XXVI.
SOPRA LE FUNZIONI PERMUTABILI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX_1, 1910_1, pp, 425–437.

§ 1. – Il problema fondamentale.

1. Ho chiamato *funzioni permutabili* [1] due funzioni finite e continue tali che

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi.$$

Supponendo ora

$$0 \leq x \leq y \leq a$$

e $F(x,x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a, proponiamoci il problema di cercare tutte le funzioni $\Phi(x,y)$ permutabili con $F(x,y)$.

2. Eseguiamo un cambiamento di variabili ponendo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1),$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le dette equazioni possano invertirsi univocamente. Avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} F(x_1,\xi_1)\,\Phi(\xi_1,y_1)\,f'(\xi_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi(x_1,\xi_1)\,F(\xi_1,y_1)\,f'(\xi_1)\,d\xi_1$$

quindi, ponendo

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\pm \sqrt{f'(x_1)f'(y_1)}\;\Phi(x_1,y_1) = \Phi_1(x_1,y_1), \\ &\pm \sqrt{f'(x_1)f'(y_1)}\;F(x_1,y_1) = F_1(x_1,y_1), \end{aligned} \right.$$

sarà

$$\int_{x_1}^{y_1} F_1(x_1,\xi_1)\,\Phi_1(\xi_1,y_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi_1(x_1,\xi_1)\,F_1(\xi_1,y_1)\,d\xi_1.$$

Ora prendendo

$$f'(x_1) = \frac{\pm 1}{F(x_1,x_1)}$$

potremo scegliere i segni in modo che $f'(x_1)$ risulti positivo e $F_1(x_1,x_1) = 1$.

[1] Vedi la Nota del 20 febbraio 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [in questo vol.: XXIII, pp. 311–322]. Ivi ho distinto le permutabilità di 1ª e 2ª specie. In questa Nota mi occuperò della permutabilità di 1ª specie che ho anche chiamato semplicemente permutabilità.

Si potrà dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ridurre la ricerca al caso in cui $F(x,x) = 1$.

3. Premessa questa riduzione, si ponga, supponendo $\alpha(x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a,

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x,y)\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = F'(x,y) \\[2ex] \Phi(x,y)\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = \Phi'(x,y). \end{cases}$$

È evidente che, se F e Φ sono permutabili, lo saranno pure $F'(x,y)$ e $\Phi'(x,y)$. Ciò posto scriviamo

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_1(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_2(x,y)$$

$$\frac{\partial F'(x,y)}{\partial x} = F'_1(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F'(x,y)}{\partial y} = F'_2(x,y).$$

Avremo facilmente che

$$F'_1(x,x) = F_1(x,x) + \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}.$$

quindi, preso

$$\alpha(x) = e^{-\int F_1(x,x)\,dx},$$

risulterà

$$F'_1(x,x) = 0.$$

Ma

$$F'(x,x) = 1,$$

quindi sarà anche

$$F'_2(x,x) = 0.$$

Ne segue che, *con una nuova trasformazione*, *potremo ricondurci al caso in cui si cerchino le funzioni permutabili con* $F(x,y)$, *essendo*

$$(4) \qquad F(x,x) = 1 \quad , \quad F_1(x,x) = 0 \quad , \quad F_2(x,x) = 0.$$

4. Supposte soddisfatte le (4) poniamo

$$(\mathrm{I}') \qquad \int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y);$$

avremo $\Psi(x,x) = 0$, e

$$(5) \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = \Phi(x,y) + \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)\,d\xi$$

$$(6) \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} = -\Phi(x,y) + \int_x^y F_1(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi.$$

Scriviamo poi

$$F_2(x, y) - F_2^2(x, y) + F_2^3(x, y) - \cdots = f_2(x, y),$$

$$F_1(x, y) + F_1^2(x, y) + F_1^3(x, y) + \ldots = f_1(x, y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$(5') \qquad \Phi(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y)\, d\xi$$

$$(6') \qquad \Phi(x, y) = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} - \int_x^y f_1(x, \xi) \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi}\, d\xi,$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(\xi, y) \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y) \right] d\xi = 0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x, x) = \Psi(y, y) = f_1(x, x) = f_2(y, y) = 0,$$

si avrà

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x, \xi)\, g_{12}(\xi, y) - \Psi(\xi, y)\, g_{21}(x, \xi)]\, d\xi = 0$$

ove

$$g_{12}(x, y) = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}.$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x, y)$ *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. - Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x, \xi)\, g_{12}(\xi, y) - \Psi(\xi, y)\, g_{21}(x, \xi)]\, d\xi = \lambda(x, y),$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \lambda(x, y) = 0.$$

Sia

$$u = \frac{y - x}{2} \quad , \quad v = \frac{y + x}{2};$$

considerando Ψ come funzione di u e v l'equazione precedente diverrà

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \lambda(x, y) = 0$$

onde

$$\Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v \lambda(\zeta - u, \zeta + u)\, d\zeta,$$

in cui θ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

Ne segue che

$$(\mathrm{A}') \qquad \Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta - u, \xi)\, g_{12}(\xi, \zeta + u) - \Psi(\xi, \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u, \xi)]\, d\xi\,.$$

6. Dimostriamo ora il teorema: *Scelta la funzione* θ, *la funzione* Ψ *è determinata*, ossia *se* $\theta = 0$ *anche* $\Psi = 0$.

Il procedimento che può tenersi per tale dimostrazione è analogo a quello che ho impiegato in casi simili di equazioni integrali ed integro-differenziali (2).

Infatti sia $\theta = 0$ e $|\Psi(x, y)| < \mathrm{M}$, mentre $|g_{12}| < \mathrm{N}$ e $|g_{21}| < \mathrm{N}$. Dalla (A') risulterà

$$|\Psi(x, y)| < 2\mathrm{MN}(y - x)\, x\,,$$

e per conseguenza

$$|\Psi(x, y)| < 2\mathrm{MN}(y - x)\, a\,,$$

da cui segue

$$|\Psi(x, y)| < 2\mathrm{MN}^2 a \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [(\xi - \zeta + u) + (\zeta + u - \xi)]\, d\xi < 4\mathrm{MN}^2 a^2 \frac{(y - x)^2}{1 \cdot 2}\,.$$

Così proseguendo si dimostra che

$$|\Psi(x, y)| < 2^h\, \mathrm{MN}^h\, a^h \frac{(y - x)^h}{h!}\,,$$

qualunque sia il numero intero e positivo h, e quindi $\Psi(x, y) = 0$.

7. Passiamo adesso alla effettiva risoluzione dell'equazione integrale (A). Consideriamo la serie

$$(7) \qquad \sum_1^\infty \Psi_n(\eta \mid x, y),$$

(2) Cfr. *Sulla inversione degli integrali definiti*, «Atti Acc. di Torino», 1896. Nota I, § 2. [In queste «Opere»: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225]. *Sulle equazioni integro-differenziali*, «Rend. Acc. dei Lincei», febbraio 1909, § 3. [In questo vol.: XVII, pp. 269–275].

i cui termini sono ottenuti colla operazione ricorrente

$$(8)\qquad \Psi_n(\eta \mid x\,,y) = \int_u^v d\zeta \int_\eta^{2u} [\Psi_{n-1}(\eta \mid \zeta + u - \xi\,, \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u\,, \zeta + u - \xi)$$

$$- \Psi_{n-1}(\eta \mid \zeta - u\,, \xi + \zeta - u)\, g_{12}(\xi + \zeta - u\,, \zeta + u)]\, d\xi\,,$$

$\Psi_1 = 1$.

Si dimostra facilmente che

$$\Psi_n(\eta \mid x\,, y) < \frac{[2\,\mathrm{N}\, a\,(y - x - \eta)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

e quindi la serie (7) è uniformemente convergente.

Si formi poi

$$(\mathrm{B})\qquad \Psi(x\,,y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \sum_1^{\infty} \Psi_n(\eta \mid x\,, y)\, d\eta\,;$$

essa sarà la soluzione della (A′), quando si prenda

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta\,.$$

Per mezzo della (5′) o della (6′) otterremo poi Φ.

Si verifica senza alcuna difficoltà che, sostituendo la espressione (B) nella (A′), questa resta identicamente soddisfatta. Inoltre, percorrendo in senso inverso il cammino fatto per ottenere dalla (1) la (A′), si dimostra pure facilmente che F e Φ sono permutabili.

§ 3. – Teoremi sulle funzioni permutabili.

8. Dalla (B) segue

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x\,,y)}{y-x} = \psi(0) = \text{cost.}$$

Ma dalla (I′) si ha

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x\,,y)}{y-x} = \lim_{y=x} \frac{\int_x^y \mathrm{F}(x\,,\xi)\, \Phi(\xi\,,y)\, d\xi}{y-x} = \Phi(x\,,x)\,,$$

quindi sarà

$$\Phi(x\,,x) = \text{cost.}$$

Questa proprietà vale per le funzioni $\mathrm{F}(x\,,y)$ e $\Phi(x\,,y)$ che abbiamo ottenute per mezzo delle trasformazioni (2) e (3) in modo da ridurre la F a soddisfare alle condizioni (4). Ora, se vogliamo tornare alle funzioni primitive, dovremo dividere ambedue per la stessa funzione $(\alpha(x)/\alpha(y))\sqrt{f'(x)f'(y)}$, quindi potremo enunciare il

TEOREMA I. - *Se* $\Phi(x,y)$ *è una funzione permutabile con* $F(x,y)$ *tale che* $F(x,x) \gtrless 0$, avremo

$$\frac{\Phi(x,x)}{F(x,x)} = \text{cost.}$$

9. TEOREMA II. - *Se le funzioni permutabili* $F(x,y)$ e $\Psi(x,y)$, *aventi le derivate determinate e finite, sono tali che*

$$F(x,x) \gtrless 0 \quad , \quad \Psi(x,x) = 0,$$

si potrà determinare la funzione $\Phi(x,y)$, *permutabile con esse, in modo che*

$$F\Phi(x,y) = \Psi(x,y) \text{ (3)}.$$

Infatti, posto

$$\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y),$$

derivando rispetto al y (4), otterremo l'equazione di seconda specie

$$\text{(9)} \qquad F(y,y)\,\Phi(x,y) + \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F_2(\xi,y) = \Psi_2(x,y),$$

in cui

$$F_2(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad , \quad \Psi_2(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.$$

Valendosi della trasformazione indicata nel § 1, art. 2, si potrà supporre per semplicità $F(y,y) = 1$, e allora l'equazione integrale (9) si risolverà per mezzo della relazione (vedi § 1, art. 4)

$$\text{(10)} \qquad \Phi(x,y) = \Psi_2(x,y) - \int_x^y \Psi_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi,$$

mentre avremo (5)

$$\text{(11)} \qquad f_2(x,y) - F_2(x,y) + \int_x^y F_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi = 0.$$

Mostriamo che la $\Phi(x,y)$ data dalla (10) è permutabile con $F(x,y)$.

(3) Vedi la notazione adottata per la composizione di due funzioni permutabili: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 1. [In questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(4) Cfr. per la risoluzione delle equazioni integrali di 1ª specie la Nota *Sulla inversione degli integrali definiti*. « Rend. Acc. dei Lincei », 1896, § 4. [In queste « Opere »: vol. secondo, XIX, pp. 255-262].

(5) Cfr. Nota precedente § 2. *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, « Annali di Mat. », 1897, § 10: principio di reciprocità. [In queste « Opere »: vol. secondo XXII, pp. 279-313].

Moltiplicando ambo i membri della (9) per dy, integrando fra x e y e tenendo presente che $\Psi(x, x) = 0$ si avrà che

$$\int_x^y \Phi(x, \xi) F(\xi, y) d\xi = \Psi(x, y). \tag{12}$$

Formiamo ora

$$\int_x^y F(x, \xi) \Phi(\xi, y) d\xi,$$

sostituendo a $\Phi(\xi, \eta)$ il valore dato dalla (10), e osserviamo che in virtù della permutabilità di F e Ψ si ha

$$\int_x^y F(x, \xi) \Psi(\xi, y) d\xi = \int_x^y \Psi(x, \xi) F(\xi, y) d\xi$$

e quindi, con una derivazione rispetto ad y,

$$\int_x^y F(x, \xi) \Psi_2(\xi, y) d\xi = \int_x^y \Psi(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi + \Psi(x, y), \tag{13}$$

giacché per ipotesi $F(y, y) = 1$, $\Psi(y, y) = 0$.

Si avrà in conseguenza

$$\int_x^y F(x, \xi) \Phi(\xi, y) d\xi$$

$$= \Psi(x, y) + \int_x^y \Psi(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi - \int_x^y F(x, \xi) d\xi \int_\xi^y \Psi_2(\xi, \eta) f_2(\eta, y) d\eta$$

e con facili trasformazioni di calcolo, impiegando le relazioni (13) e (11) si otterrà

$$\int_x^y F(x, \xi) \Phi(\xi, y) d\xi = \Psi(x, y),$$

da cui segue, a cagione della (12), la permutabilità delle funzioni F e Φ e quindi delle funzioni Ψ e Φ.

OSSERVAZIONE. – Dalla relazione (10) si deduce facilmente che, se Ψ e F avranno le derivate determinate e finite di ordine n, Φ avrà le derivate di ordine $n - 1$ pure determinate e finite.

10. Una funzione $\Psi(x, y)$ che, al pari della $F(x, y)$, è tale che $\Psi(x, x) \gtrless 0$, si dirà di *primo ordine*, mentre se sarà $\Psi(x, x) = 0$ si dirà di *ordine superiore al primo*. In virtù del teorema I avremo che una funzione permutabile con una funzione di 1° ordine, o è di 1° ordine, o è di ordine superiore al primo. Supponiamo che si presenti questo caso e suppo-

niamo che esistano le derivate successive di Ψ e siano determinate e finite; allora si potrà porre, in virtù del teorema II,

$$FF_1(x,y) = \Psi(x,y),$$

in cui F_1 è permutabile con F. Se F_1 sarà di primo ordine, Ψ si dirà di *secondo ordine*; se F_1 sarà di secondo ordine, Ψ si dirà di *terzo ordine*, e così di seguito; se F_1 sarà di ordine $n-1$, Ψ si dirà di *ordine n*; e Ψ si dirà di *ordine superiore ad n* se F_1 sarà di ordine superiore ad $n-1$.

11. Ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione i teoremi seguenti:

TEOREMA III. - *Se le funzioni di primo ordine* $F_1, F_2, \ldots, F_g$ *sono permutabili fra loro e colla funzione* Ψ *di ordine n, avremo*

$$\Psi(x,y) = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \cdots F_g^{\alpha_g} \Phi((xy)) \tag{14}$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g$ *sono numeri interi positivi soggetti alla sola condizione*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_g = n-1$$

e Φ *è di primo ordine e permutabile colle* $F_1, F_2, \ldots, F_g$.

Reciprocamente, se Ψ *può mettersi sotto la forma precedente, essa è di ordine n.*

TEOREMA IV. — *Se la funzione* $\Psi(x,y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x,y)$, *è tale che il*

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{(y-x)^{n-1}}$$

è finito e diverso da zero, $\Psi(x,y)$ *sarà di ordine n.*

TEOREMA V. - *Se la funzione* $\Psi(x,y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x,y)$, è *di ordine n, sarà*

$$\frac{1}{[F_1(x,x)]^n} \lim \frac{\Psi(x,y)}{(y-x)^{n-1}} = \text{cost.} \lesseqgtr 0\,.$$

OSSERVAZIONE. - Supponendo che Ψ abbia la forma (14), posto

$$\frac{F_2(x,x)}{F_1(x,x)} = c_2\,, \frac{F_3(x,x)}{F_1(x,x)} = c_3\,, \ldots, \frac{F_g(x,x)}{F_1(x,x)} = c_g\,, \frac{\Phi(x,x)}{F_1(x,x)} = c\,,$$

la costante che figura nel teorema precedente sarà

$$\frac{c_2^{\alpha_2} c_3^{\alpha_3} \cdots c_g^{\alpha_g} c}{(n-1)!}.$$

12. Sia $\Psi(x,y)$ una funzione permutabile colla funzione di primo ordine $F(x,y)$ e supponiamo che ambedue queste funzioni abbiano le derivate successive determinate e finite.

Poniamo la costante $\Psi(x,x)/F(x,x) = c_1$ (vedi teorema I) e consideriamo

$$\Psi(x,y) - c_1 F(x,y);$$

questa funzione sarà permutabile con $F(x, y)$ e sarà di ordine superiore al primo, quindi (teorema II)

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + \int_x^y F(x, \xi) \Phi_1(\xi, y) d\xi,$$

in cui Φ_1 è permutabile colle funzioni precedenti.

Applicando alla Φ_1 la formula ora trovata per Ψ potremo scrivere

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \int_x^y F^2(x, \xi) \Phi_2(\xi, y) d\xi,$$

in cui c_2 è una quantità costante; così procedendo innanzi troveremo il

TEOREMA VI. – *Se la funzione $\Psi(x, y)$ è permutabile colla funzione di primo ordine $F(x, y)$, e queste funzioni hanno le derivate successive determinate e finite, sarà*

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \cdots + c_n F^n(x, y)$$
$$+ \int_x^y F^n(x, \xi) \Phi_n(\xi, y) d\xi,$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione, e la funzione Φ_n è permutabile colle funzioni date.

Se col crescere indefinito di n l'ultimo termine tenderà a zero, $\Psi(x, y)$ sarà rappresentata dalla serie

$$\sum_1^{\infty}{}_n\, c_n F^n(x, y).$$

13. La formula (B) dà le funzioni di secondo ordine e di ordine superiore al secondo permutabili con $F(x, y)$, quindi per ottenere tutte le funzioni permutabili con $F(x, y)$ basterà aggiungere alla espressione (B) $c_1 F(x, y)$ con c_1 costante arbitraria. Si può dunque fare a meno della risoluzione della (5) o della (6), come è indicato alla fine del § 2.

§ 4. – FUNZIONI PERMUTABILI COLL'UNITÀ.

14. Riprendiamo le formule del § 1, supponendo $F(x, y) = F(y - x)$ e $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Avremo

$$f_2(x, y) = - f_1(x, y) = \quad f(y - x)$$
$$g_{12}(x, y) = \quad g_{21}(x, y) = -f'(y - x).$$

Applicando dunque la (8) del § 2, risulterà

$$\Psi_1 = 1 \, , \, \Psi_2 = 0 \, , \, \Psi_3 = 0 \, , \cdots , \, \Psi_n = 0 \, , \cdots$$

e quindi

$$\Psi = \theta\,(y - x) \quad , \quad \Phi = \Phi\,(y - x) \, .$$

Le considerazioni svolte nel § 1 mostrano che Φ dovrà avere la stessa forma anche se non si verificherà la condizione $F'(0) = 0$. Si ritrova così il gruppo di tutte le funzioni permutabili fra loro e con una costante, ossia permutabili coll'unità (6).

15. Considereremo in questo § le funzioni di questo gruppo soltanto. Posto $y - x = u$, le funzioni stesse si scriveranno come funzioni di u e la composizione di due di esse Φ e Ψ ci darà

$$\Phi\Psi\,(u) = \int_0^u \Phi\,(u - v)\,\Psi\,(v)\,dv = \int_0^u \Phi\,(v)\,\Psi\,(u - v)\,dv \, .$$

Posto $\Phi\,(0) = c$, $\Psi\,(0) = c'$, avremo

$$\frac{d}{du}(\Phi\Psi\,(u)) = c\Psi\,(u) + \Psi\Phi'\,(u) = c'\,\Phi\,(u) + \Phi\Psi'\,(u) \, ,$$

da cui si ricava

$$\frac{d}{du}(\Phi^n\,(u)) = c\Phi^{n-1}\,(u) + \Phi^{n-1}\,\Phi'\,(u) = (c + \Phi')\,\Phi^{n-1} \, , \tag{15}$$

$$\frac{d^m}{du^m}(\Phi^n\,(u)) = (c + \Phi')^m\,\Phi^{n-m} \qquad \text{per} \quad n > m \, , \tag{15'}$$

$$\frac{d^n}{du^n}(\Phi^n\,(u)) = (c + \Phi')^n - c^n \, . \tag{15''}$$

16. Queste formule servono per risolvere immediatamente il problema seguente:

Data la funzione $F\,(u)$ *di ordine* n, *tale che*

$$F\,(0) = 0 \quad , \quad F'\,(0) = 0 \, , \cdots , \, F^{(n-2)}\,(0) = 0 \quad , \quad F^{(n-1)}\,(0) = 1 \, ,$$

risolvere l'equazione integrale

$$\Phi^n\,(u) = F\,(u) \, . \tag{16}$$

Osserviamo che

$$\lim_{u=0} \frac{F\,(u)}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}$$

(6) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 2 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

e pel teorema V

$$\lim_{u=0} \frac{F(u)}{u^{n-1}} = \frac{c^n}{(n-1)!},$$

avendo posto $\Phi(0) = c$. Ne segue che c è una radice n^{esima} dell'unità. Prendiamo $c = 1$; le soluzioni che corrispondono agli altri valori di c si otterranno, come vedremo, immediatamente.

Deriviamo ora l'equazione (16) n volte rispetto ad u. In virtù della (15'') otterremo l'equazione integrale

$$(1 + \Phi')^n - 1 = f(u),$$

ove con $f(u)$ si è denotata la derivata n^{esima} di $F(u)$.

Per risolvere questa equazione integrale basterà applicare le regole generali che abbiamo date per la risoluzione delle equazioni integrali di grado n (7). Scriviamo perciò l'equazione algebrica

$$(1 + z_2)^n - 1 = z_1 .$$

Avremo

$$z_2 = -1 + \sqrt[n]{1 + z_1} .$$

Prendendo il radicale in modo che per $z_1 = 0$ sia $z_2 = 0$, e sviluppando in serie, si avrà

$$z_2 = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} z_1^h .$$

La funzione Φ' sarà quindi data dalla serie *convergente uniformemente*

$$\Phi'(u) = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(u),$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione. Ne segue la soluzione generale

$$\Phi(u) = \varepsilon\left(1 + \int_0^u \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(v)\, dv\right),$$

ove ε rappresenta una radice n^{esima} qualunque dell'unità.

17. Se noi non poniamo la condizione che $\Phi(u)$ sia finita, l'equazione (16) può risolversi anche quando $F(u)$ sia di ordine inferiore ad n.

Per vederlo in un caso molto semplice consideriamo l'equazione integrale

(17) $$\Phi^2(u) = F(u)$$

(7) Cfr. Nota prec. citata, § 4.

con $F(u)$ di primo ordine. Poniamo

$$F_1(u) = \int_0^u d\xi \int_0^{u-\xi} \frac{F(u-\xi-\eta)}{\xi^{1/2}\ \eta^{1/2}} d\eta .$$

$F_1(u)$ sarà di secondo grado. Risolviamo colla regola data nell'Art. precedente l'equazione integrale

$$\Phi_1^2(u) = F_1(u);$$

la soluzione della (17) sarà data dalla funzione

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{\Phi_1(v)\, dv}{(u-v)^{1/2}},$$

la quale diviene infinita d'ordine $1/2$ per $u = 0$.