA, *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 107, 1910 [in questo vol.: XXII, pp. 304–310]. — V. VOLTERRA, *Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 239, 1910 [in questo vol.: XXIV, pp. 323–327].

(87) Zwei endliche und stetige Funktionen heissen vertauschbar, wenn die Beziehung gilt: $\int_x^y F(x,\xi)\cdot\Phi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi$. « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 169, 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

(88) V. VOLTERRA, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 169, 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311–322]. — V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni permutabili.* Ebenda, S. 425 [in questo vol.: XXVI, pp. 331–342]. — V. VOLTERRA, *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Lincei » (5) **20** (2. Sem.), 79, 1911 [in questo vol.: XXXI, pp. 380–388]. — Vgl. auch Anm. 10.

Sie beweisen, dass man mit Hilfe der Theorie der Integraldifferentialgleichungen und der Integralgleichungen die Vererbungserscheinungen analytisch ganz allgemein behandeln kann, ohne irgend eine spezielle Annahme über die Funktionen, die sie bestimmen, d. h. über die Vererbungskoeffizienten zu machen. Es ist wohlbekannt, dass es bei Fragen der mathematischen Physik und der Mechanik von Nutzen ist, die Konstanten so lange wie möglich unbestimmt zu lassen und erst im letzten Augenblicke, wenn man die Formeln auf konkrete Fragen anwendet, Zahlenwerte dafür einzusetzen. Aus diesem Grunde ist die Anwendung der Algebra auf Fragen der Naturwissenschaften immer wichtiger geworden. Ebenso erkennt man, wie vorteilhaft es ist, die oben erwähnten Funktionen unbestimmt zu lassen und die Probleme der Vererbung in der grösstmöglichen Allgemeinheit zu lösen. Man wird die Vererbungskoeffizienten in den speziellen Fällen, die sich darbieten, festlegen können, oder man wird sie sogar durch Vergleich der allgemeinen Formeln mit den Beobachtungsergebnissen bestimmen können. Aus all diesem erklärt sich die wesentliche Bedeutung und der grosse Nutzen der Methoden, die an den Gedanken anknüpfen, Funktionen zu betrachten, die von allen Werten anderer Funktionen abhängen. Denn hieraus fliessen die zur Behandlung der Integral- und der Integraldifferentialgleichungen benutzten Methoden.

Würden diese Methoden fehlen, so wären analytische Entwicklungen über die Vererbung nicht möglich; man müsste vielmehr bei den ersten Schritten stehen bleiben.

Die von uns betrachtete Vererbung ist die lineare. Der „ traînage " und die gewöhnliche Nachwirkung nähern sich dieser Art der Vererbung. Die sogenannte elektrotechnische Hysteresis dagegen wird hiervon nicht umfasst. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Erscheinung des permanenten Magnetismus zu betrachten; aber es liegt dem nichts im Wege, das Gebiet der Theorie in der Weise zu erweitern, dass man vom linearen Fall ausgeht [89]. Somit haben wir auch die sechste der Fragen, die im Kapitel 29 aufgeworfen worden waren, beantwortet.

(89) V. VOLTERRA, *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions*. « Comptes Rendus », **142**, 691, 1906 [in questo vol.: IX, pp. 59-62].