297

1786

WYKŁAD ZUPEŁNY

ALGEBRY

PARYŻ — DRUKARNIA E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2

WYKŁAD ZUPEŁNY

ALGEBRY

SKREŚLIŁ

PODŁUG NAJNOWSZYCH ODKRYĆ

ADOLF SAGAJŁO

Professor matematyki

TOM I

POCZĄTKI ALGEBRY

NA CZTERECHSETNĄ ROCZNICĘ URODZIN

KOPERNIKA

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIÉJ

PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH

NAUKOWÉJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1873

PRZEDMOWA

Jako słońce rozpędza ciemności nocne,
tak umiejętność rozpędza ciemności błędu.

Zajmując się z powołania przez długi czas wykładem *algebry* i *analizy* we Francyi, úczułem brak dzieła, któreby porządnie, jasno i zgodnie z dzisiejszym stanem i dążeniem ciągle postępującéj analizy obejmowało tych nauk całość, opartą na wzorowych prawidłach. Żadna ze znanych mi książek zagranicznych przedmiot ten traktujących, nie odpowiadała tym warunkom tak, ażebym mógł był poprzestać na prostém jéj przetłumaczeniu. Bogate więc materyały, które znalazłem w tylu dziełach wykładających algebrę, zasady analizy i historyą tych dwóch ważnych części matematyki czystéj, postanowiłem zgromadzić, roztrząsnąć, uszykować i wyłożyć podług własnych o analizie widoków, oraz zgodnie z prawami saméj nauki. Tym sposobem powstała praca, któréj Tom I pod sąd publiczny ośmielam się oddać jako *algebrę początkową*.

Rzecz jest naturalna, iż dzieła tego za wyłącznie moje poczytywać nie mogę. Zamknąłem w niém to, czegom się gdzieindziéj nauczył. Nie godziło mi się nawet inaczéj postępować. W teraźniejszym bowiem stanie oświaty, kiedy w każdéj materyi znajduje się tyle rzeczy dokładnie obmyślanych i wytrawionych, dzieło naukowe jest i powinno być owocem pracy, nauki i poważnego porównania z sobą rozmaitych wykładów. Chcieć tu być zupełnie oryginalnym, jestto chcieć rzeczy niepodobnéj, a może nawet szkodliwéj. Nie obawiam się więc, ze strony ludzi obeznanych z matematyką, zarzutu żem brał cudze, jeżelim tylko cudzego nie podał za swoje, jeżelim to cudze dobrze i trafnie wybrał, i użył podług dobrego planu i zdrowego sądu analizy.

Radził się także autor, co do wykładu algebry i analizy, znamienitych dzieł matematycznych, tak krajowych jak i zagranicznych. Nowe dzieła klassyczne i ogólne poglądy na algebrę, oraz na rozwijającą się coraz bardziéj nowoczesną analizę najznakomitszych obecnie żyjących geometrów *francuzkich, niemieckich*, *włoskich* a osobliwie *angielskich*, przyczyniły się niemało tak do ustalenia jego sądu o obecnym wysokim rozwoju *algebry wyższéj* i *analizy*, jak do ośmielenia go w podjętéj pracy ze względu na potrzebę niektórych uzupełnień.

Pod względem języka przewodnikami mu byli: Śniadecki, Hreczyna, Czech i książki matematyczne elementarne dla szkół narodowych piękném piórem Księdza Jędrzeja Gawrońskiego w języku polskim nadzwyczaj trafnie skreślone.

Za udzielenie kilku światłych uwag dotyczących wykładu méj algebry, szanownym moim kolegom w Towarzystwie Nauk Ścisłych PP. Folkierskiemu i Gosiewskiemu nieskończenie jestem obowiązany.

Lecz przedewszystkiém winienem otwarcie oświadczyć, że w utworzeniu tego dzieła, od początku do końca, był mym gorliwym współpracownikiem, od tylu lat zacny mój przyjaciel i kolega Nauk Ścisłych Pan SEWERYN ELZANOWSKI. W rzeczy saméj, od planu aż do gruntu dzieła i zewnętrznéj jego formy, od redakcyi aż do nużącéj korekty druku, wszystko to było razem roztrząsane, przyjęte i wspólną pracą wykonane.

Początki Algebry zawierają dwadzieścia siedm rozdziałów. Piérwsze dwadzieścia dwa stanowią kurs zwyczajny *algebry niższéj*. Pięć ostatnich są przeznaczone dla osób pragnących poznać wszystkie zasady rachunku algebraicznego.

Wprowadzić sposoby ogólne, uwydatnić zasady, rozłączyć pytania różnéj natury, takiém było nasze stałe zajęcie. Tak więc, równania stopnia piérwszego rozdzieliłem na cztéry części: zasady ogólne dotyczące przekształcenia zrównań, sposoby rozwiązania, roztrząsanie ogólnych wzorów, składanie zrównań i roztrząsanie zagadnień. Po każdém prawidle załączony jest przykład wyświécający istotne tego prawidła znaczenie; roztrząsanie wzorów zostało wyłożoném z punktu widzenia jak najogólniejszego.

Dyskusya tak ważna trójmianów drugiego stopnia, prawdziwy charakter największości i najmniejszości nastręczają, zdaje nam się, dla lepszego rzeczy zrozumienia, potrzebę rozważania linii krzywych; przedstawienie geometryczne wspiera umysł w badaniu funkcyi: kreśląc, po każdéj części dyskusyi analitycznéj, gałęź krzywéj do niéj się odnoszącą i streszczającą ją, idzie się krokiem pewnym, nie gubiąc się w szczegółach, ani tracąc z widoku pochodu ogólnego funkcyi, który nam ciągle przypomina ruch jakiegokolwiek punktu krzywéj jednostajnie po niéj postępującego. Dla tego też poświęciliśmy kilka kart na to przedstawienie geometryczne, jako też dla własności ogólnych z tego przedstawienia wypływających, takich, na przykład, jak zasada Fermata dla największości.

Tom niniejszy zakończamy wiadomościami wstępnemi o kombinacyach, dwumianem *Newtona,* wykładnikami niewymiernemi i rozdziałem poświęconym wyłącznie na *rachunki liczebne.* Zebraliśmy razem pod tym tytułem zastosowanie metody *przybliżeń kolejnych* do rozwiązywania zrównań drugiego stopnia i do rachunków procentu, jakotéż rozwiązywanie zrównań linijnych o wielkich spółczynnikach, najprzód przez sposób podstawienia, potém przez użycie logarytmów Gaussa.

Wiadomości historyczne, wedle możności zebrane, dopełniają tego krótkiego algebry początkowéj zarysu, który pomimo najlepszych z méj strony usiłowań i wybornych rad moich szanownych kolegów, nie jest, bez wątpienia, od wszelkich skaz i zarzutów wolnym. Pragnąc, przedewszystkiém, dla młodzieży być o ile można użytecznym, upraszam szanowne grono światłych Professorów o udzielenie mi ich otwartego o wyszłém dziele sądu; wszelkie z ich strony spostrzeżenia przyjmę z wdzięcznością.

Tym sposobem oddawszy, według wiadomości historycznych, co się komu należało, nie będę wymieniał, co w ogóle w piśmie tém, jest owocem mojego własnego myślenia. Ci którzy mię sądzić będą, łatwo to rozpoznają. Innym zaś wiadomość ta na nic się nie przyda. Albowiem chciałem nie na miano oryginalnego autora zasłużyć, ale raczéj zrobić rzecz dla wielu interesującą, a dla młodszych odemnie miłośników matematyki użyteczną.

Przy zamknięciu niniejszéj przedmowy, pragnąłbym wypowiedzieć uczucie wdzięczności, którą dla Hrabiego Jana

Działyńskiego przejęty jestem. Żałuję, że mi szanowny nakładca nie pozwala wyrazić, ile mu zawdzięczają podjęte przezemnie prace matematyczne, których początek stanowi niniejszy tom pierwszy. Niech mi przynajmniéj będzie wolno, dla obudzenia w mych współrodakach otuchy, tak wśród piszących jak uczących się, zwrócić uwagę publiczności na skuteczną działalność Towarzystwa Nauk Ścisłych i gorliwy w niéj udział jego Prezesa, za którego inicyatywą siedm dzieł matematycznych w roku bieżącym wydanych, chlubnie świadczyło przy obchodzie uroczystości Kopernika o niestygnącym do nauk zapale w naszym kraju.

Paryż, d. 19 lutego 1873.

Adolf Sągajło.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ IV.

LICZBY ODJEMNE.

ROZDZIAŁ V

DZIELENIE.

ROZDZIAŁ VI.

UŁAMKI ALGEBRAICZNE.

Strona.

ROZDZIAŁ VII.

RADYKALE ALGEBRAICZNE.

ROZDZIAŁ VIII.

ZASADY OGÓLNE ZRÓWNAŃ DOTYCZĄCE.

ROZDZIAŁ IX.

ROZWIĄZANIA ZRÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

ROZDZIAŁ X.

ZAGADNIENIA STOPNIA PIERWSZEGO.

ROZDZIAŁ XI.

O NIERÓWNOŚCIACH.

ROZDZIAŁ XII.

WZORY OGÓLNE NA ROZWIĄZANIE ZRÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

Strona.

ROZDZIAŁ XIII.

WYRAŻENIA PRZEDSTAWIAJĄCE SIĘ POD KSZTAŁTEM NIEOZNACZONYM.

ROZDZIAŁ XIV.

WYRAŻENIA UROJONE.

ROZDZIAŁ XV.

ZRÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEZNANĄ.

ROZDZIAŁ XVI.

ZRÓWNANIA O JEDNÉJ NIEZNANÉJ DAJĄCE SIĘ PRZYWIEŚĆ DO ZRÓWNAŃ STOPNIA DRUGIEGO.

ROZDZIAŁ XVII.

RÓWNANIA Z JAKOLWIEK NIEZNANÉMI.

ROZDZIAŁ XVIII.

ROZWIĄZANIE I ROZTRZĄSANIE ZAGADNIEŃ STOPNI WYŻSZYCH NAD PIÉRWSZY.

ROZDZIAŁ XIX.

NIEKTÓRE PYTANIA DOTYCZĄCE NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI.

ROZDZIAŁ XX.

POSTĘPY.

ROZDZIAŁ XXI.

TEORYA ELEMENTARNA LOGARYTMÓW.

ROZDZIAŁ XXII.

O PROCENCIE SKŁADANYM I O UMORZENIACH DŁUGU.

ROZDZIAŁ XXIII.

O FUNKCYACH W OGÓLNOŚCI.

ROZDZIAŁ XXIV.

O KOMBINACYAH W OGÓLNOŚCI.

ROZDZIAŁ XXV.

DWUMIAN NEWTONA.

ROZDZIAŁ XXVI.

LOGARYTMY UWAŻANE JAKO WYKŁADNIKI.

ROZDZIAŁ XXVII.

RACHUNKI LICZEBNE.

POCZĄTKI ALGEBRY.

PIÉRWSZA CZĘŚĆ.

ROZDZIAŁ PIÉRWSZY.

UŻYCIE LITER JAKO SPOSÓB SKRÓCENIA I UOGÓLNIENIA.

POCZĄTEK I PRAWDOPODOBNE POCHODZENIE WYRAZU ALGEBRA.

1. « Wyraz algebra wyprowadzają niektórzy od nazwiska : *Geber*, znakomitego arabskiego filozofa i matematyka, któremu odkrycie téj nauki przypisują; lecz mniemanie to, równie jak wiele innych na podobieństwie brzmienia wyrazów opartych, jest nieprawdopodobném, i podług *Montucla* (*Histoire des mathématiques*, tom I, str. 382), wywód tego wyrazu podany przez *Lukasza de Burgo*, który pierwszy we Włoszech pracował nad algebrą, zasługuje najwięcéj na wiarę. *Burgo* wyprowadza ten wyraz z arabskiego *al gebr wal mokabala*, które tłumaczy przez *restauratio et oppositio*, to jest : odnowienie i przeciwstawienie; trudno wykazać związek pierwszego wyrazu z naszym przedmiotem, lecz drugi dość trafnie maluje układanie równań, przy którém w rzeczy saméj stawimy na przeciw siebie wielkości i te między sobą porównywamy. Z tego też powodu wielu włoskich pisarzy nazywało algebrę *almokabala*, a nawet znakomity matematyk Cardan tak ją nazywał; włoscy matematycy zwali ją także *Arte maggiore*, lub częściéj *regola della cosa*, dla tego, że niewiadomą w równaniu algebraiczném nazywali *cosa;* ztąd nazwa : *Regel Coss*, lub *die coss*, często napotykana u dawnych niemieckich

autorów. Newton radził ją nazywać arytmetyką powszechną; aby tém oznaczyć naukę o liczbach, uważaną w najrozleglejszém znaczeniu, obejmującą zatém arytmetykę i algebrę. Ampère w swoim podziale wiadomości ludzkich nazywa ją *arytmologiją;* wielu nakoniec znakomitych uczonych używało wyrazu *algorytmija;* obecnie nazwisko algebra powszechnie jest przyjęte. Wszystkie zjawiska przyrodzone mają miejsce w czasie i przestrzeni, z których porównania wyradza się liczba. Pojęcie liczby początkowo było nierozdzielne od przedmiotów, które ona przedstawiała; lecz wkrótce człowiek przekonał się, że działania z liczbami oderwane, są zawsze też same, chociaż one rozmaite wyrażają przedmioty. Umysł więc ludzki wzniósł się do pojęcia systematu rachunków *oderwanych*, w których liczba została zupełnie wolną od wyobrażenia o materyi i to był początek *arytmetyki.* Liczby więc jakkolwiek oddzielnie uważane były niezależne od jakiegobądź przymiotu fizycznego, przecież zachowały jeszcze wielkość oznaczoną, to jest taką, jaką one przedstawiają. Późniéj dopiero odkryto to prawo zasadnicze, że liczby same przez się mogą służyć za przedmiot do nowych spostrzeżeń, nie bacząc na właściwą wartość im przypisywaną; i to dało początek algebrze. Tak więc przejście pojęcia o liczbie z materyjalnego do oderwanego dało początek *arytmetyce*, przejście zaś tego pojęcia od szczegółów do ogółu dało początek *algebrze.* Można więc zgodzić się na definicyję algebry Wrońskiego : «algebra jest nauką o prawach, arytmetyka żaś o faktach uważanych na liczbach. » Algebrę uważoną w całéj rozległości, nazywają niekiedy *analizą matematyczną* i wtedy ona obejmuje nietylko algebrę elementarną, lecz nadto algebrę wyższą czyli transcendentalną, która przecież nie wchodzi do składu zwykłych traktatów algebry. Algebra przedstawia liczby i rachunki, którym one dają początek, sposobem ogólnym i za pomocą znaków umówionych, których doskonały systemat dzielnie przyczynił się do ogromnych postępów téj części matematyki. Znaki, czyli symbole używane w algebrze są dwojakiego rodzaju : jedne służą do wyrażenia wielkości, czyli ilości, bez względu na ich naturę, i to są litery alfabetu; drugie służą do oznaczenia stosunków zachodzących pomiędzy ilościami i działaniami którym tamte poddajemy, to są *znaki algebraiczne.* O algebrze można powiedzieć, że jest to najzwięźlejszy, najrozleglejszy i najdogodniejszy z języków, jakiemi ludzie z sobą porozumiewać się mogą. »

Wyjątek ze znakomitego artykułu o algebrze zamieszczonego przez Pana Jana Pankiewicza w tomie I *Encyklopedyi powszechnéj*, któréj wydawnictwo rozpoczęte w Warszawie na początku r. 1859 ciągle trwało przez dziesięć lat następnych aż do zupełnego tego przedsiębierstwa ukończenia.

WYTŁÓMACZENIE ZNAKÓW.

2. W algebrze, przedstawiamy liczby przez litery, i wskazujemy działania za pomocą znaków.

Znak $+$, wymawia się *więcéj* (plus), jest znakiem dodawania.

Znak $-$, położony między dwiema liczbami, znaczy że należy odciągnąć drugą liczbę od pierwszéj.

Znank $+$ i $-$ występują po raz pierwszy w *Regel Coss*, lub w *die coss*, Krzysztofa Rudolfa (1524).

ab jest wskazaniem wieloczynu z a przez b; to oznaczenie należy się geometrze angielskiemu Tomaszowi Harriotowi (1631).

Znak $\times$ i punkt ., których używamy dla wskazania wieloczynu z ilukolwiek liczb, pochodzą, pierwszy, od Oughtred'a (1631), drugi, od Krystyjana Wolf'a (1752).

Dzielenie a przez b wskazuje się pisząc $\frac{a}{b}$ lub $a : b$.

a^m oznącza m tą potęgę z a, to jest wieloczyn z m czynników równych a; litera m, położona tuż nad liczbą a po prawéj jej stronie i wyrażająca *stopień* potęgi nazywa się *wykładnikiem* (exponens). To oznaczenie, powszechnie przyjęte od czasu wystąpienia Deskarta (1596 — 1650), sięga epoki Stefana de la Roche'a (*Arytmetyka* i *Geometrya*, Lugdun, 1520). Włosi posługiwali się literami q i c, stojącemi na początku wyrazów *quadrato*, *cubo*, i dla tego pisali

$$aq \text{ za } a^2,\quad ac \text{ za } a^3,\quad aqq \text{ za } a^4,$$
$$acq \text{ za } a^5,\quad acc \text{ za } a^6,\quad acqq \text{ za } a^7,\quad \text{i. t. d.}$$

$\sqrt[m]{a}$ oznacza pierwiastek m ty z a; m nazywa się *wskazówką* wyrażającą potęgę do któréj należy wynieść wartość pierwiastkową nazwaną ogólnie radykalem (le radical) aby otrzymać liczbę daną a. W 1520, Stefan de la Roche używał znaku $R)^m$, i, rzecz dość dziwna, stosuje to oznaczenie do wszelkich wartości wskazówki m, która przeto może wzrastać nieograniczenie, gdy tym czasem nie używa jak tylko samych wykładników 1, 2, 3. Podstawienie małego *r* na miejsce wielkiego *R* przyprowadzi trochę późniéj (1524) Christophe'a czyli Krzysztofa Rudolfa do znaku $\sqrt{a}^{m}$, który Deskart zastąpił ostatecznie przez $\sqrt[m]{a}$.

Znak $=$, położony między dwoma wyrażeniami, wskazuje że pierwsze z przedstawionych wyrażeń jest równe drugiemu. Ten znak dostał się nam od Anglika Roberta Reccorde'a (1557).

a $>$ b znaczy że *a* jest większe jak *b*. Harriot pierwszy wprowadził w użycie to oznaczenie.

Kiedy pewne wyrażenie jest położone między nawiasem, należy uważać jako wykonane działania wskazane w tym nawiasie. Tak więc wyrażenie

$$25 - (3 + 4 - 2)$$

oznacza że potrzeba odciągnąć od 25 liczbę 5 która wypada z działań wykonanych w nawiasie. Użycie nawiasów sięga epoki Wojciecha Girard'a (1625).

Geometra francuzki Viète (1540) jest pierwszy który przedstawił liczby przez litery; tylko że jeszcze używał wielkich liter; wprowadzenie małych należy się Tomaszowi Harriot.

UŻYCIE ZNAKÓW JAKO SPOSÓB SKRÓCENIA.

3. Dla oznaczenia korzyści jakie nam przedstawia użycie znaków przy rozwiązaniu zagadnień, załóżmy sobie zadanie następujące:

Zagadnienie. *Trzy liczby mają za summę* 238; *druga przewyższa pierwszą o* 3 *jedności, a trzecia jest równą summie dwóch innych; jakie są te trzy liczby?*

Rozwiązanie: *Językiem zwyczajnym.* Ponieważ druga liczba przewyższa pierwszą o 3 jedności, trzecia przeto warta jest 2 razy pierwszą, więcéj 3; a summa 238 składa się z 4 razy pierwszéj liczby, więcéj 6.

Przewyżka 238 nad 6 jest więc równą 4 razy pierwszéj liczbie; tak że otrzymuje się ostatecznie $\frac{232}{4} = 58$ na pierwszą liczbę, $58 + 3 = 61$ na drugą, a $58 + 61 = 119$ na trzecią.

Sposobem algebraicznym. Powróćmy do zadania wskazując działania za pomocą znaków, i oznaczając pierwszą liczbę przez literę x.

Trzy liczby są

$$x, \quad x+3, \quad x+x+3.$$

Ich summa jest równą 238, co się pisze

$$x+x+3+x+x+3=238,$$

czyli

$$4x+6=238;$$

a, odciągając 6 po obu stronach, potém biorąc ćwierć,

$$4x=238-6=232,$$

$$x=\frac{232}{4}=58.$$

Widzimy ile użycie znaków i litery x dla oznaczenia nieznanéj ułatwia rozwiązanie. Umysł, mniéj natężony obejmuje jednym rzutem oka wszystkie działania; pojmuje jasno drogę do wydobycia nieznanéj ściśle rachunkiem wytkniętą, któréj prostego i naturalnego następstwa bez wysilenia niepodobna było dostrzedz w pośród rozlicznych omówień (périphrases).

UŻYCIE LITER JAKO SPOSÓB UOGÓLNIENIA.

4. Metoda poprzednia, pomimo swéj wyższości nad pierwszą, zostawia jeszcze wiele do życzenia. Daje naprzód sam tylko odosobniony wypadek liczebny nie wykazując bynajmniéj zkąd ten wypływa; a gdy nadto działania wykonane na danych dla osiągnienia wartości nieznanéj nie zostawiają po sobie żadnego śladu, potrzeba przeto powtórzyć na nowo całe rozumowanie przy rozwiązaniu tegoż samego zadania na innych liczbach. Ta niedokładność całkiem znika gdy oznaczymy przez litery nietylko nieznane, lecz nawet dane. Służą zwykle pierwsze litery alfabetu a, b, c, d, i. t. d., do przedstawienia danych, zachowujemy zaś ostatnie x, y, z, i. t. d., do oznaczenia nieznanych. Wielkości literami wyrażone nazywać będziemy *ilościami* (quantité).

5. Weźmy na przykład następujące zadanie : *Podzielić liczbę* n *na trzy części takie, aby druga przewyższyła trzecią o* a, *zaś trzecia była równą summie dwóch innych.*

Pierwsza część jest. . . . x,
druga więc będzie. . . . . $x + a$,
a trzecia. . . . . $x + x + a$.

Aby wyrazić że ich summa jest równą n pisze się :

$$x + x + a + x + x + a = n,$$
$$4x + 2a = n.$$

Potém, odciągając $2a$ po obu stronach, a następnie biorąc ćwierć, dwóch równości, otrzymuje się kolejno :

$$4x = n - 2a,$$
$$x = \frac{n - 2a}{4};$$

zkąd widzimy że *pierwsza część jest równą ćwierci przewyżki liczby danéj nad podwójną różnicą z dwóch pierwszych części.*

Takie wyrażenie, wskazujące szereg działań do wykonania na danych w celu znalezienia wartości nieznanéj, nazywa się *wzorem* czyli *formułą*. Formuła zawiera rozwiązanie całéj klasy zagadnień, to jest wszystkich kwestyj nieróżniących się od siebie jak tylko samą wartością liczebną danych.

6. Można teraz łatwo pojąć definicyę Algebry elementarnéj daną przez Poinsot'a w *Uwagach nad zasadami fundamentalnemi teoryi liczb.*

Algebra elementarna « nie jest czém inném jak arytmetyką uogól-
» nioną ; to jest rozciągniętą od liczb szczególnych do liczb jakich-
» kolwiek, a zatém od działań istotnych które wykonywano do
» działań które się tylko wskazują za pomocą znaków ; tak że w téj
» pierwszéj spekulacyi umysłu mniéj się myśli o wydobyciu wy-
» padku z tych działań po sobie następujących jak o skreśleniu
» ich obrazu, a zwłaszcza o odkryciu tym sposobem formuł dla
» rozwiązania wszystkich zagadnień tegoż samego rodzaju. »

7. Nie będzie bez pożytku zrobić wydatniejszemi korzyści formuł. Wiadomo, na przykład, że się otrzymuje procent p od kapitału a,

umieszczonego na stopę r podczas t lat, mnożąc kapitał przez stopę, potém przez czas, i dzieląc wypadek przez 100; ztąd formuła

$$p = \frac{art}{100};$$

gdy zauważymy że można nadać temu wyrażeniu trzy inne formy

$$a = \frac{100p}{rt}, \quad r = \frac{100p}{at}, \quad t = \frac{100p}{ar},$$

spostrzeżemy że taż sama formuła odpowiada czterém szeregom zagadnień które, w arytmetyce, miały swe rozwiązanie szczególne.

Podobnie formuła

$$e = vt,$$

która daje przestrzeń przebieżoną przez ciało poruszające się jednostajnie prędkością v w przeciągu czasu t, może przybrać dwie inne formy

$$v = \frac{e}{t}, \quad t = \frac{e}{v}.$$

Wzór powyższy zamyka więc trzy twierdzenia. Galileusz, który, nie używając żadnéj z tych formuł, dowiódł wprost każde z tych podań, poświęcił cztery karty (stronnice) na ten przedmiot.

Tak więc sam pogląd na formuły rodzi zbliżenia między twierdzeniami których związek przeszedłby zapewne nie dostrzeżony, jeśliby przestano na samém wyrażeniu tych propozycyj językiem zwyczajnym.

KLASYFIKACYA FORMUŁ.

8. Każdy skład ilości połączonych przez jakiekolwiek działania i znaki zowie się *wyrażeniem algebraiczném*. Wszelkie wyrażenie nie zawierające w swym składzie żadnego pierwiastku jest *wymierném* (rationnel); w razie przeciwnym jest *niewymierném* (irrationnel). Ilości niewymierne, u starożytnych geometrów, nazywały się *liczbani głuchemi* (numeri surdi).

Wyrażenie wymierne jest *całkowitém* kiedy żadne dzielenie nie jest na niém wskazane; w razie przeciwnym jest *ułamkowém*. Mówi się w szczególności że wyrażenie algebraiczne jest *całkowitém pod względem pewnéj litery*, gdy ta litera nie znajduje się w żadnym dzielniku, ani pod żadnym pierwiastkiem,

Nazywa się *jednomianem* (monôme) wszelkie wyrażenie gdzie nie ma wskazanych, żadnego dodawania, ani żadnego odciągania. Jakakolwiek ilość jednomianów połączonych z sobą znakami + lub — tworzą wyrażenie trafnie nazwane *wielomianem* (polynôme).

Jednomiany składające wielomian, nazywają się *wyrazami* wielomianu, lub tylko *wyrazami*. Wielomian złożony z dwóch wyrazów, nazywa się *dwumianem* (binôme); wielomian złożony z trzech wyrazów nazywa się *trójmianem* (trinôme); wielomiany z więcéj jak z trzech wyrazów złożone nie mają szczególnego nazwania.

Jednomian może zamykać w sobie jednocześnie czynniki liczebne i litery; czynnik liczebny jest nazwany *spółczynnikiem* : tym sposobem $\frac{5}{7}$ jest spółczynnikiem jednomianu (wyrazu)

$$\frac{5}{7}\ \frac{a^3b^2c}{\sqrt{d}}.$$

Należy się Viètowi wprowadzenie tego nazwania.

Dwa wyrazy są *podobne* gdy te niczém się więcéj od siebie nie różnią jak tylko wielkością swoich spółczynników.

Daje się często nazwisko *wyrażenia całkowitego* wszelkiemu wyrażeniu algebraicznemu które jest całkowite tylko pod względem liter, i które posiada spółczynniki ułamkowe.

9. Otrzymuje się wartość liczebną jednomianu kładąc na miejscu liter, liczby które te litery przedstawiają i wykonywając wskazane działania. I tak jednomian

$$\frac{3a^2c}{4b}$$

ma wartość $\frac{15}{4}$ dla $a=2, \quad b=4, \quad c=5.$

10. *Wartość liczebna wielomianu jest różnicą między summą wartości liczebnych wyrazów poprzedzonych znakiem + i summą wartości liczebnych wyrazów poprzedzonych znakiem —.*

Ztąd wynika że :

Wartość wielomianu nie zmieni się kiedy wyrazy jego poprzekła-

dany w jakimkolwiekbądź porządku, byleśmy zachowali znaki te same przed każdym z nich położone.

11. Gdy, dla wartości szczególnych przypisywanych literom, summa wyrazów poprzedzonych znakiem — przewyższa summę wrazów poprzedzonych znakiem $+$, odciąganie jest niepodobném, a wielomian nie ma *znaczenia* dla tych wartości szczególnych wprowadzonych do wyrazów wielomianu na miejscu odpowiednich im lier.

Tak trójmian

$$a^2 - 3ab + b^2,$$

kóry, dla $a = 12$ i $b = 1$, wart jest 109; nie ma sensu dla $a = 6$, $b = 4$, ponieważ, w tym razie, bylibyśmy przywiedzeni odciągnąć 72 od 52.

Będziemy przypuszczali aż do nowego rozporządzenia (IV^{ty} rozdział) że w wielomianach poddanych pod nasze rozumowania, wartości przypisywane literom wydają summę wyrazów *dodanych* (addlifs) wyższą nad summę wyrazów *odjętych* (soustractifs).

ĆWICZENIA.

I. Znaleźć dwie liczby których summa i różnica są znane.

II. Gdy zegar bije godzinę dwunastą, indeks (skazówka) godzin i indeks minut znajdują się jeden na drugim. Wskazać wszystkie epoki w których te indeksy będą się znajdowały jeden na drugim, albo będą przedłużeniem jeden drugiego podczas dwunastu godzin następnych.

III. Dwie fabryki świéc jarzących robią sobie konkurencyę: Jedna z nich założoną została w n dniach po drugiéj, i używa a robotników którzy pracują h godzin na dzień, gdy tymczasem druga zatrudnia a' robotników pracujących dziennie h' godzin; w jakim czasie dwie fabryki te będą mogły wyrabiać téż samą liczbę świéc jarzących?

IV. Król Syrakuzy Hieron, przeznaczył na koronę dla Jowisza 10 funtów czystego złota, które na ten cel złotnikowi oddać rozkazał. Korona przez złotnika zrobiona ważyła funtów 10; ale król niedowierzając czy złotnik zupełnie czystego złota użył, zaradził się w tym względzie Archimedesa, sławnego pod ów czas matematyka. Ten przekonawszy się naprzód że złoto czyste zanurzone w wodzie dystylowanéj, traci ze swéj wagi $\frac{52}{1000}$, a srebro czyste w takiéjże wodzie zanurzone traci $\frac{99}{1000}$ swej wagi, zanurzył koronę w wodzie czystej, i znalazł że waży funtów 9 i 6 uncyj, a przez to właśnie oszukaństwo wykazał. Pytanie ile w téj koronie było czystego złota, a ile takiegoż srebra? (Odp. Czystego złota było funtów 7 i uncyj $12\frac{12}{47}$, a srebra funtów 2 i uncyj $3\frac{35}{47}$).

V. Pewien woźnica zobowiązał się przewieźć naczynia trojakiej wielkości, płacąc za naczynie stłuczone tyle ile odbiera za naczynie oddane w dobrym stanie; powierzono mu g wielkich, m średnich i p małych naczyń. Dowiedziano się iż stłukł w przewozie wszystkie naczynia pewnéj wielkości: jeśli stłukł wielkie albo małe, odbierze a franków; jeśli stłukł średnie, odbierze b franków. Pytanie ile mu płacono za każde naczynie w każdym gatunku oddane w dobrym stanie.

ROZDZIAŁ II.

DODAWANIE I ODCIĄGANIE.

DODAWANIE I ODCIĄGANIE JEDNOMIANÓW.

12. Dwa wyrażenia algebraiczne są *równoważne* gdy podstawienie tychże samych liczb za litery które te wyrażenia zawierają w sobie nadaje im tęż samą wartość liczebną.

W algebrze odbywają się działania na literach; rachunek nie może więc być wykonanym do końca, a działania mają na celu przekształcenie wyrażeń algebraicznych które wypływają z ich bezpośredniego wskazania na inne prostsze, lecz równoważne.

13. *Aby dodać do siebie ilekolwiek jednomianów, należy je napisać wciąż jedne po drugich przedzielając każdy wyraz od tuż po nim następującego znakiem* $+$.

Nie ma tu miejsca do żadnego uproszczenia, ponieważ dodawanie jest najprostszém ze wszystkich działań algebraicznych. Wszakże *gdy niektóre wyrazy dodać się mające są podobne, można je zebrać w jeden, przy którym kładzie się spółczynnik równy summie spółczynników wyrazów w jeden zebranych.* Tak, formuła

$$5a^4 + 3ab^2c + 4abc^2 + 6ab^2c$$

równoważy z tąż formułą uproszczoną

$$5a^4 + 9ab^2c + 4abc^2.$$

14. *Aby odciągnąć od siebie dwa jednomiany, pisze się drugi* (*ten który odciągamy*) *poprawéj stronie pierwszego* (tego od którego odciągamy) *kładąc między niemi znak* $-$.

Jeżeli dwa wyrazy są podobne, można je zebrać w jeden, który będzie miał za spółczynnik różnicę spółczynników wyrazów w jeden *zebranych.*

Przykład :

$$7a^2b - 4a^2b = 3a^2b.$$

ZASADY NA KTÓRYCH SIĘ OPIERA DODAWANIE WIELOMIANÓW.

15. Teorya dodawania wielomianów opiera się na zasadach następujących :

1°. *Dodaje się summa do liczby, dodając raz po raz do téj liczby każdą z części summy.*

Ta zasada wyraża się za pomocą formuły

$$A + (a + b + c + d) = A + a + b + c + d,$$

gdzie różne litery mogą przedstawiać jakiekolwiek liczby.

2°. *Odciąga się summa od liczby, odciągając od téj liczby raz po raz rożne części summy.* Tym sposobem postępując otrzymuje się

$$A - (a + b + c + d) = A - a - b - c - d.$$

W istocie, druga strona równości jest taką, że do niéj dodając $a + b + c + d$, wynajduje się liczba pierwotna A.

3° *Aby dodać do liczby różnicę dwóch innych, dosyć dodać pierwszą i od wypadku odciągnąć drugą.* Tak działając otrzymuje się

$$A + (a - b) = A + a - b.$$

W rzeczy saméj, ponieważ reszta $(a - b)$, dodana do ilości drugiéj b, wydaje ilość pierwszą a; zatém, na mocy definicyi odciągania, można napisać $a = (a - b) + b$; z czego wynika dodając A po jednéj i po drugiéj stronie, $A + a = A + b + (a - b)$, a potém odciągając b po obu stronach otrzymujemy wypadek szukany

$$A + a - b = A + (a - b).$$

PRAWIDŁO DODAWANIA WIELOMIANÓW.

16. *Aby dodać wielomian do liczby, dosyć napisać wciąż téj liczby różne wyrazy wielomianu z ich właściwemi znakami.*

W rzeczy saméj, załóżmy sobie dodać do liczby A wielomian

$$a + b - c + d - e + f.$$

Ten wielomian znaczy tyle (10) co

$$(a + b + d + f) - (c + e),$$

a zasada uznana dla dodawania różnicy (15, 3°), daje

$$A + [(a + b + d + f) - (c + e)] = A + (a + b + d + f) - (c + e)$$

c można napisać, na mocy reguł wskazanych (15, 1° i 2°) dla dodwania i odciągania summy,

$$A + a + b + d + f - c - e,$$

lub, zmieniając porządek wyrazów (10),

$$A + a + b - c + d - e + f,$$

wypadek odpowiedni regule namienionéj.

Prawidło odciągania wielomianów.

17. *Aby odciągnąć wielomian od liczby, piszą się wciąż téj liczby różne wyrazy wielomianu ze zmienionemi znakami.*

Na przykład, różnica między liczbą A i wielomianem

$$a + b - c + d - e + f$$

wyraża się zwykle pod formą

$$A - a - b + c - d + e - f.$$

W rzeczy saméj, różnica dwóch ilości jest, wedle definicyi, to co potrzeba dodać do drugiéj aby otrzymać pierwszą. Otóż, dodając wyrażenie poprzednie do wielomianu danego, znajduje się (16) summa algebraiczna

$$a + b - c + d - e + f + A - a - b + c - d + e - f,$$

która jest równą liczbie A.

Następstwo reguł dodawania i odciągania.

18. *Można, w wielomianie, zamknąć ilekolwiek wyrazów w nawiasie, pod warunkiem zachowania lub zmienienia znaków wszystkich tych wyrazów, stosownie do tego jak się położy znak + lub znak — przed nawiasem.*

W istocie, reguły dodawania i odciągania mogą się sprowadzić do dwóch formuł następujących :

$$A + (m - n + p - q) = A + m - n + p - q$$
$$A - (m - n + p - q) = A - m + n - p + q.$$

Odwrotnie. Jeżeli druga strona jest wyrażeniem algebraicznėm danėm, można ją zastąpić przez wyrażenie które przedstawia strona pierwsza. Tak więc poprzednie dwie formuły, przestawione w porządku odwrotnym, stanowią i ściśle sprawdzają prawidło powyżėj przepisane.

UPROSZCZENIE WYRAZÓW PODOBNYCH.

19. Gdy wielomian zamyka w sobie wyrazy podobne, można te wyrazy zebrać w jeden, wykonywając działanie na ich spółczynnikach.

To działanie wykonywa się *robiąc summę wszystkich wyrazów podobnych poprzedzonych znakiem + i summę wszystkich wyrazów podobnych poprzedzonych znakiem —, potém odciągając mniejszą z tych summ od większéj i dając reszcie znak który służy summie większéj. A gdyby summy były równe wtedyby się zniszczyły.*

Tak np. wielomian

$$3a + 4b - 2a + 5c - 8b + 6b + 4a + 2c - 5b$$

staje się, po uproszczeniach,

$$5a - 3b + 7c.$$

W rzeczy saméj, ten wielomian, nie zważając na porządek wyrarazów, jest tenże sam co

$$3a + 4a - 2a + 4b + 6b - 8b - 5b + 5c + 2c,$$

który, wedle reguł dodawania i odciągania, przekształca się raz po raz na wielomiany mu równoważne

$$(3a + 4a) - 2a + (4b + 6b) - (8b + 5b) + (5c + 2c),$$

$$7a - 2a + 10b - 13b + 7c,$$

$$(7a - 2a) - (13b - 10b) + 7c,$$

$$5a - 3b + 7c.$$

Uwaga. Działanie któreśmy na ostatku odbyli i przez które wszystkie wyrazy podobne, jakiebykolwiek miały znaki, łączą się w jeden, nazywa się *uproszczeniem* (réduction).

SPOSÓB WYKONANIA TYCH DZIAŁAŃ PRAKTYCZNIE.

20. Kiedy natrafia się na dodawanie wielomianów które mieszczą w sobie wyrazy podobne, zamiast zastosowania do nich reguły n^u 16, i uproszczenia ich późniéj, wykonywa się dodawanie i uproszczenie jednocześnie; w tym celu dosyć jest naśladować rozporządzenie przyjęte w arytmetyce przy dodawaniu liczb całkowitych. Pisze się wielomiany przedstawione jedne pod drugiemi w szeregach poziomych, urządzając wyrazy podobne w kolumny pionowe; potem zbiera się w jeden wyrazy każdéj kolumny.

Postępuje się tymże samym sposobem przy wykonaniu odciągania, z tém jednak zastrzeżeniem, że pisząc wielomian dany do odciągania należy odmienić na przeciwne wszystkie znaki jego wyrazów.

PRZYKŁAD DODAWANIA.

$$\begin{array}{lr}
 & 4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3 \\
 & -2a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - 4b^3 \\
 & 6a^3 - 10ab^2 - 8ab^2 + 10b^3 \\
 & -3a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - 8b^3 \\
\hline
\textit{Summa} & 5a^3 - 19a^2b + 18ab^2 - 11b^3
\end{array}$$

PRZYKŁAD ODCIĄGANIA.

$$\begin{array}{r}
15a^4 + 18a^3b + 17a^2b^2 + 9b^4 \\
7a^4 + 13a^3b - 19a^2b^2 + 6b^4
\end{array}$$

piszę się DODAWANIE RÓWNOWAŻNE.

$$\begin{array}{lr}
 & 15a^4 + 18a^3b + 17a^2b^2 - 9b^4 \\
 & -7a^4 - 13a^3b + 19a^2b^2 - 6b^4 \\
\hline
\textit{Reszta uproszczona.} & 8a^4 + 5a^3b + 36a^2b^2 - 15b^4
\end{array}$$

ĆWICZENIA.

1. Pewien podróżny przebiegł 11 mil drogi w dnin pierwszym swéj podróży, lecz nazajutrz i w dniach następnych jego pochód zwolniał, do tego stopnia że, gdy poczynając od drugiego dnia jego podróży, porówna się drogę przebieżoną

każdego dnia do drogi odbytéj dnia poprzedzającego, znajduje się że drogi te są w stosunku ułamków

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{7}{9}, \ldots ;$$

pytanie: *ile mil według tych danych* będzie mógł przebiedz ten człowiek *w 30 dniach jego ciągłéj podróży* ?

II. Trzy naczynia zawierają mieszaninę wody i wina : pierwsze, a kwart wody, b kwart wina ; drugie, a' kwart wody, b' kwart wina ; trzecie a'' kwart wody, b'' kwart wina. Bierze się naprzód połowę płynu zamkniętego w pierwszém naczyniu i przelewa się go do drugiego ; bierze się potem trzecią część płynu który się natenczas znajduje zamknięty w drugiém, i przelewa się go do trzeciego. Znaleźć formuły wskazujące ilości wody i wina zawarte w każdem naczyniu ?

Po tych operacyach znajduje się :

Pierwsze naczynie............. $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$;

Drugie naczynie.............. $\frac{2a'+a}{3}$, $\frac{2b'+b}{3}$;

Trzecie naczynie.............. $\frac{6a''+2a'+a}{6}$, $\frac{6b''+2b'+b}{6}$.

III. Woda ciekąca jednym kanałem może napełnić kadź, w którą wpływa razy a w dniach b. Taż woda wypływająca innym kanałem może wypróżnić tę kadź razy c w dniach d. Otworzywszy oba kanały, ile dni potrzeba będzie do napełnienia kadzi ?

Odpowiedź : $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) x = 1$, zkąd $x = \frac{bd}{ad - bc}$.

ROZDZIAŁ III.

MNOŻENIE.

MNOŻENIE JEDNOMIANÓW.

21. Mnożenie jednomianów całkowitych opiera się na trzech następujących, dowiedzionych w arytmetyce zasadach:

1° *Aby pomnożyć liczbę przez wieloczyn wielu czynników, dosyć wykonać jedne po drugich z kolei po sobie następujące mnożenia téj liczby przez różne czynniki tegoż wieloczynu;*

2° *W wieloczynie wielu czynników można zastąpić pewną liczbę tych czynników przez ich wieloczyn;*

3° *Wieloczyn potęg jednéj liczby jest potęgą téj liczby, i ma za wykładnik summę wykładników.*

Ta ostatnia zasada wyraża się przez formułę

$$a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p},$$

gdzie m, n, p są liczby całkowite jakiekolwiek. Przebieżmy, w kilku słowach, powyższéj zasady dowodzenie. W wieloczynie $a^m . a^n . a^p$ można zastąpić a^m przez m czynników równych a, a^n przez n czynników równych a, a^p przez p czynników równych a (1°); wieloczyn nad którym obecnie się zastanawiamy będzie przeto mieścił w sobie $m + n + p$ czynników równych a; będzie więc równy ostatecznie a^{m+n+p}.

22. *W mnożeniu wielu jednomianów całkowitych, mnożą się spółczynniki między sobą, daje się każdéj literze spólnéj kilku czynnikom wykładnik równy summie wykładników które ta litera posiada przy każdym z tych czynników, i biorą się inne litery z ich wykładnikami.*

W istocie, pierwsza zasada przekształca początkową formułę

$$5a^3 bc^2 d^3 \times 8a^4 b^2 d \times 3c^6 d^2 f$$

na następującą:

$$5a^3 bc^2d^3.8.a^4.b^2.d.3.c^6.d^2.f^1,$$

która, na mocy drugiéj zasady, może być napisaną

$$(5.8.3)\,(a^3.a^4)\,(b.b^2)\,(c^2.c^6)\,(d^3.d.d^2).f^1,$$

albo nakoniec, wedle trzeciego prawidła,

$$120a^7b^3c^8d^6f^1.$$

PROSTE NASTĘPSTWO WIELOCZYNU ILUKOLWIEK JEDNOMIANÓW.

Wiemy że potęga stopnia m wszelkiéj ilości jest wieloczynem z téjże ilości, m razy za czynnik wziętéj, zatém: *podnosząc jednomian do potęgi* m, *potrzeba jego spółczynnik wynieść do potęgi* m, *a wykładniki każdéj litery do jednomianu wchodzącéj, pomnożyć przez* m. Tak na przykład jednomian $5a^3b^2c$ podniesiony do potęgi m daje

$$(5a^3b^2c)^m = 5^m a^{3m} b^{2m} c^m.$$

Uwaga. Oczywiście że każda litera która nie ma wykładnika może być napisaną z wykładnikiem 1, gdyż wykładnik jest liczbą która wskazuje ile razy ta litera ma być wziętą za czynnik. Możnaby nawet było zaraz dodać że każda litera oznaczona wykładnikiem zero równa się 1; gdyż wykładnik zero wskazuje że ta litera nie wchodzi jako czynnik; tak że napisać a^0 pomiędzy czynnikami jakiegokolwiek wieloczynu, jest to nie wprowadzić żadnego czynnika czyli czynnik 1. Lecz do wykładnika zero jeszcze raz w dalszym ciągu powrócimy.

23. Wynika z podań dowiedzionych w arytmetyce (*) o stosunkach: 1° *że aby otrzymać wieloczyn wielu wyrażeń algebraicznych ułamkowych, dosyć je pomnożyć wyraz przez wyraz;* 2° *że wyrażenie algebraiczne nie zmienia swéj wartości, gdy się mnoży albo dzieli oba jego wyrazy przez tę samą ilość.*

Pierwsze twierdzenie sprowadza mnożenie jednomianów ułamkowych do mnożenia jednomianów całkowitych. Drugie dozwala uprościć wypadek znosząc czynniki spólne obu wyrazom.

Przykład:

$$\frac{3a^3d}{2b^3} \times \frac{b^6c}{6a^5c^7d} = \frac{3a^3db^6c}{12b^3a^5c^7d} = \frac{b^3}{4a^2c^6}.$$

(*) Serret, *Początki Arytmetyki*, rozdział XV.

ILOCZYN WIELOMIANU PRZEZ JEDNOMIAN.

24. Niech będzie do mnożenia wielomian $a-b+c$ przez jednomian wyrażający liczbę jakąkolwiek m.

Dla większéj jasności w dowodzeniu rozbierzemy trzy główne przypadki.

1° m jest całkowitém. W tym razie wiemy, że mnożenie jest skróceniem dodawania; przeto wieloczyn z $a-b+c$ przez m będzie to summa z tylu części, równych wielomianowi $a-b+c$, ile ma jedności m, to jest

$$(a-b+c)m=(a-b+c)+(a-b+c)+\text{ i. t. d.};$$

a wykonawszy dodawanie, wypada

$$(a-b+c)m=a-b+c+a-b+c+\text{ i. t. d.},$$

gdzie a, b i c powinny być napisane tyle razy ile m ma jedności. Czyniąc w téj summie uproszczenie, za wszystkie a położymy tylko jedno ze spółczynnikiem m czyli ma, lub też wreszcie, zmieniając porządek czynników, am; podobnie $-b$ napiszemy jedno ze spółczynnikiem m czyli $-$ mb, lub też wreszcie $-$ bm; podobnie c napiszemy jedno ze spółczynnikiem m czyli mc, lub też wreszcie cm; i będzie

$$(a-b+c)m=am-bm+cm.$$

Tak zatém każdy wyraz mnożnéj jest rozmnożony przez mnożnik, zachowując przy każdym z tych wieloczynów częściowych znak jego czynnika wchodzącego jako wyraz do składu wielomianu mnożnéj.

2° m jest ułamkowém kształtu $\frac{1}{q}$ (q będąc liczbą całkowitą). Działanie sprowadza się wówczas, jak wiemy, do wzięcia $q^{\text{téj}}$ części mnożnéj; i wypadek będzie

$$(a-b+c)\times\frac{1}{q}=\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q};$$

albowiem jest to właśnie wyrażenie które, pomnożone przez q, wedle prawidła (1°), wydaje mnożną $(a-b+c)$.

Wreszcie ta formuła może się napisać :

$$(a - b + c) \times \frac{1}{q} = a \times \frac{1}{q} - b \times \frac{1}{q} + c \times \frac{1}{q},$$

albo, zastępując $\frac{1}{q}$ przez m,

$$(a - b + c)m = am - bm + cm,$$

jak w piérwszym przypadku.

3° m jest ułamkowém kształtu $\frac{p}{q}$. Dla wykonania wieloczynu, potrzeba, w tym wypadku, powtórzyć p razy $q^{tą}$ część mnożnéj. Otóż, podług drugiego przypadku, mnożna podzielona przez q staje się :

$$a \times \frac{1}{q} - b \times \frac{1}{q} + c \times \frac{1}{q};$$

a wieloczyn z tego wypadku przez p jest :

$$a \times \frac{p}{q} - b \times \frac{p}{q} + c \times \frac{p}{q}:$$

gdyż mnożyć $q_{tą}$ część jakiéj liczby przez p, jest to mnożyć tę samą liczbę przez $\frac{p}{q}$. Więc, w tym przypadku, wieloczyn jest jeszcze :

$$(a - b + c)m = am - bm + cm.$$

A zatém, we wszystkich przypadkach, *aby pomnożyć wielomian przez jednomian, potrzeba mnożyć przez ten jednomian różne wyrazy wielomionu, i pisać wieloczyny częściowe jedne wciąż drugich, zachowując przy każdym z nich znak jego czynnika wchodzącego jako wyraz do składu wielomianu mnożnéj.*

Ponieważ można zmienić porządek czynników, które przedstawiają zawsze liczby, dla tego toż same prawidło posłuży do mnożenia *jednomianu przez wielomian.*

Przykład. Dwa wieloczyny :

$$(3a^4b - 5a^3b^2 + 6abc^3 - 4b^2c) \times 5ab^2,$$

$$5ab^2 \times (3a^4b - 5a^3b^2 + 6abc^3 - 4b^2c),$$

są równoważne wielamianowi $15a^5b^3 - 25a^4b^4 + 30a^2b^3c^3 - 20ab^4c.$

Rozebrać na spólny czynnik wszystkie wyrazy wielomianu.

25. Formuła poprzednio dowiedziona,

$$(a - b + c)\, n = am - bm + cm,$$

pokazuje że, jeżeli wyrazy wielomianu $(am - bm + cm)$ zamykają czynnik wspólny m, można go wyrzucić z każdego z nich, co daje wyrażenie $(a - b + c)$, a rozmnożyć wypadek przez m, to jest napisać $(a - b + c)m$. To się zowie *rozebrać na wspólny czynnik*.

2° Możnaby jeszcze, nieco inaczéj rzecz tę wyłożyć, a to biorąc na odwrót

$$am - bm + cm = m(a - b + c)\ ;$$

z téj formuły uczymy się wyłączać za pomocą nawiasu z wielomianu czynnik wspólny. Ilekroć zatém we wszystkich, lub w kilku wyrazach wielomianu, znajduje się czynnik spólny, ten się wyłącza, i stawia za, lub przed nawiasem, a w nawiasie kładą się pozostałe czynniki. To wyrażenie $m(a - b + c)$, jest tylko naznaczoném mnożeniem, zaś $am - bm + cm$, jest już wykonaném mnożeniem. Przejść z wykonanego do naznaczonego mnożenia, nazywa się *wyłączeniem za nawias* spólnego wszystkim wyrazom czynnika.

3° *Dowodzenie Hreczyny*. Rozebranie na czynniki wspólne wszystkich, lub kilku wyrazów wielomianu nie może być należycie wyłożone, aż dopiero po wykonaniu zupełnego wykładu fundamentalnych zasad dzielenia. Grzegorz Hreczyna, w swych pięknych *Początkach Algebry* (*), téj się drogi trzymając całą rzecz w nowém świetle jasno i gruntownie rozwinął. Przytaczając w całości, *to nowe* czcigodnego nauczyciela matematyki w Lyceum Wołyńskiém *powyższego zadania dowodzenie*, zwracamy uwagę naszych czytelników na jego nadzwyczajnie zwięzłą i zarazem *przedziwnie czystą polszczyznę*.

Oto są własne jego słowa :

« Wiemy z paragrafu poprzedzającego że wieloczyn $(a - b + c)m$ zamienia się po uskutecznieniu działania na $am - bm + cm$. Lecz w rachunku często zachodzi potrzeba od wieloczynu pod tą ostatnią postacią wrócić się do pierwszéj, gdzie mnożenie jest tylko wskazane. Tym końcem należy, jak widzimy, czynnik m wchodzący do składu każdego wyrazu wieloczynu $(am - bm + cm)$ odłączyć, wielomian pozostały $a - b + c$ zamknąć nawiasem i przy nim położyć czynnik odłączony. To działanie zowie się *rozebraniem na spólny*

(*) *Początki Algebry*, przez G. Hreczynę, nauczyciela Matymatyki w Lyceum Wołyńskiem. Krzemieniec (1830).

czynnik. W ogólności do składu spólnego czynnika wchodzi naprzód liczba dzieląca bez reszty każdy ze spółczynników przy wyrazach wielomianu podany, potém każda znajdująca się we wszystkich wyrazach litera ze swoim wykładnikiem najmniejszym. Przez ten spólny czynnik rozdzieliwszy wielomian dany, na iloraz wypada wielomian, który zamknięty w nawias pisze się przy spólnym czynniku. »

Przykład. Wyrazy wielomianu.

$$12a^3x^4 - 8a^5x^2 + 16a^2x^5$$

zawierają $4a^2x^2$ jako czynnik spólny. Można więc napisać

$$12a^3x^4 - 8a^5x^2 + 16a^2x^5 = (3ax^2 - 2a^3 + 4x^3) \times 4a^2x^2.$$

26. Wynika z prawidła podanego w nrze 24 że, odwrotnie, *aby pomnożyć jednomian przez wielomian, mnoży się jednomian raz po raz przez różne wyrazy wielomianu, zachowując przy każdym z wieloczynów częściowych znak jego czynnika wchodzącego jako wyraz do składu wielomianu mnożącej*. (Ta reguła posłuży nam do wyprowadzenia prawidła na mnożenie wielomianów).

W istocie, mamy :

$$m(a - b + c) = (a - b + c)m = am - bm + cm,$$

to jest, $m(a - b + c) = ma - mb + mc.$

Ostatnia formuła zupełnie się zgadza z powyżéj wysłowionem prawidłem.

Wieloczyn dwóch wielomianów.

27. Weźmy teraz do mnożenia wielomian

$$a + b - c + d - e$$

przez wielomian

$$m - n + p.$$

Stosując prawidło nru 26 do formuły początkowej

$$(a + b - c + d - e)(m - n + p),$$

otrzymuje się wyrażenie

$$(a + b - c + d - e)m - (a + b - c + d - e)n + (a + b - c + d - e)p,$$

które również łatwo, prawidło podane w n^rze^ 24 przekształca na inne

$$(am+bm-cm+dm-em)-(an+bn-cn+dn-en)$$
$$+(ap+bp-cp+dp-ep).$$

Widzimy naprzód że *ta formuła zamyka wszystkie wieloczyny częściowo otrzymane, mnożąc jedne po drugich wszystkie wyrazy mnożnéj przez każdy wyraz mnożnika.*

Chcąc odkryć prawo na znaki, uważmy : 1° że w nawiasach każdy wieloczyn częściowy ma znak swego czynnika wchodzącego jako wyraz do składu mnożnéj ; 2° że każdy nawias jest poprzedzony znakiem położonym przed jego czynnikiem wchodzącym jako wyraz do składu mnożnika. Wieloczyn częściowy jakikolwiek ma więc ostatecznie znak swego czynnika będącego w mnożnéj, albo znak jemu przeciwny, według tego jak jego czynnik będący w mnożniku jest oznaczony znakiem $+$ albo $-$. Ztąd tablica wykazująca prawidło na znaki w mnożeniu

Mnożna.	*Mnożnik.*	*Wieloczyn.*
$\pm$	$+$	$\pm$
$\pm$	$-$	$\mp$

co można streścić mówiąc : *każdy wieloczyn częściowy jest poprzedzony znakiem + lub znakiem —, według tego jak pochodzi z dwóch wyrazów oznaczonych znakiem jednakowym, albo z dwóch wyrazów mających znaki przeciwne.*

Z tego więc oczywiście wynika :

Że w mnożeniu dwóch wielomianów przez siebie, mnoży się raz po raz wszystkie wyrazy mnożnéj przez każdy wyraz mnoznika, oznaczając znakiem + wieloczyny częściowe utworzone z dwóch czynników jednakowego znaku, i dając znak — wieloczynom częściowym które pochodzą z dwóch czynników mających znaki przeciwne. Potém wykonywa się, jeżeli się zdarzy, uproszczenie wyrazów podobnych.

Wieloczyn ilukolwiek wielomianów.

28. *Chcąc otrzymać wieloczyn z jakiéjkolwiek liczby wielomianów, potrzeba naprzód mnożyć pierwszy przez drugi, potém ten wypadek przez trzeci, i tak daléj aż do ostatniego.* Że zaś wieloczyn wykonany dwóch wielomianów jest zawsze wielomianem, dosyć przeto będzie,

dla jakiéjkolwiek bądź liczby wielomianów, umieć rozmnożyć dwa wielomiony przez siebie. Co da się łatwo uskutecznić za pomocą prawidła wskazanego w poprzednim numerze.

Niechaj będą P_1, P_2, P_3, P_4, różne wielomiany z których chcemy utworzyć wieloczyn; mnożąc P_1 przez P_2, otrzymamy mieloczyn Q_1, którego wyrazy są (27) wieloczynami wszystkich wyrazów z P_1 przez wszystkie wyrazy z P_2; potém można będzie rozmnożyć Q_1 przez P_3, i otrzymać wieloczyn Q_2, który będzie przedstawiał summę algebraiczną wieloczynów wszystkich wyrazów z Q_1 przez wszystkie wyrazy z P_3, to jest, summę algebraiczną wszystkich wieloczynów z trzech czynników otrzymanych, biorąc jeden czynnik pomiędzy wyrazami z P_1, jeden pomiędzy wyrazami z P_2, i jeden nakoniec pomiędzy wyrazami z P_3. Można będzie następnie pomnożyć Q_2 przez P_4. Wypadek Q_3 otrzymany z tego mnożenia będzie wyrażał summę algebraiczną wieloczynów wyrazów z Q_2 przez wyrazy z P_4, to jest summę algebraiczną wszystkich wieloczynów powstających z czterech czynników wziętych wszelkim sposobem możebnym w wielomianach P_1, P_2, P_3, P_4. To rozumowanie da się łatwo rozciągnąć nieograniczenie i może skutecznie posłużyć do ścisłego wykazania: *że wieloczyn z wielomianów* $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$, *jest summą algebraiczną z* n *czynników utworzonych z jednego wyrazu wziętego z* P_1, *jednego wyrazu z* P_2, *jednego wyrazu z* P_3, ... *i jednego wyrazu z* P_n.

Formuły ważne otrzymane z zastosowania powyższych prawideł mnożenia.

29. Opierając się na prawidłach powyżéj dowiedzionych, otrzymuje się łatwo formuły następujące:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

albo

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Formuły któreśmy powyżéj napisali odnoszą się do twierdzeń które należy dokładnie w pamięci zatrzymać z powodu ich ciągłego w analizie użycia:

Kwadrat z summy lub różnicy dwóch ilości równa się summie kwadratów tych ilości, więcéj lub mniéj ich podwójnemu wieloczynowi.

Wieloczyn z summy przez różnicę dwóch wyrazów równa się różnicy kwadratów z tych samych wyrazów; i nawzajem, różnica kwadratów równa wieloczynowi z summy przez różnicę ich pierwiastków.

Oto jeszcze kilka formuł do zatrzymania:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

których sprawdzenie da się łatwo wykonać.

Uporządkowanie i jednorodność wielomianów całkowitych.

30. Mówi się że wieloczyn jest *uporządkowanym* podług potęg wzrastających lub ubywających téj saméj litery, kiedy wykładniki téj litery w danym wielomianie występują wciąż stopniowo wzrastając lub ubywając zacząwszy od pierwszego aż do ostatniego wyrazu. Tak np.

$$8x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 11x + 1$$

jest wielomianem uporządkowanym podług *potęg ubywających* litery x; a wielomian

$$5a^4 - 3a^3b - 6ab^3 + 4b^4$$

jest uporządkowanym podług *potęg wzrastających* litery b, i także podług *potęg ubywających* litery a.

Wielomian jest *zupełnym*, kiedy zawiera literę *porządkową* we wszystkich stopniach, zacząwszy od najwyższego. Pierwszy z dwóch wielomianów poprzednich jest zupełnym; drugi *niezupełnym*, gdyż w nim wyrazu na a^2b^2 braknie. Wielomian zupełny zamyka tyle wyrazów, więcéj jeden, ile jest jedności w wykładniku litery porządkowéj; gdyż tego rodzaju wielomian zawiera i wyraz niezależny od litery porządkowéj, albo *stopnia zero* (22).

Jeżeli ilekolwiek wyrazów wielomianu zamyka literę porządkową z tym samym wykładnikiem, zbiera się wszystkie te wyrazy w jeden, *kładąc na czynnik spólny* (25) potęgę téj litery; i uważa się mnożnik wielomianowy tym sposobem otrzymamy, jako spółczynnik téj potęgi. Zamyka się wreszcie ten spółczynnik w nawias, albo się kładzie w kolumnie pionowéj po lewéj stronie potęgi.

Przykład. Wielomian

$$a^2x^5 - 2abx^5 + 4b^3x^4 - b^2x^5 + 2a^3x^4 - a^4x^3 - a^2b^2x^3 + b^4x^3 + 3a^2b^3x^2 - 2ab^4x^2$$

można będzie napisać

$$(a^2 - 2ab + b^2)x^5 + (2a^3 - 4b^3)x^4 - (a^4 + a^2b^2 - b^4)x^3 + (3a^2b^3 - 2ab^4)x^2,$$

albo

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3 & x^5 + 2a^3 & x^4 - b^4 & x^3 + 3a^2b^3 & x^2 \\ -2ab & -4b^3 & -a^2b^2 & -2ab^4 & \\ +b^2 & & +b^4 & & \end{array}$$

Linijka pionowa oddziela tym sposobem od jéj spółczynnika każdą potęgę litery porządkowéj.

Nie mówiliśmy dotąd jak o stopniu względem pewnéj litery; dodać należy że uważa się często stopień całkowity czyli zbiorowy.

Stopień jednomianu całkowitego jest summą wykładników liter które wchodzą do tego wyrazu; a *stopniem* wielomianu całkowitego jest najwyższy stopień wyrazów go składających.

Wielomian nazywa się *jednorodnym* gdy wszystkie jego wyrazy są tegoż samego stopnia; i tak wielomian

$$x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

jest jednorodnym i stopnia czwartego.

Oczywiście wieloczyn dwóch wielomianów jednorodnych jest także wielomianem jednorodnym którego stopień równa się summie stopni obu jego czynników.

Ta uwaga jest wielce użyteczną w rachunku i pozwoli sprawdzić w każdéj chwili błędy popełnione przez opuszczenie liter albo wykładników: bardzo często odbywają się rachunki na wielomianach jednorodnych; potrzeba korzystać z téj okoliczności ilekroć się to zdarzy i sprawdzić że formuły które otrzymuje się przez mnożenie wielomianów takich pozostają jednorodnemi.

Wielomian pierwszego stopnia nazywa się *funkcyą linijną.*

Mnożenie wielomianów uporządkowanych.

41. Ilekroć razy da się uporządkować wielomian, zrobić to wypada; symetrya ztąd wypływająca pomaga wiele w rachunkach, a nadewszystko gdy idzie o wykonanie wieloczynu dwóch wielomianów.

W praktyce, porządkuje się dwa czynniki podług téj saméj litery, gdy te czynniki mają spólną literę; i kładzie się mnożnik pod mnożną, jak w arytmetyce. Wieloczyny częściowe mnożnéj przez każdy wyraz mnożnika są natenczas uporządkowane podług téj samej litery; i można łatwo umieścić wyrazy podobne jedne pod drugiemi, i wykonać następne ich uproszczenie.

Przykład I. Dwa wielomiany są zupełne.

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Mnożna} \ldots & & 3x^4-5ax^3-4a^2x^2+7a^3x-2a^4 \\
\textit{Mnożnik} \ldots & & 2x^3-5ax^2-3a^2x+4a^3 \\
\hline
\textit{Wieloczyny z mnożnéj przez} & \left\{\begin{array}{l} 2x^3 \\ -5ax^2 \\ -3a^2x \\ +4a^3 \end{array}\right. &
\begin{array}{l}
6x^7-10ax^6-8a^2x^5+14a^3x4-4a^4x^3 \\
\quad -15ax^6+25a^2x^5+20a^3x^4-35a^4x^3+10a^5x^2 \\
\qquad -9a^2x^5+15a^3x^4+12a^4x^3-12a^5x^2+6a^6x \\
\qquad\quad +12a^3x^4-20a^4x^3-16a^5x^2+28a^6x-8a^7
\end{array} \\
\hline
\textit{Wieloczyn uproszczony.} & & 6x^7-25ax^6+8a^2x^5+61a^3x^4-47a^4x^3-27a^5x^2+34a^6x-8a^7
\end{array}
$$

Przykład II. Wielomiany są niezupełne. Zostawia się przedziały próżne, aby można było umieścić wyrazy podobne jedne pod drugiemi.

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Mnożna.} & & 5a^5-3a^4b-2a^2b^3+b^5 \\
\textit{Nnożnik.} & & 3a^3-5ab^2+2b^3 \\
\hline
\textit{Wieloczyny z mnożnéj przez} & \left\{\begin{array}{l} 3a^3\,. \\ -5ab^2 \\ +2b^3. \end{array}\right. &
\begin{array}{l}
15a^3-9a^7b \qquad -6a^5b^3 \qquad +3a^3b^5 \\
\quad -25a^6b^2+15a^5b^3 \qquad +10a^3b^5 \qquad -5ab^7 \\
\qquad +10a^5b^3-6a^4b^4 \qquad -4a^2b^6 \qquad +2b^8
\end{array} \\
\hline
\textit{Wieloczyn uproszczony} & & 15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^2+2b^8.
\end{array}
$$

Przykład III. Wielomiany są uporządkowane lecz niejednorodne. Weźmy teraz dwa wielomiany uporządkowane

$$A = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4,$$
$$B = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3,$$

i szukajmy ich wieloczynu; będziemy mogli postępować według prawidła ogólnego, lecz pisząc w pierwszéj linii pozioméj wieloczyn wielomianu A przez pierwszy wyraz 2 z B; będziemy mieli pierwszy wieloczyn częściowy uporządkowany; mnożąc następnie wielomian A przez drugi wyraz $-3x$ z B, będziemy mieli drugi wieloczyn częściowy uporządkowany; będziemy mogli go napisać pod spodem pierwszego, tak żeby wyrazy tegoż samego stopnia wzajemnie sobie odpowiadały w téjże saméj kolumnie pionowéj, i tak daléj: uproszczenie wyrazów podobnych odnosi się natenczas do wyrazów wpisanych w tęż samą kolumnę pionową.

Urządza się rachunek w sposób następujący:

$$\begin{array}{l}
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\
\quad\; 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r}
2 + 4 & x + 6 & x^2 + 8 & x^3 + 10 & x^4 & & \\
-3 & -6 & -9 & -12 & -15 & x^5 & \\
 & +4 & +8 & +12 & +16 & +20 & x^6 \\
 & & -5 & -10 & -15 & -20 & -25x^7 \\
\hline
\end{array}$$

$$2 + x + 4x^2 + 2x^3 - 14x^5 - 25x^7,$$

unikając powtarzania części spólnéj w różnych wyrazach podobnych.

Urządzenie rachunku któréśmy przyjęli jest nadewszystko korzystném kiedy spółczynniki litery porządkowéj są same przez się wielomianami.

PRZYKŁAD IV. Wielomiany mają spółczynniki wielomianowe.

Mnożna....	a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^3 $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x\ +3a^2b^3$ $-2ab^4$
Mnożnik...	a $-b$	x^2+a^2 $-ab$ $-b^2$	$x\ -a^3$ $+b^3$	

Wieloczyny częściowe przez						
ax^2....	a^3 $-2a^2b$ $+ab^2$	x^5+2a^4 $-4ab^3$	x^4-a^5 $-a^3b^2$ $+ab^4$	$x^3+3a^3b^3$ $-2a^2b^4$	x^2	x
$-bx^2$..	$-a^2b$ $+2ab^2$ $-\ b^3$	$-2a^3b$ $+4b^4$	$+a^4b$ $+a^2b^3$ $-b^5$	$-3a^2b^4$ $+2ab^5$		
a^2x....		$+a^4$ $-2a^3b$ $+a^2b^2$	$+2a^5$ $-4a^2b^3$	$-a^6$ $-a^4b^2$ $+a^2b^4$	$+3a^4b^3$ $-2a^3b^4$	
$-abx$..		$-a^3b$ $+2a^2b^2$ $-ab^3$	$-2a^4b$ $+4ab^4$	$+a^5b$ $+a^3b^3$ $-ab^5$	$-3a^3b^4$ $+2a^2b^5$	
$-b^2x$..		$-a^2b^2$ $+2ab^3$ $-b^4$	$-2a^3b^2$ $+4b^5$	$+a^4b^2$ $+a^2b^4$	$-3a^2b^5$ $+2ab^6$	
$-a^3$...			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$	$-b^6$ $-2a^6$ $+4a^3b^3$	$+a^7$ $+a^5b^2$ $-a^3b^4$	$-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$
b^3.....			$+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	$+2a^3b^3$ $-4b^6$	$-a^4b^3$ $-a^2b^5$ $+b^7$	$+3a^2b^6$ $-2ab^3$

Weloczyn całkowity uproszczony.	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^4b^2$ $-3a^3b^3$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-2a^5b^3$ $+3a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

Widzimy że, w tym przypadku, działanie jest dłuższe, lecz prawidło jest zawsze to samo : mnoży się zawszo wszystkie wyrazy mnożnéj przez wszystkie wyrazy mnożnika, i wykonywa się uproszczenie wyrazów podobnych.

TWIERDZENIA I ZASTOSOWANIA.

NAJMNIEJSZOŚĆ LICZBY (minimum) WYRAZÓW WIELOCZYNU.

32. Przy mnożeniu jednego wielomianu przez drugi, widzieliśmy że wieloczyn może zawierać wyrazy podobne, które się uproszczają jedne z drugiemi. Lecz *znajdują się w każdym wieloczynie dwa wyrazy przynajmniéj które się nie uproszczają z żadnym innym.* Takiemi są, gdy przypuścimy wielomiany uporządkowane podług potęg ubywających tejże saméj litery, wieloczyn pierwszego wyrazu mnożnéj przez pierwszy wyraz mnożnika, i wieloczyn ostatniego wyrazu mnożnéj przez ostatni wyraz mnożnika.

W rzeczy saméj, wyraz jakikolwiek wieloczynu jest wieloczynem jednego wyrazu mnożnéj przez jeden wyraz mnożnika, a wykładnik litery porządkowéj w tym wyrazie jest summą wykładników któremi ta litera jest oznaczoną w obu czynnikach. A zatém, w wieloczynie powstałym z rozmnożenia pierwszego wyrazu mnożnéj przez pierwszy wyraz mnożnika, wykładnik litery porządkowéj jest summą wykładników najwyższych; jest więc *większym* jak wykładnik litery porządkowéj znajdujący się w każdym innym wieloczynie częściowym. Toż samo, w wieloczynie powstałym z dwóch ostatnich wyrazów, wykładnik litery porządkowéj jest smmmą wykładników najniższych; jest więc *słabszym* jak wykładnik litery porządkowéj znajdujący się w każdym innym wieloczynie częściowym. Dwa wyrazy tym sposobem otrzymane nie mogą więc uprościć się z innemi.

Wieloczyn dwóch wielomianów, lub jakiegokolwiek wielomianu przez jednomian, ma więc zawsze przynajmniéj dwa wyrazy. Może wreszcie nie zamykać jak te dwa.

Przykład:

Mnożna	$x^{m+1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x^2+x+1$
Mnożnik	$x \quad -1$
	$x^m \quad +x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x^3+x^2+x$
	$\quad -x^{m-1}-x^{m-2}+\ldots-x^3-x^2-x-1$
Wieloczyn uproszczony	$x^m \qquad\qquad -1$

Widzimy że tu się wszystkie wyrazy niszczą, wyjąwszy x^m i -1, kóre są wieloczynami pierwszych wyrazów między sobą i ostatnich mędzy sobą.

33. Uwaga. Kiedy dwa wielomiany zamykają w sobie wiele liter, można je będzie uporządkować kolejno podług każdéj z nich; a stosując uwagę poprzednią, można będzie otrzymać pewną liczbę wrazów, które będą musiały pozostać bez uproszczenia w wieloczynie. Na przykład, jeżeli się mnoży dwa wielomiany następne uporządkowane podług potęg litery x,

$$x^5-2yx^4+4y^3x+y^2,$$
$$x^5+3y^4x+y^5,$$

wrazy $x^5\times x^5$ czyli x^{10}, i $y^2\times y^5$ albo y^7, będą *nieprzywiedlne* (ireductibles) to jest nie dające się sprowadzić do prostszego wyrażenia pod względem swych spółczynników, lub inaczéj będą wyrazami wchodzącemi do składu wieloczynu szukanego bez żadnego uproszczenia. Lecz gdy się urządzi te dwa wielomiany podług potęg litery y,

$$4y^3x+y^2-2yx^4+x^5,$$
$$y^5+3y^4x+x^5,$$

natenczas wieloczyny $4y^3x\times y^5$ albo $4xy^8$, i $x^5\times x^5$ czyli x^{10}, będą koniecznie jeszcze musiały przechować się nietknięte w wieloczynie szukanym. Wyraz x^{10} przedstawia się, jak widzimy, po dwakroć sposobem innym: i znajdujemy tylko *trzy wyrazy odrębne*, które, w rezultacie, nie mogą doznać żadnego uproszczenia.

NAJWIĘKSZOŚĆ LICZBY WYRAZÓW WIELOCZYNU.

34. Wieloczyn mnożnéj przez jeden z wyrazów mnożnika zamyka wsobie tyle wyrazów ile się tych znajduje w mnożnéj. Więc, jeżeli rezultat nie przedstawia wyrazów podobnych do uproszczenia, *liczba wyrazów wieloczynu całkowitego będzie wieloczyn liczby wyrazów mnożnéj przez liczbę wyrazów mnożnika.* Jestto oczywiście *największa* liczba wyrazów rezultatu.

WIELOCZYNY JEDNORODNE.

35. Twierdzenie. *Wieloczyn z dwóch wielomianów jednorodnych* (30)

jest wielomian jednorodny, którego stopień równa się summie stopni obu czynników.

W istocie, wszystkie wieloczyny częściowe powinny mieć tenże sam stopień, ponieważ stopień każdego z nich jest summą stopni jednego wyrazu mnożnéj i jednego wyrazu mnożnika, a każdy z tych czynników ma wszystkie swe wyrazy tegoż samego stopnia.

36. Twierdzenie. *Wieloczyn z summy dwóch liczb* a *i* b *przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów z tych samych dwóch liczb.* To twierdzenie, poprzednio już przez nas dostatecznie wykazane sprowadza się do formuły

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Ta formuła jest ważną : służy ona nadewszystko do *rozłożenia dwumianu będącego różnicą dwóch kwadratów na wieloczyn dwóch czynników, z których jeden jest summą a drugi różnicą odrębnie wziętych z jego wyrazów pierwiastków.*

Przykłady :

1° $$(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$$
$$=(a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2-a^2+ab-b^2)$$
$$=(2a^2+2b^2)\,2ab=4ab(a^2+b^2);$$

2° $$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=\left(\frac{m+n+m-n}{2}\right)\left(\frac{m+n-m+n}{2}\right)$$
$$=\frac{2m}{2}\times\frac{2n}{2}=mn.$$

37. Twierdzenie. *Kwadrat z wielomianu równa się summie kwadratów z wszystkich jego wyrazów powiększonéj podwójną summą z ich wieloczynów dwa po dwa branych.*

Formuła znana

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

pokazuje że twierdzenie jest prawdziwém dla dwumianu.

Dla trójmianu, znajduje się

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2,$$
$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c$$
$$=a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc,$$

albo

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

co się jeszcze zupełnie zgadza z powyżéj przedstawioném wysłowieniem.

Żeby się upewnić o ogólności tego prawa, potrzeba dowieść, że skoro postrzeżone prawo służy wielomianowi złożonemu z n wyrazów, musi koniecznie służyć i wielomianowi złożonemu z $n+1$ wyrazów.

Na ten koniec, dajmy że

$$a+b+c+\ldots+h+k$$

jest wielomianem złożonym z n wyrazów, i przypuśćmy także że

$$a+b+c+\ldots+h+k+l$$

jest wielomianem złożonym z $n+1$ wyrazów. Postępując drogą powyżéj wskazaną otrzymuje się

$$\begin{aligned}(a+b+c+\ldots+h+k+l)^2 &= [(a+b+c+\ldots+h+k)+l]^2\\ &= (a+b+c+\ldots+h+k)^2+l^2\\ &+2(a+b+c+\ldots+h+k)l.\end{aligned}$$

Otóż kwadrat $(a+b+c+\ldots+h+k)^2$ zamyka w sobie z założenia kwadraty z $a, b, c, \ldots, h, k$, i wszystkie ich podwójne wieloczyny. Jeżeli więc do niego się przyłączy kwadrat z l i podwójne wieloczyny z $a, b, c, \ldots, h, k$ przez l, będziemy mieli kwadraty wszystkich wyrazów z $a+b+c+\ldots+h+k+l$, jakoteż ich podwójne wieloczyny.

Więc, jeżeli prawo służy wielomianowi złożonemu z n wyrazów, musi koniecznie służyć i wielomianowi złożonemu z $n+1$ wyrazów; aże już jeśmy to prawo sprawdzili na dwumianie i trójmianie, możemy przeto wnieść słusznie że ono jest jeszcze prawdziwém dla wielomianu złożonego z czterech wyrazów; następnie że toż same prawo rozciąga się do wielomianu z pięciu wyrazów, i tak daléj nieograniczenie. A zatém twierdzenie jest ogólnem.

Pisze się często twierdzenie poprzednie pod kształtem symbolicznym

$$(a+b+c+\ldots+l)^2 = \Sigma a^2+2\Sigma ab,$$

gdzie znak Σ wskazuje że potrzeba zrobić summę wszystkich wyrazów podobnych do tego co tym znakiem jest oznaczony.

Dla wykonania praktycznego kwadratu z wielomianu, postępuje się w rachunku porządkiem wskazanym przez dowodzenie poprzednie, to jest tworzy się kwadrat pierwszego wyrazu, podwójny wieloczyn wyrazu pierwszego przez drugi, i kwadrat wyrazu drugiego; potém podwójny wieloczyn z summy dwóch poprzedzających wyrazów przez wyraz trzeci, i kwadrat tegoż trzeciego wyrazu; potém podwójny wieloczyn z summy trzech poprzedzających wyrazów przez wyraz czwarty, i kwadrat tegoż czwartego wyrazu; i tak daléj aż do ostatniego. Wreszcie, dla łatwiejszego uproszczenia wyrazów podobnych, urządza się rachunek, jak to widzimy w przykładzie następnym, tak aby każda linia pozioma była zakończoną kwadratem z jakiegokolwiek wyrazu.

Niech będzie do wykonania kwadrat z wielomianu

$$3x^4 - 4ax^3 - 5a^2x^2 + 2a^3x - a^4,$$

będziemy mieli:

$$\begin{array}{l}
9x^8 \\
\quad - 24ax^7 + 16a^2x^6 \\
\qquad\qquad - 30a^2x^6 + 40a^3x^5 + 25a^4x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 12a^3x^5 - 16a^4x^4 - 20a^5x^3 + 4a^6x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 6a^4x^4 + 8a^5x^3 + 10a^6x^2 - 4a^7x + a^8 \\
\hline
9x^8 - 24ax^7 - 14a^2x^6 + 52a^3x^5 + 3a^4x^4 - 12a^5x^3 + 14a^6x^2 - 4a^7x + a^8
\end{array}$$

38. Uwaga. *Kwadrat z wielomianu zamyka w sobie przynajmniéj cztéry wyrazy które nie mogą być uproszczone.* Takiemi są, gdy wielomian jest urządzony, dwa pierwsze i dwa ostatnie wyrazy. W istocie, niech będą α i β wykładniki litery porządkowéj w dwóch pierwszych wyrazach wielomianu, wykładniki téj litery, w dwóch pierwszych wyrazach kwadratu, będą 2α i $\alpha+\beta$; otóż te dwa wykładniki są różne, ponieważ z założenia, $\alpha > \beta$; i są one oczywiście wyższe nad te któremi litera porządkowa jest oznaczoną w innych wyrazach kwadratu. Więc te dwa wyrazy nie mogą doznać żadnego uproszczenia. Tak samo można wykazać, że podwójny wieloczyn dwóch ostatnich wyrazów wielomianu i kwadrat z ostatniego wyrazu

są *nieprzywiedlne* (irreductible), to jest stanowią wyrazy wchodzące do składu kwadratu z wielomianu bez żadnego uproszczenia.

39. Twierdzenie. *Sześcian z wielomianu składa się z sześcianów wszystkich jego wyrazów, z potrójnych wieloczynów otrzymanych mnożąc każdy wyraz przez kwadrat z innego wyrazu, i z poszóstnych wieloczynów trzech wyrazów.* Rozwinięcie tego sześcianu można przedstawić za pomocą formuły symbolicznéj

$$(a+b+c+\ldots+l)^3=\Sigma a^3+3\Sigma ab^2+6\Sigma abc.$$

Sprawdza się łatwo to twierdzenie dla dwumianu i trójmianu. Jakoż użycie prostych reguł mnożenia daje

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\(a+b+c)^3&=(a+b+c)^2(a+b+c)\\&=(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c)\\&=a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3bc^2+3ba^2\\&+3ca^2+3cb^2+6abc.\end{aligned}$$

Pozostaje nam zatém jeszcze dowieść : że jeżeli prawo służy wielomianowi złożonemu z n wyrazów, musi koniecznie służyć i wielomianowi złożenemu z $n+1$ wyrazów. Owóż widocznie mamy

$$\begin{aligned}&(a+b+c+\ldots+h+k+l)^3=[(a+b+c+\ldots+h+k)+l]^3\\&=(a+b+c+\ldots+h+k)^3+l^3+3(a+b+c+\ldots+h+k)^2l\\&\quad+3(a+b+c+\ldots+h+k)l^2.\end{aligned}$$

Druga strona zawiera oczywiście wszystkie sześciany $a^3, \ldots, l^3$. Taż sama strona zamyka, oprócz tego, wszystkie potrójne wieloczyny przedstawione pod kształtem $3\alpha^2\beta$; gdyż weźmy jakikolwiek z tych podwójnych wieloczynów : jeśli ten wieloczyn nie zawiera l, jest z założenia zamkniętym w

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^3;$$

jeśli zawiera l oznaczone pierwszą potęgą; znajduje się w

$$3(a+b+c+\ldots+h+k)^2l,$$

a jeśli zamyka l w kwadracie, jest zawartym w

$$3(a+b+c+\ldots+k)l^2.$$

Wykaże się tak samo że dwie części

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^3, \quad 3(a+b+c+\ldots+h+k)^2 l$$

zawierają 6 razy wszystkie wieloczyny z trzech wyrazów.

ĆWICZENIA.

I. Sprawdzić równości

$$(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2).$$

$$(ab'-ba')(ab''-ba'')+(bc'-cb')(bc''-cb'')+(ca'-ac')(ca''-ac'')$$
$$=(a^2+b^2+c^2+)(a'a''+b'b''+c'c'')-(aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'');$$

$$a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{a^3b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$
$$+\frac{a^3c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$
$$+\frac{a^3d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

i t. d.

$$abc+abd+acd+bcd=\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$
$$+\frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$
$$+\frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$
$$+\frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)};$$

24. $a_1a_2a_3=(a_1+a_2+a_3)^3-(a_1+a_2-a_3)^3-(a_1+a_3-a_2)^3$
$-(a_2+a_3-a_1)^3$;

192. $a_1a_2a_3a_4=(a_1+a_2+a_3+a_4)^4-(a_1+a_2+a_3-a_4)^4$
$-(a_1+a_2+a_4-a_3)^4-(a_1+a_3+a_4-a_2)^4$
$-(a_2+a_3+a_4-a_1)^4-(a_2+a_3-a_4-a_1)^4$
$+(a_2+a_4-a_3-a_1)^4-(a_3+a_4-a_2-a_1)^4$.

II. Niech będą : V objętość czworościanu ; a, b, c, krawędzie wychodzące z egoż samego wierzchołka, a', b', c', boki przeciwne : znaleźć

$$\begin{aligned} 144\quad V^2 = {} & a^2a'^2(b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2) \\ & + b^2b'^2(a^2 + a'^2 + c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2) \\ & + c^2c'^2(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) \\ & - a'^2b'^2c'^2 - a^2b^2c'^2 - a^2b'^2c^2 - a'^2b^2c^2). \end{aligned}$$

Równości (relacye inwolucyi)

$$aa' = bb' = cc'$$

ciągną za sobą jako następstwa :

$$\frac{(a-b)(a-b')}{(a'-b)(a'-b')} = \frac{(a-c)(a-c')}{(a'-c)(a'-c')},$$

$$\frac{(b-c)(b-c')}{(b'-c)(b'-c')} = \frac{(b-a)(b-a')}{(b'-a)(b'-a')},$$

$$\frac{(c-a)(c-a')}{(c'-a)(c'-a')} = \frac{(c-b)(c-b')}{(c'-b)(c'-b')};$$

$$\begin{aligned} (a-b')(b-c)(c'-a') &= (b-a')(a-c)(c'-b'), \\ (b-c')(c-a)(a'-b') &= (c-b')(b-a)(a'-c'), \\ (c-a')(a-b)(b'-c') &= (a-c')(c-b)(b'-a'), \\ (a-b')(b-c')(c-a') &= (a-c')(b-a')(b-c'); \end{aligned}$$

wykazać odwrotnie że każda z *siedmiu* relacyj które poprzednio są dane sprowadza się do relacyi jedynéj

$$(a+a')(bb'-cc') + (b+b')(cc'-aa') + (c+c')(aa'-bb') = 0.$$

ROZDZIAŁ IV.

UOGÓLNIENIE PRAWIDEŁ POPRZEDNICH. LICZBY ODJEMNE.

DODAWANIE JAKIEGOKOLWIEK WIELOMIANU.

40. Niech będzie

$$a+b-c+d-e+f$$

wielomian jakikolwiek.

Wiémy że, kiedy summa wyrazów poprzedzonych znakiem + przewyższa summę wyrazów poprzedzonych znakiem —, dodawanie wielomianu do liczby jakiéjkolwiek A wyraża się za pomocą formuły

(1) $$A+(a+b-c+d-e+f)=A+a+b-c+d-e+f.$$

Jeżeli wartości podstawione na miejscu liter tworzą summę wyrazów dodanych (additifs) niższą od summy wyrazów odjętych (soustractifs), wyrażenie

$$a+b-c+d-e+f$$

traci na tenczas całe swe znaczenie względem wymiaru wielkości, i w tym razie nie znamy więcéj jaki sens należy przywiązać do jego dodawania. Wszakże, prawidło które powinno przewodniczyć téj kombinacyi, *czysto oderwanéj*, nie mając nic wspólnego z regułą kaprysu lub rażącéj dowolności, jest przeciwnie prawidłem z wielu względów nakazaném; dodawanie wielomianu

$$a+b-c+d-e+f$$

powinno jeszcze się odbyć stosownie do przepisów zamkniętych w formule (1). To wynika z ducha ogólności stanowiącego algebrę, umiejętność któréj charakterem rozróżniającym jest badanie i porządne rozwijanie działań niezależnie od liczb na których się takowe wykonywają.

W rachunkach algebraicznych wartości liczebne nie są naprzód ustalone, nie wiemy przeto, gdy przyjdzie dodawać wielomian, czy podstawienie liczb na miejscu liter wyda nadal summę wyrazów dodanych większą lub mniejszą jak summa wyrazów odjętych; gdyby więc każdemu z tych dwóch przypadków odpowiadało prawidło szczególne dodawania, niemożność zdecydowania w którym się przypadku znajdujemy wymagałaby po nas zrobienia dwóch rachunków równoległych; każdy z tych rachunków zrodziłby wkrótce inne, które znowu same przez się wydałyby nowe; i, już nic nie mówiąc o wielkich niedogodnościach na jakiebyśmy nieomylnie natrafić musieli wprowadzając do rachunku mnóstwo formuł ostatecznych, widzimy że w ogóle bylibyśmy bardzo prędko w naséj pracy zatrzymani przez te rozliczne poddziały: nie będzie zatém rachunek algebraiczny dotąd istotnie możebnym dopóki prawidło (1) nie da się całkiem zastosować do wszystkich bez wyjątku przypadków.

Tak więc, *aby dodać wielomian do liczby, potrzeba zawsze pisać wciąż liczby różne wyrazy wielomianu z ich znakami.*

ODCIĄGANIE JAKIEGOKOLWIEK WIELOMIANU.

41. Jeżeli się rozumie przez odciąganie działanie mające na celu znalezienie wyrażenia które dodane *algebraicznie* (40) do wyrażenia danego wyda inne wyrażenie także dane, to widoczna że:

Aby odciągnąć wielomian od liczby, potrzeba zawsze pisać wciąż liczby różne wyrazy odmieniając ich znaki na przeciwne.

Tym sposobem różnica pomiędzy liczbą A i wielomianem

$$a+b-c+d-e+f$$

jest

$$\mathrm{A}-a-b+c-d+e-f;$$

gdyż, dodając to wyrażenie do wielomianu przedstawionego, znajduje się

$$a+b-c+d-e+f+\mathrm{A}-a-b+c-d+e-f,$$

co po uproszczeniu staje się równém liczbie A.

LICZBY ODJEMNE.

42. Formuły ogólne

$$A+(a+b-c+d-e+f)=A+a+b-c+d-e+f,$$

$$A-(a+b-c+d-e+f)=A-a-b+c-d+e-f,$$

stają się, w przypadku $a=b=d=e=f=0$,

(1) $$A+(-c)=A-c,$$

(2) $$A-(-c)=A+c,$$

i wyrażają wtedy prawidło dodawania i odciągania liczby odosobnionéj poprzedzonéj znakiem $-$. Taka liczba $(-c)$ nazywa się *odjemną* (négatif); przez oppozycyą, mówi się że liczby zwyczajne są *dodatne* (po francuzku *positifs*; wyrażenie pochodzące z łacińskiego *ponatur una res*). Winniśmy te nazwanie Vietowi (1540).

Liczba odjemna jest pozbawioną wszelkiego znaczenia względem wymiaru wielkości; jestto czysty symbol wprowadzony do algebry w celu uogólnienia.

43. Formuły (1) i (2), raz przypuściwszy dla wartości dodatnych przypisywanych ilości c, rozciągną się przez to samo do przypadku gdzie c miałoby wartość liczebną odjemną,

Niech będzie, w rzeczy saméj, $c=-c'$; formuła (2), *zastosowana do liczby dodatnéj* c', daje

$$A-(-c')=A+c'$$

a, zastępując $-c'$ przez c,

$$A-c=A+(-c),$$

co jest formułą (1) rozciągniętą do przypadku gdy c przybiéra wartości liczebne odjemne.

Tak samo formuła (1), zastosowana do liczby dodatnéj c', daje

$$A+(-c'=A-c'$$

a, zastępując $-c'$ przez c,

$$A+c=A-(-c),$$

o jest formułą (2) rozwiniętą dla przypadku w którym c ma wartość iczebną odjemną.

44. Przeto, we wszystkich przypadkach, dodać $-c$ wychodzi a jedno co odjąć c, a odciągnąć $-c$ znaczy to samo co dodać c; vynika ztąd że można uważać *wielomian jako summę wyrazów dodaych*, oznaczając przez słowo *wyraz* nierozdzielne połączenie znaku liczbą przed którą ten znak jest położony. Dwa wyrażenia

$$a+b-c+d-e+f,$$

$$a+b+(-c)+d+(-e)+f,$$

ą, w rzeczy saméj, równoważne podług powyżéj wyłożonych prawideł; podobny rezultat przybiera szczególne nazwisko *summy algeraicznéj*.

45. Przypuśćmy że podstawiono w wielomianie na miejscu liter iczby, i niech będą : P summa wyrazów dodatnych, N summa wyraów odjemnych, wielomian dany może się napisać pod kształtem

$$P-N.$$

eżeli liczba N przewyższa P i jest równą $P+D$ na przykład, fornuła staje się

$$P-(P+D),$$

albo

$$P-P-D,$$

albo

$$-D.$$

Wartość liczebna wielomianu jest więc *przedstawioną* w tym przypadku, *przez liczbę odjemną* któréj wartość bezwzględna równa się przewyżce wartości liczebnéj wyrazów poprzedzonych znakiem $+$ nad wartością liczebną wyrazów poprzedzonych znakiem $-$. Aby to dobrze zrozumieć, dosyć jest tylko sobie przypomnieć : że dwie formuły

$$P-(P+D) \text{ i } -[(P+D)-P]$$

są równoważne. Definicya n^ru^ 10 znajduje się tym sposobem uogólnioną, i widzimy że, *aby otrzymać wartość liczebną wielomianu, po-*

trzeba zawsze dodać, z jednéj strony liczby poprzedzone znakiem $+$, *z drugiéj liczby poprzedzone znakiem* $-$, *odciągnąć mniejszą summę od większéj, i dać reszcie znak prpywiązany do większéj summy.*

MNOŻENIE DWÓCH WIELOMIANÓW JAKICHKOLWIEK.

46. Rozważánia odpowiedne uwagom przedstawionym w n[rze] 40 pokazują że *prawidło dane* (27) *na mnożenie dwóch wielomianów dodatnych powinno koniecznie się zastosować do wszystkich przypadków.*

Formuły

$$(c+a)(d-b)=cd+ad-cb-ab,$$
$$(c-a)(d+b)=cd-ad+cb-ab,$$
$$(c-a)(d-b)=cd-ad-cb+ab,$$

są więc ogólne, Dla $c=d=0$, poprzednie formuły stają się

(1) $$a(-b)=-ab,$$
(2) $$(-a)b=-ab,$$
(3) $$(-a)(-b)=ab,$$

i wyrażają wtedy prawidła mnożenia liczb odjemnych odosobnionych.

47. Relacye (1), (2), (3), raz przypuściwszy dla wartości dodatnych z ilości a i b, rozciągną się przez to samo do przypadku gdzie a i b miałyby wartości liczebne odjemne.

Na przykład, aby dowieść że formuła (3) istnieje jeszcze gdy a, b są odjemne i równe $-a'$ i $-b'$, zważymy że ta formuła, zastosowana do liczb dodatnych a' i b', daje

$$(-a')(-b')=a'b'$$

a, zastępując a' i b' przez $-a$ i $-b$,

$$ab=(-a)(-b),$$

co jest formułą (3) rozciągniętą do przypadku w którym a i b przybierają wartości liczebne odjemne.

48. Będziemy przedstawiali odtąd jakikolwiek wielomian, jakiekolwiekbądź znaki miałyby jego wyrazy, pod kształtem ogólnym

$$a+b+c+p+q+r;$$

gdzie a, b, c, p, q, r, oznaczają liczby dodatne albo odjemne.

Przykład. Formuła

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

która wypada bezpośrednio z prawidła mnożenia, jest przez to samo prawdziwą, jakiekolwiek byłyby znaki ilości oznaczonych przez a i b. Można więc przypuścić że b w powyższym wzorze przedstawia liczbę odjemną $-b'$. Ta formuła staje się wtedy

$$(a-b')^2 = a^2 + 2a(-b') + (-b')^2,$$

albo, stosując prawidła (46),

$$(a-b')^2 = a^2 - 2ab' + b'^2.$$

Formuły dające kwadrat z summy i kwadrat z różnicy znajdują się tym sposobem przywiedzione do jednéj.

Tak samo formuła

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

która się otrzymuje mnożąc dwie strony poprzedniéj przez $(a+b)$, staje się, w tychże samych okolicznościach,

$$(a-b')^3 = a^3 - 3a^2b' + 3ab'^2 - b'^3;$$

przeto formuły dające sześcian z summy i sześcian z różnicy są także sprowadzone do jednéj.

49. Twierdzenie. *Wieloczyn jest dodatny lub odjemny, podług tego jak liczba jego czynników odjemnych jest parzystą albo nieparzystą.*

W rzeczy saméj, wprowadźmy do wieloczynu liczbę $(+1)$ jako pierwszy czynnik, znak $+$ tego czynnika zmienia się tyle razy ile tylko razy zdarzy się nam napotkać wchodzący do wieloczynu czynnik odjemny; a ponieważ dwie zmiany z kolei jedna po drugiéj wykonane na znaku, to jest wprowadzenie do wieloczynu dwóch czynników odjemnych przywodzi zawsze znak $+$; jest więc oczywista że znak wieloczynu będzie $+$ jeżeli liczba odmian znaku, to jest liczba czynników odjemnych jest parzystą, a przeto wieloczyn powinien otrzymać się koniecznie ze znakiem $-$ w przypadku przeciwnym.

Wniosek. *Potęgi parzyste liczby odjemnéj są dodatne, a potęgi nieparzyste odjemne.*

DZIELENIE.

50. Dzielna, będąc wieloczynem z dzielnika przez iloraz, ma tenże sam znak co i dzielnik albo znak z nim przeciwny, według tego jak iloraz jest dodatny lub odjemny. Więc *iloraz ma znak* $+$ *albo znak* $-$ *według tego jak dzielna i dzielnik są tegoż samego znaku albo znaków przeciwnych.*

Tym sposobem

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b},\quad \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

ĆWICZENIA.

I. Jeżeli się założy

$$a+b+c+d+e=-p_1,$$
$$ba+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de=p_2,$$
$$abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde=-p_3,$$
$$abcd+abce+abde+acde+bcde=p_4,$$
$$abcde=-p_5,$$

i

$$a^6+b^2+c^2+d^2+e^2=S_2,\qquad a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=S_3,$$
$$a^4+b^4+c^4+d^4+e^4=S_4,\qquad a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=S_5,\ldots;$$

sprawdzić że się otrzyma

$$S_2=p^2{}_1-2p_2,$$
$$S_3=-p_1{}^3+3p_1p_2-3p_3,$$
$$S_4=p^4{}_1-4p^2{}_1p_2+4p_1p_3+2p^2{}_2-4p_1,$$
$$S_5=-p^5{}_1+5p^2{}_1p_2-5p^2{}_1p_3-5(p^2{}_2-p_4)p_1+5p_2p_3-p_5),$$
$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+\ldots+d^2e^2=\frac{1}{2}\,(S^2_2-S_4),$$
$$a^2b^3+a^2c^3+\ldots+d^2e^3=\frac{1}{2}\,(S^2_3-S_6),$$
$$a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+\ldots+e^2d^2e^2=\frac{1}{6}\,(S^3_2-3S_4S_2+2S_6);$$
$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+\ldots+c^3d^3e^3=\frac{1}{6}\,(S^2{}_3-S_6S_3+2S_2).$$

Dowieść nierówności

$$xyz > (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x),$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) > xy + xz + yz,$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) > xy + xz + xu + yz + yu + zu.$$

III. Uważając ciąg wyrazów oznaczonych znakami $+$ i $-$, mówimy że istnieje *przemiana* (variation) albo *następstwo* (permanence), w miarę jak znaki dwóch wyrazów po sobie następujących są różne lub też same. I tak wielomian

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$$

przedstawia trzy przemiany i dwa następstwa. To założywszy, jeśli oznaczymy przez a liczbę dodatną, i przez P wielomian całkowity wymierny urządzony podług potęg ubywających litery x, lecz z resztą zupełny albo niezupełny, dowieść potrafimy każde z podań następujących :

1° Różnica pomiędzy liczbami przemian wielomianów P i P$(x - a)$ jest liczbą nieparzystą, i pierwsza z nich jest mniéjszą od drugiéj ;

2° Różnica pomiędzy liczbami przemian wielomianów P i P$(x + a)$ jest liczbą parzystą, i druga nie może przewyższać pierwszéj ;

3° Jeżeli wielomian P jest niezupełnym, to gdy się go dopełni tworząc w nim o ile można najwięcéj przemian, otrzymamy wielomian w którym liczba następstw znalezionych równać się będzie liczbie przemian wielomianu otrzymanego przez zamianę x na $-x$ w P.

Są to przypadki szczególne sławnéj *Reguły Dekarta* (Descartes).

ROZDZIAŁ V.

DZIELENIE.

ILORAZ ALGEBRAICZNY.

51. Wiemy że, dzieląc wyrażenie algebraiczne A przez inne B, oznaczamy iloraz, kładąc dzielną nad dzielnikiem, i oddzielając je linijką poziomą. Pisze się $\frac{A}{B}$; i, najczęściéj, jest niepodobna przekształcić formułę tą na inną bardziéj prostą.

Lecz jeżeli A i B zawierają litery wspólne, zdarza się niekiedy że się może uprościć iloraz i to uproszczenie zowie się właśnie *wykonaniem* dzielenia. Rozbierzemy pilnie działanie pod tym punktem widzenia dla jednomianów i wielomianów; damy prawidło postępowania w każdym przypadku, i rozpoznamy jednocześnie warunki, bez których rachunek nie jest możebnym.

52. Dzielenie algebraiczne przedstawia trzy przypadki: 1° dzielenie jednomianu przez jednomian; 2° dzielenie wielomianu przez jednomian; 3° dzielenie wielomianu przez wielomian.

DZIELENIE JEDNOMIANÓW.

53. Prawidło dzielenia. Dajmy że mamy do dzielenia $75a^7b^4c^2d^5$ przez $25a^3bc^2$; i *przypuśćmy* że się znajduje jednomian całkowity który, rozmnożony przez dzielnik, wydaje dzielną. Podług prawidła mnożenia (22), spółczynnik 75 dzielnéj powinien być wieloczynem ze spółczynnika dzielnika przez spółczynnik ilorazu: ten ostatni otrzymuje się więc dzieląc 75 przez 25, będzie przeto 3. Według tegoż samego prawidła, wykładnik 7 litery a w dzielnéj powinien być summą wykładnika 3 téjże saméj litery w dzielniku, i wykładnika téj litery w ilorázię; otrzymuje się więc ten ostatni odciągając 3 od 7; będzie przeto 4. Dla téjże saméj przyczyny wykładnik b będzie 3. A ponieważ c wchodzi z tymże samym wykła-

dnikiem 2 do dzielnéj i do dzielnika, dla tego ta litera nie wejdzie do ilorazu; nakoniec, ponieważ d wchodzi do dzielnéj nie wchodząc do dzielnika, dla tego będzie musiało znaleźć się w ilorazie ze swym wykładnikiem 5. Iloraz jest więc $3a^4b^3d^5$.

Metoda będąc ogólną przywodzi nas do prawidła następującego :

Chcąc wykonać dzielenie jednomianu całkowitego przez inny : 1° *dzieli się spółczynnik dzielnéj przez spółczynnik dzielnika ;* 2° *pisze się w ilorazie raz jeden każdą z liter wchodzących do dzielnéj z większym wykładnikiem jak do dzielnika ;* 3° *oznacza się każdą z tych liter wykładnikiem równym różnicy wykładników, pochodzącéj z odjęcia wykładnika téj litery w dzielniku, od jéj wykładnika w dzielnéj. Gdy pewna litera nie wchodzi jak tylko do dzielnej, wtedy ta litera wchodzi do ilorazu ze swym wykładnikiem.*

54. Warunki możebności. Przypuściliśmy, dla wprowadzenia rozumowania, że iloraz istniał pod kształtem jednomianu całkowitego. Owoż nie ma wątpliwości, że to założenie będzie sprawdzoném, ile tylko razy *spółczynnik dzielnéj będzie podzielnym przez spółczynnik dzielnika;* jeśli oprócz tego, *wszystkie litery dzielnika będą wchodziły do dzielnéj ;* i jeśli nakoniec *wykładnik każdéj z nich w dzielniku będzie niższym od wykładnika którym ta litera jest oznaczoną w dzielnéj a najwyżéj równym takowemu.* Gdyż jeśli te warunki są dopełnione, można będzie, stosując prawidło (53), znaleźć jednomian całkowity, który, rozmnoży przez dzielnik, wyda dzielną : ten więc będzie *ilorazem wykonanym.*

Lecz jest zupełnie *niepodobna* otrzymać iloraz pod kształtem jednomianu całkowitego gdy jeden, dwa lub wszystkie te trzy warunki dopełnionemi nie będą. Gdyż, jeśliby iloraz istniał pod tą formą, to rozumowanie i prawidło mogłoby się zastosować, i trzy warunki musiałyby być koniecznie dopełnionemi.

Te więc warunki są *konieczne i dostateczne,* żeby dzielenie jednomianów całkowitych było *możebném.*

WYKLADNIK ZERO.

55. Podług prawidła któreśmy co tylko podali, jeśli litera a wchodzi do dzielnéj z wykładnikiem m a do dzielnika z wykładnikiem n, to wchodzić ona będzie do ilorazu z wykładnikiem $m - n$. Lecz dowodzenie przypuszcza że mamy $m > n$. Gdyby więc na przykład

było $m=n$, litera a znikłaby całkiem z ilorazu, i prawidło nie dałoby się więcej zastosować. Gdyby wszakże zgodzono się jeszcze na dalsze jego zastosowanie, otrzymalibyśmy a^{m-m} albo a^0; a ponieważ iloraz z a^m przez a^m jest oczywiście jednością, zachowalibyśmy dla prawidła wykładników jego ogólność, stanowiąc *ugodę że* a^0 *przedstawia jedność*, jakiémkolwiek bądź wreszcie jest a. Podług tego,

$$75a^7b^4c^2d^5 : 25a^3bc^2 = 3a^4b^3c^0d^5;$$

i ten iloraz nie jest zmienionym przez ugodę, ponieważ czynnik $c^0=1$. Zachowuje się wreszcie tym sposobem, w ilorazie, ślad litery która, bez tego, znikłaby całkowicie.

Dostarczymy w dalszym ciągu więcéj szczegółów o téj ugodzie, która ściśle się wiąże z ogólnością wykładników.

DZIELENIE WIELOMIANÓW PRZEZ JEDNOMIAN.

56. Prawidło dzielenia. Iloraz z dzielenia wielomianu przez jednomian nie jest nigdy jednomianem; gdyż wieloczyn z dwóch jednomianów jest zawsze jednomianem (22). Tak więc ten iloraz musi być koniecznie wielomianem jeśli znajduje się pod kształtem całkowitym. Działanie zależy więc, w tym przypadku, na znalezieniu wielomianu któryby, rozmnożony przez jednomian dzielnika, był w stanie wydać wielomian dzielnéj. Owoż widzieliśmy (24), że wieloczyn z wielomianu przez jednomian jest summą wieloczynów każdego wyrazu mnożnéj przez mnożnik. Przeto *iloraz szukany można będzie otrzymać dzieląc każdy wyraz dzielnéj przez dzielnik; dodać wreszcie potrzeba do każdego z ilorazów częściowych znak wyrazu dzielnéj z którego ten iloraz powstał.*

Przykład:

$$(36a^4x^5 - 24a^3x^6 + 28a^5x^2) : 4a^3x^2 = 9ax^3 - 6x^4 + 7a^2.$$

57. Warunki możebności. *Kiedy każdy wyraz dzielnéj, wzięty oddzielnie, jest podzielnym przez dzielnik*, oczywista że iloraz przedstawia się jako wielomian całkowity, który się może otrzymać przez zastosowanie prawidła poprzedniego; a dowodzenie tego prawidła wykazuje, wreszcie, że ten warunek jest koniecznym.

DZIELENIE WIELOMIANÓW.

58. Bardzo rzadko można *wykonać* dzielenie wielomianu przez inny, czyli *znaleźć trzeci wielomian który, rozmnożony przez drugi, wydaje pierwszy.* Wszelako, kiedy dzielna i dzielnik przyjmują literę wspólną, zdarza się *niekiedy* że się może znaleźć iloraz taki. Przypuszczać tu będziemy, że dwa wielomiany są uporządkowane podług potęg ubywających téjże saméj litery, i będziemy poszukiwali, jeśli *możebna*, przedstawić iloraz przez wielomian uporządkowany tymże samym sposobem.

Sposób dzielenia opiera się na dwóch twierdzeniach następujących :

59. Twierdzenie I. *Gdy dwa wielomiany są uporządkowane podług potęg ubywających téjże saméj litery, i gdy iloraz z ich dzielenia jest wielomianem uporządkowanym tymże samym sposobem, otrzymuje się pierwszy wyraz ilorazu dzieląc pierwszy wyraz dzielnéj przez pierwszy wyraz dzielnika.*

W rzeczy saméj, dzielna będąc z założenia wieloczynem z dzielnika przez iloraz, pierwszy wyraz téj dzielnéj pochodzi bez uproszczenia (32) z wieloczynu pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu : więc pierwszy wyraz ilorazu wynika z dzielenia pierwszego wyrazu dzielnéj przez pierwszy wyraz dzielnika.

60. Twierdzenie II. *Mnożąc dzielnik przez pierwszy wyraz ilorazu i odciągając wieloczyn od dzielnéj, ortzymuje się reszta która, podzielona przez dzielnik, daje ogół innych wyrazów ilorazu.*

W rzeczy saméj, uważając iloraz jako złożony z dwóch części : jego pierwszy wyraz i ogół wyrazów po nim następujących, widzimy że wieloczyn z dzielnika przez iloraz, to jest dzielna, jest równą wieloczynowi z dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu, powiększonemu wieloczynem z dzielnika przez ogół innych wyrazów tego ilorazu ; przewyżka dzielnéj nad pierwszą częścią tego wieloczynu jest więc równą wieloczynowi z dzielnika przez ogół wyrazów ilorazu po pierwszym następujących.

61. Prawidło dzielenia. Dwa twierdzenia poprzedzające pozwalają wykonać dzielenie jakiekolwiek : gdyż pierwsze daje sposób znalezienia pierwszego wyrazu ilorazu, a drugie przywodzi wyszukanie wszystkich innych do dzielenia nowego. Pierwsze twierdzenie, zastosowane do tego nowego dzielenia, pozwala znaleźć pierwszy

wyraz nowego ilorazu, to jest drugi wyraz ilorazu szukanego ; a drugie twierdzenie przywodzi wyszukanie następujących do trzeciego dzielenia, i tak następnie.

Zkąd (bezpośrednio) wypada to prawidło :

Aby podzielić wielomian przez inny : po ich uporządkowaniu podług potęg ubywających téjże saméj litery, dzieli się pierwszy wyraz dzielnéj przez pierwszy wyraz dzielnika ; co daje pierwszy wyraz ilorazu. Mnoży się dzielnik przez ten iloraz częściowy, i odciąga się wieloczyn od dzielnéj : to odciąganie wykonywa się zmieniając znak każdego wyrazu w wielomianie odciągającym się, i upraszczając wyrazy podobne. Dzieli się następnie pierwszy wyraz reszty przez pierwszy wyraz dzielnika ; co daje drugi wyraz ilorazu. Mnoży się dzielnik przez ten drugi wyraz, i odciąga się wieloczyn od reszty. Otrzymuje się tym sposobem druga reszta, w któréj dzieli się pierwszy wyraz przez pierwszy wyraz dzielnika ; co daje trzeci wyraz ilorazu. Mnoży się znowu dzielnik przez ten trzeci wyraz, i odciąga się otrzymany wieloczyn od drugiéj reszty. Otrzymuje się tym sposobem trzecia reszta, z którą postępuje się tak samo jak z poprzedzającą, i ciągnie się daléj robota póty, aż wszystkie wyrazy dzielnéj zostaną przez odejmowanie wyczerpane, to jest aż znajdzie się nakoniec zero na resztę.

Wielomian, w którym otrzymuje się tym sposobem wyrazy kolejno jeden po drugim, jest ilorazem szukanym ; gdyż działając wedle tego prawidła, odejmuje się kolejno od dzielnéj wieloczyny z dzielnika przez różne wyrazy tego wielomianu : a ponieważ ostatecznie nic nie pozostaje, wnosić słusznie wypada że dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez ten wielomian, to jest że ten wielomian jest *istotnie ilorazem otrzymanym* z podzielenia wielomianu dzielnéj przez wielomian z dzielnika.

SPOSÓB URZĄDZANIA DZIAŁANIA.

62. Urządzenie jest zupełnie takież same jak i w arytmetyce ; tylko gdy się pisze wieloczyn częściowy pod dzielną częściową od któréj ten wieloczyn powinien być odciągniętym, należy zmienić wszystkie jego znaki, gdyż tak działając można niezwłocznie zastąpić odciąganie prostém do wykonania uproszczeniem.

Przykład I. Dajmy że mamy do podzielenia $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ przez x^2+x-1 : można będzie napisać, jak to we wzorze poniżéj przelstawionym widzimy, dzielnik po prawéj stronie dzielnéj przedzieając je linijką pionową.

WZÓR DZIAŁANIA.

$$
\begin{array}{lr|ll}
\textit{Dziena}\ldots & x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1 & x^2 + x - 1 & \textit{Dzielnik.} \\
\cline{3-4}
 & - x^5 - x^4 + x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 + 5x^2 + 1 & \textit{Iloraz.} \\
\cline{2-2}
1^{sza}\ \textit{eszta.} & 5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1 & & \\
 & - 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 \qquad\quad & & \\
\cline{2-2}
2^{ga}\ \textit{eszta.} & x^2 + x - 1 & & \\
 & - x^2 - x + 1 & & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

Perwszy wyraz ilorazu jest x^3, iloraz wynikły z podzielenia x^5 prze x^2. Wieloczyn z dzielnika przez x^3 jest $x^5 + x^4 - x^3$; pisze się pod dzielną ten wieloczyn ze zmienionemi znakami ; co sprowadza odciąganie do wykonania prostego uproszczenia wyrazów podobnych : i otrzymuje się tym sposobem pierwsza reszta

$$5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1.$$

Dugi wyraz ilorazu jest $5x^2$, iloraz wynikły z podzielenia $5x^4$ prze x^2. Mnoży się dzielnik przez $5x^2$, co daje $5x^4 + 5x^3 - 5x^2$; potén pisze się ten wieloczyn pod pierwszą resztą zmieniając jego znaki, i wykonywając uproszczenie. Otrzymuje się na drugą resztę

$$x^2 + x - 1.$$

Tzeci wyraz ilorazu jest 1, iloraz z x^2 przez x^2. Gdy się rozmnoży dzielnik przez 1, i odciągnie wieloczyn od drugiéj reszty, otrzymuje się na resztę 0. Iloraz szukany jest więc

$$x^3 + 5x^2 + 1.$$

Nleży przyuczyć się do wykonywania razem mnożenia każdego wyrzu dzielnika przez wyraz znaleziony na iloraz, odciągania od wyrzu odpowiedniego dzielnéj, i uproszczenia wyrazów podobnych. Wylaz rachunku sprowadza się wtedy do wzoru poniżéj tu przedstawionego :

$$
\begin{array}{lr|ll}
\textit{Dziena}\ldots\ldots & x^5 + 6x^4 + 4x^3 - x4^2 + x - 1 & x^2 + x - 1 & \textit{Dzielnik.} \\
\cline{3-4}
\textit{Piervsza reszta.} & 5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1 & x^3 + 5x^2 + 1 & \textit{iloraz.} \\
\textit{Druga reszta}\ldots & x^2 + x - 1 & & \\
 & 0 & &
\end{array}
$$

Przykład II. Spółczynniki litery porządkowéj są jednomian ogólne, to jest wyrażone w literach.

Dajmy że wielomian

$$15a^8 - 9a^7b - 25a^6b^2 + 19a^5b^3 - 6a^4b^4 + 13a^3b^5 - 4a^2b^6 - 5ab^7 + 2b^8,$$

mamy podzielić przez wielomian

$$3a^3 - 5ab^2 + 2b^3.$$

Poprzestaniemy na zrobieniu wykazu rachunku.

Dzielna.

$$15a^8 - 9a^7b - 25a^6b^2 + 19a^5b^3 - 6a^4b^4 + 13a^3b^5 - 4a^2b^6 - 5ab^7 + 2b^8 \;\Big|\; 3a^3 - 5ab^2 + 2b^3 \quad \textit{Dzielnik.}$$

1sza reszta. $$-9a^7b + 9a^5b^3 - 6a^4b^4 + 13a^3b^5 - 4a^2b^6 - 5ab^7 + 2b^8 \;\Big|\; 5a^5 - 3a^4b - 2a^2b^3 + b^5 \quad \textit{Iloraz.}$$

2ga reszta. $$-6a^5b^3 + 13a^3b^5 - 4a^2b^6 - 5ab^7 + 2b^8$$

3cia reszta. $$+3a^3b^5 - 5ab^7 + 2b^8$$

$$0$$

Przykład III. Prawidło poprzedzające nie przypuszcza bynajmniéj aby potęgi litery porządkowéj miały spółczynniki liczebne albo były jednomianami. Te spółczynniki mogą nawet przedstawiać jakiekolwiek całkowite wielomiany (30), a jeszcze nie znajdzie się nic do zmienienia w rozumowaniach i w sposobie postępowania.

Niech będzie daném do podzielenia

$$x^6 + (a^2 - 2c^2)x^4 - (a^4 - c^4)x^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4$$

przez

$$x^2 - a^2 - c^2.$$

$$\begin{array}{l|r|r|r||r|r|l}
 & x^6 + a^2 & x^4 - a^4 & x^2 - a^6 & x^2 - a^2 & & \\
\textit{Dzielna}\ldots & -2c^2 & +c^4 & -2a^4c^2 & -c^2 & & \textit{dzielnik.} \\
 & & & -a^2c^4 & & & \\
\hline
 & +2a^2 & x^4 - a^4 & x^2 - a^6 & x^4 + 2a^2 & x^2 + a^4 & \\
1^{sza}\ \textit{reszta}\ldots & -c^2 & +c^4 & -2a^4c^2 & -c^2 & +a^2c^2 & \textit{iloraz.} \\
 & & & -a^2c^4 & & & \\
 & & +a^4 & x^2 - a^6 & & & \\
2^{ga}\ \textit{reszta}. & & +a^2c^2 & -2a^4c^2 & & & \\
 & & & -a^2c^4 & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Pierwszy wyraz ilorazu jest x^4, iloraz wynikły z podzielenia x^6 przez x^2. Mnożąc dzielnik przez x^2, odciągając wieloczyn od dzielnéj, i uproszczając, znajduje się pierwsza reszta. Dzieląc pierwszy wyraz $(2a^2 - c^2)x^4$ téj reszty przez x^2, otrzymuje się drugi wyraz ilorazu $(2a^2 - c^2)x^2$. Mnożąc dzielnik przez ten drugi wyraz, odéjmując wieloczyn od reszty, i uproszczając, otrzymuje się druga reszta. Pierwszy wyraz $(a^4 + a^2c^2)x^2$ téj reszty, podzielony przez x^2, dostarcza trzeci wyraz $(a^4 + a^2c^2)$ ilorazu; a dzielnik, rozmnożony przez ten wyraz, daje wieloczyn który jest równym drugiéj reszcie. A następnie iloraz jest $x^4 + (2a - c^2)x^2 + a^4 + a^2c^2$.

Przykład IV. Rachunek jest mniéj prostym, kiedy spółczynnik pierwszego wyrazu dzielnéj i pierwszego wyrazu dzielnika są same przez się wielomianami. Ma się wtedy tyle razy dzielenia częściowe do wykonania, ile razy chce się otrzymać nowy wyraz ilorazu. Oto przykład :

dzielna.	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3+3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $+5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
1sza reszta.		$+a^4$ $-3a^3b$ $+2a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$	x^4+a^5 $-3a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+2ab^4$ $+5b^5$	x^3-3a^2 $+a^5b$ $+7a^3b^3$ $+2a^2b^4$ $-ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
2ga reszta.			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$ $+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	x^3-2a^6 $+6a^3b^3$ $-4b^6$	$+a^7$ $+a^5b^2$ $-a^4b^3$ $-a^3b^4$ $-a^2b^5$ $+b^7$ 0	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

dzielnik.	a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^3 $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x+3a^2b^3$ $-2ab^4$
iloraz.	a $-b$	x^2-a^2 $-ab$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b$	

1sze dzielenie częściowe. *2gie dzielenie częściowe.*

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} -a^2b+2ab^2-b^3 & a-b \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a^4+3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} -a^3b+a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-ab-b^2 \\ -a^2b^2+2ab^3-b^4 & \\ 0 & \end{array}$$

3cie dzielenie częściowe.

$$\begin{array}{r|l} -a^5+2a^4b-a^3b^2+a^2b^3-2ab^4+b^5 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} +a^6b^3-2ab^4+b^5 & -a^3+b^3 \\ 0 & \end{array}$$

Dzieli się naprzód, w tym przypadku, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, spółczynnik pierwszego wyrazu dzielnéj, przez $a^2-2ab+b^2$, spółczynnik pierwszego wyrazu dzielnika (pierwsze dzielenie częściowe); co daje $a-b$. A jako x^5, podzielone przez x^3, daje x^2, pierwszy wyraz ilorazu jest $(a-b)x^2$. Mnoży się dzielnik przez ten wyraz, co zniewala do wykonania wielu mnożeń wielomianów; potém odéjmuje się ten wieloczyn od dzielnéj, i znajduje się pierwsza reszta. Chcąc daléj ciągnąć działanie, należy dzielić $a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4$, spółczynnik pierwszego wyrazu reszty, przez $a^2-2ab+b^2$, (drugie dzielenie częściowe) : co daje a^2-ab-b^2. Drugi wyraz ilorazu jest więc $(a^2-ab-b^2)x$. Mnożenie dzielnika przez ten wyraz, i odciąganie przywodzą nową resztę, z którą postępuje się jak z poprzedzającą; i przychodzi się tym sposobem do ilorazu szukanego.

64. Warunki mnożebności. Rozumowania, które nas doprowadziły do sposobu dzielenia, przypuszczają rzeczywiście że iloraz może się wyrazić przez wielomian. Owóż, kiedy się dzieli wielomian przez inny, nie wie się najczęściéj czy ten warunek może być dopełnionym. Jest więc rzeczą ważną oznaczyć cechy po których można będzie poznać czy dzielenie jest możebném pod tą formą. Te cechy napotykają się w samym sposobie jakiego używamy.

W istocie, aby dzielenie było możebnem,

1° *Pierwszy wyraz dzielnéj powinien być podzielnym przez pierwszy wyraz dzielnika, i ostatni wyraz dzielnéj przez ostatni wyraz dzielnika* (32).

2° *Pierwszy wyraz każdéj reszty powinien być podzielnym przez* *pierwszy wyraz dzielnika :* gdy jest wieloczynem pierwszego wyrazu dzielnika przez jeden z wyrazów ilorazu.

3° *Po pewnéj liczbie dzieleń częściowych kolejno po sobie następujących, musi się znaléźć na iloraz jeden wyraz który, rozmnożony przez dzielnik, wydaje dzielną częściową z któréj ten wyraz powstał ;* gdyż powinno się otrzymać (ostatecznie) na resztę zero.

Te warunki są konieczne : i gdy jeden z nich nie jest dopełnionym, nie ma ilorazu pod kształtem wielomianu : dzielenie przeto wykonać się nie może.

Te warunki są dostateczne ; gdyż jeśli są dopełnione, sposób użyty dostarczy oczywiście wielomianu, który, rozmnożony przez dzielnik, wydaje dzielną.

65. Cechy po których się poznaje czy dzielenie może lub nie może się wykonać. — Kiedy wielomiany są uporządkowane, jak to powyżéj przypuściliśmy (58), podług potęg ubywających téjże saméj litery, wykładnik téj litery w pierwszym wyrazie każdéj reszty postępuje zawsze zmniejszając się, ponieważ uproszczenie wyrazów podobnych znosi przynajmniéj pierwszy wyraz każdéj dzielnéj częściowéj. A zatém, jeśli się daléj pociągnie zastosowanie sposobu dzielenia, *przyjdzie się koniecznie do reszty, któréj pierwszy wyraz zawierać będzie literę porządkową z wykładnikiem słabszym jak wykładnik którym ta litera jest oznaczoną w pierwszym wyrazie dzielnika.* A wtedy, jedno z dwojga : albo ta reszta będzie zerem, i dzielenie będzie wykonaném; albo nie będzie zerem, i dzielenie będzie niemożebném.

Uważmy, wreszcie, że można będzie być ostrzeżonym o niepodobieństwie wykonania dzielenia, nim dojdziemy do reszty o któréj dopiéro mówiliśmy. Gdyż zdarzyć się bardzo może, że *pierwszy wyraz reszty poprzedniej nie będzie podzielnym przez pierwszy wyraz dzielnika.*

Przykład V. Podzielić $x^5+5x^4+2x^3$ przez x^2+x.

$$\begin{array}{lr|ll}
\textit{Dzielna}\ldots & x^5+5x^4+2x^3 & x^2+x & \textit{dzielnik.} \\ \cline{3-3}
 & +4x^4+2x^3 & x^3+4x^2-2x+2 & \textit{iloraz.} \\
 & -2x^3 & & \\
 & +2x^2 & & \\
 & -2x & &
\end{array}$$

Następstwo rachunków sprowadza resztę $-2x$, która nie jest podzielną przez x^2 : więc dzielenie jest niepodobném.

Kiedy dzielenie nie może się wykonać, jest inna cecha po któréj można poznać w jakiéj chwili należy się zatrzymać. W rzeczy samėj, gdy dzielenie jest możebném, ostatni wyraz dzielnéj powinien być wieloczynem ostatniego wyrazu dzielnika przez ostatni wyraz ilorazu (32). Wynika ztąd, że można oznaczyć bezpośrednio ostatni wyraz ilorazu, dzieląc ostatni wyraz dzielnéj przez ostatni wyraz dzielnika. Przeto, *gdy przy formowaniu wyrazów po sobie następujących ilorazu, można będzie znaleźć jeden z nich stopnia niższego jak wyraz tym sposobem wyrachowany, można będzie twierdzić że działanie nie skończy się*, i że żaden wielomian nie może przedstawiać ilorazu. *Toż samo trzeba rozumiéć, gdy się przychodzi do wyrazu tegoż samego stopnia co wyraz tym sposobem wyrachowany, i gdy ten z nim nie jest jednaki* (identique).

Gdyby w przykładzie V, iloraz istniał, ostatni wyraz powinienby był się wyrazić pod kształtem jednomianu $2x^2$, będącego ilorazem wynikłym z $2x^3$ przez x. Owóż pierwszy wyraz $4x^4$ pierwszéj reszty, podzielony przez x^2, daje na iloraz $4x^2$. Nie idąc daléj, można twierdzić że dzielenie nie będzie mogło się skończyć.

66. DZIELENIE WIELOMIANÓW UPORZĄDKOWANYCH PODŁUG POTĘG WZRASTAJĄCYCH JEDNÉJ LITERY. Zdarza się w pewnych przypadkach, że zamiast uporządkowania wyrazów wielomianu podług potęg ubywających jednéj litery, urządza się je tym sposobem, że wykładnik téj litery postępuje powiększając się od pierwszego wyrazu aż do ostatniego. Można wykonać dzielenie dwóch wielomianów uporządkowanych tym sposobem, i znaleźć różne wyrazy ilorazu, poczynając od tych w których litera główna ma najmniejszy wykładnik. Teorya jest zupełnie ta sama co i w trybie zwyczajnym działania; tylko, w przypadku gdzie dzielenie dokładne nie jest podobném, można niekiedy przeciągnąć robotę nieograniczenie, zwłaszcza że działanie nie znajdzie się nigdy zatrzymaném; i otrzymuje się reszty, których stopień powiększa się coraz bardziéj, zamiast zmniejszać się, jak to miało miejsce w przypadku wielomianów uporządkowanych podług potęg ubywających.

Aby dać przykład tego sposobu działania, powróćmy do dzielenia wykonanego w n^rze^ 62, porządkując dwa wielomiany podług potęg wzrastających litery x.

Przykład VI.

$$\begin{array}{rl|ll} \textit{Dzielna.} & -1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & -1+x+x^2 & \textit{dzielna.} \\ \cline{3-3} & -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & +1+5x^2+x^3 & \textit{iloraz.} \\ & -x^3+x^4+x^5 & & \end{array}$$

Będziemy rozumowali mówiąc : dzielna będąc wieloczynem z dzielnika przez iloraz, wyraz, którego stopień w x jest mniéj wyniesiony, pochodzi bez uproszczenia z wieloczynu dwóch wyrazów podobnych w dzielniku i w ilorazie (32); a, następnie, pierwszy wyraz ilorazu jest ilorazem z podzielenia pierwszego wyrazu dzielnéj przez pierwszy wyraz dzielnika : tym jest $+1$.

Dowiedzie się, zupełnie jak to już było wykazaném (60), że odciągając od dzielnéj wieloczyn z dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu, otrzymuje się reszta

$$-5x^2+4x^3+6x^4+x^5$$

która, podzielona przez dzielnik, dostarczy wyrazy dopełniające ilorazu.

Pierwszy z tych wyrazów jest równym, dla przyczyn danych powyżéj, ilorazowi otrzymanemu z podzielenia $-5x^2$ przez -1, czyli jest istotnie $+5x^2$.

Mnożąc $+5x^2$ przez dzielnik, i odciągając wypadek od pierwszéj reszty, otrzymuje się druga reszta

$$-x^3+x^4+x^5,$$

która, podzielona przez dzielnik, dostarczy wyrazy które powinny dopełnić ilorazu.

Pierwszy z tych wyrazów jest równym, dla przyczyn danych powyżéj, ilorazowi otrzymanemu z podzielenia $-x^3$ przez -1, to jest musi być $+x^3$; mnożąc go przez dzielnik, i odciągając wieloczyn od reszty poprzedzającéj, nie znajduje się różnicy żadnéj ; i działanie jest przez to samo skończoném.

67. Cecha po któréj poznaje się czy dzielenie tym sposobem urządzone jest niepodobném. W przykładzie poprzednim, działanie kończy się, i rezultat jest tosamy (identique), jak to właściwie być było powinno, z wypadkiem którego nam uprzednio dostarczył pierwszy

sposób działania. Lecz przedstawienie ilorazu *pod formą skończoną* całkowitego wielomianu w żaden sposób otrzymaćby się nie mogło, gdybyśmy przedsięwzięli dzielenie które niepodobna wykonać dokładnie. Weźmy, na przykład, do dzielenia

$$1 + x + x^2 + 2x^3 \quad \text{przez} \quad 1 + 2x.$$

PRZYKŁAD VII.

$$\begin{array}{lr|ll}
\textit{Dzielna.} & 1 + x + x^2 + 2x^3 & 1 + 2x & \textit{dzielnik.} \\
\cline{3-3}
 & -x + x^2 + 2x^3 & 1 - x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots & \textit{iloraz.} \\
 & + 3x^2 - 2x^3 & & \\
 & - 4x^3 & & \\
 & + 8x^4 & &
\end{array}$$

Stosując sposób zwyczajny do tego przykładu, otrzymuje się reszty po sobie następujące, w których wykładnik litery x, w pierwszym wyrazie, postępuje zawsze zwiększając się; wreszcie dzielenie pierwszego wyrazu każdéj reszty przez pierwszy wyraz dzielnika jest zawsze możebném. Więc pierwsza cecha niemożebności (65) nie objawia się tu wcale.

Lecz istnieje inna cecha, podobna do drugiéj, która przedstawia się zawsze, w przypadku gdy dzielenie nie może się wykonać. W rzeczy saméj, gdy dzielenie jest możebném, ostatni wyraz dzielnéj jest wieloczynem z ostatniego wyrazu ilorazu przez ostatni wyraz dzielnika; a tém samém, ostatni wyraz ilorazu otrzyma się bezpośrednio, dzieląc ostatni wyraz dzielnéj przez ostatni wyraz dzielnika. Owoż stopień wyrazów ilorazu, względem litery porządkowéj, postępuje wciąż powiększając się. Więc, *gdy się zdarzy, przy stosowaniu obchodzącego nas obecnie sposobu dzielenia, położyć w ilorazie wyraz tegoż samego stopnia jak wyraz tym sposobem wyrachowany a któryby z nim nie był tosamym* (identique), *albo też wyraz stopnia wyższego, można będzie twierdzić że dzielenie jest nie możebném.*

W przykładzie VII, jeśliby iloraz istniał, jego ostatni wyraz musiałby być x^2, który jest ilorazem z $2x^3$ przez $2x$; więc, gdy znajdujemy na iloraz wyraz $3x^2$, potrzeba się zatrzymać; gdyż dzielenie nie będzie mogło się wykonać.

A przeto, razem zebrawszy wszystko to cośmy dotąd powiedzieli, widzimy że, we wszystkich przypadkach, sposób sam dzielenia prowadzi koniecznie do cech pewnych możebności lub niepodobieństwa.

DZIELENIA KTÓRE NIE MOGĄ SIĘ WYKONAĆ DOKLADNIE.

68. Definicya. Mówi się że wielomian jest *całkowitym* względem pewnéj litery x, gdy ten nie zawiera litery x ani w mianowniku, ani pod znakiem $\sqrt{\ }$.

Przyklad :

$$\frac{3a^2x^3}{4} - \frac{2b^3x^2}{5a} + 3x\sqrt{c} - \frac{4}{5}$$

jest wielomianem całkowitym w x.

Gdy wielomian jest całkowitym pod względem pewnéj litery x, stopień tego wielomianu, *pod względem* téj litery, jest wykładnik najwyższy którym ta litera jest oznaczoną. Wielomian powyższy jest 3go stopnia w x.

69. Kształt ilorazu dwóch wielomianów, w ogólności. Mówi się że wielomian, całkowity w x, jest *podzielnym* przez inny wielomian całkowity w x, kiedy iloraz może się wyrazić przez wielomian tegoż samego kształtu. Spółczynniki mogą być jakiekolwiek. I tak $ax^2 - 3$ jest podzielnym przez $x\sqrt{a} + \sqrt{3}$; iloraz jest $x\sqrt{a} - \sqrt{3}$.

Kiedy dwa wielomiany nie dają na iloraz trzeciego wielomianu, mówi się że nie są podzielne jeden przez drugi. Można wszelako, w tym przypadku, dać, w ogólności, wyrażeniu ich ilorazu, kształt prostszy jak ten któryby wyniknął z samego oznaczenia (wskazania) działania. Dowiodą tego, w rzeczy saméj, dwa twierdzenia następujące.

Twierdzenie I. *Jeżeli dwa wielomiany* A *i* B *są całkowite w* x (A *będąc stopnia przynajmniéj równego stopniowi* B), *można zawsze położyć iloraz* $\frac{A}{B}$ *pod formą wielomianu* Q, *całkowitego w* x, *powiększonego ułamkiem* $\frac{R}{B}$, *mającym za mianownik dzielnik* B, *a za licznik wielomian* R, *całkowity w* x, *stopnia niższego jak* B.

Można, w rzeczy saméj, po uporządkowaniu wielomianów A i B podług potęg ubywających z x, zastosować do nich sposób dzielenia wyłożony (61); a jako spółczynniki ilorazu nie są koniecznie całkowitemi, można ciągnąć daléj działanie, aż dopóki się nie znajdzie reszta stopnia niższego jak B. Można będzie otrzymać tym sposobem na iloraz różne wyrazy, z których żaden nie będzie zawierał x w mianowniku. Gdyż dzielne częściowe które je dostarczyły, są wszystkie stopnia wyższego lub przynajmniéj równego stopniowi B; a ich pierwszy wyraz zawiera, tém samém, x w stopniu wyższym lub przynajmniéj równym stopniowi pierwszego wyrazu z B.

Niech będzie Q ogół wyrazów otrzymanych, wprzód nim się dojdzie do dzielnéj częściowéj R, stopnia niższego jak B : R jest to wszystko co pozostaje z dzielnéj A, gdy się odciągnie raz po raz wieloczyny z B przez różne wyrazy z Q; jest więc równém A — B Q; i znajduje się, na mocy tegoż samego związku,

$$A = BQ + R;$$

zkąd, dzieląc przez B obie strony formuły,

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B};$$

iloraz jest więc kształtu zapowiedzianego.

70. Twierdzenie II. *Przekształcenie powyższe nie może się wykonać jak tylko jednym sposobem.*

Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że dzieląc A przez B, możnaby było otrzymać z jednéj strony Q na iloraz i R na resztę, a z drugiéj Q′ na iloraz i R′ na resztę, Q i Q′ będąc całkowitemi w x, a R i R′ będąc stopni niższych jak B; mielibyśmy, na mocy powyższego twierdzenia,

$$A = BQ + R,$$

$$A = BQ' + R';$$

zkąd, na mocy często w dowodzeniach używanéj zasady,

$$BQ + R = BQ' + R'$$

formuła którą możemy napisać

$$B(Q - Q') = R' - R.$$

Owoż R i R′ będąc stopni niższych jak B, toż samo także należy rozumieć o ich różnicy; gdy tymczasem stopień z B(Q — Q′), względem x, jest przynajmniéj równy stopniowi z B. Więc druga strona jest stopnia niższego jak pierwsza; czyli równość jest niepodobną.

71. Przykłady. Nie trudno znaleźć, za pomocą metody poprzedzającéj:

1° $$\frac{x^5-2x^2+x-1}{x^2-3}=x^3+x+\frac{4x-1}{x^2-3};$$

2° $$\frac{2x^4+3x^2-5x+7}{7x^3+x-1}=\frac{2}{7}x+\frac{\frac{19}{7}x^2-\frac{33}{7}x+7}{7x^3+x-1};$$

3° $$\frac{x^2\sqrt{\frac{2}{3}}+3x-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{3x+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}.$$

Gdyby stopień wielomianu A był mniejszym jak stopień z B, iloraz Q byłby równym *zeru*, a reszta R byłaby równą *saméj dzielnéj*.

Uwaga. Gdy się stosuje do ilorazu dwóch wielomionów A i B przekształcenie poprzedzające, daje się wielomianowi Q nazwisko *ilorazu całkowitego*, a licznik R ułamku $\frac{R}{B}$ przybiera imię *reszty* dzielenia.

72. Przypadek gdzie zmienia się litera porządkowa. Dowiedliśmy że gdy dwa wielomiany A i B są uporządkowane podług téjże saméj litery x, iloraz całkowity i reszta nie mogą mieć jak tylko jedną formę (70). Lecz, gdy się zmieni litera porządkowa, też same wielomiany mogą prowadzić do nowego ilorazu i do nowéj reszty. Gdy się uważa, na przykład, ułamek

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},$$

uporządkowany podług x, znajduje się na iloraz x^2-y^2, a na resztę $2y^4$. Gdyby uporządkowało się, przeciwnie, podług y, znalazłoby się na iloraz y^2-x^2, a na resztę $2x^4$; tak że jest:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$

$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x+\frac{2x^4}{x^2+y^2}.$$

RÓŻNICE I ANALOGIE (powinowactwa) POMIĘDZY DZIELENIEM ARYTMETYCZNÉM A DZIELENIEM WIELOMIANÓW.

73. Wielomiany, uporządkowane podług potęg téjże saméj litery, przedstawiają, z liczbami całkowitémi, anologie które jest dobrze zauważyć. Liczba całkowita, jak 783214, wyraża $(7\times10^5)+(8\times10^4)$ $+(3\times10^3)+(2\times10^2)+(1\times10)+4$; i można ją przyrównać do welomianu

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

wktórym, stanowczo przypuszczoném zostało $x=10$. Cyfry liczby są tym sposobem spółczynnikami wyrazów wielomianu. Nie trzeba przecież mniemać, że wszelka kwestya arytmetyki, odnosząca się do liczb całkowitych, jest, czysto i po prostu, przypadkiem szczególnym pewnéj kwestyi algebry, w któréj te liczby zastąpione zostały przez ich odpowiednie wielomiany.

Porównajmy, na przykład, dwie kwestye następujęce:

Dzielić 783214 przez 321:

Dzielić $7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ przez $3x^2+2x+1$.

Warunki dwóch zagadnień mają między sobą różnice istotne, które nie pozwalają uważać pierwszego z tych zagadnień za przypadek szczególny drugiego.

1° Różne cyfry ilorazu w dzieleniu arytmetyczném powinny być całkowite; gdy tymczasem iloraz dzielenia algebraicznego może być wielomianem, całkowitym pod względem litery x, któréj spółczynniki są liczbami ułamkowemi.

2° Różne cyfry ilorazu i reszty, w dzieleniu arytmetyczném, powinny być mniejszemi jak 10; gdy tymczasem nic nie ogranicza wielkości spółczynników różnych potęg z x, w dzieleniu algebraiczném.

3° W dzieleniu arytmetycznėm, reszta powinna być mniejszą jak dzielnik. W dzieleniu algebraicznėm, powinna być stopnia niższego.

4° Nakoniec, w algebrze, wypadki otrzymane przystają zarówno dla wszystkich wartości z x : zbywa zupełnie na podobnym warunku w arytmetyce.

TWIERDZENIA I ZASTOSOWANIA.

DZIELENIE PRZEZ $x - a$.

74. Twierdzenie. *Gdy wielomian, całkowity w* x, *jest uporządkowany podług potęg ubywających téj litery, reszta z podzielenia tego wielomianu przez dwumian* (x — a) *otrzymuje się zastępując* x *przez* a *w tym samym* (stale odgrywającym rolę dzielnéj) *wielomianie.*

Niech będą, na przykład,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

wielomian dany; dzieląc go przez $x - a$, znajdzie się na iloraz wielomian całkowity względem x kształtu

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

a zeszta R będzie ilością niezawierającą w sobie x, ponieważ dzielnik $x - a$ jest pierwszego stopnia w x. Ta reszta będzie więc zawsze tąż samą, jakakolwiekbądź wartość liczebna zostanie przypisaną dla x.

To przypuściwszy, weźmy pod uwagę równość

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$
$$= (x - a)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + R,$$

druga strona nie jest co innego jak pierwsza, napisana tylko innym sposobem; inaczéj mówiąc, jest taką, że, gdyby się w niéj wykonało działania wskazane, znalazłoby się wyraz po wyrazie wielomian pierwszéj strony. Równość poprzedzająca powinna więc mieć miejsce, jakakolwiekbądź wartość daje się dla x; otóż, dla $x = a$, wieloczyn

$$(x - a)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$$

niszczy się, gdyż czynnik $x-a$ staje się $a-a$ albo 0, a że iloraz, jako nie zawierający x w mianowniku, bierze wartość skończoną

$$\alpha a^3+\beta a^2+\gamma a+\delta;$$

więc ostatecznie znajduje się

$$Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=R.$$

Co było do dowodzenia.

Drugie dowodzenie. Zwykle powyższe twierdzenie tak się wyprowadza:

W rzeczy saméj, ponieważ dzielnik $(x-a)$ jest pierwszego stopnia, można będzie prowadzić dzielenie, dopóki się nie otrzyma reszty stopnia niższego, to jest niezależnéj od x (69). Niech będą więc: X wielomian przedstawiający dzielną, Q iloraz, całkowity w x, który wynika z tego dzielenia, i R reszta niezależna. Główna zasada dzielenia wielomianów całkowitych w x prowadzi nas bezpośrednio do formuły

$$X=(x-a)Q+R.$$

Otóż, ta równość ma miejsce dla wszelkiéj wartości przyznawanéj dla x; gdyż mnożąc $(x-a)$ przez Q, i dodając R do wieloczynu, powinno się znaleść jednako (identiquement) wielomian X, nie potrzebując wcale dawać dla x jakiéjkolwiek wartości szczególnéj. Można więc w téj tożsamości przypuścić $x=a$. Otóż, to założenie niszczy czynnik $(x-a)$; daje dla Q, niezawierającego x w mianowniku i złożonego z wyrazów w liczbie skończonéj, wartość oznaczoną; znosi więc wieloczyn $(x-a)Q$. Wreszcie nie zmienia bynajmniéj wartości reszty R, która nie zawiera w swym składzie x: więc, gdy się oznaczy przez X_a, wartość jaką bierze X, gdy sie w nim zastępuje x przez a, równość sprowadza się do

$$X_a=R.$$

Co było do dowodzenia.

75. Wnioski. 1° *Jeżeli wielomian* X *staje się zerem, kiedy się w nim zastępuje* x *przez* a, *ten wielomian jest podzielnym przez* (x — a). Gdyż X_a będąc zerem z założenia, reszta R dzielenia jest zerem także.

2° *Jeżeli wielomian* X *jest podzielnym przez* (x — a), *ten wielomian sprowadza się do zera, kiedy się w nim zastępuje* x *przez* a. Gdyż reszta R będąc zerem z założenia, toż samo się stosuje do X_a.

Tak więc, *aby wielomian, całkowity w* x, *był podzielnym przez* (x — a), *potrzeba jest i dosyć na tém ażeby się sprowadził do zera, kiedy się w nim zastępuje* x *przez* a.

76. Zastosowanie. To ostatnie podanie jest wielkiego znaczenia. Ograniczmy się na wskazaniu kilku przedniejszych następstw: m jest, w tém co następuje, liczbą całkowitą jakąkolwiek.

1° $x^m - a^m$ *jest zawsze podzielném przez* x — a. Gdyż ten wielomian niszczy się, kiedy się w nim zastępuje x przez a. W rzeczy saméj, dla $x = a$ wielomian staje się $a^m - a^m = 0$.

Sprawdza się ten rezultat wykonywając dzielenie

$$\begin{array}{lll} \textit{Dzielna.} & x^m - a^m & \left| \begin{array}{l} x - a \qquad \textit{Dzielnik.} \\ \hline x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \quad \textit{Iloraz.} \end{array} \right. \\ & -x^m + ax^{m-1} & \\ \hline 1^{sza} \textit{ reszta.} & +ax^{m-1} - a^m & \\ & -ax^{m-1} + a^2x^{m-2} & \\ \hline 2^{ga} \textit{ reszta...} & +a^2x^{m-2} - a^m & \\ & \vdots & \\ \hline \textit{ostatnia reszta...} & +a^mx^0 - a^m. & \end{array}$$

Dzielne po sobie następujące są wszystkie złożone z dwumianów których drugi wyraz jest $-a^m$; w pierwszym wyrazie, wykładnik litery a powiększa się o jedność, wykładnik zaś litery x zmniejsza się o jedność przy każdém działaniu. Dojdzie się więc tym sposobem do reszt

$$a^{m-2}x^2 - a^m, \quad a^{m-1}x - a^m, \quad a^mx^0 - a^m,$$

z których ostatnia jest *zerem*. Iloraz jest wreszcie wielomianem stopnia (m — 1) jednorodnym, i symetrycznym względem liter x i a. Zasługuje aby był w pamięci zatrzymanym.

2° *$x^m + a^m$ nie jest nigdy podzielném przez* x — a. Gdyż w danym wielomianie (przedstawiającym dzielną) zastępując x przez a, otrzymuje się reszta $2a^m$.

3° *$x^m - a^m$ jest podzielném przez* x + a, *gdy* m *jest parzystém, a nie jest podzielném, gdy* m *jest nieparzystém.* W rzeczy saméj, dzielić przez $x + a$, jestto dzielić przez $x - (-a)$: potrzeba więc, dla otrzymania reszty, podstawić $(-a)$ na miejscu x. Dzielna staje się wtedy $(-a)^m - a^m$. Owoż, gdy m jest parzystém, znajduje się (39) $(-a)^m = a^m$; gdy zaś m jest nieparzystém, otrzymuje się $(-a)^m = -a^m$. Więc reszta znika w pierwszym przypadku, jest zaś $-2a^m$ w drugim.

4° *$x^m + a^m$ jest podzielném przez* x + a, *gdy* m *jest nieparzystém, a nie jest, gdy* m *jest parzystém.* Gdyż podstawiając jeszcze $-a$ na miejscu x, dzielna staje się $(-a)^m + a^m$. Jest więc zerem, gdy m jest nie parzystém; zaś jest $2a^m$, gdy m jest parzystém.

77. Prawo ilorazu z podzielenia wielomianu przez $(x - a)$. Daliśmy poznać prawo, podług którego otrzymuje się reszta z podzielenia wielomianu przez $(x - a)$ (74). Można także odkryć łatwo prawo ilorazu. Przedstawmy wielomian przez $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$ i starajmy się wykonać dzielenie.

Dzielna

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \;\Big|\; x - a \qquad \textit{dzielnik.}$$

1*sza reszta*

$$\left.\begin{matrix}A_0a\\+A_1\end{matrix}\right| x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \qquad \Big|\; A_0x^{m-1} + \left.\begin{matrix}A_0a\\+A_1\end{matrix}\right| x^{m-2} + \qquad \textit{iloraz.}$$

2*ga reszta*

$$\left.\begin{matrix}+A_0a^2\\+A_1a\\+A_2\end{matrix}\right| x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m.$$

Pierwszy wyraz ilorazu jest A_0x^{m-1}. Mnożąc dzielnik przez ten wyraz, i odciągając wieloczyn od dzielnéj, otrzymuje się pierwsza reszta, któréj pierwszym wyrazem jest $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, i któréj inne wyrazy są te same jakie następują po drugim w dzielnéj. Drugi wyraz ilorazu jest $(A_0a + A_1)x^{m-2}$; dla otrzymania pierwszego wyrazu drugiéj reszty, trzeba mnożyć przez a drugi wyraz ilorazu, i do niego przyłączyć trzeci wyraz dzielnéj : znajduje się tym sposobem $(A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{m-2}$. A tém samém trzeci wyraz ilorazu jest

$(A_0 a^2 + A_1 a + A_2)x^{m-3}$. Ciągnąc dalej rachunek, wystawia się z łatwością na widok prawo następujące :

Iloraz wielomianu, całkowitego w x, *stopniu* m, *przez* (x — a), *jest wielomianem, całkowitym w* x, *stopnia* (m — 1). *Jest zwykle urządzonym, jak wielomian dany, podług potęg ubywających z* x. *Spółczynnik pierwszego wyrazu jest spółczynnikiem pierwszego wyrazu dzielnéj. Dla otrzymania spółczynnika drugiego wyrazu, mnoży się poprzedzający przez* a; *i przyłącza się do wieloczynu spółczynnik drugiego wyrazu dzielnéj. Dla utworzenia spółczynnika trzeciego wyrazu, mnoży się spółczynnik który co tylko został utworzony przez* a, *i przyłącza się spółczynnik trzeciego wyrazu dzielnéj. I w ogólności, spółczynnik* n^tego^ *wyrazu równa się wieloczynowi spółczynnika poprzedzającego przez* a, *powiększonemu spółczynnikiem* n^tego^ *wyrazu dzielnéj. Jeżeli dzielna nie jest wielomianem zupełnym, należy przywrócić wyrazy których braknie, dodając im zero za spółczynnik.*

Przykład. Znaleźć iloraz i resztę z podzielenia wielomianu $3x^5 - 4x^4 - 2x^2 + 7$ przez $x - 2$. Pisze się tym sposobem dzielna

$$3x^5 - 4x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 7;$$

znajdzie się na iloraz $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 12$, a na resztę 31.

Gdy się zastosuje prawo powyższe do przykładów n^ru^ 76, znajdzie się jedno po drugiém :

$$1^\circ \quad \frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

$$2^\circ \quad \frac{x^m + x^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x-a}.$$

$$3^\circ \quad \frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1},$$

gdy m jest parzystém;

a zaś

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x+a},$$

gdy m jest nieparzystém.

4° $\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-3}x^2-a^{m-2}x+a^{m-1},$

gdy m jest nieparzystém;

a zaś

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}+\frac{2x^m}{x+a},$$

gdy m jest parzystém.

Można, wreszcie, otrzymać bezpośrednio te formuły.

78. Twierdzenie. *Gdy wielomian* A, *całkowity w* x, *sprowadza się do zera, kiedy się w nim zastępuje* x *przez* a, *albo przez* b, *albo przez* c, (a, b, c, *będąc z założenia liczbami nierównemi*), *ten wielomian jest podzielnym przez wieloczyn*

$$(x-a)(x-b)(x-c).$$

W rzeczy saméj, ponieważ A niszczy się dla $x=a$, ten wielomian jest podzielnym przez $(x-a)$ (75). Gdy więc oznaczy się przez Q iloraz, całkowity w x, który się z tego dzielenia otrzymuje, znajduje się :

$$A=(x-a)Q.$$

Skoro ta równość ma miejsce, dla jakiegokolwiekbądź x, więc można w niéj przypuścić $x=b$, a wtedy staje się (Q_b będąc wartością z Q, w tém założeniu) :

$$0=(b-a)Q_b.$$

Otóż, różnica $(b-a)$ nie jest zerem, z założenia : więc $Q_b=0$. A więc Q jest podzielném przez $(x-b)$ (75). Oznaczając iloraz przez Q′, znajduje się :

$$Q=(x-b)Q';$$

a, tém samém,

$$A=(x-a)(x-b)Q'.$$

Ta równość ma miejsce, dla jakiejkolwiek wartości x, można przeto w niéj przypuścić $x = c$; a wtedy staje się :

$$0 = (c - a)\,(c - b)Q'_c.$$

Otóż, różnice $(c - a)$, $(c - b)$, będąc złożone z liczb nierównych, żadna z nich nie może dać na wypadek *zera*; więc czynnik Q'_c powinien być *zerem*. A więc Q' jest podzielném przez $(x - c)$; przeto, oznaczając nowy iloraz przez Q'', znajduje się :

$$Q' = (x - c)Q'',$$

zkąd $$A = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)Q''.$$

Więc A jest podzielném przez wieloczyn $(x - a)\,(x - b)\,(x - c)$.

ĆWICZENIA.

I. Jakie są warunki podzielności $(x^m - a^m)$ przez $(x^p - a^p)$?

II. Dowieść że wielomian

$$x^q y^r + y^p z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q$$

jest podzielnym przez wieloczyn $(x - y)\,(x - z)\,(y - z)$.

III. Dowieść że wielomian

$$x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r - x^p z^q y^r - z^p y^q x^r - y^p x^q z^r$$

jest podzielnym przez tenże sam wieloczyn.

IV. Dowieść że, gdy m jest nieparzystém, wielomian

$$(a + b + c)^m - a^m - b^m - c^m$$

jest podzielnym przez wieloczyn $(a + b)\,(a + c)\,(b + c)$.

Dowodzenie ćwiczeń II, III, IV, opiera się na twierdzeniu n^ru^ 78.

V. Gdy wielomian, całkowity w x, ma za spółczynniki liczby całkowite, i gdy bierze wartości liczebne nieparzyste, kiedy się w nim zastępuje x przez 0 i przez 1, jedno po drugjém, ten wielomian nie będzie mógł sprowadzić się do zera dla żadnéj wartości całkowitéj przyznawanéj dla x.

VI. Dowieść że N będące liczbą całkowitą jakąkolwiek której różne gromadki zawierające po m cyfer poczynając od prawéj ręki są A_1, A_2, A_3, i t. d., może się wyrazić pod jednym *z trzech kształtów* uastępujących :

$$N = 10^m(A_2 + A_3 10^m + A_4 10^{2m} + \dots) + A_1,$$

$$N = [A_2(10^m-1) + A_3(10^{2m}-1) + A_4(10^{3m}-1) + \dots]$$
$$+ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$$

$$N = [A_2(10^m + 1) + A_3(10^{2m} - 1) + A_4(10^{3m} + 1) + \dots]$$
$$+ (A_1 + A_3 + A_5 + \dots) - (A_2 + A_4 + A_6 + \dots).$$

Vyprowadzić ztąd cechy podzielności przez dzielnik jakikolwiek z 10^m, $10^m - 1$, $10^m + 1$.

VII. Sprawdzić formuły

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \dots,$$

$$\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \frac{b^2(a+b)}{x^3} + \dots$$

ROZDZIAŁ VI

UŁAMKI ALGEBRAICZNE.

PRZEKSZTŁACENIE UŁAMKÓW ALGEBRAICZNYCH.

79. Definicya. Kiedy wyrażenie A nie jest podzielném przez wyrażenie B, wskazuje się iloraz, jakośmy to już widzieli, pod kształtem $\frac{A}{B}$. To wyrażenie nosi imię *ułamku algebraicznego*. Dzielna A jest *licznikiem* dzielnik B jest *mianownikiem* : A i B są *wyrazami* ułamku.

Ułamek algebraiczny jest ogólniejszym jak ułamek arytmetyczny; gdyż wyrazy pierwszego nie są, jak wyrazy drugiego, zmuszone być liczbami całkowitemi. Lecz wykażemy, że prawidła rachunku są spólne dla obu rodzajów ułamków.

80. Twierdzenie. *Nie zmienia się wartość ułamku algebraicznego, mnożąc oba jego wyrazy przez tę samą ilość.* W rzeczy samej, niech będzie $\frac{a}{b}$ ułamek dany; oznaczmy przez m mnożnik. Przedstawmy przez jedną literę q iloraz wskazujący dzielenie z a przez b: znajduje się *jednako* (identiquement), podług saméjże definicyi ułamku,

$$a = bq.$$

Mnożąc przez tę samą liczbę m te dwie ilości równe, otrzymuje się :

$$am = bqm = bmq;$$

a, dzieląc przez bm dwa wieloczyny równe, znajduje się równość

$$\frac{am}{bm}=q, \qquad \text{albo} \qquad \frac{am}{bm}=\frac{a}{b};$$

co właśnie dowodzi założonego przez nas twierdzenia.

Taż sama formuła przekonywa, że nie zmienia się wartość ułamku, dzieląc oba jego wyrazy przez tę samą ilość.

Zasada fundamentalna jest tym sposobem ta sama w algebrze jak i w arytmetyce, a więc następstwa będą te same.

81. Uproszczenie ułamków. *Upraszcza się ułamek algebraiczny, znosząc czynniki spólne w obu jego wyrazach* (80).

Jeżeli dwa wyrazy są jednomianami, jest zawsze łatwo odkryć ich czynniki spólne. Niech będzie, na przykład, ułamek $\frac{36a^4b^3c^2d}{28ab^5cd^3}$. Największy spólny dzielnik spółczynników jest 4; co się tyczy czynników literalnych spólnych, rozpoznaje się bez pośrednio jeden czynnik a, trzy czynniki b, jeden czynnik c, i jeden czynnik d. Znosząc je, otrzymuje się ułamek uproszczony $\frac{9a^3c}{7b^2d^2}$.

Kiedy dwa wyrazy są wielomianami, można niekiedy znaleźć jeszcze bezpośrednio ich czynniki jednomianowe spólne. I tak, w ułamku $\frac{12a^4b^3-8a^3b^2}{16a^5b-20a^2b^4}$, postrzega się czynnik jednomianowy $4a^2b$: gdy się go zniesie, ułamek sprowadza się do $\frac{3a^2b^2-2ab}{4a^3-5b^3}$.

Lecz nie można zarówno łatwo odkryć czynników wielomianowych któreby były spólne obu wyrazom : poszukiwanie tych czynników przywiązuje się do teoryi największego spólnego dzielnika algebraicznego, która należy do algebry wyższéj. Wszakże zdarza się niekiedy, że cechy szczególne pozwolą je oznaczyć. Weźmy na przykład ułamek

$$\frac{a^4-2a^3+4a^2-7a+4}{a^2+5a-6}.$$

Rozpoznaje się że licznik i mianownik zniszczą się założywszy $a=1$: są więc podzielne obydwa przez $a-1$. Gdy się zniesie ten czynnik spólny, ułamek sprowadza się do uproszczonego wyrażenia

$$\frac{a^3 - a^2 + 3a - 4}{a + 6}.$$

Toż samo ułamek

$$\frac{8a^2c^2d^3 - 72b^2c^2d^3}{6ac^3d^2 - 18bc^3d^2}$$

może się pisać, odosobniając czynniki jednakowe spólne wyrazóm licznika, i czynniki spólne wyrazóm mianownika,

$$\frac{8c^2d^3(a^2 - 9b^2)}{6c^3d^2(a - 3b)};$$

a, pod tym kształtem, postrzega się że wyrażenie $2c^2d^2(a - 3b)$ jest czynnikiem spólnym obu wyrazóm. Ułamek sprowadza się więc do

$$\frac{4d(a + 3b)}{3c}.$$

82. Sprowadzenie ułamków do jednakowego mianownika. Sprowadza się ułamki do jednakowego mianownika, mnożąc oba wyrazy każdego z nich przez wieloczyn z mianowników wszystkich innych. I tak ułamki

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}, \quad \frac{g}{h},$$

stają się, przez to przekształcenie,

$$\frac{adfh}{bdfh}, \quad \frac{cbfh}{bdfh}, \quad \frac{cbdh}{bdfh}, \quad \frac{gbdf}{bdfh};$$

te ułamki nie zmieniły wcale swoich wartości (80); i mają za mianownik spólny wieloczyn z mianowników pierwotnych.

Można niekiedy otrzymać mianownik spólny prostszy jak ten wiełczyn : gdyż, aby przyjść do tego, dosyć jest wybrać, jak w arytmetce, wyrażenie *podzielne* przez każdy z mianowników ułamków anych. Kiedy te mianowniki są jednomianami, ten *wielokrotnik sólny* równa się wieloczynowi z najmniejszego wielokrotnika spólego wszystkim spółczynnikóm mianowników, rozmnożonemu przez cynniki literalne z których każdy jest wzięty ze swym największym ykładnikiem. Niech będą, na przykład, ułamki

$$\frac{A}{12a^3b^2c}, \quad \frac{B}{16a^2b^4}, \quad \frac{C}{18abc^3};$$

ic nie zaszkodzi uprzednio rozłożyć spółczynniki mianowników na czynniki pierwsze, co pozwala napisać

$$\frac{A}{3.2^2a^3b^2c}, \quad \frac{B}{2^4a^2b^4}, \quad \frac{C}{2.3^2abc^3};$$

ajmniejszy wielokrotnik spólny jest $2^4.3^2a^3b^4c^3$, albo $144a^3b^4c^3$ lorazy z tego jednomianu przez mianowniki są względnie

$$12b^2c^2, \quad 9ac^3, \quad 8a^2b^3.$$

łamki równoważne są więc

$$\frac{A\times 12b^2c^2}{144a^3b^4c^3}, \quad \frac{B\times 9ac^3}{144a^3b^4c^3}, \quad \frac{C\times 8a^2b^3}{144a^3b^4c^3}.$$

eżeli mianowniki są wielomianami, poszukiwanie wielokrotnika pólnego prostszego jak ich wieloczyn nie daje się wykonać, w ogólości, jak za pomocą teoryi algebry wyższéj. Wszelako może się zdarzyć że rozważania szczególne dostarczą wyrażenia. Niech będą, a przykład, ułamki

$$\frac{2a}{3b^2}, \quad \frac{a+b}{2b(a-b)}, \quad \frac{a-b}{4a(a+b)}, \quad \frac{a^2+2b^2}{9a^2(a^2-b^2)}.$$

Ponieważ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, ztąd więc łatwo dostrzedz że wyrażenie $36a^2b^2(a^2-b^2)$ jest podzielném przez każdy z mianowników; ilorazy są względnie

$$12a^2(a^2-b^2),\quad 18a^2b(a+b),\quad 9ab^2(a-b),\quad 4b^2;$$

a ułamki równoważne będą

$$\frac{24a^3(a^2-b^2)}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{18a^2b(a+b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{9ab^2(a-b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{4b^2(a^2+2b^2)}{36a^2b^2(a^2-b^2)}.$$

DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ALGEBRAICZNYCH.

83. Dodawanie. *Kiedy ułamki mają ten sam mianownik, dodaje się liczniki, i daje się summie spólny mianownik.*

I tak
$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a+b+c+d}{m};$$

gdyż wieloczyny przez m każdéj strony téj formuły są równe (24).

Gdy ułamki mają mianowniki różne, poczyna się od ich sprowadzenia do jednakowego mianownika; potém stosuje się prawidło poprzedzające.

84. Odciąganie. *Kiedy ułamki mają ten sam mianownik, odciąga się drugi licznik od pierwszego, i daje się różnicy mianownik spólny.*

I tak
$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m};$$

gdyż wieloczyny przez m dwóch stron téj formuły są równe (24).

Gdy ułamki mają mianowniki różne, sprowadza się je naprzód do jednakowego mianownika; potém stosuje się prawidło poprzedzające.

85. Mnożenie. *Mnoży się ułamek przez inny, mnożąc ich liczniki między sobą i mianowniki między sobą, potém dzieląc pierwszy wieloczyn przez drugi.*

W rzeczy saméj, niech będzie do mnożenia ułamek $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{a'}{b'}$. Oznaczmy przez q i q' wartości tych dwóch ułamków; tak że znajduje się, przez definicyę :

$$a = bq, \qquad a' = b'q'.$$

Mnożąc te równości stronami; będziemy mieli

$$aa' = bq \cdot b'q',$$

albo (21) $$aa' = bb'qq'.$$

Dzieląc teraz obie strony przez bb', znajdziemy :

$$\frac{aa'}{bb'} = qq',$$

albo $$\frac{aa'}{bb'} = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}:$$

co ściśle udowodnia powyżéj *wysłowionego prawidła.*

Wynika z tego prawidła, że *wieloczyn z wielu ułamków jest ułamkiem równym wieloczynowi z liczników podzielonemu przez wieloczyn z mianowników.*

I tak $$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} \ldots = \frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots};$$

a tém samém $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

86. Dzielenie. *Dzieli się ułamek przez inny, mnożąc ułamek dzielnéj przez ułamek dzielnika przewrócony.*

Dajmy, w rzeczy saméj, że mamy do podzielenia ułamek $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{a'}{b'}$. Połóżmy jeszcze

$$a = bq, \quad a' = b'q'$$

i dzielmy te równości stronami; znajdziemy

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}.$$

Mnożąc teraz obie strony przez $\frac{b'}{b}$, będziemy mieli (85):

$$\frac{a}{a'} \times \frac{b'}{b} = \frac{bqb'}{b'q'b},$$

albo uproszczając drugą stronę (84),

$$\frac{a}{a'} \times \frac{b'}{b} = \frac{q}{q'},$$

to jest $$\frac{a}{a'} \times \frac{b'}{b} = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'};$$

Co właśnie dowodzi przedstawionego przez nas prawidła.

2° Możnaby to jeszcze dowieść nieco prościej:

W istocie, niech będzie do dzielenia $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, iloraz jest oczywiście

$$\frac{ad}{bc};$$

gdyż, jeśli się rozmnoży ten ułamek przez $\frac{c}{d}$, znajduje się

$$\frac{adc}{bcd},$$

który się sprowadza do $\frac{a}{b}$, dzieląc jego wyrazy przez c i przez d.

A więc

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c},$$

zkąd widzimy : że *iloraz z dwóch ułamków otrzymuje się mnożąc ułamek dzielnéj przez ułamek dzielnika przewrócony*.

Przez wzgląd na początkujących daliśmy drugie dowodzenie.

WYKŁADNIKI ODJEMNE.

87. Definicya. Widzieliśmy (53), że iloraz z podzielenia a^m przez a^n jest a^{m-n} : lecz dowodzenie przypuszcza że się znajduje $m > n$. Jeżeli jest, przeciwnie, $m < n$, iloraz powinien się napisać pod kształtem ułamku, $\frac{a^m}{a^n}$. Można wtedy znieść m czynników a wspólnych obu wyrazóm, i ułamek przybierze kształt $\frac{1}{a^{m-n}}$.

Z drugiéj strony, gdyby się dało zastosować prawidło wykładników do przypadku w którym wykładnik dzielnika przewyższa wykładnik dzielnéj, możnaby było w tenczas napisać :

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

A tém samém, utrzyma się to prawidło w całéj swéj ogólności, jeżeli *przyznamy ze wyrażenie a^{-p} przedstawia ułamek* $\frac{1}{a^p}$.

Przypuszczać będziemy, jako określenie, że *każda ilość* (*albo litera*) *z wykładnikiem odjemnym wyraża się za pomocą ułamku mającego jedność za licznik, a za mianownik tę samę ilość, czyli literę, i z tym samym wykładnikiem ale dodatnym*. Zobaczymy, że to oznaczenie posłuży nam wyśmienicie do uogólnienia kilku twierdzeń.

88. Uogólnienie formuły $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Formuła

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \tag{1}$$

mająca miejsce, przez określenie, gdy m jest dodatném, pozostaje prawdziwą, przez to samo, dla wartości odjemnych z m. W rzeczy saméj, jeżeli się przypuści $m = -m'$, $-m$ stanie się równém m'; i dwie strony formuły [1] staną się $a^{m'}$ i $\frac{1}{a^{-m'}}$. Otóż, przez określenie, $a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}$, ponieważ m' jest dodatném: więc $\frac{1}{a^{-m'}}$ ma równą wartość z $\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)}$ albo z $a^{m'}$ (86). Dwie strony są więc równe.

89. Uogólnienie prawidła na wykładniki w mnożeniu. Dowiedliśmy (21), że dla wykładników dodatnych

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \tag{2}$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jeden z dwóch wykładników, albo oba razem, są odjemne.

Przypuśćmy naprzód m dodatne, a n odjemne i równe $-n'$; będziemy mieli:

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-n'} = a^m \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}}.$$

Lecz $\frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'}$, na mocy ogólnego prawidła dzielenia (87).

Więc

$$a^m \times a^n = a^{m-n'},$$

albo, zastępując n' przez $-n$,

$$a^m \times a^n = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Przypuśćmy teraz że tak m jak n są odjemnemi, i równe $-m'$ i $-n'$; będziemy mieli:

$$a^m \times a^n = a^{-m'} \times a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-m'-n'} = a^{m+n};$$

co było do dowodzenia.

90. Uogólnienie prawidła na wykładniki w dzieleniu. Znaleźliśmy (87), dla wartości dodatnych m i n, formułę

[3] $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jedna z liczb, m lub n, albo obie razem, są odjemnemi.

Przypuśćmy naprzód $m = -m'$, a n dodatne; będziemy mieli :

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^n = \frac{1}{a^{m'}} : a^n = \frac{1}{a^{m'+n}} = a^{-m'-n} = a^{m-n}.$$

Gdy, przeciwnie, m jest dodatném, a n odjemném i równém $-n'$, znajduje się :

$$a^m : a^n = a^m : a^{-n'} = a^m : \frac{1}{a^{n'}} = a^m \times a^{n'} = a^{m+n'} = a^{m-n}.$$

Gdy nakoniec jest, razem, $m = -m'$, $n = -n'$, znajdzie się :

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} : \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^{n'}}{a^{m'}} = a^{n'-m'} = a^{-n+m}.$$

Formuła [3] jest więc prawdziwą we wszystkich przypadkach.

91 Uogólnienie prawidła na wykładniki przy wynoszeniu do potęg. Wyprowadziliśmy (22), dla wartości dodatnych tak z m jak z n, formułę

[4] $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jedna z liczb m lub n albo obie razem, są odjemnemi.

Przypuśćmy naprzód m dodatne, a n odjemne i równe $-n'$; będziemy mieli :

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}},\ a^{-mn'} = a^{m(-n')} = a^{mn}.$$

Przypuśćmy później $m = -m'$, a n dodatne; będziemy mieli :

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^n = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m}} = a^{-m'n} = a^{mn}.$$

Przypuśćmy nakoniec $m = -m'$, $n = -n'$, razem; znajdziemy:

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^{-n'} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'n'}}\right)} = a^{m'n'}.$$

$$= a^{(-m)(-n)} = a^{mn}.$$

Prawidło jest więc ogólne.

TWIERDZENIA I ZASTOSOWANIA.

92. Twierdzenie. *Gdy mamy ilekolwiek ułamków* $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... *równych między sobą, otrzymuje się ułamek równy każdemu z nich, dzieląc summę liczników przez summę mianowników.*

W rzeczy saméj, oznaczmy przez literę q wartość spólną wszystkich tych ułamków; będzie, z określenia,

$$a = bq, \quad a' = b'q, \quad a'' = b''q \ldots;$$

zkąd, dodając te równości stronami, i kładąc q na czynnik w drugiéj stronie,

$$a + a' + a'' + \ldots = (b + b' + b'' + \ldots)q.$$

A tém samém, dzieląc obie strony przez $(b + b' + b'' + \ldots)$, przychodzi się do wypadku:

[5] $$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = q = \frac{a}{b};$$

co było do dowodzenia:

Wnioski. 1° Można, przed wykonaniem dodawań, mnożyć oba wyrazy każdego ułamku przez jakąkolwiek, byle tę samą liczbę.

I tak

$$\frac{a}{b} = \frac{a\lambda}{b\lambda}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'\lambda'}{b'\lambda}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{a''\lambda''}{b''\lambda''} \ldots.$$

Ponieważ te ułamki nie zmieniły swéj wartości, ... łatwo z nich ztém daje się wyprowadzić :

$$[6] \qquad \frac{a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \dots}{b\lambda + b'\lambda' + b''a'' + \dots} = \frac{a\lambda}{b\lambda} = \frac{a}{b}.$$

2° Gdy podniesiemy każdy ułamek do kwadratu, znajdziemy, przypuszczając je dodatnemi,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \dots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots};$$

zkąd, wyciągając pierwiastek kwadratowy z różnych stron,

$$[7] \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots}}.$$

Tak więc, *gdy ilekolwiek ułamków są równe między sobą, każdy z nich jest równym ilorazowi pierwiastku kwadratowego summy kwadratów z liczników, przez pierwiastek kwadratowy summy kwadratów z mianowników.*

Twierdzenie. *Jeżeli weźmiemy ilekolwiek ułamków nierównych między sobą, mających swe wyrazy dodatne, to ułamek utworzony, z podzielenia summy liczników przez summę mianowników, jest zawarty między najmniejszym i największym z ułamków danych.* Niech będą, na przykład,

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''} < \frac{a'''}{b'''}.$$

Gdy się położy $\frac{a}{b} = q$, zkąd $a = bq$,

to na mocy tych założeń będzie oczywiście :

$$a' > b'q,$$
$$a'' > b''q,$$
$$a''' > b'''q;$$

zkąd, dodając,

$$a + a' + a'' + a''' > (b + b' + b'' + b''')q,$$

a, następnie,
$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} > q,$$

albo
$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} > \frac{a}{b}.$$

Przeciwnie, gdy położy się
$$\frac{a'''}{b'''} = q,$$

albo
$$a''' = b'''q,$$

będzie :
$$a'' < b''q,$$
$$a' < b'q,$$
$$a < bq;$$

potém, dodając stronami, otrzymamy :

$$a + a' + a'' + a''' < (b + b' + b'' + b''')q,$$

zkąd da się wyciągnąć :
$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < q,$$

albo
$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < \frac{a'''}{b'''};$$

co było do dowodzenia.

Dowiedzie się łatwo wniosków podobnych wnioskom twierdzenia (92).

ĆWICZENIA.

I. Sprawdzić formułę

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)(z^2 - b^2)}{b^2(b^2 - c^2)} + \frac{(x^2 - c^2)(y^2 - c^2)(z^2 - c^2)}{c^2(c^2 - b^2)}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - c^2.$$

II. Sprawdzić formułę

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)} + \frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)} = 1.$$

III. Sprawdzić formułę

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)\,b^2(c^2-b^2)} + \frac{(z^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)} = \frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}.$$

IV. Sprawdzić formułę

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right\} + \frac{2}{(p+q)^{\cancel{2}}3}\left\{\frac{1}{p^{\cancel{2}}}+\frac{1}{q}\right\}.$$

Formuły I, II, III, IV sprawdzają się, sprowadzając obie strony do jednakowego mianownika; znajduje się wtedy tożsamości.

V. Sprawdzić formułę

$$\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})\ldots(1-x^{n-p})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-x^{p+1})}$$

$$=\frac{(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})\ldots(1-x^{n-p-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^{p+1})} + x^{n-p-1}\frac{(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})\ldots(1-x^{n-p})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^p)}.$$

Znajdzie się tożsamość czyli jednakość, po zniesienin czynników spólnych.

VI. Sprawdzić formułę

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$$

$$= \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

Służy tu ta sama metoda jak do *czterech pierwszych* ćwiczeń.

VII. Sprawdzić równość

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n} = \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

$$+\,2\,\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)} + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)}.$$

VIII. Sprawdzić równość

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}$$

$$=\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-2)}{1.2.3\ldots\ldots n}+3\,\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-1)}$$

$$+3\,\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-2)}+\frac{(m-3)(m-4)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-3)}.$$

Ta sama metoda dla ćwiczeń VII i VIII, jak dla ćwiczenia V.

IX. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}.$$

Po uproszczeniu powinno wypaść $\dfrac{1}{1-x^2}$.

X. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{1-\left\{\dfrac{(a+b)+(1+ab)x}{1-ab+(a+b)x}\right\}^2}$$

$$\times\ \frac{(1+ab)\,[1+ab+(a+b)x]-(a+b)\,[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)\,x]^2}.$$

Po uproszczeniu otrzymuje się na wypadek $\dfrac{1}{1-x^2}$.

XI. Sprawdzić proporcyę

$$\frac{\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c}{a+2b}}{\dfrac{c}{a+2b}-\dfrac{c}{a+3b}}=\frac{\dfrac{c}{a+b}}{\dfrac{c}{a+3b}}$$

XII. Dowieść, sprawdzając, że wyrażenie

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1},$$

jest wielomianem całkowitym w x.

XIII. Sprowadzić wyrażenie

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2),$$

sprawdzić że summa nie zawiera mianowników.

XIV. Dowieść że wyrażenie

$$1+x^n+x^{2n}+\ldots\ldots+x^{(p-1)n}$$

jest podzielném przez $\quad 1+x+a^2+\ldots\ldots+a^{p-1},$

gdy p i n są pierwsze między sobą.

Znajduje się na iloraz

$$(1+x^p+x^{2p}+\ldots\ldots+x^{(n-1)p})\,(1+x^n+x^{2n}+\ldots+x^{(k-1)n})$$
$$-\,x\,(1+x^n+\ldots\ldots+x^{(p-1)n})\,(1+x^p+x^{2p}+\ldots+x^{(h-1)p}),$$

gdzie k i h oznaczają dwie liczby całkowite, takie że $kn=hp+1$ (związek który, według pewnego twierdzenia arytmetyki, może zawsze istnieć między dwoma liczbami n *i* p, pierwszemi między sobą).

XV. Dowieść że wieloczyn

$$(x^m-1)\,(x^{m-1}-1)\,(x^{m-2}-1)\ldots\ldots(x^{m-n-1}-1)$$

jest podzielnym przez wieloczyn

$$(x-1)\,(x^2-1)\ldots\ldots(x^n-1).$$

Rozwiązanie. Dowodzi się że, jeśli zadanie jest prawdziwém dla wartości m zmniejszonéj o jedność, jest także prawdziwém dla wartości danéj.

ROZDZIAŁ VII.

RADYKALE ALGEBRAICZNE (RADICAUX ALGÉBRIQUES).

PRZEKSZTAŁCENIA RADYKALÓW.

94. DEFINICYE. Widzieliśmy (22), że chcąc podnieść jednomian całkowity do potęgi m, trzeba podnieść jego spółczynnik do potęgi m, i pomnożyć przez m wszystkie wykładniki. A tém samém, gdy spółczynnik jednomianu jest potęgą m doskonałą, i gdy jego wykładniki są wszystkie wielokrotnikami liczby m, *wyciąga się pierwiastek* m *z tego jednomianu, wyciągając pierwiastek* m *z jego spółczynnika, i dzieląc przez* m *wszystkie wykładniki.* I tak

$$\sqrt[m]{5^m a^{3m} b^{2m} c^m} = 5a^3b^2c.$$

Najczęściéj, nie istnieje jednomian całkowity z któregoby potęga m była równą jednomianowi danemu; wtedy nie można jak tylko wskazać pierwiastek m za pomocą znaku. *Oznacza się przez* $\sqrt[m]{A}$ *liczbę któréj potęga* m *jest równą* A. Ta liczba nazywa się *radykalem* (radical), a m jest *wskazówką* radykala. Daje się także nazwisko radykala znakowi samemu $\sqrt[m]{\ }$.

Kiedy A jest wielomianem, nie zdarza się prawie nigdy, aby jego pierwiastek m mógł się kiedykolwiek wyrazić przez inny wielomian; wreszcie prawidła które prowadzą do jego wartości, gdy ta istnieje pod tym kształtem, nie dowodzą się jak w drugiéj części algebry. Wskażemy je, we wszystkich przypadkach, przez znak $\sqrt[m]{A}$.

95. RÓŻNE WARTOŚCI Z $\sqrt[m]{A}$. Jeżeli się ograniczymy na samém tylko uważaniu liczb dodatnych, $\sqrt[m]{A}$ posiada, według naszego określenia, wartość jedyną i oznaczoną. Lecz umowy przyjęte w algebrze zobowiązują nas do nadania mu bardziéj rozciągłego znaczenia.

Mogą się zdarzyć cztery przypadki.

1° Jeżeli A jest dodatném, a m parzystém, pierwiastek potęgi m z A ma dwie wartości równe i ze znakami przeciwnymi. W rzeczy samej, gdy się podniesie do potęgi m liczbę $\sqrt[m]{A}$, jakikolwiek jest znak który ją poprzedza, otrzymuje się zawsze A, ponieważ wieloczyn z liczby parzystéj czynników odjemnych jest dodatnym (49).

Na przykład, $\sqrt{4}$ przedstawia, według naszych ugód, dwa wypadki, -2 i $+2$; gdyż te obie liczby dają na kwadrat liczbę 4.

2° Gdy A jest dodatném a m nieparzystém, nie można natychmiast przyznawać dla $\sqrt[m]{A}$ znaczenia więcéj ogólnego jak w arytmetyce. Tak więc $\sqrt[3]{8}=2$.

3° Gdy A jest odjemném a m parzystém, $\sqrt[m]{A}$ nie przedstawia żadnéj liczby dodatnéj albo odjemnéj; gdyż potęgi parzyste z liczby dodatnéj albo odjemnéj są zawsze dodatne (49).

4° Gdy A jest odjemném a m nieparzystém, położymy $A=-A'$; wtedy $\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{-A'}=-\sqrt[m]{A'}$; gdyż m będąc nieparzystém, potęga m z $-\sqrt[m]{A'}$ będzie $-A'$ albo A (49). I tak

$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2;$$

gdyż sześcian z -2 jest -8.

Te uogólnienia są, w algebrze, wielkiego znaczenia; przyjmą one późniéj znakomite rozwinięcia; lecz nie będzie o nich więcéj mowy w tym rozdziale. My tu jedynie będziemy rozważali same tylko pierwiastki dodatne z liczb dodatnych.

96. Zasada I. *Kiedy radykał jest pomnożony przez czynnik, można podciągnąć ten czynnik pod radykał, byleby uprzednio nie zaniedbano podnieść go do potęgi oznaczonéj wskazówką.* I tak

$$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^mb}. \tag{1}$$

Aby tego dowieść, dosyć jest zauważyć, że podnosząc te dwa wyrażenia do potęgi m, otrzymuje się rezultata równe. W rzeczy samej, ponieważ potęga m z wieloczynu jest wieloczynem potęg m z czynników, znajduje się przeto na pierwsze wyrażenie:

$$(a\sqrt[m]{b})^m=a^m(\sqrt[m]{b})^m=a^mb.$$

Wreszcie znajduje się, na drugie, według saméjże definicyi,

$$(\sqrt[m]{a^m b})^m = a^m b.$$

Ta sama formuła [1] udowodnia, że *można wydobyć czynnik położony pod radykalem, byleby urpzednio nie zaniedbano z niego wyciągnąć pierwiastek oznaczony wskazówką.*

97. Zasada II. *Można mnożyć wskazówkę i wykładnik radykala przez jedną liczbę, nie zmieniając bynajmniéj wartości radykala.* I tak

$$[2] \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Na dowodzenie tego, dosyć jest wykazać, że podnosząc te dwa wyrażenia do potęgi mp, otrzymuje się rezultata równe. I w rzeczy saméj, drugie, podniesione do potęgi mp, daje, z określenia, a^{np}. Co się tyczy pierwszego, jako potęga mp jakiegokolwiek wyrażenia jest potęgą p potęgi m téj ilości (22), znajduje się :

$$(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = \{(\sqrt[m]{a^n})^m\}^p = (a^n)^p = a^{np}.$$

Oba rezultata są więc istotnie równe.

Ta sama formuła [2] udowodnia, że *można dzielić wskazówkę i wykładnik radykala przez jedną liczbę, nie zmieniając bynajmniéj jego wartości.*

98. Uproszczenie radykala. Kiedy radykal rozciąga się nad ilością podniesioną do pewnéj potęgi, można często na nim wykonać uproszczenie.

1° *Jeżeli wskazówka pierwiastku jest równą stopniowi potęgi, dwa działania niszczą się.* Zajduje się, w rzeczy saméj, przez określenie (94) :

$$\sqrt[m]{a^m} = a.$$

2° *Jeżeli istnieje czynnik spólny wskazówce pierwiastku i wykładnikowi potęgi, można go znieść.* Znajduje się, w rzeczy saméj (97) :

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

3° *Kiedy się znajduje pod radykalem czynnik którego wykładnik jest wielokrotnikiem wskazówki pierwiastku, można go wydobyć z pod radykala, dzieląc ten wykładnik przez wskazówkę.* Znalazło się, w rzeczy saméj (96) :

$$\sqrt[m]{a^{mp}b} = a^p \sqrt[m]{b}.$$

99. Sprowadzenie radykalów do jednakowej (jednostajnéj) wskazówki. Niech będą dwa radykale

$$\sqrt[m]{a^p} \qquad \sqrt[n]{b^q}\,;$$

można mnożyć wskazówkę i wykładnik pierwszego przez n, to jest przez wskazówkę drugiego ; potém mnożyć wskazówkę i wykładnik drugiego przez m będące wskazówką pierwszego (97) ; otrzymuje się tym sposobem :

$$\sqrt[nm]{a^{pn}} \quad \text{i} \quad \sqrt[nm]{b^{qm}}.$$

Te radykale mają jednakową wskazówkę, gdyż ta jest wieloczynem z dwóch wskazówek.

Sprowadza się więc dwa radykale do jednostàjnéj wskazówki, mnożąc wskazówkę i wykładnik każdego z nich przez wskazówkę drugiego.

Sprowadza się zarówno jakakolwiek ilość radykalów do jednostajnéj wskazówki, mnożąc wskazówkę i wykładnik każdego z nich przez wieloczyn wykonany ze wskazówek wszystkich innych. I tak radykale

$$\sqrt[m]{a^\alpha}, \quad \sqrt[n]{b^\beta}, \quad \sqrt[p]{c^\gamma}, \quad \sqrt[q]{d^\delta},$$

stają się, przez to przekształcenie,

$$\sqrt[mnpq]{a^{\alpha npq}}, \quad \sqrt[mnpq]{b^{\beta mpq}}, \quad \sqrt[mnpq]{c^{\gamma mnq}}, \quad \sqrt[mnpq]{d^{\delta mnp}}.$$

Te prawidła mają wiele podobieństwa z prawidłami za pomocą których sprowadza się ułamki do jednakowego mianownika. Można nawet posunąć analogię daléj, *dając radykałom wskazówkę spólną, równą najmniejszemu wielokrotnikowi spólnemu z ich wskazówek.* W rzeczy samej, niech będzie μ najmniejszy wielokrotnik spólny wskazówkom m, n, p, q; tak że się znajduje :

$$\mu = mm', \quad \mu = nn', \quad \mu = pp', \quad \mu = qq';$$

mnożąc wskazówkę i wykładnik pierwszego radykała przez m', a wskazówki i wykładniki innych przez n', p', q', radykale stają się,

$$\sqrt[mm']{a^{\alpha m'}}, \quad \sqrt[nn']{b^{\beta n'}}, \quad \sqrt[pp']{c^{\gamma p'}}, \quad \sqrt[qq']{d^{\delta q'}},$$

albo $$\sqrt[\mu]{a^{\alpha m'}}, \quad \sqrt[\mu]{b^{\beta n'}}, \quad \sqrt[\mu]{c^{\gamma p'}}, \quad \sqrt[\mu]{d^{\delta q'}}.$$

DZIAŁANIA NA RADYKALACH.

100. Mnożenie. *Kiedy radykale mają jednaką wskazówkę, dla wykonania ich wieloczynu, mnoży się ilości położone pod ich znakami, i oznacza się wieloczyn znakiem spólnym.* I tak

[3] $$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} \times \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{abcd}.$$

Na dowodzenie tego, dosyć jest wykazać, że podnosząc te dwa wyrażenia do potęgi m, otrzymamy rezultata równe. Gdyż drugie staje się $abcd$, przez określenie; a jako potęga m z wieloczynu jest wieloczynem potęg m z czynników (22), pierwsze wyrażenie staje się :

$$(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} \times \sqrt[m]{d})^m = (\sqrt[m]{a})^m (\sqrt[m]{b})^m (\sqrt[m]{c})^m (\sqrt[m]{d})^m = abcd.$$

Kiedy radykale nie mają jednakowéj wskazówki, sprowadza się je do wskazówki spólnéj (99), *i stosuje się prawidło poprzedzające.*

Przykład. Znajduje się :

$$\sqrt[p]{a^\alpha} \times \sqrt[q]{a^\beta} \times \sqrt[r]{a^\gamma} = \sqrt[pqr]{a^{\alpha qr}} \times \sqrt[pqr]{a^{\beta pr}} \times \sqrt[pqr]{a^{\gamma pq}} = \sqrt[pqr]{a^{\alpha qr + \beta pr + \gamma pq}}.$$

Gdyby radykale miały spółczynniki liczebne albo literalne, należy utworzyć z nich wieloczyn.

Przykład. Znajduje się :

$$3h\sqrt[p]{a^\alpha} \times 4k\sqrt[q]{a^\beta} = 12hk\sqrt[pq]{a^{\alpha q+\beta p}}.$$

101. Dzielenie. *Kiedy radykale mają jednaką wskazówkę, wtedy dla podzielenia pierwszego przez drugi, dzieli się liczby położone pod znakami, i oznacza się iloraz znakiem spólnym.* I tak

[4] $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Aby to udowodnić, dosyć jest zauważyć, że podnosząc te dwa wyrażenia do potęgi m, otrzymuje się rezultata równe. I, w rzeczy saméj, drugie staje się, przez określenie, $\frac{a}{b}$. Co się tyczy pierwszego, ponieważ potęga m ułamku jest ilorazem potęgi m z jego obu wyrazów (85), więc to wyrażenie staje się :

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}.$$

Gdy radykale mają wskazówki różne, przywodzi się ie do iednakiéj wskazówki, i stosuje się prawidło poprzedzające.

Przykład. Znajduje się :

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}} = \frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}} = \sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

Gdyby radykale miały spółczynniki, należy podzielić je przez siebie :

Przykład. Znajduje się :

$$\frac{3h\sqrt[p]{a^m}}{4k\sqrt[q]{b^n}} = \frac{3h}{4k}\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}.$$

102. Potęgi radykała. *Aby podnieść radykał do potęgi, podnosi się do téjże saméj potęgi ilość położoną pod radykałem.* I tak

[5] $$(\sqrt[m]{a^\alpha})^p = \sqrt[m]{a^{\alpha p}}.$$

Na dowodzenie tego, dosyć jest zauważyć, że podnosząc te dwa wyrażenia do potęgi m, otrzymuje się rezultata równe. I, w rzeczy saméj, drugie staje się, przez określenie, $a^{\alpha p}$. Co się tyczy pierwszego, ponieważ potęga m potęgi p jakiejkolwiek ilości jest równą potędze pm albo potędze mp téj ilości, i odwrotnie (22), przeto pierwsze wyrażenie staje się :

$$\left\{\left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p\right\}^m = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^{pm} = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^{mp} = \left\{\left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^m\right\}^p = (a^\alpha)^p = a^{\alpha p}.$$

Po wykonaniu działania, upraszcza się radykal, gdy to może mieć miejsce [98].

Jeśliby radykal miał spółczynnik, należałoby podnieść go do téj saméj potęgi. I tak

$$\left(h\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p = h^p\sqrt[m]{a^{\alpha p}}.$$

103. Pierwiastki radykala. *Aby wyciągnąć pierwiastek z radykala, mnoży się wskazówkę radykala przez wskazówkę pierwiastku*, i upraszcza się późniéj rezultat, gdy to może mieć miejsce. I tak

[6] $$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}} = \sqrt[mp]{a^\alpha}.$$

Na dowodzenie tego, dosyć jest wykazać, że wynosząc te dwa wyrażenia do potęgi mp, otrzymuje się rezultata równe. I, w istocie, drugie staje się wtedy, przez określenie, a^α. Co się tyczy pierwszego, potęga mp jakiéjkolwiek ilości jest równą potędze m potęgi p téj ilości ; a więc :

$$\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}}\right)^{mp} = \left\{\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}}\right)^p\right\}^m = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^m = a^\alpha.$$

Oznaczenie wykładników ułamkowych.

104. Definicya. Widzieliśmy (94), że chcąc wyciągnąć pierwiastek z jakiéjkolwiek bądź ilości a^{mp}, któréj wykładnik jest wielokrotnikiem wskazówki, dosyć jest rozdzielić wykładnik przez wskazówkę. I tak $\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m$. Lecz, gdy dzielenie nie jest możebném, prawidło

nie da się więcéj zastosować, i pierwiastek p z a^m pisze się wtedy $\sqrt[p]{a^m}$. Gdyby, wszelako, dało się zastosować jeszcze prawidło poprzedzające do tego przypadku, należałoby napisać $a^{\frac{m}{p}}$. Zachowa się więc to prawidło w całéj swéj ogólności, jeżeli *się umówi* przedstawić radykal $\sqrt[p]{a^m}$ przez symbol $a^{\frac{m}{p}}$.

Przyjmiemy, jako określenie, *że wszelka litera* a *oznaczona wykładnikiem ułamkowym* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}}$ *przedstawia radykal mający za wykładnik licznik* m, *a za wskazówkę mianownik* p. I zobaczymy że to oznaczenie pozwoli nam wysłowić prościéj wypadki poprzedzające.

Lecz przed okazaniem tych korzyści, winniśmy zauważyć że prawidło podane nie przypuszcza sprzeczności; i że wyrażenie $a^{\frac{m}{p}}$ zachowuje tę samą wartość, gdy w niém zastąpi się wykładnik $\frac{m}{p}$ przez ułamek równy $\frac{m'}{p'}$. I tak, gdy

$$\frac{m}{p}=\frac{m'}{p'},$$

będzie także,

$$a^{\frac{m}{p}}=a^{\frac{m'}{p'}}$$

czyli, na mocy naszych ugód,

$$\sqrt[p]{a^m}=\sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Owóz ta ostatnia równość jest widoczną : gdyż, sprowadzając dwa powyższe radykale do jednakiéj wskazówki, otrzymamy :

$$\sqrt[pp']{a^{mp'}} \quad \text{i} \quad \sqrt[pp']{a^{m'p}};$$

a widzimy że ilości te mają jednaki wykładnik, ponieważ równość $\frac{m}{p}=\frac{m'}{p'}$ p ąga za sobą równość $mp'=m'p$.

105. Uogólnienie prawidła na wykładniki w mnożeniu. Dowiedzioną została (21), dla wykładników całkowitych, formuła

[1] $$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jeden z wykładników m lub n, albo oba razem, są ułamkowemi.

Przypuśćmy naprzód m ułamkowém i równém $\frac{p}{q}$; jeżeli n pozostaje całkowitém, będziemy mieli, według określenia i na mocy zasady I (96) :

$$a^m \times a^n = a^{\frac{p}{q}} \times a^n = \sqrt[q]{a^p} \times a^n = \sqrt[q]{a^p \times a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p+nq}}\,;$$

otóż, stosując naszą ugodę do tego ostatniego wyrażenia, otrzymamy,

$$a^{\frac{p+nq}{q}} \quad \text{albo} \quad a^{\frac{p}{q}+n}\,;$$

więc

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^n = a^{\frac{p}{q}+n}.$$

Gdy, powtóre oba czynniki mają wykładniki ułamkowe,

$$m = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}, \qquad n = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}},$$

będzie :

$$a^m \times a^n = a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \times \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \times a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}\,;$$

otóż ten ostatni radykal można napisać, na mocy naszych ugód,

$$a^{\frac{ps+rq}{qs}} \quad \text{albo} \quad a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}\,;$$

więc

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

106. Uogólnienie prawidła na wykładnini w dzieleniu. Znaleźliśmy (88), dla wartości całkowitych z m i n :

[2] $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy m albo n, lub obie ilości razem, są ułamkowemi.

Przypuśćmy naprzód $m=\frac{p}{q}$ i n całkowite; będziemy mieli:

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p-nq}};$$

owóż ten ostatni radykal można napisać, według naszych ugód,

$$a^{\frac{p-nq}{q}} \quad \text{albo} \quad a^{\frac{p}{q}-n};$$

więc
$$a^{\frac{p}{q}} : a^n = a^{\frac{p}{q}-n}.$$

Przypuśćmy potém m całkowite, a zaś $n=\frac{p}{q}$; wtenczas znajduje się:

$$a^m : a^n = a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^m : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq-p}};$$

a, ponieważ ten ostatni radykal można położyć, według naszych ugód, pod kształtem

$$a^{\frac{mq-p}{q}} \quad \text{albo} \quad a^{m-\frac{p}{q}},$$

więc wypada widocznie: $a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}$.

Przypuśćmy nakoniec $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{s}$; wtedy otrzyma się.

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} : \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}};$$

a, ponieważ ten ostatni radykal pisze się, według naszych umów.

$$a^{\frac{ps-rq}{ps}} \quad \text{albo} \quad a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}},$$

z kąd po prostu wynika: $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

107, Uogólnienie prawidła na wykładniki przy podnoszeniu do

POTĘG. Dowiedliśmy (22), dla wartości całkowitych z m i n, formułę

[3] $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ta formuła nie przestaje jeszcze istnieć, gdy m lub n, albo obie ilości razem, są liczbami ułamkowemi.

Przypuśćmy naprzód $m = \frac{p}{q}$, n całkowite; znajduje się:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = (\sqrt[q]{a^p})^n = \sqrt[q]{a^{pn}};$$

a ponieważ, według naszych ugód.

$$\sqrt[q]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{q}} = a^{\frac{p}{q}\times n},$$

więc ostatecznie $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = a^{\frac{p}{q}\times n}.$$

Przypuśćmy, przeciwnie, m całkowite a zaś $n = \frac{p}{q}$; ma się:

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}},$$

więc $$(a^m)^{\frac{p}{q}} = a^{m\times\frac{p}{q}}.$$

Przypuśćmy, nakoniec, $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$; będziemy mieli:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[qs]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}};$$

więc $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{s}{r}}.$$

108. UOGÓLNIENIE PRAWIDŁA NA WYKŁADNIKI PRZY WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW. Widzieliśmy (104) że, dla wartości całkowitych z m i n, znajduje się formuła

[4] $$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

formuła dowiedziona gdy n jest podzielném przez m, formuła ugody gdy dzielenie nie jest możebném.

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jedna z ilości m lub n, albo obie razem, są ułamkowemi.

Przypuśćmy naprzod m całkowitém, a zaś $n=\frac{p}{q}$; z łatwością znajduje się :

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}}=\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[mq]{a^p};$$

otóż według naszych ugód, $\sqrt[mq]{a^p}$ pisze się :

$$a^{\frac{p}{mq}} \quad \text{albo} \quad a^{\frac{p}{q}:m};$$

więc

$$\sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{p}{q}:m}.$$

Przypuśćmy, powtóre, $m=\frac{p}{q}$, n zaś całkowitém. Pierwiastek, mający za wskazówkę $\frac{p}{q}$ czyli będący stopnia $\frac{p}{q}$, z ilości a^n, jest liczbą której potęga $\frac{p}{q}$ równa się a^n. Oznaczmy tę liczbę przez x, tak że

$$x^{\frac{p}{q}}=a^n,$$

albo, co jest jednoznaczném

$$\sqrt[q]{x^p}=a^n.$$

Podnieśmy obie strony do potęgi q; potém wyciągnijmy z wypadków pierwiastek p, będziemy mieli koleją :

$$x^p=a^{nq}, \quad x=\sqrt[p]{a^{nq}}=a^{\frac{nq}{p}}=a^{n:\frac{p}{q}};$$

więc

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^n}=a^{n:\frac{p}{q}}.$$

Przypuśćmy nakoniec $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{s}$; $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s}}}$, jest ilość x, której potęga $\frac{p}{q}$ równa się $a^{\frac{r}{s}}$; znajduje się:

$$x^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{r}{s}},$$

albo, co jest jednoznaczném,

$$\sqrt[q]{x^p}=\sqrt[s]{a^r}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi q, potém wyciągając z wypadków pierwiastek p, otrzymamy koleją:

$$x^p=\sqrt[s]{a^{rq}} \qquad x=\sqrt[ps]{a^{rq}}=a^{\frac{rq}{ps}}=a^{\frac{r}{s}:\frac{p}{q}};$$

więc
$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s}}}=a^{\frac{r}{s}:\frac{p}{q}}.$$

109. Uogólnienie w przypadku w którym wykładniki ułamkowe są odjemnemi. Przypuściliśmy, w tém co poprzedza, że liczby m i n są dodatne. Rozmaite formuły któreśmy uogólnili są jeszcze prawdziwe, gdy się przyznaje wykładnikóm ułamkowym wartości odjemne, byleby zgodzono się przedstawić przez symbol $a^{-\frac{p}{q}}$ wyrażenie $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ (87), albo, co jest zupełnie jednoznaczném, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ (104).

W rzeczy samej, jeżeli, dla wszelkich wartości dodatnych, całkowitych lub ułamkowych z m, znajduje się zawsze formuła

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m},$$

te rozumowania które nam posłużyły, w rozdziale poprzedzającym (88 — 91), do rozciągnienia formuł do przypadków gdzie wykładniki są całkowite i odjemne, zastosują się, bez zmian, do przypadków w których te wykładniki są ułamkowe i odjemne.

Uważmy że formuła [2] (106) o tyle tylko jest prawdziwą, dla $m < n$, o ile zostanie przyjętą nowa ugoda którąśmy dopiero przedstawili.

Jedno uogólnienie pozostaje do wykonania, w przypadku wyciągania pierwiastków. Dopierośmy dowiedli (108), dla wszelkich wartości dodatnych z m i z n, całkowitych albo ułamkowych, formułę

[4] $$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Ta formuła jest jeszcze prawdziwą, gdy jedna z ilości m lub n, albo obie razem, są odjemne.

Przypuśćmy naprzód n odjemném i równém $-n'$; gdy m pozostaje dodatném; znajduje się :

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n'}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^{n'}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^{n'}}} = \frac{1}{a^{\frac{n'}{m}}};$$

owóż, według naszych ugód, to ostatnie wyrażenie pisze się :

$$a^{\frac{-n'}{m}}, \quad \text{albo} \quad a^{-n':m};$$

więc $$\sqrt[m]{a^{-n'}} = a^{-n':m}.$$

Przypuśćmy potém m odjemném i równém $-m'$, n zaś dodatném; $\sqrt[-m']{a^n}$ jest ilością x, której potęga $(-m')$ równa się a^n. Tak więc

$$x^{-m'} = a^n, \text{ albo } \frac{1}{x^{m'}} = a^n, \text{ albo } x^{m'} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

a, następnie, $$x = \sqrt[m']{a^{-n}} = a^{\frac{-n}{m'}} = a^{n:-m'};$$

więc $$\sqrt[-m']{a^n} = a^{n:-m'}.$$

Przypuśćmy nakoniec $m = -m'$, $n = -n'$; $\sqrt[-m']{a^{-n'}}$ jestto ilość x, która, podniesiona do potęgi $(-m')$, wydaje $a^{-n'}$. Tym sposobem znajduje się

$$x^{-m'} = a^{-n'}, \quad \text{albo} \quad \frac{1}{x^{m'}} = \frac{1}{a^{n'}};$$

zkąd $$x^{m'} = a^{n'}.$$

Wyciąga się ztąd : $$x = \sqrt[m']{a^{n'}} = a^{\frac{n'}{m'}} = a^{\frac{-n'}{-m'}};$$

więc $$\sqrt[-m']{a^{-n'}} = a^{\frac{-n'}{-m'}}.$$

Słowem, wszystkie nasze formuły używane w mnożeniu, dzieleniu, podnoszeniu do potęg i wyciąganiu pierwiastków, są ogólne : rozciągają się one do wszelkich wartości dodatnych lub odjemnych, całkowitych albo ułamkowych, tak wykładników jak wskazówek.

110. « Rachunek wykładników ułamkowych, mówi *Lacroix*, jest » jednym z przykładów najznakomitszych, użyteczności dobrze wy- » branych znaków. Analogia istniejąca pomiędzy wykładnikami » ułamkowemi a wykładnikami całkowitemi, wskazuje prawidła » które należy przyjąć w rachunku pierwszych, jako dające się za- » stosować do rachunku drugich, gdy tymczasem trzeba prawideł » szczególnych do rachunku radykalów, ponieważ znak $\sqrt{}$ który je » wyraża nie ma żadnego związku z działaniem które je tworzy. » Im więcéj postępuje się w algebrze, tém lepiéj ocenia się liczne » korzyści które wydało w téj nauce oznaczenie wykładników..... »

Wykładniki odjemne zostały wprowadzone do algebry przed wykładnikami ułamkowemi; pierwsze odkrył *Michael Stifel* (1509-1567); wprowadzenie drugich sięga epoki prac *Szymona Stevin'a*, który w 1588 pisał $a\left(\frac{m}{n}\right)$ zamiast $a^{\frac{m}{n}}$.

U dawnych algebraistów, wyrażenia *funkcyi* i *godności* (dignitas) były synonimami *potęgi* (potentia); drugie dziś znikło z języka matematycznego, a pierwsze od czasu wystąpienia *Bernouilli'ego* (1690) zostało odwróconém od pierwotnego swego znaczenia.

ZASTOSOWANIA.

111. Zrobić wymiernym mianownik ułamku niewymiernego. Kiedy

mianownik ułamku zamyka jeden albo ilekolwiek radykalów, często jest pożytecznie, zwłaszcza przez wzgląd na przybliżenia liczebne, uwolnić go od tych radykalów, *robiąc go wymiernym*. Damy kilka przykładów.

1° Niech będzie $\frac{m}{\sqrt{a}}$; mnożąc oba wyrazy przez $\sqrt{a}$, 1° znajduje się:

$$\frac{m}{\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2° Niechaj będzie $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; mnożąc oba wyrazy przez $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; znajduje się:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

3° Podobnież:

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

4° Podobnież jeszcze:

$$\frac{m}{a\pm\sqrt{b}}=\frac{m(a\mp\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

5° Niech będzie $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; mnoży się oba wyrazy przez $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$; wtenczas, uważając $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ jako jedną ilość, widzimy że mianownik jest jeszcze wieloczynem z summy przez różnicę; i znajduje się:

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c-2\sqrt{ab}};$$

który to mianownik jako nie zamykający więcéj jak *jeden* radikal, jest przywiedzionym do czwartego przypadku.

Ktoby chciał skończyć rachunek, niech uważa trójmian $(a+b-c)$ jak jeden wyraz i niechaj pomnoży licznik i mianownik przez summę $(a+b-c)+2\sqrt{ab}$; wyrażenie staje się tym sposobem :

$$\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c+2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

w którém mianownik jest *wymiernym*.

6° Niech będzie jeszcze $\dfrac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}$; uważa się mianownik jako złożony z dwóch wyrazów $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ i $(c-\sqrt{d})$, i mnoży się przez ich różnicę. Znajduje się tym sposobem :

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{a}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-c+\sqrt{d})}{a+b-2\sqrt{ab}-c^2-d+2c\sqrt{d}}$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{d}-c)}{(a+b-c^2-d)-2\sqrt{ab}+2c\sqrt{d}};$$

otóż mianownik nie zamyka w sobie więcéj jak trzy wyrazy, a tak rozwiązanie jest przywiedzionóm do piątego przypadku.

7° Niech będzie teraz $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. Wiemy że

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\infty^3+\beta^3.$$

Mnoży się więc oba wyrazy przez $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, i znajduje się :

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}.$$

8° Podobnież :

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

ĆWICZENIA.

I. Uprościć wyrażenie

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

Znajduje się $$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

II. Sprawdzić że wartość

$$=\left[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

niszczy wyrażenie $$x^3+3px+2q,$$

jakiekolwiekbądz będą p i q.

III. Sprawdzić równość

$$\left[\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(a+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dosyć jest podnieść do kwadratu obie strony, dla otrzymania tosamości (identitas).

IV. Sprawdzić równość

$$\left\{\left[f+(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[f-(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2+2e$$

$$=\left\{e^3+2f^2+[(e^3+2f^2)^2-e^3]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{e^3+2f^2-[(e^3+2f^2)^2-e^3]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Dosyć jest wykonać kwadrat wskazany w pierwszéj stronie, dla otrzymania tosamości.

V. Sprawdzić równość

$$2^{\frac{1}{2}}\left[2f+(f^2-c^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[f-(f^2-c^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=(f+c)^{\frac{3}{2}}-(f-c)^{\frac{3}{2}}.$$

Położywszy $$f+c=a,\quad f-c=b,$$

te wyrażenia podstawi się w równości.

VI. Sprowadzić wyrażenie

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Znajdzie się $$4x\sqrt{x^2-1}.$$

VII. Uprościć wyrażenie

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Znajdzie się $$\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$$

VIII. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

Znajdzie się $$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

IX. Co się stanie z wyrażeniem

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},$$

gdy się w niém przypuścimy $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$?

Odpowiedź. Stanie się równém jedności.

X. Co się stanie z wyrażeniem

$$2\left(uv-\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1}\right)$$

gdy się w niém przypuści $2u = x + \frac{1}{x}$, $2v = y + \frac{1}{y}$?

Odpowiedź. Stanie się równém $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

XI. Co stanie się z wyrażeniem

$$2\left(uv - \sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1}\right),$$

w témże samém przypuszczeniu?

Odpowiedź. Stanie się równém $xy + \frac{1}{xy}$.

XII. Co stanie się z wyrażeniem

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

gdy się w niém przypuści $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$?

Odpowiedź. Stanie się równém $a + b$.

XIII. Co się stanie z wyrażeniem

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}},$$

gdy się w niém przypuści $x = \frac{2ab}{b^2+1}$,

Odpowiedź. Stanie się równém b.

XIV. Co stanie się z wyrażeniem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\right),$$

gdy się w niém przypuści $x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$,

albo
$$x=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}?$$

Odpowiedź. Stanie się
$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{p+q}{q-p}}$$

w pierwszym przypadku, a w drugim : $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$.

XV. Jeżeli wyrażenie

$$\frac{1.\,2.\,3.\ldots k}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+k)}\,k^{z} \qquad (\alpha)$$

oznaczymy przez $f(k, z)$,
to wyrażenie

$$\frac{n^{mn}\times f(k,z)\times f\left(k,z-\frac{1}{n}\right)\times f\left(k,z-\frac{2}{n}\right)\times\ldots\times f\left(k,z-\frac{n-1}{n}\right)}{f(nk,nz)}$$

jest niezależném od (ilości) z.

Nota. $f\left(k, z-\frac{\ }{n}\right)$ przedstawia wyrażenie (α), kiedy się w niém zastąpi z przez $z-\frac{p}{n}$: podobnież $f(nk, nz)$ przedstawia wyrażenie (α) gdy się w niém zastąpi k przez nk a x przez nz.

Robiąc podstawienia i uproszczenia, znajdzie się, na wartość drugiego (gdy się zastąpi k przez nk a z przez nz), wyrażenie,

$$\frac{n^{n}.\,(1.\,2.\,3.\ldots k)^{n}}{k^{\frac{n-1}{2}}.\,1.\,2.\,3.\ldots nk}.$$

ROZDZIAŁ VIII.

ZASADY OGÓLNE ZRÓWNAŃ DOTYCZĄCE.

DEFINICYE.

112. Równość. Dwie ilości rozłączone znakiem $=$ tworzą *równość*.

113. Tosamość. Nazywa się *tosamością* wyrażenie równości która ma miejsce pomiędzy dwiema ilościami liczebnemi, albo pomiędzy dwiema formułami, *niezależnie od wszelkiéj wartości szczególnej przyznawanéj literom które te formuły zamykają w sobie*.

Przykłady. $5=5, \quad 8=7+1,$

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

są tosamościami.

114. Zrównanie. Rozróżnia się szczególniéj, pod nazwiskiem *zrównania*, *równość która nie ma miejsca jak tylko dla pewnych wartości szczególnych liter zawartych w téj równości*, i która może, następnie, służyć na oznaczenie tych wartości.

Przykład. $3x-13=15-x$

jest zrównaniem : nie ma ono miejsca jak tylko dla wartości szczególnéj $x=7$.

W każdém zrównaniu wyrazy położone przed znakiem równości składają *stronę* albo *członek pierwszy* tego zrównania, a wyrazy po znaku składają *stronę* albo *członek drugi*.

Litery, których pewne wartości szczególne przekształcają zrównanie na tosamość, nazywają się *niewiadomemi* zrównania : a zaś te wartości szczególne stanowią *rozwiązania* czyli *pierwiastki* zrównania. Przedstawia się zwykle niewiadome (nieznane) przez ostatnie litery alfabetu x, y, z.....

Rozwiązać zrównanie, jestto oznaczyć jego pierwiastki. Mówi się że pierwiastki zrównania *sprawdzają* to zrównanie lub *zadosyć czynią* temu zrównaniu, ponieważ te pierwiastki, przez podstawienie każdego z nich koleją na miejscu ilości nieznanéj w zrównaniu, przekształcają wprost wzięte pod uwagę zrównanie na tyleż, odpowiednich jego pierwiastkom tosamości.

115. Zrównania równoważne. Mówi się że dwa zrównania są *równoważne*, gdy wszelkie wartości niewiadomych które zadosyć czynią jednemu z nich, zadosyć czynią zarówno drugiemu, i odwrotnie.

Można zawsze zastąpić jakiekolwiek zrównanie przez inne zrównanie całkiem z poprzedniém równoważne.

116. Zrównania z jedną albo z ilakolwiek ilościami nieznanemi. Rozróżnia się zrównania według liczby nieznanych które te zrównania zamykają w sobie: tym sposobem ma się zrównania z jedną nieznaną x, z dwiema nieznanémi x i y, z trzema nieznanémi x, y, z, i tak daléj.

117. Układ zrównań. Rozumie się przez *układ zrównań*, zbiór ilukolwiek zrównań które muszą być sprawdzone jednocześnie.

Nazywa się *rozwiązaniem* układu, wszelki układ wartości, które, położone na miejscu ilości nieznanych, przekształcają zrównania na tosamości.

118. Układy równoważne. Dwa układy zrównań jednoczesnych są *równoważne*, gdy wszelkie wartości nieznanych które zadosyć czynią jednemu z nich, zadosyć czynią zarówno drugiemu, i odwrotnie.

Jeżeli dwa układy są równoważne, można zawsze podstawić jeden układ za drugi.

Twierdzenie I.

119. *Powiększając lub zmniejszając o tę samą ilość obie strony zrównania, otrzymuje się drugie zrównanie równaważne pierwszemu.*

Na przykład, jeśli wartości $x=2$, $y=4$ sprawdzają zrównanie

$$(1)\qquad y^2+2x^2-4x=3xy-2y,$$

te same wartości sprawdzają także zrównanie

$$(2)\qquad (2x-1)+(y^2+2x^2-4x)=(3xy-2y)+(2x-1),$$

i odwrotnie.

W rzeczy saméj, z założenia, dwie strony zrównania (1) sprowadzają się do dwóch liczb równych dla

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=4;$$

dodając do tych liczb równych wartość odpowiednią z $(2x-1)$, znajdzie się dwie summy równe; a ponieważ te summy są wartościami liczebnemi dwóch członków zrównania (2) dla

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=4,$$

przeto zrównanie (2) jest sprawdzoném przez

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=4.$$

Twierdzenie odwrotne dowodzi się tak samo.

Inne dowodzenie. Przedstawmy przez A i B dwie strony jakiegokolwiek zrównania,

$$[3]\qquad \mathrm{A}=\mathrm{B};$$

i dodajmy po obu stronach tę samą ilość m; będziemy mieli :

$$[4]\qquad \mathrm{A}+m=\mathrm{B}+m.$$

Wszelkie rozwiązanie zrównania [3] daje, z założenia, dla A i dla B, wartości liczebne równe : więc jeżeli doda się do tych wartości wartość liczebną odpowiednią z m, otrzymuje się liczby równe. Otóż te liczby są wartościami liczebnemi dwóch stron zrównania [4]. Więc wszelkie rozwiązanie zrównania [3] sprawdza zrównanie [4].

I odwrotnie, wszelkie rozwiązanie zrównania [4] daje dla $(\mathrm{A}+m)$

i dla $(B+m)$ wartości liczebne równe : więc gdy się odejmie od tych wartości, wartość liczebną odpowiednią z m, reszty są równe : otóż te reszty są wartościami liczebnemi z A i B. Więc wszelkie rozwiązanie zrównania [4] sprawdza zrównanie [3].

Dwa zrównania są więc równoważne.

120. Wniosek I. Przełożenie wyrazów. *Chcąc jaki wyraz w zrównaniu przenieść z jednego członka w drugi, trzeba go w pierwszym zmazać a w drugim napisać ze znakiem przeciwnym.*

Niech będzie zrównanie

$$6x-7=13+2x.$$

Dodając 7 po obu stronach zrównania, otrzymamy

$$6x=13+2x+7;$$

wyraz 7, który miał znak — w pierwszym członku, jest przeniesionym do drugiego członka ze znakiem $+$. Podobnież, jeżeli odejmiemy $2x$ po obu stronach, zrównanie staje się

$$6x-2x=13+7;$$

wyraz $2x$, który miał znak $+$ w drugim członku, jest przeniesionym do pierwszego ze znakiem — .

To działanie nosiło, u Arabów, imię *aljabar* (które znaczy *przywrócenie* i wymawia się *algabar*); zkąd powstało prawdopodobnie nazwisko *algebry*.

121. Wniosek II. *Można odmienić jednocześnie znaki wszystkich wyrazów zrównania.* Gdyż to przywodzi się do przełożenia wszystkich wyrazów pierwszego członka w drugi, i wszystkich wyrazów drugiego w pierwszy.

Przykład. Niech będzie zrównanie

$$3-x=15-2x.$$

Gdy przeniesiemy w drugi członek wszystkie wyrazy pierwszego i odwrotnie, to zrównanie staje się

$$2x-15=x-3,$$

albo, przekładając dwie strony

$$x - 3 = 2x - 15;$$

widzimy że wszystkie wyrazy zrównania odmieniły swe znaki.

Uwaga. Przenosi się często wszystkie wyrazy zrównania na pierwszą stronę; tak więc zrównanie

$$5x - 4y = 10 \quad \text{napisze się} \quad 5x - 4y - 10 = 0.$$

I ogólnie, przeniosłszy wszystkie wyrazy zrównania na jedną stronę, strona druga będzie równa zeru; to jest zrównanie przyjmie postać $A = 0$, gdzie A zawiera wszystkie ilości do zrównania wchodzące. Takowego sposobu wystawiania zrównań będziemy najczęściej używali w dalszych naszych dociekaniach.

Twierdzenie II.

122. *Mnożąc albo dzieląc obie strony zrównania przez tę samą ilość, któréj wartość nie jest zerem, otrzymuje się zrównanie równoważne pierwszemu.*

Dla dowodzenia tego, niech będzie zrównanie dane:

$$[1] \qquad A = B;$$

rozmnożywszy obie strony przez m; będziemy mieli:

$$[2] \qquad Am = Bm.$$

Otóż wszelkie rozwiązanie zrównania [1] daje dla A i dla B wartości liczebne równe: więc gdy rozmnoży się te wartości przez wartość liczebną odpowiednią z *m, która nie jest zerem* wieloczyny będą rowne. A że, te wieloczyny są wartościami odpowiedniemi dwóch członków zrównania [2]: więc, ponieważ są równe, wszelkie rozwiązanie zrównania [1] jest rozwiązaniem zrównania [2].

I odwrotnie, wszelkie rozwiązanie zrównania [2] daje wartości równe dla Am i dla Bm: więc gdy podzieli się te dwie liczby przez wartość odpowiednią z *m, która nie jest zerem*, ilorazy są równe; a gdy te ilorazy są wartościami liczebnemi z A i B, więc wszelkie rozwiązanie zrównania [2] jest rozwiązaniem zrównania [1].

Tak więc, dwa zrównania te są równoważnemi.

123. WNIOSEK. To twierdzenie pozwoli *przywieść do formy całkowitéj, wszelkie zrównanie zawierające mianowniki.*

Jakoż, oczywista że mianowniki znikną gdy się pomnoży wszystkie wyrazy zrównania przez najmniejszy wielokrotnik spólny z tychże mianowników. Tym sposobem zrównanie

$$[3] \qquad \frac{x(a+b)}{a} + \frac{b(x-a)(b-2a)}{a^2-b^2} = 3(a-x) + \frac{(a-b)^2}{a+b},$$

pomnożone przez

$$a(a^2-b^2),$$

przyjmie postać

$$[4] \qquad \begin{cases} (a+b)(a^2-b^2)x + ab(b-2a)(x-a) \\ = 3a(a^2-b^2)(a-x) + a(a-b)^3. \end{cases}$$

124. SCHOLIA (OBJAŚNIENIE GŁÓWNE). Kiedy mianownik spólny, którego zniesienie uczyni zrównanie całkowitém, jest liczbą, zrównanie przekształcone jest, według tego co poprzedza, zupełnie równoważnem danemu. Toż samo jeszcze powinno miéć miéjsce, gdy mianownik jest ilością algebraiczną niezawierającą niewiadomych, byleby podstawienie liczb na miejscu liter nie przywiodło poźniéj wartości tego czynnika do zera. Tym sposobem zrównanie [4] będzie zastępowało zrównanie [3] dopóki tylko będzie dawaną dla a, wartość różna od *zera* i od b.

Gdy się mnoży obie strony zrównania A = B *przez ilość* C *zawierającą w sobie jedną lub ilekolwiek niewiadomych, zrównanie wypadkowe*

$$AC = BC, \quad \text{albo} \quad (A-B)C = 0,$$

jest sprawdzoném, bądź przez

$$C = 0,$$

bądź przez

$$A - B = 0$$

tak że *przyjmuje nie tylko rozwiązania zrównania danego, lecz jeszcze pierwiastki zrównania które się otrzymuje równając z zerem mnoznik* C.

Na przykład, zrównanie

$$(x - 2)(3x - 4) = 3(x - 2),$$

jest więcej ogólném jak zrównanie

$$3x - 4 =$$

albowiem sprawdza się przez

$$x = 2 \quad \text{i} \quad x = \frac{7}{3}.$$

gdy tymczasem dane (zrównanie) nie przyjmuje jak tylko sam pierwiastek $x = \frac{7}{3}$.

Wynika ztąd że jeżeli mianownik spólny, którego zniesienie przywodzi zrównanie całkowite, zawiera w sobie niewiadome, zrównanie przekształcone nie może być dopóty równoważném danemu, dopóki żaden z jego pierwiastków nie niszczy mianownika. Należy więc, po rozwiązaniu zrównania, odrzucić jako *obce* (to jest jako wprowadzone przez rachunek), rozwiązania które sprowadzając ten mianownik do zera, nie sprawdzają zrównania pierwotnego.

Tym sposobem zrównanie

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

będące przekształceniem zrównania

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3(1-x)} - 2,$$

przyjmuje za pierwiastki liczby 1 i 6; lecz rozwiązanie 1 powinno być odrzuconém jako sprowadzające do zera mianownik $3(x-1)$.

Wszelako, kiedy się otrzymuje zrównanie całkowite mnożąc zrównanie jakiekolwiek ułamkowe przez *najmniejszy wielokrotnik spólny* wszystkich jego mianowników, zrównanie przekształcone nie przyjmuje najczęściéj innych pierwiastków jak tylko same pierwiastki zrównania danego.

Twierdzenie III.

125. *Powiększa się w ogólności liczba rozwiązań zrównania, podnosząc ie jego strony do tejże saméj potęgi.*

Tym sposobem zrównanie

$$A^2 = B^2$$

jest więcéj ogólném jak zrównanie

$$A = B;$$

gdyż jest równoważném ze zrównaniem

$$A^2 - B^2 = 0,$$

albo $$(A + B)(A - B) = 0,$$

które się sprawdza, bądź przez

$$A + B = 0,$$

bądź też przez

$$A - B = 0:$$

tak że zrównanie

$$A^2 = B^2$$

zawiera jednocześnie rozwiązania zrównań

$$A = B \quad \text{i} \quad A = -B.$$

W ogólności, zrównanie

$$A^m = B^m \quad \text{albo} \quad A^m - B^m = 0$$

jest równoważném ze zrównaniem

$$(A - B)(A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1}) = 0,$$

a, następnie, zamyka nie tylko rozwiązania zrównania

$$A - B = 0 \quad \text{albo} \quad A = B,$$

lecz jeszcze rozwiązania sprowadzające do zera drugi czynnik

$$A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1} = 0.$$

126. Wniosek. Kiedy, dla zrobienia zrównania wymierném, odosobnia się radykal i gdy się potem obie strony podnosi do kwadratu, zrównanie nowe jest więcéj ogólném jak dawne.

I tak, niech będzie zrównanie

$$(1) \qquad 5 + \sqrt{5 - x} = x.$$

Odosobniając radykal, potém podnosząc do kwadratu rezultat

$$\sqrt{5 - x} = x - 5,$$

otrzymuje się

$$(2) \qquad 5 - x = x^2 - 10x + 25.$$

Otóż można sprawdzić że pierwiastki $x = 4$ i $x = 5$ zadosyć czynią temu zrównaniu, gdy tymczasem pierwszy związek nie sprawdza się jak tylko przez samą wartość $x = 5$.

Pochodzi to ztąd właśnie że ostatnie zrównanie jest zarówno kwadratem z wyrażenia

$$-\sqrt{5 - x} = x - 5,$$

które się sprawdza przez $x=4$, jak kwadratem z wyrażenia

$$+\sqrt{5-x}=x-5.$$

którego pierwiastkiem jest 5.

Bądź co bądź, podstawia się często za zrównanie niewymierne, zrównanie wymierne które się otrzymuje podnosząc obie strony pierwszego do téjże saméj potęgi, po odosobnieniu radykala. Lecz trzeba potém szukać, przez podstawienie, jakie są pierwiastki zrównania przekształconego które zadosyć czynią danemu, a odrzucić inne pierwiastki. Tym sposobem postępując, w przykładzie poprzedzającym sam tylko pierwiastek 5 został przyjętym.

Twierdzenie IV.

127. *Można podstawić za jedno jakiekolwiek zrównanie układu, inne zrównanie utworzone przez połączenie pierwszego, za pomocą dodawania albo odciągania, z jednym lub z ilukolwiek zrównaniami pierwotnemi.*

Na przykład, układ

$$(1)\qquad \begin{cases} A=A', \\ B=B', \\ C=C', \\ D=D', \\ E=E'. \end{cases}$$

jest równoważnym z układem

$$(2)\qquad \begin{array}{r} A=A', \\ B=B', \\ C+A-E=C'+A'-E', \\ D=D' \\ E=E'. \end{array}$$

W rzeczy saméj, wszelkie rozwiązanie układu (1) daje, z założenia, wartości liczebne równe dla obu członków każdego ze zrównań tego układu : więc pozwoli oczywiście nabyć téj saméj wartości liczebnéj dwóm członkom zrównania

$$C+A-E=C'+A'-E';$$

a więc to rozwiązanie sprawdza układ (2).

I odwrotnie, wszelkie rozwiązanie układu (2) robiąc równemi wartości liczebne z A i z A′, jakoteż z E i z E′, robi równemi wartości liczebne z A — E i z A′ — E′; a ponieważ sprawdza, z założenia, zrównanie

$$C + A - E = C' + A' - E',$$

więc musi koniecznie zrobić równemi wartości liczebne z C i z C′. Więc sprawdza układ (1).

128. Scholia. Dowodzenie poprzedzające jest niezależném od liczby niewiadomych, jakoteż od kształtu i liczby zrównań. Co większa, ponieważ zrównanie nie zmienia się przez wprowadzenie tego samego czynnika po obu jego stronach, *można, przed połączeniem zrównań układu przez dodawanie i odciąganie pomnożyć je przez liczby jakiekolwiek.*

Uogólnienie. Wiadomo że można pomnożyć obie strony zrównania przez tę samą ilość różną od zera.

Więc układ (1) jest równoważnym następnemu:

$$\left\{\begin{array}{c} nA = nA' \\ B = B' \\ mC = mC' \\ D = D' \\ pE = pE' \end{array}\right\} \text{ a więc także układowi } \left\{\begin{array}{c} nA = nA' \\ B = B' \\ mC + nA - pE = mC' + nA' - pE' \\ D = D' \\ pE = pE'; \end{array}\right.$$

albo nakoniec układ (1) jest równoważny z układem w ten sposób przekształconym:

$$\left\{\begin{array}{c} A = A' \\ B = B' \\ mC + nA - pE = mC' + nA' - pE' \\ D = D' \\ E = E'; \end{array}\right.$$

to jest że *przed dodawaniem lub odciąganiem ilukolwiek zrównań stro-*

nami, można je pomnożyć przez liczby jakiekolwiek. Co było do dowodzenia.

Twierdzenie V.

129. *Kiedy jedno ze zrównań układu, jest rozwiązaném względem jakiéjkolwiek niewiadoméj, można zastąpić tę niewiadomą przez iéj wartość w innych zrównaniach.*

I tak, na przykład, układ

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{11 + 2y + 5z}{3}, \\ 5x + 3y = 7u + 47, \\ 11u - 2t + 4z = 9, \\ 8t = 5y + 25, \\ 2x = 13u = 5, \end{cases}$$

jest równoważny z układem

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{11 + 2y + 5x}{3}, \\ 5\,\dfrac{11 + 2y + 2x}{3} + 3y = 7u + 47, \\ 11u - 2t + 4z = 9, \\ 8t = 5y + 25, \\ 2\,\dfrac{11 + 2y + 2x}{3} - 13u = 5. \end{cases}$$

W rzeczy saméj, aby grupa wartości

$$x = 9, \quad y = 3, \quad z = 2, \quad u = 1, \quad t = 5,$$

sprawdzająca układ (1), zadosyć czyniła układowi (2), potrzeba i wystarcza aby wyrażenie $\dfrac{11 + 2y + 5z}{3}$ przedstawiało dla tych wartości tę samą liczbę jak x (tu 9). Otóż ten warunek jest oczywiście dopełnionym, ponieważ zrównanie $x = \dfrac{11 + 24 + 5z}{3}$ stanowi część pierwszego układu.

Dowiodłoby się podobnież że wszelkie rozwiązanie zrównań układu (2) zadosyć czyni zrównaniom układu (1).

Dowodzenie jest niezależném od liczby niewiadomych, jakoteż od liczby i kształtu zrównań.

Inne dowodzenie,

Potrzeba dowieść że układ

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \mathrm{A}, \\ \mathrm{B} = \mathrm{B}', \\ \mathrm{C} = \mathrm{C}', \\ \mathrm{D} = \mathrm{D}', \\ \mathrm{E} = \mathrm{E}', \end{array} \right.$$

w którym B, B′, C, C′, D, D′, E, E′, zawierają wszystkie nieznane w sposób jakikolwiek, A zaś może zawierać wszystkie nieznane prócz x. jest równoważnym z układem

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \mathrm{A}, \\ \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}'_1 \\ \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}'_1 \\ \mathrm{D}_1 = \mathrm{D}'_1 \\ \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}'_1 \end{array} \right.$$

w którym B_1, B'_1, C_1, C'_1, D_1, D'_1, E_1, E'_1, są wyrażeniami otrzymanemi w skutek zastąpienia x przez A w wyrażeniach B, B′, C, C′, D, D′, E, E′.

W rzeczy saméj, ponieważ wszelkie rozwiązanie układu [3] robi równemi, z założenia, wartości liczebne z x i z A, wolno więc zastąpić x przez A w zrównaniach następnych : otóż te rezultata równe, które się otrzymuje tym sposobem, są wartościami liczebnemi członków zrównań układu [4]. Więc ten ostatni układ jest sprawdzonym przez rozwiązanie pierwszego. I odwrotnie, wszelkie rozwiązanie układu [4] robiąc x równém A, wolno jest zastąpić A przez x w zrównaniach następnych, co nas przywodzi do układu [3].

Dwa układy te są więc równoważnemi.

130. Definicya eliminacyi czyli rugowania. Kiedy, w zrównaniach $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, $E = E'$, zastępuje się x przez A, to niewiadoma ta znika ze zrównań. Mówi się natenczas że ta nieznana jest *wyrugowaną*. W ogólności, *wyrugować* jedną z nieznanych pomiędzy m zrównaniami, jestto zastąpić układ dany przez inny z pierwotnym równoważny, w którym $(m - 1)$ zrównań nie zawierają więcéj (w sobie) téj niewiadoméj.

WIADOMOŚCI WSTĘPNE O NIERÓWNOŚCIACH.

131. Definicya. Mówi się że liczba A jest większą jak liczba B, jakiekolwiekbądź są ich znaki, kiedy różnica $(A - B)$ jest dodatną.

132. Wnioski : 1° *Liczba dodatna jakakolwiek jest większą jak liczba odjemna jakakolwiek*. I tak :

(1) $$1 > -8;$$

gdyż różnica $1 - (-8)$ jest (42) równą $1 + 8$: a więc jest dodatną.

2° *Liczba odjemna jest tém większą im jéj wartość bezwzględna jest mniejszą*. I tak :

(2) $$-7 > -31;$$

gdyż różnica $-7 - (-31)$ jest (42) równą $+31 - 7$; a więc jest dodatną.

3° *Potrzeba uważać zero jako większe niż wszelka liczba odjemna*. I tak :

(3) $$0 > -5;$$

gdyż różnica $0 - (-5)$ jest (42) równą $0 + 5$; a więc jest dodatną.

Zkąd wypada że jeżeli napisze się liczby tak dodatne jak odjemne sposobem następującym :

$$-\infty, \ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \infty,$$

liczba jakakolwiek, wzięta w tym ciągu, jest większą jak wszelka liczba położona po lewéj stronie, a mniejszą jest wszelka liczba położona po prawéj stronie.

Oczywiście że liczby dodatne i odjemne mogą wzrastać bezwzględnie aż do nieskończoności. Wyraża się *nieskończoność* przez znak liczebny ośm leżący poziomo ∞.

Wyraża się zwykle że liczba A jest dodatną, i że liczba B jest odjemną, przez formuły :

$$A > 0, \quad B < 0.$$

131. *Można niezmieniając kierunku nierówności, powiększyć lub zmniejszyć obie jéj strony o tę samą ilość.*

W rzeczy saméj, nierówność $A > B$, daje $A = B + p$, gdzie p jest liczbą dodatną; a dodając C po obu stronach téj nierówności, znajduje się

$$A + C = B + C + p, \quad \text{albo} \quad A + C > B + C.$$

132. Dowiedzie się podobnym sposebem że :

Nie zmienia się kierunek nierówności mnożąc lub dzieląc obie jéj strony przez tę samą liczbę dodatną.

Zmienia się kierunek nierówności mnożąc lub dzieląc obie jéj strony przez liczbę odjemną.

Summa ilukolwiek nierówności w tym samym kierunku jest nierównością tegoż samego kierunku jak nierówności dane.

Wieloczyn z ilukolwiek nierówności w tym samym kierunku jest nierównością tegoż samego kierunku jak pierwsza, kiedy strony nierówności danych są wszystkie liczbami dodatnemi; bez téj restrykcyi, to jest stosując to twierdzenie do nierówności których strony są odjemne, mogłoby się być przywiedzionym do wypadków niedorzecznych; i tak nierówności $10 > 6$, $-3 > -4$ dałyby $-30 > -24$, rezúltat fałszywy.

Gdy dwie liczby odjemne są nierównemi, ich kwadraty tworzą nierówność w kierunku przeciwnym. I tak $-a > -b$, pociąga za sobą $a < b$, zkąd wynika $a^2 < b^2$ albo $(-a)^2 < (-b)^2$.

Zasady względem nierówności wraz z ich zastosowaniem w jednym z następnych rozdziałów dokładnie rozwiniemy.

ĆWICZENIA.

I. Jeżeli x^2+2ay^2 jest kwadratem, x^2+ay^2 jest summą dwóch kwadratów.

II. Związki (relacye)

$$2(ab+pq)=(a+b)(p+q), \qquad 2(ac+rs)=(a+c)(r+s),$$

$$2(ad+pq)=(c+d)(p+q), \qquad 2(bd+rs)=(b+d)(r+s),$$

pociągają za sobą

$$2(rs+pq)=(r+s)(p+q).$$

III. Kiedy w wielomianie

$$ax^2+2bxy+cx^2,$$

położy się

$$x=\alpha X+\alpha' Y, \qquad y=\beta X+\beta' Y,$$

ten wielomian przyjmuje kształt

$$AX^2+2BXY+CY^2;$$

wyrachować wyrażenie

$$\frac{B^2-4AC}{b^2-4ac}.$$

IV. Kiedy w wielomianie

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy,$$

położy się

$$x=\alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z,$$

$$y=\beta X+\beta' Y+\beta'' Z,$$

$$z=\gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z.$$

ten wielomian przyjmuje kształt

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + B''XY\ ;$$

wyrachować wyrażenie

$$\frac{AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2}{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2}\,.$$

ROZDZIAŁ IX.

ROZWIĄZANIA ZRÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

DEFINICYA.

133. Zowie się *stopniem* zrównania *całkowitego względem niewiadomych,* summa wykładników ilości niewiadomych wzięta z wyrazu w którym ta summa jest największą. I tak zrównanie

$$x^5 - 5x^3y^4 + 1506 = 0$$

jest stopnia 7.

Dla ocenienia stopnia zrównania, potrzeba naprzód przyrządzić dwie strony tego zrównania tak aby były całkowitémi względem ilości niewiadomych.

Nie będzie wzmianki, w tym rozdziale, jak tylko o zrównaniach stopnia pierwszego.

ROZWIĄZANIE ZRÓWNANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

134. Prawidło. *Chcąc rozwiązać zrównanie stopnia pierwszego z jedną ilością niewiadomą, znosi się wszystkie mianowniki; przenosi się wszystkie wyrazy zawierające x w jeden członek, a wszystkie wyrazy niezależne od x w drugi; potém wykonywa się uproszczenia i dzieli się przez spółczynnik niewiadoméj.*

Dowodzenie tego prawidła wynika z twierdzeń II i III rozdziału poprzedniego.

Pierwszy przykład. Zrównanie

$$\frac{37}{6}x - \frac{3}{8}x + \frac{317}{2} = \frac{49}{3}x + 19$$

rozmnożone przez najmniejszy wielokrotnik spólny mianowników

$$2^3 . 3$$

staje się

$$148x - 9x + 3804 = 392x + 456;$$

odosobnia się następnie wyrazy zawierające x, a wypadek

$$3804 - 456 = 392x + 9x - 148x$$

przywiedziony do kształtu prostszego

$$3348 = 253x,$$

daje dla x wartość

$$x = \frac{3348}{253} = 1 + \frac{59}{253} .$$

Wszystkie te zrównania koleją po sobie następujące są równoważnemi między sobą; a więc ostatnie jest równoważném pierwszemu. Otóż, ostatnie zrównanie jest sprawdzoném, gdy się w niém zastępuje x przez $13 + \frac{59}{253}$: i nie ma innego rozwiązania. Więc zrównanie pierwsze przyjmuje rozwiązanie $13 + \frac{59}{253}$, i nie przyjmuje innego.

Sprawdza się rozwiązanie, zastępując x przez $\frac{3348}{253}$ w zrównaniu daném; dwie strony tego zrównania stają się liczebnie równemi.

Drugi przykład. Spółczynniki mogą być algebraicznemi. Niech będzie zrównanie

$$[1] \qquad \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} = 3cx + \frac{b}{a}x - \frac{3abc}{a+b}.$$

Mnoży się wszystkie wyrazy przez $a(a+b)^3$, najmniejszy wielokrotnik spólny mianowników : zrównanie nowe :

$$[2] \qquad (2a+b)b^2(a+b)x + a^3b^2$$
$$= 3ac(a+b)^3x + b(a+b)^2x - 3a^2bc(a+b)^2$$

jest równoważném pierwszemu, byleby nadal nie robiono przypuszczenia $a=0$, albo przypuszczenia $b=-a$, z których każde niszczy mnożnik (124).

Potém przenosi się wyrazy nieznane w jeden członek a wyrazy znane w drugi. Zrównanie

$$[3] \qquad a^3b^2 + 3a^2bc(a+b)^2$$
$$= 3ac(a+b)^3x + b)(a+b)^3x - (2a+b)b^2(a+b)x$$

jest równoważne drugiemu.

Daléj kładzie się x na czynnik spólny w drugim członku, co daje:

$$a^3b^2 + 3a^2bc(a+b)^2 = [3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)b^2(a+b)]x,$$

i dzieli się obie strony przez spółczynnik z x. Otrzymuje się tym sposobem nowe zrównanie :

$$[4] \qquad x = \frac{a^3b^2 + 3a^2bc(a+b)^2}{3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)b^2(a+b)},$$

które będzie równoważne z innemi, jeśli jakiekolwiek przypuszczenie nie zniszczy mianownika.

Otóż, licznik jest równy $a^2b\{ab + 3c(a+b)^2\}$. Dwa ostatnie wyrazy mianownika mogą się napisać

$$b(a+b)\{(a+b)^2 - b(2a+b)\},$$

albo, uproszczając, $b(a+b)a^2$.

Więc mianownik będzie można napisać :

$$3ac(a+b)^3 + a^2b(a+b),$$

albo, kładąc $a(a+b)$ na czynnik spólny,

$$a(a+b)\{ab+3c(a+b)^2\}.$$

Więc nakoniec wartość z x może się napisać :

$$x=\frac{a^2b\{ab+3c(a+b)^2\}}{a(a+b)\{ab+3c(a+b)^2\}},$$

albo, znosząc czynniki spólne,

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Ponieważ mianownik formuły [4] staje się zerem, bądź dla $a=0$, bądź dla $b=-a$, bądź dla $c=-\frac{ab}{3(a+b)^2}$, należałoby się powstrzymać, w zastosowaniach, od tych trzech przypuszczeń.

Sprawdza się łatwo, że rozwiązanie znalezione zadosyć czyni zrównaniu [1].

ZRÓWNANIA KTÓRE SIĘ PRZYWODZĄ DO STOPNIA PIERWSZEGO.

135. Sposób któryśmy wyłożyli przyda się niekiedy dla zrównań stopni wyższych nad pierwszy.

Przykłady :

1° Gdyby zrównanie poprzedzające zawierało x^m albo $\sqrt[m]{x}$ zamiast x, otrzymałoby się, postępując sposobem wskazanym,

$$x^m=\frac{ab}{a+b}, \quad \text{zkąd} \quad x=\sqrt[m]{\frac{ab}{a+b}},$$

albo

$$\sqrt[m]{x}=\frac{ab}{a+b}, \quad \text{zkąd} \quad x=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^m.$$

2° Niech będzie zrównanie

$$\frac{7x^n}{x+1}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+1}}{x-1}.$$

Znosi się naprzód rozwiązanie $x=0$, dzieląc przez x^n; co równanie dane przywodzi do zrównania

$$\frac{7}{x+1}+\frac{3+6x^2}{x^2-1}=\frac{6x}{x-1},$$

które, rozmnożone przez x^2-1, staje się

$$7(x-1)+3+6x^2=6x(x+1)$$

albo

$$7x-7+3+6x^2=6x^2+6x,$$
$$x=4.$$

Sprawdzenie. W zrównaniu ułamkowém ale uproszczoném położywszy 4, zamiast x, będzie

$$\frac{7}{4+1}+\frac{3+6\times 4^2}{4^2-1}=\frac{6\times 4}{4-1};$$

a po wykonaniu działań wskazanych okaże się tosamość, $8=8$.

3° Weźmy jeszcze zrównanie

$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

gdzie $\sqrt{a^2+x^2}$ przedstawia liczbę dodatną.

Znieśmy mianownik, potém, po odosobnieniu radykala,

$$2x\sqrt{a^2+x^2}=3a^2-2x^2,$$

podnieśmy do kwadratu; rezultat uproszczony daje

$$16a^2x^2=9a^4,$$

zkąd

$$x = \pm \frac{3}{4} a.$$

Łatwo sprawdzić że sama tylko wartość $x = \frac{3}{4} a$ zadosyć czyni zrównaniu pierwotnemu; wprowadzono *rozwiązanie* obce $x = -\frac{3}{4} a$ wynosząc do kwadratu zrównanie dane.

UKŁAD DWÓCH ZRÓWNAŃ Z DWIEMA NIEZNANEMI.

136. Zrównanie stopnia pierwszego z dwiema nieznanémi x i y może mieć trojakiego gatunku wyrazy :

Wyrazy stopnia pierwszego względem x;
Wyrazy stopnia pierwszego względem y;
Wyrazy niezależne od x i od y.

Jeżeli więc, po zniesieniu mianowników, odosobnimy wyrazy całkiem wiadome w jednym członku, będziemy mieli po wykonaniu uproszczenia, zrównanie takie jak

$$4x + 3y = 24.$$

Lecz jedno zrównanie tego rodzaju nie wystarczy na oznaczenie x i y : widzimy w rzeczy saméj, kładąc je pod kształtem

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$

że wszelkiéj wartości dowolnéj danéj dla y, odpowiada wartość z x: zagadnienie jest więc nieoznaczoném, i potrzeba przybrać drugie zrównanie.

137. Pierwszy przypadek. Może się zdarzyć że jedno ze zrównań nie zawiera jak jedną z nieznanych. Niech będzie, na przykład, układ

$$\begin{cases} [1] \quad 4x + 3y = 24, \\ [2] \quad 2y = 8. \end{cases}$$

Zrównanie [2], niezawierające jak nieznaną y, dostarczy bezpośrednio jéj wartości, $y = \frac{8}{2} = 4$. Gdy się podstawi ta wartość w zrównaniu [1], to zrównanie staje się

$$4x + 12 = 24.$$

A ponieważ to ostatnie zamyka natenczas samą niewiadomą x, więc ono dostarczy także wartość, $x = 3$.

Te dwie wartości, $y = 4$, $x = 3$, sprawdzają oczywiście układ. Wreszcie nie może istnieć inne rozwiązanie; gdyż zrównanie [2] nie przyjmuje jak tylko rozwiązanie $y = 4$; i dla téj wartości, zrównanie [1] nie sprawdza się jak tylko przez $x = 3$.

Tak więc, aby rozwiązać układ, w tym przypadku szczególnym, *rozwięzuje się to ze zrównań które zawiera jedną tylko z nieznanych, podstawia się w drugiém zrównaniu wartość znalezioną dla téj nieznanéj, i rozwięzuje się zrównanie wypadkowe które dostarczy wartość drugiéj nieznanéj.*

138. Drugi przypadek. Dwa zrównania zawierają dwie nieznane. Przywodzi się ten przypadek do poprzedniego, rugując jedną z nieznanych pomiędzy dwoma zrównaniami (130). Można użyć wielu sposobów dla wykonania tego rugowania (eliminacyi).

Sposób rugowania przez podstawianie. Niech będą dwa zrównania

$$(1) \qquad \begin{cases} [1] & 4x + 3y = 24, \\ [2] & 5x - 2y = 7. \end{cases}$$

Można zastąpić zrównanie [1] przez zrównanie

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$

które się otrzymuje przenosząc $3y$ w drugi członek, i dzieląc potém obie strony przez 4: to się nazywa, *rozwiązać zrównanie względem* x. Układ (1) jest tym sposobem zastąpiony przez układ równoważny:

$$(2) \qquad \begin{cases} [3] & x = \frac{24 - 3y}{4} \\ [2] & 5x - 2y = 7. \end{cases}$$

Można teraz (rozd. VIII, tw. V) zastąpić x przez $\frac{24-3y}{4}$ w zrównaniu [2]; a otrzymuje się układ równoważny:

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{ll} [3] & x = \frac{24-3y}{4}, \\ [4] & \frac{5(24-3y)}{4} - 2y = 7, \end{array} \right.$$

I zrównanie [4] nie zawierające jak tylko nieznaną y, zostaje przywiedzioném do pierwszego przypadku. Rozwięzuje się więc to zrównanie: które daje

$$120 - 15y - 8y = 28;$$

zkąd się wyciąga, $y = 4$. A ta wartość, podstawiona w zrównaniu [3], daje $x = 3$. Te dwie wartości, $y = 4$, $x = 3$, tworząc rozwiązanie jedyne układu (3), dają tém samém zozwiązanie jedyne układu równoważnego (1).

Sposób jest ogólny, i prowadzi do prawidła następującego: *Rozwięzuje się jedno ze zrównań względem jednéj z nieznanych, i podstawia się jéj wartość w drugiém zrównaniu. Przez co to ostatnie zawierać będzie jedną tylko nieznaną; rozwięzuje się je, i otrzymuje się wartość téj nieznanéj. Potém podstawia się ta wartość w wyrażeniu pierwszéj nieznanéj, działanie które daje wartość téjze nieznanéj.*

139. Sposób rugowania przez porównanie. Niech będą dwa zrównania

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 24 \\ 5x - 2y = 7 \end{array} \right.$$

zawierające dwie ilości niewiadome x, y. Można wyciągnąć wartość x z każdego z nich; to proste przekształcenie dozwolone, daje układ równoważny

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{24-3y}{4} \\ x = \frac{7+2y}{5} \end{array} \right.$$

Zastępując drugie zrównanie przez różnicę obydwóch : otrzymamy nowy układ równoważny

$$\begin{cases} x = \dfrac{24 - 3y}{4} \\ 0 = \dfrac{24 - 3y}{4} - \dfrac{7 + 2y}{5}. \end{cases}$$

Drugie zrównanie można napisać

$$\frac{24 - 3y}{4} = \frac{7 + 2y}{5},$$

i powiedzieć że pochodzi z *porównania* dwóch wartości z x, przez wskazanie ich równości. Z czego wypada :

$$120 - 15y = 28 + 8y$$

$$92 = 23y$$

$$y = \frac{92}{23} = 4;$$

następnie, $x = 3$, jak uprzednio.

Ten sposób jest mało używany.

140. Sposób rugowania przez uproszczenie albo przez dodawanie i odciąganie. Oba poprzedzające sposoby mają tę niedogodność, że prowadzą do zrównań z mianownikami, od których je potém oswobadzać jeszcze musimy; ale bardzo dobrze służą podówczas, kiedy w zrównaniach z których się wydobywa wartość jakiéj ilości, ta ilość ma jedność za spółczynnik. Gdy zaś spółczynnik większy jest od jedności, lepiéj używać następującego sposobu zwanego *rugowaniem* (eliminacyą) *przez dodawanie lub odciąganie*. Weźmy jeszcze układ :

$$(1) \quad \begin{cases} [1] \quad 4x + 3y = 24, \\ [2] \quad 5x - 2y = 7. \end{cases}$$

Można zawsze zrobić równémi spółczynniki téj saméj nieznanéj w obydwóch zrównaniach; dosyć, na to, pomnożyć obie strony każdego przez spółczynnik który tę nieznaną poprzedza jako mnożnik w drugiém. I tak, mnożąc pierwsze zrównanie przez 2 a drugie przez 3, otrzymuje się (roz. VIII, tw. II) układ równoważny:

$$(2) \qquad \begin{cases} [3] \quad 8x + 6y = 48, \\ [4] \quad 15x - 6y = 21. \end{cases}$$

Dwa spółczynniki nieznanéj y stały się podówczas równemi ale z przeciwnemi znakami, a więc rugaje się ta nieznana dodając dwa zrównania. Tym sposobem postępując otrzyma się zrównanie

$$[5] \qquad 23x = 69,$$

które, połączone z jedném ze zrównań układu (2) albo, z jedném ze zrównań układu (1), utworzy układ (3) równoważny pierwszemu.

Zostajemy tym sposobem przywiedzeni do pierwszego przypadku (137). Wyciągnie się z [5] $x = 3$; a podstawiając tę wartość w jedném ze zrównań, w zrównaniu [1], na przykład, otrzyma się wartość $y = 4$.

Sposób ten jest ogólny i prowadzi do prawidła następującego: *Mnoży się każde ze zrównań przez spółczynnik który jedną z nieznanych poprzedza jako mnożnik w drugiém: dodaje się wtedy jedno do drugiego, albo odciąga się jedno od drugiego dwa zrównania wypadkowe, podług tego jak spółczynniki równe niewiadoméj branéj pod uwagę są ze znakami przeciwnemi albo tego samego znaku. Otrzymuje się tym sposobem jedno zrównanie z jedną nieznaną, które dostarczy wartości téj nieznanéj. Podstawiając tę wartość w jedném ze zrównań danych, wyciągniemy wartość drugiéj nieznanéj.*

141. Uwaga. Najczęściéj *spółczynniki niewiadoméj rugować się mającéj nie są pierwszemi między sobą*, natenczas, aby je zrobić równemi, szuka się ich najmniejszego wielokrotnika spólnego, potém mnoży się każde zrównanie przez wieloczyn z tych czynników tego najmniejszego wielokrotnika spólnego, których nie zamyka spółczynnik niewiadoméj w tém zrównaniu.

Przykład. Niech będzie układ:

$$(1)\quad \begin{cases} 60x - 17y = 146, \\ 48x + 13y = 170. \end{cases}$$

Spółczynniki niewiadoméj x rozebrane na czynniki dają:

$$60 = 5 \,.\, 3 \,.\, 2^2,$$

$$48 = 3 \,.\, 2^4.$$

Najmniejszy wielokrotnik spólny spółczynników z x jest więc

$$5 \,.\, 3 \,.\, 2^4;$$

przeto aby zrobić równemi te spółczynniki, wystarczy pomnożyć pierwsze zrównanie przez 2^2 a drugie przez 5; i znajduje się układ równoważny:

$$(2)\quad \begin{cases} 240x - 68y = 584, \\ 240x + 65y = 850; \end{cases}$$

a ponieważ spółczynniki z x mają ten sam znak, odciąga się pierwsze zrównanie od drugiego; co daje

$$133y = 266;$$

zkąd, $y = 2$: a, następnie, $x = 3$.

142. Druga uwaga. Kiedy, za pomocą sposobu poprzedzającego, znalezioną została wartość jednéj z nieznanych, *można szukać wprost wartości drugiéj nieznanéj tymże samym sposobem*, zamiast wyprowadzania jej z podstawienia.

I tak, w przykładzie poprzedzającym, dla otrzymania ilości x, potrzeba mnożyć pierwsze zrównanie przez 13 a drugie przez 17; co naprzód da:

$$780x - 221y = 1898,$$

$$816x + 221y = 2890;$$

a, dodając dwa wypadki, znajdzie się

$$1596x = 4788;$$

zkąd wyciągnie się : $x = 3.$

Ta wartość z x nie może się różnić od wartości którą dostarczyło podstawienie : gdyż, według rozumowań poprzedzających, układ (1) jest równoważnym któremukolwiek z dwóch układów,

$$(3)\qquad \begin{cases} y = 2, \\ 60x - 17y = 146, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3, \\ 60x - 17y = 146; \end{cases}$$

otóż każdy z tych ostatnich nie daje jak jedno rozwiązanie : jest więc koniecznem aby to rozwiązanie było tém samém dla tych dwóch układów.

143. Wniosek. Widzimy przeto oczywiście że w ogólności układ dwóch zrównań stopnia pierwszego z dwiema nieznanémi przyjmuje rozwiązanie *jedyne i oznaczone.*

144. Są jednak przypadki do których stosując *jakikolwiek sposób rugowania* nie można wcale znaleźć wartości odpowiednich dla x i dla y : tak, na przykład, zrównania

$$5x - 2y = 7,$$

$$15x - 6y = 23,$$

są nie do pogodzenia, czyli *nie dają się pojednać z sobą* (incompatibles). Widzimy w rzeczy samėj że, w jakiéjkolwiek liczbie położonéj na miejscu nieznanych, wartość liczebna pierwszego członka pierwszego zrównania będzie zawsze trzecią częścią wartości pierwszego członka drugiego, gdy tymczasem 7 nie jest trzecią częścią 23.

Wreszcie, działając przez podstawienie, znajdzie się równość niepodobna

$$15\,\frac{7+2y}{5} - 6y = 23,$$

albo

$$21 = 23,$$

któraby pokazała widocznie że zrównania pierwotne były sprzecznemi (contradictoires), gdyby ta sprzeczność już uprzednio nie została rozpoznaną.

145. Układ

$$5x - 2y = 7,$$

$$15x - 6y = 21$$

jest, przeciwnie, *nieoznaczonym*, bo gdy drugie zrównanie jest wieloczynem pierwszego przez 3, nie znajduje się rzeczywiście jak tylko jeden związek pomiędzy dwiema nieznanemi x i y.

Równie, wykonywając podstawienie, nie jestże się przywiedzionym do zastąpienia jednego ze zrównań danych przez tosamość (co stanowi *cechę główną nieoznaczoności*).

$$15\,\frac{7+2y}{5} - 6y = 21,$$

albo

$$21 = 21.$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU TRZECH ZRÓWNAŃ Z TRZEMA NIEZNANEMI.

146. Prawidło. *Aby rozwiązać układ* (1) *trzech zrównań z trzema nieznanémi* x, y, z, *ruguje się jednę z nieznanych*, z *na przykład, naprzód pomiędzy dwoma pierwszemi z trzech zrównań danych, potém pomiędzy ostatniém a jedném z dwóch innych,* używając, do tego, bądź to sposobu przez podstawienie (138), bądź to sposobu przez dodawanie i odciąganie (140). *Otrzymuje się tak postępując dwa zrównania z dwiema nieznanémi* x *i* y, *które, jako w związku będące z jedném ze zrównań danych, utworzą układ* (2) *równoważny pierwszemu.* Rozumowania, na wykazanie dowodu, są te same których niedawno użyliśmy. *Rozwięzuje się układ dwóch zrównań o dwóch nieznanych* x *i* y; *a podstawiając wartości znalezione dla tych nieznanych w jedném ze zrównań danych, otrzymuje się wartość na* z.

147. Przykład. Weźmy naprzód do rozwiązania układ

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=19, \\ 2x+5y+3z=21, \\ 3x-\ y+\ z=\ 4. \end{cases}$$

Dla zastosowania sposobu poprzedzającego, powinniśmy na przykład, wyciągnąć z jednego ze zrównań wartość jednéj nieznanéj, i podstawić ją w dwóch innych. A że można wybrać jedną którąkolwiek ze trzech ilości nieznanych i wyciagnąć jéj wartość z jednego jakiegokolwiek ze trzech zrównań danych, jest więc dziewięć sposobów rozpoczęcia rachunku; widzimy że jeden z najprostszych, w danym przykładzie, zależy od wzięcia wartości na y w trzeciém zrównaniu, gdyż tak postępując nie wprowadza się mianownika. Otrzymuje się:

$$y=3x+z-4;$$

a, przez *podstawienie* tego wyrażenia, dwa pierwsze zrównania stają się:

$$\begin{cases} 3x+2(3x+z-4)+4z=19, \\ 2x+5(3x+z-4)+3z=21; \end{cases}$$

albo, uproszczając,

$$\begin{cases} 9x+6z=27, \\ 17x+8z=41. \end{cases}$$

Te zrównania, rozwiązane podług sposobów wyłożonych (137 i 140) dają:

$$x=1, \quad z=3.$$

Potém te wartości, podstawione w wyrażeniu na y,

$$y=3x+z-4,$$

dają
$$y=2;$$

rozwiązanie szukane jest przeto,

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

Drugi przykład. Dajmy jeszcze do rozwiązania układ zrównań :

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0, \end{cases}$$

zastosujmy do tego układu drugi sposób rugowania (140). Ponieważ z nie ma spółczynnika, odciągnijmy koleją pierwsze zrównanie od każdego z dwóch innych; tym sposobem postępując otrzymamy dwa zrównania nowe, niezależne od z,

$$\begin{cases} b^3 - a^3 + (b^2 - a^2)x + (b - a)y = 0, \\ c^3 - a^3 + (c^2 - a^2)x + (c - a)y = 0. \end{cases}$$

Otóż pierwsze z tych równań jest podzielném przez $(b - a)$, drugie przez $(c - a)$; a więc, znosząc te czynniki, zrównania powyższe stają się :

$$\begin{cases} b^2 + ab + a^2 + (b + a)x + y = 0, \\ c^2 + ac + a^2 + (c + a)x + y = 0. \end{cases}$$

Chcąc je rozwiązać, można postępować daléj tymże samym sposobem ; odciągając pierwsze od drugiego znajduje się :

$$c^2 - b^2 + a(c - b) + (c - b)x = 0 ;$$

albo, dzieląc przez $(c - b)$,

$$c + b + a + x = 0.$$

Zkąd :

$$x = - a - b - c,$$

a, następnie,

$$y = -b^2 - ab - a^2 - (b+a)x = ab + ac + bc.$$

Nakoniec te wartości na x i na y, podstawione w wyrażeniu

$$z = -a^3 - a^2x - ay,$$

dają :

$$z = -a^3 + a^2(a+b+c) - a(ab+ac+bc) = -abc.$$

ROZWIĄZANIE JAKIÉJKOLWIEK LICZBY ZRÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

148. PRAWIDŁO OGÓLNE. *Dla rozwiązania liczby jakiéjkolwiek zrównań zawierających liczbę równą nieznanych, można wyciągnąć z jednego z nich wartość jednéj nieznanéj, i podstawić* (129) *tę wartość we wszystkich innych : te zrównania zawierają natenczas jednę nieznaną mniéj : a przeto dopełniając ich układ przez zrównanie które daje wyrażenie pierwszéj nieznanéj, otrzymuje się układ równoważny danemu.*

Można także wyrugować nieznaną pomiędzy jedném ze zrównań a wszystkiemi innemi, przez sposób dodawania i odciągania (140) *: otrzymuje się jeszcze układ równoważny* (127), *przydając do zbioru zrównań nowych zrównanie które służyło do wyrzucenia téj nieznanéj.*

We wszystkich przypadkach, rozwiązanie układu n *zrównań o* n *nieznanych przywiedzioném zostało tym sposobem do rozwiązania* (n — 1) *zrównań o* (n — 1) *nieznanych. Rozwiązanie tych ostatnich przywiedzie się tak samo do rozwiązania* (n — 2) *zrównań o* (n — 2) *nieznanych; i, tak daléj postępując ciągle, aż się z dwóch zrównań o dwóch nieznanych, utworzy naostatek jedno o jednéj nieznanéj.*

Układ równoważny układowi danemu zawierać będzie natenczas n *zrównań, tym sposobem złożonych : ostatnie nie będzie zawierało jak tylko jednę nieznaną,* (n — 1)^{te} *będzie zawierało oprócz téj nieznanéj drugą jeszcze,* (n — 2)^{te} *będzie zamykało te dwie nieznane i trzecią.....; nakoniec pierwsze będzie zamykało wszystkie nieznane. I oczywista że będzie można rozwiązać koleją wszystkie te zrównania poczy-*

nając od ostatniego i sięgając aż do pierwszego, i że się tym sposobem otrzyma wartości wszystkich nieznanych.

149. Przykład. Niech będzie układ

$$[1]\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4v = 30, \\ 2x - 3y + 5z - 2v = 3, \\ 3x + 4y - 2z - v = 1, \\ 4x - y + 6z - 3v = 8. \end{cases}$$

Pierwsze zrównanie, rozwiązane względem x, daje:

$$x = 30 - 2y - 3z - 4v;$$

a, podstawiając tę wartość w trzech innych, znajduje się:

$$[2]\qquad \begin{cases} 7y + z + 10v = 57, \\ 2y + 11z + 13v = 89, \\ 9y + 6z + 19v = 112. \end{cases}$$

Podobnież, pierwsze ze zrównań [2], rozwiązane względem z, daje:

$$z = 57 - 7y - 10v;$$

a, podstawiając tę wartość w dwóch innych:

$$[3]\qquad \begin{cases} 75y + 97v = 538, \\ 33y + 41v = 230. \end{cases}$$

Wyciąga się z ostatniego,

$$y = \frac{230 - 41v}{33};$$

a, podstawiając tę wartość w poprzedzającém,

$$[4]\qquad 126v = 504.$$

Tak więc układ równoważny układowi danemu jest utworzonym przez zrównania :

$$[5] \quad \begin{cases} x = 30 - 2y - 3z - 4v, \\ z = 57 - 7y - 10v, \\ y = \dfrac{230 - 41v}{33}, \\ 126v = 504. \end{cases}$$

Otóż ostatnie z tych zrównań daje $v = 4$. Ta wartość, podstawiona w poprzedzającém daje $y = 2$. Te dwie wartości, podstawione w drugiém, dają $z = 3$. A nakoniec te trzy wartości, podstawione w pierwszém, dają $x = 1$. Tak więc rozwiązanie jest $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $v = 4$.

150. Sposób Bezout'a. Rozwięzuje się także zrównania stopnia pierwszego *sposobem rugowania za pomocą spółczynników nieoznaczonych*, którego użycie jest często dogodniejsze. Weźmy n zrównań stopnia pierwszego o n nieznanych,

$$[1] \quad \begin{cases} ax + by + cz + \ldots = k \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots = k_{n-1}. \end{cases}$$

Dodając te zrównania, do siebie stronami, po ich pomnożeniu odpowiedniém, wyjąwszy pierwszego, przez liczby nieoznaczone $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; przyjdzie :

$$[2] \quad x(a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}) + y(b + b_1\lambda_1 + \ldots + b_{n-1}\lambda_{n-1})$$

$$+ z(c + c_1\lambda_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}) + \ldots = k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1};$$

i to zrównanie może (128) zastąpić jedno z danych, *jakiemikolwiek bądź byłyby liczby* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$.

Otóż możemy oznaczyć te liczby, tak ażeby spółczynniki nieznanych y, z,... były zerami, to jest żeby zrównania,

$$[3] \quad \begin{cases} b + b_1\lambda_1 + \ldots + b_{n-1}\lambda_{n-1} = 0 \\ c + c_1\lambda_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{-n1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

zostały sprawdzonemi; gdyż wystarczy, na to, rozwiązać $(n - 1)$ zrównań o $(n - 1)$ nieznanych.

Rozwiąże się więc układ [3].

Gdy się podstawi wtedy w zrównanie [2] wartości znalezione dla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, to zrównanie nie będzie zawierało więcéj jak jednę nieznaną x; gdyż się sprowadzi do

$$x(a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}) = k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}:$$

pozwoli więc oznaczyć wartość, która będzie :

$$x = \frac{k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}}{a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}};$$

po znalezieniu x, układ będzie zamykał tylko $(n - 1)$ nieznanych.

Sposób który wskazaliśmy pozwala, jak widzimy, rozwiązać n zrównań o n nieznanych, byleby umiano rozwiązać układ zawierający jednę nieznaną mniéj.

Ponieważ umiemy rozwiązać dwa zrównania z dwiema nieznanémi, możemy, według tego, rozwiązać układ trzech zrównań z trzema nieznanémi; a więc, układ czterech zrównań z czterema nieznanémi, i tak daléj. Otrzyma się tym sposobem, dla jakiejkolwiekbądź liczby zrównań danych, wartość każdéj nieznanéj.

151. Modyfikacya sposobu rugowania. Sposób *mnożników* dozwoli, wreszcie, otrzymać bezpośrednio każdą nieznaną, nie potrzebując rachować żadnéj innéj. Dosyć jest, na to, wykonać dla każdéj, to co się już zrobiło dla nieznanéj x. Jeśli chcemy otrzymać y, na przykład, porówna się z zerem spółczynniki $(n - 1)$ innych nieznanych; znajdzie się, rozwięzując te $(n - 1)$ zrównań, nowe wartości dla nieoznaczonych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; a, podstawiając te wartości w zrównaniu [2], otrzyma się zrównanie na y, które pozwoli oznaczyć wartość téj nieznanéj.

Wartości które się otrzymuje przez ten sposób dla x, y, z,... nie mogą się różnić od tych które zostały dostarczone za pomocą sposobu pierwszego. W rzeczy saméj, zrównanie [2] powinno być sprawdzoném, jakiemikolwiek byłyby liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; jest więc dozwoloném w tém zrównaniu zrobić przypuszczenia które niszczą wszystkie spółczynniki prócz jednego. Drugi sposób daje więc rozwiązanie szukane: a ponieważ to rozwiązanie jest jedyne, konieczna więc aby było tém samém jak to które otrzymaném zostało sposobem pierwotnym.

152. Przykład. Zastosujmy ten sposób do rozwiązania układu:

$$[1] \qquad \left\{\begin{array}{l} 3x - 4y + 5z = 9, \\ 7x + 2y - 10z = 18, \\ 5x - 6y - 15z = 6. \end{array}\right.$$

Mnoży się drugie zrównanie przez λ_1, trzecie przez λ_2, i dodaje się wieloczyny do pierwszego; tym sposobem znajdujemy:

$$[2] \qquad (3 + 7\lambda_1 + 5\lambda_2)x + (-4 + 2\lambda_1 - 6\lambda_2)y + (5 - 10\lambda_1 - 15\lambda_2)$$
$$= 9 + 18\lambda_1 + 6\lambda_2.$$

Dla otrzymania x, równa się zeru spółczynniki z y i z z; co daje:

$$\left\{\begin{array}{l} -4 + 2\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0, \\ \quad 5 - 10\lambda_1 - 15\lambda_2 = 0, \end{array}\right.$$

albo

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 2, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1. \end{array}\right.$$

Rozwięzując te dwa zrównania, znajduje się $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Podstawia się te wartości w zrównaniu [2]; to zrównanie staje się:

$$\left(3 + 7 - \frac{5}{3}\right)x = 9 + 18 - 2;$$

zkąd:

$$x = 3,$$

Dla otrzymania y, niszczy się spółczynniki z x i z z; co daje:

$$\begin{cases} 3+7\lambda_1+5\lambda_2=0, \\ 5-10\lambda_1-15\lambda_2=0. \end{cases}$$

Rozwięzując te dwa zrównania, znajduje się $\lambda_1=-\frac{14}{11}$, $\lambda_2=\frac{13}{11}$. Podstawia się te wartości w zrównaniu [2], które staje się:

$$\left(-4-\frac{28}{11}-\frac{78}{11}\right)y=9-\frac{252}{11}+\frac{78}{11};$$

zkąd:

$$y=\frac{1}{2}.$$

Nakoniec, dla otrzymania z, pisze się dwa zrównania,

$$3+7\lambda_1+5\lambda_2=0,$$

$$-4+2\lambda_1-6\lambda_2=0,$$

które, rozwiązane, dają $\lambda_1=\frac{1}{26}$, $\lambda_2=\frac{17}{26}$. Zrównanie [2] staje się, dla tych wartości:

$$\left(5-\frac{10}{26}+\frac{255}{26}\right)z=9+\frac{18}{26}-\frac{102}{26};$$

a zkąd:

$$z=\frac{2}{5}.$$

UPROSZCZENIA I RÓŻNE UWAGI.

153. Przypadek w którym wszystkie nieznane nie wchodzą razem we wszystkie zrównania. Może się zdarzyć że każde ze zrównań nie zamyka wszystkich nieznanych. Ta okoliczność skraca rachunek; gdyż można uważać jako wyrugowaną ze zrównania nieznaną której to zrownanie nie zawiera w sobie. Potrzeba wtedy poczynać działa-

nie od wyrugowania nieznanéj która wchodzi w najmniejszą liczbę zrównań.

Zastanówmy się, na przykład, nad układem

$$\left\{\begin{array}{ll} [1] & 9x - 2z + u = 41, \\ [2] & 7y - 5z - t = 12, \\ [3] & 4y - 3x + 2u = 5, \\ [4] & 3y - 4u + 3t = 7, \\ [5] & 7z - 5u = 11, \end{array}\right.$$

Widzimy że t nie wchodzi jak do dwóch zrównań : wyciąga się z [2] :

$$[2] \qquad t = 7y - 5x - 12\,;$$

i podstawia się tę wartość w [4], które zamienia się na :

$$[6] \qquad 24y - 15z - 4u = 43.$$

Przyłączając to zrównanie [6] do zrównań [1], [3] i [5], tworzy się układ czterech zrównań o czterech nieznanych x, y, z, u.

Otóż x nie wchodzi jak w zrównania [1] i [3]. Wyciąga się więc z [3]:

$$[3] \qquad x = \frac{4y + 2u - 5}{3}\,;$$

i podstawia się tę wartość w [1], które staje się :

$$[7] \qquad 12y - 2z + 7u = 56.$$

Przyłączając to zrównanie [7] do zrównań [5] i [6], otrzymuje się układ trzech zrównań o trzech nieznanych y, z, u.

Ponieważ y nie wchodzi tylko do zrównań [6] i [7] : przeto się wyciąga z [7] :

$$[7] \qquad y = \frac{2z - 7u + 56}{12}\,;$$

i podstawia się tę wartość w [6], które staje się

$$[8] \qquad 11z+18u=69.$$

To zrównanie i zrównanie [5] tworzą układ dwóch zrównań o dwóch nieznanych.

Wyciąga się z [5] : $u=\frac{7z-11}{5}$;

a, podstawiając tę wartość w równaniu [8], mamy:

$$11z+\frac{18(7z-11)}{5}=69,$$

zrównanie o jednéj nieznanéj, zkąd : $z=3$

Następnie zrównanie [5] daje : $u=2$;

późniéj zrównanie [7] daje : $y=4$;

potém zrównanie [3] daje : $x=5$;

i nakoniec zrównanie [2] daje : $t=1$.

154. Sposoby rugowania szczególne. Zdarza się niekiedy, że zrównania przedstawiają pewną symetryę względem nieznanych; natenczas można zwykle użyć sposobów prędszych i skuteczniejszych jak metody ogólne. Nie umiemy dać prawidła, w tym względzie, lecz możemy wskazać, za pomocą kilku przykładów, *sposoby szczególne* najwięcéj używane.

Przykład I. Niech będzie układ

$$\left\{\begin{array}{ll} [1] & x+y+z+t=a, \\ [2] & y+z+t+v=b, \\ [3] & z+t+v+x=c, \\ [4] & t+v+x+y=d, \\ [5] & v+x+y+z=e. \end{array}\right.$$

Widoczna że po dodaniu tych pięciu zrównań stronami, każda nieznana wchodzi 4 razy w summę; tak że, gdy się oznaczy przez s summę drugich członków, $(a+b+c+d+e)$, otrzyma się zrównanie :

$$4(x+y+z+t+v)=s,$$

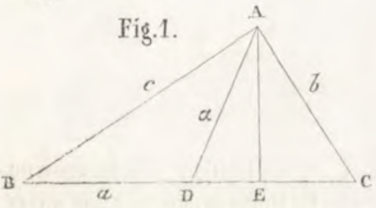
albo [6] $$x+y+z+t+v=\frac{s}{4}.$$

Tak więc summa pięciu nieznanych jest oznaczoną. A, ponieważ każde ze zrównań danych zamyka cztery z tych nieznanych, dosyć będzie odciągnąć je koleją od zrównania [6] dla otrzymania każdéj nieznanéj. Będzie więc :

$$v=\frac{s}{4}-a,\quad x=\frac{s}{4}-b,\quad y=\frac{s}{4}-c,\quad z=\frac{s}{4}-d,\quad t=\frac{s}{4}-e.$$

PRZYKŁAD II. *Wyrachować długości trzech boków trójkąta, znając długości linij łączących kazdy wierzchołek ze środkiem boku przeciwnego.*

Fig.1.



Oznaczmy przez a, b, c długości nieznane trzech boków, a przez α, β, γ długości *ośrodkowych* (médianes) odpowiednich. Geometrya dostarczy bezpośrednio trzy zrównania :

[1] $$b^2+c^2=2\alpha^2+\frac{a^2}{2},$$

[2] $$c^2+a^2=2\beta^2+\frac{b^2}{2},$$

[3] $$a^2+b^2=2\gamma^2+\frac{c^2}{2}.$$

Gdy się doda te trzy zrównania stronami, znajduje się :

$$2(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

zkąd łatwo wyciągnąć :

$$[4] \qquad a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Tak więc znaną jest summa kwadratów trzech boków. Jeżeli się odciągnie teraz zrównanie [1] od zrównania [4], b^2 i c^2 znikną; i otrzyma się :

$$a^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2\alpha^2-\frac{a^2}{2};$$

przenosząc niewiadomą na pierwszą stronę,

$$\frac{3a^2}{2}=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2\alpha^2,$$

znosząc mianowniki,

$$9a^2=8(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-12\alpha^2;$$

zkąd :

$$a^2=\frac{4}{9}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2).$$

Możnaby tak samo otrzymać b^2 i c^2, odejmując koleją zrównania [2] i [3] od zrównania [4]. Lecz jest daleko prostszém zauważyć, że się przechodzi ze zrównania [1] do zrównania [2], zmieniając b^2 na c^2, c^2 na a^2, a^2 na b^2, potém α^2 na β^2; otrzyma się więc wartość z b^2, stosując tę przemianę liter do formuły która daje a^2 ; tak postępując otrzymamy :

$$b^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2).$$

Znajdzie się podobnie :

$$c^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2),$$

Ponieważ kwadraty a^2, b^2, c^2, są znane, więc *i* boki tychże kwadratów, a, b, c, są, przez to samo, oznaczone.

Przykład III. Rozwiązać układ :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}, \\ &mx+ny+pz+qo=k. \end{aligned}\right.$$

Dowiedzioném zostało w ułamkach (92), że:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{mx+ny+pz+qv}{ma+nb+pc+qd};$$

otóż licznikiem ostatniego stosunku jest k; więc otrzyma się :

$$\frac{x}{a}=\frac{k}{ma+nb+pc+qd};$$

zkąd
$$x=\frac{ak}{ma+nb+pc+qd}.$$

Znajduje się, tak samo :
$$y=\frac{bk}{ma+nb+pc+qd};$$

$$z=\frac{ck}{ma+nb+pc+qd},$$

$$v=\frac{dk}{ma+nb+pc+qd}.$$

Przykład IV. Weźmy jeszcze układ :

[1] $$\left\{\frac{xyzv}{y+z+v}=a,\ \frac{xyzv}{x+z+v}=b,\ \frac{xyzv}{x+y+v}=c,\ \frac{xyzv}{x+y+z}=d.\right.$$

Gdy się wywróci każde z tych zrównań, biorąc licznik za mianownik, i *vice versa*, i gdy się uprości nowe ułamki, znajduje się :

$$\frac{1}{xzv}+\frac{1}{xyv}+\frac{1}{xyz}=\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{yzv}+\frac{1}{xyv}+\frac{1}{xyz}=\frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{yzv}+\frac{1}{xzv}+\frac{1}{xyz}=\frac{1}{c}, \quad \frac{1}{yzv}+\frac{1}{xzv}+\frac{1}{xyv}=\frac{1}{d}.$$

Te cztery zrównania dodane stronami, dają :

$$\frac{3}{yzv}+\frac{3}{xzv}+\frac{3}{xyv}+\frac{3}{xyz}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};$$

zkąd [3] $$\frac{1}{yzv}+\frac{1}{xzv}+\frac{1}{xyv}+\frac{1}{xyz}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Gdy teraz odejmiemy koleją od tego zrównania cztery zrównania poprzedzające, położywszy poprzednio

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{s},$$

znajdziemy :

[4] $$\begin{cases} \dfrac{1}{yzv}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{a}, & \dfrac{1}{xzv}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{xyv}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{c}, & \dfrac{1}{xyz}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{d}. \end{cases}$$

To przypuściwszy, pomnóżmy te cztery zrównania stronami, a będziemy mieli :

$$\frac{1}{x^3y^3z^3v^3}=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right);$$

następnie,

[5] $$\frac{1}{xyzv}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}.$$

Podzielmy nakoniec każde ze zrównań [4] przez zrównanie [5]; a natenczas otrzymamy:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\right)}},$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\right)}},$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\right)}},$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\right)^2}{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{c}\right)}}.$$

Przykład piąty. Pan *Binet* wskazał sposób bardzo piękny na rozwiązanie układu

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1.$$

Pomimo różnej formy istnieje w obu stronach zrównań zupełna tosamość

$$1-\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}=\frac{t^3+At^2+Bt+C}{t(t-b^2)(t-c^2)},$$

A, B, C będąc spółczynnikami których oznaczenie nie jest wcale potrzebném. Pierwsza strona tego związku niszczy się dla $t=\rho^2$, $t=\mu^2$, $t=\nu^2$, z przyczyny zrównań danych. Gdyż,

$\left[1-\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}-\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=0, \text{ i. t. d.}\right]$ Wielomian t^2+At^2 $+Bt+C$ staje się więc zerem dla tychże samych wartości przypisywanych ilości t; jest więc równy wieloczynowi $(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)$, na mocy ostatniego twierdzenia dzielenia (79); a przeto, podstawiając ten wieloczyn w poprzedzającym związku, znajduje się

$$1-\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}=\frac{(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)}{t(t-b^2)(t-c^2)}.$$

Mnożąc przez t, potém czyniąc $t=0$, otrzymamy :

$$-x^2=\frac{(-\rho^2)(-\mu^2)(-\nu^2)}{(-b^2)(-c^2)},$$

albo

$$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2},$$

zkąd

$$x=\frac{\rho\mu\nu}{bc};$$

mnożąc przez $t-b^2$, potém przypuszczając $t=b^2$, znajduje się

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}.$$

Nakoniec, dość jest pomnożyć przez $t-c^2$ i uczynić $t=c^2$, aby otrzymać

$$z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Inne dowodzenie. Otrzymuje się rozwiązanie sposobem eleganckim, uważając że wyrażenie,

$$1-\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}$$

jest zerem, na mocy zrównań danych, dla $t=\rho^2$, $t=\mu^2$, $t=\nu^2$; i że jest, przeto (**79**), kształtu $M(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)$.

Dostrzedz wreszcie łatwo, że $M=\frac{1}{t(t-b^2)(t-c^2)}$. Gdyż pierwsze wyrażenie, sprowadzone do jednakowego mianownika, da się napisać pod kształtem $\frac{1}{t(t-b^2)(t-c^2)}\times(t^3+At^2+Bt+c)$. Owoż, dwa przekształcenia jednego wyrażenia ten sam wypadek dać muszą, a więc mamy naprzód

$$M(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)=\frac{1}{t(t-b^2)(t-c^2)}\times(A^3+At^2+Bt+C).$$

A ponieważ wieloczyn $(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)$ równa się wielomianowi t^3+At^2+Bt+C; więc, w téj tosamości, dwa czynniki pozostałe M i $\frac{1}{t(t-b^2)(t-c^2)}$ muszą być także równemi. Tak więc, na mocy zrównań, znajduje się tosamość :

$$1-\frac{x^2}{t^2}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}=\frac{(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)}{t(t-b^2)(t-c^2)}.$$

Pomnóżmy obie strony przez t, i przypuśćmy późniéj $t=0$, i. t. d. tak samo jak pierwéj prowadźmy rzecz całą do końca, to jest aż do zupełnego danego układu rozwiązania.

O PRZYPADKACH W KTÓRYCH LICZBA NIEZNANYCH NIE JEST RÓWNĄ LICZBIE ZRÓWNAŃ.

154. Przypadki w których liczba zrównań przewyższa liczbę nieznanych. Niech będzie, na przykład, układ trzech zrównań pomiędzy dwoma nieznanémi x i y. Rozwięzując dwa z tych trzech zrównań przez jeden ze sposobów znanych, otrzyma się wartości z x i z y, które same mogą sprawdzić układ. Lecz, aby to miało rzeczywiście miejsce, potrzeba aby te wartości zadosyć czyniły trzeciemu zrównaniu. Kiedy ten warunek nie jest dopełnionym, *układ jest niepodobnym.*

Na przykład, układ

$$\begin{cases} 7x + 5y = 34, \\ 8x - 3y = 4, \\ 4x + 3y = 17, \end{cases}$$

jest niepodobnym, ponieważ rozwiązując dwa pierwsze zrównania, znajdujemy $x = 2$, $y = 4$; które to wartości, podstawione w ostatniém, prowadzą do niepodobieństwa, $20 = 17$.

W ogólności, gdy jest $(m + p)$ zrównań pomiędzy m nieznanémi, można rozwiązać m z tych zrównań, i otrzymać tym sposobem wartości które same mogą sprawdzić układ; lecz potrzeba aby te wartości, podstawione w p zrównaniach pozostałych, sprawdzały je także; inaczéj, układ będzie niepodobnym.

Kiedy spółczynniki nieznanych, albo niektóre z pomiędzy nich, są wyrażone przez litery których wartość nie jest oznaczoną, wartości otrzymane dla tych nieznanych będą formułami zależnemi od tych liter; a podstawienie tych formuł w p zrównaniach pozostałych dostarczy p związków, które wyrażać będą *warunki* konieczne i dostateczne jakie muszą istnieć między spółczynnikami literalnemi, ażeby układ był podobnym. Daje się tym związkom imię *zrównań warunkowych.*

Przykład. Niech będzie układ

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2a, \\ x-y=2b, \\ 2x+3y=a+2b \\ 3x+4y=2a+3b-1. \end{array}\right.$$

Dwa pierwsze zrównania dają $x=a+b$, $y=a-b$; a te wartości, podstawione w dwóch ostatnich, dostarczają dwa zrównania warunkowe,

$$\left\{\begin{array}{l} 5a-b=\ a+2b, \\ 7a-b=2a+3b-1\,; \end{array}\right.$$

z których się wyciąga: $a=3,\quad b=4.$

Jeśli się przyjmie te wartości z a i z b, układ jest podobnym, i rozwiązanie jest:

$$x=7,\quad y=-1.$$

155. Scholia. Jeżeli $(m+p)$ zrównań o m nieznanych zawierają *spółczynniki nieoznaczone*, można położyć sobie zadanie, wskazać warunki jakie zmuszone są dopełnić te spółczynniki ażeby zrównania dane były zgodnemi. Wystarczy na to oczywiście, podług tego cośmy dopiero powiedzieli, wyrugować m nieznanych pomiędzy $(m+p)$ zrównaniami, a zrównania wypadkowe będą wyrażały warunki żądane. Kiedy liczba spółczynników nieoznaczonych jest p, będziemy mieli p zrównań dla ich oznaczenia; gdy ta liczba jest większą jak p, można będzie rozporządzić dowolnie ilukolwiek pomiędzy niémi; lecz gdy ta jest mniejszą niż p, zrównania warunkowe będą w ogólności niezgodne (sprzeciwiające się), a następnie dane pozostaną zarówno takiemiż.

Przykład. *Oznaczyć* a, b, c, *tak ażeby cztery zrównania*

$$\left\{\begin{array}{l} ax+2y=-1, \\ x-by=\ \ 2, \\ 2x+3y=\ \ c, \\ 2ax+cy=-2, \end{array}\right.$$

o dwóch nieznanych były zgodnemi.

Dwa pierwsze dają:

$$x = \frac{4 - b}{ab + 2}, \quad y = -\frac{2a + 1}{ab + 2};$$

podstawienie tych wartości z x i z y w dwóch ostatnich i zniesienie mianowników, da związki

$$\begin{cases} 5 - 2b - 6a - c(ab + 2) = 0, \\ 8a + 4 - c(2a + 1) = 0. \end{cases}$$

Nie mamy więc jak dwa zrównania dla oznaczenia a, b i c, tak że można będzie rozporządzić dowolnie jednym z tych spółczynników. Rugując c pomiędzy témi dwoma zrównaniami, przyjdzie

$$12a^2 + 8a^2b + 8ab + 12a + 2b + 3 = 0,$$

zkąd się wyciąga

$$b = -\frac{12a^2 + 12a + 3}{8a^2 + 8a + 2},$$

a czyniąc $a = -1$, ta formuła dostarczy $b = -\frac{3}{2}$, po czém, znajdzie się $c = 4$. Tak więc, zrównania dane staną się

$$-x + 2y = -1$$

$$x + \frac{3}{2}y = 2$$

$$2x + 3y = 4$$

$$-2x + 4y = -2,$$

które rzeczywiście są z sobą zgodnémi, jak łatwo jest to sprawdzić, wyciągając z dwóch tych zrównań wartości z x i z y, i podstawiając je w dwóch innych, albo lepiéj jeszcze dzieląc wszystkie wyrazy dwóch ostatnich przez 2.

156. Przypadki w których liczba nieznanych przewyższa liczbę zrównań. Niech będzie, na przykład, układ dwóch zrównań pomiędzy trzema nieznanémi x, y, z. Gdy się uważać będzie jedną z nieznanych, z na przykład, jako znaną, rozwiązanie układu dostarczy, na wartości z x i z y, dwie formuły które będą zawierały z. Można więc przyznać dla z wartości dowolne; i dla każdéj z nich, formuły dostarczą dla x i dla y wartości odpowiednich. *Układ przyjmuje więc liczbę nieskończoną rozwiązań, a więc jest nieoznaczonym.*

W ogólności, gdy istnieje m zrównań pomiędzy $(m+p)$ nieznanémi, można będzie wziąć za wiadome p z tych nieznanych, i rozwiązać m zrównań względem innych; otrzyma się dla wartości z tych m nieznanych, formuły zamykające nieznane p. Można więc przyznać dla tych nieznanych takie wartości jakie się podoba; i formuły dostarczą wartości odpowiednich innym. Układ jest więc nieoznaczonym.

Przykład. Niech będzie układ :

$$\begin{cases} 2x+3y-4z-3t=6, \\ x-2y+3z-2t=2. \end{cases}$$

Rozwięzuje się względem x i y, przenosząc w drugie strony wyrazy na z i na t. Znajduje się tym sposobem dwie formuły :

$$x=\frac{18-z+12t}{7},$$

$$y=\frac{2+10z-t}{7}.$$

Przypuszczenie *dowolne*, $z=2$, $t=1$, daje $x=4$, $y=3$.

O PRZYPADKACH NIEPODOBIEŃSTWA I NIEOZNACZONOŚCI.

157. Przypadki niepodobieństwa. Kiedy liczba nieznanych jest równą liczbie zrównań, zdarza się niekiedy, że sposoby rozwiązania prowadzą do rezultatów sprzecznych.

Przykłady. Niech będzie układ :

$$\begin{cases} 9x - 12y = 6, \\ 21x - 28y = 15. \end{cases}$$

Zastosujmy sposób dodawania i odciągania (140) : dla wyrugowania y, rozmnóżmy pierwsze zrównanie przez 7, a drugie przez 3 ; otrzymamy :

$$63x - 84y = 42,$$
$$63x - 84y = 45;$$

zrównania oczywiście sprzeciwiające się (nie zgodne), ponieważ odciągając je jedno od drugiego, mamy $0 = 3$.

Układ dany jest więc niepodobnym ; i niepodobieństwo objawia się przez tę okoliczność, że rugowanie jednéj nieznanéj wyrzuca drugą, tak że nie pozostaje więcéj jak równość pomiędzy dwoma liczbami nierównemi.

Weźmy jeszcze układ :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 30. \end{cases}$$

Rugując z, naprzód pomiędzy dwoma pierwszemi zrównaniami ; potém pomiędzy dwoma ostatniemi, otrzymujemy dwa zrównania,

$$10x - 5y = 25$$
$$10x - 5y = 26,$$

które są oczywiście nie zgodne. Układ jest więc niepodobnym ; i niepodobieństwo objawia się przez tę okoliczność, że rugując z, otrzymuje się dwa zrównania, których różnica prowadzi jeszcze do równości niedorzecznéj

$$0 = 1.$$

158. Przypadki nieoznaczoności. Zdarza się także niekiedy, że rozwięzując układ zrównań, natrafia się na równości które mają miejsce, dla jakichkolwiek bądź wartości nie znanych.

Przykłady. Niech będzie układ :

$$\begin{cases} 91x + 63y = 217, \\ 65x + 45y = 155. \end{cases}$$

Rugowanie y, mnożąc pierwsze zrównanie przez 5 a drugie przez 7, daje :

$$\begin{cases} 455x + 315y = 1085, \\ 455x + 315y = 1085, \end{cases}$$

zrównania tosame. Tak więc *dwa zrównania dane wchodzą jedno w drugie*. Nie ma właściwie mówiąc, jak tylko jedno zrównanie z dwiema nieznanémi : liczba więc rozwiązań jest nieskończoną (156). Widzimy że nieoznaczoność objawia się przez tę okoliczność, że wyrugowanie jednéj z nieznanych wyrzuca drugą, i że pozostaje tosamość

$$0 = 0.$$

Weźmy jeszcze układ :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 31. \end{cases}$$

Rugowanie z, pomiędzy dwoma piarwszémi zrównaniami, potém pomiędzy dwoma ostatniémi, prowadzi do dwóch zrównań,

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25, \\ 10x - 5y = 25, \end{cases}$$

które są jeszcze tosamemi. Ponieważ te dwa zrównania, skombinowane z jedném ze trzech pierwszych, tworzą układ równoważny układowi danemu ; widzimy więc że nie ma, istotnie, jak dwa zrównania z trzéma nieznanémi. Układ jest więc *nieoznaczonym ;* i nieoznaczoność objawia się jeszcze przez tę okoliczność, że wyrugowanie jednéj z trzech nieznanych prowadzi do tosamości.

ĆWICZENIA.

I. Rozwiązać zrównanie

$$\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$$

Znajduje się $x=\frac{7}{8}$.

II. Rozwiązać zrównanie

$$\frac{6-5x}{15}-\frac{7-2x^2}{14(x-1)}=\frac{3x+1}{21}-\frac{10x-11}{30}+\frac{1}{105}.$$

Znajduje się $x=4$.

III. Rozwiązać $\frac{x}{2}-\frac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2+2}{3x-2}\right)$.

Znajduje się $x=\frac{13}{3}$.

IV. Rozwiązać $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

Znajduje się $x=\frac{5}{4}$, i $x=0$. Ta ostatnia wartość nie odpowiada zrównaniu.

V. Rozwiązać $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$.

Znajduje się $x=-\frac{2a}{3}$, wartość która nie odpowiada zrównaniu.

VI. Rozwiązać $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

Znajduje się $$x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}.$$

VII. Rozwiązać $$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt{b}.$$

Znajduje się $$x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}.$$

VIII. Rozwiązać $$\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}.$$

Znajduje się $$x=\frac{2}{3}.$$

IX. Rozwiązać $$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}}.$$

Znajduje się $x=0$, i $x=-\frac{3a}{4}$, wartości które, tak jedna jak druga, nie odpowiadają zrównaniu.

X. Rozwiązać $$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Znajduje się $$x=\frac{25}{16}.$$

XI. Rozwiązać $$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Znajduje się $$x=\frac{3a}{4}.$$

XII. Rozwiązać zrównanie

$$\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}.$$

Znajduje się $x = 0$ i $x = \frac{64a}{1025}$, wartości które nie odpowiadają zrównaniu.

XIII. Rozwiązać zrównanie

$$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-a^2}.$$

Znajduje się $x = a$.

XIV. Rozwiązać zrównanie

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - ax}}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - ax}}} = b.$$

Znajduje się $$x = a\left\{1 - \frac{16b^2}{(1+b)^4}\right\}.$$

XV. Rozwiązać $$\frac{\sqrt{36x+1} + \sqrt{36x}}{\sqrt{36x+1} - \sqrt{36x}} = 9.$$

Znajduje się $$x = \frac{4}{81}.$$

XVI. Rozwiązać zrównanie

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = a\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{x}}.$$

Znajduje się $$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{a} - \frac{1}{\sqrt[6]{a}}\right)^2.$$

I. Rozwiązać układ $$\begin{cases} x + ay = b, \\ ax - by = c. \end{cases}$$

Znajduje się : $x = \frac{b^2 + ac}{a^2 + b}, \quad y = \frac{ab - c}{a^2 + b}.$

II. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = c \\ (a^2 - b^2)(x+y) = d. \end{cases}$$

Znajduje się : $x = \frac{1}{2b}\left(\frac{d}{a-b} - c\right), \quad y = \frac{1}{2b}\left(c - \frac{d}{a+b}\right).$

III. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} \frac{p}{x} + \frac{q}{y} = a, \\ \frac{q}{x} + \frac{p}{y} = b. \end{cases}$$

Biorąc $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$ za niewiadome posiłkowe, znajdziemy :

$$x = \frac{p^2 - q^2}{ap - bq}, \quad y = \frac{p^2 - q^2}{bp - aq}.$$

IV. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b), \\ a^2y - \frac{ab^2c}{a+b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b). \end{cases}$$

Znajduje się $x = \frac{ab}{a+b}, \quad y = \frac{ab}{a-b}.$

V. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x}, \\ 3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}. \end{cases}$$

Znajduje się :

$$x = 16, \quad y = 25.$$

VI. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ (a+b)x - (a+c)y + (b+c)z = 0, \\ abx - acy + bcz = 1. \end{cases}$$

Znajduje się :

$$x = \frac{1}{(a-c)(b-c)}, \quad y = \frac{1}{(a-b)(b-c)}, \quad z = \frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

VII. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, \\ \frac{1}{v} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{v} + \frac{1}{x} = c, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = d. \end{cases}$$

Położywszy $\frac{1}{3}(a + b + c + d) = s$, otrzymamy : $x = \frac{1}{s-d}$, $y = \frac{1}{s-c}$,

$$z = \frac{1}{s-b}, \ v = \frac{1}{s-a}.$$

VIII. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} a^4 + a^3x + a^2y + az + u = 0, \\ b^4 + b^3x + b^2y + bz + u = 0, \\ c^4 + c^3x + c^2y + cz + u = 0, \\ d^4 + d^3x + d^2y + dz + u = 0. \end{cases}$$

Znajduje się :

$$x = -(a + b + c + d), \quad y = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$z = -(abc + abd + acd + bcd), \quad v = abcd.$$

IX. Rozwiązać układ

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, \\ &a^n + b^n + c^n = d^n, \\ &\frac{x^m}{a^{m+n}} - \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}}; \end{aligned}\right.$$

wyrugowawszy a, b, c, pomiędzy temi zrównaniami. będziemy mieli :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = \left(\frac{a}{d}\right)^n, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{d}\right)^n, \quad \left(\frac{r}{c}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^n,$$

a $$x^{\frac{mn}{m+n}} + y^{\frac{mn}{m+n}} + z^{\frac{mn}{m+n}} = d^{\frac{mn}{m+n}}.$$

X. Rozwiązać układ $$\left\{\begin{aligned} &ax^6 = by^6 = cz^6 \\ &\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d}; \end{aligned}\right.$$

i wyrachować $$ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Znajduje się : $$x = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}},$$

$$y = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}},$$

$$z = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}};$$

potém : $$ax^2 + by^2 + cz^2 = d^2 (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}).$$

XI. Rozwiązać układ

$$\left\{\begin{aligned} &ax + m(y + z + v) = k, \\ &by + m(z + v + x) = l, \\ &cz + m(v + x + y) = p, \\ &dx + m(x + y + z) = q. \end{aligned}\right.$$

Szuka się naprzód summy s nieznanych;

$$S=\frac{k(b-m)(c-m)(d-m)+l(a-m)(c-m)(d-m)+p(a-m)(b-m)(d-m)+q(a-m)(b-m)(c-m)}{(a-m)(b-m)(c-m)(d-m)+m\{(b-m)(c-m)(d-m)+(a-m)(c-m)(d-m)+(a-m)(b-m)(d-m)+(a-m)(b-m)(c-m)\}}.$$

poczém otrzymamy:

$$x=\frac{k-ms}{a-m},\ y=\frac{l-ms}{b-m},\ z=\frac{p-ms}{c-m},\ v=\frac{q-ms}{d-m}$$

XII. Rozwiązać układ

$$\begin{aligned}
1 &= x+y+z+u+v+w+t,\\
0 &= x+ay+bz+cu+dv+ew+ft,\\
0 &= x+a^2y+b^2z+c^2u+d^2v+e^2w+f^2t,\\
0 &= x+a^3y+b^3z+c^3u+d^3v+e^3w+f^3t,\\
0 &= x+a^4y+b^4z+c^4u+d^4v+e^4w+f^4t.\\
0 &= x+a^5y+b^5z+c^5u+d^5v+e^5w+f^5t,\\
0 &= x+a^6y+b^6z+c^6u+d^6v+e^6w+f^6t.
\end{aligned}$$

Pomnożywszy zrównania te przez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$, dodaje się takowe. Dla otrzymania wartości z x, na przykład, porównywa się z zerem spółczynniki sześciu innych nieznanych; znajduje się sześć zrównań kształtu,

$$(1)\qquad \lambda_1+\lambda_2 s+\lambda_3 s^2+\lambda_4 s^3+\lambda_5 s^4+\lambda_6 s^5+\lambda_7 s^6=0.$$

To zrównanie jako mające być sprawdzoném dla $s=a, s=b, s=c, \ldots s=f$, ma pierwszy członek w zupełnéj tosamości równym wieloczynowi

$$(2)\qquad \lambda_7\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)\,(s-e)\,(s-f).$$

Otóż, znajduje się na tenczas: $x=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_7}$.

A, ponieważ wartość z λ_1 odpowiada dla $s=0$, a wartości z $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_7$ dla $s=1$, robi się te przypuszczenia w (2); i znajduje się:

$$x=\frac{a\,b\,c\,d\,e\,f}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)(1-f)}.$$

Podobnie dla utrzymania y, rozpoznaje się że równanie (1) powinno być sprawdzoném dla $s=1$, $s=b$, $s=c$, ... $s=f$, i że jego pierwsza strona jest, przeto,

$$\lambda_7 (s-1)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)(s-f);$$

i znajduje się :

$$y = \frac{bcdef}{(a-1)(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)};$$

podobnie :

$$z = \frac{adcef}{(b-1)(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)},$$

$$u = \frac{abdef}{(c-1)(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f)},$$

$$v = \frac{abcef}{(d-1)(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f)},$$

$$w = \frac{abcdf}{(e-1)(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)},$$

$$t = \frac{abcde}{(f-1)(f-a)(f-b)(f-c)(f-d)(f-e)},$$

XII. Z sześciu zrównań :

$$\left\{\begin{aligned} -x^2-y^2-z^2 &= a^2,\\ -x'^2-y'^2-z'^2 &= -a^2,\\ -x''^2-y''^2-z''^2 &= -a^2\\ -x'x''-y'y''+z'z'' &= 0,\\ -xx''-yy''+zz'' &= 0,\\ -xx'-yy'+zz' &= 0. \end{aligned}\right.$$

zamierzamy wynaleźć,

$$a^6 = \left\{xy'z''+x'y''z+x''yz'-xz'y''-x'z''y-x''zy'\right\}^2.$$

Wykonywa się, z jednéj strony, wieloczyn trzech pierwszych zrównań, a z drugiéj, kwadrat wskazany; i rozpoznaje się, za pomocą niektórych przekształceń, że dwa rezultata są to same, na mocy *trzech* ostatnich zrównań.

ROZDZIAŁ X.

ZAGADNIENIA STOPNIA PIERWSZEGO.

CEL TEGO ROZDZIAŁU.

159. Rozwiązanie zagadnienia obejmuje w sobie trzy części odrębne:

1° *Składanie zrównania*, to jest wyrażenie algebraiczne związków jakie wysłowienie zaprowadza między ilościami danémi a nieznanémi;

2° *Rozwiązanie zrównań* tym sposobem znalezionych;

3° *Roztrząsanie* rozwiązania.

Gdy rozwiązanie zrównań było już obszernie w dwóch poprzedzających rozdziałach wyłożone, zajmiemy się tu wyłącznie składaniem zrównań i roztrząsaniem zagadnień.

SKŁADANIE ZRÓWNANIA.

160. Prawidło przy składaniu zrównania zagadnienia. Wiedząc o wyraźném niepodobieństwie przepisania, dla otrzymania zrównań zagadnienia, prawidła zupełnie ogólnego, ograniczymy się jedynie na wskazaniu następującego.

Po zbadaniu gruntowném wysłowienia zagadnienia, przedstawia się przez litery x, y,..... *liczby których wiadomość dostarczyłaby rozwiązania: wskazuje się na tych literach i na danych szereg działań jakie należałoby wykonać, gdyby, po znalezieniu wartości nieznanych, chciało się sprawdzić że wartości otrzymane zadosyć czynią wszystkim warunkóm wysłowienia. Te rachunki sprawdzenia prowadzą, w ogólności, do rezultatów które obowiązane są być równemi: równając formuły które przedstawiają te rezultata, otrzymuje się zrównania zagadnienia.*

Żeby się wprawić w rozbiór warunków, w dostrzeganie związków i w składanie zrównań, weźmy sobie do rozwiązania następujące przykłady.

161. Zagadnienie I. *Kadź napełniona wodą może być wypróżniona za pomocą dwóch rur A, B, nierównéj wielkości. Otwiera się rura A, i wypuszcza się nią czwartą część wody. Potém otwiera się rura B, i dozwala się płynąć wodzie przez obie rury dopóki kadź nie wypróżni się zupełnie, na co potrzebuje pięć czwartych godziny więcéj aniżeli pierwsza rura A potrzebowała czasu dla wypróżnienia czwartéj części wody. Gdyby były otwarte obie rury od początku, kadź zostałaby wypróżnioną ćwierć godziny prędzéj. Pytanie ile czasu potrzebowałaby rura A, gdyby była sama otwartą, na wypróżnienie kadzi.*

Niech będzie x liczba godzin użytych przez rurę A dla wypróżnienia, za pomocą jéj jednego otworu, kadzi napełnionéj wodą.

Dla wypróżnienia czwartéj części kadzi, rura A używa czasu $\frac{x}{4}$.

Dla wypróżnienia trzech innych czwartych, dwie rury, otwarte razem, używają czasu $\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$.

Następnie, dla wypróżnienia kadzi całkowitéj, używają $\frac{4}{3}$ tego czasu, albo $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$.

Z drugiéj strony, czas cały użyty przy doświadczeniu, dla wypróżnienia, naprzód pierwszéj ćwierci za pomocą rury A, potém trzech innych ćwierci za pomocą rur A i B jest $\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right)$, albo $\frac{x}{2}+\frac{5}{4}$.

Ponieważ ten czas przewyższa o ćwierć godziny czas którego użyłyby rury A i B otwarte razem od początku, to jest czas oznaczony przez $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$; znajduje się więc zrównanie:

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{3}=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4},$$

które rozwiązane, daje: $x=4^{g}$.

Sprawdzenie. Czas użyty przez rurę A, dla wypróżnienia czwartéj części kadzi, jest 1 godzina: następnie czas użyty przez dwie rury, dla wypróżnienia pozostałych trzech czwartych, jest $1^{g.} + \frac{5^{g.}}{4}$, albo $\frac{9^{g.}}{4}$: a czas któregoby potrzebowały dla wypróżnienia kadzi całkowitéj jest $\frac{4}{3}$ z $\frac{9}{4}$ godziny, albo 3 godziny. Z drugiéj strony, przy doświadczeniu, kadź została wypróżnioną w $1^{g.} + \frac{9^{g.}}{4}$, albo w $3^{g.} \frac{1}{4}$; doświadczenie więc trwało $\frac{1}{4}$ godziny więcéj, czyli tak jak tego wymagało wysłowienie.

162. Zagadnienie II. *Chart ściga lisa który jest* 60 *skoków przed nim. Lis robi* 9 *skoków podczas gdy chart robi tylko* 6; *ale* 3 *skoki charta warte są* 7 *lisich. Ileż chart musi zrobić skoków aby doścignął lisa?*

Wyraźmy przez x liczbę skoków jaką zrobi chart, przed doścignięciem lisa.

Ponieważ trzy skoki charta warte są siedm skoków lisa, x skoków charta warte będą $\frac{7x}{3}$ skoków lisa: pierwsze wyrażenie drogi (ocenionéj w skokach lisa), jaką powinien przebiedz chart.

Z drugiéj strony, podczas gdy chart robi 6 skoków, lis robi 9 skoków; więc, podczas gdy chart robi x swoich skoków, lis robi ich $\frac{9x}{6}$; a, ponieważ ten ostatni jest o 60 skoków naprzód, $60 + \frac{9x}{6}$ będzie drugiém wyrażeniem drogi (ocenionéj w téjże saméj jedności), jaką musi przebiedz chart.

Ma się więc zrównanie:

$$\frac{7x}{3} = 60 + \frac{9x}{6},$$

które rozwiązane, daje: $x = 72$ skoki.

Sprawdzenie. 72 skoków charta warte są $\frac{7}{3}$ z 72 albo 168 skoków lisa. Otóż, podczas gdy chart robi 6 skoków, lis robi 9 skoków; więc podczas gdy chart robi 72, lis robi 108; i te 108 skoków, dodane do 60 skoków o jakie ten ostatni wyprzedza charta, dopełniają właśnie 168 skoków lisa, co stanowi także drogę charta.

163. ZAGADNIENIE III. *Znaleźć liczbę złożoną z czterech cyfer, wiedząc : 1° że cyfra setek jest równą summie cyfer jedności i dziesiątków; 2° że cyfra dziesiątków jest równą podwójnéj summie z cyfer tysięcy i jedności ; 3° że dzieląc liczbę samą przez summę jéj cyfer, znajduje się na iloraz* 109 *a na resztę* 9; 4° *że nakoniec odejmując liczbę szukaną od liczby utworzonéj z tych samych cyfer urządzonych w porządku odwrotnym, otrzymuje się na resztę* 819.

Oznaczmy przez x, y, z, v cyfry jedności, dziesiątków setek i tysięcy. Pierwszy warunek daje bezpośrednio zrównanie,

$$[1] \qquad z = x + y,$$

a drugi

$$[2] \qquad y = 2v + 2x.$$

Liczba szukana ma za wartość $1000v + 100z + 10y + x$: więc trzeci warunek daje zrównanie :

$$[3] \qquad 1000v + 100z + 10y + x = 109(x + y + z + v) + 9.$$

Nakoniec czwarty warunek dostarczy zrównania :

$$[4] \quad 1000x + 100y + 10z + v - (1000v + 100z + 10y + x) = 819.$$

Przed rozwiązaniem tego układu czterech zrównań, uproszcza się dwa ostatnie, które przywodzą się do

$$[3] \qquad 99v - z - 11y - 12x = 1,$$

$$[4] \qquad 111x + 10y - 10z - 111v = 91.$$

Ruguje się naprzód z, między [1], [3] i [4], i znajduje się :

$$[5] \qquad 99v - 12y - 13x = 1,$$

$$[6] \qquad 101x - 111v = 91.$$

Potém ruguje się y między [2] i [5], co daje :

$$[7] \qquad 75v - 37x = 1.$$

Nakoniec ruguje się x między [6] i [7], i znajduje się :

$$v=1;$$

a, następnie, $x=2,\quad y=6,\quad z=8.$

Liczba szukana jest więc 1862.

Sprawdzenie wykonywa się bezpośrednio.

164. Zagadnienie IV. *Pięciu graczy* A, B, C, D, E, *ułożyli się, że przegrywający podwoi summę pieniędzy posiadaną przez każdego z czterech innych, na końcu każdéj partyi. Gracz* A *przegrał pierwszą partyą i zapłacił : gracz* B *przegrał drugą,* C *trzecią,* D *czwartą i* E *piątą. Kiedy gracz* E *zapłacił swój dług, zdarza się że każdy gracz posiada tę samą summę* a. *Pytanie, ile każdy z nich miał pieniędzy do gry siadając?*

Oznaczmy przez x, y, z, v, t summy jakie gracze przynoszą do gry. Po pierwszéj partyi, stan fortun jest oznaczony tablicą następującą :

A. . . . . $x-y-z-v-t,$

B. . . . . $2y,$

C. . . . . $2z,$

D. . . . . $2v,$

E. . . . . $2t.$

Po drugiéj partyi, w któréj B przegrywa, staje się :

A. . . . . $2x-2y-2z-2v-2t,$

B. . . . . $3y-x-z-v-t,$

C. . . . . $4z,$

D. . . . . $4v,$

E. . . . . $4t;$

Po trzeciéj partyi, w któréj C płaci, znajduje się podobnie :

A. . . . . $4x - 4y - 4z - 4v - 4t$,

B. . . . . $6y - 2x - 2z - 2v - 2t$,

C. . . . . $7z - x - y - v - t$,

D. . . . . $8v$,

E. . . . . $8t$.

Tak samo znajdziemy stan fortun, po czwartéj stawce, potém po piątéj :

	Czwarta partya.	*Piąta partya.*
A. . .	$8x - 8y - 8z - 8v - 8t$,	$16x - 16y - 16z - 16v - 16t$,
B. . .	$12y - 4x - 4z - 4v - 4t$,	$24y - 8x - 8z - 8v - 8t$,
C. . .	$14z - 2x - 2y - 2v - 2t$,	$28z - 4x - 4y - 4v - 4t$,
D. . .	$15v - x - y - z - t$,	$30v - 2x - 2y - 2z - 2t$,
E. . .	$16t$.	$31t - x - y - z - v$,

Mamy więc, podług wysłowienia, pięć zrównań :

$$\begin{cases} [1] \quad 16x - 16y - 16z - 16v - 16t = a, \\ [2] \quad 24y - 8x - 8z - 8v - 8t = a, \\ [3] \quad 28z - 4x - 4y - 4v - 4t = a, \\ [4] \quad 30v - 2x - 2y - 2z - 2t = a, \\ [5] \quad 31t - x - y - z - v = a. \end{cases}$$

Sprawdzenie przedstawia się bezpośrednio. Dodawszy pięć zrównań stronami, otrzymamy :

$$[6] \quad x + y + z + v + t = 5a.$$

Co łatwo można było przewidzieć, ponieważ summa całkowita stawek powinna być tąż samą na końcu piątéj partyi jak przed pierwszą. To zrównanie [6] może wreszcie zastąpić jedno z pięciu pierwszych.

Dodając zrównania [5] i [6], znajduje się bezpośrednio :

$$32t = 6a; \qquad \text{zkąd} \qquad t = \frac{6a}{32}.$$

Podwajając zrównanie [6] aby je przyłączyć do zrównania [4], znajduje się :

$$32v = 11a; \qquad \text{zkąd} \qquad v = \frac{11a}{32}.$$

Podobnie mnożąc zrównanie [6] przez 4, przez 8, i przez 16 kolejno, i dodając odpowiednie wieloczyny do zrównań [3], [2] i [1], znajduje się :

$$\left\{\begin{array}{l} 32z = 21a; \\ 32y = 41a; \\ 32x = 81a; \end{array}\right. \qquad \text{zkąd} \qquad \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{21a}{32}, \\ y = \dfrac{41a}{32}, \\ x = \dfrac{81a}{32}. \end{array}\right.$$

Można będzie sprawdzić te rezultata, tworząc wyrażenie fortuny każdego gracza na końcu każdéj partyi.

165. Zagadnienie V. *Wieśniaczka, obowiązana sprzedawać jaja na targu, sprzedaje pierwszéj osobie połowę swych jaj, więcéj połową jednego; drugiéj osobie, połowę jaj które jéj pozostały, więcéj połową jednego, i. t. d.; nakoniec* n^{téj} *osobie, połowę jaj które jéj pozostały, więcéj połową jednego. Wtedy wieśniaczka sprzedała wszystkie swe jaja : pytanie ileż miała jaj przybywając na targ?*

Niech będzie x liczbą szukaną. Wieśniaczka sprzedaje naprzód

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

jaj; pozostaje jéj więc

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right), \quad \text{albo} \quad \frac{x-1}{2}.$$

Sprzedaje natenczas drugiéj osobie liczbę jaj oznaczoną przez

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2}$$

nie ma więc już jak

$$\frac{x-1}{2} - \left(\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{albo} \quad \frac{x-1}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{x-3}{4}.$$

Trzecia sprzedaż jest

$$\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2}$$

jaj; a reszta

$$\frac{x-3}{4} - \left(\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{albo} \quad \frac{x-3}{8} - \frac{1}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{x-7}{8}.$$

Prawo reszt

$$\frac{x-1}{2}, \quad \frac{x-3}{4}, \quad \frac{x-7}{8}, \ldots,$$

albo

$$\frac{x-(2-1)}{2}, \quad \frac{x-(2^2-1)}{2^2}, \quad \frac{x-(2^3-1)}{2^3}, \ldots,$$

pokazuje że, po n sprzedażach, wieśniaczka nie ma więcéj jak liczbę jaj równą $\frac{1}{2^n}[x-(2^n-1)$; tak że zrównanie zagadnienia jest

$$\frac{x-(2^n-1)}{2^n} = 0, \quad \text{zkąd} \quad x = 2^n - 1.$$

166. ZAGADNIENIE VI. *Dla utworzenia mieszaniny dwóch metali których ciężary gatunkowe (ciężary jednostki objętości) są* ρ *i* ρ', *bierze się* p *kilogramów pierwszego metalu i* p' *drugiego : objętość cała, doznaje ściśnienia* $\frac{1}{\delta}$ *dla jednostki objętości. Jaki jest ciężar właściwy* x *téj mieszaniny?*

Cały ciężar mieszaniny jest $p+p'$; jej objętość jest więc

$$\frac{p+p'}{x}.$$

A ponieważ objętość metali jest $\frac{p}{\rho}$, $\frac{p'}{\rho'}$, więc summa tych wartości będzie

$$\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'},$$

a ściśnienie

$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\frac{1}{\delta};$$

tak że objętość mieszaniny może się jeszcze napisać

$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right);$$

znajduje się więc

$$x=\frac{p+p'}{\left(\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Kiedy metale mieszają się bez ściśnienia, znajduje się

$$x=\frac{p+p'}{\frac{p}{\rho}+\frac{p'}{\rho'}}.$$

Ta ostatnia formuła pozwoli znaleźć p i p', gdy x, ρ, ρ' i $p+p'$ są znane; wpada się tym sposobem na sławne zagadnienie korony Hierona.

167. Zdarza się niekiedy że warunki równości, dane przez wysłowienie, pokazują się zbytecznemi.

Zagadnienie VII. *Ojciec dzieli swe dziedzictwo pomiędzy dzieci w sposób następujący: daje pierwszemu summę* a *i* n^ta^ *część reszty: daje drugiemu summę* 2a *i* n^ta^ *część z tego co pozostaje, po odtrąceniu częściowém tych summ: daje trzeciemu summę* 3a *i* n^ta^ *część z tego co pozostaje. I tak następnie. Zdarza się że dziedzictwo jest całkowicie podzielonem, i że wszystkie dzieci odziedziczyły części równe. Zachodzi pytanie jaka w tym razie jest wartość spadku, jaka liczba dzieci i część każdego z nich?*

Oznaczmy przez x wartość dziedzictwa.

Część pierwszego dziecka jest : $a+\dfrac{x-a}{n}$, albo $\dfrac{x+(n-1)a}{n}$.

Pozostaje dla innych : $x-\dfrac{x+(n-1)a}{n}$, albo $\dfrac{(n-1)(x-a)}{n}$.

Drugie dziecko bierze naprzód $2a$.

Pozostaje natenczas : $\dfrac{(n-1)(x-a)}{n}-2a$, albo $\dfrac{(n-1)x-(3n-1)a}{n}$.

Część drugiego dziecka jest więc :

$$2a+\frac{(n-1)x-(3n-1)a}{n^2},\quad \text{albo}\quad \frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

Ponieważ, podług wysłowienia, części muszą być równe, otrzyma się zrównanie :

$$\frac{x+(n-1)a}{n}=\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

Zkąd, znajduje się

$$x=(n-1)^2a.$$

Ponieważ nie użyliśmy, dla znalezienia formuły dziedzictwa, jak tylko samych wyrażeń dwóch pierwszych części, jest *koniecznėm* wyrachować ich wartości, i zapewnić się że te są równe wartościóm których wyrażenie jeszcze dotąd nie służyło w rachunku; potém oznaczyć liczbę dzieci. Otóż, część pierwszego jest:

$$\frac{x+(n-1)a}{n},\ \text{albo}\ \frac{(n-1)^2a+(n-1)a}{n},\ \text{albo}\ \frac{(n-1)a[n-1+1]}{n},$$

$$\text{albo}\qquad (n-1)a.$$

Część drugiego jest:

$$\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}=\frac{(n-1)^3a+(2n^2-3n+1)a}{n^2}$$

$$=\frac{(n^3-n^2)a}{n^2}=(n-1)a.$$

Część trzeciego dziecka jest, podług wysłowienia:

$$3a+\frac{x-2(n-1)a-3a}{n}=\frac{3an+x-2an+2a-3a}{n}=\frac{x+an-a}{n}$$

$$=\frac{x+(n-1)a}{n},\ \text{albo}\ (n-1)a,$$

według rachunku zrobionego dla części pierwszego dziecka.

Możnaby przekonać się tak samo, że wszystkie części są równe $(n-1)a$.

Dzieląc wartość dziedzictwa przez część przypadającą na jedno dziecko, znajdzie się liczbę dzieci. Ta liczba jest więc $(n-1)$.

I rozpoznaje się że wszystkie warunki wysłowienia są dopełnionemi.

UŻYCIE NIEZNANYCH POSIŁKOWYCH.

168. Nie zawsze łatwo jest dostrzedz związków jakie wysłowienie zaprowadza między danémi a nieznanémi; potrzeba w tym razie

uciec się do *nieznanych posiłkowych*, które zależą więcéj bezpośrednio od danych i których związki z prawdziwémi nieznanémi są łatwe do ujęcia. Ruguje się potém pomiędzy zrównaniami znalezionémi, te ilości posiłkowe które nam posłużyły, w niejaki sposób, za most przejścia z danych do rezultatów. Oto przykład, wyjęty z *Arytmetyki powszechnéj Newtona* :

Zagadnienie VIII. *Niech będą* S, S′, S″, *powierzchnie trzech łąk, w których trawa jest równéj wysokości i wzrasta ruchem jednostajnym. Pierwsza łąka wyżywiła* n *wołów podczas* t *dni; druga* n′ *wołów podczas* t′ *dni; pytanie ile wołów trzecia łąka będzie mogła wyżywić podczas* t″ *dni?*

Oznaczmy przez x tę liczbę wołów; i weźmy trzy nieznane posiłkowe, to jest :

Wysokość spólną h trawy na trzech łąkach w epoce w któréj na nie wprowadzamy woły;

Prędkość v z jaką trawa rośnie;

Ilość trawy q jaką każdy wół zjada na dzień, biorąc za jednostkę ilość trawy oznaczoną przez metr kwadratowy gruntu i przez metr wysokości.

Pierwsza trzoda zjadła ilość trawy wyrażoną przez

$$nqt,$$

a która się składa z trawy Sh która istniała na łące przed wprowadzeniem wołów, i z trawy Svt która wzrosła podczas ich pobytu. Znajduje się więc

$$[1] \qquad nqt = S(h + vt).$$

Dwie inne łąki dostarczą związki podobne

$$[2] \qquad n'qt' = S'(h + vt'),$$

$$[3] \qquad xqt'' = S''(h + vt'').$$

Włożywszy w [3] wartości z h i z v wyciągnięte z [1] i [2], litera q znika sama przez się i znajduje się

$$x = \frac{S''\{Sn't'(t''-t) + S'nt(t'-t'')\}}{SS't''(t'-t)}.$$

Newton daje zastosowanie liczebne następujące :

$$S = 3\tfrac{1}{3} \text{ morgi}, \qquad t = 4 \text{ tygodnie}, \qquad n = 12 \text{ wołów},$$

$$S' = 10 \qquad t' = 9 \qquad n' = 21$$

$$S'' = 24 \qquad t'' = 18 \qquad x = 36.$$

ROZTRZĄSANIE.

169. Co to jest roztrząsać rozwiązanie. Gdy ułożyliśmy zagadnienie w zrównanie, i gdy rozwiązaliśmy układ tym sposobem otrzymany, rozwiązanie odpowiada zrównaniόm, byleby to rozwiązanie nie przedstawiało się pod kształtem zwodniczym o którym powiemy w dalszym ciągu. Lecz to rozwiązanie nie odpowiada zawsze zagadnieniu założonemu. Może się zdarzyć w rzeczy saméj, że pewne warunki, nałożone nieznanym przez naturę zadania, lecz nie wyrażone przez zrównania, czynią zagadnienie niepodobném. Badać przyczyny tego niepodobieństwa, jestto roztrząsać rozwiązanie.

Kiedy dane są przedstawionémi przez litery, i kiedy, następnie, wartości nieznanych są wyrażonémi przez formuły, może się zdarzyć że zagadnienie jest podobném, o tyle tylko o ile wartości danych są zamknięte między pewnémi granicami. Oznaczyć te granice, na zewnątrz których istnieje niepodobieństwo, jestto roztrząsać rozwiązanie.

Nakoniec, badać wszystkie okoliczności godne uwagi jakie mogą przedstawiać formuły, między granicami oznoczonémi przez roztrząsanie, jestto także roztrząsać rozwiązanie.

Dajmy kilka przykładów.

170. Zagadnienie IX. *W towarzystwie z dziesięciu osób złożoném, zrobiono składkę na ubogich : każdy mężczyzna dał 6 franków, każda kobieta dała 4 franki. Summa cała zebrana wynosi 45 franków. Ileż było mężczyzn, a ile kobiet ?*

Niech będą x i y liczby mężczyzn i kobiet. Mamy naprzód :

$$[1] \qquad x + y = 10.$$

Ponieważ każdy mężczyzna dał 6 franków, x mężczyzni dało $6x$.

Ponieważ każda kobieta dała 4 franki, y kobiet dało $4y$. Więc znajduje się :

$$[2] \qquad 6x + 4y = 45.$$

Rozwiązując te dwa zrównania, otrzymujemy :

$$x = 2\tfrac{1}{2}, \qquad y = 7\tfrac{1}{2}.$$

Roztrząsanie. To rozwiązanie *ułamkowe* jest jedyném które odpowiada zrównaniom : wreszcie, te zrównania są tłumaczeniem wierném i zupełném wysłowienia. Więc zagadnienie nie może mieć innego rozwiązania. Lecz *natura kwestyi wymaga aby rozwiązanie było złożone z liczb całkowitych : ponieważ liczby znalezione są ułamkowémi, zagadnienie jest niepodobném.*

171. Zagadnienie X. *Pewna osoba używająca robotnika przez* 13 *dni w lecie, zatrzymuje z jego zapłaty* 22 *franków za niektóre szkody przez niego zrządzone. Inną razą, używając tegoż samego robotnika przez* 17 *dni w zimie, płaci mu dziennie* 2 *franki mniéj jak za jego pracę dzienną letnią, lecz dodaje do jego zapłaty* 28 *franków więcéj dla wynagrodzenia gorliwości. W każdym razie, robotnik odebrał tęż samą summę. Pytanie po jakiéj cenie przypada praca robotnika dzienna wykonana w lecie.*

Niech będzie x tą ceną ; $(x - 2)$ będzie ceną dzienną w zimie.

Pierwszą razą, robotnik odebrał $(13x - 22)$.

Drugą razą, odebrał $17(x - 2) + 28$.

Mamy więc zrównanie :

$$17(x - 2) + 28 = 13x - 22.$$

Rozwiązując je, znajduje się $x = -4$.

Roztrząsanie. To rozwiązanie *odjemne* sprawdza zrównanie, i sprawdza je samo jedynie. Zagadnienie, którego to zrównanie tłumaczy wysłowienie, nie może więc mieć innego rozwiązania. Otóż *natura kwestyi wymaga aby rozwiązanie było liczbą dodatną : ponieważ ta liczba jest odjemną, zagadnienie jest niepodobném.*

172. Zagadnienie XI. *Znaleźć liczbę z dwóch cyfer, taką aby poczwórna cyfra jedności przewyższała o jedność potrójną cyfrę dziesiątków; i aby odejmując od tej liczby liczbę wywróconą, znalazło się* 36 *na resztę.*

Niech będą x cyfrą dziesiątków a y cyfrą jedności : mamy oczywiście :

[1] $$4y - 3x = 1,$$

[2] $$10x + y - 10y - x = 36.$$

Rozwiązując ten układ, znajduje się $x = 17$, $y = 13$.

Roztrząsanie. To rozwiązanie *całkowite i dodatne* jest jedyném które sprawdza zrównania. Zagadnienie nie może więc przyjąć innego rozwiązania. Lecz *natura kwestyi wymaga aby każda z liczb szukanych była mniejszą od* 10 : *ponieważ te liczby przestępują tę granicę, zagadnienie jest niepodobném.*

Te przykłady wystarczą dla pokazania że rozwiązanie układu jakiegokolwiek zrównań może nie odpowiadać zagadnieniu które ten układ wydało, ponieważ to rozwiązanie nie spełnia pewnych warunków jakim są poddane nieznane, zwłaszcza że te warunki zwykle nie są wyraźnie zapisanémi w zrównaniach. Lecz to stanowi jeden tylko z punktów widzenia pod któremi można uważać roztrząsanie zrównań. Jest inny daleko ważniéjszy : chcemy mówić o *rozwiązaniach odjemnych* i ich *wykładzie* (*wytłumaczeniu*).

ROZWIĄZANIA ODJEMNE ZAGADNIEŃ STOPNIA PIERWSZEGO O JEDNEJ NIEZNANÉJ.

173. Rozwiązanie odjemne zrównań. Nie mamy żadnéj uwagi do zrobienia nad liczbami odjemnémi które się spotyka jako rozwiązanie jednego albo ilukolwiek zrównań. Te liczby podstawione na miejscu nieznanych, uczynią pierwszy członek każdego zrównania równy drugiemu.

Lecz gdy nieznane przedstawiają wielkości do oznaczenia, zdaje się że rozwiązania odjemne, jako nie wyrażające żadnéj wielkości, powinny być uważanémi jako oznaka niepodobieństwa, a, następnie, odrzuconémi w skutek że są istotnie niedoprzypuszczenia. To rzeczywiście miałoby miejsce, gdyby przy składaniu w zrównanie można było zawsze wyrazić, sposobem ogólnym i dla wszystkich przypadków, warunki zagadnienia danego. Lecz bardzo często rzecz się dzieje inaczéj; i rozwiązania odjemne mogą znaleźć wtedy wytłumaczenie, które jest ważném do zbadania.

174. Twierdzenie. Rozważmy naprzód jedno zrównanie z jedną nieznaną :

[1] $$ax + b = a'x + b'$$

Przypuśćmy że rozwiązanie daje dla x wartość odjemną $-\alpha$; to znaczy że ma się równość :

$$a(-\alpha) + b = a'(-\alpha) + b',$$

to jest, $$b - a\alpha = b' - a'\alpha;$$

przeto, $x = +\alpha$ jest rozwiązaniem zrównania :

[2] $$b - ax = b' - a'x.$$

Porównanie zrównań [1] i [2] pokazuje że te nie różnią się jak tylko przez znak wyrazów które zamykają w sobie nieznaną.

Tak więc, *wszelkie rozwiązanie odjemne zrównania stopnia pierwszego z jedną nieznaną, wzięte ze znakiem dodatnim, zadosyć czyni zrównaniu jakie się otrzymuje, zmieniając, w pierwszém, znak wyrazów w których figuruje nieznana.*

175. Uwaga. Zdarza się często, jak to rychło pokażemy, że to nowe zrównanie odpowiada zagadnieniu mało różniącemu się od danego, a niekiedy temuż samemu zagadnieniu, zrozumianemu w znaczeniu więcéj ogólném; *otrzymuje się wtedy rozwiązanie zagadnienia nieco zmienionego albo uogólnionego, biorąc ze znakiem* $+$, *wartość odjemną znalezioną dla nieznanéj.*

Podobna uwaga nie może być rozwiniętą sposobem ogólnym; jest rzeczą główną zbadać, osobno, jéj zastosowanie w każdém pytaniu szczególném. To jest czém się właśnie zajmiemy w zagadnieniach następujących.

176. Zagadnienie XII. *Dwa ciała* M *i* N, *ożywione od początku ruchem prostolinijnym, wychodzą z dwóch punktów* A *i* B, *położonych w odległości* d *jeden od drugiego* (A po lewéj, B po prawéj ręce); te ciała z rozpoczęciem ruchu ciągle postępują, w tymże samym kierunku, od lewéj ku prawéj ręce, z prędkościami im odpowiedniemi v i v'. Po jakim czasie te dwa ciała spotkają się z sobą?

Niech będzie x czas szukany; pierwsze ciało, którego prędkość jest v, przebiega przestrzeń v w jednostce czasu, a tém samém, w czasie x, przebiega vx; drugie, podczas tego samego czasu, przebiega przestrzeń $v'x$. Otóż, ponieważ te ciała występują oba w jednym czasie, potrzeba, dla ich stanowczego spotkania się, aby pierwsze ciało przebiegło jednocześnie przestrzeń d więcéj jak drugie; więc mamy zrównanie:

[1] $$vx - v'x = d;$$

zkąd bezpośrednio wynika: $$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Roztrząsanie. Jeśli v jest większe jak v', ta wartość z x jest dodatną, i dostarcza rozwiązanie szukane. Lecz kiedy v jest mniejsze jak v', to rozwiązanie jest odjemném. Aby je należycie wytłumaczyć, uważmy że to rozwiązanie, wzięte dodatnio, zadosyć uczyni, na mocy twierdzenia (174), zrównaniu:

[2] $$v'x - vx = d.$$

Otóż to zrównanie wyraża oczywiście, że droga przebieżona przez ciało N przewyższa o d drogę przebieżoną przez ciało M; i ten warunek odpowiada pytaniu następującemu:

Przypuszczając że dwa ciała są w biegu od czasu nieoznaczonego, ile już czasu upłynęło jak się te ciała spotkały z sobą? Gdyż, w tém przypuszczeniu, spotkanie się ciał miało miejsce po lewéj stronie punktu A.

Jeśli więc chcemy wprowadzić to rozszerzone znaczenie do zagadnienia, to *wartość odjemna z* x *wyrażać będzie czas już upłyniony.*

Pojąć wreszcie nietrudno że, gdy znajduje się $v < v'$, ciało M, leżące w tyle ciała N, i postępując powolniéj jak ono, nie będzie mogło z niém spotkać się późniéj ; lecz że to tych dwóch ciał spotkanie musiało już odbyć się przed epoką obecną.

177. Zagadnienie XIII. *Dwie osoby mają po lat* a *i* b; *po jakim czasie wiek pierwszéj osoby stanie się podwójnym wieku drugiéj?*

Niech będzie x czasem szukanym; zrównanie zagadnienia jest oczywiście :

$$[1] \qquad a + x = 2(b + x);$$

zkąd się wyciąga : $x = a - 2b.$

Roztrząsanie. Jeśli a jest większém jak 2b, to wartość z x jest dodatną, i daje poznać rozwiązanie. Lecz, kiedy a jest mniejszem od $2b$, to rozwiązanie jest odjemném; wzięte dodatnio, zadosyć uczyni (174) zrównaniu,

$$[2] \qquad a - x = 2(b - x),$$

które odpowiada oczywiście kwestyi następującéj :

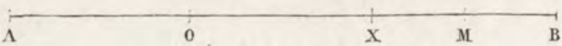
Ile już upłynęło czasu jak wiek pierwszéj osoby był podwójnym wieku drugiéj?

Gdy się przyjmie to rozciągnienie, *wartość odjemna z* x *wyraża jeszcze czas upłyniony.*

Uważmy że stosunek obecny wieku dwóch osób jest $\frac{a}{b}$; gdy więc ten stosunek jest większym jak 2 (czyli gdy $a > 2b$), to ponieważ ów stosunek postępuje zmniejszając się z czasem, przyjdzie epoka w któréj stanie się równym 2 : to jest przypadek rozwiązania dodatnego. Przeciwnie, gdy jest obecnie mniejszym jak 2 (czyli gdy $a < 2b$), to ponieważ ten stosunek zbliża się zawsze do jedności, więc tém samém nie może nigdy wyrównać 2 w przyszłości : nie ma więc rozwiązania w tym sensie. Lecz gdy, jednocześnie, a przewyższa b, musiała być epoka w któréj stosunek wieku dwóch osób był równym 2 ; i tę to epokę wskazuje rozwiązanie odjemne.

Dodajmy że, gdy a jest niższém jak b, zagadnienie nie ma oczywiście rozwiązania; widzimy, że w rzeczy saméj formuła $x = 2b - a$, zastosowana do tego przypadku, daje dla x wartość większą jak b, która nie może być przyjętą.

178. Zagadnienie XIV. *Weźmy na linii prostéj, dwa punkta* A *i* B : *pierwszy jest położonym po lewéj stronie punktu* O, *w odległości* a ; *a drugi jest położonym po prawéj, w odległości* b. *Oznaczyć, na téj linii, trzeci punkt* X, *taki aby biorąc środek* M *z* BX, *potém trzecią część z* AM *poczynając od* A, *punkt oznaczony zbiegał się z punktem* O.



Pzypuśćmy że punkt szukany X jest położony po prawéj stronie punktu O.

Niech będzie x odległość OX, wzięta za nieznaną. Ponieważ oczywiście figura daje :

$$\begin{cases} b = \mathrm{OM} + \mathrm{MB} \\ x = \mathrm{OM} - \mathrm{MX}, \end{cases}$$

a że $\mathrm{MB} = \mathrm{MX}$, przeto dodając te związki stronami otrzymuje się na wypadek :

$$b + x = 2\mathrm{OM}, \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{OM} = \frac{b+x}{2};$$

a następnie : $$\mathrm{AM} = \mathrm{AO} + \mathrm{OM} = a + \frac{b+x}{2}.$$

Lecz, podług wysłowienia :

$$\mathrm{AM} = 3\mathrm{AO} = 3a.$$

Tak więc wynika zrównanie :

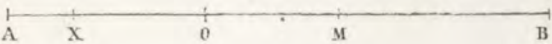
$$[1] \qquad 3a = a + \frac{b+x}{2};$$

zkąd łatwo znaleźć : $$x = 4a - b.$$

Roztrząsanie. Jeśli b jest mniejszém jak $4a$, to wartość z x jest dodatną, i daje rozwiązanie. Lecz, kiedy $4a$ jest liczbą mniejszą jak b, rozwiązanie jest odjemném ; rozwiązanie to, wzięte dodatnio, zadosyć uczyni (174) zrównaniu :

$$[2] \qquad 3a = a + \frac{b - x}{2};$$

Otóż to zrównanie jest właśnie tém do którego się przychodzi, przypuszczając punkt X położony w odległości x, po lewéj stronie punktu O. Gdyż, kreśląc figurę dla tego przypuszczenia, otrzymujemy łatwo :



$$\begin{cases} b = \mathrm{OM} + \mathrm{MB}, \\ x = \mathrm{MX} - \mathrm{OM}; \end{cases}$$

zkąd odciągając $\mathrm{OM} = \frac{b - x}{2}$, a następnie $\mathrm{AM} = a + \frac{b - x}{2}$;

przeto [2] $$3a = a + \frac{b - x}{2}.$$

Wynika ztąd, że *wartość odjemna z* x, *dostarczona przez zrównanie* [1], *powinna, w tym przypadku, być przeniesioną w kierunku przeciwnym temu w jakim była przypuszczoną przy ułożeniu w zrównanie.*

179. Uwaga. Nie trzeba mniemać że wszystkie rozwiązania odjemne tłumaczą się zarówno naturalnie jak poprzedzające. Nie należy nawet utrzymywać, sposobem ogólnym, że *wartość odjemna, znaleziona dla czasu przyszłego, wyraża czas upłyniony ; ani że długości odjemne, do przeniesienia na linią, poczynające się od początku stałego, powinny zawsze być liczonémi w kierunku przeciwnym temu który odpowiada wartościóm dodatnym.* Dzieje się to wszakże w ten sposób w bardzo wielu przypadkach ; i zaraz wyjaśnimy tego przyczynę.

180. Dla czego należy liczyć w przeszłości wartości odjemne czasu. Przypuśćmy że, oznaczając przez x czas który powinien upływać od epoki obecnéj aż do pewnego wypadku, znaleźliśmy, dla zrównania zagadnienia :

$$[1] \qquad B + Ax = B' + A'x.$$

Jeśliby, zamiast szukania czasu który powinien upływać poczynając od epoki obecnéj, miało się szukać czasu który powinien upływać poczynając od epoki zaszłéj przed t laty; gdyby, na przykład, wzięto za nieznaną *datę wypadku*, nazywając x_1 ten czas, miałoby się oczywiście :

$$x_1 = t + x;$$

zkąd :

$$x = x_1 - t;$$

a, tém samém, na miejscu zrównania [1], otrzymałoby się :

$$[2] \qquad B + A(x_1 - t) = B' + A'(x_1 - t);$$

i takie to byłoby właśnie zrównanie zagadnienia, gdyby przyjętą została x_1 za nieznaną.

Przypuśćmy że wartość na x_1, jaka ztąd wynika, jest dodatna, lecz mniejsza od t, a równa, naprzykład, różnicy $(t - \alpha)$; podstawiwszy ją w zrównanie [2], otrzymamy równość :

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha;$$

która wyraźnie pokazuje, że zrównanie [1] daje na rozwiązanie :

$$x = -\alpha.$$

Rozwiązanie odjemne, $x = -\alpha$, *znalezione dla zrównania* [1], *znaczy więc, że wypadek jest późniejszym o* $(t - \alpha)$ *lat względem epoki zaszłéj* t *lat przed epoką obecną, to jest że poprzedza* α *latami epokę obecną.*

181. Uwaga. Zrównanie [1] jest nakréślone, przez przypuszczenie, dla wartości dodatnych z x ; a zatém, zrównanie [2] jest na-

kreślone dla wartości z x, większych jak t, to jest dla epok późniejszych od epoki obecnéj. Stosując to ostatnie, jakośmy to już uczynili, do epoki zaszłéj przed epoką obecną, zrobiliśmy przypuszczenie które mogłoby być nieprzyjętém. Rozumowanie poprzedzające nie jest więc zupełnie ogólném.

182. Dla czego wartości odjemne odległości, należy liczyć w kierunku przeciwnym kierunku umówionego. Przypuśćmy teraz że, x oznacza odległość mierzoną na linii, poczynając od punktu danego O, i w pewnym kierunku, na prawo na przykład, i że znaleźliśmy je, dla zrównania wyrażającego nasze zagadnenie,

$$[1] \qquad B + Ax = B' + A'x.$$

Jeśliby, zamiast szukania odległości punktu nieznanego od początku danego O, postanowiło się szukać jego odległości x_1 od początku O′, położonego po lewéj stronie pierwszego, w odległości d, otrzymałoby się :

$$x_1 = d + x, \quad \text{albo} \quad x = x_1 - d;$$

a, tém samém, zamiast zrównania [1], otrzymałoby się, zrównanie :

$$[2] \qquad B + A(x_1 - d) = B' + A'(x_1 - d).$$

Przypuśćmy że to zrównonie dostarczyło dla x_1 wartość dodatną, lecz mniejszą jak d, a którą przedstawiamy przez $(d - \alpha)$; dla otrzymania położenia X punktu szukanego, potrzeba będzie przenieść odległość d z O′ do O, potém przenieść w kierunku przeciwnym odległość α z O do X. Punkt szukany będzie więc po lewéj stronie punktu O, i w odległości α od tego początku. Otóż, podstawiając na miejsce x_1, w zrównaniu [2], jego wartość $(d - \alpha)$, znajduje się :

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha;$$

zkąd wynika, że zrównanie [1] daje na zrównanie : $x = -\alpha$.

Rozwiązanie odjemne $x = -\alpha$, *znalezione dla zrównania* [1], *znaczy więc, że punkt szukany jest położony po lewéj stronie punktu* O, *i w odległości* α *od tego początku.*

183. Uwaga. Jak w numerze 181, tak i tu zauważymy, że rozumowanie poprzedzające nie jest zupełnie ogólném; przypuszcza bowiem ze zrównanie [2], które jest wykreślone dla punktów położonych po prawéj stronie punktu O, ponieważ wynika ze zrównania [1], stosuje się także do punktów położonych po lewéj stronie tego punktu. Otóż to nie zawsze ma miejsce; do wyjaśnienia czego posłuży nam bezpośrednio przykład następujący.

184. Zagadnienie XV. *Droga żelazna bierze* 0 *fr.* 10 *c. za przewóz beczki towaru odstawionéj o kilometr drogi; lecz płaci się, oprócz tego,* 3 *fr.* 75 *c. za wagon obładowany ciężarem* 2000 *kilogramów bez względu na odległość. Na jaką odległość możnaby* 50 *beczek za* 3 *fr. odstawić?*

Niech będzie x odległość szukana.

50 beczek, ważąc $2000^{\text{kg}} \times 25$, odpowiadają 25 wagonom; opłata stała wynosi więc

$$3,75 \times 25.$$

oprócz tego, za przewóz o x kilometrów, opłata proporcyonalna do odległości wynosi:

$$0,10 \times 50 \times x.$$

Zrównanie zagadnienia jest więc:

$$[1] \qquad (3,75 \times 25) + (0,10 \times 50 \times x) = 3;$$

po którego rozwiązaniu, otrzymujemy:

$$x = -18,15.$$

Roztrząsanie. Ta wartość odjemna wcale nic tu nie znaczy. Gdyż ceny przewozu 50 beczek, w odległości $18^{\text{k}}15$, *po prawéj albo po lewéj stronie* punktu wyjazdu, są zupełnie te same; przeto gdyby punkt szukany znajdował się położony po lewéj stronie, w odległości $18^{\text{k}}15$, jak zdaje się wskazywać rozwjązanie odjemne, musiałby się koniecznie znajdować inny, położony po prawéj stronie, w téjże saméj odległości; i zrównanie, które jest nakreślone w tym przypadku, dostarczyłoby rozwiązanie $x = + 18{,}15$. Rozpoznaje się, wreszcie, *a priori*, że zagadnienie jest niepodobném: gdyż opłata stała wynosi $3^{fr} 75 \times 25$, przewyższa więc cenę całą jaką należałoby zapłacić jako opłatę stałą i za przewóz.

Można się zapewnić że, w tym przypadku, rozumowanie numeru 182 jest niedostateczném. W rzeczy saméj, przypuśćmy że, ponieważ 50 beczek mają być przewiezionemi na prawo, bierzemy za początek punkt O położony w odległości d, po lewéj stronie punktu wyjazdu; odległość x, punktu szukanego od tego początku będzie $(x + d)$; będziemy przeto mieli $x = x_1 - d$. Zrównanie zagadnienia stanie się więc:

$$[2] \qquad 3{,}75 \times 25 + 0{,}10 \times 50 \times (x_1 - d) = 3.$$

Jeśliby to zrównanie (które jest nakréśloném dla punktów położonych po prawéj stronie punktu odjazdu, jako istotnie wynikające ze zrównania [1]), zostało zastosowane do punktów położonych po lewéj stronie, rozumowanie (182) mogłoby się daléj przeciągnąć; i wartość z x_1, dodatna, lecz mniejsza od d, odpowiadałaby rzeczywiście dla punktu położonego po lewéj stronie. Lecz zrównanie [2] nie odpowiada wcale dla przypadku przewozu wykonanego na lewo. W tym przypadku, w rzeczy saméj, droga przebieżona powinna być przedstawioną przez $d - x_1$; i potrzeba wziąć, za zrównanie zagadnienia, zrównanie:

$$[3] \qquad 3{,}75 \times 25 + 0{,}10 \times 50 \times (d - x_1) = 3,$$

które się różni od zrównania [2].

Wprowadzenie liczb odjemnych do samychże danych jakiegokolwiekbądź zagadnienia.

185. Korzyści z tego wprowadzenia. Jest niekiedy korzystnie wprowadzić liczby odjemne do samychże danych jakiegokolwiekbądź zadania. Dla pokazania w jaki sposób można do tego być przywiedzionym, i jakiéj natury jest korzyść na którą się natrafia, weźmy na nowo pod uwagę zagadnienie numeru 176.

Dwa ciała M *i* M′ *postępują po linij prostéj* AA′, *dążąc w tymże samym kierunku* AA′ : M *wychodzi z* A *z prędkością* v, *gdy jednocześnie* M′ *wychodzi z* A′ *z prędkością* v′. *Po jakim czasie te dwa ciała spotkają się z sobą?*

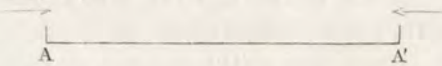
Nazywając x czas nieznany, a d odległość AA′, znaleźliśmy zrównanie (176) :

$$vx - v'x = d.$$

Widzieliśmy, że to zrównanie dostarcza rozwiązanie zagadnienia, wtedy nawet kiedy v jest mniejszém jak v', byleby tylko uważano wartość odjemną z x jako przedstawiającą czas już upłyniony.

Dla tém większego uogólnienia, przypuśćmy, że dwa ciała nie dążą obadwa w kierunku AA′: można uważać trzy przypadki odrębne.

1° Ciało M dąży na prawo, a ciało M′ na lewo ;



te dwa ciała spotykają się z sobą pomiędzy A i A′, po przebieżeniu przestrzeni, jedno vx a drugie $v'x$; a zatém zrównanie zagadnienia jest :

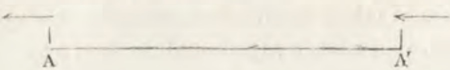
$$vx + v'x = d.$$

2° M dąży na lewo, M′ na prawo ;

Ciała nie spotkają się z sobą nigdy; lecz nazywając x czas upłyniony od chwili ich spotkania się z sobą, te ciała przebiegły, jedno przestrzeń vx a drugie $v'x$, przed przybieżeniem, jedno na punkt A a drugie na A′. Otrzymamy więc :

$$vx + v'x = d.$$

3° Nakoniec, jeśli przypuścimy że oba ciała dążą na lewo,



brak strony
195/196

187. Uwaga. Zrównania nowe, którym zadosyć czynią wartości odjemne nieznanych wzięte dodatnio, odpowiadają niekiedy zagadnieniu mało różniącemu się od danego, albo temuż samemu zagadnieniu, pojętemu w znaczeniu więcéj ogólném. Otrzymuje się natenczas rozwiązanie zagadnienia nieco zmienionego albo uogólnionego, biorąc, ze znakiem $+$, wartości odjemne znalezione dla nieznanych. Lecz ta uwaga, tak samo jak w przypadku zrównań z jedną nieznaną, nie może być rozwiniętą jak tylko wyłącznie w pytaniach szczególnych.

Uważmy, na przykład, zagadnienie następujące.

188. Zagadnienie XVI. *Kadź, objętości* v, *jest napełnioną, w czasie* t, *przez otworzenie* n *rurek, dostarczających każda tę samą ilość wody, i przez deszcz spadający jednostajnie na dach, którego powierzchnia jest* s. *Druga kadź, objętości* v′, *jest napełnioną, w czasie* t′, *przez otworzenie n rurek podobnych poprzedzającym, i przez deszcz padający jednostajnie na dach* s′ *z tą samą tęgością jak na dach* s. *Wywieść z tych danych ilość wody*, x, *dostarczoną przez każdą rurkę w jednostce czasu, i ilość wody* y *otrzymaną z deszczu, w przeciągu każdéj jednostki czasu, na każdą jednostkę powierzchni dachu.*

Ponieważ jedna rurka dostarcza, w jednostce czasu, ilość wody równą x, n rurek, w czasie t, dostarczą nxt.

Deszcz wylewając, w jednostce czasu, ilość wody równą y, na jedność powierzchni, wyleje, w czasie t, na powierzchnię s, ilość wody syt; otrzyma się więc zrównanie:

$$[1] \qquad nxt + syt = v.$$

Wyrażając że druga kadź jest napełnioną w czasie t', otrzyma się tak samo zrównanie:

$$[2] \qquad n'xt' + s'yt' = v';$$

a zrównania [1] i [2] pozwolą wyrachować x i y.

Przypuśćmy teraz, że rozwiązując je, znajduje się dla x wartość dodatną α, a dla y wartość odjemną $-\beta$. Potrzeba ztąd wnieść (186), że wartości $x = \alpha$, $y = \beta$, zadosyć uczynią zrównaniom:

$$\begin{cases} nxt - syt = v, \\ n'xt' - s'yt' = v'. \end{cases}$$

Te zrównania odpowiadają zagadnieniu różniącemn się od danego w tém, że deszcz, który napełnia kadzie, powinien być zastąpionym przez inną jakąkolwiek przyczynę która z nich uprowadza ilość wody proporcyonalną do czasu i do powierzchni ; na przykład, przez wyparowanie płynu.

Jeśli, przeciwnie, znalazłoby się dla x wartość odjemną, ta wartość, wzięta dodatnio, musiałaby zadosyć uczynić zrównaniom :

$$\begin{cases} syt - nxt = v, \\ s'yt' - n'xt' = v'. \end{cases}$$

Te zrównania odpowiadają zagadnieniu różniącemu się od danego, w tém że rurki wlewające wodę w kadzie, powinny być zastąpione przez liczbę równą przyczyn które wlaną wodę wypuszczają ; na przykład, przez otwory lub przez pompy, wypuszczające ilość x wody w jednostce czasu.

189. Uwagi. Uwagi zrobione (180, 182), z powodu wartości odjemnych znalezionych dla czasu albo dla długości, stosują się bez zmiany do przypadku w którym zrównania zamykają więcéj jak jedną nieznaną.

Dodać jeszcze należy że są inne wielkości prócz długości i czasu, które mogą być liczone w dwóch kierunkach sobie przeciwnych. I tak, temperatury po nad albo pod zerem, szerokości (geograficzne albo niebieskie) północne albo południowe, siły przyciągające albo odpychające, bilans (wykaz długów i wierzytelności) kupca, są właśnie wielkościami dającemi się łatwo przedstawić przez liczby dodatne albo odjemne.

Zauważmy przecież, na zakończenie, że nie jest niezbędnie potrzebném wprowadzenie liczb odjemnych w wysłowieniu zagadnień ; wolno jest przyjąć lub nie przyjąć te ugody. Lecz *jeżeli się chce uogólnić formuły, to jest jeśli się żąda aby jedna i ta sama formuła przedstawiała rozwiązanie zagadnienia we wszystkich przypadkach, te ugody są obowiązującemi ; potrzeba przedstawić zmianę kierunku przez zmianę znaku.*

O ROZWIĄZANIACH NIESKOŃCZONYCH ALBO NIEOZNACZONYCH.

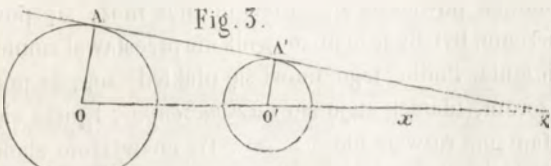
190. O rozwiązaniach tak nazwanych nieskończonémi. Kiedy formuła, którą dostarcza rozwiązanie ogólne zagadnienia, przedsta-

wia się pod postacią ułamkową, może się zdarzyć że pewne przypuszczenia, zrobione co do liter które ta formuła w sobie zawiera, zniszczą jéj mianownik, nie niszcząc bynajmniéj licznika. Ta formuła bierze wtedy postać $x = \frac{k}{0}$. Zobaczymy, przy roztrząsaniu ogólném formuł (rozd. XII), że zrownanie które ją dostarczyło jest wtedy niepodobném. Lecz nie dzieje się zawsze tym sposobem z zagadnieniem które ten wypadek sprowadza; można tylko twierdzić że ilość, wzięta za nieznaną, przestaje natenczas istnieć.

Weźmy jako przykład zadanie następujące:

191. Zagadnienie XVII. *Dwa koła, mające promienie* R *i* r, *nie wewnętrzne jedno względem drugiego, są położone na téjże saméj płaszczyznie; odległość ich środków jest* d. *Dajmy że mamy znaleźć punkt w którym styczna spólna zewnętrzna spotyka linią prostą łączącą środki dwóch kół danych.*

Fig. 3.



Oznaczmy przez x odległość punktu szukanego od środka mniejszego koła. Jeżeli się złączy każdy środek z punktem zetknięcia odpowiednim, utworzy się dwa trójkąty podobne, które dadzą bezpośrednio proporcyą:

[1] $$\frac{x+d}{x} = \frac{\mathrm{R}}{r};$$

z tąd się wyciąga:

[2] $$x = \frac{dr}{\mathrm{R} - r}.$$

Roztrząsanie. Dopóki tylko r pozostaje mniejszém jak R, wartość z x jest dodatną, i formuła pozwoli nakréślić punkt szukany. Jeżeli wartość z r przybliża się do wartości z R, wartość z x powiększa się, ponieważ jéj licznik wzrasta a mianownik zmniejsza się; punkt oddala się więc po linii środków. A ponieważ można uczynić różnicę $(R-r)$ dostatecznie małą, ażeby ułamek [2] stał się tak wielkim jak tylko sami zechcemy, promienie przeto dwóch kół mogą różnić się w swéj długości o ilość dostatecznie małą, ażeby punkt szukany przypadł na linii środków w takiéj od nich odległości jak tylko sami zechcemy. Nakoniec, na granicy, $r=R$, ułamek stanie się większym jak wszelka wielkość oznaczyć się mogąca. *Punkt spotkania oddala się więc wtedy nieograniczenie, i dwie proste, nie spotykając się więcéj z sobą, są równoległemi.* Widzimy że, w tym przypadku, zrównanie [1] bierze postać niepodobną: $\frac{d+x}{x}=1$, i że ta formuła przyjmuje postać szczególną $x=\frac{dr}{0}$; nie ma więcéj wtedy ani zrównania ani formuły, i punkt spotkania nie istnieje; lecz ten rezultat właśnie zawiera rozwiązanie zagadnienia.

192. Uwaga. Kiedy mianownik jakiegokolwiek ułamku zmniejsza się, ułamek powiększa się; i ten ułamek może się powiększać nieograniczenie, byleby jego mianownik nie przestawał zmniejszać się nieograniczenie. Podług tego, mówi się niekiedy że, gdy mianownik staje się zerem, ułamek staje się *nieskończonym;* i pisze się że ten ułamek daje na rozwiązenie $x=\infty$. To co właśnie stanowi wyrażenie błędne; *ułamek którego mianownik jest zerem zupełnie nic nie przedstawia.* Jeżeli dane jakiekolwiek zagadnienia zmieniają się w ten sposób, że mianownik wartości nieznanéj zmierza ku zeru, nieznana sama powiększa się bez granic; lecz kiedy mianownik jest rzeczywiście zerem, rozwiązanie nie istnieje, i zrównanie jest niepodobném.

193. O rozwiązaniach nieoznaczonych. Kiedy formuła, która daje rozwiązanie zagadnienia, przedstawia się pod postacią ułamkową, zdarza się niekiedy jeszcze, że pewne przypuszczenia szczególne, przypisane literom które ta formuła zamyka w sobie, zniszczą jednocześnie tak jej licznik jak i mianownik. Ta formuła przybiera wtedy postać $x=\frac{0}{0}$. Zobaczymy w dalszym ciągu (rozdział XII), że układ który ją dostarczył jest, w ogólności, *nieoznaczonym;* wszelako ta nieoznaczoność może być tylko pozorną.

Dajmy przykłady na te oba przypadki.

194. Zagadnienie XVIII. *Mamy dwie sztaby tworzące dwojakiego*

rodzaju mieszaninę złota ze srébrem; pierwsza z nich zawiera a *gramów złota i* b *gramów srébra; druga zawiera* a' *gramów złota i* b' *gramów srébra. Po wieleż gramów potrzeba wziąć z każdéj z tych dwóch sztab metallicznych na złożenie mieszaniny trzeciéj, zawierającéj* α *gramów złota i* β *gramów srébra?*

Niech x wyraża liczbę gramów wziąść się mających z pierwszéj sztaby a y z drugiéj.

Ponieważ ciężar $a+b$ zawiera a gramów złota i b gramów srébra, ciężar x, wydobyty z téj saméj mieszaniny, musi zawierać $\frac{ax}{a+b}$ w złocie, $\frac{bx}{a+b}$ w srébrze.

Podobnież, ciężar y, wzięty z drugiéj sztaby która waży $a'+b'$, zawierać będzie $\frac{a'y}{a'+b'}$ w złocie i $\frac{b'y}{a'+b'}$ w srébrze.

Tym sposobem rozumując, otrzymamy dwa zrównania:

$$[1]\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{ax}{a+b}+\frac{a'y}{a'+b'}&=\alpha,\\ \frac{bx}{a+b}+\frac{b'y}{a'+b'}&=\beta.\end{aligned}\right.$$

Rozwiązując ten układ, otrzyma się:

$$x=\frac{(a+b)(\alpha b'-\beta a')}{ab'-ba'},\quad y=\frac{(a'+b')(a\beta-b\alpha)}{ab'-ba'}.$$

Roztrząsanie. Jeśli przypuścimy, $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha}{\beta}$, to liczniki i mianowniki obu formuł będą zerami; tak że znajduje się:

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}.$$

Dla, wytłumaczenia tego rezultatu, uważmy że przypuszczenie przyjęte daje jako następstwa:

$$[2]\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{a}{a+b}&=\frac{a'}{a'+b'}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\\ \frac{b}{a+b}&=\frac{b'}{a'+b'}=\frac{\beta}{\alpha+\beta};\end{aligned}\right.$$

i że, jeżeli się zastąpi w zrównaniach [1] spółczynniki nieznanych przez ich wartości $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, wyciągnięte ze związków [2], obydwa zrównania sprowadzają się do zrównania jedynego :

[3] $$x+y=\alpha+\beta.$$

Ztąd wynika (158), że układ [1] jest nieoznaczonym. Lecz *zagadnienie samo przez się jest także nieoznaczoném*, i przyjmuje nieskończoną liczbę rozwiązań. W rzeczy saméj, przypuszczenie przyjęte wyraża, że stosunek złota do srébra jest tenże sam w trzech sztabach; więc, wszelkie ilości jakie weźmiemy z każdéj z dwóch sztab pierwotnie danych, utworzą oczywiście alliaż tego samego tytułu. Te ilości nie będą ograniczone innym warunkiem prócz warunku sprawdzenia zrównania [3].

195. Zagadnienie XIX. *Wyrachować powierzchnią trapezu, którego znamy podstawy* B *i* b, *i wysokość* h, *uważając tę powierzchnią jako różnicę powierzchni dwóch trójkątów jakie się otrzymuje, przez przedłużenie dwóch boków nierównoległych aż do ich spotkania.*

Oznaczmy przez x powierzchnią szukaną; i weźmy za nieznane posiłkowe wysokości y i z dwóch trójkątów. Z powierzchni tych trójkątów mających za miarę proste geometryi elementarnéj wyrażenia $\frac{1}{2}\mathrm{B}y$ i $\frac{1}{2}bz$, znajduje się naprzód zrównanie :

[1] $$x=\frac{1}{2}(\mathrm{B}y-bz).$$

Ponieważ dwa trójkąty są podobne, podstawy ich są proporcyonalne wysokościóm; więc

[2] $$\frac{y}{z}=\frac{\mathrm{B}}{b}.$$

Nakoniec, wysokość h, jako będąca różnicą wysokości y *i* z, daje widocznie :

[3] $$y-z=h.$$

Dla wyrugowania nieznanych posiłkowych, uważa się że zrównanie [2] daje:

$$\frac{y-z}{y}=\frac{\mathrm{B}-b}{\mathrm{B}}, \quad \frac{y-z}{z}=\frac{\mathrm{B}-b}{b};$$

zkąd, na mocy zrównania [3]:

$$y=\frac{\mathrm{B}h}{\mathrm{B}-b}, \quad z=\frac{bh}{\mathrm{B}-b}.$$

Podstawiając te wartości w zrównanie [1], otrzymujemy nakoniec:

[4] $$x=\frac{h}{2}\cdot\frac{\mathrm{B}^2-b^2}{\mathrm{B}-b}.$$

Roztrząsanie. Dopóki b nie jest równém B, ta formuła daje, dla powierzchni trapezu, wartość zupełnie oznaczoną. Lecz jeśli przy-przypuścimy $b=\mathrm{B}$, formuła przedstawia się pod kształtém $x=\frac{0}{0}$; i zagadnienie zdaje się nieoznaczoném. Wszakże *ta nieoznaczoność jest tylko pozorną;* gdyż, w tym przypadku, trapez staje się równoległobokiem, którego powierzchnia jest równą Bh. Można, wreszcie, wyciągnąć z ułamku to wyrażenie powierzchni, jeśli się zauważy że czynnik $(\mathrm{B}-b)$ dzieli (B^2-b^2), i że znosząc ten czynnik spólny, wypadnie:

$$x=\frac{h}{2}(\mathrm{B}+b),$$

formuła znana, na powierzchnią trapezu, która staje się rzeczywiście, $x=\mathrm{B}h$, w przypadku gdy $b=\mathrm{B}$.

196. Uwaga. Widzimy że, kiedy natrafiamy na formułę, która, z powodu przypuszczeń szczególnych, bierze kształt $\frac{0}{0}$, nie trzeba pospiesznie twierdzić że zagadnienie, którego ta formuła daje rozwiązanie, jest nieoznaczoném. Może się bowiem zdarzyć że nieozna-

czoność jest tylko pozorną, i że zależy jedynie, jak w przypadku poprzedzającym, od istotnéj przytomności czynnika spólnego w obu wyrazach, który to czynnik staje się zerem na mocy przypuszczeń przyjętych. *Powinno się więc, przed wszelkiém przypuszczeniem, znieść ten czynnik spólny, i zrobić potém, w formule tak uproszczonéj, przypuszczenia umówione : otrzyma się tym sposobem prawdziwą wartość ułamku, na ten przypadek szczególny.*

Przypuśćmy, na przykład, że mamy, jako rozwiązanie pewnego zagadnienia :

$$x = \frac{a^3 - 3a^2 + 4a - 2}{a^2 + 3a - 4},$$

i że roztrząsanie przywodzi do zrobienia przypuszczenia, $a = 1$. Oba wyrazy zniszczą się, i ułamek przyjmuje kształt $\frac{0}{0}$. Otóż, oba wyrazy są wielomianami całkowitemi względem a, a wiemy (75) że te wielomiany są podzielne przez $(a - 1)$. Wykonawszy więc to dzielenie, znajdziemy formułę uproszczoną :

$$x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a + 4},$$

która, dla $a = 1$, ma wartość $x = \frac{1}{5}$.

ĆWICZENIA.

I. Dwa naczynia, objętości v i v', zawierają mieszaninę wody wina, pierwsze w stosunku m do n, drugie w stosunku m' do n'. Jaką objętość x potrzeba dać dwóm innym naczyniom, równym między sobą, ażeby, napełniając je jednocześnie, jedno płynem znajdującym się w jedném z naczyń danych, drugie cieczą będącą w drugiém, i wlewając do każdego z nich to co było w drugiém, proporcya wody do wina stała się tąż samą w dwóch naczyniach ? Wykazać, *a priori*, że rezultat powinien być niezależnym od m, n, m', n'.

brak stron 205/206

XI. n kamieni są ustawionemi w linii prostéj o d metrów odległości jedne od drugich. Zamierzamy sobie wyznaczyć, na tej prostéj, położenie punktu X takiego, żeby było dwa razy więcéj drogi do zrobienia przy przyniesieniu koléjno każdego kamienia do punktu X, jak przy przeniesieniu na miejsce zajęte przez piérwszy z pomiędzy nich. Przypuszcza się, w obu przypadkach, że wychodzimy z tego piérwszego kamienia.

Oznaczywszy przez x odległość punktu X od pierwszego kamienia, przypuszczając ten punkt po tamtéj stronie ostatniego, znajdziemy :

$$x = \frac{3n(n-1)}{2n-1} d.$$

Uogólni się zadanie przypuszczając że stosunkiem dróg do przebieżenia jest m zamiast 2; znajdziemy :

$$x = \frac{(m+1)n(n-1)}{2n-1} d;$$

w wyrażeniu tém rozbierze się warunki podobieństwa zagadnienia. Jeżeli rozwiązanie jest odjemném, jestli podobna tego przypuszczenia dać należyte wytłumaczenie?

XII. Potrzebną jest liczba mężczyzn równa a, albo liczba kobiet równa b, dla zrobienia w n dniach, roboty przedstawionéj przez m. Ileż potrzeba przydać kobiet do $(a-p)$ mężczyzn, dla wykonania, w $(n-p)$ dniach, roboty przedstawionéj przez $(m+p)$?

Znajdujemy : $$x = \frac{bp}{a}\left\{1 + \frac{(m+p)a}{m(n-p)}\right\}.$$

XIII. Temperatura termometru zmienia się, w tymże samym kierunku o d stopni przez godzinę. Jest ona obecnie równą n stopniom. Chcemy naznaczyć temperaturę x, w epoce danéj t.

Znajduje się : $$x = n + dt.$$

Roztrząsnąć rozwiązanie, i dowieść że ta formuła odpowiada zarówno wszystkim przypadkom.

XIV. Znaleźć dwie liczby x, y, które są w stosunku 2 do 3, i takie, że dodając 4 do każdéj z nich, summy otrzymane będą między sobą w stosunku 4 do 5.

Znajduje się : $$x = 4, \quad y = 6.$$

XV. Znaleźć dwie liczby x, y, które są w stosunku 3 do 4, i których wieloczyn równa się 12 razy ich summie.

Znajduje się : $x=21, \quad y=28.$

XVI. Znaleźć dwie liczby x, y, których różnica, summa i wieloczyn są między sobą jako liczby 2, 3 i 5.

Znajduje się : $x=10, \quad y=2.$

XVII. Znaleźć trzy liczby x, y, z, w postępie arytmetycznym, takie że piérwsza ma się do trzeciéj jako 5 jest do 9, i że summa trzech liczb równa się 63.

Znajduje się : $x=15, \quad y=21, \quad z=27.$

XVIII. Mając dany ciąg liczb :

$$a+b, \quad ap+bq, \quad ap^2+bq^2, \quad ap^3+bq^3, \quad ap^4+bq^4, \ldots\ldots;$$

znaleźć dwie liczby x i y, takie żeby każdy wyraz tego ciągu mógł się otrzymać mnożąc wyraz poprzedni przez x, a przedpoprzedni przez y, i dodając do siebie wypadłe z rozmnożenia rezultaty,

Tworzy się trzeci i czwarty wyraz według tego prawidła, i otrzymuje się :

$$x=p+q, \quad y=-pq;$$

potém dowodzi się że w rzeczy saméj te mnożniki dają wszystkie wyrazy szeregu.

XIX. Mając ciąg liczb :

$$a+b+c, \quad ap+bq+cr, \quad ap^2+bq^2+cr^2, \quad ap^3+bq^3+cr^3, \ldots\ldots;$$

znaleźć trzy liczby x, y, z, takie żeby każdy wyraz tego ciągu otrzymał się mnożąc wyraz poprzedni przez x, przedpoprzedni przez y, a ten który poprzedza wyraz szukany o trzy rzędy przez z, i dodając do siebie otrzymane z rozmnożenia rezultaty.

Znajduje się : $x=p+q+r, \quad y=-pq-pr-qr, \quad z=pqr.$

XX. Dla zrobienia pewnéj roboty, A używa m razy tyle czasu jak B i C społem; B używa n razy tyle czasu jak A i C; C używa p razy tyle czasu jak A i B. Znaleźć związek pomiędzy m, n i p.

Znajduje się :
$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1.$$

XXI. Jaki związek powinien istnieć pomiędzy trzema liczbami a, b, c, ażeby te stanowiły wyrazy rzędów p, q, r, w tymże samym postępie różnicowym albo ilorazowym ?

Znajduje się, w przypadku postępu różnicowego :

$$a(r-q)+b(p-r)+c(q-p)=0\ ;$$

a, w przypadku postępu ilorazowego :

$$a^{r-q}\times b^{p-r}\times c^{q-p}=1.$$

XXII. Mamy dane punkta A, B, C, D, ..., położone na linii prostéj, w odległościach a, b, c, d, ..., od punktu O téj prostéj. Znaleźć, na téj prostéj, punkt X taki, żeby jego odległość x od punktu jakiegokolwiek M linij prostéj danéj była średnią odległości punktów A, B, C, D, ... od punktu M. Wykazać, że za pomocą umów odpowiednich, można rozwiązać zagadnienie przez formułę jedyną, jakiekolwiek by były położenia punktów A,B,C,D, ... po prawéj lub po lewéj stronie punktu O.

Formuła jest :
$$x=\frac{a+b+c+d+\dots}{n},$$

n będąc liczbą punktów uważanych : ta formuła jest niezależną od położenia punktu M.

XXIII. Daje się podstawy a i b i wysokość h trapezu. Wyrachować wysokość x trójkąta otrzymanego, przez przedłużenie boków nierównoległych aż do ich spotkania. Wytłumaczyć rozwiązanie, w razie gdy to jest odjemném.

Formuła jest :
$$x=\frac{ah}{a-b}$$

XXIV. Wpisać prostokąt, obwodu danego $2p$, w trójkąt którego podstawa jest b a wysokość h.

Oznaczając przez x podstawę prostokąta równoległą do podstawy trójkąta, a przez y jego wysokość, znajduje się :

$$x = \frac{(h-p)b}{h-b}, \ y = \frac{(p-b)h}{h-b}.$$

Potém szukać należy jakie są warunki, ażeby zagadnienie było możebném, to jest ażeby x i y były dodatnémi ; daléj zauważy się przypadki niepodobieństwa i nieoznaczoności. Nakoniec wytłumaczy się rozwiązania, kiedy te staną się odjemnémi, z powodu przypuszczeń następujących : 1° $h > b > p$; 2° $h < b < p$; 3° $b < h < p$; 4° $b > h > p$.

ROZDZIAŁ XI.

O NIERÓWNOŚCIACH.

---

197. Nierówności zawierające jedną nieznaną. Jeżeli jakiekolwiek wyrażenie, zależne od liczby nieznanéj, powinno być większém albo mniejszém jak inne wyrażenie, to wyrażenie to, zwane *nierównością*, pozwoli, w ogólności, wskazać granice, pomiędzy któremi nieznana musi być albo nie może być zawartą. Damy téj nierówności w tym rozdziale kilka przykładów.

198. Zasada I. *Można, nie zmieniając bynajmniéj warunków jakie wyraża nierówność, powiększyć lub zmniejszyć jéj obie strony tąż samą liczbą.* W rzeczy saméj, niech będzie nierówność :

$$a > b;$$

ta jest równoważną, przez definicyą, z wyrażeniem $a - b > 0$. Otóż, jokiekolwiekby było m, ma się :

$$a - b = a + m - b - m = (a + m) - (b + m);$$

więc : $$(a + m) - (b + m) > 0;$$

albo, według definicyi :

$$[1] \qquad a + m > b + m.$$

Wynika ztąd, że *można przenieść jakikolwiek wyraz z jednéj strony nierówności na drugą, zmieniając jego znak*, jakby to miało miejsce w zrównaniu.

199. Zasada II. *Można pomnożyć obie strony nierówności przez tęż samą, byle dodatną liczbę.*

W rzeczy saméj, nierówność $a > b$ równoważną jest z $a - b > 0$. Otóż, jeśli się pomnoży $(a - b)$ przez czynnik dodatny m, wieloczyn jest dodatnym. Więc ma się :

$$(a - b)m > 0, \quad \text{albo} \quad am - bm > 0,$$

albo, według definicyi :

$$[2] \qquad am > bm.$$

Można także pomnożyć obie strony nierówności przez czynnik odjemny ; lecz potrzeba zmienić kierunek nierówności. Gdyż jeżeli mamy :

$$a > b, \quad \text{albo} \quad a - b > 0,$$

wieloczyn z $(a - b)$ przez czynnik odjemny m będzie odjemnym. Otrzyma się więc :

$$(a - b)m < 0, \quad \text{albo} \quad am - bm < 0,$$

albo, nakoniec

$$[3] \qquad am < bm.$$

Te zasady pozwalają *znieść mianownik jakiejkolwiek nierówności*, jakby to miało miejsce w zrównaniu, kiedy się wie znak mnożnika. Też same zasady stosują się do dzielenia obu stron nierówności przez m; gdyż mnożyć przez m wychodzi na jedno co dzielić przez $\frac{1}{m}$, a dwie liczby m i $\frac{1}{m}$ są zawsze tegoż samego znaku.

200. Zasada III. *Kiedy dwie strony nierówności są dodatne, można je wynieść do téjże saméj potęgi* m^{tej}, *jakiekolwiekby było* m. W rzeczy saméj, im liczba jest większą, tém większa będzie jéj potęga m^{ta}. I tak, $7 > 3$ daje $7^4 > 3^4$.

Kiedy obie strony nie są dodatnemi, potrzeba rozróżnić rozmaite przypadki.

1° *Jakiekolwiek znaki miałyby obie strony, można je podnieść do téjże saméj potęgi* m^{tej}, *kiedy* m *jest nieparzystém.* Gdyż obie strony, po wykonaniu działania, zachowują swe znaki, a tém samém kierunek nierówności. Na przykład,

$$\left.\begin{array}{llll} \text{jeżeli} & 7 > -13, & \text{z tąd wynika} & 7^3 > (-13)^3\,; \\ \text{jeżeli} & -7 > -13, & \text{»} & (-7)^3 > (-13)^3\,. \end{array}\right\} \quad [4]$$

2° Lecz, jeżeli ma się podnieść dwie strony nierówności do téjże samej potęgi *stopnia parzystego*, potrzeba poddzielić jeszcze.

Kiedy obie strony są odjemnemi, nierówność zmienia kierunek, gdyż dwie strony stają się odjemnemi po wykonaniu działania. I tak, z nierówności,

$$-7 > -13,$$

wynika kolejno:

$$13 > 7 \qquad 13^4 > 7^4, \qquad (-13)^4 > (-7)^4$$

a, tém samém, $(-7)^4 < (-13)^4$. [5]

Kiedy dwie strony są znaków różnych, nie można wtedy dać prawidła. Nierówność może zmienić swój kierunek, albo go nie zmieniać, albo nawet przekształcić się na równość. I tak znajduje się:

$$\left.\begin{array}{lcl} 7 > -3 & \text{a} & 7^4 > (-3)^4, \\ 7 > -13 & \text{a} & 7^4 < (-13)^4, \\ 7 > -7 & \text{a} & 7^4 = (-7)^4. \end{array}\right\} \quad [6]$$

201. Zasada IV. *Z dwóch stron nierówności jakiekolwiek mających znaki, można wyciągnąć pierwiastek wskazówki nieparzystéj;* gdyż dwa pierwiastki mają tenże sam znak jak dwie liczby. I tak:

$$\left.\begin{array}{lcll} 27 > 8 & \text{daje} & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8}\,, & \text{albo} \quad 3 > 2, \\ 27 > -8 & \text{»} & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{-8}, & \text{albo} \quad 3 > -2, \\ -8 > -27 & \text{»} & \sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27}, & \text{albo} \; -2 > -3. \end{array}\right\} \quad [7]$$

2° Jeżeli wskazówka jest parzystą, potrzeba, żeby pierwiastki istniały, aby obie strony były dodatnemi (95). A wtedy, każdy pierwiastek ma dwie wartości równe i ze znakami przeciwnemi. W tym przypadku, nierówność będzie zachowywała swój kierunek albo go będzie zmieniać, wedle tego jak się będzie rozważało wartości dodatne lub wartości odjemne pierwiastków. I tak :

nierówność, $36 > 25,$

$$\text{daje :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{36} > \sqrt{25}, \\ -\sqrt{36} < -\sqrt{25}, \end{array} \right. \quad \text{albo} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 > 5, \\ -6 < -5, \end{array} \right\} \quad [8]$$

Lecz, *jeśli się weźmie znaki różne dla obu pierwiastków, wyraz odjemny jest zawsze najmniéjszym.* I tak :

nierówność, $36 > 25,$

$$\text{daje} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{36} > -\sqrt{25}, \\ \sqrt{25} > -\sqrt{36}, \end{array} \right. \quad \text{albo} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 > -5, \\ 5 > -6. \end{array} \right\} \quad [9]$$

Zasady odnoszące się do nierowności jednoczesnych.

202. Zasada V. *Można dodać stronami dwie nierówności wzięte w tymże samym kierunku : nowa nierówność ma tenże sam kierunek jaki jest przywiązany do każdéj z dwóch danych.*

Niech będą, w rzeczy saméj, dwie nierówności :

$$a > b \qquad c > d\,;$$

te są równoważne z następującémi :

$$a - b > 0, \qquad c - d > 0\,;$$

otóż summa dwóch ilości dodatnych jest dodatną; więc ma si :

$$a - b + c - d > 0,$$

albo [10] $$a + c > b + d.$$

Lecz ta nowa nierówność nie może, jak to ma miejsce w zrównaniach, zastąpić jednéj z dwóch danych. Innemi słowy, dwa układy,

$$\begin{cases} a > b \\ c > d, \end{cases} \qquad \begin{cases} a > b \\ a + c > b + d, \end{cases}$$

nie są równoważnemi. Drugi jest następstwem pierwszego, lecz pierwszy nie jest następstwem drugiego.

Jeżeli dwie nierówności są kierunków przeciwnych, nie ma prawidła do wskazania. Znajduje się, w rzeczy saméj :

$$\left.\begin{matrix} 7 > 3 \\ 8 < 13, \end{matrix}\right\} \quad \text{a} \quad 7 + 8 < 3 + 13;$$

$$\left.\begin{matrix} 7 > 3, \\ 8 < 12, \end{matrix}\right\} \quad \text{a} \quad 7 + 8 = 3 + 12;$$

$$\left.\begin{matrix} 7 > 3, \\ 8 < 10 \end{matrix}\right\} \quad \text{a} \quad 7 + 8 > 3 + 10.$$

203. Zasada VI. *Można odciągnąć stronami jedną nierówność od drugiéj nierówności kierunku przeciwnego : nowa nierówność przechowa się w kierunku pierwszéj.*

Niech będą, w rzeczy saméj, dwie nierówności :

$$a > b, \qquad c < d;$$

te są równoważne z następującemi :

$$a > b, \qquad d > \;\;;$$

a, następnie (202), dają :

$$a + d > b + c,$$

albo (198) [11] $a - c > b - d.$

Ta nowa nierówność nie może zastąpić jednéj z dwóch danych.

Nie można odciągnąć jednéj nierówności od drugiéj, kiedy te są tego samego kierunku (202).

204. Zasada VII. *Można mnożyć stronami dwie nierówności tego samego kierunku, kiedy wszystkie wyrazy są dodatne : nierówność nowa jest tegoż samego kierunku jak każda z nich.*

W rzeczy saméj, niech będą : $a > b, \quad c > d;$

ponieważ c i b są dodatne, ma się, mnożąc pierwsza przez c, a drugą przez b (199) :

$$ac > bc, \qquad bc > bd,$$

a, tém samém, [12] $ac > bd.$

Jeżeli cztery wyrazy są odjemne, nierówność nowa jest kierunku przeciwnego kierunkowi dwóch danych. Gdyż mnożąc pierwszą przez c a drugą przez b, ma się, z powodu że te czynniki są odjemne :

$$ac < bc, \qquad bc < bd,$$

a, tém samém, [13] $ac < bd.$

Nowa nierówność [12] albo [13] nie może zastąpić jednéj z danych.

Nie umiemy dać prawidła ogólnego w odniesieniu do nierówności kierunków przeciwnych.

205. Zasada VIII. *Można dzielić stronami jedną nierówność przez drugą kierunku przeciwnego, kiedy wszystkie wyrazy są dodatne : nowa nierówność ma tenże sam kierunek jak pierwsza.*

Niech będą, w rzeczy saméj : $a > b, \quad c < d;$

można napisać : $a > b, \quad d > c,$

a, tém samém (204), $ad > bc;$

zkąd się wyciąga, dzieląc obie strony przez cd (199) :

[14] $$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Jeżeli cztery wyrazy są odjemne, nierówność nowa ma kierunek drugiéj: gdyż, wykonywając mnożenie, znajduje się (204):

$$ad < bc,$$

a, dzieląc przez wieloczyn cd, który jest dodatnym, przyjdzie:

$$[15] \qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Nie można wskazać prawidła ogólnego na inne przypadki.

Nierówność stopnia pierwszego z jedną nieznaną.

206. Rozwiązanie nierówności. Nierówność z jedną nieznaną nazywa się *stopnia pierwszego,* kiedy ta może się przywieść do kształtu

$$ax + b > a'x + b',$$

gdzie a, b, a', b', oznaczają liczby dane, które mogą być dodatnemi lub odjemnemi.

Dla *rozwiązania* téj nierówności, przenosi się wyrazy zawierające ilość nieznaną na jedną stronę, a wyrazy wiadome na drugą (198); tym sposobem przekształcając otrzymuje się:

$$(a - a')x > b' - b.$$

Daléj rozróżnia się dwa przypadki:

1° Jeżeli mnożnik $(a - a')$ jest dodatnym, znajduje się, dzieląc (199) przez $(a - a')$:

$$x > \frac{b' - b}{a - a'}.$$

2° Jeżeli $(a - a')$ jest odjemnym, znajduje się przeciwnie (199):

$$x < \frac{b' - b}{a - a'}.$$

Tak więc, *dla zadosyć uczynienia nierówności, wystarczy wziąć* x *wyższém albo niższém od pewnéj granicy*. Można zauważyć, że ta granica jest dokładną wartością z x, którą wydałaby dwie strony równe.

207. Zagadnienie. Rozwiążmy, jako zastosowanie, zagadnienie następujące : *Dwa punkta* A *i* B *są położone w odległości* 2c ; *wiemy że punkt* M *jest takim, że* MA + MB = 2a, a *będąc długością daną, większą jak* c. *Znaleźć pomiędzy jakiemi granicami mogą się zmieniać* AM *i* BM.

Przypuśćmy AM > BM. Połóżmy : AM = x, BM = y. Mamy naprzód, według wysłowienia :

[1] $$x + y = 2a.$$

Co więcéj, żeby trójkąt AMB był możebnym, potrzeba aby każdy bok był mniejszym jak summa dwóch innych, to jest żeby było :

$$2c < x + y, \quad y < 2c + x. \quad x < 2c + y.$$

Otóż pierwsza z tych nierówności jest oczywistą, na mocy zrównania [1] ; druga jest oczywistą, ponieważ y jest mniejszém jak x. Pozostaje więc trzecia,

[2] $$x < 2c +$$

Jeżeli się zastąpi y przez jego wartość $(2a - x)$, ta nierówność staje się :

$$x < 2c + 2a - x\,;$$

z kąd [3] $$x < a + c.$$

Lecz gdy y jest równém rzeczywiście $(2a - x)$, staje się więc większém im x będzie mniejszém. Więc y powinno być większém jak $[2a - (a + c)]$, to jest jak $(a - c)$. Tak więc

[4] $$y > a - c.$$

Takiemi są granice szukane.

ĆWICZENIA.

I. Dowieść że średnia arytmetyczna między dwoma liczbami dodatnémi nierównémi jest większą jak ich średnia proporcyonalna.

Opiera się całe dowodzenie na nierówności $(a-b)^2 > 0$.

II. Mając dwie liczby a, b dodatne dane tak że $a > b$, wyprowadzić z nierówności

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}},$$

granice pomiędzy któremi wartość z x musi być zawartą. Radykale są wzięte ze znakiem $+$.

Znajduje się że x musi być odjemném, albo większém jak $\sqrt{ab}$.

III. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne, żeby nierówność,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F > 0,$$

było sprawdzoną, dla jakichkolwiek bądź wartości x i y.

Przywodzi się nierówność do kształtu,

$$A\left(y + \frac{Bx+D}{2A}\right)^2 + M\left(x + \frac{N}{2M}\right)^2 + Q > 0,$$

przypuszczczając :

$$C^2 - \frac{B^2}{4A} = M,\ E - \frac{BD}{2A} = N,\ F' - \frac{D^2}{4A} = P,\ P - \frac{N^2}{4M} = Q;$$

i dowodzi się że warunkami szukanemi są :

$$A > 0,\quad M > 0,\quad Q > 0.$$

IV. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne, żeby nierówność,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D > 0,$$

była sprawdzoną, dla jakichkolwiek wartości x, y, z.

Można napisać wielomian dany pod kształtem,

$$A(x + \alpha y + \beta z + \gamma)^2 + M'(y + \delta z + \varepsilon)^2 + R''(z + \eta)^2 + V;$$

i udowodnić że warunkami zagadnienia są :

$$A > 0, \quad M' > 0, \quad R'' > 0, \quad V > 0.$$

V. Dowieść że $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ jest zawartém pomiędzy największém i najmniészém ze czterech wyrażeń danych $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$.

Dowodzi się ta własność dla logarytmów tych wyrażeń ; i wyciąga się ztąd następstwo dla samych wyrażeń.

VI. Dowieść że znajduje się zawsze :

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}\ \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots},$$

chyba żeby było : $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{a'}{\alpha'} = \dfrac{a''}{\alpha''} = \ldots$

Przypuszcza się naprzód że $a, a', a'', \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, są dodatnemi i sprawdza się nierówność, podnosząc obie strony do kwadratu : potém uogólnia się.

VII. Dowieść że $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ jest zawsze dodatném, dla jakichkolwiekbądź wartości dodatnych z x i z y.

Dowodzi się to łatwo, rozkładając wyrażenie na czynniki.

VIII. Dowieść że jest zawsze :

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2,$$

dla jakichkolwiekbądź wartości dodatnych lub odjemnych, z a.

Tenże sam sposób dowodzenia.

IX. Udowodnić że istnieje :

$$abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a),$$

dla jakichkolwiekbądź liczb dadatnych nierównych a, b, c.

Cała ta własność opiera się na nierównościach oczywistych, kształtu,

$$a^2 > a^2 - (b - c)^2.$$

X. Dowieść że jest :

$$ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) > 6abc,$$

dla lakichkolwiekbądź liczb dodatnych nierównych a, b, c.

Sprawdza się nierówność, przypuszczając że a jest najmniejszą z trzech liczb danych, biorąc $b = a + \alpha$, $c = a + \beta$ (gdzie α i β są dodatnemi), i wykonywając wtedy rachunki.

XI. Dowieść że, dla jakichkolwiekbądź liczb dodatnych nierównych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, istnieje zawsze :

$$\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \sqrt{a_2 a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1} a_n}.$$

Dowód ścisły téj własności opiéra się na nierównościach kształtu,

$$a_p + a_q > 2\sqrt{a_p a_q},$$

dowiedzionych w piérwszém ćwiczeniu tego rozdziału.

ROZDZIAŁ XII.

WZORY OGÓLNE NA ROZWIĄZANIE ZRÓWNAN STOPNIA PIERWSZEGO.

FORMUŁA OGÓLNA NA ROZWIĄZANIE JAKIEGOKOLWIEK ZRÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEZNANĄ.

208. Formuła ogólna. Zrównanie pierwszego stopnia o jednéj nieznanéj może mieć dwojakiego gatunku wyrazy, to jest: wyrazy zawierające ilość nieznaną i wyrazy które jéj w sobie nie zawierają. Po uproszczeniu więc, w każdym członku, wyrazów podobnych, kształt najogólniejszy zrównania będzie:

[1] $$ax + b = a'x + b'.$$

Zkąd wyciąga się:

$$(a - a')x = b' - b;$$

a dzieląc przez $(a - a')$, wypada formuła:

[2] $$x = \frac{b' - b}{a - a'}.$$

Lecz ta formuła nie jest równoważną ze zrównaniem [1], jak tylko w przypadku gdy $(a - a')$ nie jest zerem (122).

209. Roztrząsanie formuły. Kiedy a' nie jest równém a, formuła [2] przedstawia liczbę dodatną, zero lub odjemną, która, podstawiona w zrównanie [1], i traktowana podług prawideł przyjętych, uczyni pierwszą stronę równą drugiéj. Jedyny przypadek, jaki należy rozebrać osobno, jest więc ten gdzie $(a - a') = 0$. Lecz wtedy dwa przypuszczenia mogą się przedstawiać:

1° $(a - a')$ *jest zerem, lecz* $(b' - b)$ *zerem nie jest.* Formuła druga daje :

$$x = \frac{b' - b}{0};$$

co wcale nic nie znaczy. Wróciwszy się do zrównania dla wytłumaczenia tego wypadku, zobaczymy że gdy a' jest równém a, zrównanie dane staje się :

$$ax + b = ax + b',$$

co nie może mieć miejsca, gdyż b' nie jest równém b.

Więc *zrównanie jest niepodobném ; i niepodobieństwo objawia się, we wzorze, pod kształtem,* $x = \frac{m}{0}$.

2° $(a - a')$ *jest zerem, jednocześnie z* $(b' - b)$. Formuła staje się, w tym przypadku :

$$x = \frac{0}{0};$$

co wcale nic nie znaczy. Wróciwszy się do zrównania, widzimy że to zrównanie staje się :

$$ax + b = ax + b.$$

Więc *jakakolwiek wartość* x *zadosyć czyni zrównaniu*; i nieoznaczoność objawia się pod kształtem, $x = \frac{0}{0}$.

Tak więc, zrównanie pierwszego stopnia o jednéj nieznanéj, albo przyjmuje rozwiązanie jedyne i oznaczone, albo to zrównanie nie przyjmuje żadnego rozwiązania, albo ma za takowe ilość nieograniczoną.

210. Uwaga. Dowodzi się niekiedy wprost, nie rozwięzując zrównania [1], że *toż zrównanie posiada tylko jedną odpowiedź, bylebyśmy nie mieli jednocześnie,* $a = a'$, $b = b'$. W rzeczy saméj, przypuśćmy że dwie wartości różne z x, α i β, sprawdzają zrównanie ; podstawienie ich wyda tosamości :

$$\begin{cases} a\alpha + b = a'\alpha + b'; \\ a\beta + b = a'\beta + b'; \end{cases}$$

zkąd wyciąga się, przez odciąganie :

$$a(\alpha - \beta) = a'(\alpha - \beta).$$

Otóż, można dzielić dwie strony przez mnożnik $(\alpha - \beta)$ który nie jest zerem; więc :

$$a = a';$$

a, następnie, jedna z dwóch tosamości poprzedzających daje

$$b = b'.$$

FORMUŁY OGÓLNE NA ROZWIĄZANIE JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU DWÓCH ZRÓWNAŃ Z DWOMA NIEZNANEMI.

211. Formuły ogólne. Zrównanie pierwszego stopnia z dwoma nieznanemi x, y może mieć trojakiego gatunku wyrazy, to jest : wyrazy na x, wyrazy na y, i wyrazy całkiem znane. Układ dwóch zrównań może więc zawsze przywieść się do kształtu :

$$[1] \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Zastosujmy do tego układu jeden ze sposobów znanych rugowania; na przykład, sposób przez dodawanie i odciąganie. W tym celu, mnóżmy pierwsze zrównanie przez b', a drugie przez b, i odciągnijmy drugi rezultat od pierwszego; będziemy mieli :

$$(ab' - ba')x = cb' - bc';$$

zkąd :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Mnożąc, przeciwnie, pierwsze zrównanie przez a' a drugie przez b', i odciągagając pierwszy rezultat od drugiego, będziemy mieli :

$$(ab' - ba')y = ac' - ca' ;$$

zkąd :

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Tak więc, układ [1] posiada na rozwiązanie układ :

$$[2] \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac - ca'}{ab' - ba'}.$$

Formuły [2] są formułami ogólnemi rozwiązania. Są one dopóty prawnemi, dopóki $(ab' - ba')$ nie jest równém zeru.

Sprawdza się łatwo, że te formuły zadosyć uczynią zrównaniom w tym przypadku.

212. Prawidło układania formuł. Otrzymuje się z łatwością te formuły za pomocą uwag następujących :

1° Na utworzenie mianownika spólnego $(ab' - ba')$ pisze się, jedna obok drugiéj, dwie przemiany ab i ba dwóch liter a i b, oddzielając je znakiem —, i kładąc kreski nad ostatnią literą każdego wyrazu.

2° Aby utworzyć licznik wartości każdéj nieznanéj, zastępuje się, w wyrażeniu $(ab' - ba')$, spółczynniki które, w zrównaniach, mnożą tę nieznaną, przez wyraz całkiem znany zrównania odpowiedniego. Tak więc, dla wartości na x, zastępuje się a i a' przez c i c'; a, dla wartości na y, zastępuje się b i b' przez c i c'.

213. Uwaga. Można dowieść wprost, nie rozwięzując układu [1], że *układ nie może mieć więcéj nad jedno rozwiązanie, byleby nie był związany warunkiem : $ab' - ba' = 0$*. Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że dwa układy różne, 1°: $x = \alpha$, $y = \beta$; 2°: $x = \alpha'$, $y = \beta'$, sprawdzają zrównania [1]; otrzyma się tosamości :

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta = c, \\ a'\alpha + b'\beta = c' ; \end{cases} \qquad \begin{cases} a\alpha' + b\beta' = c, \\ a'\alpha' + b'\beta' = c'. \end{cases}$$

zkąd się wyciąga, przez odciąganie :

$$\begin{cases} a(\alpha - \alpha') + b(\beta - \beta') = 0, \\ a'(\alpha - \alpha') + b'(\beta - \beta') = 0. \end{cases}$$

Ponieważ dwa rozwiązania są różne, nie może przeto być, jednocześnie, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Przypuśćmy na przykład, $\alpha \gtrless \alpha'$; można wyrugować $(\beta - \beta')$, mnożąc pierwszą z tych równości przez b', drugą przez b, i odciągając rezultaty; znajdziemy wówczas :

$$(ab' - ba')(\alpha - \alpha') = 0.$$

A, ponieważ można dzielić obie strony przez czynnik $(\alpha - \alpha')$, który nie jest zerem, ztąd więc wynika :

$$ab' - ba' = 0.$$

214. Sposób postępowania przy roztrząsaniu formuł. Kiedy dwumian $(ab' - ba')$ nie jest zerem, formuły [2] nie dają miejsca do żadnéj trudności; dostarczają one dla x i dla y wartości oznaczone. Układ [1] ma tylko jedno rozwiązanie. Nie przedstawia się więc do rozbioru, jak sam tylko przypadek : $ab' - ba' = 0$.

Przypuścimy naprzód że ta wartość ma miejsce, kiedy żaden ze spółczynników a, b, a', b', nie jest zerem; jest ona wtedy równoważną z następującą :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

która wyraża że *spółczynniki dwóch nieznanych, w obu zrównaniach, są odpowiednio proporcyonalnemi.*

Rozbierzemy czém się stają, w tém przypuszczeniu, formuły [2]; a postaramy się wytłumaczyć rezultaty, wróciwszy do zrównań [1].

215. Twierdzenie I. *W przypadku gdy* $ab' - ba' = 0$, *liczniki wartości* [2] *z* x *i z* y *są zerami obydwa zarazem, albo nie są zerami ni jeden ni drugi.*

Dla dowiedzenia tego, uważmy że warunek $ab' - ba' = 0$, daje :

$$b' = \frac{ba'}{a};$$

więc, jeżeli oznaczymy przez N_x i N_y liczniki z x i z y, znajdziemy, zastępując, w N_x, b' przez swą wartość :

$$N_x = cb' - bc' = \frac{cba'}{a} - bc' = \frac{cba' - abc'}{a} = \frac{b(ca' - ac')}{a}.$$

Otóż, $(ca' - ac')$ jest równém licznikowi y, wziętemu ze zmienionym znakiem ; więc :

$$N_x = -\frac{b}{a} N_y.$$

A ponieważ ani b ani a nie są zerami, więc wnosi się ztąd że, jeżeli N_y jest zerem, N_x jest niém także ; lecz, jeżeli N_y nie jest zerem, N_x nie może być niém równie. Co było do dowodzenia.

Wypada ztąd, że *wartości z* x *i z* y *przedstawiają się jednocześnie pod kształtem* $\frac{0}{0}$, *lub jednocześnie pod kształtem* $\frac{m}{0}$.

216. Twierdzenie II. *W przypadku gdy* $ab' - ba' = 0$, *oba zrównania* [1] *są sprzeczne, albo te zrównania wchodzą jedno w drugie.*

Aby to dowieść, podstawmy za b' jego wartość w drugiém ze zrównań [1] ; to zrównanie staje się :

$$a'x + \frac{ba'}{a} y = c',$$

albo $$aa'x + ba'y = ac'.$$

Lecz, mnożąc pierwsze ze zrównań [1] przez a', znajduje się :

$$aa'x + ba'y = ca'.$$

Tak więc, w tym przypadku, zrównania [1] są równoważne dwóm innym zrównaniom które mają tę samą stronę pierwszą, a których strony drugie są ac' i ca'. Jeżeli więc ac' i ca', nie są między sobą równe, dwa zrównania są sprzecznemi; lecz, jeżeli $ac' = ca'$, wtedy te zrównania są tosamemi. Co było do dowodzenia.

217. Następstwa. 1° Kiedy ac' nie jest równém ca', N_y nie jest zerem; a, następnie (215), N_x nie jest niém równie. Więc, *kiedy dwa zrównania* [1] *są sprzecznemi, formuły* [2] *przedstawiają się obiedwie pod kształtem* $\frac{m}{0}$. *Ten kształt jest więc symbolem niepodobieństwa.*

2° Kiedy $ac' = ca'$, N_y jest zerem, jakoteż N_x (215). *Więc, kiedy zrównania* [1] *wchodzą jedno w drugie, formuły* [2] *przedstawiają się obiedwie pod kształtem* $\frac{0}{0}$. *Ten kształt jest symbolem nieoznaczoności.*

Układ dwóch zrównań z dwoma nieznanemi przyjmuje więc albo rozwiązanie jedyne i oznaczone, albo ten układ nie przyjmuje żadnego rozwiązania, albo przyjmuje ilość nieograniczoną. Lecz przypuściliśmy, w tém roztrząsaniu, że żaden ze spółczynników nieznanych nie jest równym zeru; pozostaje nam teraz rozebrać przypadki szczególne, gdzie niektóre z pomiędzy nich byłyby zerami, jednocześnie z dwumianem $(ab' - ba')$.

218. Przypadek gdy jeden ze spółczynników jest zerem jednocześnie z $(ab' - ba')$. Przypuśćmy że się znalazło, zarazem :

$$ab' - ba' = 0, \qquad b' = 0;$$

ztąd wypada, że $ba' = 0$; więc : albo $a' = 0$, albo $b = 0$.

1° Jeżeli $a' = 0$, formuły [2] stają się :

$$x = \frac{-bc'}{0}, \qquad y = \frac{ac'}{0}.$$

Więc, jeżeli c' nie jest zerem, te formuły przyjmują obiedwie kształt $\frac{m}{0}$; a jeżeli $c' = 0$, te formuły przyjmują obiedwie kształt $\frac{0}{0}$. Otóż zrównania stają się wtedy :

$$ax + by = c, \qquad 0 = c';$$

te zrównania są więc sprzecznemi; w pierwszym przypadku, ponieważ drugie jest niedorzeczném, i nie istnieje więcéj jak tylko jedno zrównanie, w drugim przypadku, ponieważ drugie zrównanie jest tosamém. Więc *kształty* $\frac{m}{0}$ *i* $\frac{0}{0}$, *jakie przyjmą tu formuły, są jeszcze symbolem, jeden niepodobieństwa, drugi nieoznaczoności.*

2° Jeżeli $b = 0$, formuły stają się :

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{0};$$

więc, jeżeli ca' nie jest równém ac', y przedstawia się pod kształtem $\frac{m}{0}$, gdy tymczasem x przyjmuje kształt $\frac{0}{0}$. Jestto wyjątek od twierdzenia (215). Otóż, w tym przypadku, zrównania stają się :

$$ax = c, \quad a'x = c';$$

te, jako niezawierające jak nieznaną x, dają :

$$x = \frac{c}{a}, \quad x = \frac{c'}{a'};$$

lecz $\frac{c}{a}$ nie jest równém $\frac{c'}{a'}$, gdyż ca' nie jest równém ac'; więc *zrównania są sprzecznemi; i niepodobieństwo objawia się tu przez kształty jednoczesne* $\frac{m}{0}$ *i* $\frac{0}{0}$.

Lecz, jeżeli $ac' = ca'$, dwie formuły przyjmują kształt $\frac{0}{0}$; a dwa zrównania sprowadzają się do jednego :

$$x = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

To zrównanie oznacza wartość dla x, *lecz wartość dla* y *pozostaje nieoznaczoną. Jest więc tu nieoznaczoność częściowa, która objawia się* *za pomocą kształtu* $\frac{0}{0}$. Potrzeba zauważyć że ten kształt przywiązany jest zarówno do obu formuł, pomimo że wartość dla x została dokładnie oznaczoną.

Ta część roztrząsania obejmuje przypadek, w którym spółczynniki dwóch nieznanych są zerami w témże samém zrównaniu, i ten w którym spółczynniki téjże saméj nieznanéj są zerami w dwóch zrównaniach. Nie mamy więc do rozebrania jak tylko przypadek następujący.

219. Przypadek w którym, spółcześnie z mianownikiem $ab' - ba' = 0$, spółczynnik nieznanéj x w jedném ze zrównań i spółczynnik nieznanéj y w drugiém są równemi zeru. Przypuśćmy, na przykład :

$$ab' - ba' = 0, \quad a = 0, \quad b' = 0.$$

zkąd wypada, że $ba' = 0$, to jest drugi spółczynnik jednéj z nieznanych jest zerem także.

Niech będzie $b = 0$, naówczas formuły stają się :

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{-ac'}{0};$$

a zrównania,

$$0 = c, \qquad a'x = c'.$$

Jeżeli więc ani c ani a' nie są zerami, pierwsze zrównanie jest niedorzeczném ; *i znajduje się niepodobieństwo, które się objawia przez kształty jednoczesne* $\frac{0}{0}$ *i* $\frac{m}{0}$.

Jeśli c jest zerem, pierwsze zrównanie jest tosamém ; drugie oznacza x ; *znajduje się nieoznaczoność częściowa, która się objawia za pomocą kształtu* $\frac{0}{0}$.

Jeżeli a' jest zerem, *otrzymuje się niepodobieństwo*, pomimo że formuły przedstawiają się obie pod kształtem $\frac{0}{0}$.

220. Tablica (wykaz) roztrząsania. Można streścić roztrząsanie poprzednie w tablicy następującéj :

Przypadki ogólne.	I. $ab'-ba' \gtrless 0$		$x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\ y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$;	rozwiązanie oznaczone.
	II. $ab'-ba'=0$	$ac'-ca' \gtrless 0$,	$x=\dfrac{cb'-bc'}{0},\ y=\dfrac{ac'-ac'}{0}$;	niepodobieństwo.
		$ac'-ca'=0$,	$x=\dfrac{0}{0},\quad y=\dfrac{0}{0}$;	nieoznaczoność.
Przypadki szczególne. $ab'-ba'=0$, $b'=0$	$a'=0$	$c' \gtrless 0$,	$x=\dfrac{-bc'}{0},\ y=\dfrac{ac'}{0}$;	niepodobieństwo,
		$c'=0$,	$x=\dfrac{0}{0},\quad y=\dfrac{0}{0}$;	nieoznaczoność.
	$b=0$	$ac'=ca' \gtrless 0$,	$x=\dfrac{0}{0},\ y=\dfrac{ac'-ca'}{0}$;	niepodobieństwo.
		$ac'-ca'=0$,	$x=\dfrac{c}{a},\ y=\dfrac{0}{0}$;	nieoznaczoność częściowa.
	$a=0$, $b=0$	$c \gtrless 0,\ a' \gtrless 0$,	$x=\dfrac{0}{0},\ y=-\dfrac{ca'}{0}$;	niepodobieństwo.
		$c=0$,	$x=\dfrac{c'}{a'},\ y=\dfrac{0}{0}$;	nieoznaczoność częściowa.
		$a'=0$,	$x=\dfrac{0}{0},\ y=\dfrac{0}{0}$;	niepodobieństwo.

221. Przypadek w którym c i c' są zerami razem. Po za przypadkami jakieśmy rozbierali, roztrząsa się jeszcze przypadek gdy wyrazy całkiem znane, c i c', są zerami razem. Formuły przedstawiają się pod kształtem :

$$x=\frac{0}{ab'-ba'},\quad y=\frac{0}{ab'-ba'}.$$

A więc, jeżeli $ab'-ba'$ nie jest zerem, ma się : $x=0,\ y=0$.

Lecz, jeżeli $ab'-ba'=0$, formuły stają się : $x=\dfrac{0}{0},\quad y=\dfrac{0}{0}$.

Dla wytłumaczenia tych wypadków, wróćmy się jeszcze do zrównań. Te są, w tym przypadku :

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ a'x + b'y = 0; \end{cases}$$

i mogą się napisać :

$$x = -\frac{b}{a}y, \quad x = -\frac{b'}{a'}y.$$

Przeto, *jeżeli* $\frac{b}{a}$ *nie jest równém* $\frac{b'}{a'}$, *to jest, jeżeli* $(ab' - ba')$ *nie jest zerem, te zrównania nie mają innego rozwiązania jak tylko* $x = 0$, $y = 0$. Lecz *jeżeli* $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, *to jest, jeżeli* $ab' - ba' = 0$, *dwa zrównania wchodzą jedno w drugie; jest nieoznaczoność, która się objawia za pomocą kształtu* $\frac{0}{0}$. Należy uważać że, *w tym ostatnim przypadku, stosunek nieznanych jest oznaczonym;* gdyż otrzyma się :

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}.$$

Formuły ogólne na rozwiązanie jakiegokolwiek układu trzech zrównań z trzema nieznanemi.

222. Formuły ogólne. Zrównanie pierwszego stopnia z trzema nieznanemi x, y, z może mieć czworakiego gatunku wyrazy, to jest : wyrazy na x, wyrazy na y, wyrazy na z, i wyrazy całkiem znane. Układ trzech zrównań będzie więc mógł zawsze przywieść się do kształtu :

$$[1] \quad \begin{cases} ax + by + cz = k, \\ a'x + b'y + c'z = k', \\ a''x + b''y + c''z = k''. \end{cases}$$

Użyjmy, na rozwiązanie go, sposobu *Bezouta* (150).

Pomnożywszy pierwsze z tych zrównań przez λ, a drugie przez λ', i do summy tych dwóch zrównań dodawszy trzecie, otrzymamy :

$$[2] \qquad (a\lambda + a'\lambda' + a'')x + (b\lambda + b'\lambda'\ b'')y + (c\lambda + c'\lambda' + c'')z$$
$$= k\lambda + k'\lambda' + k''.$$

Połóżmy potém :

$$b\lambda + b'\lambda' + b'' = 0, \qquad c\lambda + c'\lambda' + c'' = 0,$$

zkąd da się wyciągnąć :

$$\lambda = \frac{c'b'' - b'c''}{cb' - bc'}, \quad \lambda' = \frac{bc'' - cb''}{cb' - bc'};$$

i, podstawmy te wartości w zrównaniu [2], znajdziemy, po wykonaniu wszystkich rachunków :

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Znalazłoby się, sposobem podobnym, wartości dla y i dla z. Lecz lepiéj jest zauważyć że jeżeli, w pierwszém zrównaniu, zmieni się x no y, y na z i z na x, potém a na b, b na c i c na a, to zrównanie staje się :

$$by + cz + ax = k,$$

to jest że się nie zmieni. Toż samo spostrzeżenie stosuje się do dwóch innych. A zatém, otrzymamy y robiąc te przemiany na wzorze który daje x, i otrzyma się z wykonywając je późniéj na wartośći y. Rozpoznaje się tym sposobem że mianownik nie zmienia się, i znajduje się układ rozwiązań :

$$[3] \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'a'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}, \\ y &= \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{\mathrm{D}}, \\ z &= \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{\mathrm{D}}. \end{aligned} \right.$$

Te formuły dopóty są prawnémi, dopóki mianownik wspólny nie jest zerem. Sprawdza się wreszcie łatwo że, w tym przypadku, powyższe wzory zadosyć uczynią zrównaniom [1].

223. Wyjaśnienie poprzedniego przekształcenia na figurze. Możnaby było wyrachować wprost wartości na y i na z. Lecz jest daleko prościéj wyciągnąć je z wartości na x biorąc w pomoc rozważanie symetryi. Na obwodzie koła, a przy wierzchołkach trójkąta równobocznego wpisanego, połóżmy trzy litery x, y, z, jakoteż trzy litery a, b, c; i wystawmy sobie póżniéj że koło obróciło się około swego środka w kierunku odpowiednim o trzecią część obwodu; w skutek tego litera y zajmie miejsce x, z zajmie miejsce y, x miejsce z; podobnie litery b, c, a, zajmą miejsca liter a, b, c. Ta zmiana w porządku liter nazywa się *przemianą kołową*.

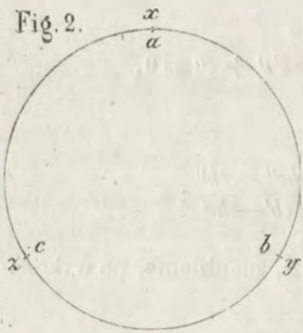


Fig. 2.

Po wykonaniu podobnéj przemiany na zrównaniach danych, te staną się

$$\begin{aligned} by + cz + ax &= k, \\ b'y + c'z + a'x &= k', \\ b''y + c''z + a''x &= k'', \end{aligned}$$

nie zmieniwszy się bynajmniéj; wartości nieznanych pozostają więc też same. Otóż, po wykonaniu przemiany kołowéj na wartości z x znalezionéj poprzednio, otrzymuje się

$$\begin{Bmatrix} x, y, z \\ y, z, x \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} a, b, c \\ b, c, a \end{Bmatrix}$$

$$y = \frac{kc'a'' - ka'c'' + ak'c'' - ck'a'' + ca'k'' - ac'k''}{bc'a'' - ba'c'' + ab'c'' - cb'a'' + ca'b'' - ac'b''}.$$

Ta wartość z y zadosyć uczyni drugiemu układowi zrównań a zatém układowi danemu.

Po wykonaniu na drugim układzie zrównań nowéj przemiany kołowéj, układ nie zmieni się, i wartość z y staje się

$$\begin{Bmatrix} y, z, x \\ z, x, y \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} b, c, a \\ c, a, b \end{Bmatrix} \ldots\ldots$$

$$z = \frac{ka'b'' - kb'a'' + bk'a'' - ak'b'' + ab'k'' - ba'k''}{ca'b'' - cb'a'' + bc'a'' - ac'b'' + ab'c'' - ba'c''}.$$

Wykonywając trzecią przemianę kołową, znaleźlibyśmy wartość z x i tak daléj.

224. Prawidło na układanie formuł. Dla utworzenia mianownika spólnego, uważa się dwie *przemiany* ab i ba; kładzie się w każdéj z nich litera c kolejno, na końcu, w środku i na początku; co daje :

$$abc,\ acb,\ cab, \quad \text{i} \quad bac,\ bca,\ cba.$$

Potém znaczy się drugą literę jedną kreską, a trzecią dwoma kreskami. Nakoniec daje się naprzemian znaki + i — różnym wyrazom. Znajduje się tym sposobem :

$$\mathrm{D} = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Można jeszcze utworzyć mianownik spólny innym sposobem. Zauważmy że ten mianownik może się napisać :

$$\mathrm{D} = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'');$$

że jest więc summą wieloczynów jakie otrzymują się, mnożąc względnie spółczynniki a, b, c pierwszego zrównania przez różnice $(b'c'' - c'b'')$, $(c'a'' - a'c'')$, $(a'b'' - b'a'')$. Tworzą się wreszcie te różnice, mnożąc *na krzyż* spółczynniki dwóch innych zrównań które nie odpowiadają téj nieznanéj któréj spółczynnik został wybranym w pierwszém. Tak więc, gdy spółczynniki będą urządzonemi jak następuje :

$$\begin{matrix} a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'', \end{matrix}$$

bierze się za mnożnik a, $(b'c'' - c'b'')$, $\overset{1\quad 2}{\underset{2\quad 1}{\times}}$; bierze się potém za mnożnik b, $(c'a'' - a'c'')$, $\overset{2\quad 1}{\underset{1\quad 2}{\times}}$; bierze się nakoniec za mnożnik c, $(a'b'' - b'a'')$, $\overset{1\quad 2}{\underset{2\quad 1}{\times}}$. Należy zauważyć pilnie, że krzyż, utworzony przez linie które łączą czynniki jakie się mnoży, powinien być ułożony naprzemian w kierunkach przeciwnych, jak to wskazują figury.

Kiedy mianownik spólny jest utworzonym, otrzymuje się licznik każdéj nieznanéj, zastępując, w tym mianowniku, spółczynnik nieznanéj przez wyraz całkiem znany zrównania odpowiedniego, to jest podstawiając k, k', k'', za a, a', a'', gdy idzie o x; za b, b', b'', gdy idzie o y, i za c, c', c'', gdy idzie o z.

225. Uwaga. Można dowieść wprost, nie rozwięzując układu [1], że tenże układ nie może mieć więcéj nad jedno rozwiązanie, byleby nie miał : $D = 0$.

Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że dwa rozwiązania różne, 1°: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; 2°: $x = \alpha'$, $y = \beta'$, $z = \gamma'$, sprawdzają układ [1]; znajduje się tosamości :

$$\left\{\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= k \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= k', \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma &= k''; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= k, \\ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= k', \\ a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' &= k''. \end{aligned}\right.$$

Zkąd wyciąga się, przez odciąganie :

$$a(\alpha - \alpha') + b(\beta - \beta') + c(\gamma - \gamma') = 0,$$

$$a'(\alpha - \alpha') + b'(\beta - \beta') + c'(\gamma - \gamma') = 0,$$

$$a''(\alpha - \alpha'') + b''(\beta - \beta') + c''(\gamma - \gamma') = 0.$$

Ponieważ układy rozwiązania są różne, nie można mieć, jednocześnie, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Przypuśćmy, na przykład, $\alpha \gtrless \alpha'$. Można będzie wyrugować, sposobem zwyczajnym, $(\beta - \beta')$ i $(\gamma - \gamma')$, pomiędzy temi trzema równościami; i przyjdzie się do równości :

$$D(\alpha - \alpha') = 0.$$

Otóż można dzielić dwie strony przez czynnik $(\alpha - \alpha')$, który nie jest zerem; więc :

$$D = 0.$$

226. Roztrząsanie. Kiedy D nie jest zerem, układ posiada tylko rozwiązanie jedyne i oznaczone, dostarczone przez formuły [3]. Nie pozostaje więc do rozebrania jak tylko przypadek $D = 0$. Otóż, zrównanie [2], zastosowane kolejno dla oznaczenia wartości na x, na y i na z, daje :

$$Dx = m, \quad Dy = n, \quad Dz = p.$$

Gdy więc $D = 0$, *a jedna przynajmniéj z ilości* m, n, p, *nie będzie zerem, zrównanie odpowiednie jest niepodobném. Układ jest więc niepodobnym ; i niepodobieństwo objawia się przez kształt* $\frac{m}{0}$, *który przybiera przynajmniéj jedna z nieznanych.*

Gdy, przeciwnie, ma się, jednocześnie, $D = 0$, $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, zrównaniom nie przestają zadosyć czynić wartości x, y, z; *układ jest nieoznaczony, i nieoznaczoność objawia się przez kształt* $\frac{0}{0}$, *spólny trzem nieznanym.*

227. Przypadek w którym drugie strony zrównań [1] są zerami. Rozbierzmy nakoniec przypadek gdy zrównania dane nie zawierają żadnego wyrazu niezależnego od nieznanych : można je uważać wtedy jako mające miejsce pomiędzy stosunkami nieznanych ; i wystarczy, na oznaczenie tych stosunków, mieć jedno zrównanie mniéj od liczby nieznanych. W rzeczy saméj, weźmy pod uwagę dwa pierwsze zrównania :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0; \end{cases}$$

te mogą się napisać w sposób następujący :

$$\begin{cases} a\dfrac{x}{z}+b\dfrac{y}{z}=-c, \\ a'\dfrac{x}{z}+b'\dfrac{y}{z}=-c'; \end{cases}$$

zkąd wypada :

$$\frac{x}{z}=\frac{c'b-b'c}{ab'-ba'},$$

$$\frac{y}{z}=\frac{a'c-c'a}{ab'-ba'}.$$

Gdy, teraz, dopełni się układ przez trzecie zrównanie, w któróm podstawi się za x i y ich wartości w z, wyciągnięte ze stosunków $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, znajdziemy :

$$\mathrm{D}z=0.$$

Więc, *jeżeli* D *nie jest zerem, potrzeba aby było :* $z=0$; *a następnie* $x=0$, $y=0$. To właśnie stanowi rozwiązanie w tym przypadku.

Gdy $\mathrm{D}=0$, ostatnie zrównanie jest sprawdzoném przez jakąkolwiek bądź wartość z; to zrównanie jest następstwém dwóch pierwszych; *znajduje się* więc *nieoznaczoność; i ta nieoznaczoność objawia się przez kształt* $\frac{0}{0}$ *jaki przedstawiają formuły ogólne; lecz stosunki nieznanych pozostają oznaczonemi.*

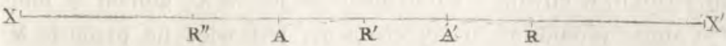
Uwaga. *Rozległa teorya wyznaczników*, którą zamierzamy w tomie II naszéj algebry obszernie rozwinąć, posłuży do uzupełnienia *dalszego rozbioru wzorów wyprowadzonych z ogólnych zrównań stopnia pierwszego.*

ROZTRZĄSANIE ZAGADNIENIA GOŃCÓW.

228. Zagadnienie. Zakończymy ten rozdział rozwiązaniem zaga-

dnienia którego roztrząsanie streszcza w sobie to wszystko co było dotąd powiedzianém powyżéj; znajdziemy tu zastosowanie znakomite teoryi ilości odjemnych, i spotkamy także różne przypadki niepodobieństwa i nieoznaczoności o których dawniéj była mowa.

Dwaj gońcy M *i* M′ *odbywają drogę po linii prostéj nieograniczonéj* X X′, *w kierunku* X X′, *z prędkościami* v *i* v′; *goniec* M *przybył do punktu* A *téj linii,* h *godzin wprzód niż goniec* M′ *zdążył przybyć do innego punktu* A′. *Odległość* AA′ = d. *Chcemy wiedzieć punkt spotkania się tych gońców.*



Punkt spotkania się szukany może być, bądź w R po prawéj stronie A′, bądź w R′ pomiędzy A i A′, bądź w R″ po lewéj stronie A; jego położenie zależy od liczb v, v', d, h. Jest więc nieodbicie potrzebném rozróżnienie wielu przypadków.

229. Pierwszy przypadek. *Przypuszcza się* $v > v'$, i $d > vh$. Ponieważ goniec M przebiega v kilometrów na godzinę, tenże goniec przebiegnie vh kilometrów w h godzinach; a zatém, kiedy M′ będzie w A′, M będzie w odległości vh od punktu A. Tak więc warunek $d > vh$ znaczy że w téj chwili, M nie będzie mógł jeszcze przybyć na punkt A′; będzie więc w tyle M′; otóż pierwszy postępuje prędzéj jak drugi, gdyż mamy, $v > v'$; więc się z nim złączy po prawéj stronie punktu A′.

To przypuściwszy, niech będzie R punktem spotkania się: weźmy za nieznaną odległość A′R $= x$. Goniec M przebiega odległość AR $= d + x$, w czasie $\frac{d+x}{v}$; goniec M′ przebiega odległość A′R $= x$, w czasie $\frac{x}{v'}$. Otóż, podług wysłowienia, M wychodzi z A, h godzin przed chwilą w któréj M′ wychodzi z A′; więc M potrzebuje h godzin więcéj jak M′ dla dojścia do punktu R. Więc otrzymuje się zrównanie:

$$[1] \qquad \frac{d+x}{v} - \frac{x}{v'} = h.$$

Rozwięzując je (starać się należy przenieść wyrazy nieznane w drugi członek, ażeby tym sposobem nie mieć do uważania liczb odjemnych), znajduje się formuła :

$$[\alpha] \qquad x = \frac{v'(d - vh)}{v - v'}.$$

Ponieważ $(v - v')$ i $(d - vh)$ są dodatnémi, ta formuła daje poznać bez trudności położenie punktu R.

230. Drugi przypadek. Przypuszcza się $v < v'$, $d < vh$. W tym przypadku, w chwili, w któréj goniec M′ jest w A′, goniec M minął ten punkt (ponieważ mamy $vh > d$); jest więc na przodzie M′; a że ten goniec postępuje powolniéj jak M′ (ponieważ $v < v'$); będzie przeto dopędzonym przez niego po prawéj stronie punktu A′. Punkt spotkania się jest więc w tym samym odcinku A′X′ jak w przypadku poprzedzającym. Zrównanie zagadnienia jest więc toż same [1]. Lecz dla uniknienia użycia liczb odjemnych, można będzie rozwiązać to zagadnienie przenosząc wyrazy znane w drugi członek; i znajdzie się formuła :

$$[\beta] \qquad x = \frac{v'(vh - d)}{v' - v}.$$

231. Trzeci przypadek. *Przypuszcza się* $v > v'$, $d < vh$. W tym przypadku, goniec M, w chwili w któréj M′ jest w A′, minął już ten punkt, ponieważ $vh > d$; lecz że ten goniec postępuje prędzéj jak M′, więc spotkanie się nie może mieć miejsca po prawéj stronie punktu A′. Rozumie się, wreszcie, że to spotkanie musiało już mieć miejsce po lewéj stronie, a zatém przed epoką uważaną, ponieważ prędkości są nierówne a droga nieograniczoną. Lecz wtedy dwa przypadki przedstawiają się : punkt spotkania się jest w R′ pomiędzy A i A′, albo w R″ po lewéj stronie punktu A?

Przypuśćmy naprzód że to spotkanie ma miejsce w R′, i przedstawmy przez x odległość A′R′ : odległość AR′ będzie równą $(d - x)$. Aby znaleźć, w tym przypadku, zrównanie zagadnienia, można uważać że goniec M jako wychodzący z punktu A w pewnéj chwili, i przebiegający odległość AR′ w czasie $\frac{d - x}{v}$, w końcu tego czasu, spotyka się on z gońcem M′, który, wychodząc z R′, przebiega odległość R'A' w nowym czasie $\frac{x}{v'}$. Tak więc, gdy ten ostatni przybywa do A', upłynął czas $\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}$, od czasu jak M wyszedł z punktu A : i zrównanie jest :

$$[2] \qquad \frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}=h.$$

Przypuśćmy powtóre punkt spotkania w R''. Oznaczmy przez x odległość A'R''; odległość AR'' będzie $(x-d)$. Można przypuścić tu, że dwaj gońcy wychodzą jednocześnie z punktu R''; goniec M staje w A po czasie $\frac{x-d}{v}$, a goniec M' dosięga A' po czasie $\frac{x}{v'}$. A ponieważ, podług wysłowienia, M' użył h godzin więcéj jak M, zrównanie jest :

$$[3] \qquad \frac{x}{v'}-\frac{x-d}{v}=h.$$

Otóż widzimy łatwo, że zrównania [2] i [3], chociaż otrzymane przez rozumowania różne, są tosamemi, gdyż, rozłączając wyrazy $\frac{d}{v}$ i $\frac{x}{v}$, stają się :

$$\frac{d}{v}-\frac{x}{v}+\frac{x}{v'}=h.$$

Tak więc, można powiedzieć że, gdy punkt spotkania się jest po lewéj stronie A', to jakiekolwiekby było jego położenie, jest zawsze dostarczoném przez zrównanie [2].

Gdy się rozwiąże to zrównanie (nie zaniedbując zostawić wyrazy nieznane w pierwszym członku), znajdziemy :

$$[\gamma] \qquad x=\frac{v'(vh-d)}{v-v'}.$$

232. Czwarty przypadek. *Przypuszcza się* $v<v'$, $d>vh$. W tym

przypadku, goniec M nie jest jeszcze w A, gdy goniec M' tam się już znajduje, ponieważ $vh < d$. Tak więc M jest naówczas w tyle M'; a że piérwszy postępuje powolniéj jak drugi, przeto nie będzie mógł go dogonić po prawéj stronie A'. Lecz, ponieważ prędkości są nierówne, ich spotkanie musiało już mieć miejsce po lewéj stronie tegoż punktu. Zrównaniem zagadnienia jest więc jeszcze zrównanie [2]. Tylko, aby je rozwiązać, potrzeba będzie przenieść wyrazy nieznane w drugi członek, i znajdzie się formuła:

$$[\delta] \qquad x = \frac{v'(d - vh)}{v' - v}.$$

233. Roztrząsanie. Zrównanie [1] i formuły [α] i [β] odpowiadają przypadkóm w których punkt spotkania znajduje się po prawéj stronie punktu A'. Otóż dwie formuły [α] i [β] nie różnią się jedna od drugiéj, jeśli się nie przestanie przyjmować umowy (50); gdyż tak ich liczniki jako i mianowniki są równe i znaków przeciwnych. Można więc znieść formułę [β] i nie uważać, dla dwóch pierwszych przypadków, jak tylko formułę [α].

Zrównanie [2] i formuły [γ] i [δ] stosują się do przypadków w których punkt spotkania jest po lewéj stronie punktu A'. Otóż te dwie formuły są także tosamemi, na mocy umów (50). Więc można poprzestać na formule [γ] dla dwóch ostatnich przypadków.

Z drugiéj strony zrównanie [2] nie różni się od zrównania [1] jak tylko przez zmianę znaku na x, a formuły [α] i [γ], mające tak mianowniki jak liczniki równe i znaków przeciwnych, dają dla x, na mocy umów (50), wartości równe i znaków przeciwnych.

Więc *zrównanie* [1] *i formuła* [α], *która je rozwiązuje*, będą mogły się zastosować do czterech przypadków, pod warunkiem aby zgodzono się odnosić na lewą stronę A' długość wymierzoną przez wartość na x, kiedy ta długość będzie odjemną.

234. Przypadki szczególne. Przypuszczaliśmy dotąd, że było $v \gtrless v'$, $d \gtrless vh$. Rozbierzmy teraz przypadki gdzie te nierówności przekształcają się na równości.

1° *Jeżeli* d = vh, *chociaż* v *nie jest równém* v', formuła [α] daje: $x = 0$; to jest że odległość punktu spotkania się od punktu A' jest zerem, albo że *dwaj gońcy są jednocześnie w* A'. Widzimy, *a priori*, że tak być powinno : gdyż, ponieważ $vh = d$, M przybywa do A w tymże samym czasie jak M′; a, ponieważ prędkości są nierówne, przeto gońcy nie są razem jak tylko w tym punkcie.

2° *Jeżeli* v = v′, *chociaż* d *nie jest równém* vh, formuła [α] daje :

$x = \frac{v'(d - vh)}{0}$. Ta formuła jest (209) symbolem niepodobieństwa. Potrzeba więc twierdzić że *w tym przypadku gońcy nie spotkają się nigdy.*

O czém łatwo jest przekonać się *a priori*; bo, ponieważ d nie jest równém vh, gońcy nie są razem w punkcie A ; a, ponieważ ci gońcy mają tąż samą prędkość, odległość która ich rozłącza jest zawsze tąż samą.

3° *Jeżeli mamy, jednocześnie :* $v = v'$, $d = vh$, formuła [α] daje :

$x = \frac{0}{0}$. Ta postać jest zwykle symbolem nieoznaczoności. Można więc wnosić że, *w tym przypadku dwaj gońcy są zawsze razem.* Lecz potrzeba to sprawdzić *a priori*, co jest łatwém; bo, ponieważ $d = vh$, gońcy są razem w punkcie A′; a, ponieważ ich prędkość jest tąż samą, przeto ci gońcy nie rozłączają się nigdy.

Tak więc, nawet w przypadkach szczególnych gdzie zrównanie i formuła przestają istnieć, można dać symbolóm jakie się napotyka wytłumaczenie które dostarczy rozwiązania prawdziwego.

235. Uwaga. Nie posuniemy daléj roztrząsania tego zagadnienia; powiedzieliśmy dosyć dla wskazania sposobu postępowania. Zachęcamy czytelnika do zrobienia innych przypuszczeń : na przykład, że *goniec* M′ *dąży z* X′ *ku* X, albo że goniec M przechodzi A, h godzin późniéj aniżeli goniec M′ przeszedł punkt A′. Kreśląc wprost, dla każdego z tych przypuszczeń, zrównanie i formułę która je rozwięzuje, znajdzie czytelnik zawsze że zrównanie [1] i formuła [α] dają się zastosować, pod warunkiem uważania za odjemne tych wielkości których się zmienił kierunek.

ĆWICZENIA.

I. Jaki związek należy przypuścić pomiędzy A, B, A′, B′, aby wyrażenie,

$$\frac{Ax + B}{A'x + B'},$$

miało wartośc niazależną od x i od y?

Potrzeba żeby było : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, albo też $B = 0$, $B' = 0$.

II. Jakie związki należy przypuścić pomiędzy A, B, C, A′, B′, C′, ażeby wyrażenie,

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C},$$

miało wartość niezależną jednocześnie od x i od y ?

Potrzeba żeby było : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

Pytamy się jeszcze, czy wyrażenie może być niezależném od x, nie będąc od y ? Nie.

III. Znaleźć postęp przez różnicę, w którym istnieje stosunek stały pomiędzy summą z x pierwszych wyrazów, a summą z kx wyrazów następujących, gdy k jest daném, a x może przybierać wszelkie wartości całkowite.

Jest nieskończona ilość postępów odpowiadających pytaniu. Są niemi te których stosunek jest podwójnym od pierwszego wyrazu.

IV. Roztrząsać formuły rozwiązania trzech zrównań z trzema nieznanemi, w przypadkach następujących :

1° Dwa piérwsze zrównania mogą być sprzecznemi, jakiekolwiekby było trzecie.

Znajdzie się, na to, warunki :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \text{ i } bk' - kb' \gtrless 0.$$

2° Dwa pierwsze mogą być sprzecznemi z trzeciém.

Potrzeba na to, żeby mianownik wspólny był zerem, i żeby licznik jednéj z nieznanych był różnym od zera.

3° Dwa piérwsze zrównania mogą wchodzić jedno w drugie.

Potrzeba na to, żeby było :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{k}{k'}.$$

4° Trzecie (zrównanie) może wchodzić w inne.

Potrzeba, na to, żeby mianownik spólny był zerem, jako też licznik jednéj z nieznanych.

V. Naznaczyć warunki konieczne i dostateczne, ażeby zagadnienie numeru 191 dotyczące kadzi napełniających się przez rurki i przez deszcz, stało się niepodobném lub nieoznaczoném. Można będzie zrozumieć, *a priori*, niepodobieństwo lub nieoznaczoność.

Znajduje się że warunkiem niepodobieństwa jest $\frac{n}{n'} = \frac{s}{s'}$; i że jeżeli, oprócz tego, ma się : $vs't' = v'st$, zagadnienie jest nieoznaczoném.

VI. Gdy się weźmie pod uwagę zrówniania :

$$[1] \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'; \end{cases}$$

w którém położymy :

$$[2] \qquad \begin{cases} x = \alpha t + \beta u, \\ y = \alpha' t + \beta' u; \end{cases}$$

otrzymuje się, przez to podstawienie, dwa zrównania na t i u. Otóż żądamy aby sprawdzić, że mianownik wartości z t i z u, który ztąd wynika, jest wieloczynem z mianowników jakie znajduje się, rozwiązując zrównanie [1] względem x i y, zrównania [2] względem t i u.

VII. Podobneż zadajemy pytanie dla zrównań :

$$[1] \qquad \begin{cases} ax + by + cz = k, \\ a'x + b'y + c'z = k', \\ a''x + b''y + c''z = k''; \end{cases}$$

w których przypuszczamy :

$$[2] \qquad \begin{cases} x = \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v. \end{cases}$$

Te dwa ćwiczenia przedstawiają tylko proste sprawdzenia rachunku.

ROZDZIAŁ XIII.

WYRAŻENIA PRZEDSTAWIAJĄCE SIĘ POD KSZTAŁTEM NIEOZNACZONYM.

O KSZTAŁCIE $\frac{0}{0}$.

236. O PRZYPADKACH W KTÓRYCH SPOTYKA SIĘ KSZTAŁT $\frac{0}{0}$. Kiedy dwa wyrazy ułamku niszczą się jednocześnie, dla pewnych wartości liter które te wyrazy zamykają w sobie, działanie wskazane nie ma żadnego znaczenia. Znajdujemy niekiedy wyrażenia tego kształtu, szukając rozwiązania zagadnień nieoznaczonych (209, 217 i 234). Niekiedy także ułamek przyjmuje ten kształt nieoznaczony, z przyczyny czynnika spólnego równego zeru, przez który znajdują się pomnożone jego oba wyrazy lub obie strony jednego ze zrównań, które przed uproszczeniem, do wypadków nieoznaczonych prowadzą.

237. JAK NALEŻY POSTĄPIĆ W TAKIM PRZYPADKU? W każdym przypadku przystoi roztrząsnąć pilnie początek wyrażenia danego, dla znalezienia czy rozumowania które do niego prowadzą znajdują się w błędzie, bądź przez jedną z przyczyn wskazanych powyżéj, bądź też z przyczyny, innéj okoliczności podobnéj. Jeżeli tak nie jest, gdy dowiedzioném zostało, z całą ścisłością, że zagadnienie dane może być rozwiązaném, gdy znajduje się $ax=b$, albo (co na jedno wychodzi, byleby a nie było zerem), $x=\frac{b}{a}$, oczywista że przypuszczenie, które niszczy a i b, pozwoli wziąć x dowolnie, ponieważ mamy, dla wszelkiego x,

$$0 \times x = 0.$$

W przypadku nawet gdy rozumowania znajdują się w błędzie, można często używać wyrażenia które staje się $\frac{0}{0}$, dla znalezienia prawdziwéj wartości nieznanéj, którą to wyrażenie przedstawia. Uważmy, w rzeczy saméj, że to wyrażenie, dające się zastosować dopóki nie przyjęło kształtu $\frac{0}{0}$, dostarczy rozwiązania zagadnienia dla przypuszczeń tak mało różnych jak się podoba od przypuszczenia które sprowadza trudność. Jeżeli więc pytanie jest takiéj natury, że bardzo mała zmiana w danych, musi sprowadzać bardzo małą zmianę w wypadku, stosunek obu wyrazów ułamku, gdy te dążą jednocześnie do zera, będzie się różnił coraz mniéj od wartości jakiéj szukamy, a która będzie, przeto, *jego granicą*. Ta granica nazywa się często *prawdziwą wartością* ułamku który staje się $\frac{0}{0}$.

Na znalezienie prawdziwéj wartości wyrażenia które, w pewném przypuszczeniu, przedstawia się pod kształtem $\frac{0}{0}$, potrzeba je przekształcić na inne które nie przestaje mu być równem, i które nie daje miejsca do téjże saméj trudności. Podamy kilka prawideł dotyczących przypadku gdzie wyrażenie staje się $\frac{0}{0}$, w skutek wartości szczególnéj przypisywanéj *jednéj* z liter które do tego wyrażenia wchodzą.

238. *Przypadek w którym wyrażenie jest ilorazem dwóch wielomianów całkowitych.* Wskazaliśmy już ten przypadek (195). Niech będzie, w ogólności, ułamek,

$$F = \frac{x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots\ldots + B_{n-1}x + B_n}{x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m},$$

który, dla $x = a$, przybiera kształt $\frac{0}{0}$. Ponieważ licznik i mianownik znikają dla $x = a$, więc są, jeden i drugi, podzielnemi (75) przez $(x-a)$. Gdy się zniesie ten czynnik spólny, ułamek F przyjmie kształt,

$$F = \frac{x^{n-1} + B'_1x^{n-2} + B'_2x^{n-3} + \ldots\ldots + B'_{n-2}x + B'_{n-1}}{x^{m-1} + A'_1x^{m-2} + A'_2x^{m-3} + \ldots\ldots + A'_{m-2}x + A'_{m-1}}.$$

Jeżeli oba wyrazy nie znikną więcéj dla $x = a$, należy tylko podstawić tę wartość z x, a otrzyma się tym sposobem wartość z F. Jeśli znikną jeszcze, potrzeba je będzie podzielić na nowo przez $(x-a)$; i tak daléj, aż się natrafi na ułamek nie przedstawiający więcéj téjże saméj osobliwości. Oczywista że się musi znaleźć ułamek taki; ponieważ każdą razą gdy się dzieli przez $(x-a)$ oba wyrazy ułamku danego, ich stopień zmniejsza się o jedność; i skończyłoby się, gdyby się działanie nie zatrzymało, na osiągnieniu dla jednego z nich ilorazu liczebnego.

Gdy zaś przychodzimy przez ten sposób, do dwóch wyrazów z których jeden tylko znika sam wyłącznie, to ten wypadek da się łatwo wytłumaczyć: ułamek dąży do zera, gdy jego licznik staje się zerem; przeciwnie ten ułamek wzrasta do nieskończoności, gdy jego mianownik jest równym zeru.

239. Zastosowanie. Ułamek

$$F = \frac{x^4 + ax^3 - 3a^2x^2 - a^3x + 2a^4}{x^4 - ax^3 - 13a^2x^2 + 25a^3x - 12a^4},$$

staje się $\frac{0}{0}$ dla $x = a$. Dzieląc oba wyrazy, przez $(x-a)$, będzie:

$$F = \frac{x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3}{x^3 - 13a^2x + 12a^3}.$$

Ten nowy ułamek bierze jeszcze kształt $\frac{0}{0}$, dla $x = a$. Można więc dzielić jeszcze oba wyrazy przez $(x-a)$, i otrzymuje się:

$$F = \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{x^2 + ax - 12a^2}.$$

A gdy się uczyni $x = a$, znajdziemy prawdziwą wartość:

$$F = \frac{6a^2}{-10a^2} = -\frac{3}{5}.$$

240. Przypadek wyrażeń niewymiernych. Weźmy naprzód pod

uwagę wyrażenie :

$$F = \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a},$$

które, dla $x = a$, staje się $\frac{0}{0}$, i do którego można przywieść prawie wszystkie inne. Połóżmy $\sqrt[m]{x} = y$, $\sqrt[m]{a} = b$, a, tém samém, $x = y^m$, $a = b^m$; wyrażenie staje się :

$$F = \frac{y - b}{y^m - b^m};$$

albo, dzieląc oba wyrazy przez $(y - b)$,

$$F = \frac{1}{y^{m-1} + by^{m-2} + b^2y^{m-3} + \ldots . + b^{m-2}y + b^{m-1}}.$$

Można teraz uczynić tu, $x = a$, to jest $y = b$; i otrzymamy prawdziwą wartość :

$$F = \frac{1}{mb^{m-1}} = \frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

Uważmy, następnie, wyrażenie zamykające w sobie liczbę jakąkolwiek radykalów, przyjmujących wartość $\frac{0}{0}$ dla pewnéj wartości przypisywanéj dla jednéj z liter które to wyrażenie zamyka w sobie. Niech będzie :

$$[1] \qquad F = \frac{P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} - \sqrt[p]{S}}{P' + \sqrt[m']{Q'} + \sqrt[n']{R'} - \sqrt[p']{S'} - \sqrt[r']{T'}};$$

gdzie P, Q, R, S, P′, Q′, R′, S′, T′, są wielomianami całkowitemi względem x, a $x = a$ wartością z x, dla któréj F staje się $\frac{0}{0}$.

Jeżeli się oznaczy przez P_a, Q_a, R_a, S_a, P'_a, Q'_a, R'_a, S'_a, T'_a wartości jakie przyjmują te różne wielomiany dla $x=a$, znajduje się:

$$[2]\qquad P_a+\sqrt[m]{Q_a}+\sqrt[n]{R_a}-\sqrt[p]{S_a}=0,$$

$$[3]\qquad P'_a+\sqrt[m']{Q'_a}+\sqrt[n']{R'_a}-\sqrt[p']{S'_a}-\sqrt[r']{T'_a}=0;$$

a odciągając od obu wyrazów ułamku F pierwsze strony zrównań [2] i [3] które są zerami, można napisać ten ułamek pod kształtem:

$$[4]\ F=\frac{(P-P_a)+(\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a})+(\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a})-(\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a})}{(P'-P'_a)+(\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a})+(\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a})-(\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a})-(\sqrt[r']{T'}-\sqrt[r']{T'_a})}.$$

Podzieliwszy teraz oba wyrazy przez $(x-a)$, będziemy mieli:

$$[5]=F\frac{\dfrac{P-P_a}{x-a}+\dfrac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}+\dfrac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}-\dfrac{\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a}}{x-a}}{\dfrac{P'-P'_a}{x-a}+\dfrac{\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a}}{x-a}+\dfrac{\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a}}{x-a}-\dfrac{\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a}}{x-a}-\dfrac{\sqrt[r']{T'}-\sqrt[r']{T'_a}}{x-a}}.$$

Do znalezienia prawdziwéj wartości z F, wystarczy znaleźć prawdziwe wartości ułamków $\dfrac{P-P_a}{x-a}$, $\dfrac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}$, $\dfrac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}$, i t.d., które się przedstawiają wszystkie pod kształtem $\frac{0}{0}$. Otóż gdy dwa ułamki $\dfrac{P-P_a}{x-a}$, $\dfrac{P'-P'_a}{x-a}$, nie zamykają radykałów, ich prawdziwe wartości będą się mogły otrzymać za pomocą sposobu wskazanego (238); i dosyć będzie oczywiście podzielić liczniki przez $(x-a)$, i uczynić $x=a$ w rezultatach. Wszystkie inne są tegoż samego kształtu, a więc wystarczy zastanowić się nad jednym z nich. Owóż, można napisać po obu stronach jednako:

$$\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}=\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{Q-Q_a}\times\frac{Q-Q_a}{x-a},$$

i granica pierwszéj strony będzie wieloczynem granic czynników drugiéj. Umiemy znaleźć prawdziwą wartość ostatniego czynnika (238). Co się tyczy prawdziwéj wartości pierwszego, ponieważ Q dąży do Q_a, kiedy x dąży do a, można przyrównać ten czynnik do wyrażenia $\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$; jego prawdziwa wartość jest więc $\frac{1}{m\sqrt[m]{Q_a^{m-1}}}$; a przeto prawdziwa wartość ułamku jest oznaczoną.

241. Zastosowanie. Znaleźć, dla $x=1$, prawdziwą wartość ułamka:

$$F=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{63x+1}}.$$

Można łatwo zapewnić się że ten ułamek staje się, w rzeczy saméj, $\frac{0}{0}$ dla $x=1$; gdyż licznik staje się $\sqrt[3]{8}-\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{32}$, albo $2-\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}-2$, albo $\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}$, co jest istotnie zerem; mianownik staje się także $1+1+\sqrt{4}-\sqrt[3]{64}$, albo 0.

Aby wykonać zadanie podług sposobu wskazanego, będziemy mogli napisać:

$$F=\frac{(\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8})-(\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2})+(\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4})-(\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32})}{(x^2+1-2)+(\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4})-(\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64})};$$

a dzieląc oba wyrazy przez $(x-1)$,

$$F=\frac{\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{x-1}-\frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}+\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}-\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}}{\frac{x^2+1-2}{x-1}+\frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}}.$$

Otóż, znajduje się, podług prawidła wskazanego:

1° $$\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{8}}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{2x+6-8}\times\frac{2x-2}{x-a},$$

powyższe wyrażenie ma za swą granicę: $\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\times 2$, albo $\frac{1}{6}$.

2° $$\frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}=\frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}},$$

poprzednie wyrażenie ma za swą granicę : $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3° $$\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}=\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{5x-1-4}\times\frac{5x-5}{x-1},$$

to nowe wyrażenie ma za swą granicę :

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{64}}\times 5,\quad \text{albo}\quad \frac{5}{8\sqrt[4]{4}}=\frac{5}{8\sqrt{2}}.$$

4° $$\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}=\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{20x+12-32}\times\frac{20x-20}{x-1},$$

granicą poprzedniego wyrażenia jest :

$$\frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\times 20,\quad \text{albo}\quad \frac{1}{5.16}\times 20,\quad \text{albo}\quad \frac{1}{4}.$$

5° $$\frac{x^2+1-2}{x-1}=x+1,$$

granicą piątego wyrażenia jest 2.

6° $$\frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}=\frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt[2]{3x+1}+\sqrt[2]{4})}=\frac{3}{\sqrt[2]{3x+1}+2},$$

granicą szóstego wyrażenia jest $\frac{3}{4}$.

7° $$\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{63x+1-64}\times\frac{63x-63}{x-1},$$

granicą ostatniego wyrażenia jest: $\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \times 63$, albo $\frac{21}{16}$.

Prawdziwą wartością F jest więc:

$$F = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4}}{2 + \frac{3}{4} - \frac{21}{16}} = \frac{\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{12}}{\frac{23}{16}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{23}.$$

242. Uwaga. Jedyny przypadek wyjątku jaki przedstawia sposób poprzedzający, jest ten w którym, dodając prawdziwe wartości różnych ułamków na które rozłożono oba wyrazy, znalazłoby się jeszcze $\frac{0}{0}$. Kiedy licznik sam jeden znika, ułamek dąży do zera; kiedy mianownik sam jeden jest równym zeru, ułamek wzrasta nieograniczenie.

O kształcie $\frac{\infty}{\infty}$.

243. Sposób znalezienia prawdziwéj wartości ułamku który staje się $\frac{\infty}{\infty}$. Kiedy oba wyrazy ułamku wzrastają nieograniczenie z wartością litery zmiennéj którą te wyrazy zamykają w sobie, jest niekiedy pożytecznie oznaczyć *wartość granicy* tego ułamku. Dla osiągnienia tego, należy naprzód podzielić oba wyrazy przez potęgę tak dobraną litery powiększającéj się nieograniczenie, ażeby żaden z nich nie stał się nieskończonym, i aby przecież te wyrazy nie dążyły do zera. Granica stanie się wtedy oczywistą.

244. Przykłady. 1° Znaleźć granicę z

$$F = \frac{x^5 + 3x^2 - 4x + 1}{7x^5 + x^4 + x^3},$$

gdy x wzrasta nieograniczenie. Dzieląc przez x^5 oba wyrazy ułamku, znajduje się :

$$F = \frac{1 + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}};$$

i widzimy że, kiedy x wzrasta nieograniczenie, F dąży do granicy $\frac{1}{7}$: gdyż wszystkie wyrazy, które zawierają x w mianowniku, dążą do zera.

2° Znaleźć granicę

$$F = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x + 1} + 2x}{\sqrt[4]{5x^4 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}},$$

gdy x wzrasta nieograniczenie. Dzieląc przez x oba wyrazy ułamku, ten staje się :

$$F = \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 2}{\sqrt[4]{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{x^2}}};$$

a, gdy x powiększa się nieogroniczenie, ułamek dąży do

$$\frac{1+2}{\sqrt[4]{5}+1}, \quad \text{albo} \quad \frac{3}{\sqrt[4]{5}+1}.$$

245. Uwaga I. Gdyby się zdarzyło, żeby po wykonaniu dzielenia licznik miał za swą granicę zero, a dla mianownika była granica skończona, ułamek dążyłby oczywiście do zera. Gdyby się zdarzyło, przeciwnie, żeby licznik dążył do granicy skończonéj, a mianownik do zera, ułamek wzrastałby nieograniczenie.

Przykłady. Ułamek

$$F = \frac{5x^2 + 7x + 1}{x^3 + 2x + 1},$$

dąży do zera, kiedy x powiększa się; gdyż ten ułamek jest równoważnym ułamkowi

$$F = \frac{5 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Przeciwnie, ułamek

$$F = \frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x + 7}}{x + 1},$$

wzrasta nieograniczenie z x; gdyż ten jest równoważny z ułamkiem

$$F = \frac{\sqrt[3]{x^3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}}{\frac{1}{x}}.$$

246. Uwaga II. Gdyby doznawano pewnego kłopotu w oznaczeniu potęgi z x, przez którą należy dzielić oba wyrazy ułamku, w tym razie wypadałoby dzielić przez potęgę nieoznaczoną x^α, i określić potém wartość z α pod warunkiem żeby żaden wyraz nie został nieskończonym, i żeby wszystkie nie stały się zerami.

Przykład. Znaleźć granicę ułamku :

$$F = \frac{\sqrt[7]{x^3 + 4x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^4 + 5x + 1}}{\sqrt[5]{x^2 + x + 3} + \sqrt[6]{2x^8 + 3}}.$$

Dzielenie przez x^α daje :

$$F = \frac{\sqrt[7]{x^{3-7\alpha} + 4x^{2-7\alpha} + x^{-7\alpha}} + \sqrt[3]{x^{4-3\alpha} + 5x^{1-3\alpha} + x^{-3\alpha}}}{\sqrt[5]{x^{2-5\alpha} + x^{1-5\alpha} + 3x^{-5\alpha}} + \sqrt[6]{2x^{8-6\alpha} + 3x^{-6\alpha}}}.$$

Ażeby warunki wskazane zostały dopełnione, potrzeba aby było :

$$3 - 7\alpha \leqq 0,\ 4 - 3\alpha \leqq 0,\ 2 - 5\alpha \leqq 0,\ 8 - 6\alpha \leqq 0;$$

albo też : $\alpha \geqq \frac{3}{7}$, $\alpha \geqq \frac{4}{3}$, $\alpha \geqq \frac{2}{5}$, $\alpha \geqq \frac{8}{6}$.

Potrzeba więc żeby α było przynajmniéj równém $\frac{4}{3}$. Przyjmie się tę wartość najmniejszości, gdyż wartość większa uczyniłaby wszystkie wyrazy zerami, dla $x = \infty$. Robiąc $\alpha = \frac{4}{3}$, i znosząc wszystkie potęgi odjemne z x, stające się zerami dla $x = \infty$, otrzymamy na granicę F :

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[6]{2}}, \text{ albo } \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.$$

247. Uwaga III. Kiedy wieloczyn A.B staje się $0 \times \infty$, dla pewnéj wartości na x, przywodzi się go do kształtu $A \times \frac{1}{\left(\frac{1}{B}\right)}$, który staje się $\frac{0}{0}$, albo do kształtu $\frac{B}{\left(\frac{1}{A}\right)}$, który staje się $\frac{\infty}{\infty}$; i stara się do niego zastosować prawidła poprzedzające,

O kształcie $\infty - \infty$.

248. **Przypadek w którym wyrażenie jest różnicą dwóch radykałów drugiego stopnia.**

Uważmy wyrażenie :

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q},$$

w którym P i Q są dwoma wielomianami w x, które stają się, jeden i drugi, nieskończonemi, gdy x wzrasta nieograniczenie. Mnóżmy i dzielmy to wyrażenie przez $\sqrt{P} + \sqrt{Q}$; wówczas dane wyrażenie bierze kształt :

$$\frac{P - Q}{\sqrt{P} + \sqrt{Q}}.$$

Jeżeli wielomian $(P - Q)$ jest niezależnym od x, to ponieważ mianownik wzrasta nieograniczenie z wartością tej litery, ułamek dąży do zera. Jeżeli $(P - Q)$ zawiera x, licznik wzrasta także nieograniczenie; i pytanie jest przywiedzionem do znalezienia prawdziwej wartości ułamku który staje się $\frac{\infty}{\infty}$.

Sposób jest tenże sam, jeżeli jeden z dwóch wyrazów różnicy jest wielomianem całkowitym w x.

Przykład. Wyrażenie

$$\sqrt[2]{x^2 - 7x + 1} - x,$$

które przybiera kształt $\frac{\infty}{\infty}$ dla $x = \infty$, jest równoważnem ułamkowi

$$\frac{x^2 - 7x + 1 - x^2}{\sqrt[2]{x^2 - 7x + 1} + x}, \quad \text{albo} \quad \frac{-7x + 1}{\sqrt[2]{x^2 - 7x + 1} + x};$$

gdy się podzieli oba wyrazy przez x, to wyrażenie staje się:

$$\frac{-7 + \frac{1}{x}}{\sqrt[2]{1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1};$$

a jego granicą, kiedy x wzrasta nieograniczenie, jest $-\frac{7}{2}$.

O przypadku w którym wyrażenie zamyka w sobie ilekolwiek liter zmiennych.

249. Nieoznaczoność wyrażenia w tym przypadku. *Gdy wyrażenie przyjmuje kształt $\frac{0}{0}$, dla ilukolwiek wartości jednoczesnych przypisywanych literom które to wyrażenie zamyka w sobie, należy w ogólności, uważać je jako zupełnie nieoznaczone.* Granica do której to wyrażenie dąży, gdy litery zbliżają się do wartości jakie chcemy im nadać,

zależy natenczas od prawa któremu te litery ulegają, mając na względzie ich zbliżanie się do granicy szukanéj.

Niech będzie, na przykład, wyrażenie

$$\frac{x+y-3}{xy-2},$$

które, dla $x=1, y=2$, staje się $\frac{0}{0}$. Połóżmy : $x=1+\alpha$, $y=2+\beta$;

to wyrażenie staje się :

$$\frac{\alpha+\beta}{2\alpha+\beta+\alpha\beta};$$

a dla otrzymania granicy szukanéj, potrzeba uczynić, w tym wypadku, $\alpha=0$, $\beta=0$. Otóż, podzieliwszy oba wyrazy przez β, wyrażenie staje się :

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{2\frac{\alpha}{\beta}+1+\alpha}.$$

Jeżeli da się sprowadzić α i β do zera można nadać ich stosunkowi wartość dowolną, gdyż prawo ich zmniéjszania się jest dowolném, i wyrażenie będzie miało oczywiście za granicę $\frac{m+1}{2m+1}$; a wyrażenie to, dobiérając m stosownie, może wziąć wszelkie wartości możebne.

250. Wyjątek. Przecież są wyjątki od tego podania. Często ułmek który staje się $\frac{0}{0}$, w skutek przytomności czynnika spólnego w jego obu wyrazach, który to czynnik dla pewnych przypuszczeń wyraźnie znika, nie przedstawia więcéj żadnéj nieoznaczoności, jeśli się zniesie ten czynnik spólny.

Przykład. Wyrażenie

$$\frac{x^2+2xy+y^2-4}{x+y-2},$$

które staje się $\frac{0}{0}$, dla $x=1$, $y=1$, może się napisać :

$$\frac{(x+y+2)(x+y-2)}{x+y-2},$$

lub po prostu, $(x+y+2)$, po zniesieniu czynnika $(x+y-2)$; i, dla $x=1$, $y=1$, to wyrażenie jest równe 4.

251. Sposób postępowania. W ogólności, jeżeli wyrażenie algebraiczne $\frac{M}{N}$, zawierające w sobie litery x, y, z..., przyjmuje kształt $\frac{0}{0}$, jeśli się w niém czyni jednocześnie, $x=a$, $y=b$, $z=c$..., położywszy :

$$x=a+h,\quad y=b+ph,\quad z=c+qh\ldots;$$

podstawia się te wartości w wyrażeniu, i upraszcza się je, o ile tylko można, jak najdokładniéj; daléj robi się $h=0$ w rezultacie. Gdy się znajdzie wtedy wyrażenie niezależne od ilości *dowolnych* p, q..., otrzymało się, tym sposobem, prawdziwą wartość ułamku. Lecz, jeśli ilości p, q..., albo niektóre z pomiędzy nich, pozostają w ułamku, wartość tegoż jest nieoznaczoną, ponieważ można sprowadzić x, y, z, ..., do a, b, c, albo h do zera, dając dla p, q..., wartości jakiekolwiek.

Przykład. Weźmy ułamki

$$\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\quad \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

które dla $b=0$, $b'=0$, $\frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}$, przedstawiają się jeden i drug pod kształtem $\frac{0}{0}$. Połóżmy

$$b=h,\quad b'=ph,\quad c'-a'\frac{c}{a}=a'qh;$$

zkąd wypada oczywiście : $ac'-ca'=aa'qh$;

pierwszy ułamek staje się

$$\frac{cph - \frac{c}{a}\,a'h}{aph - a'h} = \frac{\frac{c}{a}\,(ap - a')h}{(ap - a')h} = \frac{c(ap - a')}{a(ap - a')} = \frac{c}{a},$$

ten ułamek jest więc należycie oznaczonym.

Drugi, przeciwnie, ma postać

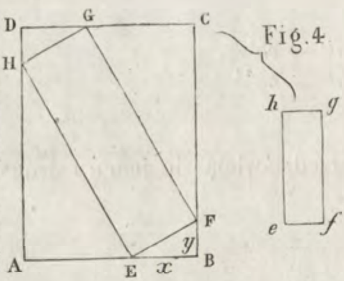
$$\frac{aa'qh}{h(ap - a')} = \frac{aa'q}{ap - a'},$$

ten ułamek jest więc nieoznaczonym, ponieważ dobierając odpowiednio p i q, można mu nakazać przyjąć taką wartość jak chcemy.

Trudno jest znaleźć coś trafniejszego nad ten prosty przykład, będący zarówno i całéj rzeczy gruntowném wyjaśnieniem i dopełnieniem powyżéj przez nas przedstawionéj teoryi, wziętéj w swym ogólnym zarysie.

252. Kiedy się ma, jak w ćwiczeniu poprzedzającém, ilekolwiek przypuszczeń do zrobienia, potrzeba wprowadzić je jednocześnie; bez czego mogłaby zniknąć nieoznaczoność istniejąca rzeczywiście. Weźmy za przykład zagadnienie dobrze znane :

Wpisać w prostokąt wymiarów danych a *i* b *prostokąt podobny prostokątowi danemu, to jest któregoby wymiary były w stosunku danym* m.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązanem, i niech będzie HEFG prostokąt wpisany w prostokąt dany ABCD i taki, żeby było :

$$\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FE}} = \frac{gf}{fe} = m.$$

Połóżmy $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, $\mathrm{BE} = x$ i $\mathrm{BF} = y$.

Jeśli wynajdziemy x i y łatwo będzie zbudować prostokąt HEFG. Trójkąty AEH i CGF są równe jako mające bok równy $\mathrm{EH} = \mathrm{GF}$

przyległy dwóm kątom równym; toż samo się rozumie o trójkątach DHG i EBF.

Trójkąty GFC i FEB są podobne, gdyż będąc prostokątnemi mają kąt $\widehat{GFC} = \widehat{FEB}$ jako dopełnienia tegoż samego kąta w $\widehat{EFB}$. Na mocy podobieństwa tych trójkątów, mamy

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BF}{CG}, \quad \text{albo} \quad \frac{x}{b-y} = \frac{y}{a-x} = m;$$

zkąd

$$x = \frac{m(am-b)}{m^2-1}, \quad y = \frac{m(mb-a)}{m^2-1}.$$

Roztrząsanie. Jeśli przypuścimy $a=b$, i $m=1$, dwa prostokąty stają się kwadratami, a zagadnienie jest oczywiście nieoznaczoném, gdyż dla wpisania kwadratu w kwadrat dosyć jest podzielić tymże samym sposobem, byleby dowolnie, boki pierwszego kwadratu. To też formuły przedstawiają się pod postacią $\frac{0}{0}$, gdy się do nich wprowadza jedocześnie dwa przypuszczenia; a gdy się szuka ich prawdziwéj wartości, kładąc

$$b = a + h, \quad m = 1 + ph,$$

upraszczając i robiąc $h=0$, znajduje się wyrażenia

$$x = \frac{a}{2} - \frac{1}{2p}, \quad y = \frac{a}{2} + \frac{1}{2p},$$

jakie przytomność ilości p czyni rzeczywiście nieoznaczonemi.

A przecież, gdy się uczyni *naprzód* $a=b$, co pozwoli znieść czynnik spólny $(m-1)$, *potém* $m=1$ w formułach uproszczonych

$$x = \frac{am}{m+1}, \quad y = \frac{am}{m+1},$$

znajduje się wartość oznaczona

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2};$$

dozwoli się więc zniknąć tym sposobem nieoznaczoności która jednakże w rzeczywistości ma miejsce.

Na tém zamkniemy nasze *uwagi nad wyrażeniami przedstawiającemi się pod kształtem nieoznaczonym.*

WARUNEK TOSAMOŚCI DWÓCH WIELOMIANÓW.

3. *Wielomian całkowity i wymierny zawierający w sobie literę dowolną* x, *nie może być zerem jak tylko jeżeli każdy ze spółczynników różnych potęg z* x *jest zerem.*

Twierdzenie jest oczywistém dla wielomianu pierwszego stopnia $A_0x + A_1$; gdyż zmieniając x na αx, gdzie α jest liczbą różną od 1, otrzymuje się nowy wielomian $A_0\alpha x + A_1$ który musi także być zerem, dla jakiegokolwiek bądź x; różnica $A_0(\alpha - 1)x$ powinna więc być stale zerem, co wymaga $A_0 = 0$, a, tém samém, wracając do źródła, $A_1 = 0$.

Aby dowieść że twierdzenie jest ogólném, pozostaje do wykazania że jeżeli to twierdzenie jest prawdziwém dla wielomianu stopnia $n - 1$, to samo twierdzenie przechowa się jeszcze dla wielomianu stopnia n. Otóż niech będzie

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n$$

wielomian stopnia n; zmieniając x na αx, nowy wielomian

$$A_0\alpha^n x^n + A_1\alpha^{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1}\alpha x + A_n$$

musi być także zerem, dla jakiegokolwiekbądź x; toż samo prawo powinno więc służyć różnicy

$$x[A_0(\alpha^n - 1)x^{n-1} + A_1(\alpha^{n-1} - 1)x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}(\alpha - 1)],$$

co wymaga, ponieważ nawias jest stopnia $n - 1$, żeby spółczynniki różnych potęg z x były postawione osobno; potrzeba więc żeby było, ponieważ α różni się od 1,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \ldots\ldots, A_{n-1} = 0,$$

a, tém samém, wracając do źródła,

$$A_n = 0.$$

254. *Żeby dwa wielomiany całkowite i wymierne, zawierające literę dowolną* x *były sobie równe*, potrzeba żeby ich różnica była stale zerem, to jest, podług twierdzenia poprzedzającego, żeby spółczynniki osobno uważane różnych potęg z x w téj różnicy były zerami; albo nakoniec, ponieważ wyrazy téj różnicy są różnicami wyrazów odpowiednich dwóch wielomianów danych, *potrzeba aby te dwa wielomiany składały się jednako z tychże samych wyrazów.*

Można nawet powiedzieć, w ogólności, *że dwa wielomiany całkowite i wymierne, zawierające liczbę jakąkolwiek liter dowolnych i niezależnych jedne od drugich, nie mogą być równemi między sobą jak tylko jeżeli te wielomiany składają się jednako z tychże samych wyrazów.* Na dowodzenie tego dosyć jest wykazać że jeżeli to twierdzenie jest prawdziwém dla dwóch wielomianów zawierających w sobie $n-1$ liter dowolnych, utrzyma się ono jeszcze dla dwóch wielomianów zawierających w sobie n tychże liter. Otóż niech będą dwa wielomiany zamykające w sobie n liter dowolnych $x, y, z, \ldots, t$; porządkując je względem x, przybiorą one postać

$$(1) \qquad A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p, \quad B_0x^q + B_1x^{q-1} + \ldots + B_q,$$

gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_p, B_0, \ldots, B_q$ są wielomianami zamykającemi w sobie $n-1$ zmiennych $y, z, \ldots, t$; ponieważ wielomiany (1) są równe między sobą, dla jakiegokolwiekbądź x, potrzeba więc żeby było

$$(2) \qquad p = q, \quad A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ldots, A_p = B_q;$$

lecz te wieloczyny (2) jako równe między sobą i zawierające w sobie tylko $n-1$ zmiennych, powinny być odpowiednio złożone z tychże samych wyrazów; a, przeto, ta własność stosuje się także do wielomianów danych.

Oto cała teorya: zobaczmy jéj kilka ważnych zastosowań.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA POPRZEDZAJĄCEGO.

254. Podanie poprzedzające służy do sprawdzenia ścisłości jakiegokolwiek związku algebraicznego danego.

Dla sprawdzenia związku $V=0$ pomiędzy m zmiennemi związanemi między sobą przez $(m-n)$ zrównań, wyprowadza się z tych zrównań wartości $(m-n)$ zmiennych w funkcyi n innych; potrzeba potém żeby podstawienie tych wartości w pierwszéj stronie $V=0$ przywiodło to zrównanie do tosamości; tosamość stanie się widoczną po zniesieniu mianowników i radykalów.

Weźmy, na przykład, do sprawdzenia że

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)},$$

jeżeli mamy

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d},$$

to z tych związków wyciąga się

$$B=b\frac{A}{a},\ C=c\frac{A}{a},\ D=d\frac{A}{a},\ A+B+C+D=(a+b+c+d)\frac{A}{a};$$

wprowadzając te wypadki do pierwszego, otrzymuje się

$$\sqrt{\frac{A}{a}a^2}+\sqrt{\frac{A}{a}b^2}+\sqrt{\frac{A}{a}c^2}+\sqrt{\frac{A}{a}d^2}=\sqrt{\frac{A}{a}(a+b+c+d)^2},$$

albo

$$\sqrt{\frac{A}{a}}(a+b+c+d)=\sqrt{\frac{A}{a}}(a+b+c+d).$$

255. Oto inny użytek tegoż samego twierdzenia.

Kiedy wielomian nieznany i uporządkowany względem jakiéjkolwiek litery danéj musi zadosyć czynić pewnym warunkóm, pisze się tenże, zostawiając nieoznaczonemi jego spółczynniki i nawet jego stopień jeśli to ma miejsce; potém oznacza się te spółczynniki i ten stopień wyrażając że wielomian posiada własności szczególne o które tu idzie. Wyjaśnimy te ogólności na przykładach.

PRZYKŁAD I. *Znaleźć warunek żeby trójmian* $ax^2 + bx + c$ *był kwadratem zupełnym.*

Potrzeba utosamić to wyrażenie z kwadratem dwumianu $\alpha x + \beta$, to jest z

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2;$$

otrzymuje się tym sposobem związki

$$\alpha^2 = a, \qquad 2\alpha\beta = b, \qquad \beta^2 = c.$$

Dwa ostatnie dają

$$\alpha = \sqrt{a}, \qquad \beta = \sqrt{c},$$

a wprowadzając te wypadki do równości pośredniéj, znajduje się

$$2\sqrt{ac} = b, \quad \text{albo} \quad b^2 - 4ac = 0,$$

co jest właśnie warunkiem szukanym; a że $\beta = \frac{b}{2\alpha} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, przeto trójmian dany jest kwadratem z dwumianu

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

256. PRZYKŁAD II. *Znaleźć resztę z podzielenia wielomianu przez* $x - a$, *i kształt ilorazu.*

Niech będzie wielomian

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_n x^{m-n} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Ponieważ dzielnik jest pierwszego stopnia, iloraz będzie wielomianem stopnia $m-1$, takim jak

$$B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots\ldots+B_nx^{m-n}+\ldots\ldots+B_{m-1}x+B_m,$$

a reszta która ma na wyrażenie

$$Ax^m+A_1x^{m-1}+A^2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_nx^{m-n}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

$$-(x-a)(B_1x^{m-1}+B^2x^{m-2}+\ldots+B_nx^{m-n}+\ldots+B_{m-1}x+B_m),$$

albo

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
A_0 & x^m+\ A_1 & x^{m-1}+\ A^2 & x^{m=2}+\ldots+\ A_n & x^{m-n}+\ldots+\ A_{m-1} & x+A_m \\
-B_1 & +aB_1 & +aB_2 & +aB_n & +aB_{m-1} & +aB_m \\
 & -B_2 & -B_3 & -B_{n+1} & -B_m &
\end{array}$$

będzie stopnia zero. Będziemy więc mieli wyrażenie téj reszty, biorąc równemi zeru spółczynniki z x, x^2,....., x^m, wyciągając wartość z B_m ze zrównań tym sposobem otrzymanych, i wprowadzając tę wartość do A_m+aB_m.

Przywodząc do zera spółczynniki z x, x^2, . . . , x^m, znajduje się

$$(1)\quad \begin{cases} A_0=B_1,\ A_1+aB_1=B_2,\ A_2+aB_2=B_3,\ldots, \\ A_n+aB_n=B_{n+1},\ldots,A_{m-1}+aB_{m-1}=B_m. \end{cases}$$

Mnożąc piérwsze zrównanie przez a^m, drugie przez a^{m-1},. . ., ostatnie przez a, i dodając, będzie

$$A_0a^m+A_1a^{m-1}+\ldots+A_na^{m-n}+\ldots+A_{m-1}a=aB_m.$$

Reszta A_m+aB_m przyjmuje więc postać

$$A_0a^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots+A_na^{m-n}+\ldots+A_{m-1}a+A_m;$$

to jest że *jest równą wypadkowi otrzymanemu z podstawienia* a *za* x *w dzielnéj*. Jest to inne dowodzenie twierdzenia (72).

Zrównania (1) pokazują że *otrzymuje się spółczynnik jakikolwiek ilorazu, mnożąc spółczynnik poprzedzający przez* a *i dodając spółczynnik tegoż samego porządku w dzielnéj.* Zastosowanie tego prawa do dzielnéj $x^m \pm a^m$ już było poprzednio (77) ściśle wyłożoném.

ĆWICZENIA.

I. Dowodzi się w geometryi, że, przedstawiwszy przez s i przez S powierzchnie dwóch wielokątów foremnych podobnych, jednego wpisanego w koło a drugiego opisanego na témże samém kole, to powierzchnie s' i S' dwóch innych wielokątów foremnych podobnych, mających liczbę boków podwójną, jednego wpisanego w koło a drugiego opisanego na témże samém kole, są dane przez formuły :

$$s' = \sqrt{sS} \quad S' = \frac{2sS}{s+s'} \ ;$$

chcemy oznaczyć granicę stosunku, $\dfrac{S'-s'}{S-s}$, gdy $(S-s)$ zmniejsza się nieogrniczenie.

Zastąpiwszy, w tym stosunku, S' i s' przez ich wartości, znajdujemy że granicą jest $\dfrac{1}{4}$.

II. Dowodzi się jeszcze, że, jeżeli przedstawimy przez p i przez P obwody dwóch piérwszych wielokątów zagadnienia poprzedzającego, to obwody p' i P' dwóch ostatnich są dane przez formuły :

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}, \ p' = \sqrt{pP'} \ ;$$

chcemy oznaczyć granicę stosunku $\dfrac{P'-p'}{P-p}$, gdy $(P-p)$ dąży do zera.

Znajduje się, w sposób podobny, że granicą jest $\dfrac{1}{4}$.

III. Dowodzi się także, że, jeżeli oznaczymy przez R i przez r promień i apotemę wielokąta foremnego, promień R' i apotema r' wielokąta foremnego, *równoobwodowego*, są dane przez formuły :

$$r' = \frac{R + r}{2}, \qquad R' = \sqrt{Rr'};$$

Znaleźć granicę stosunku $\frac{R' - r'}{R - r}$, gdy $(R - r)$ dąży do zera.

Tą granicą jest jeszcze $\frac{1}{4}$.

IV. Wyrachować granicę z $\sqrt[3]{x^3 + 1}$, gdy x wzrasta nieograniczenie. Znajduje się tę granicę równą zeru.

V. Wyrachować granicę z $\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x$, gdy x wzrasta nieograniczenie.

Znajduje się $\frac{5}{2}$.

VI. Znaleźć, dla $x = 1$, prawdziwą wartość ułamku,

$$F = \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{43x + 6}} - \sqrt[4]{x^2 + 1 + \sqrt{195x + 1}}}{\sqrt[3]{5x + 3} - \sqrt[2]{x^2 - x + 4}}.$$

Można będzie zastosować sposób numeru 240, uważając że mamy jednako :

$$\frac{\sqrt[m]{Q + \sqrt[n]{R}} - \sqrt[m]{Q_a - \sqrt[n]{R_a}}}{x - a}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{Q + \sqrt[n]{R}} - \sqrt[m]{Q_a + \sqrt[n]{R_a}}}{Q + \sqrt[n]{R} - Q_a - \sqrt[n]{R_a}} \left(\frac{Q - Q_a}{x - a} + \frac{\sqrt[n]{R} - \sqrt[n]{R_a}}{R - R_a} \times \frac{R - R_a}{x - a} \right),$$

i że umiemy znaleźć granicę drugiéj strony. Znajdzie się że granicą F jest $\frac{159}{448}$.

VII. Znaleźć granicę z $a - \sqrt{a^2 - b^2}$, gdy a i b wzrastają nieograniczenie, tak że stosunek $\frac{b^2}{a}$ dąży do granicy stałéj $2p$.

Znajduje się że granicą jest p.

VIII. Niech będą v i x ilości zależne jedna od drugiéj, tak ażeby dla $x = a, a', a''$, było

$$v = b, b', b'';$$

wyrazić v przez wielomian w x, tak aby można było spełnić te warunki.

IX. Wyrazić v przez wielomian w x i y, tak aby wartości odpowiednie z v, x, y, były c, a, b; c', a', b'; c'', a'', b'', i t. d.

Dwa ostatnie zagadnienia przedstawiają się często w matematyce zastosowanéj.

X. Oznaczyć stałe a, b, c przez warunek aby wyrażenia

$$ax + bx^2, \quad ax + bx^2 + cx^3,$$

przedstawiały, pierwsze summę kwadratów, a drugie summę sześcianów z x pierwszych liczb ciągu naturalnego.

XI. Sprawdzić że objętość pnia ostrokręgu prostego o podstawach równoległych jest równoważną summie ostrokręgu i walca obu prostych téjże saméj jak pień wysokości, i których podstawy mają odpowiednio za promienie, pół summy i pół różnicy promieni podstaw pnia.

W Anglii, używa się dla obliczenia objętości beczek formuła Oughtred'a

$$V = \frac{1}{8} \pi H (2R^2 + r^2);$$

a we Francyi ku temu służy formuła Dez'a

$$V = \pi H \left[R - \frac{3}{8} (R - r) \right]^2.$$

która z tych dwóch formuł daje większą objętość ?

XII. Wyrugować a, b, c pomiędzy zrównaniami

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

$$\frac{x^m}{a^{m+n}} = \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}},$$

$$a^n + b^n + c^n = d^n.$$

XIII. Rozwiązać układ

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = a_1 ,$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + nx_1 = a_2 ,$$
$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \dots + nx_2 = a_3 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n + 2x_1 + 3x_2 + \dots + nx_{n-1} = a_n .$$

XIV. Związki

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 , \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 ,$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 , \qquad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 ,$$
$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 , \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 ,$$

pociągają za sobą

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 , \qquad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 ,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 , \qquad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0 ,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 , \qquad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 ,$$
$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha'^2\beta'^2\gamma'^2 + \alpha''^2\beta''^2\gamma''^2 .$$

ROZDZIAŁ XIV

WYRAŻENIA UROJONE.

O WYRAŻENIACH UROJONYCH

257. Widzieliśmy (95), że gdy A jest odjemném a *m* parzystém, $\sqrt[m]{A}$ nie przedstawia zadnéj liczby dodatnéj albo odjemnéj; gdyż wszystkie potęgi parzyste z liczby dodatnéj albo odjemnéj są dodatne. Na przykład, nie ma liczby dodatnéj lub odjemnéj któraby podniesiona do kwadratu mogła wydać -4, tak że $\sqrt{-4}$ jest symbolem pozbawionym wszelkiego znaczenia. Symbolem najogólniejszym tego rodzaju jest

$$\sqrt[2n]{-b^2}.$$

Daje się mu nazwisko *wyrażenia urojonego;* lecz nie jest to liczba mogąca służyć do wymiaru wielkośći; jest to czyste oznaczenie, wprowadzone pożytecznie do rachunków, a *określone warunkiem aby jego potęga* 2n *była rowną* $-$ b^2.

258. Poznamy w dalszym ciągu nauki, że wszelkie wyrażenie urojone z jakąkolwiek wskazówką znaku pierwiastkowego da się przerobić na takie, w którém wskazówka znaku będzie 2. Ostatniego więc tylko gatunku wyrażenia urojene możemy odtąd uważać.

Weźmy przeto pod uwagę urojone pochodzące z radykalów drugiego stopnia, i nazwijmy *wyrażeniem* urajoném wszelkie wyrażenie kształtu

$$a+\sqrt{-b^2} \qquad [1]$$

gdzie a i b oznaczają jakiekolwiek liczby dodatne albo odjemne które przez opozycyę są nazwane *rzetelnemi* albo *rzeczywistemi*.

Kiedy będziemy mieli wykonywać rachunki na wyrażeniach przywiedzionych do formy

$$a+\sqrt{c},$$

nie możemy wiedzieć czy podstawienie liczb na miejscu liter wyda nadal wartość z c dodatną albo odjemną; gdyby więc każdemu z tych dwóch przypadków odpowiadały prawidła odrębne działań szczególnych, niemożność zdecydowania w którym się przypadku znajdujemy zmusiłaby nas do robienia poddziałów wzrastających ciągle do nieskończoności : nie będzie przeto rachunek algebraiczny istotnie możebnym, dopóki nie dadzą się zastosować do liczb urojonych prawidła dowiedzione dla liczb rzetelnych czyli rzeczywistych.

Z tąd wynika bezpośrednio, że można wydobyć czynnik b^2 z pod radykala, i przywieść wyrażenie [1] do formy mającéj służyć za *typ* dla jakichkolwiek drugiego stopnia wyrażeń urojonych

$$[2] \qquad a+b\sqrt{-1},$$

$\sqrt{-1}$ jest wtedy sam tylko czynnikiem urojonym wchodzącym do rachunków; przedstawia się go także przez literę i, oznaczając przez i urojonośc, i działa się na wyrażeniu

$$[3] \qquad a+bi$$

jak gdyby było rzeczywistém, pod warunkiem zastąpienia w rezultacie

$$i \text{ przez } i,$$
$$i^2 \text{ przez } -1,$$
$$i^3 \text{ przez } -i,$$
$$i^4 \text{ przez } +1,$$
$$\dots\dots\dots$$

259. Równość pomiędzy ilościami rzetelnemi i urojonemi

$$A + Bi = A' + B'i, \tag{4}$$

tylko w przypadku dwóch równości

$$A = A' \text{ i } B = B'$$

miejsce mieć może.

Te ostatnie równości nie są nigdy następstwem piérwszéj; przeciwnie pierwsza wynika z dwóch innych. Tak więc związek pomiędzy ilościami rzeczywistemi i urojonemi nie miałby żadnego sensu, gdyby się nie wiedziało, z innéj strony, że ilości rzetelne są równe między sobą niemniéj jak spółczynniki i (imaginaria).

Dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie urojonych.

260. Łącząc dwa wyrażenia

$$a + bi, \quad c + di$$

przez dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie, otrzymuje się koleją

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - bdi^2 + (bc - ad)i}{c^2 - d^2i^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Widzimy że wszystkie te rezultata są formy

$$A + Bi.$$

261. Twierdzenie I. *Mnożąc stronami jakąkolwiek ilość równości kształtu*

$$(1) \qquad a + bi = a' + b'i,$$

znajdzie się równość kształtu (259)

$$(2) \qquad A + Bi = A' + B'i,$$

w której A *będzie równém* A', *a zaś* B *będzie równém* B'.

W rzeczy samej, przed zniżeniem wykładników i poniżéj 2, położywszy $i^2 = -1$, dwie strony równości które się otrzymuje mnożąc równości (1) będą dwoma wielomianami tegoż samego stopnia w i, i które będą się różniły tylko przez zmianę $a, b, \ldots$, na $a', b', \ldots$; w tych dwóch wielomianach, spółczynniki tychże samych potęg i będą więc równe, ponieważ zakładając równości (1), wiedziało się naprzód że $a, b, \ldots$, były równe $a', b' \ldots$; równość tych spółczynników przechowa się więc gdy się zniży wykładnik i poniżéj 2, i będzie

$$A = A', \quad B = B'.$$

262. Twierdzenie II. *Ażeby wieloczyn był zerem, potrzeba i wystarcza żeby jeden z czynników był zerem.*

Potrzeba rozciągnąć do wieloczynu z czynników urojonych to twierdzenie które jest oczywistem dla wieloczynu z czynników rzeczywistych.

Weźmy więc wieloczyn

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i\,;$$

nie mamy prawa porównać go z zerem jak tylko gdy naprzód wiedzieć będziemy że ilości $ac - bd$, $ad + bc$ są odrębnie równe zeru, a, następnie, że się znajduje

$$(1) \qquad (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 0.$$

Odwrotnie ten związek pociąga za sobą

$$ac - bd = 0, \quad ad + bc = 0,$$

a, następnie, niszczy wieloczyn poprzedzający.

Otóż równość (1) da się napisać

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0;$$

wymaga więc żeby było

$$\text{już to } \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases} \qquad \text{już to } \begin{cases} c = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

to jest aby jeden z czynnikow urojonych był zerem.

Użyteczność urojonych. — Nowe określenie algebry.

263. Znak $\sqrt{-1}$ wynalazł geometra boloński *Bombelli*; lecz geometra francuzki, *Wojciech Girard* był pierwszym który pokazał użyteczność wprowadzenia urojonych do języka algebraicznego. Pokażemy jak użycie przechodnie tych symboli doprowadza, sposobem eleganckim i prędkim do rezultatów, których dowodzenie wprost byłoby często bardzo trudném.

Gdy w tosamości

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\gamma\delta' - \delta\gamma')$$

$$= (\alpha\gamma + \alpha'\gamma')(\beta\delta + \beta'\gamma') - (\alpha\delta + \alpha'\delta')(\beta\gamma + \beta'\gamma')$$

zrobimy

$$\alpha = a + bi, \quad \gamma = p + qi, \quad \alpha' = -c - di, \quad \gamma' = -r + si,$$

$$\beta = c + di, \quad \delta = r + si, \quad \beta' = \quad a - bi, \quad \delta' = \quad p - qi,$$

otrzymamy relacyą:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$$
$$=(pa-qb+rc-sd)^2+(qa+qb-sc-rd)^2$$
$$+(ra-sb-pc+qd)^2+(sa+rb+qc+pd)^2,$$

która wyraża że *wieloczyn dwóch summ z czterech kwadratów jest jeszcze summą z czterech kwadratów.*

To twierdzenie należy się *Eulerowi*, lecz dowodzenie poprzedzające jest Pana *Hermite'a.*

264. Użycie przechodnie nrojonych uprawnia wzgląd, że związki z których się wychodzi nie wyrażają nic innego jak wypadki *kombinacyi.*

Na wyiaśnienie téj idei, weźmy przykład prosty. Niech będą

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha',\ \alpha'.$$

cztery czynniki równe dwójkami; otrzymuje się ich wieloczyn mnożąc zarówno wieloczyn dwóch jakichkolwiek z pomiędzy nich przez wieloczyn z dwóch innych, i znajduje się

$$(\alpha\alpha)(\alpha'\alpha')=(\alpha\alpha')(\alpha\alpha').$$

Ta równość wyraża wypadek niezależny od wszelkiéj własności wielkości; jest tłumaczeniem algebraiczném zasady wynikającéj jedynie z uwagi że mnożenie jest kombinacyą w którą czynniki wchodzą symetrycznie; i aby się ta zasada przechowała, nie ma potrzeby aby te kombinacye miały znaczenie arytmetyczne, ani następnie aby czynniki przedstawiały liczby rzeczywiste. Można więc położyć

$$\alpha=a+bi,\quad \alpha'=a-bi,$$

i równość pierwotna staje się

$$(a+bi)^2(a-bi)^2=[(a+bi)(a-bi)]^2,$$
$$(a^2-b^2+2abi)(a^2-b^2-2abi)=(a^2-b^2i^2)^2,$$
$$(a^2-b^2)^2-4a^2b^2i^2=(a^2+b^2)^2,$$
$$(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2;$$

zkąd jasno widzimy, że *kwadrat summy dwóch kwadratów jest także summą kwadratów.*

Powiemy więc z *Poinsotem :*

« Algebra wyższa jest tą częścią nauki, która się opiera cał-
» kowicie na teoryi porządku i kombinacyj, która zajmuje się
» wyłącznie zbadaniem natury i składu formuł uważanych
» w sobie samych, jako czystych symboli i bez żadnéj idei
» wartości albo ilości. Do téjto części należy odnieść teoryą
» głęboką zrównań, różne teorye wyrażeń urojonych, i całą
» sztukę przekształceń algebraicznych, i jestto nawet jedyna
» część wysoka nauki która zasługuje, właściwie mówiąc, na
» imie Algebry. »

ĆWICZENIA.

I. Nadać wyrażeniu $a + b$ i kształt $\rho\ (\cos\omega + i\sin\omega)$; jakie są wartości z ρ i z ω ? (ρ zowie się modulem a ω argumentem wyrażenia urojonego wziętego pod rozwagę.)

II. Sprawdzić formuły

$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)]\,[\rho'(\cos\omega' + i\sin\omega')]$$
$$= \rho\rho'\,[\cos(\omega + \omega') + i\sin(\omega + \omega')],$$
$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega]^m = \rho^m(\cos m\omega + i\sin m\omega).$$

III. Dowieść nierówności

$$1^\circ\ \alpha + \frac{1}{2}\,\delta - \sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} < \frac{\delta^2}{8\alpha},$$

$$2^\circ\ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a - \alpha} < \frac{\alpha}{3\sqrt[3]{(a - \alpha)^2}}.$$

IV. Dowieść że wyrażenie

$$(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - x$$

dąży do zera dla $x = \infty$, i że ułamek

$$\frac{\left(M + N^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} - \left(M_a + N_a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}}{x - a}.$$

dąży do

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{\left(M_a + N_a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}}}\left[gr.\,\frac{M - M_a}{x - a} + \frac{1}{n\sqrt[n]{N_a^{n-1}}}\,gr.\,\frac{N - N_a}{x - a}\right]$$

dla $x = a$.

ROZDZIAŁ XV.

ZRÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEZNANĄ.

265. Formuła ogólna zrównania stopnia drugiego z jedną nieznaną. Zrównanie o jednéj nieznanéj x jest drugiego stopnia, gdy jego dwie strony, będąc całkowitemi w x, zawierają kwadrat z nieznanéj, i nie obejmują jéj podniesionéj do potęgi wyższéj. To zrównanie może więc zawierać tylko trzy gatunki wyrazów : to jest, wyrazy zawierające kwadrat z x, wyrazy zawierające tąż nieznaną w stopniu pierwszym, i wyrazy niezależne od niéj. Przeto, jeżeli przeniesiemy wszystkie wyrazy w pierwszy członek, i jeżeli złączymy w jeden wszystkie wyrazy mające za czynnik x^2, w jeden wszystkie wyrazy mające za czynnik x, i w jeden wszystkie wyrazy wiadome, zrównanie przyjmie *kształt ogólny*,

$$ax^2+bx+c=0\,;$$

a, b, c będąc liczbami danemi które mogą być dodatne lub odjemne.

Na przykład, zrównanie,

$$3x-\frac{2}{5}+\frac{x^2}{9}=8+\frac{2x^2}{4}-\frac{26x}{15},$$

przekształca się kolejno na zrównania następujące :

$$\frac{x^2}{9}-\frac{2x^2}{3}+3x+\frac{26x}{15}-8-\frac{2}{5}=0,$$

$$5x^2-30x^2+135x+78x-360-18=0,$$

$$-25x^2+213x-378=0\,;$$

nakoniec, w całém zrównaniu odmieniając znaki na przeciwne, otrzymamy :

$$25x^2 - 213x + 378 = 0.$$

Rozwiązania zrównania drugiego stopnia zowią się jego *pierwiastkami.*

Spółczynnik a nie może być zerem; gdyż zrównanie przestałoby być drugiego stopnia; lecz spółczynniki b i c mogą być równemi zeru. Zrównanie bierze wtedy jeden z kształtów :

$$ax^2 + c = 0, \quad ax^2 + bx = 0.$$

Mówi się, w tych przypadkach, że zrównanie jest niezupełném.

ROZWIĄZANIE ZRÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

266. Przypadek gdy zrównanie jest kształtu $ax^2 + c = 0$. Kiedy zrównanie drugiego stopnia przedstawia się pod kształtem,

$$[1] \qquad ax^2 + c = 0,$$

można je uważać jako zrównanie pierwszego stopnia którego nieznaną byłoby x^2; zkąd się wyciąga :

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Jeżeli więc $-\frac{c}{a}$ *jest liczbą dodatną,* ta liczba jest kwadratem z nieznanéj. Wartość na x jest więc pierwiastkiem kwadratowym z $-\frac{c}{a}$; a ponieważ ten pierwiastek (95), ma dwie wartości równe i ze znakami przeciwnemi, *dwa więc rozwiązania istnieją* :

$$[2] \qquad x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Jeżeli, przeciwnie, $-\frac{c}{a}$ *jest odjemném,* nie ma liczby, dodatnéj lub odjemnéj, któréjby ta liczba mogła być kwadratem (95). *Zrównanie* [1] *nie ma więc rozwiązania.* Wszelako mówi się wtedy, *że to zrównanie ma dwa pierwiastki urojone,* przedstawione przez formuły [2].

267. Przypadek gdy zrównanie jest kształtu $ax^2 + bx = 0$. Kiedy wyraz niezależny od x jest zerem, zrównanie przedstawia się pod kształtem :

[1] $$ax^2 + bx = 0,$$

można wtedy kładąc x za czynnik napisać :

$$x(ax + b) = 0.$$

Otóż, ażeby wieloczyn z dwóch czynników był zerem, potrzeba i wystarcza żeby jeden jakikolwiek z dwóch czynników był zerem. Otrzymamy więc wszystkie rozwiązania zrównania, położywszy :

$$x = 0, \quad ax + b = 0,$$

zrównania pierwszego stopnia, których rozwiązaniami są :

[2] $$x' = 0, \quad x'' = -\frac{a}{b}.$$

Tak więc, w tym przypadku, *zrównanie ma dwa pierwiastki, z których jeden jest zawsze zerem.*

268. Rozwiązanie zrównania zupełnego. Zajmiemy się zrównaniem zupełném,

[1] $$ax^2 + bx + c = 0.$$

Żeby je rozwiązać, starajmy się je przywieść do kształtu [1] n^ru^ 266, w którym pierwsza strona jest kwadratem zamykającym niezna- ną (*), a druga jest całkiem znaną.

W tym celu, mnóżmy obie strony przez $4a$ (co jest dozwolo- ném (122), ponieważ a nie jest zerem); potém nie zaniedbajmy przenieść $4ac$ w drugą stronę, tak postępując otrzymuje się zrówna- nie równoważne :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Rozpoznaje się wtedy bez trudności, że pierwszy członek składa się z dwóch pierwszych wyrazów kwadratu dwumianu $(2ax + b)$,

---

(*) Można rozwiązać wprost zrównanie [1] sposobem następującym : kładzie się je pod kształtem

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

i sprawdza się łatwo, zozwijając kwadrat wskazany, tosamość téj formuły ze zrównaniem [1]. Ztąd się bezpośrednio wyprowadza

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

daléj

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

albo

$$x\sqrt{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

albo nakoniec

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

i że brakuje tylko b^2 dla uzupełnienia tego kwadratu. Jeżeli więc dodamy b^2 po obu stronach, zrównanie staje się:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

albo

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Oczywiście to zrównanie ma kształt szukany: gdyż $(b^2 - 4ac)$ jest kwadratem z $(2ax + b)$. *Jeżeli więc* $(b^2 - 4ac)$ *jest dodatném*, wartość $(2ax + b)$ będzie pierwiastkiem kwadratowym z téj liczby; a ponieważ ten pierwiastek ma dwie wartości równe i ze znakami przeciwnemi, otrzyma się zarówno:

$$2ax + b = + \sqrt{b^2 - 4ac}, \qquad 2ax + b = - \sqrt{b^2 - 4ac};$$

zrównania pierwszego stopnia, zkąd się wyciągnie:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Zrównanie ma więc dwa rozwiązania. Wskazuje się, w ogólności, tę podwójną wartość, pisząc sposobem następującym:

[2] $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

i dorozumiewa się wtedy, że $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ przedstawia wartość dodatną radykala, i że $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ przedstawia jego wartość odjemną.

Jeśli, przeciwnie, ilość $(b^2 - 4ac)$ *jest odjemną*, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ nie przedstawia, podług naszych umów, żadnéj liczby dodatnéj lub odjemnéj; i *zrównanie dane nie przyjmuje żadnego rozwiązania*. Wszelako mówi się wtedy, że *to zrównanie ma dwa pierwiastki urojone*, przedstawione przez formułę [2].

Mogłoby się także zdarzyć żeby $(b^2 - 4ac)$ *było równém zeru;* w tym przypadku, dwie wartości $\sqrt{b^2 - 4ac}$ przywodzą się do zera, zrównanie staje się : $(2ax + b)^2 = 0$, a pierwiastki staną się, jeden i drugi : $x = -\frac{b}{2a}$. *Zrównanie przyjmuje więc tylko jedno rozwiązanie.* Mówi się przecież jeszcze, że *to zrównanie ma dwa pierwiastki, lecz że te są między sobą równe.*

269. Zrównanie drugiego stopnia ma zawsze dwa pierwiastki. Streszczając się, widzimy że zrównanie drugiego stopnia przyjmuje niekiedy dwa rozwiązania, niekiedy jedno tylko, i niekiedy nakoniec, to zrównanie nie przyjmuje żadnego. Mówi się przecież, że przyjmuje zawsze dwa pierwiastki, które mogą być rzeczywistemi i różnemi, rzeczywistemi i równemi, albo urojonemi. Mogłoby się zdawać rzeczą dziecinną, rozmyślne użycie na samym wstępie formy języka całkiem od swego pierwotnego znaczenia odwróconéj, a to w celu wykazania we wszystkich przypadkach, exystencyi dwóch pierwiastków, które dla tego więcéj jak przedtém nie istnieją. Te sposoby mówienia i wprowadzenie do rachunków liczb urojonych są wszelako następstwem ducha uogólnienia panującego w algebrze. Byłoby niemożebném, w rzeczy saméj, wykonanie rachunków na wyrażeniach *literalnych*, jeśliby forma rezultatów zmieniała się z wartością liczebną liter. Potrzebaby bowiem było, w każdéj chwili, dzielić i poddzielać kwestye, dla otrzymania formuł odpowiednich takiemu lub takiemu przypuszczeniu. Przyjęcie liczb odjemnych i urojonych ma na celu uniknienie téj niedogodności. W kwestyi szczególnéj, wprowadzenie tych liczb nie miałoby żadnego użytku; lecz, w badaniu ogólném pewnéj klassy kwestyj, dozwoli ono wyrazić i dowieść od razu, prawideł i rezultatów które wymagałyby, bez tego, dowodzeń i formuł odrębnych.

270. Uproszczenia formuły ogólnej. Formuła [2] dostarczy, we wszystkich przypadkach, pierwiastków zrównania [1]. Ta formuła pokazuje że, *aby je otrzymać, bierze się spółczynnik* x, *nie zaniedbując przedewszystkiém zmienić jego znaku; potém dodaje się do niego i odciąga się od niego osobno pierwiastek kwadratowy z liczby utworzonéj, odciągając od kwadratu tegoż spółczynnika poczwórny wieloczyn spółczynnika z* x^2 *przez wyraz niezależny; nakoniec dzieli się wypadek przez podwójny spółczynnik* x^2.

Lecz zdarza się niekiedy, że tak formuła ta jak i prawidło ją wyrażające cokolwiek się upraszczają.

1° Często spółczynnik x^2 jest równym jedności; wreszcie, można zawsze sprowadzić tę okoliczność, dzieląc obie strony przez a. Zrównanie bierze wtedy postać:

$$[3] \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Można rozwiązać wprost to zrównanie, przenosząc q w drugi człenek, potém dodając $\frac{p^2}{4}$ po obu stronach, i wyciągając pierwiastki z rezultatów, jak to się zrobiło w n^rze 268. Lecz prościéj jest wyciągnąć nową formułę z wzoru [2], robiąc w nim $a = 1$, $b = p$, $c = q$; wtenczas ta formuła staje się:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

albo wykonywając dzielenie radykala przez 2,

$$[4] \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Potrzeba umieć na pamięć formułę, pod tym ostatnim kształtem, i używać jéj ilekroć będzie $a = 1$. Ta formuła pokazuje że, *dla rozwiązania zrównania* [3], *potrzeba wziąć połowę spółczynnika* x *ze zmienionym znakiem, potém dodać i odciągnąć kolejno pierwiastek kwadratowy z liczby którą się otrzymuje odciągając od kwadratu z téj połowy wyraz całkiem znany.*

2° Może się zdarzyć że b, spółczynnik x będzie parzystym. Gdy się wystawi czynnik 2 na widoku, kładąc $b = 2k$, zrównanie [1] przyjmie formę:

$$[5] \qquad ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Możnaby było jeszcze rozwiązać wprost to zrównanie za pomocą sposobu (268). Przecież należałoby mnożyć jedynie obie strony przez a, i otrzymałoby się w pierwszéj kwadrat z $(ax + k)$. Lecz prościéj jest zrobić przypuszczenie $b = 2k$ we wzorze [2]; ten staje się :

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a};$$

albo, dzieląc oba wyrazy przez 2,

$$[6] \qquad x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Tak więc, *dla znalezienia pierwiastków w tym przypadku, potrzeba wziąć połowę spółczynnika z* x *ze zmienionym znakiem, dodać i odciągnąć kolejno pierwiastek kwadratowy z liczby którą się otrzymuje odciągając od kwadratu z téj połowy wieloczyn spółczynnika* x^2 *przez wyraz niezależny, i ostatecznie dzieląc wypadki otrzymane przez spółczynnik* x^2. Nie należy nigdy zaniedbywać wykonania tego uproszczenia, kiedy się tylko jego możliwość przedstawi.

271. Zastosowania. 1° Niech będzie zrównanie :

$$x^2 - 7x + 10 = 0;$$

otrzyma się :

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5, \\ x'' &= \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2. \end{aligned}\right.$$

2° Niech będzie zrównanie :

$$3x^2 + 14x - 440 = 0:$$

łatwo znaleźć :

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 3\ 440}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{1369}}{3} = \frac{-7 \pm 37}{3};$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-7+37}{3} = 10, \\ x'' = \dfrac{-7-37}{3} = -\dfrac{44}{3}. \end{cases}$$

3° Niech będzie zrównanie :

$$7x^2 - 13x + 3 = 0;$$

znajduje się :

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4.7.3}}{14} = \frac{13 \pm \sqrt{85}}{14}; \quad \begin{cases} x' = \dfrac{13 + \sqrt{85}}{14}, \\ x'' = \dfrac{13 - \sqrt{85}}{14}. \end{cases}$$

4° Niech będzie zrównanie :

$$x^2 - 6x + 9 = 0;$$

znajduje się :

$$x = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3; \quad \begin{cases} x' = 3, \\ x'' = 3, \end{cases} \quad \text{(pierwiastki równe).}$$

5° Niech będzie zrównanie :

$$2x^2 - 11x + 20 = 0;$$

znajduje się :

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4.2.20}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{-39}}{4}; \begin{cases} x' = \dfrac{11 + \sqrt{39}\sqrt{-1}}{4}; \\ x'' = \dfrac{11 - \sqrt{39}\sqrt{-1}}{4}, \end{cases}$$

(pierwiastki urojone).

6° Niech będzie zrównanie literalne :

$$(a^2-b^2)x^2-2(a^2+2b^2)x+a^2-4b^2=0.$$

Wartość na x otrzymana za pomocą formuły [6], daje :

$$x=\frac{a^2+2b^2\pm\sqrt{(a^2+2b^2)^2-(a^2-b^2)(a^2-4b^2)}}{a^2-b^2};$$

jeżeli rozwiniemy rachunki znajdziemy że ilość pod radykalem sprowadza się do $9a^2b^2$, któréj pierwiastkiem jest $3ab$. Więc,

$$x=\frac{a^2+2b^2\pm 3ab}{a^2-b^2};\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{a^2+2b^2+3ab}{a^2-b^2},\\ x'' &= \frac{a^2+2b^2-3ab}{a^2-b^2}.\end{aligned}\right.$$

Zauważywszy teraz że licznik x' może się napisać

$$a^2+2ab+ab+2b^2,\qquad \text{albo}\qquad a(a+2b)+b(a+2b),$$

albo $(a+b)(a+2b)$; przeto uprościwszy, otrzymamy naprzód

$$x'=\frac{a+2b}{a-b};$$

a potém, za pomocą tegoż samego sposobu,

$$x''=\frac{a-2b}{a+b}.$$

7° Weźmy jeszcze zrównanie ogólne

$$\frac{8}{a^2}-\frac{4x}{b}+\frac{3}{b^2}=\frac{14}{ab}-\frac{6x}{a}-x^2.$$

Znosi się naprzód mianowniki; potém przenosi się i sprowadza wyrazy podobne; i znajduje się :

$$a^2b^2x^2 + 2ab(3b - 2a)x + (3a^2 - 14ab + 8b^2) = 0.$$

Stosując do tego zrównania formułę [6], otrzyma się :

$$= \frac{ab(2a - 3b) \pm \sqrt{a^2b^2(4a^2 - 12ab + 9b^2) - a^2b^2(3a^2 - 14ab + 8b^2)}}{a^2b^2};$$

albo, upraszczając :

$$x = \frac{ab\{2a - 3b \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}\}}{a^2b^3} = \frac{2a - 3b \pm (a + b)}{ab}$$

Zkąd, rozłączając pierwiastki :

$$x' = \frac{3a - 2b}{ab}, \quad x'' = \frac{a - 4b}{ab}.$$

8° Weźmy nakoniec zrównanie ogólne :

$$\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Znosi się naprzód mianowniki, potém przenosi, i sprawdza wyrazy podobne; i znajduje się :

$$(a - b)^2x^2 - (a^2 + b^2)(a + b)x + ab(a + b)^2 = 0$$

Ztąd :

$$x = \frac{(a^2 + b^2)(a + b) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2(a + b)^2 - 4ab(a + b)^2(a - b)^2}}{2(a - b)^2},$$

albo,

$$x = \frac{(a + b)\{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a - b)^4 + 4a^2b^2}\}}{2(a - b)^2}.$$

272. Uwaga. Jeszcze słów kilka o pierwiastkach urojonych. *Kiedy* $b^2 - 4ac$ *jest odjemném*, zrównanie

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

nie przyjmuje rozwiązania dodatnego albo odjemnego, gdyż pierwszy członek, będąc kwadratem zupełnym, nie może być równym liczbie odjemnéj.

Wszelako, zgodzono się przyjąć że *zrównanie* [1] *ma dwa pierwiastki* przedstawione przez formułę

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

i że te pierwiastki są *urojonemi*.

Łatwo jest sprawdzić, że podstawiając te wyrażenia nieznanéj, zrobi się zrównanie [1] tosamém, byleby tylko traktowano te pierwiastki kwadratowe z liczb odjemnych podług prawideł zwyczajnych algebry, i byleby uważano ich kwadraty jako otrzymujące się przez zniesienie radykala. Ten byłby rezultat, gdybyśmy zamiast

$$\sqrt{b^2 - 4ac},$$

napisali

$$\sqrt{4ac - b^2}\,\sqrt{-1};$$

co robi się zwykle, ażeby ilością urojoną do uważania w rachunkach był tylko $\sqrt{-1}$. Wartości ua x biorą wtedy formę,

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$

i wykonywa się rachunki na takich wyrażeniach jak gdyby $\sqrt{-1}$ był liczbą zwyczajną, mający za potęgi kolejno po sobie następujące

$$\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ +1,\ \sqrt{-1}, \ldots$$

Wprowadzenie urojonych do języka algebraicznego pozwoli wysłowić to twierdzenie ogólne :

Zrównanie drugiego stopnia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ma zawsze dwa pierwiastki rzeczywiste albo urojone dane przez formułę

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

273. Zrównanie drugiego stopnia nie może mieć więcéi nad dwa pierwiastki. Można wprost dowieść, bez uprzedniego rozwiązywania, że zrównanie ogólne drugiego stopnia nie może mieć więcéj nad dwa pierwiastki, byleby tylko nie było w niém : $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że zrównanie [1] ma trzy pierwiastki odrębne α, β, γ ; otrzyma się tosamości :

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0, \\ a\gamma^2 + b\gamma + c = 0; \end{cases}$$

zkąd się wyciąga, przez odciąganie, tosamośći :

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0,$$

$$a(\alpha^2 - \gamma^2) + b(\alpha - \gamma) = 0;$$

albo, dzieląc jedną z tych tosamości przez $(\alpha - \beta)$, a drugą przez $(\alpha - \gamma)$, co wolno jest uczynić (122) :

$$a(\alpha + \beta) + b = 0,$$

$$a(\alpha + \gamma) + b = 0.$$

Odciąga się jeszcze ostatnią równość od poprzedzającéj ; co daje :

$$a(\beta - \gamma) = 0.$$

Ponieważ $(\beta - \gamma)$ nie jest zerem, więc ta równość dowodzi że $a = 0$. A zatém, jedna z dwóch równości poprzedzających daje, $b = 0$; a jedna z trzech pierwszych daje, jako następstwo $c = 0$.

Roztrząsanie formuł.

274. Przypadek w którym pierwiastki są rzeczywiste i nierówne. Widzieliśmy że, gdy $(b^2 - 4ac)$ jest dodatném, zrównanie [1] ma dwa pierwiastki rzeczywiste i różne:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Można przypuścić że a jest dodatném; gdyż jeśliby takiém nie było, zmieniłyby się znaki wszystkich wyrazów; tym sposobem a stałoby się większém jak zero. Mianownik dwóch pierwiastków jest więc dodatnym, i te pierwiastki mają znak ich licznika. Otóż c może być dodatném, zerem lub odjemném. *Jeżeli* c *jest dodatném*, $(b^2 - 4ac)$ jest mniejszém jak b^2, a zatém $\sqrt{b^2 - 4ac}$ jest mniejszém jak wartość bezwzględna na b: więc wyraz $-b$ daje swój znak licznikóm: więc, w tym przypadku, *dwa pierwiastki mają tenże sam znak, jaki jest przywiązanym do* $-$ b. *Jeśli* c *jest odjemném*, $(b^2 - 4ac)$ jest większém jak b^2; radykal jest więc większym jak wartość bezwzględna ilości która go poprzedza, i ten radykal daje swój znak licznikóm; *dwa pierwiastki są więc znaków przeciwnych*; i największym, w swéj wartości bezwzględnéj, jest x', jeśli b jest dodatném, i x'', jeśli b jest odjemném. *W przypadku szczególnym gdy* c $= 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ jest równém wartości bezwzględnéj z b: przeto, $x' = -\frac{b}{a}$, a $x'' = 0$, *jeżeli* b *jest dodatném*; $x = 0$, $x'' = \frac{-b}{a}$, *kiedy* b *jest odjemném*.

275. Przypadek w którym pierwiastki są rzeczywiste i równe, czyli $b^2 - 4ac = 0$; wtedy wiadomo że oba pierwiastki są równemi $-\frac{b}{2a}$: *te pierwiastki mają więc znak przeciwny znakowi przywiązanemu do* b.

Można zauważyć że w tym przypadku, zrównanie ogólne [1] może się napisać :

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0,$$

albo

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Jego pierwszy członek jest kwadratem zupełnym, pomnożonym przez a.

276. Przypadek w którym pierwiastki są urojone. *Wiemy że jeżeli* ($b^2 - 4ac$) *jest odjemném*, wtedy pierwiastki są urojone; można je napisać :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

a, położywszy, $\frac{-b}{2a} = \alpha$, i $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \beta$; stają się one :

$$x' = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad x'' = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Pierwsza strona zrównania może, w tym przypadku, położyć się pod kształtem szczególnym, bardzo pożytecznym do poznania. W rzeczy saméj, ma się oczywiście :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}.$$

Otóż trzy pierwsze wyrazy, w drugim nawiasie, składają kwadrat z $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$; a dwa ostatnie sprowadzają się do $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Więc zrównanie może się napisać :

$$a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\} = 0.$$

Lecz $\dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$ jest liczbą dodatną, którą można uważać jako kwadrat z jéj pierwiastku kwadratowego. Więc można napisać :

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right\}=0.$$

Tak więc *pierwsza strona jest wieloczynem przez* a *summy kwadratów z dwóch wyrażeń rzeczywistych.*

Ten kształt pokazuje jasno dla czego zrównanie, w tym przypadku, nie przyjmuje żadnego rozwiązania; gdyż nie ma liczby dodatnéj lub odjemnéj, któraby, podstawiona za x w pierwszym członku, mogła go zniszczyć.

277. Tablica roztrząsania. Roztrząsanie poprzedzające jest streszczoném w tablicy następującéj :

$b^2 - 4ac > 0.$ — 2 pierwiastki rzeczywiste i nierówne.

- $c > 0$ { $b < 0$, dwa pierwiastki dodatne, / $b > 0$, dwa pierwiastki odjemne,
- $c = 0$ { jeden pierwiastek zero, drugi $= -\dfrac{b}{a}$.
- $c < 0$ { dwa pierwiastki ze znakami przeciwnemi.

$b^2 - 4ac = 0.$ — 2 pierwiastki rzeczywiste i równe.

- $x' = x'' = -\dfrac{b}{2b}$: pierwszy członek jest kwadratem zupełnym.

$b^2 - 4ac < 0.$ — 2 pierwiastki urojone.

- $x' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, $x'' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$: pierwszy członek jest summą z dwóch kwadratów.

278. Uwagi. 1° Kiedy a i c są znaków różnych, pierwiastki są zawsze rzeczywistemi : gdyż $(b^2 - 4ac)$ jest natenczas summą dodatną,

2° Aby pierwiastki były równe i ze znakami przeciwnemi, dosyć jest i potrzeba żeby było : $b=0$. W rzeczy saméj, jeżeli α i $-\alpha$ są dwoma pierwiastkami danemi, powinno być jednocześnie :

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,$$

$$a\alpha^2-b\alpha+c=0\,;$$

zkąd wyciąga się przez odciąganie :

$$2b\alpha=0,$$

albo, poniew α nie jest zerem,

$$b=0.$$

Warunek dany jest oczywiście dostatecznym.

3° Można roztrząsnąć tymże samym sposobem zrównanie

$$x^2+px+q=0.$$

Własności pierwiastków.

279. Twierdzenie I. *Summa pierwiastków zrównania drugiego stopnia jest równą ilorazowi, ze zmienionym znakiem, spółczynnika* x *podzielonego przez spółczynnik* x^2.

W rzeczy saméj, dodawszy do siebie formuły [2] numeru 269, otrzymamy :

[1] $$x'+x''=-\frac{b}{a}.$$

280. Twierdzenie II. *Wieloczyn pierwiastków jest równy ilorazowi wyrazu całkiem znanego, podzielonemu przez spółczynnik* x^2.

W rzeczy saméj, pomnożywszy też same formuły jednę przez drugą, otrzymamy :

$$x'x''=\frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2},$$

albo,

$$[2] \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

281. Uwagi. Te dwa twierdzenia mogą się dowieść *a priori*. Gdyż, przypuściwszy że x' i x'' są pierwiastkami zrównania,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mamy oczywiście dwie tosamości :

$$\begin{cases} ax'^2 + bx' + c = 0, \\ ax''^2 + bx'' + c = 0 ; \end{cases}$$

otóż, wyciąga się z tąd, przez odciąganie :

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0 ;$$

a, dzieląc przez $(x' - x'')$,

$$a(x' + x'') + b = 0,$$

więc :

$$[1] \qquad x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

Jeżeli zastąpimy b przez $-a(x' + x'')$ w pierwszéj z poprzedzających tożsamości, otrzymamy :

$$ax' - a(x' + x'')x' + c = 0,$$

kąd :

$$[2] \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Te dwa podania są bardzo ważne, a ich zastosowania liczne. Wskażemy z nich niektóre.

282. Rozłożenie pierwszego członka zrównania drugiego stopnia na czynniki stopnia pierwszego. Kiedy x' i x'' oznaczają pierwiastki zrównania,

$$[1] \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

mamy (281) :

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{a}{b}, \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Dzieląc dwie strony zrównania [1] przez a, i zastępując $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ przez wartości powyższe, jego piérwszy członek staje się ;

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''$$

wykonywając mnożenie i rozkładając na czynniki, kolejno otrzymamy :

$$x^2 - x'x - x''x + x'x'',$$
$$x(x - x') - x''(x - x'') ;$$

albo, nakoniec,

$$(x - x')(x - x'').$$

Tak więc, *piérwszy członek zrównania drugiego stopnia, położonego pod kształtem,*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

jest wieloczynem z dwóch dwumianów stopnia pierwszego, równych przewyżce x *nad każdym z pierwiastków.*

Jeżeli zrównanie dane jest kształtu :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

to tylko po podzieleniu jego piérwszéj strony przez a, można do niego zastosować rezultat poprzedzający; a, zatém, przed tém podzieleniem, *piérwszy członek jest równym*

$$a(x-x')(x-x'').$$

283. Rozłożenie trójmianu drugiego stopnia na czynniki stopnia piérwszego. Ważne poprzedzające twierdzenie stosuje się bezpośrednio do rozłożenia trójmianu drugiego stopnia: lecz to rozłożenie może się wyprowadzić prościéj innym sposobem.

Uważmy, w rzeczy saméj, trójmian:

$$ax^2+bx+c;$$

mamy jednako:

$$[1] \quad ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\};$$

otóż, można zastąpić $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ przez wyrażenie jednako równe,

$$-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2;$$

przez to podstawienie, wyrażenie [1] staje się wieloczynem a przez różnicę dwóch kwadratów, to jest:

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2\right\}.$$

Otóż, wiemy że różnica dwóch kwadratów równa się wieloczynowi z summy pierwiastków przez ich różnicę; a, zatém, wyrażenie poprzedzające, równoważne trójmianowi ax^2+bx+c, może się napisać:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right),$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);$$

i rozpoznaje się tu wyrażenie znalezione powyżéj,

$$a(x-x')(x-x'').$$

Ta formuła, jakimkolwiek bądź sposobem do niéj przyjdziemy, stosuje się oczywiście do przypadku w którym x' i x'' są urojonemi (257); lecz, w tym przypadku, dwa czynniki $(x-x')$, $(x-x'')$, nie mają żadnéj wartości arytmetycznéj, i nie będziemy mieli sposobności użycia ich.

Zowią się zwykle *pierwiastkami trójmianu* ax^2+bx+c, liczby które, podstawione za x, sprowadzają go do zera, to jest pierwiastki zrównania

$$ax^2+bx+c=0.$$

A więc, *dla rozłożenia trójmianu na czynniki piérwszego stopnia, oznacza się jego pierwiastki, odciąga się każdy z nich od* x, *i mnoży się przez* a *wieloczyn z różnic.*

284. Twierdzenie poprzedzające pozwoli jeszcze znaleźć związki udowodnione powyżéj (279, 280 i 281) pomiędzy spółczynnikami a pierwiastkami zrównania

$$ax^2+bx+c=0.$$

W rzeczy saméj, w dwóch trójmianach *tosamych* (283)

$$ax^2+bx+c, \quad a(x-x')(x-x'')$$

albo

$$ax^2-a(x'+x'')x+ax'x'';$$

spółczynniki różnych potęg x powinny być też same; jest więc

$$b = -a(x' + x'') \quad \text{i} \quad c = ax'x'',$$

zkąd

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Są to właśnie związki *szukane*.

Odwrotnie, ze związków

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \qquad x'x'' = \frac{c}{a},$$

wyciąga się

$$b = -a(x' + x''), \qquad c = ax'x''$$

i, następnie

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' \\ &= a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] \\ &= a[x(x - x') - x''(x - x')] \\ &= a(x - x')(x - x''). \end{aligned}$$

Trudno jest znaleźć dowodzenia prostszego i naturalniejszego.

285. Zagadnienie. Własności numeru 283 dostarczą bezpośrednio zrównanie stopnia drugiego, które dozwoli rozwiązać zagadnienie następujące : *Znaleźć dwie liczby których summa i wieloczyn są dane.*

Niech będą, w rzeczy saméj, S summa dwóch liczb, a P ich wieloczyn; te dwie liczby są pierwiastkami zrównania

$$x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0;$$

gdyż summą tych pierwiastków jest S, a ich wieloczynem jest P.

Łatwo jest, wreszcie, dać zrównaniu kształt, który pokazuje, *a priori*, przyczynę tego wypadku; można, w rzeczy saméj, napisać je tym sposobem :

$$P = Sx - x^2,$$

albo
$$P = x(S - x);$$

zkąd widzimy że, dla rozwiązania tego zrównania, dosyć jest znaleźć dwie liczby x i $S - x$, których wieloczynem jest liczba dana P; a których summa $x + S - x$, równa się oczywiście S.

286. Oznaczenie, a priori, znaków przywiązanych do pierwiastków rzeczywistych drugiego stopnia. Związki, które dają summę i wieloczyn dwóch pierwiastków (281), pozwalają oznaczyć ich znaki, nie rozwiązując zrównania.

Widzimy, w rzeczy saméj, podług znaku ich wieloczynu $\frac{c}{a}$, czy pierwiastki są tego samego albo znaków przeciwnych. W pierwszym przypadku, znak summy $-\frac{b}{a}$ nauczy, czy te pierwiastki są oba dodatne, albo oba odjemne. W drugim przypadku, jeden jest dodatnym a drugi odjemnym; i znak $-\frac{b}{a}$ daje poznać znak tego pierwiastku którego wartość bezwzględna jest największą.

Przykład. Pierwiastki zrównania,

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

są znaków przeciwnych, gdyż ich wieloczyn jest -4; i największym z nich jest pierwiastek dodatny; gdyż ich summa jest dodatną i równą 3.

Uwaga. *Przed zastosowaniem prawideł poprzedzających, potrzeba zapewnić się ze pierwiastki są rzeczywistemi.* Przy rozważaniu, na przykład, zrównania,

$$x^2 - 3x + 10 = 0,$$

możnaby (281) brać oba pierwiastki jako dodatne; gdyż ich wieloczyn 10 jest dodatnym, jakoteż ich summa 3; gdyby wyrażenie

$(b^2 - 4ac)$ jako równe -31, pierwiastków tych niewątpliwie urojonemi nie czyniło.

287. Zagadnienie. Twierdzenie rozwinięte w numerze 283, z którego robi się, z resztą, użytek ciągły w analizie, pozwoli rozwiązać bezpośrednio pytanie następujące : *Zformować zrównanie drugiego stopnia którego pierwiastki są liczbami danemi* α i β.

Zrównanie żądane jest oczywiście :

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0,$$

albo,

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0;$$

a wreszcie postrzega się, *a priori*, że pierwszy członek $(x-\alpha)(x-\beta)$ niszczy się dla $x = \alpha$ i dla $x = \beta$. Widzimy także że spółczynnik x jest równy summie pierwiastków, wziętéj ze znakiem przeciwnym, i że wyraz całkiem znany równa się wieloczynowi z tychże pierwiastków.

Przykłady. *Jakie jest zrównanie drugiego stopnia, kótrego pierwiastkami są* $2 + \sqrt{3}$ i $2 - \sqrt{3}$?

Summa pierwiastków jest $2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$,
a wieloczyn $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$;
zrównanie żądane jest, przeto,

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Podobnież, zrównanie drugiego stopnia, którego pierwiastkami są $(a + b)$ i $(a - b)$, jest :

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

288. Zagadnienie. Własności pierwiastków pozwalają jeszcze rozwiązać kwestye takie jak następująca : *Znaleźć, nie rozwiązując zrównania drugiego stopnia, summę kwadratów i summę sześcianów iego pierwiastków.*

Mamy, w rzeczy saméj, związki :

$$[1] \qquad x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Jeśli podniesiemy dwa członki pierwszéj równości do kwadratu, i odciągniemy stronami drugą podwojoną od pierwszéj, znajdziemy :

$$[2] \qquad x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Jeżeli podniesiemy do sześcianu dwa członki pierwszéj równości, otrzymamy :

$$[3] \qquad x'^3 + 3x'^2x'' + 3x'x''^2 + x''^3 = -\frac{b^3}{a^3};$$

lecz, ponieważ mamy :

$$[4] \qquad 3x'^2x'' + 3x'x''^2 = 3x'x''(x' + x'') = -\frac{3bc}{a^2},$$

a więc, odciągając stronami [4] od [3], otrzymamy :

$$[5] \qquad x'^3 + x''^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

289. Inne zastosowanie. Można także rozwiązać zagadnienie następujące : *Znaleźć związek który powinien istnieć pomiędzy spółczynnikami zrównania, aby pierwiastki sprawdzały związek dany,*

$$mx' + nx'' = l.$$

Mamy, w tym przypadku, oprócz relacyi danéj, któréj kształt może się zmieniać, dwa związki stałe,

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a};$$

rozwiąże się więc pytanie, rugując x' i x'' pomiędzy trzema zrównaniami. Otóż dwa pierwsze, które są stopnia pierwszego, dają (211)

$$x' = \frac{al + bn}{a(m - b)}, \quad x'' = -\frac{bm + al}{a(m - n)};$$

a, podstawiając te wartości w trzeciém, otrzymuje się związek szukany :

$$(al + bm)(al + bn) + ac(m - n)^2 = 0.$$

290. Inne zastosowanie. *Znaleźć zrównanie drugiego stopnia, któregoby każdy pierwiastek był w związku danym z każdym z pierwiastków zrównania danego drugiego stopnia,*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Na przykład, żąda się otrzymać zrównanie przekształcone któregoby pierwiastki były równemi pierwiastkom równania danego, pomnożonym przez m. Oznaczywszy nowe pierwiastki przez y' i y'', mamy dwa warunki :

$$y' = mx', \quad y'' = mx'';$$

z kąd wyciąga się :

$$y' + y'' = m(x' + x'') = -\frac{mb}{a},$$

i

$$y'y'' = m^2x'x'' = m^2\frac{c}{a}.$$

Znając summę i wieloczyn pierwiastków, tworzy się (285) bezpośrednio zrównanie żądane,

$$ay^2 + mby + m^2c = 0.$$

ROZBIOR PRZYPADKU SZCZEGÓLNEGO ZASŁUGUJĄCEGO NA UWAGĘ.

291. Przypadek w którym $a = 0$. Kiedy w zrównaniu $ax^2 + bx + c = 0$, przypuszcza się że a przybiera wartość zera, formuły,

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

stają się:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}.$$

to jest, jeżeli b jest dodatném,

$$x' = \frac{-2b}{0}, \qquad x'' = \frac{0}{0};$$

lub, ieżeli b jest odjemném,

$$x' = \frac{0}{0}, \qquad x'' = \frac{-2b}{0}.$$

Tak więc jeden z pierwiastków przedstawia się pod kształtem nieoznaczonym, a drugi pod kształtem nieskończonym. Z drugiéj strony, zrównanie dane staje się:

$$bx + c = 0;$$

to zrównanie jest stopnia pierwszego, i przyjmuje tylko jedno rozwiązanie:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Formuły ogólne zdają się więc, w tym przypadku, być błędnemi.

Zauważmy naprzód że, gdyby rzeczywiście i tak było, nie należałoby jeszcze nic wnioskować przeciw rozumowaniom które nas do tego przywiodły; gdyż te rozumowania przypuszczają wyraźnie (268) że a nie jest zerem.

Wszelako wartości na x' i x'' zadosyć czynią zrównaniu danemu, jakiémkolwiek jest a; więc kiedy to a dąży do zera, jedna z nich musi się zbliżać do rozwiązania zrównania

$$bx + c = 0$$

I ta wartość oczywiście, jak to zaraz sprawdzimy, przedstawia się pod kształtem $\frac{0}{0}$. Uważmy, w rzeczy saméj, przypadek w którym b jest dodatném. Mamy :

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mnożąc oba wyrazy tego ułamku przez wyrażenie $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, które nie staje się zerem dla $a = 0$, otrzymamy :

$$x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})};$$

wykonawszy mnożenie wskazane w liczniku, gdzie znajduje się wieloczyn z summy dwóch liczb $(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})$ przez ich różnicę $(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$, będzie :

$$x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$= \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}};$$

i, pod tym kształtem, jest rzeczą oczywistą że, gdy a dąży do zera, x'' zbliża się do wartości $-\frac{2c}{2b}$ albo do $-\frac{c}{b}$.

Co się tyczy wartości x', ta wzrasta widocznie bez granicy kiedy a zmniejsza się, ponieważ licznik dąży do $-2b$, w czasie gdy mianownik dąży do zera.

292. Uwaga I. Kiedy w zrównaniu

[1] $$ax^2 + bx + c = 0,$$

a jest bardzo małem względem współczynników b i c, jeden z pierwiastków tego zrównania różni się mało od $-\frac{c}{b}$, a drugi jest niezmiernie wielkim. To podanie wynika widocznie z téj uwagi że, kiedy a dąży do zera, jeden z pierwiastków dąży do $-\frac{c}{b}$, a drugi wzrasta nieskończenie (291).

Na końcu I tomu naszego dzieła wskażemy łatwe sposoby do ich wyrachowania. (Zobacz, w tomie I, rozdział ostatni : *Rachunki liczebne.*)

293. Uwaga II. Przypadek w którym c jest bardzo małém przedstawia też same trudności jak przypadek w którym a jest bardzo małém; przywodzi się on do tegoż przypadku, położywszy w zrównaniu [1],

$$x=\frac{1}{z};$$

zkąd

$$\frac{a}{z^2}+\frac{b}{z}+c=0,$$

albo, znosząc mianowniki,

$$cz^2+bz+a=0;$$

raz wyrachowawszy z, x się wyprowadzi za pomocą formuły poprzedzającéj.

Własności trójmianu drugiego stopnia.

294. Definicya trójmianu drugiego stopnia. Trójmian drugiego stopnia jest wielomianem o trzech wyrazach, kształtu ogólnego

$$ax^2+bx+c;$$

a, b, c przedstawiają w tym trójmianie liczby stałe, dodatne lub odjemne, dane *a priori*; x przedstawia liczbę zmienną, zdolną przyjąć wszelkie wartości możebne. Kiedy daje się zmieniać wartość przypisywana na x, wartość trójmianu zmienia się i przechodzi przez różne stany wielkości które pożytecznie jest badać.

Powiedzieliśmy już (283), że się nazywa zwykle pierwiastkami trójmianu, pierwiastki zrównania które się otrzymuje robiąc trójmian równym zeru. Te liczby mogą być rzeczywistemi lub urojonemi; wiadomo że oznaczywszy je przez x' i x'', trójmian będzie przedstawionym przez wieloczyn : $a(x-x')(x=x'')$.

295. TWIERDZENIE I. *Kiedy pierwiastki* x', x'' *trójmianu są rzeczywistemi i nierównemi, to podstawienie za* x *liczby zawartéj pomiędzy niemi, nada wartości trójmianu znak przeciwny znakowi jego pierwszego wyrazu; podstawienie zaś za* x *liczby nie zawartéj pomiędzy pierwiastkami, nada wartości trójmianu znak jego pierwszego wyrazu.*

W rzeczy saméj, jeżeli przypuścimy $x' < x''$, wszelka wartość dana dla x i zawarta między x' i x'', uczyni $(x-x')$ dodatném a $(x-x'')$ odjemném : ta wartość zrobi więc odjemnym wieloczyn $(x-x')(x-x'')$; daje ona, zatém, wieloczynowi $a(x-x')(x-x'')$ znak przeciwny znakowi a, lub co na jedno wychodzi, znakowi ax^2. Jeżeli, przeciwnie, wartość przypisana dla x jest mniejszą jak x' albo większą jak x'', czynniki $(x-x')$, $(x-x'')$ są oba odjemne lub oba dodatne; ich wieloczyn jest dodatnym, i trójmian $a(x-x')(x-x'')$ ma tenże sam znak jak a.

296. TWIERDZENIE II. *Kiedy pierwiastki trójmianu są rzeczywistemi i równemi, trójmian jest zawsze tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, jakąkolwiek byłaby wartość przypisana dla* x, *wyjąwszy wartość która go uczyni zerem.*

W rzeczy saméj, wiemy (275) że, w tym przypadku, trójmian przyjmuje kształt :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Otóż kwadrat jest zawsze dodatnym, jakąkolwiek byłaby wartość x; więc trójmian ma zawsze znak a. Wszakże należy zrobić wyjątek dla wartości $x=-\frac{b}{2a}$, która niszczy trójmian dany.

297. TWIERDZENIE III. *Kiedy pierwiastki trójmianu są urojonemi, wartość trójmianu ma zawsze, jakiemkolwiek byłoby* x, *znak jego pierwszego wyrazu.*

Gdyż widzieliśmy (276), że w tym przypadku, trójmian jest wieloczynem z a przez summę kwadratów dwóch liczb rzeczywistych, z których jeden nie jest nigdy zerem. Ta summa będąc zawsze dodatną, wieloczyn jest koniecznie tegoż samego znaku jak a.

298. Uwaga. Trzy twierdzenia poprzedzające mogą się zamknąć w jedném wysłowieniu : *Trójmian* ax^2+bx+c *jest tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, wyjąwszy kiedy wartość, przypisywana dla* x, *jest zawartą między pierwiastkami.*

Domyśla się wtedy że, w przypadku pierwiastków urojonych, x nie może być nigdy zawartem między niémi, trójmian więc ma zawsze znak swego pierwszego wyrazu.

299. Możnaby jeszcze to twierdzenie ogólne tym sposobem udowodnić :

Twidrdzenie ogólne. *Trójmian*

$$ax^2+bx+c$$

jest tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, wyjąwszy kiedy zrównanie

$$ax^2+bx+c=0$$

ma swe pierwiastki rzeczywiste i gdy zarazem x *jest zawartém między témi dwoma pierwiastkami.*

Rozróżnia się trzy przypadki, podług tego jak zrównanie

$$ax^2+bx+c=0$$

ma pierwiastki urojone, rzeczywiste i równe, albo rzeczywiste i nierówne.

1° Kiedy pierwiastki są urojonemi, oznaczając je przez

$$\alpha-\beta\sqrt{-1} \quad \text{i} \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

mamy

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a[x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})][x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})] \\ &= a[(x-\alpha)+\beta\sqrt{-1}][(x-\alpha)-\beta\sqrt{-1}] \\ &= a[(x-\alpha)^2+\beta^2]. \end{aligned}$$

Trójmian jest wtedy wieloczynem z a *przez summę dwóch kwadratów*, jest więc, jakiémkolwiek bądź byłoby x, tegoż samego znaku jak a.

2° Kiedy $b^2 - 4ac$ jest zerem, to jest kiedy dwa pierwiastki x' i x'' zrównania.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

równémi, mamy

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2;$$

i widzimy że wszelka liczba, prócz x', podstawiona za x zrobi trójmian tegoż samego znaku jak a.

3° Nakoniec, kiedy pierwiastki x' i x'' są rzeczywistémi i nierównémi, mamy

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'');$$

wszelka liczba zawarta pomiędzy x' i x'' zrobi czynniki

$$x - x', \qquad x - x''$$

znaków przeciwnych; wieloczyn z tych dwumianów jest więc odjemnym, i wyrażenie

$$a(x - x')(x - x'')$$

jest znaku przeciwnego z a.

Wszelka liczba wyższa od największego z dwóch pierwiastków x', x'', albo niższa od najmniejszego, zrobi czynniki

$$x - x', \quad x - x''$$

tegoż samego znaku; wieloczyn z tych dwumianów jest więc dodatnym, i trójmian

$$a(x - x')(x - x'')$$

zachowa znak a.

300. Inne dowodzenie. Nakoniec, przedstawimy jeszcze następujące dowodzenie tego twierdzenia:

Założmy sobie zbadanie sposobu podług którego zmienia się trójmian

$$[1] \qquad y = ax^2 + bx + c,$$

jeżeli jednocześnie przypuścimy wzrastanie ciągłe ilości zmiennéj x od $-\infty$ aż do $+\infty$.

Położywszy naprzód

$$\frac{b}{a} = p, \qquad \frac{c}{a} = q,$$

formuła (1) daje kolejno

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

$$(2) \qquad y = a(x^2 + px + q).$$

Rozróżnimy trzy przypadki:

1° $\frac{p^2}{4} - q > 0$. *Zrównanie* y $= 0$ *ma swe pierwiastki rzeczywiste i nierówne*. W tym przypadku, formuła (2) daje

$$[3] \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

$\frac{p^2}{4} - q$ jest dodatnym, można je więc położyć równym ilości rzeczywiście dodatnéj λ^2, i formuła poprzedzająca daje

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Ta równość pokazuje że trójmian y jest różnicą dwóch kwadratów; temi kwadratami są $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm a}\right]^2$ i $(\lambda\sqrt{\pm a})^2$; znak $+$

położony pod radykalem odpowiada przypadkowi w którym a jest dodatném, znak zaś — przypadkowi w którym ilość a jest odjemną.

Trójmian y może jeszcze położyć się pod innym kształtem. Zrównanie (3) można napisać

$$y = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2\right],$$

albo

$$y = a\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right),$$

czyli, oznaczając przez x' i x'' pierwiastki zrównania $y=0$,

$$(5) \qquad y = a(x-x')(x-x'').$$

Po tém przekształceniu, przypuśćmy $a > 0$, i powróćmy do formuły (4),

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Jeżeli poczniemy zmieniać x od $-\infty$ aż do $-\frac{p}{2}$, y musi ubywać, gdyż jeden wyraz zmienny $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ ubywa i niszczy się dla $x = -\frac{p}{2}$. Jeżeli x nieprzestanie wzrastać, wyraz $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ musi wzrastać i przejdzie, dla wartości x równooddalonych od $-\frac{p}{2}$, przez też same wartości jak uprzednio; tak że najmniejsza wartość jaką może przyjąć y odpowiada dla ilości $x = -\frac{p}{2}$, to jest dla połowy summy pierwiastków zrównania $y=0$. Tą wartością jest $-a\lambda^2$; zresztą, dla $x = \pm\infty$, y równa się *ilości nieskończenie wielkiéj*.

Dla $a=0$, y jest zawsze zerem.

Nakoniec łatwo jest dostrzedz, nie potrzebując naprożno powtarzać wskazanego powyżéj roztrząsania, że, dla $a<0$, y wzrasta od $-\infty$ aż do $-a\lambda^2$, kiedy x zmienia się od $-\infty$ do $-\frac{p}{2}$, potém ubywa od $-a\lambda^2$ aż do $-\infty$ kiedy x zmienia się od $-\frac{p}{2}$ do $+\infty$.

2° *Przypuśćmy* $\frac{p^2}{4}-q=0$. *Zrównanie* $y=0$ *ma swe pierwiastki równe*. W tym przypadku, można napisać jak wyżéj

$$y=a(x^2+px+q)=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\right].$$

Lecz ponieważ $\frac{p^2}{4}-q=0$,

$$y=a\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Trójmian y jest więc kwadratem zupełnym jeżeli a jest dodatném i kwadratem zupełnym wziętym ze znakiem przeciwnym jeżeli a jest odjemném.

Jeżeli x zmienia się od $-\infty$ do $-\frac{p}{2}$, to jest do połowy summy pierwiastków, to y ubywa jeżeli a jest dodatném, wzrasta zaś w przypadku przeciwnym; jeżeli x zmienia się od $-\frac{p}{2}$ do $+\infty$, to y wzrasta jeżeli a jest dodatném, ubywa zaś w przypadku przeciwnym.

3° *Przypuśćmy* $\frac{p^2}{4}-q<0$. *Zrównanie* $y=0$ *ma swe pierwiastki urojone* Mamy zawsze

$$y=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right].$$

Lecz ponieważ $\frac{p^2}{4}-q<0$, można położyć

$$-\frac{p^2}{4}+q=-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=-(-\lambda^2)=\lambda^2;$$

będzie wtedy

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right],$$

i w tym przypadku widzimy że y, nie zważając na znak, jest summą dwóch kwadratów z których jeden nie zamyka ilości x; to też y nie może się zniszczyć dla żadnéj wartości przypisywanéj téj literze : to tłumaczy dla czego, w tym przypadku, zrównanie $y = 0$ nie przyjmuje żadnego rozwiązania.

Zmiany y rozpoznają się w tym przypadku jak w piérwszym.

Z tego roztrząsania wynika wiele wypadków ważnych :

1° Jeżeli zrównanie $y = 0$ ma swe pierwiastki rzeczywiste, trójmian y, dla swych pierwiastków x' i x'', przechodzi dwa razy przez zero; jest on tegoż samego znaku jak jego piérwszy wyraz ax^2 kiedy x nie jest zawartém pomiędzy pierwiastkami, co łatwo postrzega się na formule

$$y = a(x - x')\,(x - x'').$$

Tenże trójmian jest znaku przeciwnego ze swym pierwszym wyrazem kiedy x przybiera różne wartości pomiędzy pierwiastkami x', x''; wtedy jest on różnicą dwóch kwadratów.

2° Jeżeli zrównanie $y = 0$ ma swe pierwiastki równe, trójmian y jest zawsze tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz ax^2, wyjąwszy kiedy x staje się równém jednemu z pierwiastków : jest on kwadratem zupełnym.

3° Jeżeli zrównanie $y = 0$ ma swe pierwiastki urojone, trójmian y przechowa zawsze znak swego pierwszego wyrazu; jest on, nie zważając na znak, równy summie dwóch kwadratów.

To dowodzenie pilnéj uwadze uczącéj się młodzieży polecamy.

301. Zastosowanie do nierówności drugiego stopnia. Mówi się że nierówność jest drugiego stopnia, kiedy można ją wyrazić pod jednym z dwóch kształtów,

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} > 0, \qquad \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} < 0;$$

A, B, C oznaczają liczby dane, dodatne lub odjemne; x jest liczbą nieznaną, któréj granice potrzeba wyznaczyć w taki sposób aby zadosyć uczynić nierówności tę nieznaną w sobie zawierającéj.

Twierdzenia poprzedzające mogą nam posłużyć do rozwiązania téj ważnéj kwestyi.

Przykład I. Niech będzie do rozwiązania nierówność :

$$3x^2 + 5x + \frac{4}{3} < 0.$$

Równając pierwszy członek zeru, znajdujemy na pierwiastki : $-\frac{1}{3}$ i $-\frac{4}{3}$. Pierwiastki te są rzeczywistemi i nierównemi; aby więc nierówność była sprawdzoną, to jest aby pierwszy członek był znaku przeciwnego ze swym pierwszym wyrazem, potrzeba żeby wartość na x była zawartą pomiędzy $-\frac{1}{3}$ i $-\frac{4}{3}$, albo żeby było :

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{3}.$$

Przykład II. Niech będzie jeszcze nierówność :

$$-9 + 6x - x^2 < 0.$$

W tym przypadku, pierwiastki trójmianu są rzeczywistémi i równémi 3; jego pierwszy wyraz $-x^2$ jest odjemnym; więc nierówność będzie sprawdzoną przez wszelką wartość przypisywaną dla x, wyjąwszy wartość $x = 3$, która przekształca nierówność na równość.

Przykład III. Niech będzie nakoniec nierówność :

$$x^2 - 3x + 7 > 0.$$

W tym przypadku, pierwiastki trójmianu są urojonémi ; a, ponieważ jego pierwszy wyraz jest dodatnym, więc jakakolwiek bądź wartość na x zadosyć czyni nierówności.

302. Uwaga. Zobaczymy w dalszym ciągu, że teorya nierówności

służy często, w roztrząsaniu zagadnień, do oznaczenia warunków ich możebności.

ĆWICZENIA.

I. Rozwiązać zrównanie:

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}} = a - (1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Znajdujemy: $$x = \pm \frac{a}{2}\left(\frac{a^2-4}{a^2-1}\right)^2.$$

II. Rozwiązać zrównanie: $$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1.$$

Znajdujemy: $$x = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

III. Rozwiązać zrównanie:

$$\sqrt{(1+x)^2-ax} + \sqrt{(1-x)^2+ax} = x.$$

Znajdujemy: $$x = \pm 2\sqrt{(1-\mathrm{a})\left(1-\frac{a}{3}\right)},$$

i $$x = 0,$$

które nie odpowiada zrównaniu, chyba po zmienieniu znaku jednego z radykalów.

IV. Rozwiązać zrównanie: $$\frac{21x^3-16}{3x^2-4} - 7x = 5.$$

Znajdujemy: $$x' = 2, \qquad x'' = -\frac{2}{15}.$$

V. Rozwiązać zrównanie:

$$mqx^2 - mnx + pqx - np = 0.$$

Znajduje się : $x' = \frac{n}{q}, \qquad x'' = -\frac{p}{m}.$

VI. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0.$$

Znajduje się : $x = \frac{a}{2}\left(-3 \pm \sqrt{3}\right).$

VII. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3} = \frac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}.$$

Bierze się $\sqrt{x^2+x+6}$ za nieznaną posiłkową, i znajduje się :

$$x' = 5, \qquad x'' = -6;$$

i, oprócz tego, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2},$

które to pierwiastki nie odpowiadają równaniu, chyba że się weźmie radykal ze znakiem — .

VIII. Rozwiązać zrównanie :

$$x + 4 + \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} + \frac{12}{x-4}.$$

Znajduje się : $x = \pm 5,$

i, oprócz tego, $x = \pm 4\sqrt{2},$

które to pierwiastki odpowiadają, jeżeli się weźmie radykal ze znakiem — .

IX. Rozwiązać zrównanie :

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3 = 0.$$

Bierze się $2x^2 + 3x$ za nieznaną posiłkową, i znajduje się :

$$x' = 3, \qquad x'' = -\frac{9}{2},$$

oraz dwa pierwiastki urojone.

X. Rozwiązać zrównanie :

$$x^2 + \sqrt{5x + x^2} = 42 - 5x.$$

Bierze się $\sqrt{x^2 + 5x}$ za nieznaną posiłkową, i znajduje się

$$x' = 4, \quad x'' = 9;$$

i, oprócz tego, $$x = \frac{-5 \pm \sqrt{221}}{2},$$

pierwiastki odpowiadające przypadkowi w którym radykal ma znak — .

XI. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

Znajduje się :

$$x = \pm \frac{1}{2}.$$

XII. Rozwiązać zrównanie :

$$\sqrt[m]{(1 + x)^2} - \sqrt[m]{(1 - x)^2} = \sqrt[m]{(1 - x^2)}.$$

Położywszy : $$z = \sqrt[m]{\frac{1 + x}{1 - x}},$$

znajduje się : $$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{z^m - 1}{z^m + 1}.$$

XIII. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{x^2}{8a} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3a} + \frac{x^2}{4} - \frac{a}{2}}.$$

Przekształca się to zrównanie na następujące:

$$\left\{\frac{x}{2\sqrt{2a}} - \sqrt{2a\left(\frac{x}{3a}+\frac{1}{4}\right)}\right\}^2 = 0\,;$$

i znajduje się: $x' = 6a,\quad x'' = -\frac{2a}{3}$.

XIV. Rozwiązać zrównanie:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab}.$$

Znajduje się: $x = a\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

XV. Rozwiązać zrównanie:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0.$$

Znajduje się: $x = \frac{-(a+b+c) \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$.

XVI. Rozwiązać zrównanie:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} + \sqrt{d+x} = 0.$$

Położywszy: $a+b+c+d = \Sigma a,\quad a^2+b^2+c^2+d^2 = \Sigma a^2,$

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = \Sigma a^3,\quad a^4+b^4+c^4+d^4 = \Sigma a^4,$$
$$abc + abd + acd + bcd = \Sigma abc,$$

znajduje się:

$$x = \frac{2\Sigma a^4 - 8\Sigma a.\, \Sigma a^3 + 9(\Sigma a^2)^2 - 6(\Sigma a)^2.\, \Sigma a^2 + 2(\Sigma a)^4 - 168abcd}{8\left\{11\Sigma a^3 - 9\Sigma a.\, \Sigma a^2 + (\Sigma a)^3\right\}}.$$

XVII. Rozwiązać zrównanie:

$$\gamma z^2 - \left\{\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha k^2\right\} z - k^2\gamma x^2 = 0;$$

i wyciągnąć z tego zrównania wartości na z które odpowiadają dla

$$x = \frac{2c\alpha}{\alpha - \gamma}.$$

Znajduje się : $$z' = \frac{4\alpha c^2\gamma}{(\alpha - \gamma)^2}, \quad z'' = -\frac{\alpha k^2}{\gamma}.$$

XVIII. Utworzyć summę czwartych potęg i summę odwrotności czwartych potęg pierwiastków zrównania

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Znajduje się : $$x'^4 + x''^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4},$$

$$\frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}.$$

XIX. Znaleźć warunki konieczne, żeby ułamek,

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'},$$

był niezależnym od x.

Znajduje się warunki : $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

To ćwiczenie było już dawniéj przedstawione, lecz bez żadnéj odpowiedzi; przyłączona obecnie odpowiedź trudność przy rozwiązaniu zadania znakomicie ułatwia.

XX. Dowieść że, jeżeli mamy :

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'} = \frac{Ay^2 + By + C}{A'y^2 + B'y + C'} = \frac{Az^2 + Bz + C}{A'z^2 + B'z + C'},$$

dwie ze trzech liczb są między sobą równe, byleby nie było :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Opiera się, jak w ćwiczeniu poprzedzającém, na tém, że zrównanie drugiego stopnia ma tylko dwa pierwiastki.

XXI. Znaleźć warunki konieczne, aby ułamek,

$$\frac{Ay^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ex + F}{A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F'},$$

był niezależnym od x i od y.

Tu także, zarówno jak w ćwiczeniu XIX, załączamy odpowiedź.

Znajduje się warunki

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}.$$

Należy rozebrać przypadek szczególny, w którym $A = 0$, $A' = 0$.

XXII. Znaleźć związek *wymierny* który powinien istnieć pomiędzy a, b, c, a', b', c', aby dwa zrównania:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

miały pierwiastek spólny. Pokazać że w tym przypadku, pierwiastki mogą się wyrazić bez radykali.

Związek jest: $(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb')$;

a pierwiastek spólny: $$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

XXIII. Rozwiązać zrównanie:

$$\frac{\sqrt[3]{(27a + 8x)^2}}{15\sqrt[15]{x^{13}}} + \frac{8\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{27a + 8x}} = \frac{8}{5\sqrt[5]{x}}.$$

Znajduje się: $$x = \frac{3a(3 \pm \sqrt{21})}{32}.$$

XXIV. Dowieść że zrównanie:

$$(b^2 - 4ac)x^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')x + (b'^2 - 4a'c') = 0,$$

ma zawsze swe pierwiastki rzetelne, kiedy $(b^2 - 4ac)$ jest odjemném.

Nie ma potrzeby dowodzenia tego, jak tylko w przypadku kiedy $(b'^2 - 4a'c')$ jest także odjemném. Położy się wtedy : $b^2 - 4ac = -\alpha^2$, $b'^2 - 4a'c' = -\alpha'^2$; i dowiedzie się że ilość która, w wartościach na x, jest położoną pod radykalem, stanowi wieloczyn dwóch czynników, z których każdy jest summą dwóch kwadratów.

ROZDZIAŁ XVI.

ZRÓWNANIA O JEDNÉJ NIEZNANÉJ DAJĄCE SIĘ PRZYWIEŚĆ DO ZRÓWNAŃ STOPNIA DRUGIEGO.

ZRÓWNANIA DWUKWADRATOWE.

303. Rozwiązanie zrównań dwukwadratowych. Zrównanie o jednéj nieznanéj zowie się *dwukwadratowém*, kiedy to zrównanie zawiera w sobie tylko kwadrat i czwartą potęgę nieznanéj. Da się ono zawsze przywieść do kształtu,

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad [1]$$

Jeżeli się weźmie x^2 za nieznaną, to zrównanie staje się drugiego stopnia. Gdyż położywszy : $x^2 = z$, mamy : $x^4 = z^2$; zrównanie [1] staje się :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

zkąd :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

a ponieważ x jest pierwiastkiem kwadratowym z z, mamy więc :

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \qquad [2]$$

Tak więc x przyjmuje, w ogólności, cztery wartości, równe dwójkami i znaków przeciwnych.

304. Roztrząsanie formuł. 1° Jeżeli przypuścimy : $b^2 - 4ac > 0$, dwie wartości na z są rzeczywistemi; te wartości mogą wreszcie być (273), obiedwie dodatnemi, lub obie odjemnemi, albo jeszcze jedna dodatną a druga odjemną. *W piérwszym przypadku, cztery wartości na* x *są rzeczywistemi; w drugim, też wartości są urojonémi; w trzecim, dwie z pomiędzy nich są rzeczywistémi, a dwie inne urojonémi.*

2° Jeśli przypuścimy : $b^2 - 4ac = 0$, wartości na z są rzeczywistémi i równémi; przeto, *wartości na* x *są równémi sobie dwójkami : te wartości są rzeczywistémi, jeżeli* b *i* a *są znaków przeciwnych, a urojonémi, jeżeli* b *i* a *są tegoż samego znaku.*

3° Jeśli przypuścimy : $b^2 - 4ac < 0$, wartości na z są urojonémi; a, zatém, *cztery wartości na* x *są urojonémi.*

305. Przekształcenie wyrażeń formy $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Formuła [2], która rozwiązuje zrównanie dwukwadratowe, zawiera dwa radykale położone jeden nad drugim; ta forma nie jest korzystną, w ogólności, kiedy idzie o wyrachowanie liczebne pierwiastków. Jest więc pożyteczna szukać, pod jakiemi warunkami będzie możebném przekształcenie wyrażenia formy $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ na summę dwóch radykali prostych.

Połóżmy zrównanie :

$$[1] \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y};$$

i starajmy się rozwiązać je przez wartości *wymierne na* x i *na* y : to jest jeden przypadek, w którym byłoby korzystnie wykonać to przekształcenie. Przypuśćmy, dla uniknienia wszelkiéj trudności, że cztery radykale mają znak $+$; będzie nam wolno wtedy (125) podnieść do kwadratu obie strony zrównania [1]; i otrzymamy zrównanie równoważne :

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

albo

$$[2] \qquad (a - x - y) + \sqrt{b} = 2\sqrt{xy}.$$

Podniosłszy jeszcze do kwadratu to ostatnie wyrażenie, znajdziemy:

$$[3] \qquad (a-x-y)^2+2(a-x-y)\sqrt{b}+b=4xy.$$

Otóż drugi członek jest wymiernym z przypuszczenia; toż samo rozumieć należy o wyrazach $(a-x-y)^2$ i b. Potrzeba więc aby $2(a-x-y)\sqrt{b}$ było także wymierném; a, ponieważ $\sqrt{b}$ niém nie jest, potrzeba aby czynnik $(a-x-y)$ był *zerem*. Musi więc być:

$$x+y=a,$$

a, zatém:

$$4xy=b.$$

Wynika ztąd, że x i y mogą być tylko pierwiastkami (285) zrów nania:

$$[4] \qquad z^2-az+\frac{b}{4}=0.$$

Tak więc powinno być, na przykład:

$$[5] \qquad x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}, \quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Lecz te wartości są wymiernemi, tylko w przypadku w którym (a^2-b) jest kwadratem zupełnym. Więc, jeżeli ten warunek nie jest spełnionym, przekształcenie nie jest możebném. Jeżeli, przeciwnie, (a^2-b) jest kwadratem, c^2, x i y mają wartości wymierne:

$$x=\frac{a+c}{2}, \qquad y=\frac{a-c}{2};$$

i, te wartości sprawdzając zrównanie [2], dają formułę przekształcenia:

$$[6] \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Zauważmy, wreszcie, że, dla jakiegokolwiek bądź $(a^2 - b)$, formuła :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

jest prawdziwą, ponieważ podnosząc ją do kwadratu, przychodzi się do tosamości; lecz ta formuła nie przedstawia żadnéj korzyści, kiedy $(a^2 - b)$ nie jest kwadratem, ponieważ wtedy podstawia się za radykal summę dwóch radykali *tegoż samego kształtu.*

306. Uwaga. Mając do przekształcenia $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, położy się :

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

gdzie x jest większém jak y; też same rozumowania przywiodą nas do tegoż samego zrównania [4], dla oznaczenia wartości na x i na y. Przekształcenie nie uda się więc, jak tylko w przypadku w którym $(a^2 - b)$ jest kwadratem zupełnym c^2; otrzymamy wówczas :

$$[7] \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Jeżeli teraz pierwszy członek ma znak —, łatwo jest dostrzedz że, dla zgodzenia znaków dwóch członków, będzie potrzeba napisać :

$$[8] \quad \begin{cases} -\sqrt{a+\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a+c}{2}} - \sqrt{\dfrac{a-c}{2}} \\ -\sqrt{a-\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a+c}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}. \end{cases}$$

Gdyż wystarczy, dla otrzymania tych nowych formuł, odmienić znaki dwóch członków formuł [6] i [7].

Tak więc, w skróceniu, można te formuły napisać :

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right),$$

przypuszczając że znaki zewnętrzne odpowiadają sobie, tak jak i znaki wewnętrzne.

307. Zastosowania

$$1^\circ\ \sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=\sqrt{6}-1.$$

$$2^\circ\ \sqrt{94+6\sqrt{245}}=\sqrt{94+\sqrt{8820}}=\sqrt{\frac{94+4}{2}}+\sqrt{\frac{94-4}{2}}$$

$$=7+3\sqrt{5}.$$

3° Dowodzi się, w geometryi, że oznaczając przez C bok wielokąta foremnego wpisanego w koło promienia R, i przez x bok wielokąta foremnego, o podwójnéj liczbie boków, wpisanego w toż koło, znajduje się formułę :

$$x=\sqrt{2R^2-\sqrt{4R^4-C^2R^2}}.$$

Otóż tu, $a=2R^2$, $b=4R^4-C^2R^2$; zkąd $a^2-b=C^2R^2$. Jest więc :

$$x=\sqrt{\frac{2R^2+CR}{2}}-\sqrt{\frac{2R^2-CR}{2}}=\sqrt{R\left(R+\frac{C}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{C}{2}\right)}.$$

4° Warunek konieczny i dostateczny, aby pierwiastki zrównania dwukwadratowego,

$$x^4+px^2+q=0,$$

wyraziły się przez summę dwóch radykali prostych.

Mamy :

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

W tym przypadku,

$$a = -\frac{p}{2}, \qquad b = \frac{p^2}{4} - q; \qquad \text{więc} \quad a^2 - b = q.$$

Tak więc, potrzeba i dosyć jest żeby q było kwadratem.

5° $$\sqrt{\alpha \pm \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}\sqrt{-1}.$$

Rezultat jest więc jeszcze kształtu $A + B\sqrt{-1}$.

307 (*bis*). Własność zasługująca na uwagę trzymianu $x^4 + px^2 + q$. Trzymian $x^4 + px^2 + q$ może zawsze położyć się pod kształtem wieloczynu dwóch trzymianów drugiego stopnia. To jest oczywistém kiedy pierwiastki zrównania

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

są rzeczywistémi, uważając x^2 jako nieznaną; wtedy, w rzeczy saméj, oznaczając przez x' i x'' te pierwiastki, mamy

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - x')(x^2 - x'').$$

Przypuśćmy więc x' i x'' urojonémi, wtenczas mamy

$$(1) \qquad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Z drugiéj strony, uważając x^4 i q jako wyrazy skrajne kwadratu, mamy

$$(2) \qquad x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 + (p - 2\sqrt{q})x^2.$$

Lecz związek (1) daje kolejno, dla $p > 0$,

$$p^2 < 4q,$$

$$p < 2\sqrt{q},$$

$$p - 2\sqrt{q} < 0.$$

Jeżeli p jest odjemném, ta formuła sprawdza się sama przez się. Formuła (2) może się wtedy napisać

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - x^2\left(\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)^2,$$

lub nawet

$$x^4 + px^2 + q$$

$$= \left(x^2 + \sqrt{q} - x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)\left(x^2 + \sqrt{q} + x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right).$$

Co było do dowodzenia.

Zastosowania. Weźmy

1° $\quad x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$;

2° $\quad x^4 + 1 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$.

Niektóre zrównania dwumianowe.

308. Kształt zrównania dwumianowego. Zrównanie dwumianowe jest zrównaniem o dwóch wyrazach, kształtu,

[1] $$x^m + A = 0.$$

Jeżeli A jest dodatném, to oznaczymy przez a pierwiastek m^{ty} z A, będzie : $A = a^m$.

Jeżeli A jest odjemném, to oznaczywszy przez a pierwiastek m^{ty} z $-A$, i będzie : $A = -a^m$.

Zrównanie [1] przyjmie wtenczas kształt,

[2] $$x^m \pm a^m = 0.$$

A, jeśli położymy, $x = ay$, zrównanie [2] stanie się

$$a^m y^m \pm a^m = 0,$$

albo, dzieląc przez a^m,

[3] $$y^m \pm 1 = 0.$$

Taki jest kształt do jakiego można przywieść wszelkie zrównanie dwumianowe. Gdy się znajdzie wartości na y, mnoży się je przez a, dla otrzymania wartości na x.

309. Rozwiązanie niektórych zrównań dwumianowych.

1° Zrównanie [1] $x^2 - 1 = 0$,

ma za pierwiastki, $x = \pm 1$.

Zrównanie [2] $x^2 + 1 = 0$,

ma za pierwiastki, $x = \pm \sqrt{-1}$.

2° Zrównanie [3] $x^3 - 1 = 0$,

może się napisać : $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$;

to zrównanie rozkłada się więc na dwa inne,

$$x - 1 = 0, \quad \text{i} \quad x^2 + x + 1 = 0;$$

i jego pierwiastkami są :

$$x = 1, \text{ i } x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Zrównanie [4] $x^3 + 1 = 0$,

staje się tosamém z poprzedzającém, kiedy się w niém zamieni x na $-x$: jego pierwiastki są więc pierwiastkami z [3], z odmienionémi znakami, to jest :

$$x = -1, \quad \text{i} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

3° Zrównanie [5] $\qquad x^4 - 1 = 0,$

może się napisać : $\qquad (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0.$

To zrównanie jest więc równoważném z dwoma zrównaniami [1] i [2]; a, zatém, jego pierwiastki są pierwiastkami tych zrównań, to jest :

$$x = \pm 1, \qquad x = \pm\sqrt{-1}.$$

Zrównanie [6] $\qquad x^4 + 1 = 0,$

jest tosamém z. $\qquad x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2,$

albo z $\qquad (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = 0 :$

to zrównanie może się więc napisać ;

$$(x + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2}) = 0 ;$$

a, zatém, rozkłada się ono na dwa zrównania drugiego stopnia,

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0, \quad \text{i} \quad x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Pierwsze ma za pierwiastki,

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2};$$

a drugie, nie różni się od pierwszego jak tylko przez zamianę x

na $-x$, ma więc za pierwiastki,

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}.$$

Takie więc są cztery pierwiastki zrównania [6].

4° Zrównanie [7] $\qquad x^5 - 1 = 0$

może się napisać: $\qquad (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$

To zrównanie rozkłada się na dwa inne,

$$x - 1 = 0, \qquad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Pierwsze ma na rozwiązanie,

$$x = 1.$$

Co się tyczy drugiego, można je napisać, podzieliwszy obie strony przez x^2:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0;$$

otóż, jeżeli położymy: $x + \frac{1}{x} = z$, a, zatém, $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, to zrównanie staje się:

$$z^2 + z - 1 = 0;$$

i jego pierwiastkami są: $z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Wreszcie zrównanie $\qquad x + \frac{1}{x} = z,$

może się napisać: $\qquad x^2 - zx + 1 = 0;$

i to zrównanie ma za pierwiastki :

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

Tak więc, dla każdéj wartości na z odpowiadają dwie wartości x. Zrównanie [7] ma więc, oprócz pierwiastku 1, cztery inne pierwiastki, które są wreszcie urojonémi gdyż wartości bezwzględne na z są mniéjszémi jak 2.

Zrownanie [8] $\qquad x^5 + 1 = 0,$

staje się tosamém ze zrównaniem [7], kiedy się w niém zastępuje x przez $-x$. Jego pięć pierwiastków są więc pierwiastkami zrównania [7] z odmiennémi znakami.

5° Zrównanie [9] $\qquad x^6 - 1 = 0,$

rozkłada się na dwa inne,

$$x^3 - 1 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Daje więc na rozwiązania sześć pierwiastków zrównań [3] i [4], to jest :

$$x = \pm 1, \quad \text{i} \quad x = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Zrównanie [10] $\qquad x^6 + 1 = 0,$

staje się tosamém z poprzedzającém, kiedy się w niém zastąpi x przez $x\sqrt{-1}$; gdyż mamy :

$$(x\sqrt{-1})^6 = x^6(\sqrt{-1})^6 = -x^6.$$

Jego pierwiastki są więc danémi przez zrównania :

$$x\sqrt{-1} = \pm 1, \qquad x\sqrt{-1} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

i, dla ich otrzymania, dosyć jest pomnożyć obie strony przez $\sqrt{-1}$; gdyż wtedy pierwsze strony stają się równemi $x \times (-1)$, albo $-x$. Mamy więc :

$$x = \mp\sqrt{-1}, \quad \text{i} \quad x = \frac{\pm\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}.$$

6° Zrównanie [11] $x^8 - 1 = 0$,

ozkłada się na dwa inne,

$$x^4 - 1 = 0, \quad \text{i} \quad x^4 + 1 = 0.$$

Jego pierwiastkami są więc ośm pierwiastków zrównań [5] i [6], to jest :

$$x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{-1}, \quad x = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}.$$

Zrównanie [12] $x^8 + 1 = 0$,

może się napisać : $x^8 + 2x^4 + 1 = 2x^4$,

albo $(x^4 + 1)^2 - 2x^4 = 0$:

to zrównanie rozkłada się więc na dwa inne,

$$x^4 + 1 + x^2\sqrt{2} = 0, \quad \text{i} \quad x^4 + 1 - x^2\sqrt{2} = 0,$$

zrównania dwukwadratowe które umiemy rozwiązać, i które dają :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}}, \quad \text{i} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}}.$$

7° Zobaczymy, bez trudności, że zrównanie,

[13] $x^{10} - 1 = 0$,

ma za pierwiastki, pierwiastki zrównań [7] i [8]; i że pierwiastki zrównania,

[14] $$x^{10}+1=0,$$

są pierwiastkami zrównania [13], pomnożonemi przez $\sqrt{-1}$, i wziętemi z odmiennémi znakami.

8° Nakoniec pierwiastkami zrównania,

[15] $$x^{12}-1=0,$$

są pierwiastki zrównań [9] i [10].

Nie myślimy prowadzić daléj interesującego rozwiązywania tych przekształceń, gdyż naszym celem było tylko pokazać, na niektórych przykładach, w jaki sposób pewne zrównania, stopni wyższych nad drugi, mogą się przywieść do zrównań stopnia drugiego. Lecz sposób ogólny rozwiązania zrównań dwumianowych należy do drugiéj części algebry.

ZRÓWNANIA TRZYMIANOWE.

310. Rozwiązanie zrównania trzymianowego. Zrównanie trzymianowe jest zrównaniem o trzech wyrazach, kształtu,

[1] $$ax^{2n}+bx^n+c=0.$$

Jeżeli się weźmie x^n za nieznaną, położywszy:

[2] $$x^n=z,$$

czyli, $$x^{2n}=z^2,$$

to zrównanie staje się drugiego stopnia,

[3] $$az^2+bz+c=0.$$

Można więc otrzymać dwie wartości na z; a, podstawiając je kolejno w zrównaniu [2], zostaje się przywiedzionym, dla otrzymania pierwiastków zrównania [1], do rozwiązania dwóch zrównań dwumianowych stopnia n.

ĆWICZENIA.

I. Rozwiązać zrównanie : $$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

Położywszy : $$\sqrt[3]{x}=z;$$

znajdujemy : $$x=\pm 8, \quad x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}.$$

II. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1$$

znajdujemy : $$x=\pm\sqrt{\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2}}.$$

III. Rozwiązać zrównanie : $$\frac{x}{a+x}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}.$$

Położywszy : $$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}}=z;$$

znajdujemy :

$$z=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2-4ab}}{2(a-b)}, \quad x=\frac{a(a^2+2ab-2b^2\pm a\sqrt{5a^2-4ab})}{2(a-b)^2}.$$

IV. Rozwiązać zrównanie :

$$cx=(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1).$$

Położywszy : $\sqrt{1+x} = z$;

najdujemy : $x = 0, \qquad x = \dfrac{4c(1-c^2)}{(1+c^2)^2}$.

V. Rozwiązać zrównanie :

$$(x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 46 + 2x.$$

Położywszy : $x + \sqrt{x} + 2 = z$;

znajdujemy :

$$x = 4, \quad x = 9, \quad x = \frac{-13 \pm 3\sqrt{-3}}{2}.$$

VI. Rozwiązać zrównanie : $\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x-12}{x^2-18}$.

Zrównanie może się napisać :

$$(x^2-7)^2 - (2x+1)^2 = 0 ;$$

znajdujemy : $x = 4, \quad x = -2, \quad x = -1 \pm \sqrt{7}$.

VII. Rozwiązać zrównanie : $x - 3 = \dfrac{3 + 4\sqrt{x}}{x}$

To zrównanie może się napisać :

$$(x-1)^2 - (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 ;$$

i daje ono : $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

VIII. Rozwiązać zrównanie :

$$4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x).$$

Zrównanie może się napisać : ??

$$\left(\frac{2}{3}x - 3\sqrt{1+x}\right) - \frac{16x^2}{9} = 0 ;$$

$12x\sqrt{1+x} = 27(1+x) - 4x^2$

daje ono : $$x = 3, \quad x = -\frac{3}{4}, \quad x = \frac{9(9 \pm \sqrt{97})}{2}.$$

IX. Rozwiązać zrównanie :

$$2x^2 + \sqrt{x^2 + 9} = x^4 - 9.$$

Znajdujemy : $$x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}}.$$

X. Rozwiązać zrównanie :

$$(a + x)^{\frac{2}{3}} + 4(a - x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Znajdujemy : $$x = 0, \quad x = \frac{63a}{65}.$$

XI. Rozwiązać zrównanie :

$$(1 + x)^{\frac{2}{5}} + (1 - x)^{\frac{2}{5}} = (1 - x^2)$$

Znajdujemy : $$x = \pm \sqrt{-3}$$

XII. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{(1 + x)^2}{1 + x^3} + \frac{(1 - x)^2}{1 - x^3} = a.$$

Znajdujemy : $$x = \pm \sqrt{\frac{2}{a} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{3}{4}}}$$

XIII. Rozwiązać zrównanie :

$$(a + x)^{\frac{1}{4}} + (a - x)^{\frac{1}{4}} = h.$$

Znajdujemy : $$x = \pm \sqrt{a^2 - \left\{ h^2 \pm \sqrt{a + \frac{h^4}{2}} \right\}^4}$$

XIV. Rozwiązać zrównanie :

$$2x\sqrt{1-x^4}=a(1+x^4).$$

Przywiodłszy zrównanie do formy następującéj :

$$(a^2x^4+2x^2-a^2)^2-4x^4(1-a^4)=0\ ;$$

znajdujemy :

$$x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{-(1\pm\sqrt{1-a^4})\pm\sqrt{2(1\pm\sqrt{1-a^4})}}.$$

Radykał $\sqrt{1-a^4}$ powinniśmy wziąć z tymże samym znakiem, w dwóch zawierających go wyrazach.

XV. Rozwiązać zrównanie :

$$\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{a}.$$

Znajdujemy : $x=a,\quad x=a\,\dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{8}.$

XVI. Rozwiązać zrównanie :

$$a^2b^2x^{\frac{1}{q}}-4(ab)^{\frac{3}{2}}\ x^{\frac{p+q}{2pq}}=a^2b^2x^{\frac{1}{p}}\ .$$

Dzieląc obie strony prze $x^{\frac{1}{p}}$; potém, czyniąc $x^{\frac{1}{2q}\ \frac{1}{2p}}=z$, otrzymamy zrównanie drugiego stopnia :

$$a^2b^2z^2-4(ab)^{\frac{3}{2}}\ z-a^2b^2=0\ ;$$

zkąd : $$x=\left(\frac{2\pm\sqrt{4+ab}}{\sqrt{ab}}\right)^{\frac{2pq}{p+q}}.$$

XVII. Rozwiązać zrównanie :

$$x^{\frac{p+q}{2pq}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right).$$

Znajdujemy za pomocą tegoż samego sposobu :

$$x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{p+q}}.$$

Niekiedy rozpoznaje się, przez rozważanie zrównania, że przyjmuje ono pierwiastek a. Jego piérwszy członek rozkłada się wtedy na czynniki (75) : i ten rozkład ułatwia rozwiązanie zrównania, zniżając jego stopień ; gdyż jego piérwszy członek jest podzielnym przez $(x - a)$.

Oto kilka przykładów.

XVIII. Rozwiązać zrównanie : $x^3 - 3x = 2$.

To zrównanie przyjmuje pierwiastek, $x = 2$.

XIX. Rozwiązać zrównanie : $2x^3 - x^2 = 1$.

To zrównanie przyjmuje pierwiastek, $x = 1$.

XX. Rozwiązać zrównanie :

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0.$$

To zrównanie przyjmuje pierwistek, $x = 4$.

XXI Rozwiązać zrównanie :

$$x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0.$$

Napiszmy zrównanie pod kształtem,

$$x^2(x-1)^2 - x(x-1) - 132 = 0 ;$$

połóżmy : $x(x-1) = z$;

a otrzymamy : $x = 5, \quad x = -3, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-43}}{2}$

XXII. Rozwiązać zrównanie :

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

To zrównanie przybiéra dwa razy za pierwiastek, $x = 1$; przywodzi się je tym sposobem do drugiego stopnia.

XXIII. Rozwiązać zrównanie :

$$x^4 - x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x + 1 = 0.$$

Położywszy, $x + \frac{1}{x} = z$,

jak w przykładzie 4° numeru 309 ; znajdujemy :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4}, \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4}.$$

XXIV. Rozwiązać zrównanie :

$$x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 39x - 81 = 0.$$

Po sprowadzeniu tego zrównania do kształtu,

$$x^4 - 81 + \frac{13}{3}x(x^2 - 9) = 0;$$

znajdujemy : $x = \pm 3, \qquad x = \frac{-13 \pm \sqrt{-155}}{6}.$

XXV. Rozwiązać zrównanie : $\frac{1+x^4}{(1+x)^4} = \frac{1}{2}.$

Traktując je, jak zrównanie XXXIII, znajdujemy :

$$x = 1 \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{3}},$$

XXVI. Rozwiązać zrównanie : $\frac{1 + x^5}{(1+x)^5} = a.$

Traktując je jeszcze, jak zrównanie XXIII, znajdujemy :

$$x = \frac{1 + 4a \pm \sqrt{5(1+4a)} \pm \sqrt{10 - 60a \pm 2\sqrt{5}\sqrt{(1+4a)^3}}}{4(1-a)}$$

ROZDZIAŁ XVII.

RÓWNANIA Z ILUKOLWIEK NIEZNANEMI.

ZRÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA Z DWIEMA NIEZNANÉMI.

311. Kształt ogólny zrównania stopnia drugiego z dwiema nieznanémi. Zrównanie drugiego stopnia, z dwiema nieznanémi x i y, przywiedzione do postaci całkowitéj, może zawiérać tylko sześciorakiego gatunku wyrazy, to jest wyrazy na xy, wyrazy na y^2, daléj wyrazy na x, wyrazy na y, i wyrazy całkiem znane. Zrównanie drugiego stopnia może więc zawsze przywieść się do kształtu,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

312. Rozwiązanie dwóch zrównań, z których jedno jest piérwszego stopnia. Rozwiązanie zrównań jednoczesnych jest jedną z kwestyj najzawilszych w algebrze. Nie będziemy tu się zajmowali wcale teoryą ogólną : ograniczymy się jedynie na wyłożeniu kilku przypadków bardzo prostych.

Można zawsze rozwiązać dwa zrównania z dwiema nieznanémi, jedno piérwszego a drugie drugiego stopnia. Niech będzie, w rzeczy saméj układ :

$$\left.\begin{array}{ll} [1] \qquad & ax + by = c, \\ [2] \qquad & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \end{array}\right\}$$

Wyciąga się ze zrównania [1] :

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

podstawiając tę wartość w zrównaniu [2], otrzymujemy zrównanie drugiego stopnia na x :

$$[3] \qquad (Ab^2 - Bab + Ca^2)x^2 + (Bbc - 2Cac + Db^2 - Eab)x$$
$$+ Cc^2 + Ebc + Fb^2 = 0,$$

które dostarczy dwie wartości dla téj nieznanéj; każda z tych wartości, położona zamiast x, w zrównaniu [1], daje dwie wartości odpowiednie dla y.

Układ dany przyjmuje więc dwa układy rozwiązań. Jeżeli dwie wartości na x są rzeczywistémi, dwa układy rozwiązań są rzeczywiste: te układy są urojonémi, jeżeli wartości na x są urojone.

313. Przypadek dwóch zrównań stopnia drugiego. *Kiedy zrównania z dwiema nieznanémi są oba drugiego stopnia, rugowanie jednéj z nieznanych prowadzi, w ogólności, do zrównania zupełnego czwartego stopnia.*

W rzeczy saméj, niech będzie układ :

$$\left.\begin{array}{ll} [1] & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ [2] & A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0. \end{array}\right\}$$

Dla wyrugowania y, możnaby było wyciągnąć jego wartość z jednego ze zrównań, i podstawić ją w drugiém : lecz zawikłałoby się tym sposobem zrównanie ostateczne radykalami, które potrzebaby było późniéj znieść. Jest więc prościéj wyrugować naprzód y^2, pomnożywszy zrównanie [1] przez C′ a zrównanie [2] przez C, i odciągnąwszy jeden z wypadków od drugiego; tak postępując otrzymamy :

$$(AC' - CA')x^2 + (BC' - CB')xy + (DC' - CD')x + (EC' - CE')y$$
$$+ (FC' - CF') = 0.$$

albo, przedstawiając każdy spółczynnik przez jedną literę,

$$[3] \qquad ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0;$$

i to zrównanie [3] może zastąpić (128) jedno ze zrównań danych.

Wyciąga się wtedy ze zrównania [3] wartość na y :

$$y = -\frac{ax^2 + cx + e}{bx + d}$$

i podstawia się ją w zrównaniu [1], które się staje :

$$[4] \quad Ax^2 - \frac{Bx(ax^2 + cx + e)}{bx + d} + \frac{C(ax^2 + cx + e)^2}{(bx + d)^2};$$

$$+ Dx - \frac{E(ax^2 + cx + e)}{bx + d} + F = 0.$$

Otóż widzimy łatwo że, jeśli zniesiemy mianowniki, mnożąc obie strony przez $(bx + d)^2$, to zrównanie będzie czwartego stopnia. Ponieważ to zrównanie będzie zawiérało, w ogólności, wyrazy trzeciego stopnia i wyrazy piérwszego stopnia, nie będzie podobna rozwiązać je za pomocą sposobów zwyczajnych algebry elementarnéj.

Tak więc układ dwóch zrównań drugiego stopnia z dwiema nieznanémi nie może być rozwiązanym, w ogólności, przez sposoby dotąd znane. Lecz natrafiamy niekiedy na układy proste, które mogą się rozwiązać za pomocą pewnych podejść szczególnych, które damy poznać.

314. Rozwiązanie niektórych układów prostych. 1° Niech będzie układ :

$$[1] \quad \begin{cases} x + y = a, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Rozpoznaje się bezpośrednio (285), że x i y są pierwiastkami zrównania,

$$z^2 - az + b^2 = 0;$$

i że, przeto,

$$[2] \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Aby pierwiastki były rzeczywistémi, potrzeba żeby było :

$$a^2 \geqq 4b^2.$$

2° Niech będzie układ :

$$[1] \quad \begin{cases} x - y = a, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Przywodzi się ten układ do poprzedniego, położywszy $y = -v$; gdyż mamy wówczas :

$$x + v = a, \quad xv = -b^2;$$

a, następnie,

$$\begin{matrix} x \\ v \end{matrix} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Tak więc mamy :

$$[2] \begin{cases} x = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}, \\ y = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}; \end{cases} \text{albo } [3] \begin{cases} x = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}, \\ y = -\dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}; \end{cases}$$

Istnieją więc dwa układy rozwiązań, które są zawsze rzeczywistémi.

3° Niech będzie układ :

$$[1] \quad \begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$$

Jeżeli podniesiemy do kwadratu dwie strony zrównania piérwszego, potém od tego rezultatu odciągniemy obie strony drugiego, otrzymamy :

$$2xy = a^2 - b^2.$$

Mamy więc summę i wieloczyn nieznanych, które są, przeto, pierwiastkami zrównania :

$$z^2 - az + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0.$$

Mamy więc :

[2] $$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

Jeżeli mamy : $2b^2 - a^2 > 0$, wartości na x i na y są rzeczywistémi ; te wartości są urojonémi jeżeli mamy : $2b^2 - a^2 < 0$.

4° Niech będzie układ :

[1] $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ xy &= b^2. \end{aligned}$$

Jeżeli podwoimy obie strony drugiego zrównania, potém dodamy je stronami do piérwszego, i od niego odciągniemy kolejno, zastąpimy układ dany przez układ równoważny (128) :

[2] $$\begin{cases} (x+y)^2 = a^2 + 2b^2, \\ (x-y)^2 = a^2 - 2b^2. \end{cases}$$

Wyciąga się ztąd :

[3] $$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{cases}$$

A zatém, dodając i odciągając stronami, późniéj dzieląc przez 2, otrzymamy :

[4] $$\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2b^2}, \\ y &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2}. \end{aligned}$$

Uwaga. Zdaje się jakby było tu ośm układów, które otrzymuje się kombinując znaki radykali wszelkiemi możebnemi sposobami. Lecz należy uważać że zrównania [3] tworzą tylko cztery układy; to jest, położywszy $\sqrt{a^2+2b^2}=\mathrm{R}$, i $\sqrt{a^2-2b^2}=\mathrm{R}'$:

$$\begin{cases} x+y=\mathrm{R}, \\ x-y=\mathrm{R}', \end{cases} \begin{cases} x+y=-\mathrm{R}, \\ x-y=\mathrm{R}', \end{cases} \begin{cases} x+y=\mathrm{R}, \\ x-y=-\mathrm{R}', \end{cases} \begin{cases} x+y=-\mathrm{R}, \\ x-y=-\mathrm{R}'. \end{cases}$$

Znajduje się więc tylko cztéry układy rozwiązań: a, dla otrzymania ich, potrzeba, po wzięciu dowolném znaków radykali w wartości na x, wziąć, dla wartości odpowiedniéj na y, znaki które mają toż samo położenie.

Widzimy, wreszcie, że rozwiązania będą rzeczywistemi, jeżeli mamy: $a^2 > 2b^2$; urojonemi zaś, gdy mamy $a^2 < 2b^2$.

5° Niech będzie układ:

$$[1] \qquad \begin{cases} x^2-y^2=a^2, \\ xy=b^2. \end{cases}$$

Przywodzi się go do układu drugiego przypadku, pisząc:

$$[2] \qquad \begin{aligned} x^2-y^2&=a^2, \\ x^2y^2&=b^4. \end{aligned}$$

Zkąd się wyciąga naprzód wartości na x^2 i na y^2, potém wartości na x i na y:

$$[3] \qquad \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}, \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}; \end{cases}$$

$$\text{albo } [4] \qquad \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}, \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}. \end{cases}$$

Lecz układ [2], jest ogólniejszym jak układ [1], ponieważ zawiera podniesionemi do kwadratu obie strony drugiego zrównania [1]. Należy więc kombinować wartości na x i na y, tak aby ich wieloczyn był równym b^2 : i to wymaga łączenia wartości mających tenże sam znak.

Istnieją więc cztéry układy rozwiązań : dwa piérwsze są rzeczywistemi, a dwa inne urojonemi.

ZRÓWNANIA DRUGIEGO STOPNIA Z WIĘCÉJ JAK Z DWIEMA NIEZNANEMI.

315. Przykłady. 1° Niech będzie układ :

$$[1] \qquad \left\{ \begin{aligned} x+y+z&=a, \\ x^2+y^2+z^2&=b^2, \\ xy&=cz. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli podniesiemy do kwadratu dwa członki piérwszego zrównania, po przeniesieniu z w drugą stronę, otrzymamy :

$$x^3+2xy+y^2=a^2-2az+z^2;$$

podstawiwszy za x^2+y^2 i za xy ich wartości wyciągnięte z dwóch innych, przyjdzie :

$$2z^2-2(a+c)z+a^2-b^2=0,$$

zrównanie drugiego stopnia na z, zkąd :

$$[2] \qquad z=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-2(a^2-b^2)}}{2}.$$

Znając z, wyciągnie się summę $x+y$ z piérwszego zrównania i wieloczyn xy z trzeciego; i skończy się rachunek, jak się to odbyło w numerze 314 (1°).

2° Weźmy jeszcze układ :

$$[1] \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2+xy+y^2&=37, \\ x^2+xz+z^2&=28, \\ y^2+yz+z^2&=19. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli odciągniemy drugie zrównanie od piérwszego, a trzecie od drugiego, otrzymamy :

$$\begin{cases} (y-z)(x+y+z)=9, \\ (x-y)(x+y+z)=9; \end{cases}$$

zkąd wynika :

[2] $$y-z=x-y, \quad \text{albo} \quad x+z=2y$$

a, zatém; [3] $$(x-y)(y+2y)=9, \quad \text{albo} \quad (x-y)\,y=3.$$

Wyciąga się z tego ostatniego :

$$x=\frac{3}{y}+y;$$

podstawiwszy tę wartość w piérwszém ze zrównań danych, otrzymamy :

$$\left(\frac{3}{y}+y\right)^2+3+y^2+y^2=37,$$

albo $$3y^4-28y^2+9=0,$$

Zrównanie dwukwadratowe, które daje :

$$y=\pm 3, \quad y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

a tém samém, $$x=\pm 4, \quad x=\pm\frac{10}{3}\sqrt{3},$$

jakoteż, $$z=\pm 2, \quad z=\mp\frac{8}{3}\sqrt{3},$$

ZRÓWNANIA STOPNI WYŻSZYCH NAD DRUGI.

316. **Przykłady.** 1° Niech będzie układ :

[1] $$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Zniesienie mianowników drugiego zrównania pozwala napisać układ :

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ 6(x+y) = 5xy. \end{cases}$$

Jeżeli więc będziemy uważali xy i $x+y$ jako dwie nieznane posiłkowe u i v, otrzymamy :

[2] $$\begin{cases} uv = 30, \\ 6v = 5u. \end{cases}$$

Drugie zrównanie daje, $v = \frac{5}{6}u$; podstawiając tę wartość w pierwszém, otrzymamy :

$$\frac{5}{6}u^2 = 30,$$

albo $$u^2 = 36;$$

więc : $$u = \pm 6;$$

ztąd wynika : $$v = \pm 5.$$

Potrzeba przyjąć tenże sam znak dla wartości na u i dla wartości na v, ponieważ $v = \frac{5}{6}u$.

Jeżeli przyjmiemy naprzód wartości : $u = 6$, $v = 5$, mamy :

[3] $$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$$

zkąd się wyciągnie, dla x i dla y, wartości 2 i 3.

Jeżeli przyjmiemy, $v = -6$, $u = -5$, mamy :

[4] $$\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -6; \end{cases}$$

zkąd się wywodzi dla x i y wartości -6 i 1.

2° Niech będzie jeszcze układ :

[1] $$\begin{cases} \dfrac{4}{y^2} + \dfrac{4+y}{y} = \dfrac{8+4y}{x} + \dfrac{12y^2}{x^2}, \\ 4y^2 - xy = x. \end{cases}$$

Piérwsze zrównanie staje się przez zniesienie mianowników :

$$4x^2 + (4+y)yx^2 = (8+4y)xy^2 + 12y^4;$$

i można je napisać, dodając $4y^4$ po obu stronach,

$$x^2(2+y)^2 - 4xy^2(2+y) + 4y^4 = 16y^4.$$

Otóż piérwsza strona jest kwadratem z $x(2+y) - 2y^2$; to zrównanie może się więc napisać :

$$[x(2+y) - 2y^2]^2 = (4y^2)^2;$$

wyrażenie równoważne z :

[2] $$x(2+y) - 2y^2 = \pm 4y^2.$$

Możemy więc, układ dany, zastąpić dwoma następującemi :

[3] $$\begin{cases} x(2+y) - 2y^2 = 4y^2 \\ 4y^2 - xy = x; \end{cases}$$

[4] $$\begin{cases} x(2+y) - 2y^2 = -4y^2 \\ 4y^2 - xy = x. \end{cases}$$

Rozwiążemy, wreszcie, bez trudności te dwa układy. W rzeczy saméj, drugie ze zrównań [3], rozwiązane względem x, staje się :

$$x = \frac{4y^2}{y+1};$$

i ta wartość, podstawiona w piérwszém, daje :

$$4y^2\left(\frac{2+y}{y+1}\right) - 6y^2 = 0,$$

albo $$2y^2(1-y) = 0;$$

zkąd wynika : $$y = 0, \quad \text{i} \quad y = 1,$$

a, tém samém, $$x = 0, \quad \text{i} \quad x = 2.$$

Znajdzie się podobnież, dla rozwiązań układu [4] :

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{5}{3} \\ x = -\frac{50}{3}. \end{array}\right.$$

Tak więc rozwiązania układu danego są :

$$1^\circ \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \qquad 2^\circ \left\{\begin{array}{l} x = 2, \\ y = 1, \end{array}\right. \qquad 3^\circ \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{50}{3} \\ y = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

3° Niech będzie, nakoniec, układ :

$$[1] \qquad \left\{\begin{array}{r} x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 13, \\ x^4y^2 + x^2y^4 = 468. \end{array}\right.$$

Można, grupując wyrazy, napisać go :

$$\left\{\begin{array}{r} (x+y)(x^2+y^2) = 13, \\ x^2y^2(x^2+y^2) = 468; \end{array}\right.$$

i, dzieląc drugie zrównanie przez piérwsze :

$$x^2y^2 = 36(x+y);$$

zrównanie które może zastąpić jedno z poprzedzających. Jeżeli oznaczymy wieloczyn xy przez u, i summę $x+y$ przez v, układ staje się :

[2] $$\begin{cases} v(v^2-2u)=13, \\ u^2=36v. \end{cases}$$

Jeżeli wyrugujemy v pomiędzy témi dwoma zrównaniami, mamy :

$$\frac{u^6}{36^3} - \frac{2u^3}{36} - 13 = 0,$$

zrównanie trzymianowe, z którego się wyciąga :

$$\frac{u^3}{36} = 36 \pm \sqrt{36+13.36};$$

ztąd : $u = -6$, i $u = 6\sqrt[3]{13}$.

A tém samém, $v = 1$, i $v = \sqrt[3]{13^2}$.

Tak więc piérwszy układ rozwiązania dostarcza zrównanie :

$$z^2 - z - 6 = 0;$$

zkąd wynika : $x = 3$, $y = -2$;

a drugi układ jest dostarczonym przez zrównanie :

$$z^2 - \sqrt[3]{13^2}\,z + 6\sqrt[3]{13} = 0;$$

zkąd wynika :

$$x = \frac{\sqrt[3]{13^2} + \sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt[3]{13^2} - \sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

ĆWICZENIA.

I. Rozwiązać zrównanie:

$$ab - \frac{1}{2}(a+b)(x+y) + xy = 0,$$

$$cd - \frac{1}{2}(c+d)(x+y) + xy = 0;$$

i wyprowadzić ztąd:

$$\frac{(x-y)^2}{4} = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Wyciąga się $x+y$ i xy z dwóch zrównań danych, i tworzy się wyrażenie $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$, które jest równém $\frac{(x-y)^2}{4}$.

II. Rozwiązać układ:

$$a^n x^m + b^m y^n = 2\sqrt{a^m b^n x^m y^n}, \quad xy = ab.$$

Ruguje się y; a położywszy $\sqrt{x^{m+n}} = z$, otrzymuje się zrównanie drugiego stopnia;

$$z^2 - 2b^n\sqrt{a^{m-n}}z + b^{m+n} = 0.$$

Ztąd wyciąga się z; i otrzymuje się późniéj x i y.

III. Rozwiązać układ:

$$x + y = a, \qquad x^3 + y^3 = d^3.$$

Rachuje się wieloczyn xy; i przychodzi się późniéj do

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4d^3}{a} - a^2}.$$

IV. Rozwiązać układ:

$$x + y = a, \qquad x^4 + y^4 = d^4.$$

Rachuje się wieloczyn xy, podnosząc piérwsze zrównanie do czwartéj potęgi; i otrzymuje się:

$$xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + d^4}{2}}.$$

Wyprowadza się ztąd z łatwością x i y.

V. Rozwiązać układ:

$$x + y = a, \qquad x^5 + y^5 = d^5.$$

Rachuje się wieloczyn xy podobnym sposobem, i otrzymuje się:

$$xy = \frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{5a(a^5 + 4d^5)}}{10a}.$$

VI. Rozwiązać układ:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2}$$

Biorąc $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$ za nieznane, przywodzi się do układu 3° (numeru 314).

VII. Rozwiązać układ:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \qquad x + y = b.$$

Przywodzi się do tegoż samego układu, biorąc $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$ za nieznane.

VIII. Rozwiązać układ:

$$x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \quad x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5.$$

Bierze się za nieznane $x^{\frac{1}{4}}$ i $y^{\frac{1}{5}}$; i zostaje się przywiedzionym do ćwiczenia III.

IX. Rozwiązać układ :

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1, \quad \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78.$$

Bierze się jeszcze za nieznane $x+y$ i xy.

X. Rozwiązać układ :

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{x-y}{y^2}.$$

Wyprowadza się łatwo z tych zrównań inne :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)-l=0.$$

i znajduje się : $y=\frac{1}{4}, \quad x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{4}$.

XI. Rozwiązać układ :

$$a^2-x^2=3xy, \qquad (\sqrt{y}-\sqrt{x})\,(a-x)=3\sqrt{x}(x+y.$$

Rugując y, przychodzimy do zrównania :

$$4x^4+4ax^3+9a^2x^2+8a^3x+2a^4=0,$$

które można napisać : $(4x^2+4ax+a^2)\,(x^2+2a^2)=0,$

a które łatwo się rozwięzuje.

XII. Rozwiązać układ :

$$y\sqrt{(a-x)(x-b)}+x\sqrt{(a-y)(b-y)}=2\left\{b\sqrt{(a-x)(a-y)}+a\sqrt{(x-b)(b-y)}\right\}$$

$$xy=4ab.$$

Podnosząc do kwadratu piérwsze zrównanie, późniéj zastępując xy przez $4ab$, przychodzi się do zrównania :

$$\left\{x+y-4(a+b)\right\}\left\{x-y-4(a-b)\right\}=0;$$

tak że układ dany można zastąpić przez dwa układy następujące, łatwe do rozwiązania :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y=4(a+b), & x-y=4(a-b) \\ xy=4ab, & xy=4ab. \end{array}\right.$$

XIII. Rozwiązać układ :

$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}, \quad x^2+y^2=34.$$

Znajduje się łatwo :

$$1^\circ \; x=\pm 5, \quad y=\pm 3; \quad 2^\circ \; x=\pm\sqrt{\frac{59}{2}}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}.$$

XIV. Rozwiązać układ :

$$\left\{\begin{array}{l} (x+y)(xy+1)=18xy, \\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2. \end{array}\right.$$

Dzieli się piérwsze zrównanie przez xy, drugie przez x^2y^2; potém przedstawia się $x+\frac{1}{x}$ przez u, $y+\frac{1}{x}$ przez v, i przychodzi się do dwóch zrównań :

$$u+v=18, \quad v^2+u^2=212;$$

zkąd wyciąga się łatwo :

$$x=7\pm 4\sqrt{3}, \qquad y=2\pm\sqrt{3}.$$

XV. Rozwiązać układ :

$$(\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=(\sqrt{y})^{\frac{8}{3}}, \qquad (\sqrt{y})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=(\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}.$$

Bierze się za nieznane, $\sqrt{x}=u$. $\sqrt{y}=v$; i przychodzi się do zrównań,

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}=\frac{4}{3}, \qquad \sqrt{u}=v,$$

które dostarczają wartość na v, a tém samém wartość na u, i nakoniec wartości na x i na y,

XVI. Rozwiązać układ :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a, \\ x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b. \end{cases}$$

Uważa się że piérwsze zrównanie może się napisać :

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2},$$

i że drugie jest sześcianem następującego :

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{b}.$$

Położywszy $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, zostaje się tym sposobem przywiedzionym do układu (3°) numeru 314. Lecz ostatnie zrównanie nie jest tak ogólném jak drugie ze zrównań danych ; tak że nie otrzymuje się tym sposobem wszystkich rozwiązań.

XVII. Rozwiązać układ :

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}, \\ x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3=b^3. \end{cases}$$

Położywszy $x^{\frac{3}{2}}=u$, $y^{\frac{3}{2}}=v$, zrównania dane przybiera kształt :

$$\begin{cases} u+v+\sqrt{uv}=\sqrt{a^3}, \\ u^2+v^2+uv=b^3. \end{cases}$$

Drugie, podzielone przez pierwsze, daje :

$$u+v-\sqrt{uv}=\frac{b^3}{\sqrt{a^3}}.$$

Można więc znaleźć $u+v$ i $\sqrt{uv}$, a następnie u i v, potém x i y.

XVIII. Rozwiązać układ :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a\,, \qquad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$$

Położywszy $\sqrt[3]{\frac{b+a}{b-a}}=r$, wyciąga się łatwo z tych zrównań :

$$x=ry\,; \qquad y=\frac{a(1+r)}{1+r+r^2}, \qquad x=\frac{ar(1+r)}{1+r+r^2}.$$

XIX. Rozwiązać układ :

$$(1-x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)(1-y^2)=4x^2\sqrt{1+y^4},$$

$$4xy=\sqrt{2}\,(1-x^2)(1-y^2).$$

Wykonywa się rachunki : potém ruguje się x, i przychodzi się do zrównania :

$$3y^8+6y^4-1=0\,;$$

zkąd wyciąga się y ; z tego wypływa x.

XX. Rozwiązać układ :

$$\begin{cases}(x^4+2bx^3y+a^2y^2)(y^4+2bxy^2+a^2x^2)=4(a^2-b^2)(b-c)^2x^2y^2,\\ x^3+y^3=2cxy.\end{cases}$$

Wykonywając rachunki w pierwszém zrównaniu, potém dzieląc jego obie strony przez x^2y^2, i podstawiając w niém za x^3+y^3, za $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ i za $\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}$ ich wartości wyciągnięte z drugiego, przychodzi się do zrównania :

$$\left\{\,xy-(a^2-2bc-2b^2)\,\right\}^2=0,$$

które daje wartość na xy. Ztąd wypada wartość na x^2y^3 ; znając zaś x^3+y^3 i x^3y^3, zostaje się przywiedzionym do zagadnienia (285). Wyciąga się następnie x^3 i y^3, a, tém samém, x i y.

XXI. Rozwiązać układ :

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=m, \qquad xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=n.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony pierwszego zrównania, i zastępując w niém wieloczyn z radykali przez jego wartość wyciągniętą z drugiego, położy się je pod kształtem,

$$(x-y)^2=2\,(1-n)-m^2.$$

Kładzie się później drugie pod kształtem,

$$(x-y)^2=1-n^2-2\,(1-n)\,xy.$$

Można więc wyciągnąć ztąd xy i $x-y$, a przeto x i y.

XXII. Rozwiązać układ :

$$(x+y)\,(1+xy+x^2y+x^2y^2)+xy=a,$$

$$xy(x+y)\,(x+y+xy)\,(x+y+xy+x^2y+xy^2)=b.$$

Połóżmy kolejno :

$$\begin{cases} x+y=z\,, \\ xy=z'; \end{cases} \qquad \begin{cases} z+z'=u\,, \\ zz'=u'; \end{cases} \qquad \begin{cases} u+u'=v, \\ uu'=v'; \end{cases}$$

przyjdziemy do układu $\begin{cases} v+v'=a \\ vv'=b' \end{cases}$, który dostarczy v i v' ; wynika ztąd u i u', potem z i z', a nakoniec x i y.

Układ ma ośm rozwiązań.

XXIII. Rozwiązać układ :

$$\frac{xy}{z}=a, \qquad \frac{xz}{y}=b, \qquad \frac{yz}{x}=c\,.$$

Znajduje się : $x^2=ab$, $\quad y^2=ac$, $\quad z^2=bc$.

XXIV. Rozwiązać układ :

$$x(y+z)=2p, \qquad y(z+x)=2q, \qquad z(x+y)=2r.$$

Wyciąga się łatwo :

$$xy = p + q - r, \quad xz = p + r - q, \quad yz = q + r - p;$$

a, przeto,

$$\sqrt{\frac{(p+q-r)(p+r-q)}{q+r-p}}, \quad y = \sqrt{\frac{(p+q-r)(q+r-p)}{p+r-q}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(p+r-q)(q+r-p)}{p+q-r}}.$$

XXV. Rozwiązać układ :

$$xy^2z^3 = 4725, \quad \frac{yz^2}{x} = 6\,\frac{3}{7}, \quad \frac{z}{x^2y} = \frac{3}{245}.$$

Znajduje się : $x = 7, \quad y = 5, \quad z = 3.$

XXVI. Rozwiązać układ :

$$x + y + z = 13, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 61, \quad 2yz = x(z + y).$$

Ruguje się łatwo y i z; i znajduje się, $x = 4$, i $x = 9$. Otrzymuje się, następnie, $y + z$ i yz; zkąd się wyprowadza y i z. Wartości, które odpowiadają dla $x = 9$, są urojonemi : te zaś wartości które odpowiadają dla $x = 4$, są $y = 3$, $z = 6$.

ROZDZIAŁ XVIII.

ROZWIĄZANIE I ROZTRZĄSANIE ZAGADNIEŃ STOPNI WYŻSZYCH NAD PIERWSZY.

KWESTYA ODNOSZĄCA SIĘ DO PROPORCYJ.

317. *Znaleźć proporcyą, znając summę* 4s *jéj wyrazów, summę* 4q *ich kwadratów, i summę* 4c *ich sześcianów.*

Weźmy za nieznane posiłkowe, przewyżkę $4d$ summy skrajnych nad summą średnich, i wieloczyn p skrajnych, który jest tenże sam jak wieloczyn średnich. Summą skrajnych będzie $2(s+d)$, summą średnich $2(s-d)$, tak że skrajne będą pierwiastkami zrównania

$$x^2-2(s+d)x+p=0,$$

a średnie pierwiastkami zrównania

$$y^2-2(s-d)y+p=0.$$

Pozostaje więc tylko oznaczyć p i d. Otóż summa kwadratów z pierwiastków dwóch zrównań poprzedzających jest

$$8(s^2+d^2)-4p,$$

a summa sześcianów

$$16s(s^2+3d^2)-12\,sp;$$

mamy więc związki

$$2(s^2+d^2)-p=q, \quad 4s(s^2+3d^2)-3sp=c,$$

zkąd wyciągnie się bez trudności p i d.

Ten przykład daje jak najwidoczniéj uczuć ważność wyboru nieznanych w rozwiązaniu zagadnień.

PODZIAŁ LINII PROSTÉJ W STOSUNKU ŚREDNIM I SKRAJNYM.

318. *Podzielić linią prostą* AB *w stosunku średnim i skrajnym, jestto podzielić ją na dwie części takie, żeby największa z nich* AX *była średnią proporcyonalną pomiędzy prostą daną i jéj częścią mniejszą.*

Niech będzie a długość AB; oznaczmy AX przez x, a tém samém, BX przez $(a-x)$; otrzymamy, podług wysłowienia, proporcyą:

[1] $$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}.$$

Wyciąga się z tąd zrównanie : $x^2=a(a-x)$,

albo [2] $$x^2+ax-a^2=0.$$

Z kąd : [3] $$x=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

Roztrząsanie. Dwa pierwiastki są oczywiście rzeczywistemi. Ponieważ $\sqrt{5}$ jest zawartém między 2 i 3, pierwszy przeto pierwiastek jest dodatnym i mniejszym jak a, i stanowi on rozwiązanie żądane. Lecz drugi pierwiastek jest odjemnym, i jego wartość bezwzględna jest większą jak a; ten więc pierwiastek powinien być odrzuconym.

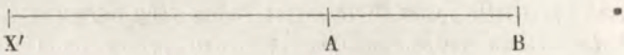
Wszakże można wytłumaczyć to rozwiązanie odjemne. W rzeczy saméj, oznaczmy je przez $(-\alpha)$: ponieważ ono sprawdza zrównanie [2], musi być :

$$(-\alpha)^2=a\{a-(-\alpha)\},$$

albo $$\alpha^2=a(a+\alpha).$$

Tak więc α jest średnią proporcyonalną między a i $(a+\alpha)$, i odpowiada oczywiście kwestyi następującéj :

Znaleźć, na prostéj AB *przedłużonéj, punkt* X' *taki, żeby jego odległość* α *od punktu* A *była średnią proporcyonalną między jego odległością* $(a+\alpha)$ *od punktu* B *i linią prostą* AB $=$ a :



Dwa rozwiązania, na które natrafiliśmy, rozwięzują sposobem ogólnym zagadnienie następujące :

Znaleźć, na prostéj nieograniczonéj, na któréj są wziętemi dwa punkta A *i* B, *punkt* X *taki, żeby odległość* AX *była średnią proporcyonalną między* BX *i* AB.

Zdarza się niekiedy, jak to ma miejsce po większéj części w zagadnieniach stopnia pierwszego, że rozwiązanie odjemne powinno być odniesioném na lewo AB, w kierunku przeciwnym zozwiązaniu dodatnemu.

Możnaby było, wreszcie, uniknąć rozwiązania odjemnego, licząc odległości poczynając od punktu B. Gdyż, oznaczywszy przez x odległość BX (1sza fig.), a, tém samém, przez $(a-x)$ odległość AX, mielibyśmy proporcyą :

$$\frac{a}{a-x}=\frac{a-x}{x};$$

z kąd wyciągnęłoby się zrównanie :

$$[4] \qquad x^2-3ax+a^2=0;$$

a, tém samém, [5] $$x=\frac{a(3\pm\sqrt{5})}{2}.$$

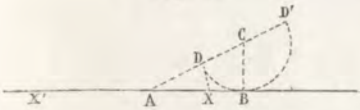
Te dwa zrównania są dodatnémi : pierwsze większe jak a, daje punkt X'; a drugie, mniejsze jak a, daje punkt X.

Wykreślenie rozwiązań. Formuły [3], mogące się napisać :

$$x'=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2}, \qquad x''=-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}+\frac{a}{2}\right).$$

prowadzą bezpośrednio do wykreślenia które jest wskazaném w *Początkach geometryi*. Gdyż $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, który ma za boki kąta prostego AB i $\frac{AB}{2}$; i, dla otrzymania x', potrzeba odciągnąć $\frac{AB}{2}$ od téj przeciwprostokątnéj, gdy tymczasem, dla otrzymania wartości bezwzględnéj na x'', potrzeba dodać dwie długości. Odcina się wreszcie x' od A ku B, a x'' w kierunku przeciwnym.

Fig. 5.



Uważmy jeszcze że zrównanie [2] może się napisać

$$x(x+a)=a^2;$$

zatém, zagadnienie dane sprowadza się do następującego : *Znaleźć dwie linie proste* x *i* x + a, *których tak różnicą jak średnią proporcyonalną jest* a. Uczymy się w geometryi, rozwiązywać to pytanie, i rozpoznajemy wykreślenie poprzedzające.

319. W zagadnieniu poprzedzającém, zrównanie przyjmuje więcéj rozwiązań rzeczywistych jak wysłowienie, i potrafiliśmy złagodzić to wysłowienie tym sposobem żeby dla każdego rozwiązania zrównania odpowiadał jeden przypadek zagadnienia; to *uogólnienie* nie jest zawsze możebném.

PRZYKŁAD :

Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby podzieliła na dwie równe części wycinek sferyczny, mający za podstawę mniejszą z dwóch stref sferycznych które ta płaszczyzna wyznacza.

Wedle powyższego wysłowienia, objętość odcinka sferycznego musi być oczywiście równą objętości ostrokręgu obrotowego którego podstawą jest podstawa odcinka a wierzchołkiem środek sfery.

Oznaczmy zatém przez r promień sfery danéj, i dajmy że x przedstawia odległość środka sfery od płaszczyzny siecznéj; na wyrażenie objętości odcinka, weźmy połowę objętości wycinka, co daje

$$\frac{1}{3}\pi r^2(r-x);$$

miarą objętości ostrokręgu jest

$$\frac{1}{3}\pi x(r^2 - x^2),$$

a więc ;

$$x(r^2 - x^2) = r^2(r - x),$$

albo

$$(x - r)(x^2 + rx - r^2) = 0.$$

Nie zważając na pierwiastek $x = r$, dający odcinek i ostrokrąg równe zeru, to jest, nie mogące istnieć, należy się tylko zastanowić z uwagą nad zrównaniem stopnia drugiego

$$x^2 + rx - r^2 = 0;$$

jest to właśnie zrównanie które znajdujemy wtedy kiedy zamierzamy podzielić promień w stosunku średnim i skrajnym, tak żeby największy odcinek tego promienia wychodził ze środka sfery; widzimy więc że mamy istotnie dwa rozwiązania : jedno dodatne i mniejsze jak r, które odpowiada pytaniu, drugie zaś odjemne i przewyższające r w swéj wartości bezwzględnéj, które powinno być odrzuconém, gdyż to rozwiązanie wskazuje płaszczyznę sieczną nieprzecinającą danéj sfery.

ZAGADNIENIE PAPPUSA.

320. *Przez punkt* M *wzięty na dwójsiecznéj kąta prostego, poprowadzić linią prostą taką, żeby jéj część zawarta w tym kącie miała długość daną* l.

Punkt M jest wyznaczonym kiedy się daje jego odległość a od boków kąta prostego.

Niech będą nieznane OP $= x$, OQ $= y$. Powierzchnia trójkąta prostokątnego POQ jest równą summie powierzchni trójkątów OMP, OMQ ; ztąd zrównanie

$$xy = a(x + y); \qquad (1)$$

mamy wreszcie

$$l^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2a(x+y);$$

zkąd

$$(x+y)^2 - 2a(x+y) - l^2 = 0$$

i

$$(2) \qquad x + y = a \pm \sqrt{a^2 + l^2};$$

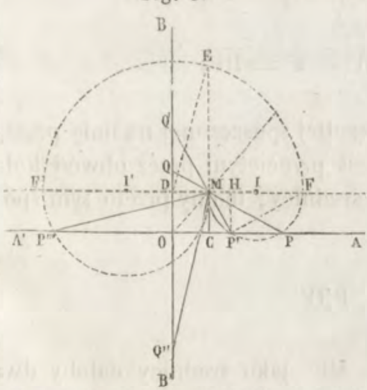
x i y są więc pierwiastkami dwóch zrównań stopnia drugiego. Zostawiamy czytelnikowi wykazanie że są rozwiązania, w których dwa pierwiastki są zawsze rzeczywistemi, a których dwa inne nie istnieją jak tylko gdy

$$l > 2a\sqrt{2} > 2\mathrm{MO}.$$

Pierwiastki odjemne odpowiadają wreszcie odcinkom liczonym na przedłużeniach boków kąta prostego, poczynając od wierzchołka.

Poprzestaniemy na wykazaniu jak się kreśli x i y podług zrównań (1) i (2), bez rozwiązywania takowych.

Fig. 6.



Przedłużmy MC o $\mathrm{ME} = l$, i z punktu D jako środka promieniem równym DE nakreślmy pół okręgu koła F′EF; mamy

$$-\mathrm{FM} = -(\mathrm{DF} - \mathrm{DM}) = a - \sqrt{a^2 + l^2},$$

$$\mathrm{MF}' = \mathrm{DM} + \mathrm{DF}' = a + \mathrm{DF} = a + \sqrt{a^2 + l^2};$$

tak że dwie wartości na $(x+y)$ są

$$-\mathrm{FM} \quad \text{i} \quad \mathrm{MF}'.$$

Weźmy pod uwagę drugą wartość

$$x + y = \mathrm{MF}' = 2a + \mathrm{MF}.$$

Nazywając I środek linii MF, otrzymamy

$$x + y = 2\mathrm{DI},$$

co nas prowadzi do położenia

$$x = \mathrm{DI} + z, \qquad y = \mathrm{DI} - z;$$

zkąd

$$xy = \overline{\mathrm{DI}}^2 - z^2,$$

a że
$$xy = a(x + y) = a.2\mathrm{DI},$$

więc

$$2a\mathrm{DI} = \overline{\mathrm{DI}}^2 - z^2$$

i

$$z^2 = \overline{\mathrm{DI}}^2 - 2a.\mathrm{DI} = (a + \mathrm{MI})^2 - 2a(a + \mathrm{MI})$$

$$= \overline{\mathrm{MI}}^2 - a^2 = \overline{\mathrm{IH}}^2,$$

oznaczając przez H spodek prostopadłéj spuszczonéj na linią prostą DF z punktu P, gdzie bok OA jest przeciętym przez obwód koła nakreślonego na prostéj MF jako średnicy; mamy przeto tym sposobem dwa rozwiązania

$$\mathrm{PQ} \quad \text{i} \quad \mathrm{P'Q'}.$$

Półkole zakreślone na prostéj MF′ jako średnicy dałoby dwa inne rozwiązania

$$\mathrm{P''Q''}, \quad \mathrm{P'''Q'''}.$$

Jeżeli długość l jesj mniejszą jak 2MO, obwód koła MF nie przetnie AΘ, i rozwiązania

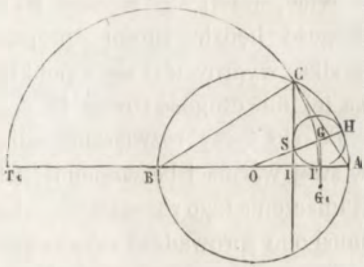
$$PQ, \quad P'Q'$$

nie istnieją.

KOŁO STYCZNE, JEDNOCZEŚNIE, DO KOŁA INNEGO I JEGO ŚREDNICY I CIĘCIWY.

321. *Mając dane koło którego środkiem jest* O, *jedną z jego średnic* AB, *i cięciwę prostopadłą do* AB; *nakreślić koło styczne, jednocześnie, do koła danego oraz do jego średnicy i cięciwy.*

Fig. 7.



Niech będzie OA$=$R, OI $=a$. Przypuśćmy że chcemy nakreślić koło G wpisane w odcinek AIC. Weźmy za nieznaną, jego promień, i połóżmy GT$=$IT$=x$. Linia prosta OG, która łączy środki, przejdzie przez punkt zetknięcia H dwóch kół; ta prosta przecina wreszcie koło nieznane w S. Otóż styczna OT jest średnią proporcyonalną między całą sieczną OH a jéj częścią zewnętrzną OS. Mamy więc :

$$\overline{OT}^2 = OH \times OS,$$

albo [1] $$(a+x)^2 = R(R-2x),$$

albo, rozwijając i porządkując,

[2] $$x^2 + 2(R+a)x - R^2 + a^2 = 0.$$

Zkąd się wyciąga :

$$x = -(R+a) \pm \sqrt{(R+a)^2 + (R^2 - a^2)};$$

lub, uproszczając,

[3] $$x = -(R + a) \pm \sqrt{2R(R + a)},$$

Roztrząsanie. Te dwa pierwiastki, są oczywiście rzeczywistemi, ponieważ $2R(R + a)$ jest ilością dodatną; a, gdy a jest mniejszém jak R, widzimy więc, wpatrując się w zrównanie [2], że jeden z nich jest dodatnym a drugi odjemnym.

Rozwiązanie dodatne x' nakreśli się z wiełką łatwością: gdyż radykal wyraża średnią proporcyonalną między 2R i $(R + a)$, to jest między BA i BI; ten radykal jest więc równym BC. Przeto:

$$x' = BC - BI.$$

Więc, jeżeli się weźmie $BT = BC$, IT będzie równém x: ta długość będzie istotnie promieniem szukanym. Na otrzymanie środka, wyprowadzi się z punktu T prostopadłą TG do A, biorąc na téj linii długość równą IT.

Co się tyczy rozwiązania odjemnego x'', to ono jest równém, w swéj wartości bezwzględnéj, długości summy $BC + BI$. Dla wytłumaczenia tego rozwiązania, umażmy że, oznaczając je przez $(-\alpha)$, musi ono sprowadzać zrównanie [1]; powinno więc być:

$$(a - \alpha)^2 = R(R + 2\alpha),$$

albo [4] $$(\alpha - a)^2 = R(R + 2\alpha).$$

Otóż to jest właśnie zrównanie jakie należałoby napisać, jeżeliby chciano nakreślić koło styczne zewnętrzne do łuku BC i do średnicy i cięciwy przedłużonych, a gdyby przytém podobało się nazwać α nieznany promień koła; zapewnia się o tém łatwo kreśląc figurę. Tak więc pierwiastek odjemny dostarczy drugiego rozwiązania zagadnienia; aby zaś otrzymać punkt zetknięcia T, nowego koła i średnicy AB, wystarczy odnieść średnicę na lewo punktu B, i odciąć na niéj długość BT, równą BC.

Widzimy że tu jeszcze, dwa promienie, $IT = BC - BI$, i $IT_1 = BC + BI$, są odniesione, poczynając od punktu I, w kierunkach sobie przeciwnych, jak to wskazują znaki któremi ich wartości są naznaczone w formułach [3].

Oczywiście że punkta T i T_1 są punktami zetknięć dwóch innych kół równych pierwszym, których środki są symetrycznie położone pod średnicą AB, i które odpowiadają także pytaniu.

Jeżeli chcemy teraz wpisać koło w odcinek BIC, znajdziemy, przez podobne rozumowania, zrównanie

$$[5] \qquad (x - a)^2 = R(R - 2x),$$

które będzie się różniło od zrównania [1], i które nie będzie mogło przywieść się do niego przez zmianę znaku w x. Nie wchodząc w szczegóły tego nowego rozwiązania, powiemy tylko że pierwiastek odjemny będzie odpowiadał dla koła stycznego zewnętrznie do łuku AC, i że otrzymamy punkta zetknięcia dwóch kół ze średnicą AB, kreśląc, z punktu A jako środka, półkole, promieniem AC.

Widzimy że zagadnienie ma *ośm* rozwiązań dostarczonych przez dwa zrównania drugiego stopnia.

322. *Podzielić powierzchnią koła mającego* R *za promień, w stosunku średnim i skrajnym, za pomocą obwodu koła spółśrodkowego.*

Można uczynić dwa przypuszczenia : 1° powierzchnia zawarta pomiędzy dwoma okręgami jest średnią proporcyonalną; 2° powierzchnia koła nieznanego jest tą średnią.

I. W pierwszym przypadku, jeżeli oznaczymy przez x promień koła szukanego, zrównaniem zagadnienia będzie :

$$\frac{\pi R^2}{\pi(R^2 - x^2)} = \frac{\pi(R^2 - x^2)}{\pi x^2},$$

albo [1] $$(R^2 - x^2)^2 = R^2x^2.$$

Wyciąga się ztąd : $$R^2 - x^2 = Rx,$$

albo $$R^2 - x^2 = - Rx.$$

Pierwsze z tych dwóch zrównań daje :

$$[2] \qquad x = \frac{R(-1 \pm \sqrt{5})}{2};$$

a drugie, różniące się z poprzedniém tylko znakiem x, daje

$$[3] \qquad x = \frac{R(1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Roztrząsanie. Cztery pierwiastki są sobie równe dwójkami i znaków przeciwnych. Lecz pierwiastki odjemne nie mają znaczenia w téj kwestyi geometrycznéj; te zatém pierwiastki powinny być odrzucone. Co się tyczy pierwiastków dodatnych, *piérwszy*

$$x = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

jest największą częścią promienia R *podzielonego w stosunku średnim i skrajnym :* odpowiada on wprost na pytanie *podziału. Drugi*

$$x = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

jest linią któréj średnią proporcyonalną byłoby R *w podziale na średni i skrajny stosunek.* Ta linia, większa jak R, daje rozwiązanie, które nie odpowiada zagadnieniu, takiemu jak było położone. Lecz, gdy uogólnimy wysłowienie w sposób następujący :

Wykreślić koło spółśrodkowe z kołem daném, i takie żeby wieniec był średnią proporcyonalną między powierzchniami dwóch kół.

To nowe wysłowienie nie będzie więcéj wymagało żeby promień nieznany był mniejszym jak R. Jeżeli ten przypuścimy większym, zrównanie nowe,

$$(x^2 - R^2)^2 = R^2x^2,$$

nie będzie się różniło od zrównania [1] ; a, tém samém, drugie rozwiązanie będzie odpowiadało, zarówno jak i pierwsze.

II. Przypuśćmy teraz że koło nieznane, powinno być średniém proporcyonalném między kołem daném i wieńcem : zrównaniem zagadnienia będzie wtedy :

$$\frac{\pi R^2}{\pi x} = \frac{\pi x^2}{\pi(R^2 - x^2)},$$

albo [4] $x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0.$

Możnaby było rozwiązać to zrównanie dwukwadratowe za pomocą sposobów znanych. Lecz prościéj jest położyć :

$$[5] \qquad x^2 = Ry;$$

zrównanie staje się, podzieliwszy je uprzednio przez R^2 :

$$[6] \qquad y^2 + Ry - R^2 = 0;$$

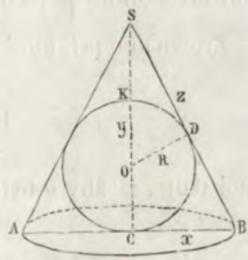
jest ono tosamém z pierwszém ze zrównań pierwszego przypadku. Tak więc wartość odjemna na y powinna być odrzuconą, a *wartość dodatna jest największą częścią promienia podzielonego w średnim i skrajnym stosunku. Co się tyczy promienia* x *koła nieznanego, jest on, podług zrównania* [5], *średnim proporcyonalnym między promieniem koła danego i średnią* y.

Można łatwo wykreślić trzy rozwiązania tego zagadnienia.

OSTROKRĄG OPISANY NA SFERZE.

323. *Opisać na danéj sferze ostrokrąg prosty któregoby cała powierzchnia równała się powierzchni koła danego.*

Fig. 8.



Jeśli przez oś ostrokręgu poprowadzimy płaszczyznę, przecięciem będzie trójkąt równoramienny SAB i wielkie koło OD w niego wpisane. Przeto powierzchnia sfery i szukana powierzchnia ostrokręgu są figurami obrotowemi koło osi SC.

Owoż, nazywając R promień sfery, a promień koła danego, x promień CB podstawy stożka, y jego wysokość SC, z jego bok albo apotemę SB, mamy $\overline{SD}^2 = SC . SK = y(y - 2R)$; więc, wedle warunków zagadnienia, powinno być

$$(1) \qquad x(x + z) = a^2.$$

Wreszcie, dwa trójkąty podobne BSC, DSO dają:

(2) $$\frac{x}{R} = \frac{z}{y - R},$$

(3) $$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y(y - 2R)}}.$$

Przenosząc w (1) wartość na z wyciągniętą ze związku (2), otrzymemy wyrażenie

$$\frac{x^2 y}{R} = a^2,$$

które, z powodu (3), staje się

(4) $$\frac{Ry^2}{y - 2R} = a^2 \quad \text{albo} \quad y\left(\frac{a^2}{R} - y\right) = 2a^2.$$

Ostatnie wyrażenie pokazuje że summa dwóch czynników niewiadomych: y i $\frac{a^2}{R} - y$, jest $\frac{a^2}{R}$, a ich wieloczyn równa się $2a^2$. Więc, aby otrzymać wysokość y stożka, trzeba wystawić prostokąt równowarty kwadratowi $(a\sqrt{2})^2$ i w którymby dwa boki przyległe czyniły summę $\frac{a^2}{R}$; co już wiadomém nam było.

Zrównanie (4), które może się napisać pod kształtem

$$Ry^2 - a^2 y + 2Ra^2 = 0,$$

pokazuje, że aby y było rzeczywistém, musi być

$$a^4 - 8R^2 a^2 > 0,$$

albo $$a^2 > 8R^2.$$

Najmniejszość powierzchni stożka opisanego jest więc równą $8R^2$, znajduje się wtedy

$$y = \frac{a^2}{2R} = 4R.$$

$$x = R\sqrt{2},$$

$$z = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{8R^2 - 2R^2}{R\sqrt{2}} = \frac{6R}{\sqrt{2}} = \frac{6R\sqrt{2}}{2} = 3R\sqrt{2};$$

a więc $z = 3x$.

Ostrokrąg prosty opisany na sferze, którego powierzchnia jest najmniejszością, posiada własności następujące:

1° Jego wysokość jest podwójną średnicą sfery;

2° Jego apotema jest potrójnym promieniem jego podstawy;

3° Jego powierzchnia jest podwójną powierzchnią sfery, a, następnie, jego objętość jest także podwójną objętością sfery.

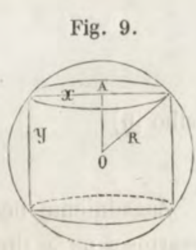
WALEC WPISANY W SFERĘ.

324. *Wpisać w sferę, promienia* R, *walec prosty któregoby powierzchnia cała, licząc w to dwie podstawy, była równowartą powierzchni koła, promienia danego* m.

Jeżeli oznaczymy przez x promień podstawy a y wysokość walca, to geometrya dostarczy bezpośrednio zrównań następujących:

[1] $$x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2,$$

Fig. 9.



$$2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi m^2,$$

albo, znosząc czynnik π,

[2] $$2x^2 + 2xy = m^2.$$

Wyciąga się z [2]: $$y = \frac{m^2 - 2x^2}{2x};$$

a, podstawiając tę wartość w [1], znajduje się

$$x + \frac{(m^2 - 2x^2)^2}{16x^2} = R^2;$$

znosząc mianowniki, i uproszczając wyrazy podobne, otrzymuje się zrównanie dwukwadratowe :

$$[3] \qquad 20x^4 - (4m^2 + 16R^2)x^2 + m^4 = 0;$$

zkąd się wyciąga :

$$[4] \qquad x^2 = \frac{(m^2 + 4R^2) \pm \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10},$$

i, następnie,

$$[5] \qquad x = \sqrt{\frac{m^2 + 4R^2 \pm \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10}}.$$

Roztrząsanie. Wpatrując się w zrównanie dwukwadratowe [3], spostrzegamy że, kiedy wartości na x^2 są rzeczywistémi, to te wartości są obiedwie dodatnémi, a przeto każda z nich odrębnie wzięta powinna dostarczyć jedną wartość rzeczywistą i dodatną na x. Lecz nie dosyć na tém że x jest rzeczywistém i dodatném, potrzeba także aby y niém było ; powinno być przeto :

$$m^2 - 2x^2 > 0,$$

albo [6] $$x < \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Zagadnienie będzie więc miało tyle rozwiązań, ile znajdzie się wartości na x dostarczonych przez formułę [5], i zadosyć czyniących temu warunkowi [6].

Aby zagadnienie było możebném, potrzeba naprzód żeby wartości na x były rzeczywistémi ; wystarczy, na to, jak już to uprzednio powiedzieliśmy, żeby wartości na x były niémi; co wymaga tylko nierówności:

$$(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4 > 0.$$

Można jeszcze uważać piérwszy członek jako różnicę dwóch kwadratów, i napisać:

$$(m^2 + 4R^2 - m^2\sqrt{5})\,(m^2 + 4R^2 + m^2\sqrt{5}) > 0.$$

Otóż drugi czynnik jest dodatnym; potrzeba więc żeby było:

$$m^2 + 4R^2 - m^2\sqrt{5} > 0;$$

zkąd [7] $\qquad m^2 < \dfrac{4R^2}{\sqrt{5}-1}$, albo $m^2 < R^2(\sqrt{5}+1)$.

Gdy ten warunek będzie spełnionym, to najmniejsza wartość na x odpowiada zawsze pytaniu; gdyż ona zadosyć uczyni, nadto, nierówności [6], to jest będzie:

$$\frac{m^2 + 4R^2 - \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10} < \frac{m^2}{2};$$

albo, znosząc mianowniki, i przenosząc:

$$4(R^2 - m^2) < \sqrt{(4R^2 + m^2)^2 - 5m^2}.$$

I, w istocie, jeżeli m jest większém jak R, ta nierówność jest oczywistą. Jeśli, przeciwnie, m jest mniejszém jak R, obie strony będą dodatnemi, wolno więc podnieść je do kwadratu (200), i nierówność stanie się:

$$16(R^4 - 2R^2m^2 + m^4) < 16R^4 + 8R^2m^2 + m^4 - 5m^4,$$

albo $\qquad 20m^4 - 40R^2m^2 < 0;$

zkąd $\qquad m^2 < 2R^2;$

co jest prawdziwém. *Zagadnienie ma więc zawsze jedno rozwiązanie, skoro warunek* [7] *jest sprawdzonym.*

Aby największa wartość na x odpowiadała także, potrzeba żeby było :

$$\frac{m^2+4R^2+\sqrt{(m^2+4R^2)^2-5m^4}}{10}<\frac{m^2}{2};$$

albo, znosząc mianowniki i uproszczając :

$$\sqrt{(m^2+4R^2)^2-5m^4}<4(m^2-R^2).$$

Otóż, jeżeli m jest mniejszém jak R, ta nierówność jest niepodobną, a zatém, drugie rozwiązanie nie istnieje. Jeżeli m jest większém jak R, obie strony nierówności będą dodatnémi, można więc podnieść je do kwadratu ; będzie tym sposobem :

$$(m^2+4R^2)^2-5m^4<16(m^2-R^2)^2;$$

zkąd

$$m^2>2R^2.$$

Potrzeba więc, dla otrzymania dwóch rozwiązań, żeby m^2 *było zawartém między* $2R^2$ i $R^2(\sqrt{5}+1)$.

325. Uwaga. Można sobie zdać rachunek, sposobem następującym, z wypadków jakie otrzymaliśmy.

Zrównanie [2], kiedy się w niém zastąpi y przez jego wartość dodatną wyciągniętą z [1], daje, za wyrażenie powierzchni całéj walca wpisanego w sferę :

$$\pi m^2=2\pi x\left(x+2\sqrt{R^2-x^2}\right).$$

Jeżeli roztrząśniemy wartości kolejne, przez które przechodzi ta powierzchnia, kiedy promień x podstawy powiększa się od 0 aż do promienia R sfery, widzimy że ona jest zerem dla $x=0$; potém, że taż powierzchnia wzrasta razem z x, aż do pewnéj granicy jaką rachunek daje poznać, i która, podług tego co poprzedza, jest $\pi R^2\left(\sqrt{5}+1\right)$; wartość na x, która dostarcza tę największość, jest, wreszcie :

$$x = \frac{R}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}.$$

Daléj, kiedy x powiększa się aż do R, powierzchnia zmniejsza się aż do wartości $2\pi R^2$, która odpowiada przypadkowi w którym, wysokość jest zerem, a walec sprowadza się do jego obu podstaw któremi są dwa wielkie koła. Otóż, rzecz oczywista że powierzchnia walca, powiększając się od zera aż do największości, dla zmniejszania się potém od największości aż do $2\pi R^2$, przejdzie dwa razy przez wszystkie wartości zawarte między największością i $2\pi R^2$, a raz tylko przez wartości które są mniejszemi jak $2\pi R^2$.

ZAGADNIENIA ODNOSZĄCE SIĘ DO TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH.

326. *Wyrachować boki kąta prostego w trójkącie prostokątnym, znając przeciwprostokątną* a, *i wysokość* h *spuszczoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.*

Niech będą x i y dwa boki nieznane; twierdzenie *Pitagoresa* daje zrównanie :

$$[1] \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

Powierzchnia trójkąta ma za wyrażenia $\frac{xy}{2}$ i $\frac{ah}{2}$; więc mamy :

$$[2] \qquad xy = ah.$$

Podwajając dwie strony zrównania [2], i dodając je potém do zrównania [1], otrzymamy :

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2ah,$$

albo $$(x+y)^2 = a^2 + 2ah;$$

zkąd wypada, wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu stron (a wolno jest to uczynić gdyż te strony są dodatnémi) :

$$[3] \qquad x + y = \sqrt{a^2 + 2ah}.$$

Jeżeli, zamiast dodawania dwu zrównań stronami, odciągniemy drugie od pierwszego, otrzymamy :

$$(x-y)^2 = a^2 - 2ah;$$

a, ponieważ można przypuścić że x jest większym z dwóch boków szukanych, otrzymamy, wyciągając pierwiastki :

[4] $$x - y = \sqrt{a^2 - 2ah}.$$

Znamy więc summę [3] i różnicę [4] niewiadomych, zkąd łatwo się wyciąga :

[5] $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah} + \sqrt{a^2-2ah}\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah} - \sqrt{a^2-2ah}\right). \end{aligned}\right.$$

Roztrząsanie. Aby zagadnienie było możebném, koniecznym i dostatecznym jest warunkiem, żeby wartości otrzymane na x i na y były rzeczywistémi, to jest żeby było :

[6] $$a > 2h, \quad \text{albo} \quad h < \frac{a}{2}.$$

327. Uwaga. Te nierówności [6] nie wyłączają bynajmniéj równości granic,

$$a = 2h, \quad h = \frac{a}{2};$$

gdyż wartości na x i na y pozostają rzeczywistémi i dodatnémi, w tém przypuszczeniu. Dostarczą więc one rozwiązania dwóch pytań następujących :

1° *Pomiędzy wszystkiémi trójkątami prostokątnémi, wysokości danéj* h, *jaki jest trójkąt którego przeciwprostokątna jest najmniejszą?*

Tym trójkątem jest właśnie trójkąt którego przeciwprostokątna równa się $2h$. Jest on równoramiennym; gdyż, w tym przypadku,

$$x = y = h\sqrt{2}.$$

2° *Pomiędzy wszystkiemi trójkątami prostokątnémi, téjże saméj przeciwprostokątnéj* a, *jaki jest trójkąt którego wysokość jest największą?*

Tym trójkątem jest właśnie trójkąt którego wysokość równa się $\frac{a}{2}$. Jest on równoramiennym; gdyż, w tym przypadku,

$$x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

328. *Wyznaczyć boki trójkąta prostokątnego, znając jego obwód* 2p *i powierzchnią* m².

Niech będą x, y, z boki trójkąta; jeżeli z jest przeciwprostokątną, to mamy, wedle wysłowienia, i posługując się podaniami dobrze w geometryi znanémi :

[1] $$z^2 = x^2 + y^2,$$

[2] $$x + y + z = 2p,$$

[3] $$2m^2 = xy.$$

Mnożąc przez 2, obie strony trzeciego zrównania, i dodając je potém do pierwszego, otrzymamy :

$$z^2 + 4m^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

albo [4] $$z^2 + 4m^2 = (x + y)^2.$$

Drugie zrównanie daje wreszcie :

$$x + y = 2p - z$$

zkąd [5] $$(x + y)^2 = (2p - z)^2.$$

Równając dwie wartości na $(x + y)^2$ dostarczone przez zrównania [4] i [5], otrzymamy :

$$(2p - z)^2 = z^2 + 4m^2,$$

albo, wykonywając podniesienie do kwadratu wskazane w pierwszym członku, późniéj znosząc wyraz z^2 który jest spólnym, i dzieląc obie strony przez 4, będziemy mieli :

$$p^2 - pz = m^2;$$

zkąd się wyciągnie :

$$[6] \qquad z = \frac{p^2 - m^2}{p}.$$

Daléj, ponieważ znamy z, zrównania [2] i [3] dadzą poznać $(x+y)$ i xy; gdyż one dają :

$$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + m^2}{p},$$

$$xy = 2m^2;$$

x i y są, zatém, pierwiastkami zrównania,

$$u^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} u + 2m^2 = 0.$$

Mamy więc :

$$[7] \qquad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{p^2 + m^2}{2p} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m^2)^2}{4p^2} - 2m^2}.$$

Rotzrząsanie. Ponieważ wartość [6] na x powinna być dodatną, jednym z warunków możebności zagadnienia jest :

$$p > m.$$

Lecz ten warunek nie jest dostatecznym; potrzeba, nadto, żeby wartości na x i na y były rzeczywistémi i dadatnémi.

Otóż widzimy, wpatrując się w zrównanie które je dostarczyło, że te pierwiastki będą dodatnémi, byleby tylko były rzeczywistémi. Potrzeba więc żeby te pierwiastki były rzeczywistémi, to jest żeby było :

$$\frac{(p^2 + m^2)^2}{4p^2} - 2m^2 > 0;$$

albo, co na jedno wychodzi, ponieważ mianownik $4p^2$ jest dodatnym,

$$(p^2+m^2)^2-8p^2m^2>0.$$

Otóż pierwszy członek może być uważanym jako różnica dwóch kwadratów. Ta równość jest więc równoważną z następującą :

$$\left(p^2+m^2+2pm\sqrt{2}\right)\left(p^2+m^2-2pm\sqrt{2}\right)>0.$$

Lecz pierwszy czynnik jest dodatnym : potrzeba więc żeby było :

[8] $$p^2+m^2-2pm\sqrt{2}>0.$$

Taki jest warunek któremu p i m powinny zadosyć uczynić. Można ztąd wyprowadzić granice, między którémi może zmieniać się p dla pewnéj wartości danéj na m, albo m dla pewnéj wartości danéj na p. Otrzymamy te dwa rezultata jednocześnie położywszy $\frac{p}{m}=r$. Jeżeli, w rzeczy saméj, podzielimy przez m^2 obie strony nierówności [8], to staje się ona :

$$r^2-2r\sqrt{2}+1>0.$$

Otóż jéj piérwszy wyraz jest dodatnym : wnosimy ztąd że, aby ta nierówność mogła mieć miejsce, r powinno być większém jak największy pierwiastek zrównania : $r^2-2r\sqrt{2}+1=0$, albo mniejszém jak najmniejszy ; to jest większém jak $(\sqrt{2}+1)$, albo mniejszém jak $(\sqrt{2}-1)$. Lecz p jest, jak to już widzieliśmy, większém jak m; przeto stosunek $\frac{p}{m}$ nie może być mniejszym jak $(\sqrt{2}-1)$; *potrzeba więc żeby ten stosunek był większym jak* $(\sqrt{2}+1)$. Wreszcie, ten stosunek pociąga za sobą pierwszy; ten więc jest jedynym warunkiem możebności zagadnienia.

329. Uwaga. Trójkąt prostokątny mający $2p$ za obwód a m^2 za

powierzchnią nie jest możebnym jak tylko jeśli będzie :

$$\frac{p}{m} > \sqrt{2} + 1 ;$$

z tego wynika :

$$m < \frac{p}{\sqrt{2} + 1},$$

albo, pomnożywszy oba wyrazy ułamka przez $\sqrt{2} - 1$,

$$m < p(\sqrt{2} - 1) ;$$

a
$$p > m(\sqrt{2} + 1).$$

Te nierówności nie wyłączają wcale równości granic,

$$m = p(\sqrt{2} - 1),$$

$$p = m(\sqrt{2} + 1) ;$$

gdyż, w tém przypuszczeniu, wartości nieznanych pozostają rzeczywistémi i dodatnémi. Dostarczą więc one rozwiązania kwestyj następujących :

1° *Pomiędzy wszystkiémi trójkątami prostokątnémi, równoobwodowémi* 2p, *jaki jest trójkąt którego powierzchnia jest największą?*

Tym trójkątem powinien być właśnie trójkąt którego powierzchnią jest : $m^2 = p^2(\sqrt{2} - 1)^2$. Jest on równoramiennym ; gdyż boki kąta prostego są dane przez formułę : $x = y = p(2 - \sqrt{2})$. Przeciwprostokątna $z = 2p(\sqrt{2} - 1)$.

2° *Pomiędzy trójkątami prostokątnémi, tejże samej powierzchni, jaki jest trójkąt którego obwód jest najmniejszością?*

Tym trójkątem musi być trójkąt którego obwodem jest : $2p = 2m(\sqrt{2} + 1)$. Jest on równoramiennym ; gdyż boki kąta prostego są dane przez formułę :

$$y = x = m\sqrt{2}. \text{ Przeciwprostokątna } \quad z = 2m.$$

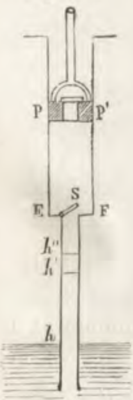
ZAGADNIENIE O POMPACH.

330. *W pompie ssącej zaczyna się poruszać tłok; znaleźć wysokość do któréj się podniesie woda w rurze ssącéj po pierwszém, drugiém,... poruszeniach tłoka : i wiele potrzeba poruszeń tych, ażeby woda podniosła się aż do klapy ssącéj ?*

Aby rozwiązać to zagadnienie, potrzeba przypomnięć sobie następującą zasadę fizyki :

Prawo Mariotte'a. *Objętość gazu jest w stosunku odwrotnym doznawanego ciśnienia;* i tak, na przykład, biorąc pewną objętość powietrza pod ciśnieniem daném, ta objętość staje się dwa razy, trzy razy albo dziesięć razy mniejszą, jeżeli to ciśnienie staje sięsamo przez się dwa razy, trzy razy albo dziesięć razy większém. Takie jest wysłowienie prawa ściśliwości powietrza i gazów, znanego w nauce *pod nazwiskiem prawa Mariotte'a*, od nazwiska fizyka który piérwszy dał je poznać, w piérwszéj połowie XVII wieku (około 1650).

Fig. 10.



Niech będą :

B przecięcie ciała pompy;

L wysokość EP do jakiéj się podnosi tłok;

ω przecięcie rury ssącéj;

l długość hs téj rury;

H wysokość kolumny wody tworząca równowagę z ciśnieniem atmosferyczném;

x wysokość hh', do której woda dosięga po pewnéj liczbie poruszeń tłoka;

x_1 wysokość hh'' do któréj nowe poruszenie tłoka t wysokość podnosi.

Kiedy woda zatrzymała się w h', tłok był w P; klapa S zamknęła się pod swym własnym ciężarem, a tłok spuszczono aż do E. Wtedy powietrze które ma za objętość

$$(l - x)\omega,$$

posiada sprężystość proporcyonalną do

$$\mathrm{H} - x,$$

ponieważ to powietrze tworzy równowagę z ciśnieniem atmosferyczném zmniejszoném kolumną wody hh'.

Kiedy tłok podnosi się do P, woda dosięga do h'', i massa powietrza uważanego zajmuje objętość

$$BL + \omega(l - x_1);$$

jego elastyczność jest wreszcie proporcyonalną do

$$H - x_1.$$

Prawo Mariotte'a daje więc

$$(H - x)(l - x)\omega = (H - x_1)[BL + \omega(l - x_1)]$$

albo

$$x_1^2 - \left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right)x_1 + \frac{B}{\omega}HL + (H + l)x - x^2 = 0$$

a wartość na

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right)$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(H - l - \frac{B}{\omega}L\right)^2 + 4(H - x)(l - x)}.$$

Roztrząsanie. Oba pierwiastki są rzeczywistemi, gdyż ponieważ H jest wyższém od x, wieloczyn

$$(H - x)(l - x)$$

jest dodatnym; pierwiastek odpowiadający znakowi $+$ radykala jest większym jak

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right) + \frac{1}{2}\left(H - l - \frac{B}{\omega}L\right),$$

to jest większym jak H. Ten więc pierwiastek nie odpowiada zadaniu, ponieważ woda nie może oczywiście podnieść się do wysokości wyższéj nad H; radykal powinien mieć znak —.

To przypuściwszy, zrównanie

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{B}{\omega}L - l - H\right)^2 + 4(H-x)(l-x)},$$

dozwoli wyrachować wysokości do których kolejne poruszenia tłoka podnoszą wodę.

Do znalezienia wysokości x_1 odpowiadającéj pierwszemu poruszeniu tłoka, robi się $x = 0$; potem, zastępując x przez znalezioną wysokość x_1, otrzymamy wysokość x_2 odpowiadającą dwom pierwszym poruszeniom tłoka, i t. d.

Zatrzymamy się skoro przyjdziemy do wysokości przewyższającéj l.

ZAGADNIENIE ODNOSZĄCE SIĘ DO WYMIARU GŁĘBOKOŚCI STUDNI.

331. *Wyrachować głębokość studni, wiedząc że upłynęło* t *sekund od chwili kiedy puszczono kamień, aż do chwili kiedy plaśnienie tegoż kamienia o powierzchnią wody w studni, doszło do ucha robiącego doświadczenie badacza.* (Przy tym wymiarze zaniedbuje się opór powietrza.)

Aby rozwiązać to zagadnienie, potrzeba sobie przypomnieć dwie zasady często używane w badaniach fizyko-matematycznych:

1° Przestrzeń przebieżona przez ciało ciężkie jest proporcyonalną do kwadratu z czasu θ upłynionego od początku spadania; a, jeżeli oznaczymy przez g spółczynnik stały, równy $9^m,80896$, to ta przestrzeń przedstawi się za pomocą wyrażenia $\frac{g\theta^2}{2}$.

2° Dźwięk z prędkością jednostajną przebiega 333 metrów na sekundę. W rachunku następującym, przedstawimy jego prędkość przez v; tak że, w czasie θ, dźwięk przebiega przestrzeń $v\theta$.

Niech będzie x głębokość studni obrachowana w metrach.

Nazywając t_1 liczbę sekund które kamień łoży na zstąpienie do wnętrza studni, mamy :

$$[1] \qquad x = \frac{gt_1^2}{2}\,; \quad \text{zkąd} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}\,.$$

Nazywając t_2 czas który dźwięk kładzie na przyjście do ucha badacza, mamy :

$$[2] \qquad x = vt_2; \quad \text{zkąd} \quad t_2 = \frac{x}{v}\,.$$

Otóż $t_1 + t_2 = t$, wedle wysłowienia; więc zrównanie zagadnienia jest :

$$[3] \qquad \frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t.$$

Na rozwiązanie tego zrównania, zawierającego w sobie radykal, kładzie się je pod kształtem :

$$[4] \qquad t - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}\,;$$

podnosząc dwie strony do kwadratu, otrzymamy :

$$[5] \qquad t^2 - 2\,\frac{tx}{v} + \frac{x^2}{v^2} = \frac{2x}{g}\,;$$

albo, przenosząc wszystkie wyrazy w piérwszy człone k, i porządkując :

$$[6] \qquad \frac{x^2}{v^2} - 2x\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right) + t^2 = 0.$$

Wyciąga się ztąd :

$$x = \frac{\dfrac{t}{v} + \dfrac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{g}\right)^2 - \dfrac{t^2}{v^2}}}{\dfrac{1}{v^2}}\,.$$

Roztrząsanie. Oba pierwiastki są rzeczywistémi; gdyż ilość położona pod radykalem jest oczywiście dodatną.

Nadto, łatwo jest spostrzedz, że te pierwiastki są obydwa dodatnémi : gdyż, podług zrównania [6], ich wieloczyn t^2v^2 jest dodatnym, jako też ich summa $\left(\frac{2t}{v}+\frac{2}{g}\right)v^2$. Zagadnienie nie może mieć, wszelako, jak tylko jedno rozwiązanie; gdyż dwie studnie głębokości różnych nie mogą odpowiadać tejże saméj wartości na t. Dla wytłumaczenia téj osobliwości, i wykazania który z dwóch pierwiastków istotnie odpowiada pytaniu, zauważmy że podnosząc do kwadratu obie strony zrównania [4], tworzymy nowe zrównanie, które, rzeczywiście musi się sprawdzić wraz ze zrównaniem daném, lecz które może się także sprawdzić lubo zrównanie dane sprawdzić się nie da. Dwie strony miałyby, w rzeczy saméj, tenże sam kwadrat, jeśliby te strony były równe i ze znakami przeciwnymi. Zrównanie [5] jest więc rzeczywiście równoważném (125) z dwoma następnémi :

$$t-\frac{x}{v}=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

$$t-\frac{x}{v}=-\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

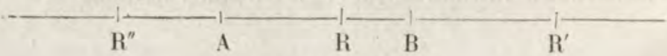
Piérwsze z tych zrównań jest jedyném które odpowiada zagadnieniu danemu; i jego rozwiązanie jest rozwiązaniem zagadnienia. Otóż to rozwiązanie jest mniejszém jak vt, gdyż, $t-\frac{x}{v}$ będąc dodatném, toż samo się rozumie o $vt-x$; przeciwnie, rozwiązanie drugiego zrównania jest większém jak vt, gdyż $t-\frac{x}{v}$ jest odjemném; jest ono, zatém, największym pierwiastkiem zrównania [5]: powinno więc być odrzuconém jako obce rozwiązanie. Tak więc rozwiązaniem szukaném jest :

$$x=\frac{\frac{t}{v}+\frac{1}{g}-\sqrt{\left(\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\right)^2-\frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Uwaga. Powrócimy jeszcze raz do tego zagadnienia w ostatnim rozdziale piérwszego tomu.

ZAGADNIENIE O ŚWIETLE CLAIRAUT'A.

332. I. Rozwiązanie Cirodde'a. *Znaleźć, na linii prostéj łączącéj dwa punkta świecące* A *i* B, *punkt R w którymby umieszczony ekram, odbierał od obu punktów świécących równe ilości światła.* Przypuszcza się tu naprzód upowszechnioną zasadę fizyki : iż *natężenie światła jest w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości;* to jest że ekram, służący robiącemu doświadczenie za zasłonę od światła, położony w odległościach 2, 3, 4,..... razy większych lub mniejszych od punktu świécącego jest 4, 9, 16,..... razy mniéj lub więcéj oświeconym przez tenże punkt świécący.



Oznaczmy przez d odległość punktów stałych A i B, przez a i b ilości światła które ekram odbiéra względnie od tych punktów świécących, gdy ten ekram jest kolejno położony o jedność odległości od każdego z nich, i nakoniec nazwijmy x odległość od punktu szukanego R do punktu A. Obrachujemy ilości światła które ekram, położony w R, odbierze od A i od B, a, równając te ilości, zagadnienie ułożymy w zrównanie. Otóż, ponieważ punkt A rzuca na ekram w jedności odległości, ilość a światła, znajdziemy ilość światła y rzuconą przez punkt A na tenże sam ekram położony w odległości x, przez proporcyą

$$a : y = x^2 : 1, \quad \text{zkąd} \quad y = \frac{a}{x^2}.$$

Zobaczymy tak samo że ponieważ BR jest równém $d - x$, ilość z światła którą nasz ekram, położony w R, odbierze od B będzie wyznaczoną przez proporcyą

$$b : z = (d - x)^2 : 1, \quad \text{zkąd} \quad z = \frac{b}{(d - x)^2};$$

więc zrównanie zagadnienia jest

[1] $$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Idzie więc o rozwiązanie tego zrównania. Lecz, zamiast przywiedzenia go do formy zwyczajnéj, uważmy że można zniżyć je bezpośrednio do piérwszego stopnia, wyciągając pierwiastek kwadratowy z jego obu członków: otrzymamy tym sposobem

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}$$

zkąd się łatwo wyciągnie

[2] $$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}.$$

Będziemy teraz roztrząsali tę formułę, i rozróżnimy, w tym celu, trzy przypadki główne, to jest: $a>b$, $a=b$, $a<b$.

Pierwszy przypadek. $a>b$. Piérwsza wartość na x wymaga aby ekram znajdował się między punktami A i B, i bliżéj drugiego jak piérwszego; gdyż jest rzeczą oczywistą że ilość $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jest mniéjszą od *jedności* a większą od $\frac{1}{2}$. W rzeczy saméj, mianownik jest większym jak licznik, lecz jest mniejszym jak tenże licznik wzięty dwa razy, ponieważ $a>b$; więc wartość na x jest $<d$, i $>\frac{1}{2}d$. To właśnie powinno mieć miejsce, gdyż aby ekram, położony między A i B, był równo oświecony przez te dwa światła, potrzeba oczywiście aby się znajdował bliżéj słabszego a daléj od bardziéj błyszczącego.

Co się tyczy drugiéj wartości na x, jest ona większą od d, gdyż $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>1$; tak więc znajduje się drugie położenie ekramu na przedłużeniu AB, w pewnym punkcie B′.

Drugi przypadek. $a = b$. Piérwsza wartość na x przywodzi się do $\frac{d}{2}$, i jest widoczném, że w obecném przypuszczeniu, ekram który będzie położonym w środku przedziału AB, musi być równo oświeconym przez dwa światła.

Druga wartość na x staje się nieskończoną dla $a = b$. Lecz jeżeli, zamiast wziąć nagle $a = b$, przypuścimy że natężenie punktu świecącego B, naprzód mniejsze od a, powiększa się coraz bardziéj, druga wartość na x wzrastać będzie, i widzimy że dając dla b wartość niższą od a tak mało jak tylko sami zechcemy, to wartość na x będzie mogła stać się większą jak wszelka ilość dana, tak że gdy przyjdzie $b = a$, nie będziemy mieli więcéj położenia możebnego do oznaczenia dla ekramu na przedłużeniu AB; i w rzeczy saméj, we wszystkich tych położeniach, będzie on zawsze bliżéj od B jak od A, a przeto będzie nierówno oświeconym przez te dwa światła.

Gdyby jednocześnie z przypuszczeniem $a = b$, było także $d = 0$, piérwsza wartość na x sprowadziłaby się do zera, a druga do $\frac{0}{0}$; lecz, ponieważ nie ma wtedy czynnika spólnego obu wyrazóm ułamku $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, potrzeba, dla wytłumaczenia tego ostatniego wypadku, zrobić przypuszczenia $a = b$, i $d = 0$ w zrównaniu zagadnienia. Otrzymamy tym sposobem że to zrównanie przywodzi się do tosamości

$$\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x^2},$$

i że następnie $\frac{0}{0}$ jest tu wyraźnym symbolem nieoznaczoności; z tego więc iż x może przyjmować wszelkie wartości możebne, powinniśmy wnosić że, w jakiemkolwiek położeniu umieścimy ekram, będzie on zawsze równo oświecony przez dwa światła.

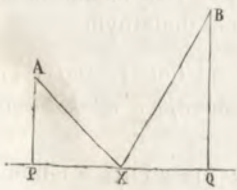
Trzeci przypadek. $a < b$. Tu piérwsza wartość na x jest jeszcze mniejszą jak d i jest ona nawęt $< \frac{d}{2}$, jak to prawdziwie być powinno. Co się tyczy drugiéj, jest ona odjemną, co wskazuje że odległość ekramu od punktu A powinna być odniesioną, nie już na prawo punktu A w kierunku AB, lecz na lewo tego punktu i w kierunku przeciwnym. Ta wartość odjemna na x pochodzi z fałszywego przypuszczenia zrobionego co do położenia punktu R′, przy wyrażeniu zagadnienia za pomocą zrównania; gdyż otrzymalibyśmy toż samo zrównanie [1], biorąc AR′ za nieznaną. Przypuśćmy w rzeczy saméj że ekram powinien być umieszczony w R″, i oznaczmy AR″ przez x; ilości światła które ten ekram odbierze od punktów A i B będą względnie $\frac{a}{x^2}$ i $\frac{b}{(d+x)^2}$, tak że zrównanie zagadnienia będzie wówczas

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{(d+x)^2},$$

i to jest właśnie czém się staje zrównanie [1], gdy w niém zamienimy x na $-x$.

333. II. Rozwiązanie Bertrand'a, obecnie żyjącego geometry. *Znaleźć, na linii* PQ, *punkt* X *równo oświecony przez dwa światła* A *i* B, *których natężeniami są* i *i* i′. *Daje się* AP = a, BQ = b, *i* PQ = d; AP *i* PQ *są prostopadłémi spuszczonémi z punktów* A *i* B *na linią* PQ.

Fig. 11.



Do rozwiązania tego zagadnienia, należy sobie przypomnieć że *natężenie światła jest w stosunku odwrotnym kwadratu z odległości punktu oświeconego od punktu świecącego*; tak że światło, mocy i, oświéca, na odległość x, z natężeniem $\frac{1}{x^2}$.

Powinno więc być :

$$\frac{i}{\overline{AX}^2} = \frac{i'}{\overline{BX}^2};$$

albo, oznaczając PX przez x, a, zatém, QX przez $(d - x)$:

$$[1] \qquad \frac{i}{a^2 + x^2} = \frac{i'}{b^2 + (d-x)^2};$$

albo, znosząc mianowniki :

$$[2] \qquad [b^2 + (d - x)^2]i = (a^2 + x^2)i'.$$

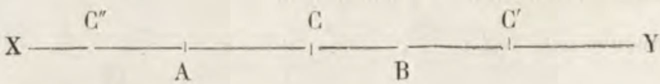
Roztrząsanie. Nie wchodząc w szczegóły rozwiązania tego zrównania drugiego stopnia, i warunki możebności zagadnienia, starajmy się wytłumaczyć rozwiązania odjemne które to zrównanie mieć może. Jeżeli oznaczymy przez $(-\alpha)$ rozwiązanie odjemne, to rozwiązanie to powinno sprawdzić zrównanie [1]; powinno więc być:

$$[3] \qquad \frac{i}{a^2 + \alpha^2} = \frac{i'}{b^2 + (d + \alpha)^2}.$$

Jest to właśnie zrównanie które wypadałoby przyjąć gdyby, szukając punktu X po lewéj stronie P, została oznaczoną przez α jego odległość nieznana od punktu P. Rozwiązanie odjemne dostarczy więc rozwiązania zagadnienia danego, byleby mierzono długość które to rozwiązanie daje na lewo punktu P, to jest w kierunku przeciwnym temu który odpowiada rozwiązaniom dodatnym.

334. III. Rozwiązanie P. Sonnet'a. *Znaleźć na linii prostéj* XY, *łączącéj dwa punkta świecące* A *i* B, *punkt odbierający od każdego z nich tęż samą ilość światła.*

(Przypuszcza się że jest znaną zasada fizyki następująca : ilość światła odbieranego jest w stosunku odwrotnym kwadratu z odległości od punktu świécącego.)



Weźmy za nieznaną odległość AC punktu szukanego od jednego z dwóch punktów świecących, i oznaczmy ją przez x; niech będzie d odległość AB dwóch świateł. Przedstawmy przez α^2 ilość światła którąby odbierał pewien punkt położony na 1 metr odległości od punktu A, a przez β^2 odpowiednią ilość światła którą odbierałby punkt położony na 1 metr odległości od punktu B.

Jeżeli l oznacza na chwilę ilość światła którą punkt szukany C odbiera od punktu A, powinno być, wedle zasady przytoczonéj :

$$l : \alpha^2 = 1^m : x^2 \quad \text{zkąd} \quad l = \frac{\alpha^2}{x^2}.$$

Rozumując tak samo, znajdziemy że ilość światła którą punkt szukany odbiera od punktu B jest

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2}.$$

Te dwie ilości światła rzucone na punkt szukany C powinny być równe wedle wysłowienia, musi więc być zrównanie :

$$[1] \qquad \frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\beta^2}{(d-x)^2}.$$

Możnaby było traktować je sposobem zwyczajnym, i radzimy to ćwiczenie dla uczni, lecz prościéj jest zauważyć że dwie strony są kwadratami zupełnemi, można więc wyciągnąć z nich pierwiastek, co daje dwa zrównania pierwszego stopnia

$$[2] \qquad \frac{\alpha}{x} = \pm \frac{\beta}{d-x}.$$

Biorąc znak $+$ przed drugim członkiem, otrzymamy, po zniesieniu mianowników,

$$\alpha d - \alpha x = \beta x, \quad \text{zkąd} \quad x' = d\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Biorąc znak $-$ przed drugim członkiem, otrzymamy, tymże samym sposobem,

$$\alpha d - \alpha x = -\beta x, \quad \text{zkąd} \quad x'' = d\frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

wartości rzeczywiste które należy roztrząsać, Roztrząsanie. 1° Przypuśćmy naprzód pierwsze światło większéj mocy jak drugie, albo $\alpha > \beta$. W tym przypadku wartości x' i x'' są obiedwie dodatnémi.

Weźmy naprzód pod uwagę wartość x'. Ponieważ $\alpha + \beta$ jest większém jak α, wyrażenie $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ jest mniejszém jak 1; wartość x' jest więc mniejszą jak d, i odpowiada punktowi zawartemu między punktami świecącemi A i B. Co większa, ponieważ $\alpha + \beta$ jest mniejszém jak $\alpha + \alpha$ albo 2α, wyrażenie $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ jest mniejszém jak $\frac{\alpha}{2\alpha}$ albo jak $\frac{1}{2}$; tak więc x' jest mniejszém jak połowa d. Punkt odpowiedni C jest więc bliżéj punktu B jak punktu A.

Weźmy dalej pod uwagę wartość x''. Ponieważ $\alpha - \beta$ jest mniejszém jak α, wyrażenie $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ jest większém jak 1; tak więc x'' jest większém jak d, i odpowiada punktowi C', położonemu po tamtéj stronie punktu świecącego B który posiada słabsze natężenie. Pojmuje się, w rzeczy saméj że można będzie znaleźć z téj strony punkt, dla któregoby różnica natężenia dwóch świateł została wynagrodzoną przez różnicę odległości od punktu oświeconego.

2° Przypuśćmy że natężenie drugiego światła zwiększa się stopniowo i że przeto β powiększa się przybliżając się tym sposobem do α, wartość na x' będzie zmniejszać się stopniowo, a wartość na x'' powiększać się równocześnie. Tak więc punkt C będzie się przybliżał do środka AB, a punkt C' będzie się oddalał coraz więcéj od światła B.

Jeżeli przypuścimy teraz $\alpha = \beta$, albo dwa światła równego natężenia, będzie $x' = \frac{d}{2}$ a $x'' = \frac{\alpha d}{0}$, to jest że punkt C znajdzie się wtenczas w środku AB, a że punkt C' będzie się oddalał do odległości nieskończonéj na prawo punktu B. Przyjmuje się, w rzeczy saméj, że dla wynagrodzenia różnicy natężenia dwóch świateł, potrzeba oddalić punkt C' tem bardziéj, im ta różnica jest mniejszą, i że jeżeli nakoniec staje się ona zerem, to dopiero w odległości nieskończonéj różnica odpowiednia odległościóm staje się niedostrzeżoną.

3° Przypuśćmy że β, nieprzestając wzrastać, staje się większém jak α, albo że światło B jest bardziéj natężoném jak światło A.

Wartość x pozostaje dodatną i mniejszą jak d, to jest, odpowiada zawsze punktowi zawartemu między A i B. Lecz, ponieważ β jest większém jak α, wynika ztąd że $\alpha + \beta$ jest większém jak 2α, a zatém że, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ jest mniejszém jak $\frac{\alpha}{2\alpha}$ albo jak $\frac{1}{2}$; tak więc x' jest mniejszém jak $\frac{d}{2}$, to jest punkt C jest wówczas bliżéj światła A jak światła B.

Co się tyczy wartości x'', ta staje się odjemną, a ponieważ uważaliśmy jako dodatne, odległości liczone po prawéj stronie punktu A, potrzeba będzie, dla uogólnienia formuł, uważać jako odjemne wartości liczone po lewéj stronie tego punktu. Wartość odjemna znaleziona na x'' będzie więc odpowiadała pewnemu punktowi C$''$, położonemu po lewéj stronie punktu świecącego A mającego mniejsze natężenie, i to w odległości od tego punktu, tém większéj, im różnica bezwzględna $\beta - \alpha$ będzie mniejszą.

4° Gdyby teraz natężenie światła B zmniejszać się zaczęło, tak iżby się powróciło do przypuszczenia $\beta = \alpha$, otrzymywałoby się na x'' wartości odjemne coraz większe, i nakoniec pewną wartość nieskończoną którą należałoby uważać jako odjemną, ponieważ ta wartość byłaby granicą do któréj dąży pewna ilość odjemna, coraz większa w swéj wartości bezwzględnéj. Tak więc, dla $\beta = \alpha$ rozwiązanie nieskończone odpowiada pewnemu punktowi który możemy przypuścić jako położony zarówno po prawéj albo po lewéj stronie dwóch świateł, co istotnie tak być powinno.

Nie należy ztąd wnosić że zrównanie drugiego stopnia posiada, w tym przypadku, trzy pierwiastki, to zrównanie ma tylko dwa; lecz do wartości nieskończonéj może być przywiązanym znak $+$ albo znak $-$, podług tego jak będziemy ją uważali jako granicę ilości wzrastających dodatnych, lub też ilości wzrastających w swéj wartości bezwzględnéj, lecz odjemnych.

5° Jeżeli zrobimy jednocześnie dwa przypuszczenia $\alpha = \beta$ i $d = 0$, to jest jeżeli przypuścimy że dwa światła posiadają tożsamo natężenie, i są nadto położone w tymże samym punkcie A, otrzymamy.

$$x' = 0 \quad \text{a} \quad x'' = \frac{0}{0}.$$

Pierwsza wartość daje punkt A; co być powinno gdyż punkt C, który jest w środku AB dla $\alpha = \beta$, zlewa się wówczas w jedno z A i B.

Druga jest nieoznaczoną; i, w rzeczy saméj, na jakiémkolwiek punkcie linii prostéj XY, położymy wtenczas punkt oświecony, odbierze on zawsze od dwóch punktów świecących tęż samą ilość światła.

6° Jeżeli, w niczem nie zmieniając ilości stałéj d, zrobimy, jednocześnie, dwa przypuszczenia $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, otrzymamy dla x' i x'' dwie wartości nieoznaczone. I rzeczywiście, jeżeli dwa światła są zgaszone, punkt jakikolwiek położony bądź pomiędzy A i B, bądź z téj albo z tamtéj strony, odbiera od każdego z tych punktów ilość światła zero a zatém ilość równą.

335. IV. Piękne rozwiązanie i proste wykreślenie Clairaut'a. *Znaleźć na prostéj* XY *łączącéj dwa punkta świecące* A *i* B, *punkt który jest równo oświecony.*

Niech będą : AC $= x$ odległość punktu szukanego C od punktu świecącego A; α^2 ilość światła którąby odbierał od A pewien punkt położony o 1 metr odległości od tegoż punktu świecącego; β^2 ilość światła którąby odbierał od B pewien punkt położony o 1 metr odległości od tegoż punktu świecącego.

Ponieważ odbierana ilość światła jest w stosunku odwrotnym kwadratu z odległości, punkt C odbierze od punktu A ilość światła równą

$$\frac{\alpha^2}{x^2},$$

a od punktu B ilość światła wyrażoną przez

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2},$$

d będąc odległością AB rozdzielającą te dwa punkta świecące.

Zrównanie zagadnienia jest więc :

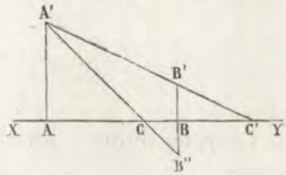
$$\frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\beta^2}{(d-x)^2};$$

albo

$$\frac{\alpha}{x} = \pm \frac{\beta}{d-x}.$$

WYKREŚLENIE. Wynieśmy z punktu A prostopadłą do AB a równą α, z punktu zaś B dwie prostopadłe, jedną w górze, drugą pod spodem, obie równe β; proste A′B′, A′B″ przetną XY w C′ i C, które będą punktami szukanemi; gdyż mamy

Fig. 12.



$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB''}{BC} \quad \text{albo} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{d-x},$$

$$\frac{AA'}{AC'} = \frac{BB'}{BC'} \quad \text{albo} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{x-d} = -\frac{\beta}{d-x}.$$

To proste wykreślenie pokazuje że są dwa punkta C i C′ które zadosyć czynią pytaniu; jeden C jest zawartym między A i B i położony bliżéj światła słabszego; drugi C′ jest po tamtéj stronie tego ostatniego światła. Gdy dwa światła mają toż samo natężenie, jedno z rozwiązań staje się nieskończoném, i nie pozostaje na linii prostéj XY jak tylko jeden punkt równo oświecony; środek AB jest tym punktem. Wszystkie te rezultata są oczywistemi *a priori* wedle wysłowienia; można także wyprowadzić je ze zrównania.

Wojciech Girard (1629) dał pierwsze wytłumaczenie rozwiązań odjemnych; geometrya *Deskarta* ukazała się po raz pierwszy w 1637 r.

WPROWADZENIE NIEZNANYCH POSIŁKOWYCH DLA UPROSZCZENIA ZAGADNIEŃ.

336. Niektóre zagadnienia znakomicie uproszczonémi być mogą przez zręczny wybór nieznanéj. Oto przykład temu rodzajowi zagadnień odpowiadający:

Znaleźć cztéry liczby stanowiące proporcyą, znając summę średnich 2s, *summę skrajnych* 2s′, *i summę kwadratów z cztérech wyrazów* $4q^2$.

Weźmy za nieznaną wieloczyn x ze średnich; a że ich summą jest $2s$, są one (285) pierwiastkami zrównania,

$$z^2 - 2sz + x = 0,$$

a zatém, są równémi :

$$s+\sqrt{s^2-x}, \qquad s-\sqrt{s^2-x}.$$

Ponieważ wieloczyn ze skrajnych jest równy wieloczynowi ze średnich, zobaczymy, tymże samym sposobem, że skrajnemi są :

$$s'+\sqrt{s'^2-x}, \qquad s'-\sqrt{s'^2-x}.$$

Tworząc summę kwadratów z tych cztérech wyrażeń, otrzymamy :

$$4s^2+4s'^2-4x;$$

zrównaniem zagadnienia jest więc :

$$4s^2+4s'^2-4x=4q^2.$$

Wyciągniemy ztąd wartość na x, a tém samém, znajdziemy cztéry wyrazy proporcyi, któremi są, po zupełném wykonaniu rachunku :

$$s'+\sqrt{q^2-s^2}, \quad s+\sqrt{q^2-s'^2}, \quad s-\sqrt{q^2-s'^2}, \quad s'-\sqrt{q^2-s^2}.$$

Uwaga. Naturalnie jest, wziąć za nieznaną wieloczyn ze średnich, bo ten wieloczyn, dla każdéj proporcyi, przyjmuje tylko jedną wartość. Gdybyśmy chcieli, na przykład, wyznaczyć jeden z wyrazów średnich, powinnibyśmy znaleźć je obydwa przez tenże sam rachunek; gdyż nic ich nie rozróżnia w wysłowieniu. Zrównanie więc musi być przynajmniéj stopnia drugiego.

Aby zagadnienie było możebném, potrzeba żeby było :

$$s^2<q^2, \qquad s'^2<q^2.$$

337. Damy jeszcze *drugie rozwiązanie* zagadnienia następującego : *Znaleźć proporcyą, znając summę* $4s$ *jéj wyrazów, summę* $4q^2$ *ich kwadratów, i summę* $4c^3$ *ich sześcianów.*

Weźmy za nieznane : różnicę $4x$ między summą skrajnych a summą średnich, i wieloczyn y ze skrajnych; oznaczmy przez a, b, c, d, cztéry wyrazy proporcyi; otrzymamy :

$$[1] \quad \begin{cases} a+d+c+b=4s, \\ a+d-(c+b)=4x. \end{cases}$$

Wyciąga się ztąd : [2] $\begin{cases} a+d=2s+2x \\ b+c=2s-2x. \end{cases}$

A ponieważ mamy : [3] $\quad ad=y, \quad bx=y,$

wyprowadzimy więc (285) dla a, b, c, d, wartości :

$$[4] \quad \begin{cases} a=s+x+\sqrt{(s+x)^2-y}, \\ d=s+x-\sqrt{(s+x)^2-y}, \\ b=s-x+\sqrt{(s-x)^2-y}, \\ c=s-x-\sqrt{(s-x)^2-y}. \end{cases}$$

Summa cztérech kwadratów jest, jak to da się łatwo obrachować :

$$8(s^2+x^2)-4y;$$

a summa cztérech sześcianów jest :

$$16s(s^2+3x^2)-12sy;$$

co dostarcza zrównania :

$$8(s^2+x^2)-4y=4q^2,$$

$$16s(s^2+3x^2)-12sy=4c^3;$$

albo, dzieląc przez 4 obie strony każdego z nich, i przenosząc :

$$[5] \quad \begin{cases} 2x^2-y=q^2-2s^2, \\ 12sx^2-3sy=c^3-4s^3. \end{cases}$$

Rozwiązując te dwa zrównania, znajdziemy :

$$[6] \qquad x^2 = \frac{c^3 - 3q^2s + 2s^3}{6s}, \quad y = \frac{c^3 - 6q^2s + 8s^3}{3s};$$

i, podstawiając wartości na x i na y w formułach [4], otrzymamy cztéry wyrazy proporcyi.

ĆWICZENIA.

I. Pewien podróżny wyjeżdża z punktu B, udając się do punktu C; w tymże samym czasie drugi podróżny wyjeżdża z punktu C dążąc do B. Każdy z nich postępuje z prędkością stałą. Te dwie prędkości mają stosunek taki, że piérwszy przybywa do C we cztéry godzin po ich spotkaniu się, i że drugi przybywa do B w dziewięć godzin po témże dwóch podróżnych spotkaniu. Pytanie jaki jest stosunek ich prędkości ?

Jeżeli oznaczymy przez x i przez y dwie prędkości, przez d odległość BC, a przez z odległość punktu spotkania od B, znajdziemy zrównania :

$$\frac{z}{x} = \frac{d-z}{y}, \quad \frac{d-z}{x} = 4, \quad \frac{z}{y} = 9;$$

zkąd :

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

II. Mamy koło, promienia R, i punkt O na średnicy. Znaleźć linią prostą P, prostopadłą do téj średnicy, i taką żeby poprowadziwszy, przez punkt O, sieczną przecinającą koło w dwóch punktach A, B, i oznaczając przez p i q odległości punktów A i B od linii prostéj P, summa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ była niezależną od kierunku siecznéj AB.

Oznaczając przez x odległość środka od linii prostéj nieznanéj, przez d odległość środka od punktu O, i przez m styczną kąta utworzonego przez kierunek siecznéj z kierunkiem średnicy danéj, znajdziemy że p i q są pierwiastkami zrównania :

$$(1 + m^2)z^2 - 2\left\{x + m^2(x-d)\right\}z + x^2 + m^2(x-d) - R^2 = 0.$$

Zkąd wyciąga się wartość na $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$; i znajduje się że, dla spełnienia warunków wysłowienia, potrzeba żeby było :

$$x=d, \quad \text{albo} \quad x=\frac{R^2}{d}.$$

Stosunkiem stałym jest : $\frac{2d}{d^2-R^2}$, w piérwszym przypadku, a $\frac{2d}{R^2-d^2}$, w drugim.

III. Znaleźć, na linii środków, dwóch kół położonych jedno w drugiém, punkt taki, żeby jego odległości od dwóch punktów w których koła są przecięte przez tęż samą prostopadłą P do linii środków, były w stosunku stałym.

Oznaczając przez R i r promienie dwóch kół, przez d odległość środków, przez α odległość środka małego koła od linii prostéj P, i przez x odległośc tegoż samego środka od punktu szukanego (który przypuścimy bardziéj oddalonym od środka koła wielkiego), znajduje się, dla kwadratu stosunku z odległości :

$$\frac{R^2-(\alpha+d)^2+(x-\alpha)^2}{r^2-\alpha^2+(x-\alpha)^2};$$

a dla wartości na x odpowiadającéj pytaniu,

$$x=\frac{R^2-r^2-d^2\pm\sqrt{(R+r+d)(R+r-d)(R-r+d)(R-r-d)}}{2d}.$$

Stosunkiem stałym jest wówczas $\sqrt{\frac{d+x}{x}}$.

Wytłumaczy się rozwiązania odjemne.

IV. Znając summę s^2 powierzchni dwóch prostokątów, summę a ich podstaw, i powierzchnie p^2 i q^2 dwóch prostokątów które miałyby podstawę jednego a wysokość drugiego , znaleźć te prostokąty.

Oznaczając przez x i y podstawę i wysokość piérwszego prostokąta, przez u i v podstawę i wysokość drugiego, znajduje się :

$$x=\frac{a\left(s^2+2p^2\pm\sqrt{s^4-4p^2q^2}\right)}{2(s^2+p^2+q^2)}, \quad y=\frac{s^2+2p^2\pm\sqrt{s^4-4p^2q^2}}{2a},$$

$$u=\frac{a\left(s^2+2q^2\pm\sqrt{s^4-4p^2q^2}\right)}{2(s^2+p^2+q^2)}, \quad v=\frac{s^2+2p^2\pm\sqrt{s^4-4p^2q^2}}{2a}.$$

V. Znaleźć postęp ilorazowy, znając summę S_1 jego wyrazów, summę S_2 ich kwadratów, i summę S_3 ich sześcianów.

Nieznanémi są piérwszy wyraz x, stosunek y i liczba wyrazów z; stosuje się więc naprzód formułę dającą summę wyrazów postępu ilorazowego, którą dowiedziemy w jednym z rozdziałów następujących. Po czém dojdzie się, po kilku przekształceniach, do zrównań :

$$2S_1x + (S_1^2 - S_2)y = S_1^2 + S_2,$$

$$3S_1x^2 + 3S_1^3x(y-1) + S_1^3(y-1)^2 + S_3(y^2+y+1) = 0,$$

które dają x i y. Potém zrównanie :

$$y^z = \frac{S_1(y-1)+x}{x}$$

daje y^z, a tém samém z.

VI. Znaleźć cztéry liczby, w postępie ilorazowym, znając ich summę a, i summę ich kwadratów b^2.

Oznaczając przez x piérwszy wyraz, a przez y stosunek, stosuje się téż samą formułę; i otrzymuje się, po kilku przekształceniach, zrównania :

$$(a^2-b^2)y^4 - 2b^2y^3 - 2b^2y^2 - 2b^2y + (a^2-b^2) = 0,\ x = \frac{a}{1+y+y^2+y^3},$$

z których piérwsze rozwiązuje się jak drugie ze zrównań 4°, numeru 309, dzieląc przez y^2, i kładąc : $y + \frac{1}{y} = z$.

VII. Znaleźć liczbę złożoną z dwóch cyfer, taką żeby ta liczba podzielona przez wieloczyn z tych dwóch cyfer, dała na iloraz $5\frac{1}{3}$; i żeby, odciągając od niéj 9, otrzymało się liczbę przewróconą.

Liczbą szukaną jest 32.

VIII. Znaleźć liczbę z trzech cyfer złożoną, w któréjby cyfra środkowa była średnią proporcyonalną między dwoma skrajnémi; taką nadto aby miała się do summy swych cyfer jak 124 do 7, i aby powiększona o 594 dała na summę, liczbę złożoną z tych samych, lecz w odwróconym porządku napisanych cyfer.

Odpowiedź. Ta liczba jest 248.

IX. Znaleźć pięć liczb, w postępie różnicowym, znając ich summę $5a$ i ich wieloczyn p^5.

Znajduje się że wyraz środkowy jest równym a, i że stosunek y jest danym przez zrównanie :

$$4ay^4 - 5a^3y^2 + a^5 - p^5 = 0.$$

X. Znaleźć cztéry liczby, w postępie różnicowym, znając ich summę $4a$ i summę ich stosunków odwrotnych $\frac{1}{b}$.

Przedstawiając cztéry wyrazy przez $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$, znajduje się że $x=a$, i że y jest daném przez zrównanie:

$$9y^4+10a(2b-a)y^2+a^4-4a^3b=0.$$

XI. Poprowadzić z punktu A, do koła C, sieczną długości danéj l, i wykazać warunki możebności. Daje się odległość a punktu A od środka, i R promień koła.

Oznaczając przez y prostopadłą spuszczoną z końca siecznéj na średnicę przechodzącą przez punkt A, a przez x odległość spodka téj prostopadłéj od środka, znajduje się:

$$x=\frac{R^2+a^2-l^2}{2a},\quad y^2=\frac{(a+R+l)(a+R-l)(l+R-a)(l+a-R)}{4a^2}.$$

Warunkami możebności są: jeżeli punkt A jest zewnętrznym koła,

$$l<a+R,\quad l>a-R;$$

a, jeżeli ten punkt jest wewnętrznym,

$$l<R+a,\quad l>R-a.$$

XII. Wiémy że, mając dane: punkt A i koło, którego środek jest w O którego promieniem jest R, zowie się *biegunową* punktu A, prostopadła do OA, poprowadzona przez punkt X téj prostéj, tak wybrany żeby było $OX\times OA=R^2$. To przypuściwszy, mając dane, dwa koła, promieni R i R′, chcemy wiedzieć czy punkt M wzięty na ich płaszczyznie może mieć tęż samą biegunową w jedném i w drugiém kole.

Potrzeba, na to, żeby dwa koła nie przecinały się; a, jeżeli ten warunek jest spełnionym, to oznaczając przez d odległość środków, znajduje się dla odległości *bieguna* od środka koła R,

$$x=\frac{d^2+R^2-R'^2\pm\sqrt{(R+R'+d)(R+R'-d)(R-R'+d)(R-R'-d)}}{2d}.$$

XIII. Mając sferę daną, promienia R, zamierzamy sobie przeciąć ją przez płaszczyznę taką, ażeby najmniéjszy z dwóch odcinków sferycznych tym sposobem otrzymanych był do ostrokręgu téjże saméj podstawy, mającego za wierzchołek środek sfery, w stosunku stałym m.

Znajduje się że wysokość odcinka jest daną przez formuły :

$$x = 0, \quad x = \mathrm{R}\,\frac{3(m+1) - \sqrt{(m+1)(m+9)}}{2(m+1)}.$$

XIV. Toż samo zagadnienie, przypuszczając że stożek miałby za wierzchołek koniec średnicy prostopadłéj do podstawy spólnéj, położonéj w największym odcinku, daje :

$$x = 0, \quad x = \mathrm{R}\,\frac{4m + 3 - \sqrt{8m+9}}{2(m+1)}.$$

XV. Mając daną sferę promienia R, chcemy przeciąć ją przez płaszczyznę taką, aby najmniejsza z dwóch stref tym sposobem otrzymanych była do powierzchni bocznéj ostrokręgu tejże saméj podstawy, a mającego za wierzchołek środek sfery, w stosunku stałym.

Znajduje się, dla wysokości strefy :

$$x = 0, \quad x = \frac{2m^2\mathrm{R}}{m^2+4}.$$

XVI. Toż samo zagadnienie, przypuszczając że stożek miałby za wierzchołek koniec średnicy prostopadłéj do podstawy spólnéj, położonéj w największym odcinku, daje :

$$x = 0, \quad x = \mathrm{R}\,\frac{2m^2 + 1 - \sqrt{4m^2+1}}{m^2}$$

XVII. Podzielić trapez, którego podstawami są a i b, na trzy częsci proporcyonalne do m, n, p, liniami równoległemi do podstaw.

Oznaczając przez x i przez y długości dwóch równoległych, znajduje się :

$$x^2 = \frac{(n+p)a^2 + mb^2}{m+n+p}, \quad y^2 = \frac{pa^2 + (m+n)b^2}{m+n+p}.$$

XVIII. Obwód koła, promienia R, posiada własność odbijania ciał uderzających go, pod kątem odbicia równym kątowi wpadnięcia. Przypuszcza się że bila elastyczna, sprowadzona do punktu materyalnego, jest położoną wewnątrz koła, w punkcie A, odległości a od środka. Pytanie, w jakim kierunku należy wypuścić bilę, ażeby ta, odbiwszy się dwa razy w B i w C, musiała przejść przez punkt swego wyjścia A.

Dowodzi się że trójkąt ABC jest równoramiennym; i, oznaczając przez x odległość podstawy od środka, znajduje się:

$$x = \frac{\mathrm{R}\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + 8a^2} - \mathrm{R}\right)}{4a}.$$

Roztrząsnąć i wykreślić to rozwiązanie.

XIX. Wpisać w koło, promienia R, trójkąt równoramienny, znając summę a ego podstawy i wysokości.

Oznaczając przez x połowę podstawy, a przez y wysokość, znajduje się:

$$x = \frac{2(a - \mathrm{R}) \pm \sqrt{4\mathrm{R}^2 + 2a\mathrm{R} - a^2}}{5}, \quad y = \frac{a + 4\mathrm{R} \pm 2\sqrt{4\mathrm{R}^2 + 2a\mathrm{R} - a^2}}{5}.$$

Roztrząsnąć i wykreślić te rozwiązania: wykazać, jakie są warunki możebności, i w jakich przypadkach istnieje jedno a w jakich dwa rozwiązania.

XX. Mając dany czworobok ABCD, zamierzamy sobie zbudować drugi czworobok A′B′C′D′, któregoby boki były odpowiednio równoległemi do boków pierwszego, równo oddalonemi od tychże, tym sposobem żeby powierzchnia zawarta między obwodami dwóch wielokątów była równowartą kwadratowi m^2.

Przypuśćmy że czworobok A′B′C′D′ obwija ABCD; jeśli oznaczymy przez $2p$ obwód czworoboku danego, przez s summę dostycznych połowy kątów tego czworoboku, a przez x odległość boków równoległych, to znajdziemy zrównanie:

$$sx^2 + 2px - m^2 = 0.$$

Roztrząsnąć to rozwiązanie. Rozebrać czy pierwiastek odjemny może się wytłumaczyć, przypuszczając że czworobok A′B′C′D′ jest wewnętrznym względem czworoboku ABCD.

XXI. Poprowadzić, przez punkt A, wzięty w kole promienia R, dwie proste prostokątne AB, AC, zakończone na okręgu koła, i takie żeby łuk przejęty między niemi miał cięciwę równą a.

Jeżeli oznaczymy przez d odległość punktu A od środka, przez x i przez y długości AB, AC, to znajdziemy:

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad xy = \frac{a(\mathrm{R}^2 - d)}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}.$$

Roztrząsnąć warunki możebności zagadnienia.

XXII. Mając dane koło promienia R, i inne koło promienia $\frac{R}{m}$, styczne wewnętrznie do piérwszego, zamierzmy sobie zakreślić trzecie koło, styczne, jednocześnie, do dwóch innych i do średnicy łączącéj środki kół danych :

Oznaczając przez x promień koła szukanego, a przez y odległość środka piérwszego koła od punktu zetknięcia średnicy i koła nieznanego, znajduje się :

$$1^{\circ} \qquad x = \frac{4(m-1)}{(m+1)^2}R \qquad y = \frac{3-m}{m+}R;$$

$$2^{\circ} \qquad x = 0, \qquad y = -R$$

Roztrząsnąć i wykreślić rozwiązania.

XXIII. Wyrachować ramiona x, y, kąta prostego, przeciwprostokątną z i wysokość odpowiednią v trójkąta prostokątnego, znając obwód $2p$, i summę a przeciwprostokątnéj i wysokości.

Znajduje się :

$$z = \frac{2p + a - \sqrt{(2p+a)^2 - 8p^2}}{2}, \qquad v = \frac{a - 2p + \sqrt{(2p+a)^2 - 8p^2}}{2};$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{2p - a + \sqrt{(2p+a)^2 - 8p^2} \pm \sqrt{2a^2 + 16ap - 2(6p+a)\sqrt{(2p+a)^2 - 8p^2}}}{4}.$$

XXIV. Wyrachować trzy boki x, y, z, trójkąta, wiedząc że objętości nakreślone przez trójkąt, obracający się około każdego z nich, są równowarte objętościom trzech sfer, promieni α, β, γ.

Znajduje się związki : $\alpha^3 x = \beta^3 y = \gamma^3 z$;

a, następnie :

$$x^3 = \frac{16\alpha^3}{\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\beta^3} - \frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha^3}{\beta^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)},$$

i dwie inne formuły odpowiednie dla y^3 i z^3.

XXV. Wpisać w sferę promienia R, walec, któregoby objętość była równowartą summie odcinków sferycznych mających też samą z nim podstawę.

Oznaczając przez x promień podstawy walca, a przez y wysokość jednego z odcinków, znajduje się:

$$1^\circ \qquad x^2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}, \qquad y = \frac{R\left(3-\sqrt{3}\right)}{2};$$

$$2^\circ \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Wykreślić rozwiązania.

XXVI. Mając dane koło promienia R, prowadzi się, przez punkt C jego płaszczyzny, styczną do tego koła, i obraca się, jednocześnie, około średnicy przechodzącéj przez punkt C, styczna i pół-okręgu koła. Chcemy wyznaczyć punkt C, w taki sposób żeby powierzchnia ostrokręgu, i strefy, téjże saméj podstawy, którą ostrogrąg obwija, były w stosunku danym p.

Jeżeli oznaczymy przez x odległość punktu C od środka, a przez y odległość środka od spólnéj podstawy, to znajdziemy:

$$1^\circ \qquad x = (2p-1)R, \qquad y = \frac{R}{2p-1};$$

$$2^\circ \qquad x = R, \qquad y = R.$$

Roztrząsnąć te rozwiązania.

ROZDZIAŁ XIX.

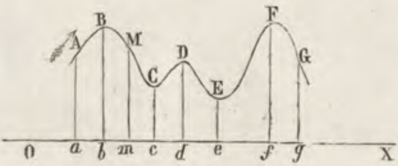
NIEKTÓRE PYTANIA DOTYCZĄCE NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI.

ROZTRZĄSANIE TYCH KWESTYJ ZA POMOCĄ PROSTYCH ZASAD ALGEBRY ELEMENTARNÉJ.

338. Wartość pewnego wyrażenia algebraicznego na x zależy od liczby która się kładzie na miejscu *zmiennéj* x, i może się zdarzyć że, gdy x wzrasta powoli zacząwszy od pewnéj iiczby, wyrażenie staje stę jużto wzrastającém, jużto ubywającém; każde przejście z jednego do drugiego kierunku jest wtedy naznaczone przez pewien stan zwany *największością*, jeżeli wyrażenie przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać, albo przez pewien stan zwany *najmniejszością*, jeżeli wyrażenie przestaje się zmniejszać a zaczyna zwiększać. Te stany krytyczne są kolejno zmieniającemi się, i pewne wyrażenie może posiadać jednocześnie kilka największości i kilka najmniejszości. Podług tego, pewna wartość największości nie potrzebuje koniecznie przewyższać wszelkich wartości wziętego pod uwagę wyrażenia; dosyć jest, byle ona przewyższała wartości które ją poprzedzają i te które po niéj następują bezpośrednio. Podobnaż obserwacya służy także dla najmniejszości.

Na przykład: podczas gdy punkt ruchomy M przebiega linią ABCDFG w kierunku strzały, jego rzut m na oś OX oddala się od punktu stałego O téj prostéj; odległość punktu ruchomego od OX jest pewna wielkość Mm która zależy od przestrzeni zmiennéj $x = \mathrm{O}m$ rozdzielającéj jego rzut od punktu O; ta odległość jest największością dla $x = \mathrm{O}b$, $\mathrm{O}d$, $\mathrm{O}f$, a najmniejszością dla $x = \mathrm{O}c$, $\mathrm{O}e$.

Fig 13



Widzimy, wreszcie, że *nie zmienia się wartość na* x *która robi pewne wyrażenie największością lub najmniejszością gdy pomnożymy albo podzielimy to wyrażenie przez czynnik niezależny od* x ; albowiem to na jedno wychodzi jak gdybyśmy chcieli powiększyć albo zmniejszyć w stosunku stałym odległości różnych punktów krzywéj ABCDEFG od prostéj stałéj OX. Ta uwaga jest bardzo użyteczną : przed szukaniem w jakich okolicznościach wyrażenie dane jest największością lub najmniejszością, potrzeba zawsze uwolnić to wyrażenie od czynników *stałych* które ono w sobie zamyka.

Algebra elementarna uważa poszukiwanie wartości największości lub najmniejszości, jako przypadek szczególny pytania zależącego na wyznaczeniu wyrażeniu danemu możebności nabycia pod pewnémi warunkami wartości jakiéjkolwiek. Robi się zwykle to wyrażenie równém jakiejkolwiek ilości nieoznaczonéj y; i jeżeli wynika z roztrząsania zrównania tym sposobem otrzymanego że x nie jest rzeczywistém dla wszelkich wartości na y, jeśli znajdziemy, na przykład, że

x jest urojoném dla	$y < a,$
rzeczywistém	$y \gtrless \begin{matrix} a, \\ b, \end{matrix}$
urojoném	$y \gtrless \begin{matrix} b, \\ c, \end{matrix}$
rzeczywistém	$y \gtrless \begin{matrix} c, \\ d, \end{matrix}$

potrzeba wnosić że wartości b, d,... są największościami ilości y, zaś wartości a, c,... przedstawiają najmniejszości téjże ilości.

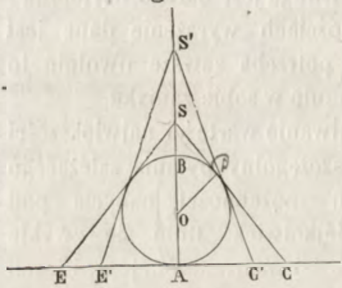
Ztąd wnieść wypada to prawidło praktyczne : *Zróbmy równem ilości* y *wyrażenie dane, uwolniwszy je naprzód od jego czynników stałych ; wyraźmy że zrównanie na* x *tym sposobem otrzymane ma pierwiastki rzeczywiste ; te warunki zmuszą ilość* y *do pozostania między pewnemi granicami które będą wyraźnie największościami i najmniejszościami szukanemi.*

Oto kilka przykładów tego sposobu, którego zastosowanie już widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym.

NAJMNIEJSZA OBJĘTOŚĆ OSTROKRĘGU OPISANEGO NA SFERZE.

339. Niech będzie AB średnicą stałą sfery; poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę styczną do sfery i na przedłużeniu średnicy AB weźmy punkt jakikolwiek S za wierzchołek ostrokręgu opisanego. Jeżeli wierzchołek S przybliża się do punktu B, ostrokrąg, rozszerzając się coraz bardziéj przy podstawie, powiększa się nieograniczenie: jeżeli przeciwnie wierzchołek S oddala się od punktu B, ostrokrąg, przedłużając się coraz bardziéj, i mając zawsze swą podstawę większą od wielkiego koła sfery, powiększa się także nieograniczenie. Tak więc, gdy przesuwać będziemy wierzchołek S na przedłużeniu średnicy począwszy od punktu B, widzimy że ostrokrąg opisany, naprzód nieskończenie wielki, zaczyna się zmniejszać aby potém mógł się powiększać znowu i stać się nieograniczenie wielkim; przejdzie więc on przez wartość mniejszą jak wszelkie inne, to jest przez najmniejszość.

Fig. 14



Oznaczmy przez x wysokość a przez z promień podstawy ostrokręgu opisanego na sferze promienia r; objętość tego ostrokręgu ma za wyrażenie

$$\frac{1}{3} x . \pi z^2$$

Trójkąty podobne SAC, SOD dają proporcyą

$$\frac{z}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x-r)^2 - r^2}};$$

zkąd się wyciąga

$$z^2 = \frac{r^2 x}{x - 2r}.$$

Podług tego, objętość której najmniejszości szukamy, jest :

$$\frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2r}.$$

Stosując się do przepisu, połóżmy

$$\frac{x^2}{x-2r} = y, \quad \text{zkąd} \quad x^2 - yx + 2ry = 0.$$

Aby to zrównanie miało swe pierwiastki rzeczywistemi, potrzeba żeby y było większém jak $8r$; więc y biorąc wartość $8r$ staje najmniejszością; a gdy podstawimy za y tę wartość, wtedy otrzymamy

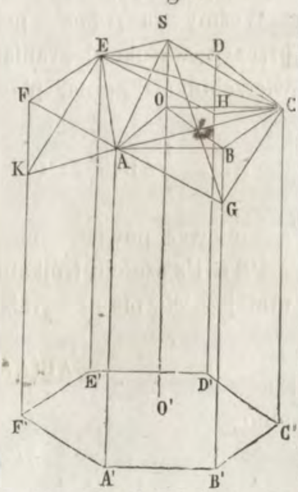
$$x = \frac{y}{2} = 4r.$$

Więc ostrokręg opisany na sferze ma objętość najmniejszą możebną, gdy jego wysokość jest dwa razy większa od średnicy sfery. Wtedy najmniejszość objętości tego ostrokręgu, równa $\frac{\pi r^2}{3} . 8r$ czyli $\frac{8}{3}\pi r^3$, jest dwa razy większą od objętości sfery.

BUDOWA KOMÓREK WOSKOWYCH W KTÓRYCH PSZCZOŁY MIÓD SKŁADAJĄ.

340. Mając dany graniastosłup prosty którego podstawą jest sześciokąt foremny, weźmy na przedłużeniu osi OO' graniastosłupa (fig. 15) punkt dowolny S; przez ten punkt i trzy boki trójkąta równobocznego ACE, otrzymanego łącząc co drugi wierzchołki podstawy wyższéj, poprowadźmy trzy płaszczyzny, które odetną od graniastosłupa danego trzy czworościany BACG, DCEH, FAEK, zastąpmy te ostatnie przez czworościan SACE położony po nad graniastosłupem ; otrzymamy tym sposobem bryłę przedstawioną przez figurę 16, która się kończy

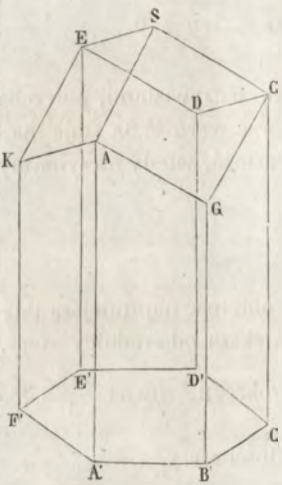
Fig.15



w swéj części wyższéj pewnym rodzajem sześciokąta spaczonego, służącego za oparcie trzech kwadratów ukośnych zbiegających się przy wierzchołku S.

Łatwo jest dostrzedz że objętość bryły tym sposobem utworzonéj pozostanie stałą, dla jakiegokolwiekbądź położenia punktu S na przedłużeniu osi graniastosłupu. W rzeczy saméj, dwa kwadraty ukośne SAGC i OABC (fig. 15) mają przekątną spólną AC, dwie więc inne przekątne SG i OB przejdą przez tenże sam punkt L, środek AC; trójkąty prostokątne LBG, LOS, są równe, i dają BG = OS. Wynika ztąd że czworościan GABC odcięty od graniastosłupu, i czworościan przydany SAOC, są równe, jako mające podstawy równe, ABC, AOC, jakoteż wysokości BG i OS także równe. Tak więc summa trzech części odciętych od graniastosłupa równa się piramidzie przydanéj SACE.

Fig. 16



Idzie rzecz teraz o znalezienie wysokości punktu S *któryby uczynił najmniejszością, powierzchnią tego dziesięciościanu.*

Weźmy za *jedność* połowę boku AB sześciokąta; oznaczmy przez h wysokość graniastosłupa, a przez x wysokość nieznaną wierzchołka S po nad płaszczyznę podstawy wyższéj. Mamy

$$\mathrm{AL} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\sqrt{3} = \sqrt{3}, \qquad \mathrm{SL} = \sqrt{\overline{\mathrm{SO}}^2 + \overline{\mathrm{OL}}^2} = \sqrt{x^2+1},$$

a ponieważ powierzchnia uważana składa się z sześciu trapezów AA'B'G i z sześciu trójkątów równych SAG, ilość do zrobienia najmniejszością ma za wyrażenie

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}(\mathrm{AA'} + \mathrm{GB'}) + \mathrm{AL} \times \mathrm{SL},$$

albo

$$2h - x + \sqrt{3}\sqrt{x^2+1}.$$

Robiąc je równem $2h + y$, otrzymamy kolejno

$$3(x^2 + 1) = (x + y)^2, \quad 2x^2 - 2yx + 3 - y^2 = 0.$$

Warunkiem rzeczywistości pierwiastków jest

$$y^2 - 2(3 - y^2) > 0, \quad \text{albo} \quad y > \sqrt{2}\,;$$

powierzchnia przypuszcza więc najmniejszą wartość możebną, i ta najmniejszość ma miejsce dla

$$x = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{albo} \quad \text{OS} = \frac{\text{AB}\sqrt{2}}{4}.$$

Więc, *powierzchnia żądanego dziesięciościanu będzie najmniejszością, jeśli różnica dwóch krawędzi po sobie następujących* AA′, GB′ *jest czwartą częścią przekątnéj kwadratu wystawionego na boku* a *padstawy.*

Dziesięciościan, o którym mowa, przewrócony stanowi budowę komórek woskowych w których pszczoły miód składają; pisarze francuzcy zowią go zwykle *pszczelnym alweolem* (alvéole des abeilles).

Trzy kąty płaskie kąta bryłowego G, w dziesięciościanie danym, są między sobą równe; ich wartość spólna jest około 109° 28′16″; trzy kąty dwójścienne tego trójściąnu są także między sobą równe; każdy z nich zawiera 120 stopni.

Pszczoły budują swe komórki podług powyżéj wskazanego planu. Wejście alweolu stanowi sześciokąt foremny A′B′C′D′E′F′ (fig. 16): dno zaś, czyli spód jego, jest utworzonym z połączenia trzech małych powierzchni płaskich tak do siebie nachylonych ażeby tym sposobem otrzymana powierzchnia była najmniejszą możebną. Przy wykonaniu téj budowy pszczoły oczywiście mają na widoku oszczędność wosku. Komórki są położone jedne obok drugich w podwójnych rzędach, mają swe otwory obrócone na zewnątrz, a zaś dna stykają się z sobą tak dokładnie, że nie istnieje żaden przedział wolny pomiędzy niémi i że każde przepierzenie służy dla dwóch komórek sąsiednich.

Teraz jeszcze kilka słów o pszczołach i ich pracy. Pomiędzy pszczołami napotykamy indiwidua trojakiego rodzaju: samców czyli trutni, samice i pszczoły bezpłciowe czyli robocze, których liczba jest największa. Pszczoły robocze zbiérają sok słodki z kwiatów roślin, przyjmują go do żołądka i następnie wyrzucają z siebie do komórek. Komórki budują z wosku, który pszczoły wyrabiają z pyłku kwiatowego we własnym żołądku. Komórki ustawione parami w dziesięciościany symetryczne tworzą płaskie plastry wiszące pionowo. Oprócz miodu i wosku pszczoły przygotowują jeszcze żywność dla gąsiennic, która się składa z pośledniejszego wosku i miodu. Przyrządzają one jeszcze rodzaj żywicy, zwanéj zasklepem albo pierzką, którą wszystkie szpary starannie zalepiają.

Kiedy pszczoły robocze przybywają do ula próżnego, niebawem zaczynają swe prace od szczytu, i w ogóle od środka tego szczytu, zwłaszcza jeśli się znajduje jakakolwiek wydatność, bądź to przypadkowa, bądź też umyślnie na to przygotowana. Tamto one zawieszają pierwszy ciąg alweoli albo małych komórek, wkrótce drugi ich ciąg przeciwnych przykłada się obok piérwszego i tworzy *plaster miodu* albo *placek wosku*; wiele innych plastrów przychodzą się potém gromadzić jedne obok drugich, zachowując w swym ogólnym składzie kierunek pionowy, a pomiędzy sobą równoległość doskonałą.

Nie będzie więc od rzeczy przed zakończeniem jeszcze raz powiedzieć : komórki pszczół, są to *dziesięciościany o powierzchni najmniejszéj* podobne do tego którego dokładne przedstawiliśmy wykreślenie na figurze 16; sześciokąt foremny otwiéra wejście alweolu; miód składa się na dnie i w jego wnętrzu; pszczoły budują naprzód kwadraty ukośne, potém ściany trapezowe. Wyobraźmy teraz sobie płaszczyznę napełnioną sześciokątami foremnemi, i zbudujmy na każdym sześciokącie odpowiednią mu komórkę, wierzchołki ich będą się znajdowały na płaszczyznie równoległéj do piérwszéj. Nakoniec, połóżmy tę figurę na innéj jéj podobnéj i równéj, tak aby ich wierzchołki do siebie przystały, będziemy mieli ogół komórek noszących nazwisko *plastru miodu*. *Ul* składa się z pewnéj liczby plastrów zawieszonych w różnych płaszczyznach pionowych, tak aby dwie pszczoły mogły przejść jednocześnie pomiędzy dwoma plastrami po sobie następującemi.

Tak więc : 1° nachylenie trzech kwadratów ukośnych które tworzą dno komórki jest takie, że powierzchnia tym sposobem otrzymana staje się najmniejszą możebną; 2° trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny są jedyne wielościany foremne które, wzięte osobno, mogłyby zapełnić przestrzeń płaską nie zostawiając próżni, a z tych trzech wielokątów, sześciokąt dla téjże saméj powierzchni ma najmniejszy obwód. Jest więc tym sposobem wprowadzona podwójna oszczędność wosku.

Wykreślenie geometryczne komórki, zauważane przez *Pappusa*, geometry IV^go wieku przed *Jezusem Chrystusem*, zostało zbadane sposobem dokładnym naprzód przez *Filipa Maraldi'ego* z Obserwatoryum (1712), potém przez *Réaumur'a*, który przedstawił pytanie najmniejszości pod uwagę *Samuela Kœnig'a* i *Maclaurin'a*. Temu ostatniemu geometrze należy się piérwsze ściśle teoretyczne rozwiązanie. *Kœnig* nie znalazł jak tylko 109° 26′, zamiast 109° 28′ 16″ dla kąta kwadratu ukośnego.

341. Mówi się że ilość x jest *zmienną niezależną*, kiedy można jéj nadać dowolnie wartości jakiekolwiek. Wyrażenie algebraiczne y zowie się *funkcyą* zmiennéj x, kiedy to wyrażenie zależy od zmiennéj tym sposobem, że, dla każdéj wartości na x, funkcya przyjmuje wartość jedyną i oznaczoną.

342. Zagadnienie I. *Znaleźć między jakiemi granicami może się zmieniać trójmian* $ax^2 + bx + c$.

Zróbmy naprzód ten trójmian równym m, kładąc :

$$[1] \qquad ax^2 + bx + c = m.$$

Rozwiązując to zrównanie, znajdujemy :

$$[2] \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}.$$

Aby zagadnienie było możebném, potrzeba żeby było :

$$b^2 - 4ac + 4am > 0,$$

albo [3] $$4am > 4ac - b^2.$$

Lecz dla wyciągnięcia z téj nierówności granicy którą m nie powinno przekroczyć, potrzeba rozróżnić dwa przypadki :

1° *Jeżeli* a *jest dodatném*, można dzielić dwa członki przez $4a$ (206); co daje :

$$[4] \qquad m > \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Tak więc, w tym przypadku, *trójmian może przyjąć wartość większą od* $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *może nawet dosięgnąć téj granicy, która jest jego wartością najmniejszą.*

2° *Jeżeli* a *jest odjemném*, dzieląc nierówność [3] przez $4a$, zmienia się jéj kierunek (206); i wtenczas będzie :

$$[5] \qquad m < \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Tak więc, w tym przypadku, *trójmian może przyjąć wszelką wartość niższą od* $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *może nawet dosięgnąć téj granicy, która jest jego wartością największą.*

W obu przypadkach, wartość największości lub najmniejszości funkcyi m niszczy radykał : a tém samém, wartość odpowiednia zmiennéj niezależnéj x jest $-\frac{b}{2a}$.

Można teraz zbadać łatwo zmiany trójmianu. Widzieliśmy w rzeczy saméj (283), że trójmian może zawsze być położonym pod kształtem :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Otóż, gdy x przechodzi, stopniowo czyli stopniami ciągłemi, od $-\infty$ do $+\infty$, wyraz $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, zawsze dodatny, jest zrazu $+\infty$, zmniejsza się następnie, potém niszczy się dla $x = -\frac{b}{2a}$, potém wzrasta aż do $+\infty$: jego najmniejszością jest zero. Ilość między nawiasami, jako nie różniąca się od wyrazu uważanego, jak tylko przez ilość stałą $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, równa się naprzód $+\infty$, zmniejsza się, dosięga swéj najmniejszości $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, kiedy $x=-\frac{b}{2a}$; potém wzrasta nieograniczenie ze wzrostem x. A, gdy ją pomnożymy przez a dla otrzymania trójmianu, wieloczyn ulega zmianom które są w tymże samym kierunku, jeżeli $a>0$, w kierunku zaś przeciwnym, jeżeli $a<0$.

Więc, *jeżeli* a *jest dodatném, trójmian wychodzi z* $+\infty$, *zmniejsza się aż do pewnéj najmniejszości* $\frac{4ac-b^2}{4a}$, *potém wzrasta aż do* $+\infty$. *Jeżeli* a *jest odjemném, tenże trójmian wychodzi z* $-\infty$, *wzrasta aż do pewnéj największości* $\frac{4ac-b^2}{4a}$, *potém ubywa aż do* $-\infty$.

342. Zagadnienie II. *Znaleźć między jakiémi granicami może zmieniać się ułamek,*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Zróbmy naprzód to wyrażenie równém m, w skutku czego połóżmy:

$$[1] \qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m.$$

Ztąd się wyciąga:

$$(a-a'm)x^2+(b-b'm)x+(c-c'm)=0;$$

zkąd:

$$x=\frac{-(b-b'm)\pm\sqrt{(b-b'm)^2-4(a-a'm)(c-c'm)}}{2(a-a'm)};$$

albo, porządkując względem m pod radykalem: [2]

$$x=\frac{-(b-b'm)\pm\sqrt{(b'^2-4a'c')m^2-2(bb'-2ac'-2ca')m+(b^2-4ac)}}{2(a-a'm)}.$$

Aby zagadnienie było możebném, potrzeba wybrać taką wartość dla m, ażeby ilość położona pod radykalem nie była odjemną, to jest żeby było:

$$[3] \quad (b'^2 - 4a'c')m^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca')m + (b^2 - 4ac) \geqq 0.$$

Przedstawiają się do rozróżnienia trzy przypadki.

1° $(b'^2 - 4a'c')$ jest dodatném. W tym przypadku, jeżeli pierwiastki trójmianu, który tworzy pierwszy członek nierówności [3], są rzeczywiste i nierówne, trójmian będzie dodatnym (295), to jest tegoż samego znaku jak jego pierwszy wyraz, dla wszelkich wartości m mniejszych od najmniejszego albo większych od największego pierwiastku; tenże trójmian będzie odjemnym dla wszelkich wartości m zawartych między témi pierwiastkami. Nie można więc będzie dawać dla m jak tylko dwa szeregi wartości, jeden obejmujący wszystkie liczby od $-\infty$ aż do najmniejszego pierwiastku *który będzie największością*, drugi obejmujący wszystkie liczby od największego pierwiastku, *który będzie najmniejszością*, aż do $+\infty$.

Jeżeli, przeciwnie, pierwiastki trójmianu są rzeczywiste i równe, albo urojone, trójmian zachowa (296, 297), dla wszelkiéj wartości m, znak swego piérwszego wyrazu: jest więc on zawsze dodatnym, i m może przyjmować wszelkie wartości bez wyjątku. Nie ma, w tym przypadku, ani największości ani najmniejszości.

2° $(b'^2 - 4a'c')$ jest odjemném. W tym przypadku, pierwiastki trójmianu nie są nigdy urojonémi: gdyż, jeśliby one takiémi być mogły, trójmian byłby odjemnym dla wszelkiéj wartości przypisywanéj dla m. Następnie wartości odpowiednie tak na m jak i na x nie byłyby nigdy rzeczywistémi jednocześnie. Otóż ten wniosek jest nie do przypuszczenia; gdyż, podług kształtu zrównania [1], wszelka wartość rzeczywista, przypisywana dla x, dostarczy dla m pewną wartość rzeczywistą odpowiednią. Pierwiastki są więc rzeczywistémi. Lecz nie mogą one być równémi: gdyż, jeśliby niemi były, trójmian byłby odjemnym dla wszelkiéj wartości na m, wyjąwszy tylko jednéj (296), któraby go zniszczyła: wartości odpowiednie na m i na x nie byłyby więc zarazem rzeczywistémi jak tylko w tym jednym przypadku; wniosek równie przypuścić się nie dający, podług kształtu zrównania [1], ilekroć razy, jak to się tu przypuszcza, ułamek [1] nie jest niezależnym od x.

Pierwiastki trójmianu są więc rzeczywistémi i nierównemi. Trójmian będzie więc dodatnym, to jest znaku przeciwnego swemu pierwszemu wyrazowi, dla wszelkiéj wartości na m zawartéj między pierwiastkami ; będzie on odjemnym dla wszelkiéj innéj wartości. Nie będzie więc można przypisywać dla m, jak tylko wartości zawarte między najmniejszym pierwiastkiem *który będzie najmniejszością*, i największym *który będzie największością.*

3° $(b'^2 - 4a'c')$ jest zerem. W tym przypadku, ilość położona pod radykalem jest pierwszego stopnia w m : rozwiązuje się wtedy nierówność [3] jak to było powiedzianém (206). Wiémy że się znajduje największość lub najmniejszość, wedle tego jak spółczynnik m jest odjemnym lub dodatnym.

Streszczając się, widzimy że, *aby wyrażenie* [1] *było największością lub najmniejszością, dosyć jest i potrzeba żeby pierwiastki trójmianu, który tworzy piérwszy członek nierówności* [3], *były rzeczywistémi i nierównémi : te pierwiastki są same przez się największością i najmniejszością, i wartości odpowiednie na* x *są dostarczone przez formułę,*

$$x = \frac{-(b - b'm)}{2(a - a'm)},$$

w któréj zastępuje się m *przez te pierwiastki.*

343. Zmiany wyrażenia $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. Gdy mamy do oznaczenia zmiany którym ulega ułamek drugiego stopnia, kiedy x wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, zaczyna się rachować, podług sposobu poprzedzającego, największość i najmniejszość, które ten ułamek przypuszcza, i wartości odpowiednie na x. Potém równa się kolejno zeru licznik i mianownik wyrażenia, dla otrzymania wartości na x które robią je zerem albo nieskończoną wartością. Nakoniec oznacza się (243) wartości szczególne ułamku, odpowiednie dla $x = \pm \infty$, i dla $x = 0$. Robi się wtenczas tablica wartości zmiennéj tym sposobem otrzymanych, urządzając je porządkiem wielkości, i kładzie się naprzeciw nich wartości odpowiednie funkcyi. Łatwo jest ztąd wyprowadzić zmiany o które nam idzie.

Weźmy na przykład ułamek :

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 8}.$$

Ponieważ $(b'^2 - 4a'c')$ jest dodatném, wpada się w pierwszy przypadek; równając ułamek m, znajduje się że pierwiastkami trójmianu są :

$$m' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}, \quad m'' = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6};$$

m' jest największością, m'' jest najmniejszością. Wartości odpowiedne na x są :

$$x' = 10 - 6\sqrt{2}, \quad x'' = 10 + 6\sqrt{2}.$$

Wartości x, które niszczą ułamek, są pierwiastkami zrównania :

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

są niemi 1 i 2. Wartości, które robią go nieskończonym, są pierwiastkami zrównania :

$$x^2 - 2x - 8 = 0;$$

są niemi -2 i 4. Nakoniec, dla $x = \pm\infty$, ułamek przyjmuje wartość 1; a dla $x = 0$, tenże równa się $-\frac{1}{4}$.

Tworzy się więc tablica następująca :

$$x = -\infty,\ -2,\ 0,\ 1,\ 10 - 6\sqrt{2},\ 2,\ 4,\ 10 + 6\sqrt{2},\ +\infty$$

$$y = +1,\ \pm\infty,\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6},\ 0,\ \mp\infty,\ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6},\ +1.$$

Roztrząsanie. Kiedy x wzrasta od $-\infty$ do -2, funkcya, która jest dodatną, gdyż jéj cztery czynniki są odjemnémi, wzrasta od $+1$ aż do $+\infty$. Zmienia ona wtedy znak, gdyż czynnik $(x+2)$ staje dodatnym, i przechodzi nagle od $+\infty$ do $-\infty$; potem, gdy x nieprzestaje wzrastać od -2 aż do 0, od 0 do 1, i od 1 aż do $10-6\sqrt{2}$, wyrażenie rośnie od $-\infty$ aż do największości $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$. Począwszy ztąd, kiedy x powiększa się aż do 2, i od 2 aż do 4, funkcya zmiejsza się aż do $-\infty$. Potém przechodzi ona nagle od $-\infty$ do $+\infty$; gdyż cztery czynniki są wtedy dodatnémi; zmniejsza się potém aż do najmniejszości $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$; i, gdy nakoniec x wzrasta aż do $+\infty$, funkcya powiększa się od najmniejszości aż do $+1$.

Uwaga. Wykaz powyższy ułatwia pracę początkującym.

344. Zagadnienie III. *Dwie zmienne* x *i* y *są związane jednocześnie przez zrównanie drugiego stopnia :*

$$[1] \qquad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0;$$

znaleźć wartości ostateczne któreby mogła przybrać jedna z nich, x *na przykład.*

Jeżeli się rozwiąże zrównanie względem y, będzie :

$$[2] \qquad y=\frac{-bx-d\pm\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ac)x+d^2-4af}}{2a};$$

albo, kładąc :

$$b^2-4ac=m, \quad bd-2ae=n, \quad d^2-4af=p,$$

$$[3] \qquad y=\frac{-bx-d\pm\sqrt{mx^2+2nx+p}}{2a}.$$

Aby y było rzeczywistém, potrzeba aby x zostało tak wybraném żeby było :

$$[4] \qquad mx^2+2nx+p>0;$$

i widzieliśmy (301), jakim sposobem można, w różnych przypadkach, wyciągnąć z nierówności [4] granice między którémi wartość x powinna być lub nie powinna być zawartą.

TWIERDZENIA OGÓLNE.

345. Twierdzenie I. *Największość wieloczynu dwóch czynników zmiennych* x *i* y, *których summa jest stałą ma miejsce kiedy czynniki są równe.*

W rzeczy saméj, tożsamość

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

pokazuje że w razie gdy $x+y$ jest stałém, wieloczyn xy będzie oczywiście największym kiedy $x-y$ będzie zerem, to jest kiedy x będzie równém y.

Odwrotnie, summa dwóch liczb których wieloczyn xy *jest stałym, jest najmniejszością kiedy te liczby są równe.*

Gdyż tożsamość poprzedzająca, położona pod kształtem

$$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2,$$

pokazuje że, gdy wieloczyn xy jest stałym, najmniejsza wartość summy $x+y$ odpowiada dla $x-y=0$, to jest dla $x=y$.

346. Twierdzenie II. *Największość wieloczynu* xyzuv...., *z* n *czynników dodatnych, których summa jest stałą, ma miejsce kiedy wszystkie te czynniki są równe między sobą.*

Niech będzie, w rzeczy saméj,

$$abcd....kl$$

wieloczym przedstawiający tę największość szukaną. Jeśliby dwa czynniki jakiekolwiek b i c były nierównémi, zastępując je przez ich średnią arytmetyczną

$$\frac{b+c}{2},$$

otrzymalibyśmy nowy wieloczyn

$$a\,\frac{b+c}{2}\,\frac{b+c}{2}\,d....kl,$$

którego czynniki miałyby też samą summę jak czynniki pierwszego, lecz który byłby większym jak pierwszy, ponieważ

$$\frac{b+c}{2}\cdot\frac{b+c}{2}$$

jest większém jak bc.

347. Drugie dowodzenie. *Podzielić liczbę daną* a *na* n *części, którychby wieloczyn był największym możebnym.*

Ponieważ każda część jest mniejszą jak a, ich wieloczyn nie może dosięgnąć a^n : może więc stać się największością. Rozłóżmy liczbę a na n części dodatnych jakichkolwiek, x, y, z,.... u, t, w ten sposób że

$$[1] \qquad x+y+z+....+u+t=a.$$

Ich wieloczyn jest :

$$[2] \qquad xyz....ut.$$

Otóż, przypuśćmy że dwa czynniki x i y nie są równémi, i zastąpmy je, jeden i drugi, w wieloczynie, przez pół summy $\frac{x+y}{2}$, otrzymamy wieloczyn :

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot z....ut.$$

Ponieważ summa dwóch pierwszych czynników nie była zmienną, ten wieloczyn zadosyć jeszcze czyni warunkowi [1]. Lecz, ponieważ te czynniki stały się równemi, mamy (345) :

$$xy<\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2},$$

a, następnie,

$$[3] \qquad xyz....ut < \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} . z....ut.$$

Wieloczyn [2] nie jest więc największością. Tak więc, wieloczyn czynników dodatnych, zmiennych dowolnie, lecz których summa jest stałą, nie może być największością, kiedy te czynniki nie są równemi. A ponieważ największość istnieje, potrzeba ztąd wnosić że *wieloczyn jest największym możebnym, kiedy wszystkie jego czynniki są równemi.*

348. Scholia. Twierdzenie nie przestaje istnieć jeszcze kiedy wszystkie czynniki są odjemnémi i gdy ich liczba jest parzystą; gdyż wieloczyn

$$ad....kl$$

jest jeszcze dodatnym, a, tém samém, nierówność

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} > bc$$

pociąga za sobą

$$a . \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} . d....kl > abcd....kl.$$

Jeżeli wszystkie czynniki są odjemnemi i znajdują się w liczbie nieparzystéj, wieloczyn

$$adf...,kl$$

jest odjemnym, i nierówność

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} > bc$$

pociąga za sobą

$$a . \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} . df....kl < abcdf....kl,$$

to jest że wtedy znajdujemy *najmniejszość.*

349. Twierdzenie III. *Wieloczyn ilukolwiek czynników dodatnych których summa jest stałą, i z których każdy jest podniesionym do pewnéj potęgi całkowitéj, jest największością kiedy czynniki są proporcyonalnémi do ich wykładników, jeśli wszelako to jest możebném.*

W rzeczy saméj, niech będzie na przykład wieloczyn

$$x^m y^n z^p = \text{P},$$

z warunkiem

$$x + y + z = a.$$

Możemy napisać ten wieloczyn pod kształtem

$$\text{P} = \left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p \times m^m n^n p^p.$$

Usunąwszy ostatni czynnik stały $m^m n^n p^p$, zwrócimy uwagę naszą jedynie na wyrażenie zmienne

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p,$$

które można napisać

$$\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\ldots\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\ldots\frac{z}{p}\cdot\frac{z}{p}\ldots$$

Jest to, jak widzimy, wieloczyn złożony z $(m + n + p)$ czynników, z których m są równémi $\frac{x}{m}$, n równémi $\frac{y}{n}$, i p równémi $\frac{z}{p}$; summa wszystkich tych czynników jest

$$m\frac{x}{m} + n\frac{y}{n} + p\frac{z}{p} \text{ albo } x + y + z \text{ albo } a.$$

Więc, największość będzie miała miejsce gdy te czynniki będą równe między sobą; a zatém, jeżeli żaden związek między niémi temu się nie sprzeciwi, potrzeba żeby było

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

Co było do dowodzenia.

350. Możnaby to jeszcze tym sposobem wyprowadzić: Wieloczyn

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots\ldots$$

jest, w rzeczy saméj, największością w tychże samych okolicznościach, jak wyrażenie

$$\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots\ldots}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \ldots\ldots};$$

lecz to wyrażenie może być uważane jako wieloczyn z $\alpha+\beta+\gamma\ldots$ czynników

$$\overbrace{\frac{x}{\alpha},\ \frac{x}{\alpha},\ldots\ldots,}^{\alpha}\qquad \overbrace{\frac{y}{\beta},\ \frac{y}{\beta},\ldots\ldots,}^{\beta}\qquad \overbrace{\frac{z}{\gamma},\ \frac{z}{\gamma},\ldots\ldots,}^{\gamma}$$

których summa

$$\alpha\frac{x}{\alpha}+\beta\frac{y}{\beta}+\gamma\frac{z}{\gamma}+\ldots\ldots \quad \text{albo} \quad x+y+z+\ldots\ldots$$

jest stałą; musi więc być ono największością kiedy te czynniki będą równe między sobą, to jest gdy będziemy mieli

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\ldots\ldots=\frac{x+y+z+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}=\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},$$

oznaczając przez a summę; zkąd się wyciąga

$$x = \frac{a\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

$$y = \frac{a\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

$$z = \frac{a\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

350. Niektórzy autorowie na miejscu tego twierdzenia podają rozwiązanie zagadnienia następującego:

Podzielić liczbę a *na dwie części* x, y, *takie żeby wieloczyn* $x^p y^q$ *był największością:* p *i* q *będąc liczbami całkowitémi danémi.*

Największość szukana odpowiada dla tychże samych wartości względem x i y, jak największość wieloczynu

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q;$$

gdyż to wyrażenie nie jest czém inném jak tylko ilorazem z podzielenia wieloczynu danego przez liczbę stałą $p^p q^q$. Otóż ten nowy wieloczyn może być uważany jako złożony z $(p + q)$ czynników,

$$\frac{x}{p}, \quad \frac{x}{p}, \quad \frac{x}{p}, \ldots\ldots, \frac{x}{p}, \quad \frac{y}{q}, \quad \frac{y}{q}, \quad \frac{y}{q}, \ldots\ldots, \frac{y}{q},$$

których summa,

$$p\,\frac{x}{p} + q\,\frac{y}{q}, \quad \text{albo} \quad x + y,$$

jest stałą i równą a. Jeśli więc jest podobném zrobić wszystkie te czynniki równémi, ten warunek dostarczy (347) największości wieloczynu. Otóż dosyć, na to, położyć:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q};$$

jeżeli ten warunek przypuścić się daje, to przywiedzeni jesteśmy do tego twierdzenia:

Aby podzielić liczbę a *na dwie części* x *i* y *takie żeby wyrażenie* $x^p y^q$ *było największością, potrzeba podzielić* a *na części proporcyonalne wykładnikom* p *i* q.

Dowiodłoby się podobnież, że, aby podzielić a na n części $x, y, z, \ldots, u, t$, takich żeby wieloczyn $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\varphi t^\psi$ był największością, potrzeba zadosyć uczynić warunkóm,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots = \frac{u}{\varphi} = \frac{t}{\psi}.$$

351. Twierdzenie IV. *Jeżeli, mając daną ilość* X, *inna ilość* Y *jest największością w pewnych okolicznościach, to odwrotnie, jeżeli* Y *będzie danêm,* X *będzie najmniejszością w tychże samych okolicznościach; byleby wartość największości zmniejszyła się kiedy wartość dana* X *zmniejsza się.*

W rzeczy saméj, oznaczmy przez A wartość daną X, przez B wartość największości odpowiednią Y, a przez A′ liczbę jakąkolwiek mniejszą od A; z założenia, największość Y odpowiednia dla X = A′ jest mniejszą od B. Więc X jest przynajmniéj równém A kiedy Y jest równém B.

Scholia. To twierdzenie obejmuje w sobie odwrotne propozycye II i III.

Najmniejszość summy ilukolwiek liczb dodatnych, których wieloczyn jest stałym ma miejsce, kiedy te liczby są równémi.

Najmniejszość summy ilukolwiek liczb dodatnych x, y, z,...., *które robią wyrażenie*

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$$

stałém, ma miejsce dla

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots$$

ZASTOSOWANIA TWIERDZENIA I.

352. Wynika bezpośrednio z propozycyi I, że *prostokąt* xy, *ob-*

wodu danego $2(x + y)$, *jest największością kiedy jego wymiary są równémi, to jest kiedy prostokąt staje się kwadratem. A tém samém, ze wszystkich prostokątów tejże saméj powierzchni kwadrat ma najmniejszy obwód.*

Podobnież, *między trójkątami prostokątnémi w których summa* $x + y$ *boków kąta prostego jest stałą, powierzchnia trójkata równoramiennego* $\frac{1}{2}xy$ *jest największością; a ze wszystkich trójkątów prostokątnych tejże saméj powierzchni, w trójkącie równoramiennym summa boków kąta prostego jest najmniejszą.*

353. *Między wszystkiemi trójkątami téjże saméj podstawy* a *i tegoż samego obwodu* 2p, *trójkąt równoramienny jest największością.*

Formuła

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

pokazuje, w rzeczy saméj, że, p i $p - a$ będąc stałémi, S jest największością dla

$$p - b = p - c,$$

to jest dla $b = c$, ponieważ czynniki $p - b$ i $p - c$ mają summę stałą

$$2p - b - c = a + b + c - b - c = a.$$

Odwrotnie, *jeżeli podstawa trójkąta którego wierzchołek jest stałym, posuwa się nie zmieniając długości na linii prostéj danéj, obwód trójkąta jest najmniejszością, kiedy trójkąt jest równoramiennym, to jest kiedy wierzchołek stały wyznacza swoim rzutem środek podstawy.*

354. *Na jednéj prostéj* AA' *są położone dwa punkta stałe* a *i* b; *na drugiéj prostéj* BB' *posuwa się odcinek* cd *długości stałéj; chcemy wiedzieć położenie odcinka,* cd *które odpowiada najmniejszości powierzchni piramidy* abcd.

Przypomnijmy sobie *naprzód* dwie zasady często używane w matematyce elementarnéj:

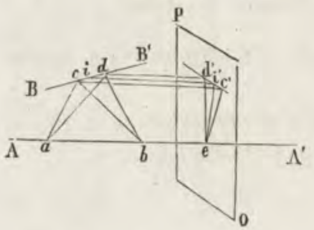
1° Nazywa się *kątem linii prostéj i płaszczyzny,* kąt najmniejszy który ta prosta czyni ze swoim rzutem na płaszczyznie;

2° Rzut linii prostéj na płaszczyznę jest równy wieloczynowi jéj długości przez dostawę kąta który tworzy ta prosta z płaszczyzną rzutów.

To przypuściwszy wróćmy teraz do naszego zadania:

Powierzchnie *acd*, *bcd* są stałémi; idzie więc o zrobienie najmniejszością summy powierzchni *cab*, *dab*, albo też summy prostopadłych spuszczonych z *c* i *d* na AA'. Wyobraźmy sobie rzut figury wykonany na płasyczyznie PQ normalnéj do AA'; odległość $c'd'$, rzut odcinka cd, jest stałą; gdyż, na mocy powyżéj przytoczonéj zasady, mamy:

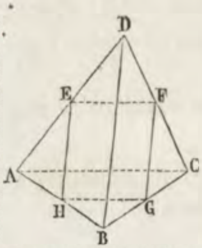
Fig.17



$\overline{c'd'} = \overline{cd}$ dos $(\widehat{cd, c'd'})$; a ponieważ, w drugim członku tego wyrażenia, pierwszy czynnik, odcinek cd, jest stałym, drugi czynnik, dos $(\widehat{cd, c'd'})$, zależy od kąta linii prostéj i płaszczyzny, który także jest stałym, a więc odległość $c'd'$ musi być zarówno stałą. Z drugiéj strony ed', ec' są równe prostopadłym spuszczonym z c i d na AA; otóż, wedle zagadnienia, poprzedzającego, $ec' + ed'$ jest najmniejszością, kiedy środek i' odległości $c'd'$ jest spodkiem prostopadłéj spuszczonéj z punktu e na $c'd'$; wtenczas ei' jest rzutem najkrótszéj odległości prostych stałych AA', BB'. Więc powierzchnia piramidy *abcd* jest najmniejszością, kiedy środek cd jest punktem w którym najkrótsza odległość między AA' i BB' spotyka BB'.

355. *Przeciąć czworościan* ABCD *płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi przeciwległych* AC, BD, *tak żeby przecięcie* EFGH *miało powierzchnią największą możebną.*

Fig.18



Ponieważ płaszczyzna sieczna ma być równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych AC i BD, przecięcie EFGH jest równoległobokiem, w którym kąt jest stały jako równy kątowi krawędzi AC i BD. Ztąd wynika że największość powierzchni tego równoległoboku, będzie miała miejsce jednocześnie z największością powierzchni prostokąta którego dwoma wymiarami są GH i GF.

Owóż,
$$\frac{HG}{AC}=\frac{BG}{BC} \quad \text{i} \quad \frac{GF}{BD}=\frac{GC}{BC};$$

więc
$$HG\,.\,GF=\frac{AC\,.\,BD}{\overline{BC}^2}\times BG\,.\,GC.$$

Teraz zauważmy że czynnik pierwszy $\frac{AC\,.\,BD}{\overline{BC}^2}$ jest stałym, a summa dwóch czynników zmiennych BG i GC równa się krawędzi CB. Więc wieloczyn BG . GC jest największością gdy te czynniki zmienne, są równemi. Ztąd wnosimy że w czworościanie płaszczyzna równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych wyznacza przecięcie będące największością gdy jest równooddalona od tych krawędzi.

356. *Wpisać w trójkąt, którego podstawą jest* b *a wysokością* h, *prostokąt któregoby powierzchnia była największością.*

Dla wpisania prostokąta w trójkąt, prowadzi się jakakolwiek równoległa do podstawy, i z punktów w których ta równoległa przecina dwa inne boki, spuszcza się prostopadłe na podstawę. Otóż, łatwo pojąć, że, jeżeli równoległa jest poprowadzoną w bliskości wierzchołka, powierzchnia prostokąta jest bardzo małą; że ta powierzchnia powiększa się aż do pewnéj granicy, w miarę jak równoległa oddala się od wierzchołka; lecz że zmniejsza się ona późniéj aż do zera, kiedy równoległa zbliża się nieograniczenie do podstawy. Powierzchnia ma więc największość.

Oznaczmy przez x wysokość a przez y podstawą prostokąta (odpowiednio równoległe do wysokości i do podstawy trójkąta); i starajmy się zrobić powierzchnią równą ilości danéj m, kładąc:

[1] $$xy=m.$$

Geometrya dostarcza łatwo, między dwoma zmiennemi x i y, związku,

[2] $$\frac{y}{b}=\frac{h-x}{h},$$

który dozwoli wyrugować y ze zrównania [1]. Znajdziemy tym sposobem :

$$[3] \qquad \frac{bx(h-x)}{h}=m.$$

Zamiast rozwiązywać to zrównanie, i roztrząsać warunki którym powinno zadosyć czynić m, żeby x było rzeczywistém, można zauważyć że największość wyrażenia [3] ma miejsce jednocześnie z największością wieloczynu $x(h-x)$, który od niego różni się tylko przez czynnik stały $\frac{b}{h}$. Otóż dwa czynniki x i $(h-x)$ mają summę stałą h: więc, jeżeli jest podobna zrobić je równemi, otrzyma się tym sposobem największość szukana. Otóż, dla zrobienia tych czynników równémi, potrzeba położyć $x=\frac{h}{2}$; a, tém samem $y=\frac{b}{2}$. Te wartości przyjąć się dają. Więc, *aby wpisać w trójkąt prostokąt największy, potrzeba poprowadzić rownoległą od podstawy przez połowę wysokości*. Wreszcie powierzchnia tego prostokąta jest : $xy=\frac{bh}{4}$. Jest więc ona połową powierzchni trójkąta.

357, *Opisać na sferze danéj, promienia* R, *ostrokrąg któregoby objętość była najmniejszą możebną*.

Dla opisania ostrokręgu jakiegokolwiek na sferze, uważa się wielkie koło ; kreśli się jednę z jego średnic, potem styczną w jednym z końców téj średnicy, i styczną jakąkolwiek która się przedłuża aż do pierwszéj, z jednéj strony, i aż do średnicy, z drugiéj. Potém obraca się około średnicy pół obwodu koła i trójkąt otrzymany przez te trzy linie proste ; ten trójkąt tworzy ostrokrąg.

Otóż łatwo widzimy że, kiedy styczna ruchoma jest prawie równoległą do osi, objętość ostrokręgu, którego wysokość jest bardzo wielką, jest sama przez się niezmiernie wielką ; że w miarę jak styczna nachyla się, objętość zmniejsza się aż do pewnéj granicy ; i że wzrasta późniéj nieograniczenie, kiedy styczna ruchoma dąży do położenia równoległego ze styczną stałą, gdyż wtenczas podstawa wzrasta nieograniczenie. Objętość ma więc najmniejszość.

Dla otrzymania jéj, oznaczmy przez x wysokośc ostrokręgu, a przez y promień jego podstawy, i zróbmy jego objętość równą pewnéj ilości danéj m, kładąc :

$$[1] \qquad \frac{1}{3}\pi y^2 x = m.$$

Geometrya dostarcza łatwo, między zmiennemi x i y związku,

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2R)}},$$

albo [2]
$$y^2 = \frac{R^2 x}{x-2R},$$

który dozwoli wyrugować y ze zrównania [1]. Znajdujemy tym sposobem :

$$[3] \qquad \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{x-2R} = m.$$

Możnaby było rozwiązać to zrównanie, i roztrząsać warunki możebności zagadnienia : wyciągnęłaby się ztąd najmniéjszość ilości m. Lecz prościéj jest zauważyć, że, czynnik $\frac{1}{3}\pi R^2$ jako stały, da się znieść, i że najmniejszość wyrażenia [3] ma miejsce jednocześnie jak najmniejszość wyrażenia $\frac{x^2}{x-2R}$. Otóż najmniejszość tego ostatniego odpowiada największości wyrażenia wywróconego $\frac{x-2R}{x^2}$.

Wreszcie, mamy jednako :

$$\frac{x-2R}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{2R}{x}\right) = \frac{1}{2R} \cdot \frac{2R}{x}\left(1 - \frac{2R}{x}\right);$$

z czego widzimy, że usunąwszy czynnik stały $\frac{1}{2R}$, wieloczyn $\frac{2R}{x}\left(1 - \frac{2R}{x}\right)$ składa się z dwóch czynników których summa jest stałą i równą 1. Ten wieloczyn będzie więc największością, gdy oba czynniki będą równe $\frac{1}{2}$, to jest gdy będzie się miało $x=4\mathrm{R}$. Ta wartość na x przyjąć się da, gdyż x może się zmieniać od $2\mathrm{R}$ aż do nieskończoności.

Tak więc *ostrokrąg najmniejszy, opisany na sferze, ma wysokość podwójną średnicy sfery. Jego objętość, wyprowadzona z wyrażenia* [3], *równa się* $\frac{8}{3}\pi\mathrm{R}^3$, *jest podwójną objętości sfery. Jego podstawa* $\pi\mathrm{y}^2$ *wyciągnięta ze zrównania* [2], *jest równą* $2\pi\mathrm{R}^2$, *czyli podwójną powierzchni wielkiego koła. Nakoniec, jego powierzchnia cała* $\pi y\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}+\pi\mathrm{y}^2$, *jest równą* $8\pi\mathrm{R}^2$; *czyli podwójną powierzchni sfery.*

358. Prawidło ogólne. Przykłady, które świeżo rozwiązaliśmy, wystarczają dla pokazania jak się postępuje, w algebrze elementarnéj, przy wyszukiwaniu największości i najmniéjszości pewnych funkcyj drugiego stopnia, które zależą tylko od jednéj zmiennéj niezależnéj. *Śledzi się naprzód, o ile tylko podobna, pochód funkcyi, dla rozpoznania istnienia największości lub najmniejszości. Wybiera się potém pewne zmienne dostarczone przez pytanie, i wyraża się funkcya za pomocą tych zmiennych. Potém równa się wyrażenie otrzymane ilości* m, *i pisze się zrównania, których dostarczy wysłowienie, pomiędzy różnémi zmiennémi. Te zrównania pozwolą wyznaczyć zmienną niezależną w funkcyi* m : *a roztrząsanie warunków możebności zagadnienia da poznać granice które dostarczą, jeśli to ma miejsce, największość i najmniejszość wyrażenia.*

ZASTOSOWANIA TWIERDZENIA II.

359. *Ze wszystkich równoległościanów prostokątnych téjże saméj powierzchni sześcian ma największą objętość.*

W rzeczy saméj, oznaczając przez x, y, z, trzy krawędzie, powierzchnia i objętość równoległościanu mają za wyrażenie

$$2(xy+xz+yz) \quad \text{i} \quad xyz.$$

Otóż xyz jest największością jednocześnie ze swym kwadratem $x^2y^2z^2$, który jest wieloczynem trzech czynników xy, xz, yz, których summa jest daną; ten wieloczyn nabędzie więc największą wartość dla

$$xy = xz = yz, \quad \text{albo} \quad x = y = z.$$

360. *Największość powierzchni trapezu równoramiennego* ABCD, *którego mała podstawa* $AB = a$, *i długość spólna* c *dwóch boków* BC, AD *nierównoległych pozostają stałemi.*

Fig 19

Niech będzie x większa podstawa CD; powierzchnia trapezu ma za wyrażenie

$$\frac{x+a}{2}\sqrt{c^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+a)^2(x+2c-a)(2c+a-x)}.$$

Otóż to wyrażenie jest największością jednocześnie z wieloczynem

$$(1) \qquad \frac{x+a}{\alpha} \cdot \frac{x+a}{\alpha} \cdot \frac{x+2c-a}{\beta} \cdot \frac{2c+a-x}{\gamma},$$

w którym α, β, γ są liczbami dowolnémi. Jeżeli więc wyznaczymy α, β, γ, tak aby spółczynnik x stał się zerem w summie cztérech czynników poprzedzających, to jest tak żeby było

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0,$$

wieloczyn (1) będzie największością kiedy czynniki będą równemi, to jest gdy będziemy mieli

$$\frac{x+a}{\alpha} = \frac{x+2c-a}{\beta} = \frac{2c+a-x}{\gamma}.$$

Wyrugowanie $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ między trzema zrównaniami poprzedzającemi daje zrównanie

$$(2) \qquad x^2 - ax - 2c^2 = 0$$

którego pierwiastek dodatny

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

przedstawia największą z dwóch podstaw trapezu szukaną. Gdy cztery boki trapezu będą wyznaczone, będzie łatwo wykreślić go i wyrazić jego powierzchnią w funkcyi danych a i c.

Można wreszcie zauważyć że zrównanie (2), położone pod kształtem

$$x \cdot \frac{x-a}{2} = c^2 \quad \text{albo} \quad \mathrm{CD} \times \mathrm{DE} = \overline{\mathrm{AD}}^2,$$

dowodzi że trójkąt CAD jest prostokątnym w A; CD jest więc średnicą koła opisanego na trapezie.

Dla $c = a$, mamy $x = 2a$; boki BC, AB, AD, są równémi promieniowi koła opisanego na trapezie, i każdy z kątów DAB, ABC zawiera 120 stopni. W tym razie trapez największy staje się pół sześciokątem foremnym.

Ten zręczny sposób zależący na pomnożeniu lub podzieleniu przez liczby dowolne które się potém wyznaczą, tak aby czynniki mające wchodzić w skład największości wieloczynu miały zawsze summę stałą, został wskazanym przez p. *Grillet* (*Nouvelles Annales*).

ZASTOSOWANIA TWIERDZENIA III.

361. *Największy równoramienny trójkąt wpisany w koło.*

Niech będą r promień koła, $2x$ podstawa trójkąta, y jego wysokość. Powierzchnia xy trójkąta będzie największością w tychże samych okolicznościach jak i kwadrat x^2y^2; wreszcie, pół podstawy jest średnio proporcyonalną między wysokością i przewyżką średnicy nad tą wysokością, mamy więc :

$$x^2 = y(2r - y),$$

a tém samém,

$$x^2y^2 = (2r - y)y^3.$$

Summa $(2r - y) + y$ jest stałą, wynika więc z twierdzenia III że wyrażenie poprzedzające jest największością dla

$$\frac{2r - y}{1} = \frac{y}{3}, \quad y = \frac{3}{2}r, \quad 2x = r\sqrt{\ }\ .$$

Trójkąt jest wtedy *równobocznym.*

362. *Największość powierzchni bocznej ostrokręgu wpisanego w sferę.*

Oznaczając przez r promień sfery, przez y wysokość ostrokręgu a przez x promień podstawy, mamy zrobić największością wyrażenie $\pi x\sqrt{x^2 + y^2}$, w którem zmienne x i y są jeszcze połączone z sobą za pomocą związku

$$x^2 = (2r - y)y.$$

To wyrażenie jest największością jednocześnie ze swym kwadratem

$$\pi^2x^2(x^2 + y)^2 = 2\pi^2r(2r - y)y^2;$$

otoż wieloczyn $(2r - y)y^2$ nabędzie na mocy twierdzenia III, największą wartość dla

$$\frac{2r - y}{1} = \frac{y}{2} \quad \text{albo} \quad y = \frac{4}{3}r.$$

363. *Wpisać, w sferę promienia danego* R, *walec któregoby objętość była największością.*

Kiedy promień podstawy walca jest bardzo małym, objętość ma pewną bardzo małą wartość. Ta wartość powiększa się, w miarę jak promień wzrasta. Lecz to wzrastanie ma pewną granicę; gdyż, kiedy promień staje się nieomal równym R, wysokość staje się bardzo małą, a tém samém objętość jest prawie zerem.

Oznaczmy przez x promień podstawy, a przez $2y$ wysokość jednego z walców wpisanych; jego objętość V będzie miała za wyrażenie $2\pi x^2 y$. Wreszcie geometrya daje, między x i y, związek:

$$[1] \qquad x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2.$$

Ztąd wynika, rugując x,

$$[2] \qquad \mathrm{V} = 2\pi y(\mathrm{R}^2 - y^2).$$

Otóż największość tego wyrażenia odpowiada téjże saméj wartości na y, jak największość wieloczynu $y(\mathrm{R}^2 - y^2)$. Lecz ten wieloczyn nie jest drugiego stopnia; a więc nie jest podobna zastosować sposób zwyczajny (358) dla wyszukania jego największości.

Nie można także rozłożyć wyrażenie na czynniki, pisząc je: $y(\mathrm{R}+y)(\mathrm{R}-y)$, albo, robiąc je podwójném $y(\mathrm{R}+y)(2\mathrm{R}-2y)$; gdyż, chociaż trzy czynniki miałyby wtenczas summę stałą i równą 3R, nie byłoby jednak podobna zrobić je równémi między sobą. Lecz, jeżeli podniesiemy wieloczyn do kwadratu, co daje $y^2(\mathrm{R}^2-y^2)^2$, spostrzeżemy że można uważać y^2 jako zmienną, i że summa dwóch czynników y^2 i $(\mathrm{R}^2 - y^2)$ jest stałą i równą R^2. A zatém, na mocy twierdzenia III, jeżeli można wybrać dla y wartość zadosyć czyniącą proporcyi:

$$[3] \qquad \frac{y^2}{1} = \frac{\mathrm{R}^2 - y^2}{2};$$

Ta wartość odpowiadać będzie największości szukanéj. Otóż ze zrównania [3], wyciągniemy:

$$y^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{3};$$

a tém samém, $$x^2 = \frac{2\mathrm{R}^2}{3}.$$

Te wartości na x i na y przypuścić się dają; gdyż są one rzeczywiste i niższe od promienia R. Objętość największego walca ma więc za wartość : $V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

364. Jest niekiedy korzystnie przywieźć wyszukanie najmniejszości pewnéj funkcyi do wyszukania największości funkcyi odwrotnéj.

Przykład. *Opisać na sferze promienia* R, *ostrokrąg którego podstawa leży na płaszczyznie środkowéj, to jest na płaszczyznie przechodzącéj przez środek sfery, i któregoby objętość była najmniejszością.*

Oznaczmy przez x i przez y promień podstawy i wysokość jednego z ostrokręgów opisanych. Jego objętość V jest równą $\frac{1}{3}\pi x^2 y$. Wreszcie geometrya daje łatwo związek :

$$[1] \qquad x^2 = \frac{R^2 y^2}{y^2 - R^2}.$$

Wyrażenie objętości jest więc :

$$[2] \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{y^3}{y^2 - R^2}.$$

Ponieważ czynnik $\frac{1}{3}\pi R^2$ jest stałym, dosyć w celu wyznaczenia najmniejszości zastanowić się nad ułamkiem $\frac{y^3}{y^2 - R^2}$. Otóż, ten ostatni odpowiada oczywiście największości ułamku odwróconego $\frac{y^2 - R^2}{y^3}$, albo największości jego kwadratu $\frac{(y^2 - R^2)^2}{y^6}$. A, ponieważ mamy jednako :

$$\frac{(y^2 - R^2)^2}{y^6} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2 - R^2}{y^2}\right)^2 = \frac{1}{y^2}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right)^2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{R^2}{y^2}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right)^2,$$

widzimy że, usunąwszy czynnik stały $\frac{1}{R^2}$, summa dwóch czynników $\frac{R^2}{y^2}$ i $\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right)$ jest stałą; jeżeli więc można wybrać dla y

wartość dostarczoną przez związek (350) :

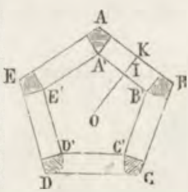
$$\frac{R^2}{y^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right), \qquad [3]$$

ta wartość odpowiadać będzie największości ułamku $\frac{y^2 - R^2}{y^3}$, to jest najmniejszości wywróconego ułamku $\frac{y^3}{y^2 - R^2}$.

Otóż wyciąga się ze zrównania [3], $y^2 = 3R^2$: a tém samém, zrównanie [1] daje : $x^2 = \frac{3R^2}{2}$. Te wartości na x i na y, jako większe od R, przypuścić się dają; a zatém, objętość najmniejsza ostrokręgu opisanego ma za wartość :

$$V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{2}.$$

365. *Na tekturze* ABCDE *mającéj kształt wielokąta foremnego, rysuje się drugi wielokąt foremny* A'B'C'D'E' *podobny piérwszemu, podobnie ustawiony i mający z nim boki równoległe ; z wierzchołków* A', B', C', D', E' *prowadzi się prostopadle na boki piérwszego wielokąta, i wycina się małe czworoboki które są zacieniowane na figurze tu załączonéj. Wyznaczyć apotemę nowego wielokąta pod warunkiem żeby pudełko mające za dno ten wielokąt, a za ściany boczne prostokąty pozostałe, było objętości największéj mozebnéj.*



Oznaczając przez x apotemę OI a przez y wysokość IK pudełka, widzimy łatwo że summa $x + y$ jest stałą jakoteż równą OK, a zaś objętość jest proporcyonalną do x^2y; ta objętość będzie więc największą możebną, kiedy będziemy mieli

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} \quad \text{albo} \quad x = \frac{2}{3}\,\mathrm{OK} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{3}\,\mathrm{OK}.$$

NAJWIĘKSZOŚCI LUB NAJMNIEJSZOŚCI NIEKTÓRYCH FUNKCYJ WIELU ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

366. Zagadnienie I. *Znaleźć między jakiémi granicami może się zmieniać wielomian :*

$$[1] \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F,$$

kiedy zmienne x *i* y *przyjmują wszelkie wartości możebne.*

Zróbmy ten wielomian równym ilości danéj m, kładąc :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=m.$$

Jeżeli weźmiemy y jako nieznaną, wyciąga się z tego zrównania :

$$[2] \quad y=\frac{-(Bx+D)\pm\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)+4Am}}{2A}.$$

Otóż, aby pewna wartość, naznaczona dla m, była zgodną z wartościami rzeczywistemi na x i na y, potrzeba aby, dla téj wartości na m, można było mieć, wybierając x należycie :

$$[3] \qquad (B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF+4Am>0.$$

Rozróżnijmy trzy przypadki :

1° (B^2-4AC) jest dodatném. W tym przypadku, jakiemkolwiek by było m, nierówność [3] jest zawsze możebną; gdyż można zawsze wybrać dla x nieskończoną ilość wartości takich, że trójmian, który tworzy pierwszy członek nierówności, przyjmie znak swego pierwszego wyrazu (298).

2° (B^2-4AC) jest odjemném. W tym przypadku, nierówność [3] jest możebną, jeżeli pierwiastki trójmianu są rzeczywistémi; gdyż dając na x wartości zawarte między témi pierwiastkami, zrobimy trójmian znaku przeciwnego z jego pierwszym wyrazem. Lecz ta nierówność nie jest możebną jak tylko pod tym warunkiem; gdyż, jeśliby pierwiastki były urojone, trójmian zachowałby, dla wszelkiéj wartości przypisywanéj na x, znak swego pierwszego wyrazu, byłby więc ciągle odjemnym (297).

Tak więc powinno się, w tym przypadku, wybierać m w taki sposób, żeby pierwiastki trójmianu były rzeczywistémi. Otóż, ten warunek jest wyrażonym (274) przez nierówność

$$[4] \qquad (BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF + 4Am) > 0.$$

Ponieważ ta nierówność jest pierwszego stopnia w m, można wyprowadzić (206) granicę téj ilości : tém samém będzie miała miejsce, największość lub najmniejszość, jeżeli ta granica przypuścić się daje.

Otóż, ta granica na m niszczy pierwszy członek nierówności [4]; robi więc równémi pierwiastki trójmianu [3]. W skutku czego, ten trójmian może napisać się : $(B^2 - 4AC)(x - x')^2$, oznaczając przez x' wartość pierwiastku podwójnego. Wynika ztąd że wartość [2] na y staje się, w tém przypuszczeniu,

$$y = \frac{-(Bx + D) \pm (x - x')\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

a, ponieważ $(B^2 - 4AC)$ jest odjemném, y nie jest rzeczywistém jak tylko dla $x = x'$.

Potrzeba więc nadać dla x tę wartość; co wymaga żeby y przyjęło wartość odpowiednią

$$y' = -\frac{Bx' + D}{2A}.$$

Te wartości na x i na y przypuścić się dają : dostarczą więc one największość lub najmniejszość na m.

3° $(B^2 - 4AC) = 0$. W tym przypadku, nierówność [3] jest piérwszego stopnia w x : jakąkolwiekby wartość przypisywano dla m, sprawdzenie téj nierówności jest zawsze podobném, wybierając x odpowiednio. Nie ma tu, tém samém, ani największości ani najmniéjszości.

Jeżeliby, wszelako, $(BD - 2AE)$ było zerem jednocześnie z $(B^2 - 4AC)$, nierówność [3] sprowadziłaby się do

$$D^2 - 4AF + 4Am > 0\,;$$

a ztąd dałaby się wyciągnąć granica na m :

$$m > \frac{4AF - D^2}{4A}, \quad \text{albo} \quad m < \frac{4AF - D^2}{4A},$$

podług tego jak A byłoby dodatném lub odjemném. Wielomian miałby więc najmniéjszość w pierwszym przypadku, największość w drugim.

Łatwo rozciągnąć tę teoryą do przypadku w którym mamy więcéj jak dwie zmienne niezależne.

Zastosujemy ją do przykładu następującego :

367. Zagadnienie II. *Znaleźć najmniejszość wyrażenia* $x^2 + y^2 + z^2$, *wiedząc że* x, y, z, *są związane przrz zrównanie*,

$$[1] \qquad ax + by + cz = d.$$

Połóżmy : $$x^2 + y^2 + z^2 = m.$$

Możemy wyrugować jedną ze zmiennych, z, na przykład. Gdyż wyciąga się ze zrównania [1],

$$z = \frac{d - ax - by}{c};$$

a tém samém, $$x^2 + y^2 + \left(\frac{d - ax - by}{c}\right)^2 = m,$$

albo [2] $$(a^2 + c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 - 2adx$$

$$- 2bdy + d^2 - c^2m = 0.$$

Rozwiązując zrównanie [2] względem y, znajduje się, po niektórych uproszczeniach :

$$[3] \quad y = \frac{b(d-ax) \pm c\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)x^2+2adx-d^2+(b^2+c^2)m}}{b^2+c^2}.$$

Ponieważ spółczynnik x^2 w trójmianie położonym pod radykalem, jest odjemny, potrzeba wybierać wartość na m, w taki sposób aby pierwiastki tego trójmianu były rzeczywistémi ; co wymaga żeby było :

$$a^2d^2 + (a^2+b^2+c^2)(-d^2+\{b^2+c^2\}m) > 0,$$

albo $\quad -(b^2+c^2)d^2 + (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)m > 0$;

albo, dzieląc przez (b^2+c^2), i przenosząc :

$$m > \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Jeżeli więc można nadać dla m wartość

$$m = \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2},$$

to będzie ona najmniejszością szukaną.

Otóż, dla téj wartości na m, trójmian, położony pod radykalem, staje się :

$$-(a^2+b^2+c^2)\left(x - \frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)^2.$$

Tém samém, wartość [3] na y jest :

$$y = \frac{b(d-ax) \pm c\left(x - \frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}}{b^2+c^2}.$$

Ta wartość jest rzeczywistą jedynie dla :

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2};$$

i staje się naówczas :

$$y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

A tém samém :

$$z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Te wartości przypuścić się dają; a zatém, one tylko czynią $x^2 + y^2 + z^2$ najmniejszością.

ĆWICZENIA.

I. Jaki jest najmniéjszy między wszystkiemi kwadratami które można wpisać w kwadrat dany, tak ażeby każdy bok zawiérał w sobie jeden wierzchołek?

Znajduje się kwadrat mający za wierzchołki środki boków kwadratu danego.

II. Przypuściwszy że trójkąt równoramienny, wpisany w koło promienia R, obraca się około swéj podstawy, chcemy wiedzieć największość objętości nakreślonéj.

Znajduje się, stosując twierdzenie III (349), że wysokość trójkąta obracającego się musi być równą $\frac{5R}{3}$. Wartość największa objętości jest $\frac{50\pi R^3\sqrt{5}}{81}$.

III. Który ze wszystkich ostrokręgów prostych tejże saméj objętości $\frac{1}{3}\pi a^3$, ma powierzchnią boczną najmniejszą ?

Stosuje się propozycya odwrotna twierdzenia III (351) ; i znajduje się za wysokość, $y = a\sqrt[3]{2}$, a za promień podstawy, $x^2 = \frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$.

IV. Jaki ze wszystkich ostrokręgów prostych tejże saméj powierzchni bocznéj πa^2, ma objętość największą ?

Stosuje się twierdzenie III (349) ; i znajduje się że promień podstawy $x = \dfrac{a}{\sqrt[4]{3}}$, i że wysokość $y = a\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

V. Który z równoległościanów prostokątnych równéj objętości, ma powierzchnią najmniejszą możebną ?

Stosuje się propozycya odwrotna twierdzenia II (351).

VI. Jaka jest strefa sferyczna, o jednéj podstawie, zawiérająca największą objętość pomiędzy strefami mającemi też samą powierzchnią πa^2 ; i na odwrót, jaka jest strefa najmniejszéj powierzchni, pomiędzy strefami zawiérającemi tę samą objętość πa^3 ?

Stosuje się twierdzenie III (349) ; i znajduje się że wysokość i promień podstawy strefy największéj objętości, są, oba, równemi $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$: odcinek największości jest więc pół sferą.

Znajduje się także pół sferę dla najmniejszości, stosując do drugiéj części ćwiczenia twierdzenie IV (351).

VII. Jaki z pomiędzy wszystkich walców téjże saméj objętości V, wpisany jest w najmniejszą sferę ?

Opiérając się na formułach numeru 363, i na scholii twierdzenia IV (351), znajduje się że promień sfery najmniejszéj jest równy $\sqrt[3]{\dfrac{3V\sqrt{3}}{4\pi}}$. Wynika ztąd, dla promienia podstawy walca, $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi\sqrt{2}}}$, a, dla wysokości, $h = \sqrt[3]{\dfrac{2V}{\pi}}$.

VIII. Weźmy tekturę kwadratową ABCD któréj bokiem jest a, i na czterech jéj rogach wytnijmy kwadraty równe które są zacieniowane na figurze tu załączonéj. Oznaczyć bok tych kwadratów, pod warunkiem żeby pudełko, któreby miało za dno $mnpq$ a za ściany boczne prostokąty pozostałe mające wszystkie tę samą wysokość, było największéj objętości.

Znajduje się że bok kwadratu zacieniowanego jest $\dfrac{a}{6}$, a największość objętości $\dfrac{2a^3}{27}$.

IX. Weźmy na linii prostéj punkta równooddalone, oznaczone numerami 1, 2, 3,... n. Znaleźć, po prawéj ich stronie, punkt taki, aby summa kwadratów z jego odległości od punktów danych, rozmnożonych przez odpowiedni numer porządkowy punktu, była najmniejszością.

Aby rozwiązać to pytanie, potrzeba wiedzieć że summa n pierwszych liczb jest równą $\frac{n(n+1)}{2}$, że summa ich kwadratów jest $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, summą ich sześcianów $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Oznaczając przez a odległość dwóch punktów po sobie następujących, a przez x odległość punktu szukanego od pierwszego punktu, wyraża się przez x summa wskazana, a stosując sposób ogólny (358), znajduje się $x=\frac{2}{3}(n-1)a$.

X. Odpowiedzieć na podobneż pytanie, w przypuszczeniu że punkta są oznaczone numerami 1, 3, 6, 10,... $\frac{n(n+1)}{2}$.

Tenże sam sposób prowadzi do $x=\frac{3}{4}(n-1)a$.

XI. Walec kołowy prosty, jest zakończony przez dwie półsfery mające za promień, promień podstawy walca. Powierzchnia cała jest dana i równa $4\pi a$. Chcemy wiedzieć największość objętości bryły.

Oznacza się przez $2x$ wysokość walca, a przez y promień jego podstawy; stosuje się twierdzenie III (349). Jeżeli dwie półsfery są na zewnątrz walca, znajduje się: $x=0$, $y=a$; walec sprowadza się do sfery. Jeżeli półsfery są wewnętrzne, znajduje się: $x=\frac{4a}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

XII. Znaleźć największość powierzchni trójkąta prostokątnego, wiedząc że summa przeciwprostokątnéj i wysokości odpowiedniéj jest równą a.

Znajduje się największość powierzchni równa $\frac{a^2}{9}$. Przeciwprostokątną est $\frac{2a}{3}$, a wysokością $\frac{a}{3}$. Dwa boki kąta prostego są równémi $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

XIII. W którym, ze wszystkich trójkątów prostokątnych tegoż samego obwodu $2p$, summa dwóch boków kąta prostego i wysokości spuszczonéj na przeciwprostokątną jest największością?

Znajduje się, stosując sposób ogólny, że trójkąt jest równoramiennym, że jego przeciwprostokątna jest równą $2p(\sqrt{2}-1)$, jego wysokość $p(\sqrt{2}-1)$, a każdy bok kąta prostego $p(2-\sqrt{2})$.

XIV. Wpisać, w koło promienia r, trapez któregoby boki nierównoległe były równémi a, i któregoby powierzchnia była największością.

Znajduje się że największość trapezu jest prostokątem, którego podstawy są równémi $\sqrt{4r^2 - a^2}$.

XV. Wpisać, w sferę promienia R, ostrokręg któregoby powierzchnia cała była największością.

Stosując sposób wskazany przez p. Grillet (360), znajduje się że wysokość ostrokręgu jest równą $\frac{R(23 - \sqrt{17})}{16}$.

XVI. Opisuje się na sferze promienia R, pień pyramidy foremnéj, któréj podstawami są ośmiokąty foremne. Chcemy wiedzieć najmniejszość objętości pnia, kiedy się zmienia nachylenie α ścian bocznych na wielką podstawę.

Znajduje się, za wyrażenie objętości,

$$V = \frac{16(\sqrt{2} - 1)R^3}{3}\left(\frac{4}{\text{wst}^2\alpha} - 1\right);$$

w przypadku najmniejszości, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $V = 16(\sqrt{2} - 1)R^3$.

XVII. Mała powierzchnia biała jest położona poziomo na stole, i oświecona przez lampę, któréj odległość od téj powierzchni, oceniona jéj rzutem poziomym, jest stałą i równą d. Do jakiéj wysokości x powinien się podnieść płomień, ażeby oświecenie powierzchni było największém ?

Wiemy że natężenie światła, jakie odbiéra powierzchnia, jest proporcyonalne do wstawy nachylenia promieni, i odwrotnie proporcyonalne do kwadratu z odległości światła od punktu oświeconego powierzchni. Jeżeli oznaczymy przez α nachylenie, znajduje się, na przypadek największości, stosując sposób podany w twierdzeniu III (349) :

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{zkąd} \quad x = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Należy wykreślić rozwiązanie.

XVIII. Znaleźć najmniejszość wartości $\frac{\text{sty}\,3a}{\text{sty}^3 a}$, kiedy a zmienia się od 0° do 30°.

Kładąc : sty $a = x$, i zastępując sty $3a$ przez jéj wartość w x, znajduje się, sposób zwyczajny (358), największość $(17 - 12\sqrt{2})$, którą odrzucić należy, gdyż odpowiada dla $x = \sqrt{2} + 1$; potém najmniejszość $(17 + 12\sqrt{2})$ którą przyjąć należy, i która odpowiada dla $x = \sqrt{2} - 1$, to jest dla $a = \frac{\pi}{8}$.

XIX. Dwa ciała, mass m i m', ożywione, w tymże samym kierunku, prędkościami v i v', uderzają jedno o drugie. Znaleźć prędkość spólną x, którą te ciała przyjmą po uderzeniu, pod warunkiem żeby summa wieloczynów otrzymanych, mnożąc każdą massę przez kwadrat ze zmienionéj prędkości, była najmniejszą możebną.

Ilość któréj najmniejszości szukamy jest trójmianem drugiego stopnia w x, i, stosując do tego trójmianu prawidło (342), znajduje się:

$$x = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

XX. Jeżeli mamy $x + y = a$, to prawidło (350), które dostarcza największość $x^p y^q$, rozciąga się do przypadku w którym p i q są ułamkowémi:

Ponieważ można zawsze położyć: $p = \frac{p'}{d}$, $q = \frac{q'}{d'}$, dosyć zauważyć że wówczas $x^p y^q = \sqrt[d]{x^{p'} y^{q'}}$.

XXI. Mamy zrównanie:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

chcemy wiedzieć ostateczne granice wartości które może przyjąć jedna z trzech zmiennych, x na przykład.

Przyjmie się pochód odpowiedni postępowaniu numeru 344.

XXII. Znaleźć najmniejszość $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, wiedząc że mamy:

$$ax + by + cz + du = k.$$

Pochód odpowiedni postępowaniu numeru 367.

XXIII. Znaleźć największość wyrażenia $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$.

Stosując twierdzenie I, znajduje się:

$$x = \frac{2ab}{a-b}, \quad \text{i} \quad \frac{(x+a)(x-b)}{x^2} = \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

XXIV. Znaleźć najmniejszość $\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}$.

Znajduje się $x=0$; i najmniejszość jest 2.

XXV. Mamy zrównanie :

$$Ax^4+By^4+Cz^4+2Dx^2y^2+2Ex^2z^2+2Fy^2z^2+Mx^2+Ny^2+Pz^2+Q=0;$$

chcemy wiedzieć między jakiemi granicami może zmieniać się $x^2+y^2+z^2$.

Kładzie się $x^2+y^2+z^2=m$; ruguje się z, i postępuje się drogą wskazaną w numerze 366.

XXVI. Między jakiemi granicami może się zmieniać wyrażenie

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z-3x)^2+2x-y+z+10,$$

kiedy x, y, z, przyjmują wszelkie wartości możebne ?

Robi się wyrażenie dane równém m; i postępuje się drogą wskazaną w numerze 366.

XXVII. W trzech zrównaniach z dwiema nieznanemi :

$$ax+by=d,\quad a'x+b'y=d',\quad a''x+b''y=d''$$

istnieje nieskończona liczba czynników λ, λ', λ'', takich, że pomnożywszy pierwsze zrównanie przez λ, drugie przez λ', a trzecie przez λ'', potém, dodając rezultata, otrzymuje się zrównanie kształtu,

$$x=d\lambda+d'\lambda'+d''\lambda''.$$

Znaleźć czynniki λ, λ', λ'' które, spełniając ten warunek, robią summę $\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2$ najmniejszą możebną.

Kładąc : $\qquad \lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2=m;$

mamy warunki : $\qquad a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''=1,$

$$b\lambda+b'\lambda'+b''\lambda''=0,$$

i stosuje się sposób ogólny (358).

XXVIII. Dwie liczby dodatne zmienne x, y, są takiemi, że ich różnica jest liczbą dodatną a. Chcemy wiedzieć czy wyrażenie $\frac{x^m}{y^m}$ może mieć największość lub najmniejszość, m i n będąc liczbami dodatnemi danemi.

Jeżeli mamy: $x < y$, $m < n$, znajduje się (350) największość, kiedy $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Jeżeli mamy: $x > y$, $m > n$, znajduje się najmniejszość, kiedy $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Lecz jeżeli mamy: $x < y$, $m > n$; albo $x > y$, $m < n$, nie ma ani największości ani najmniejszości.

XXIX. Summa $x + y$ jest daną i równą $2a$; między jakiémi granicami może się zmieniać wyrażenie $x^3 + y^3$?

Jeżeli a jest dodatném, wyrażenie jest najmniejszością, kiedy x i y są równemi między sobą.

ROZDZIAŁ XX

O POSTĘPACH.

O POSTĘPACH ARYTMETYCZNYCH ALBO RÓŻNICOWYCH.

368. Definicye. *Postęp arytmetyczny* albo *różnicowy* jest to szereg liczb takich, że każda z nich przewyższa liczbę poprzedzającą lub od niéj jest przewyższoną o pewną ilość stałą, która nazywa się *stosunkiem* postępu.

Kiedy wyrazy powiększają się od pierwszego zacząwszy, postęp jest *rosnący*; jest on *malejący*, gdy jego wyrazy postępują zmniejszając się.

Dla wskazania że liczby stanowią część postępu, pisze się jedne wciąż drugich, przedzielając je punktem, i poprzedzając znakiem $\div$.

Przykłady. Szeregi

$$\div\ 3 . 7 . 11 . 19 . 23 . 27 \ldots,$$

$$\div\ 48 . 45 . 42 . 39 . 36 . 33 . 30 \ldots,$$

stanowią dwa postępy różnicowe, jeden rosnący, drugi malejący: stosunkami ich odpowiedniemi są 4 i 3.

Zniesie się łatwo uznane przez nas na początku rozróżnienie między postępami, rosnącym i malejącym, jeżeli nadal dobrowolnie przyjmiemy: *że stosunek w postępie różmicowym jest przewyżką jakiegokolwiek wyrazu nad wyrazem poprzedzającym.* Jeżeli postęp jest malejący, ta przewyżka jest odjemną. Na przykład, drugi z dwóch postępów wskazanych ma za stosunek — 3.

W ogólności, oznaczywszy wyrazy postępu różnicowego przez litery $a, b, c, \ldots i, k, l, \ldots$, stosunek dodatny lub odjemny przez r, liczbę zaś wyrażającą miejsce wyrazu l przez n, będziemy mieli :

$$[1] \qquad \div\, a.b.c.d\ldots.i.k.l\ldots.$$

369. Wartość wyrazu zajmującego w postępie miejsce n. Na mocy określenia, każdy wyraz, w postępie rosnącym, tworzy się dodając stosunek do wyrazu poprzedzającego. Drugi jest więc równym $a+r$, trzeci $a+2r$, czwarty $a+3r, \ldots$. nakoniec, wyraz n[ty] jest równym $a+(n-1)r$. Więc *wyraz jakikolwiek tworzy się dodając do pierwszego stosunek tyle razy wzięty ile jest wyrazów przed nim.* Co właśnie zwykle się wyraża za pomocą wzoru :

$$[2] \qquad l=a+(n-1)r.$$

Ta formuła stosuje się do przypadku w którym postęp jest malejącym, byleby tylko litera r przedstawiała liczbę odjemną (368).

470. Wnioski. Formuła [2], wyrażająca związek czterech liczb a, l, r, n, dozwoli oznaczyć jedną z nich, gdy trzy inne są dane : dosyć na to rozwiązać zrównanie względem ilości nieznanéj. Dostarczy więc ona rozwiązania czterech zagadnień łatwych do wysłowienia, które w formułach tak się wyrażają :

$$[3] \qquad \left\{\begin{array}{ll} l=a+(n-1)r, & a=l-(n-1)r, \\ r=\dfrac{l-a}{n-1}, & n=1+\dfrac{l-a}{r}. \end{array}\right.$$

371. Wstawienie średnich arytmetycznych. Wstawić m średnich arytmetycznych między dwie liczby dane a i b, jest to utworzyć postęp, którego a i b są wyrazami skrajnemi, pośredniemi zaś wyrazy szukane w ilości m.

Wystarczy oczywiście, dla rozwiązania tego pytania, znaleźć stosunek postępu; gdyż, dodając go do pierwszego wyrazu, znajdzie się drugi; dodając go do drugiego, znajdzie się trzeci; i tak daléj. Otóż znamy, w postępie szukanym, pierwszy wyraz a, ostatni b, i liczbę wyrazów $(m+2)$. Przeto we wzorze [2] położywszy $(m+2)$ za n, otrzymamy :

$$[4] \qquad r = \frac{l-a}{m+1}.$$

Przykład. Wstawić 10 średnich między 5 i 38. Stosunkiem jest :

$$r = \frac{38-5}{11} \text{ czyli } 3;$$

a więc postępem szukanym jest oczywiście :

$$\div\ 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32 . 35 . 38.$$

372. Zagadnienie. *Otrzymać warunek, aby trzy liczby dane* a, b, c, *stanowiły część tego samego postępu.*

Przypuśćmy te liczby uporządkowane według ich wielkości : będą one rozłączone, w postępie nieznanym, wyrazami pośredniemi, które mogą być uważane jako średnie wstawione między a i b, i między b i c. Przeto, jeżeli oznaczymy te ilości średnich przez $(m-1)$ i przez $(n-1)$, stosunek musi być równym (371) $\frac{b-a}{m}$ i $\frac{c-b}{n}$; potrzeba więc żeby było:

$$[5] \qquad \frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{n}.$$

Takim jest warunek szukany; *potrzeba więc aby istniały dwie liczby całkowite* m *i* n, *proporcyonalne do róznic* (b — a) *i* (c — b).

Ten warunek jest zawsze spełnionym, kiedy liczby a, b, c, są wymiernémi : gdyż, jeżeli liczby $(b-a)$ i $(c-b)$ są ułamkowemi, wystarczy sprowadzić je do jednakowego mianownika, i wziąć m i n równemi licznikóm. Pomnożywszy oba rezultaty przez tęż samą liczbę całkowitą jakąkolwiek, otrzymamy inne wartości dla m i n; tak że zagadnienie ma, w tym przypadku, nieskończoną ilość rozwiązań.

373. Twierdzenie. *Jeżeli pomiędzy dwa wyrazy po sobie następujące postępu różnicowego, wstawimy tęż samą liczbę średnich arytmetycznych, postępy częściowe tym sposobem otrzymane tworzą jedyny i ten sam postęp.*

W rzeczy saméj, ponieważ wstawiamy tęż samą liczbę średnich arytmetycznych między dwa wyrazy po sobie następujące, i ponieważ różnica tych dwóch wyrazów jest stałą, stosunek jest tenże sam we wszystkich postępach częściowych; a gdy ostatni wyraz każdego z nich, jest zarazem pierwszym następującego, to postępy te częściowe wiążąc się z sobą tym sposobem tworzą oczywiście jedyny i tenże sam postęp.

374. Twierdzenie. *W każdym postępie róznicowym ograniczonym, summa wyrazów równooddalonych od skrajnych jest stałą i równą summie wyrazów skrajnych.*

Niech będzie, w rzeczy saméj, postęp :

$$\div\ a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, i \,.\, k \,.\, l;$$

drugi wyraz b jest równym $a+r$, a przedostatni k jest równym $l-r$; więc ich summa $b+k=a+l$. Ogólnie, wyraz x, mający p wyrazów przed nim, jest równym (369) $a+pr$, a wyraz y, mający p wyrazów po nim, jest równym $l-pr$; więc ich summa $x+y$ jest równa $a+l$.

Uwaga. Kiedy postęp zawiera liczbę nieparzystą wyrazów, znajduje się w środku wyraz równooddalony od dwóch skrajnych. Ten wyraz wzięty dwa razy równa się summie skrajnych.

Tym sposobem w postępie

$$\div\ 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20.$$

wyrazy 2 i 20, 5 i 17, 8 i 14, dają tęż samą summę 22, która jest równą wyrazowi *środkowemu* 11, wziętemu dwa razy.

375. Summa wyrazów postępu. Oznaczmy przez S summę wyrazów postępu zaczynającego się od a, kończącego na l, i w którym n jest liczbą wyrazów. Mamy :

$$S = a + b + c + d + \ldots + i + k + l.$$

Owóż, biorąc wyrazy postępu w porządku odwrotnym, mamy także :

$$S = l + k + i + \ldots + d + c + b + a,$$

Dodając stronami, otrzymamy :

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+i) + \ldots + (i+c) + (k+b) + (l+a).$$

Lecz wszystkie summy, zamknięte w nawiasach, są równémi (374) summie skrajnych $(a+l)$; wreszcie ich liczba jest liczbą wyrazów postępu. Mamy więc :

$$2S = (a+l)n;$$

zkąd : [6] $$S = \frac{(a+l)n}{2}.$$

Zatém, *summa wyrazów postępu różnicowego jest połową wieloczynu summy skrajnych przez ilość wyrazów postępu.*

Przykład. Summa 12stu wyrazów postępu (371) jest $\dfrac{(5+38)\times 12}{2}$ albo 258.

Uwaga. Gdyby się znało tylko piérwszy wyraz a, stosunek r, i liczbę n wyrazów, potrzebaby było, dla zastosowania formuły poprzedzającéj, zacząć od wyrachowania ostatniego wyrazu l, za pomocą formuły [2]. Podstawiając jego wartość we wzorze [6] otrzymamy :

[7] $$S = \frac{\{2a + (n-1)r\}n}{2}.$$

Ta formuła przedstawia się niekiedy pod kształtem :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

376. Zastosowania. 1° Znaleźć summę n liczb początkowych

całkowitych,

$$1+2+3+\ldots+n.$$

Ponieważ te liczby tworzą postęp którego stosunkiem jest 1, ich summa jest :

[8] $$S=\frac{(1+n)n}{2}, \quad \text{albo} \quad S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Więc, *dla otrzymania summy* n *liczb początkowych całkowitych, mnoży się ostatni wyraz przez następujący po nim bezpośrednio, i dzieląc ich wieloczyn przez* 2.

2° Znaleźć summę n liczb początkowych nieparzystych,

$$1+3+5+7+\ldots$$

Te liczby tworzą postęp którego stosunkiem jest 2 ; stosując formułę [7] znajduje się :

[9] $$S=\frac{\{2+2(n-1)\}n}{2}, \qquad \text{albo} \qquad S=n^2.$$

Zatém *summa* n *liczb początkowych nieparzystych jest równa kwadratowi z* n.

3° Znaleźć liczbę wyrazów postępu różnicowego, znając pierwszy wyraz, stosunek, i summę wyrazów.

Nazwijmy s summę wyrazów ; formuła

$$s=na+\frac{n(n-1)}{2}r$$

daje, dla oznaczenia n, zrównanie drugiego stopnia

$$rn^2+(2n-r)n-2s=0.$$

Ponieważ ostatni wyraz jest odjemnym, więc dwa pierwiastki są zawsze rzeczywistémi i mają znaki przeciwne. Należy odrzucić pierwiastek odjemny; aby pierwiastek dodatny dał się przypuścić, potrzeba żeby był całkowitym.

4° Znaleźć pięć liczb w postępie różnicowym, znając summę wyrazów i summę ich kwadratów.

Nazwijmy a i b^2 dwie summy dane; oznaczmy przez x wyraz środkowy a przez y stosunek. Różne wyrazy postępu można będzie napisać

$$\div\, x-2y \,.\, x-y \,.\, x \,.\, x+y \,.\, x+2y,$$

i znajdzie się dwa zrównania

$$5x=a$$

$$5x^2+10y^2=b^2.$$

377. Zagadnienia. Formuły [2] i [6] stanowią dwa związki między pięcioma ilościami a, l, r, n, S, związki które dozwolą oznaczyć dwie z tych ilości, kiedy trzy inne są dane. Zkąd dziesięć zagadnień do rozwiązania:

1°	Mając dane	a, l, r,	oznaczyć	n, S;
2°	»	a, l, n,	»	r, S;
3°	»	a, l, S,	»	r, n;
4°	»	a, r, n,	»	l, S;
5°	»	a, r, S,	»	l, n;
6°	»	a, n, S,	»	l. r;
7°	»	l, r, n,	»	a, S;
8°	»	l, r, S,	»	a, n;
9°	»	l, n, S,	»	a, r;
10°	»	r, n, S,	»	a, l.

Pomiędzy témi zagadnieniami, piąte i ósme są drugiego stopnia; ośm innych są piérwszego stopnia.

O POSTĘPACH GEOMETRYCZNYCH ALBO ILORAZOWYCH.

378. Definicye. Postęp *geometryczny* albo *ilorazowy* jest to szereg liczb, w którym każda liczba równa się poprzedzającéj pomnożonéj przez pewną liczbę stałą, która nazywa się *stosunkiem* postępu,

Kiedy stosunek jest większy od jedności, wyrazy powiększają się kolejno, a postęp jest *rosnący;* kiedy stosunek jest mniejszy od jedności, wyrazy zmniejszają się, i postęp jest *malejący.*

Dla wskazania że liczby stanowią część postępu ilorazowego, pisze się je wciąż jedne drugich, przedzielając dwoma punktami, i poprzedzając je znakiem $\because$.

Przykłady. Sreregi

$$\because 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 927 : \ldots,$$

$$\because 528 : 264 : 132 : 66 : 33 : 16\tfrac{1}{2} : \ldots,$$

stanowią dwa postępy ilorazowe, jeden rosnący, a drugi malejący; stosunkami ich są 3 i $\frac{1}{2}$.

W ogólności, oznaczywszy wyrazy postępu ilorazowego przez litery a, b, c, d, ..., i, k, l,...., stosunek przez q, a miejsce wyrazu l przez n. Będziemy mieli :

$$[1] \qquad \because a : b : c : d : \ldots : i : k : l : \ldots$$

379. Wartość wyrazu zajmującego w postępie mieisce n. Według określenia, każdy wyraz postępu ilorazowego tworzy się mnożąc poprzedzający przez stosunek Drugi jest więc równym aq, trzeci aq^2, czwarty aq^3, ..., i ogólnie, n^{ty} jest równym aq^{n-1}. Więc *wyraz jakikolwiek równa się pierwszemu pomnożonemu przez potęgę stosunku, która oznacza ile jest wyrazów poprzedzających.* Co właśnie zwykle się wyraża za pomocą wzoru :

$$[2] \qquad l = aq^{n-1}.$$

380. Wnioski. Formuła [2], jako wyrażająca związek między czterema liczbami, a, l, q, n, dozwoli oznaczyć jedną z nich, gdy trzy inne są dane. Znajdzie się łatwo, rozwiązując zrównanie [2] względem każdéj z czterech ilości

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{ll} l = aq^{n-1}, & a = \dfrac{l}{q^{n-1}}, \\ q = \sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}, & n = 1 + \dfrac{\log l - \log a}{\log q}. \end{array} \right.$$

Ostatnia formuła przypuszcza że znanemi są własności zasadnicze logarytmów.

381. Twierdzenie. *Jeżeli postęp jest rosnący, można przedłużyć go dostatecznie, żeby jego wyrazy wyszły za wszelką granicę daną.*

W rzeczy saméj, jeśli weźmiemy pod uwagę trzy wyrazy po sobie następujące i, k, l, postępu [1], mamy, z określenia,

$$k = iq, \qquad l = kq;$$

a, przez odciąganie,

$$l - k = (k - i)q.$$

Otóż stosunek q przewyższa jedność; więc różnica $(l - k)$ jest większą od różnicy $(k - i)$. Więc przewyżka jakiegokolwiek wyrazu nad poprzedzającym idzie wzrastając. Otóż, gdyby ta przewyżka pozostała stałą, jak w postępie różnicowym, możnaby było, dodając ją do pierwszego wyrazu a, dostateczną liczbę razy, otrzymać rezultat tak wielki jak się tylko podoba. Będzie więc to miało miejsce, *a fortiori*, jeżeli, jak to już należycie rozpoznaliśmy, ta przewyżka pojdzie wzrastając.

382. Twierdzenie. *Jeżeli postęp jest malejący, można przedłużyć go dostatecznie, żeby jego wyrazy zeszły poniżéj wszelkiéj granicy.*

W rzeczy saméj, jeżeli postęp [1] ma stosunek q mniejszy od jedności, wyrazy $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, ... $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$, ... tworzą inny postęp ilorazowy, którego stosunek $\frac{1}{q}$ jest większy od jedności; ponieważ, z równości

$$b = a \times q, \qquad c = b \times d, \qquad d = c \times q, \ldots$$

wyciąga się : $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{},\ldots$

Wynika więc, z twierdzenia poprzedzającego, że ułamki $\frac{1}{i}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$, mogą stać się tak wielkiemi jak się tylko podoba; a tém samém, ich mianowniki i, k, l, mogą stać się tak małemi jak się tylko podoba. Co było do dowodzenia.

382 *bis.* Wniosek. Z dwóch ostatnich twierdzeń ogólnych wprost i naturalnie wypływają następujące *dwa ważne* tychże twierdzeń *przypadki szczególne :*

1° *Potęgi całkowite i dodatne liczby większéj od jedności, są coraz większe i wzrastają po za wszelką granicę ;*

2° *Potęgi całkowite i dodatne liczby mniejszéj od jedności stają się coraz mniejsze i zbliżają się nieskończenie do zera, to jest mają za granicę zero.*

383. Wstawienie średnich geometrycznych. Wstawić m średnich geometrycznych albo ilorazowych między dwie liczby dane a i b, jest to utworzyć postęp, którego a i b są wyrazami skrajnemi, wyrazami zaś pośredniemi, wyrazy szukane w ilości m.

Wystarczy oczywiście, dla rozwiązania tego pytania, znaleźć stosunek postępu; gdyż, mnożąc pierwszy wyraz przez stosunek, otrzyma się drugi; mnożąc drugi przez stosunek, otrzyma się trzeci, i tak daléj. Otóż, znamy, w tym postępie, pierwszy wyraz a, ostatni b, i liczbę wyrazów $(m+2)$. Przeto we wzorze [2] za n położywszy $(m+2)$, znajdziemy :

$$[4] \qquad q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Przykład. Wstawić 3 średnie proporcyonalne między 7 i 112. Stosunkiem jest :

$$q = \sqrt[4]{\frac{112}{7}} \quad \text{albo } 2;$$

a więc postępem szukanym jest oczywiście :

$$\because 7 : 14 : 28 : 56 : 112.$$

384. Twierdzenie. Jeżeli wstawimy, między dwa wyrazy po sobie następujące postępu ilorazowego, też samą liczbę m średnich ilorazowych, otrzymamy postęp jedyny, którego stosunkiem jest pierwiastek, skazówki $(m+1)$, ze stosunku pierwotnego.

W rzeczy saméj, stosunki różnych postępów częściowych są (383).

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \ldots;$$

są więc one wszystkie równe $\sqrt[m+1]{q}$. Wreszcie ostatni wyraz każdego jest pierwszym następującego. Można więc uważać je jako tworzące jeden tylko postęp.

385. Zagadnienie. *Oznaczyć warunek, aby trzy liczby* a, b, c, *wchodziły w skład tegoż samego pastępu.*

Jeżeli, przypuściwszy że a jest pierwszym wyrazem, oznaczymy przez $(m+1)$ i przez $(n+1)$ miejsca nieznane liczb b i c mamy (379):

$$b = aq^m, \quad c = aq^n,$$

q będąc stosunkiem nieznanym. Jeżeli podniesiemy pierwsze zrównanie do potęgi n, a drugie do potęgi m, będziemy mieli :

$$b^n = a^n q^{mn}, \quad c^m = a^m q^{mn};$$

zkąd, rugując q :

$$[5] \qquad \frac{b^n}{a^n} = \frac{c^m}{a^m}, \quad \text{albo} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Takim jest warunek szukany. Ten warunek uprości się, jeżeli przypuścimy że a, b, c są wymiernémi : gdyż natenczas, sprowadzając stosunki $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ do ich najprostszego wyrażenia, i oznaczając przez $\frac{g}{h}$ i $\frac{k}{l}$ ułamki nieprzywiedlne równoważne, mamy :

$$\left(\frac{g}{h}\right)^n = \left(\frac{k}{l}\right)^m, \quad \text{albo} \quad \frac{g^n}{h^n} = \frac{k^m}{l^m}.$$

Otóż, te ułamki, jako nieprzywiedlne, nie mogą być równemi, chyba w razie :

$$g^n = k^m, \qquad h^n = l^m;$$

co wymaga, naprzód, żeby g i k były złożone z tych samych czynników pierwszych, zarówno jak h i l; a, potém, żeby wykładniki tegoż samego czynnika, w g i k, jak niemniéj w h i l, były w stosunku stałym $\frac{m}{n}$. Jeżeli te warunki są spełnione, oznaczą one stosunek $\frac{m}{n}$, lecz pozostawią zawsze m i n nieoznaczonemi; tak że a, b, c będą mogły brać udział w nieskończonéj liczbie postępów.

386. Zastosowanie. *Jakie są liczby wymierne, które mogą stanowić część postępu ilorazowego, mającego za wyrazy* 1 *i* 10 ?

Oznaczmy przez $\frac{p}{q}$ jedną z liczb szukanych ; powinniśmy mieć, według tego co poprzedza :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = (10)^n, \quad \text{albo} \quad \frac{p^m}{q^m} = 10^n.$$

m i n będąc liczbami całkowitemi. Otóż ponieważ drugi członek jest całkowitym, więc pierwszy musi być nim także ; a gdy $\frac{p^m}{q^m}$ jest nieprzywiedlném z założenia, potrzeba żeby było : $q = 1$, a, tém samém, $p^m = 10^n$. Lecz, aby ta ostatnia równość miała miejsce, potrzeba aby p zamykało tylko czynniki piérwsze 2 i 5 z 10, to jest żeby było : $p = 2^\alpha \times 5^\beta$; więc $2^{\alpha m} \times 5^{\beta m} = 2^n \times 5^n$, a zatém $\alpha m = \beta m = n$, czyli $\alpha = \beta = \frac{n}{m}$. Tym sposobem wykładniki 2 i 5, w p, powinny być równemi; albo innemi słowy, p powinno być potęgą z 10.

Potęgi z 10 są więc jedynemi liczbami wymiernemi mogącemi wejść w skład postępu ilorazowego, w którym 1 i 10 stanowią część, jest są wyrazami.

387. Twierdzenie. *W każdym postępie ilorazowym, wieloczyn dwóch wyrazów równo oddalonych od skrajnych jest stały i równy wieloczynowi wyrazów skrajnych.*

Niech będzie, w rzeczy saméj, postęp ograniczony :

$$\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots : i : k : l;$$

drugi wyraz b jest równym aq, przedostatni k jest równym $\frac{l}{q}$; więc ich wieloczyn $bk = al$. Ogólnie, wyraz x mający p wyrazów przed sobą, jest równym q^p; a wyraz y, mający p wyrazów po sobie, jest równym $\frac{l}{q^p}$; więc ich wieloczyn $xy = al$.

Uwaga. Kiedy postęp zawiéra liczbę nieparzystą wyrazów, znajduje się w środku wyraz równo oddalony od skrajnych. Kwadrat z tego wyrazu równa się wieloczynowi skrajnych.

Tym sposobem w postępie

$$\div\, 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458,$$

wyrazy 2 i 1458, 6 i 486, 18 i 162 dają tenże sam wieloczyn 2916, który jest *kwadratem* z wyrazu *środkowego* 54.

388. Wieloczyn wyrazów postępu. Oznaczywszy przez P wieloczyn wyrazów postępu zaczynającego się od a, kończącego na l,

w którym n jest liczbą wyrazów. Mamy :

$$P = abcd \ldots\ldots ikl.$$

Nie zmieni się ten wieloczyn wywracając porządek czynników, co daje :

$$P = lki \ldots\ldots dcba.$$

Jeżeli rozmnożymy te dwa wieloczyny równe jeden przez drugi, grupując dwójkami czynniki zajmujące w obu wieloczynach toż samo miejsce, znajdziemy :

$$P^2 = (al)(bk)(ci) \ldots\ldots (ic)(kb)(la).$$

Otóż wszystkie wieloczyny, zamknięte w nawiasach, są równemi (387) wieloczynowi skrajnych al. Wreszcie ich liczba jest liczbą wyrazów postępu ; więc

$$P^2 = (al)^n;$$

zkąd :

[6] $$P = \sqrt{(al)^n}.$$

Zatém, *wieloczyn wyrazów postępu jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z wieloczynu wyrazów skrajnych podniesionego do potęgi oznaczonéj liczbą wyrazów.*

Uwaga. Zastępując l przez jego wartość

$$l = aq^{n-1},$$

otrzymuje się inna formuła

$$P = \sqrt{a^{2n}q^{n(n-1)}} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

która nie wymaga wyciągania pierwiastku kwadratowego; gdyż wykładnik $n(n-1)$, jako wieloczyn dwóch liczb całkowitych po sobie następujących, jest zawsze parzysty.

389. Summa wyrazów postępu ilorazowego. Nazwawszy S summę wyrazów postępu ilorazowego, będziemy mieli:

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots i + k + l.$$

Obie strony téj równości pomnożywszy przez q, będzie:

$$Sq = aq + bq + cq + dq + \ldots\ldots + iq + kq + lq.$$

Lecz, z założenia, $aq = b$, $bq = c$, $cq = d, \ldots, iq = k$, $kq = l$; więc równość poprzedzająca staje się:

$$Sq = b + c + d + \ldots\ldots + k + l + lq.$$

Jeżeli przypuścimy $q > 1$, i odciągniemy S od Sq, otrzymamy oczywiście, znosząc wyrazy które się niszczą:

$$Sq - S = lq - a, \quad \text{albo} \quad S(q-1) = lq - a;$$

zkąd:

$$[7] \qquad S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Zatém, *summa wyrazów postępu rosnącego ilorazowego znajduje się, mnożąc ostatni wyraz przez stosunek, adciągając od wieloczynu piérwszy wyraz, i dzieląc różnicę przez przewyżkę stosunku nad jednością.*

Jeżeli przypuścimy $q < 1$, to nie będziemy mogli odciągnąć S od Sq; odciąga się natenczas Sq od S, co daje:

$$S - Sq = a - lq, \quad \text{albo} \quad S(1-q) = a - lq;$$

zkąd:

$$[8] \qquad S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Zatém, *summa wyrazów postępu malejącego znajduje się, odciągając od pierwszego wyrazu wieloczyn z ostatniego przez stosunek, i dzieląc różnicę przez przewyżkę jedności nad stosunkiem.*

Lecz umowy przyjęte nad liczbami odjemnemi, robią tę drugą formę równoważną piérwszéj.

Uwaga. Gdyby się znało tylko piérwszy wyraz a, stosunek q, i liczbę n wyrazów, potrzebaby było, dla zrobienia użytku z formuł poprzedzających, zacząć od wyrachowania ostatniego wyrazu l za pomocą formuły [2]. Podstawiając jego wartość w formułach [7] i [8], otrzymamy :

$$[9] \qquad S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \quad \text{i} \quad S = \frac{a - aq^n}{1 - q} \qquad [10].$$

390. Granica summy wyrazów postępu malejącego. Formuła [8], dająca summę wyrazów postępu malejącego, może się napisać :

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{lq}{1-q}.$$

Otóż jeżeli liczba wyrazów wzrasta nieograniczenie, wyrażenie $\frac{a}{1-q}$, zależące jedynie od piérwszego wyrazu i od stosunku, zachowa stale też samą wartość; lecz wieloczyn $l\frac{q}{1-q}$, złożony z czynnika l malejącego nieograniczenie (382), i z czynnika $\frac{q}{1-q}$ który pozostaje stałym, może stać się tak małym jak się tylko podoba. Przeto summa wyrazów, zawsze mniejsza od $\frac{a}{1-q}$, może się różnić od $\frac{a}{1-q}$ tak mało jak się tylko podoba, jeżeli liczba wyrazów jest dostatecznie wielką: innemi słowy, $\frac{a}{1-q}$ jes granicą do której dąży summa, gdy liczba wyrazów wzrasta nieograniczenie. Oznaczając tą granicę przez s, mamy :

$$[11] \qquad s = \frac{a}{1-q}.$$

391. Zastosowanie. Wzór ostatni może posłużyć do znalezienia ułamku zwyczajnego, z którego powstał ułamek peryodyczny prosty, gdyż można go uważać za summę wyrazów postępu ilorazowego malejącego.

Weźmy, na przykład, ułamek *peryodyczny prosty*

$$0,35\,35\,35\,35\,35\ldots\ldots$$

Peryody tego ułamku idąc od lewéj do prawéj ręki, tworzą postęp ilorazowy malejący do nieskończoności;

$$\div\ \frac{35}{100} : \frac{35}{10000} : \frac{35}{1000000} : \frac{35}{100000000} : \ldots\ldots,$$

którego stosunkiem jest $\frac{1}{100}$. Według ostatniego wzoru [11], granica summy tego postępu równa się

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}, \quad \text{albo} \quad \frac{35}{99}.$$

Tym sposobem przyszliśmy do prawidła podanego w arytmetyce według którego, *bierze się za licznik peryod, a za mianownik* i t. d.

SUMMA KWADRATÓW I SZEŚCIANÓW LICZB IDĄCYCH PO SOBIE W NATURALNYM PORZĄDKU.

392. Formuła dająca summę kwadratów z n liczb początkujących jest często użyteczną. Dla znalezienia jéj, należy dodać kolumnami pionowemi tosamości następujące :

$$1^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1,$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 + 1,$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,$$
$$5^3 = (4+1)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$n^3 = (\overline{n-1} + 1)^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Wykonywając wskazane powyżéj dodawania, i znosząc po obu stronach summę spólną liczb mających potęgi podobne $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3)$, otrzymamy związek

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2)$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \dots\dots + n) + n + 1,$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1;$$

zkąd $6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$,

albo $6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)\left\{2(n+1)^2 - 3n - 2\right\}$

$$= (n+1)(2n^2+n) = n(n+1)(2n+1),$$

i nakoniec $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

393. Tworząc tymże samym sposobem czwarte potęgi z liczb $1, 2, 3, \dots\dots, (n+1)$, znalazłoby się, dla summy sześcianów,

$$(1) \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Zamiast wchodzenia w szczegóły tego działania, które nie przedstawia wreszcie żadnéj trudności, wskażemy sposób bardzo często używany w algebrze dla rozpoznania ścisłości formuły takiéj jak (1), a która była daną bez dowodzenia.

Podstawia się naprzód za n liczby najprostsze 1, 2, 3. Znajduje się tym sposobem

$$\text{dla}\quad n=1,\quad \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{1\,.\,2}{2}\right)^2=1^3,$$

$$\text{dla}\quad n=2,\quad \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{2\,.\,3}{2}\right)^2=9\ =1^3+2^3,$$

$$\text{dla}\quad n=3,\quad \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{3\,.\,4}{2}\right)^2=36=1^3+2^3+3^3.$$

Formuła jest więc prawdziwą dla $n=1, 2, 3$. Będzie wtedy dowiedzioném że ta formuła jest ogólną, jeżeli się okaże że przypuszczając ją dokładną dla wartości jakiejkolwiek na n, będzie nią jeszcze dla wartości bezpośrednio wyższéj : albowiem gdy formuła jest prawdziwą dla $n=3$, wnosi się że prawdziwę być musi dla $n=4$, potém dla $n=5$....., i tak daléj, aż do takiéj wartości na n jak się tylko podoba.

Idzie więc o pokazanie że związek (1) pociąga za sobą

$$(2)\quad 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2,$$

albo, odciągając (1) od (2), że mamy

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Otóż drugi członek może się napisać

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[(n+2)^2-n^2]=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2(4n+4)=(n+1)^3\,;$$

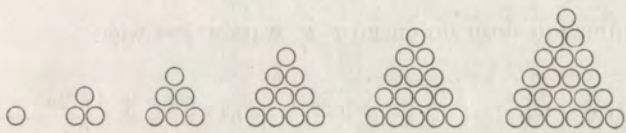
tak że formuła jest sprawdzoną.

STOSY KUL.

394. Stosy kul ułożone są z poziomych warstw w ten sposób, że kule wyższéj warstwy leżą po nad próżnemi miejscami utworzonemi przez zetknięcie się kul niższéj warstwy; wszystkie kule stykają się z sobą i są tego samego kalibru, czyli równych promieni.

W arsenałach urządza się kule stosami, które są trojakiego gatunku:

Stos trójkątny ma kształt piramidy trójkątnéj któréj wierzchołek zajmuje kula leżąca na $(1 + 2)$ innych, które opierają się na $(1 + 2 + 3)$ kulach,..... ; tak że warstwa pozioma rzędu k, poczynając od wierzchołka,



zawiéra liczbę kul równą

$$(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k) = \frac{1}{2}\, k(k + 1) = \frac{1}{2}\, k + \frac{1}{2}\, k^2.$$

Summa kul stosu mającego n warstw jest więc

$$T = \frac{1}{2}\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \frac{1}{2}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

albo

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n + 1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n + 1)\,(2n + 1)}{1\,.\,2\,.\,3}\right].$$

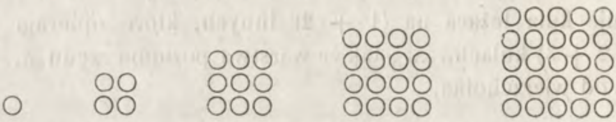
Ta summa będzie więc

$$\frac{n(n + 1)\,(2n + 1)}{12} + \frac{n(n + 1)}{4},$$

albo $\dfrac{n(n+1)[(2n+1)+3]}{12}$, albo jeszcze $\dfrac{n(n+1)(2n+4)}{12}$,

albo nakoniec $$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

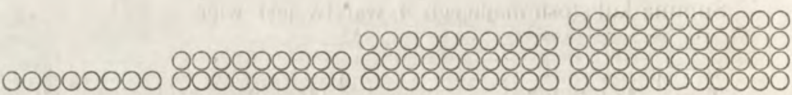
Stos czworokątny. Każda warstwa jest kwadratem którego bok zawiéra w sobie tyle kul ile znajduje się jedności w rzędzie téjże warstwy liczonym poczynając od wierzchołka.



Summa kul stosu złożonego z n warstw jest więc

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Stos prostokątny. Wierzchołek jest rzędem pojedynczym kul o $p+1$ kulach, leżącym na dwóch rzędach o $p+2$ kulach, które opiérają się na trzech rzędach o $p+3$ kulach,..., stosownie do figur następujących :



Summa kul stosu złożonego z n warstw jest więc

$$R = p + 1 + 2(p+2) + 3(p+3) + \ldots + n(p+n)$$

$$= p(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$= p\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}.$$

395. Kładąc trzy formuły poprzedzające pod kształtem

$$T=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{3}(n+1+1),$$

$$Q=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{3}(n+n+1),$$

$$R=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{3}(\overline{p+1}+\overline{p+n}+\overline{p+n}),$$

widzimy że, *w stosie jakimkolwiek, liczba kul jest równą liczbie kul ściany trójkątnéj pomnożonéj przez trzecią część summy trzech krawędzi równoległych*, *które są na zewnątrz téj ściany.*

Liczba kul zawarta w *stosie ściętym*, równa się liczbie całego stosu, zmiejszonéj liczbą kul zawartych w stosie, którego podstawą jest warstwa górna stosu ściętego.

ĆWICZENIA.

I. Jakie są postępy różnicowe, w których summa dwóch wyrazów jakichkolwiek wchodzi do składu postępu?

Są niemi te, których piérwszy wyraz jest mnożnikiem stosunku.

II. Jakie są postępy ilorazowe, w których wieloczyn dwóch wyrazów jakichkolwiek wchodzi w skład postępu?

Są niemi te, w których piérwszy wyraz jest potęgą stosunku.

III. Jeżeli, w ciągu liczb danych, każda jest połową summy dwóch liczb które ją między sobą zamykają, te liczby tworzą postęp różnicowy. Jeżeli każda jest średnią proporcyonalną między dwiema liczbami które ją między sobą zawiérają, te liczby tworzą postęp ilorazowy.

Przywodzi się bezpośrednio to wysłowienie do definicyj (368 i 378).

IV. W jakich postępach różnicowych istnieje stosunek, niezależny od n, między summą n piérwszych wyrazów a summą n następujących?

W tych, w których stosunek jest podwójnym piérwszym wyrazem.

V. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ mogą-li wchodzić w skład tegoż samego postępu różnicowego albo ilorazowego?

Nie. Opierać się należy w przywiedzeniu dowodów na numerach 372 i 385.

VI. Jeżeli weźmiemy ciąg liczb nieparzystych 1, 3, 5, 7,..... i rozdzielimy na grupy, z których piérwsza miałaby jeden wyraz, druga dwa wyrazy, trzecia trzy, i t. d., summa wyrazów téjże saméj grupy jest sześcianem z jéj liczby wyrazów.

Tworzy się piérwszy i ostatni wyraz $n^{t\acute{e}j}$ grupy, potrzeba będzie potém zastosować formułę [6] numeru 375 : otrzyma się n^3 dla summy.

VII. Jeżeli się weźmie pod uwagę ciąg 1, 2, 4, 6, 8, 10..... ; summa n piérwszych wyrazów jest nieparzystą ; a, gdy się doda do liczby tak otrzymanéj, $(n - 1)$ liczb nieparzystych które po niéj następują, znajduje się sześcian.

Otrzymuje się w rezultacie n^3, traktując ostatnie ćwiczenie tymże samym sposobem jak poprzedzające.

VIII. W postępie geometrycznym sześciowyrazowym, różnica wyrazów skrajnych przewyższa pięć razy różnicę wyrazów średnich.

Wyrazi się stosunek dwóch różnic w funkcyi stosunku, i znajdzie się że najmniejszością stosunku jest 5.

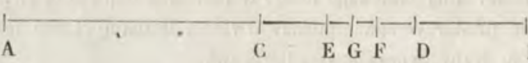
IX. Jeżeli się doda, wyraz po wyrazie, dwa postępy geometryczne nie mające tegoż samego stosunku, rezultaty nie tworzą postępu ; lecz każdy wyraz téj summy wyciągnie się z dwóch poprzedzających, mnożąc je przez liczby stałe, i dodając wieloczyny.

Znajduje się łatwo że mnożnikami są : summa stosunków dla wyrazu poprzedzającego, a wieloczyn stosunków, ze zmienionym znakiem, dla wyrazu położonego przed wyrazem poprzedzającym.

X. Tworzymy szereg wyrazów takich, że każdy jest połową summy poprzedzających ; znając dwa piérwsze wyrazy a, b tego szeregu, znaleźć do jakiéj granicy zbliża się jego summa, kiedy liczba wyrazów wzrasta.

Granicą tą jest : $a + \frac{2b}{3}$.

XI. Niech będzie jakakolwiek linia AB, C jéj środek, D środek linii CB,



E środek linii DC, F środek linii ED, G środek linii FE, i tak daléj nieograniczenie ; znaleźć do jakiéj granicy punkta C, D, E, F, G, zbliżają się coraz bardziéj, kiedy ich liczba coraz większą się staje.

Punktem tym jest trzecia część AB, począwszy od punktu B.

XII. Znaleźć granicę summy ułamków

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots,$$

których liczniki tworzą postęp różnicowy, a mianowniki postęp ilorazowy.

Rozkłada się ten szereg na pewną ilość postępów geometrycznych malejących, i znajduje się że granicą jest 2.

XIII. Mając ciąg liczb :

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \text{ i t. d.},$$

takich, że różnica dwóch wyrazów po sobie następujących powiększa się ciągle o jedność ; znaleźć summę z n piérwszych wyrazów tego ciągu.

Znajduje się że n^{ty} wyraz jest równym $\dfrac{n(n+1)}{2}$, a summa $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

XIV. Jeżeli, w postępie różnicowym, trzy wyrazy po sobie następujące są liczbami piérwszémi, stosunek jego jest podzielnym przez 6, byleby piérwszy z tych wyrazów nie był 3. Jeżeli się znajduje takich liczb 5, stosunek jest podzielnym przez 30, byleby piérwszy z tych wyrazów nie był 5 ; a, jeżeli się znajduje takich liczb 7, tenże stosunek jest podzielnym przez 210, byleby piérwszy z tych wyrazów nie był 7.

Dowodzi się, za pomocą własności liczb piérwszych, że stosunek jest podzielnym, w piérwszym przypadku, przez 2×3 ; w drugim, przez $2\times 3\times 5$; w trzecim, przez $2\times 3\times 5\times 7$.

XV. W postępie ilorazowym, w którym liczba wyrazów jest nieparzystą, summa kwadratów z wyrazów jest równą summie wyrazów, pomnożonéj przez przewyżkę summy wyrazów zajmujących miejsce nieparzyste nad summą wyrazów zajmujących miejsce parzyste.

Tworzy się różne summy wskazane, i sprawdza się łatwo równości wskazane,

XVI. W postępie różnicowym, którego wyrazy są całkowitémi, jeżeli p jest liczbą piérwszą ze stosunkiem, dzieląc p wyrazów po sobie następujących przez p, otrzyma się na reszty wszystkie liczby $0, 1, 2, 3, \ldots (p-1)$.

Dowodzi się że dwie reszty nie mogą być między sobą równe.

XVII. Wyrugować y między dwoma zrównaniami :

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + y^m = a^m,$$

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + y^{2m} = b^{2m}.$$

Znajduje się, za pomocą niektórych podejść rachunkowych,

$$y = \frac{(a^{2m} + b^{2m}) - 2a^m x^m}{a^{2m} - b^{2m}}\, x\,;$$

i podstawia się wartość tę w jedno z danych zrównań.

XVIII. Mając trójkąt dany, utwórzmy drugi trójkąt którego bokami są linie łączące wierzchołki ze środkami boków przeciwnych piérwszego; tymże samym sposobem utwórzmy trzeci trójkąt z drugiego, i tak daléj nieograniczenie. Jaka jest granica summy powierzchni wszystkich tych trójkątów?

Ta granica równa się *cztéry* razy powierzchni trójkąta danego.

ROZDZIAŁ XXI.

TEORYA ELEMENTARNA LOGARYTMÓW.

DEFINICYE LOGARYTMÓW.

396. Definicya. Jeżeli weźmiemy pod rozwagę dwa postępy, jeden ilorazowy, którego piérwszym wyrazem jest jedność, drugi różnicowy zaczynający się od zera, to wyrazy drugiego nazywają się *logarytmami* (z greckiego *logos* stosunek i *arithmos* liczba) wyrazów zajmujących toż samo miejsce w piérwszym.

I tak, niech będą dwa postępy:

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \div\!\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots : q^m : \ldots\ldots : q^n : \ldots\ldots : q^p : \ldots\ldots, \\ \div\, 0 : r\,.\,2r\,.\,3r\,.\,4r\ldots\ldots mr \ldots\ldots\ldots nr \ldots\ldots\ldots pr \ldots\ldots; \end{array} \right.$$

mr jest logarytmem q^m.

Uwaga. Logarytm liczby uważanéj osobno jest całkiem dowolnym. Gdyby chciano wiedzieć jaki jest logarytm 3ch, to pytanie nie miałoby żadnego znaczenia, dopókiby nie zgodzono się na wybór postępów, określających *układ* logarytmów o którym jest mowa.

We wszystkich układach, logarytmem 1 jest 0.

397. Rozciągnienie określenia. Według definicyi poprzedzającéj, kiedy się wybierze dwa postępy określające układ logarytmów, zdaje się że liczby, nie wchodzące w skład postępu ilorazowego, nie mają logarytmów; zobaczymy w jaki sposób, rozciągając to określenie, zostaje się przywiedzionym do uważania każdéj liczby większéj od jedności jako mającéj swój logarytm.

Wyobraźmy sobie że się wstawia między dwoma wyrazami każdego z postępów [1] tęż samą liczbę średnich; otrzymamy (373, 384) dwa nowe postępy, zaczynające się jeden od 1, drugi od 0, i w których wyrazy odpowiednie postępów pierwotnych odpowiedzą sobie jeszcze. Powiémy więc że wyrazy świeżo wprowadzone, do postępu różnicowego, są logarytmami wyrazów zajmujących tożsamo miejsce, wprowadzonych do postępu ilorazowego.

398. Twierdzenie. Aby to rozciągnienie określenia dało się przypuścić, potrzeba dowieść że, jeżeli, wstawiając różne liczby średnich, otrzymamy tęż samą liczbę, dwoma sposobami różnémi, w postępie ilorazowym, znajdziemy dla niéj, dwoma sposobami, tenże sam logarytm.

Przypuśćmy naprzód że wstawia się $(p-1)$ średnich między wyrazy po sobie następującemi postępów [1], stosunkiem postępu ilorazowego będzie (383) $\sqrt[p]{q}$; a stosunkiem postępu różnicowego będzie (371) $\frac{r}{p}$.

Tym sposobem wyraz, zajmujący miejsce $(k+1)$, w piérwszym, będzie $(\sqrt[p]{q})^k$; a wyraz odpowiedni, w drugim, będzie $\frac{kr}{p}$.

Przypuśćmy teraz że się wstawia, między wyrazy po sobie następujące postępów [1], inną liczbę $(p'-1)$ średnich, wyraz, zajmujący miejsce $(k'+1)$, w pierwszym, będzie $(\sqrt[p']{q})^{k'}$, a wyraz odpowiedni, w drugim, będzie $k'\frac{r}{p'}$.

Chcemy dowieść że, jeżeli mamy:

$$[2] \qquad (\sqrt[p]{q})^k = (\sqrt[p']{q})^{k'},$$

będziemy mieli także:

$$k\frac{r}{p} = k'\frac{r}{p'},$$

albo
$$\frac{k}{p} = \frac{k'}{p'}.$$

Jeżeli, w rzeczy samej, podniesiemy obie strony równości [2] do potęgi pp', otrzymamy:

$$(\sqrt[p]{q})^{kpp'} = (\sqrt[p']{q})^{k'pp'},$$

albo
$$q^{kp'} = q^{k'p};$$

a ta ostatnia równość pociąga za sobą oczywiście:

$$kp' = k'p,$$

albo
$$\frac{k}{p} = \frac{k'}{p'}.$$

Więc, *jeżeli można wprowadzić tęż samą liczbę, dwoma sposobami różnemi, w postęp ilorazowy, znajdzie się też dla niéj, dwoma sposobami, tenże sam logarytm.*

399. Twierdzenie. *Jeżeli otrzymujemy logarytmy wstawiając pewną liczbę średnich między wyrazy po sobie następujące dwóch postępów, a potém inne logarytmy wstawiając inną liczbę średnich, to te różne logarytmy mogą być uważane jako wchodzące w skład jedynego i tegoż samego układu.*

Aby to dowieść, uważmy że, jeżeli, między wyrazami po sobie następującemi postępu ilorazowego, wstawi się naprzód $(p-1)$ średnich, potém $(p'-1)$ średnich, wszystkie wyrazy otrzymane, w jednym i drugim przypadku, wchodzą w skład jedynego i tegoż samego postępu, który otrzymałoby się wstawiając $(pp'-1)$ średnich. W rzeczy saméj, jeżeli się wstawi $(pp'-1)$ średnich między dwa wyrazy po sobie następujące a i b, jakiegokolwiek postępu ilorazowego, wyraz b będzie zajmował, po tém wstawieniu $(pp'+1)^{\text{te}}$ miejsce. Gdy więc, w postępie tak utworzonym liczy się wyrazy co p', poczynając od drugiego, to jest $(p'+1)^{\text{ty}}$, $(2p'+1)^{\text{ty}}$, $(3p'+1)^{\text{ty}}$....., b znajdzie się wyrazem p^{tym} tego ciągu. Otóż, ponieważ q jest stosunkiem postępu nowego, wyrazy tym sposobem oznaczone są odpowiednio równémi $aq^{p'}$, $aq^{2p'}$, $aq^{3p'}$......; te wyrazy są więc w postępie; i można uważać je jako tworzące $(p-1)$ średnich między a i b. Podobnież, jeżeli się liczy wyrazy co p, poczynając od drugiego, b znajdzie się wyrazem p'^{tym} tego drugiego ciągu; i te wyrazy będą mogły być uważane jako tworzące $(p'-1)$ średnich między a i b.

Podobna uwaga stosuje się do postępu różnicowego: widzimy więc że dwa układy otrzymane przez wstawienie oddzielne $(p-1)$ średnich i $(p'-1)$ średnich, są zamknięte w układzie jedynym, który odpowiada dla $(pp'-1)$ średnich.

Na przykład, jeżeli a i b oznaczają dwa wyrazy po sobie następujące jakiekolwiek postępu ilorazowego albo różnicowego, i gdy się wstawi między a i b, naprzód trzy średnie, potem pięć średnich, w sposób taki aby tworzyły postępy:

$$a, \ A_1, \ A_2, \ A_3, \ b,$$

$$a, \ B_1, \ B_2, \ B_3, \ B_4, \ B_5, \ b;$$

jeżeli się wstawi później $(4 \times 6 - 1)$ albo 23 średnich, utworzy się postęp nowy, w którym A_1, A_2, A_3 zajmą miejsca 7, 13, 19, a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, miejsca 5, 9, 13, 17, 21.

400. TWIERDZENIE. *Można wstawić, między wyrazy następujące po sobie postępu ilorazowego, dostatecznie wielką liczbę średnich, ażeby dwa wyrazy po sobie następujące jakiekolwiek postępu nowego różniły się tak mało jak tylko się podoba.*

W rzeczy saméj, jeżeli q oznacza stosunek postępu danego, i gdy się wstawi $(m-1)$ średnich między dwa każde po sobie następujące wyrazy, to stosunkiem postępu nowego będzie $\sqrt[m]{q}$: przeto dwa wyrazy po sobie następujące tego postępu będą $(\sqrt[m]{q})^k$ i $(\sqrt[m]{q})^{k+1}$, a ich różnica będzie:

$$(\sqrt[m]{q})^{k+1} - (\sqrt[m]{q})^k,$$

albo

$$(\sqrt[m]{q})^k \left\{\sqrt[m]{q} - 1\right\}.$$

Otóż, gdy m wzrasta nieograniczenie, $(\sqrt[m]{q} - 1)$ dąży do zera. Gdyż, dla sprawdzenia że mamy, dla wszelkiéj wartości dostatecznie wielkiéj na m,

$$\sqrt[m]{q} - 1 < \varepsilon,$$

jakkolwiek małem jest ε, dosyć jest dowieść że mamy, w tychże samych okolicznościach :

$$\sqrt[m]{q} < 1 + \varepsilon,$$

albo

$$q < (1 + \varepsilon)^m;$$

a ta ostatnia nierówność jest oczywistą, ponieważ wiemy (381), że potęgi liczby większéj od 1 rosną, bez granic, z ich wykładnikiem.

Tak więc czynnik $(\sqrt[m]{q} - 1)$ dąży do zera; przeto $\sqrt[m]{q}$ dąży do jedności; toż samo się dzieje z $(\sqrt[m]{q})^k$, ponieważ k jest stałem. Wynika ztąd, że wieloczyn $(\sqrt[m]{q})^k\ (\sqrt[m]{q} - 1)$ może stać się tak małym jak się tylko podoba, byleby położono za m wartość dostatecznie wielką. Co było do dowodzenia.

401. Uwaga. Wynika z twierdzenia (400), że liczby, których logarytmy są określone w numerach poprzedzających, rosną stopniami i są tak zbliżone do siebie jak się tylko podoba. Jeżeliby ograniczono się wszelako na tém określeniu, byłaby nieskończona ilość liczb które musiałyby być uważane jako nie mające logarytmów. Wiemy, na przykład (386), że, jakakolwiek jest liczba średnich wstawionych między wyrazy postępu ilorazowego,

$$\div\!\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 \ldots,$$

żaden z tych wyrazów średnich nie jest wymiernym. Wszystkie liczby wymierne mogą, przeciwnie, wprowadzić się, jako średnie, w postęp różnicowy,

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots$$

A zatém, w układzie logarytmów określających te dwa postępy, *liczby wymierne, które nie są całkowitémi, są wszystkie logarytmami liczb niewymiernych; a liczby wymierne, które nie są potęgami z* 10, *jako nie mogące wchodzić w skład postępu ilorazowego, powinny być uważane jako nie mające logarytmów.*

402. Definicya logarytmów liczb które nie mogą wchodzić w skład postępu ilorazowego. Kiedy liczba nie może być wprowa-

dzoną do postępu ilorazowego, jej logarytm, który nie może być wymiernym (401), określa się sposobem następującym :

Logarytm liczby N, *która nie może wchodzić w skład postępu ilorazowego, jest większy jak liczby wymierne które są logarytmami liczb niższych od* N, *a mniejszy jak liczby wymierne które są logarytmami liczb wyższych od* N.

Na przykład, w układzie określonym przez postępy n[ru] 401, liczba 37 nie wchodzi w skład postępu ilorazowego. Dla określenia jej logarytmu, wyobraźmy sobie że się wstawia między 10 i 100 liczbę znakomitą średnich ilorazowych, i pomiędzy 1 i 2 tęż samą liczbę średnich różnicowych ; otrzymamy, w postępie ilorazowym, dwa wyrazy po sobie następujące zawierające między sobą liczbę 37, i których logarytmy wymierne, bardzo mało różniące się jeden od drugiego, będą zawierały między sobą, logarytm 37. Wartość tego logarytmu będzie, wreszcie, doskonale oznaczoną : gdyż ta wartość jest granicą spólną, do którój będą dążyły logarytmy dwóch liczb zawierających między sobą 37, kiedy liczba średnich wstawionych będzie wzrastać nieograniczenie.

403. Twierdzenie. Wynika, z tego wszystkiego co poprzedza, że *każda liczba, większa od* 1, *ma swój logarytm.*

UOGÓLNIENIA DOTYCZĄCE LICZB NIEWYMIERNYCH.

404. Definicya ogólna liczb niewymiernych. Określimy (402) że logarytmami liczby, są liczby wymierne większe, jako i liczby wymierne mniejsze, a o ile możności najmniéj różniące się od wartości istotnego logarytmu. W tém wszystkiem co poprzedza, rozumiemy oczywiście przez *istotny logarytm* liczby danéj *granicę* do którój dąży logarytm tejże liczby. Ten sposób jest sposobem zwyczajnym określenia dla liczb niewymiernych. Niektóre objaśnienia nad tym przedmiotem będą pożyteczne.

Istnieją wielkości nie mające spólnéj miary. Wiémy, na przyklad, że przekątna kwadratu nie ma spólnéj miary z jego bokiem; toż samo rozumieć się powinno o przekątnéj sześcianu i jego krawędzi. W tym przypadku, stosunek dwóch wielkości nie może być przedstawionym przez żadną liczbę, całkowitą albo ułamkową : mówi się że ten stosunek jest niewymiernym.

Dla określenia liczby niewymiernéj, można tylko wskazać w jaki sposób wielkość, którą ta liczba wyraża może się tworzyć za pomocą jedności. Przypuśćmy, naprzykład, że żądamy określić $\sqrt{2}$, będący liczbą niewymierną przedstawiającą *wielkość należycie oznaczoną*, to jest długość przekątnéj kwadratu wystawionego na boku równym jedności? Powiemy wtedy że liczba jest większą albo mniejszą od $\sqrt{2}$, stosownie jak jéj kwadrat jest większym lub mniejszym od 2. I, to przypuściwszy, po przyjęciu pewnéj jedności długości, uważać będziemy wszystkie liczby jako wyrażające długości odniesione do téjże saméj linii prostéj, w tymże samym kierunku, poczynając od tegoż samego początku. Część téj linii przyjmie końce długości mierzone przez liczby mniejsze od $\sqrt{2}$: a druga część przyjmie końce długości mierzone przez liczby większe od $\sqrt{2}$. Pomiędzy temi dwiema stronami, nie będzie mógł istnieć żaden przedział rozciągłości skończonéj; gdyż liczby jednéj seryi różnią się, tak mało jak się tylko podoba, od liczb drugiéj. Nie pozostanie więc między niémi jak tylko *punkt odgraniczenia*; a odległość, w jakiéj ten punkt znajduje się od początku, jest, przez określenie, zmierzoną przez $\sqrt{2}$.

Ograniczyliśmy się na określeniu wielkości któréj $\sqrt{2}$ jest miarą. I, w rzeczy saméj, zdaje się niepodobném określenie wprost liczby oderwanéj. Jeżeli zastanowimy się nad określeniami danemi, nawet w przypadkach prostych liczb całkowitych i ułamkowych, zobaczymy że te określenia są tylko wskazaniem działania, za pomocą którego wielkość, któréj liczby są miarą, pochodzi z jedności.

405. Dodawanie i odciąganie. Dodać lub odciągnąć liczby niewymierne, jest to znaleźć liczbę wyrażającą summę lub różnicę wielkości które mierzą liczby dane.

406. Mnożenie. Jeżeli mnożnik jest wymiernym, nie ma żadnéj zmiany do zrobienia w określeniu. Tak więc, mnożyć $\sqrt{2}$ przez 7, jest to znaleźć liczbę wyrażającą wielkość 7 razy większą od wielkości którą wyraża $\sqrt{2}$. Mnożyć $\sqrt{2}$ przez $\frac{3}{4}$, jest to znaleźć liczbę wyrażającą wielkość równą $\frac{3}{4}$ téj wielkości którą mierzy $\sqrt{2}$.

Lecz jeżeli mianownik jest niewymiernym, potrzeba nowego okre ślenia. Nazwiemy wieloczynem liczby A przez liczbę niewymierną B, liczbę mniejszą jak wieloczyn z A przez liczbę wymierną jakąkolwiek wyższą od B, a większą jak wieloczyn z A przez liczbę wymierą jakąkolwiek mniejszą od B.

407. Dzielenie. Dzielić liczbę A przez liczbę B, jestto znaleźć trzecią liczbę która, pomnożona przez dzielnik, powinna wydać dzielną A. To określenie stosuje się, do jakichkolwiek bądź liczb A i B, wymiernych lub niewymiernych.

408. Pierwiastki. Pierwiastek *mty* liczby niewymiernéj jest liczba która, wzięta m razy jako czynnik, tworzy wieloczyn równy liczbie danéj.

Widzimy że jedyne działanie, wymagające rzeczywiście definicyi nowéj, jest działanie mnożenia; wszystkie inne wiążą się z niém ściśle.

409. Twierdzenie. *Można zawsze znaleźć dwie liczby wymierne, mające różnicę tak małą jak się tylko podoba, i zawierające między sobą liczbę niewymierną daną.*

W rzeczy saméj, niech będzie n, liczba całkowita jakakolwiek; jeśli weźmiemy pod uwagę ciąg :

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{5}{n},\ldots,$$

widzimy że jego wyrazy wzrastają bez granicy; a ponieważ te wyrazy zaczynają się od zera, liczba dana, jakakolwiekbądź, jest koniecznie zawartą między dwoma z pomiędzy nich, $\frac{x}{n}$ i $\frac{x+1}{n}$. I można wziąć n dostatecznie wielkiém aby ich różnica, którą jest $\frac{1}{n}$, była tak małą jak się tylko podoba.

410, Rozciągnienie twierdzeń dowiedzionych dla liczb wymiernych, do przypadku liczb niewymiernych. Twierdzenie poprzedzające dozwoli oczywiście rozciągnąć do liczb niewymiernych twierdzenia następujące, które już zostały dowiedzione dla liczb wymiernych.

1° *Porządek czynników w mnożeniu jest dowolny;* lub inaczéj *wieloczyn ilukolwiek czynników nie zmienia swéj wartości gdy się przemienia porządek tych czynników.*

2° *Aby pomnożyć daną liczbę przez wieloczyn wielu czynników, mnoży się ją kolejno przez te różne czynniki.*

3° *Aby pomnożyć wieloczyn kilku czynników przez daną liczbę, dosyć pomnożyć jeden z czynników przez tę liczbę.*

4° *Aby pomnożyć wieloczyn dany przez drugi, dosyć utworzyć wieloczyn jedyny z czynników mnożnéj i mnożnika.*

5° *Wieloczyn potęg jednéj liczby jest potęgą téj liczby, i ma za wykładnik summę wykładników.*

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW.

411. Twierdzenie I. *Logarytm wieloczynu dwóch czynników jest równy summie logarytmów jego czynników.*

Niech będą dwa postępy:

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^m : \ldots : q^n : \ldots,$$

$$\div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \ldots\ldots mr \ldots\ldots, nr \ldots\ldots,$$

określające układ jakikolwiek logarytmów. Wyrazy pierwszego są potęgami po sobie następującemi stosunku q; wyrazy drugiego są mnożnikami po sobie idącemi stosunku r.

Jeżeli się rozmnoży jeden przez drugi, dwa wyrazy postępu ilorazowego, q^m i q^n, otrzyma się wieloczyn q^{m+n} który, oczywiście, jest $(m+n+1)^{tym}$ wyrazem tegoż samego postępu; jeżeli się doda logarytmy wyrazów q^m i q^n, które są mr i nr, otrzyma się summę $(m+n)r$, która jest oczywiście $(m+n+1)^{tym}$ wyrazem postępu różnicowego, a, przeto, logarytmem q^{m+n}; twierdzenie jest więc dowiedzioném.

412. Uogólnienie. Dowodzenie poprzedzające przypuszcza że liczby uważane wchodzą w skład tegoż samego postepu ilorazowego.

Jest ono błędném dla logarytmów niewymiernych określonych w n^rze 402.

Aby dowieść że, w tym przypadku, twierdzenie jest jeszcze dokładném, uważajmy że, jeżeli się weźmie dwie liczby jakiekolwiek N i N', można zawsze wstawić w postępy dostateczną ilość średnich, aby wyrazy wzrastały stopniami bardzo małemi, i że, zatém, znajdzie się dwa wyrazy N_1 i N'_1, różniące się, tak mało jak się tylko podoba, od N i od N'. Otóż mamy (411) :

$$\log(N_1 \times N'_1) = \log N_1 + \log N'_1.$$

Pierwszy członek różni się, tak mało jak się tylko podoba, od $\log(N \times N')$, a drugi, tak mało jak się tylko podoba, od $\log N + \log N'$; jest więc niepodobna, żeby $\log(N \times N')$ i $\log N + \log N'$ mogły mieć różnicę oznaczoną jakąkolwiek: zatém, te dwie ilości są sobie równémi. Co było do dowodzenia.

413. Rozciągnienie do przypadku więcéj jak dwóch czynników. *Twierdzenie poprzedzające rozciąga się do liczby ilukolwiek czynników.* Niech będzie, na przykład, wieloczyn czterech czynników *abcd*, mamy oczywiście :

$$[1] \qquad \log(abcd) = \log(abc \times d) = \log(abc) + \log d$$

$$= \log(ab) + \log c + \log d = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

2° Możnaby to jeszcze w ten sposób wyprowadzić :

Niech będą, na przykład, cztery czynniki *a*, *b*, *c*, *d*, z których każdy jest większym jak *jedność*; otrzymamy kolejno :

$$\log(abcd) = \log a + \log(bcd),$$

$$\log(bcd) = \log b + \log(cd),$$

$$\log(cd) = \log c + \log d.$$

Dodając stronami, i znosząc wyrazy $\log(bcd)$ i $\log(cd)$ spólne obu stronom, znajduje się :

$$\log(abcd) = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

414. Twierdzenie II. *Logarytm potęgi całkowitéj i dodatnéj pewnéj liczby jest wieloczynem logarytmu téj liczby przez wykładnik potęgi.*

To twierdzenie jest następstwem poprzedzającego. Niech będzie, w rzeczy saméj, a^4 potęga wzięta pod uwagę; mamy:

$$\log a^4 = \log (a \times a \times a \times a)$$

$$= \log a + \log a + \log a + \log a = 4 \log a.$$

Dowodzenie stosuje się oczywiście, do jakiegokolwiekbądź wykładnika całkowitego i dodatnego.

Tak więc, [2] $\qquad \log a^m = m \log a.$

415. Twierdzenie III. *Logarytm ilorazu jest równy przewyżce logarytmu dzielnéj nad logarytmem dzielnika.*

Niech będzie iloraz $\frac{a}{b}$, który oznaczymy przez q; mamy:

$$a = b \times q;$$

więc: $$\log a = \log b + \log q;$$

zkąd: $\log q = \log a - \log b,$ albo $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ [3].

Uwaga. Przypuszcza się w twierdzeniu poprzedzającém, że iloraz $\frac{a}{b}$ jest większym jak 1; gdyż tylko logarytmy liczb większych jak 1 były określone.

416. Twierdzenie IV. *Logarytm pierwiastku z pewnéj liczby jest równy logarytmowi téj liczby, podzielonemu przez wskazówkę pierwiastku.*

Niech będzie pierwiastek $\sqrt[m]{a}$, który oznaczymy przez r; mamy, z określenia:

$$a = r^m;$$

zkąd wypływa (414) :

$$\log a = m \log r;$$

a zatém,

$$\log r = \frac{\log a}{m}, \quad \text{albo} \quad \log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m} \quad [4].$$

417. Uwaga. Cztery twierdzenia poprzedzające pokazują, że *mnożenie* wielu czynników może być zastąpioném przez *dodawanie* ich logarytmów; *dzielenie*, przez *odciąganie* dwóch logarytmów; *podnoszenie do potęgi*, przez *mnożenie* logarytmu liczby przez wykładnik; i nakoniec, *wyciąganie pierwiastku*, przez *dzielenie* logarytmu liczby przez wskazówkę pierwiastku.

Lecz potrzeba, dla skorzystania z tych uproszczeń, mieć tablicę logarytmów, i umieć w niéj znaleźć logarytm liczby danéj, i liczbę odpowiednią logarytmowi danemu.

UKŁAD I ROZPORZĄDZENIE TABLIC LOGARYTMOWYCH.

418. Logarytmy pospolite. W rachunkach liczebnych, używa się wyłącznie układu logarytmów określonego przez dwa postępy :

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots$$

W tym układzie, *jakakolwiek patęga z 10 ma za logarytm jéj wykładnik*. Gdyż, logarytm z 10 będąc 1, mamy :

$$\log 10^m = m \log 10 = m.$$

Logarytmy wszystkich innych liczb, całkowitych lub ułamkowych, są niewymierne (401).

419. Cecha. Zowie się *cechą* albo *charakterystyką* logarytmu liczby, część całkowita tego logarytmu. Liczby zawarte między

1 i 10, to jest mające część całkowitą złożoną z jednéj cyfry, mają za logarytmy liczby zawarte między 0 i 1; cechą ich jest zero. Liczby zawarte między 10 i 100, to jest mające część całkowitą złożoną z dwóch cyfer, mają logarytmy zawarte między 1 i 2; ich cechą jest 1. Ogólnie, liczby zawarte między 10^{n-1} i 10^n mają część całkowitą złożoną z n cyfer; a ich logarytmy, będąc zawarte między $(n-1)$ i n jednościami, mają za cechę $(n-1)$ jedności.

Więc *cecha logarytmu liczby zawiera w sobie tyle jedności ile jest cyfer w części całkowitéj liczby, mniéj jedną.*

420. Twierdzenie. *Kiedy się mnoży albo się dzieli liczbę, przez pewną potęgę z 10, część dziesiętna jej logarytmu nie zmienia się; lecz cecha jéj jest powiększoną lub zmniejszoną o tyle jedności ile ich się znajduje w wykładniku potęgi.*

W rzeczy saméj, mamy (411 i 414):

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n;$$

twierdzenie zaś (415) daje:

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

421. Układ tablic. Rachuje się i wpisuje w tablice tylko logarytmy liczb całkowitych. Ponieważ wszystkie te logarytmy są niewymiernémi (401), nie można obliczyć ich jak tylko z pewném przybliżeniem; poprzestaniemy, ogólnie, na dokładném otrzymaniu siedmiu lub ośmiu pierwszych cyfer dziesiętnych.

Definicya, którą daliśmy (402), prowadzi do wartości przybliżonéj logarytmu pewnéj liczby. Gdyż, jeżeli się wstawi w postępy liczbę znakomitą średnich, znajdą się tam dwa wyrazy po sobie następujące postępu ilorazowego, zawierające między sobą liczbę daną, i w których logarytmy będą wartościami przybliżonémi jéj logarytmu.

Lecz ten sposób byłby nadzwyczajnie długim i bardzo mozolnym; i pokażemy, na przykładzie, ile wymagałby on działań do wykonania. Podamy, wreszcie, w trzecim tomie naszéj algebry, sposoby daleko prędsze, do obrachowania logarytmów.

Przykład. *Chcemy obrachować logarytm* 1855.

Ponieważ liczba 1855 jest zawartą między 1000 i 10000, jéj logarytm jest zawartym między 3 i 4. Jeżeli się wstawi jedną średnią między 1000 i 10000 w postępie ilorazowym, i jedną średnią między 3 i 4 w postępie różnicowym, znajdziemy

$$a = \sqrt{1000 \times 10000} = 3162{,}27766$$

dla wartości pierwszéj, 3,5 zaś dla wartości drugiéj. Tak więc :

$$3{,}5 = \log a = \log 3162{,}27766.$$

Ponieważ wyrażenie liczebne 1855 jest zawartém między 1000 i a, jego logarytm jest zawarty między 3 i 3,5. Jeżeli się wstawi jedną średnią między 1000 i a w postępie ilorazowym, i jedną średnią między 3 i 3,5 w postępie różnicowym, znajdzie się, dla pierwszéj,

$$b = \sqrt{1000a} = 1778{,}2794,$$

a dla drugiéj, $\dfrac{3 + 3{,}5}{2}$ albo 3,25,

Tak więc : $3{,}25 = \log b = \log 1778{,}2794.$

Ponieważ liczba 1855 jest zawartą między a i b, jéj logarytm jest zawartym między 3,25 i 3,5. Jeżeli się wstawi dwie nowe średnie, znajdzie się, oznaczając piérwszą przez c :

$$3{,}375 = \log \sqrt{ab} = \log 2371{,}3737 = \log c.$$

Podobnie, gdy liczba 1855 jest zawartą między b i c, jéj logarytm jest zawartym między 3,25 i 3,375. Nowe działanie daje :

$$3{,}3125 = \log \sqrt{bc} = \log 2053{,}5250 = \log d.$$

Prowadząc daléj tym sposobem rachunki, tworzy się tablica następująca :

$$
\begin{aligned}
3{,}5 &= \log a && = \log 3162{,}27776\\
3{,}25 &= \log \sqrt{1000a} &= \log b &= \log 1778{,}2794\\
3{,}375 &= \log \sqrt{ab} &= \log c &= \log 2371{,}3737\\
3{,}3125 &= \log \sqrt{bc} &= \log d &= \log 2053{,}5250\\
3{,}28125 &= \log \sqrt{bd} &= \log e &= \log 1910{,}95294\\
3{,}265625 &= \log \sqrt{be} &= \log f &= \log 1843{,}42296\\
3{,}2734375 &= \log \sqrt{ef} &= \log g &= \log 1876{,}8843\\
3{,}26953125 &= \log \sqrt{fg} &= \log h &= \log 1860{,}0784\\
3{,}26757812 &= \log \sqrt{fh} &= \log i &= \log 1851{,}7321\\
3{,}26855469 &= \log \sqrt{hi} &= \log k &= \log 1855{,}9005\\
3{,}26806641 &= \log \sqrt{ik} &= \log l &= \log 1853{,}8151\\
3{,}26831055 &= \log \sqrt{kl} &= \log m &= \log 1854{,}8575\\
3{,}26843262 &= \log \sqrt{km} &= \log n &= \log 1855{,}3789
\end{aligned}
$$

Porównywając, z jednéj strony n i m, a z drugiéj k i m, mamy :

$$
\begin{aligned}
n &= 1855{,}3789 & k &= 1855{,}9005\\
m &= \underline{1854{,}8575} & m &= \underline{1854{,}8575}
\end{aligned}
$$

zkąd $\quad n - m = \quad 0{,}5214, \quad k - m = \quad 1{,}0430;$

otóż widzimy że $(n - m)$ jest prawie połową $(k - m)$,

Porównywając, obok tego, z jednéj strony, $\log n$ i $\log m$, z drugiéj, $\log k$ i $\log m$, mamy :

$$
\begin{aligned}
\log n &= 3{,}26843262 & \log k &= 3{,}26855469\\
\log m &= \underline{3{,}26831055} & \log m &= \underline{3{,}26831055}
\end{aligned}
$$

zkąd : $\quad \log n - \log m = 0{,}00012207, \log k - \log m = 0{,}00024414;$

otóż widzimy że $(\log n - \log m)$ jest połową $(\log k - \log m)$. Tak więc różnice między liczbami są między sobą jak różnice między ich logarytmami. Jeżeli się przyjmie że, dla liczb tak do siebie zbliżonych, ta proporcya jest dokładną, wyciągnie się ztąd bezpośrednio logarytm 1854. Możemy powiedzieć, w rzeczy saméj: jeżeli dla różnicy między n i m, równéj 0,5214, znajduje się, między ich logarytmami, różnicę równą 12207 jedności ósmego porządku, jaka będzie, dla różnicy 0,1425 między 1855 i 1854, 8575, różnica x logarytmów? tym sposobem postępując otrzymamy:

$$x = \frac{12207 \times 1425}{5214} = 3336 \text{ jedności } 8^{go} \text{ porządku.}$$

Dodając przeto tę liczbę do logarytmu m, znajdziemy:

$$\log 1855 = 3,26834391.$$

422. Rozporządzenie tablic logarytmowych Callet'a. Piérwsza tablica jest zupełnie prostą; zamyka ona w sobie liczby całkowite od 1 aż do 1200, urządzone, podług ich porządku, w kilka kolumn, na wierzchu których widzimy literę N, początkową wyrazu francuzkiego *nombre* oznaczającego *liczbę;* obok i po prawéj stronie tych kolumn, spostrzega się inne z napisem na wierzchu *Log.*, litery początkowe wyrazu logarytm; tak że każda kolumna liczb ma bezpośrednio po sobie kolumnę swych logarytmów, i że każdy logarytm jest położony, po prawéj stronie i w linii prostéj liczby odpowiadającéj temu logarytmowi. Opuszczoną została cecha logarytmów, gdyż rozpoznać ją łatwo przez samo obejrzenie liczby (419). Każdy logarytm jest danym z ośmioma cyframi dziesiętnemi.

Ta tablica jest nazwaną *Chiliade* I, gdyż w rzeczy saméj zamyka ona w sobie logarytmy piérwszego tysiąca. (*Chiliade* jest wyraz grecki przerobiony na francuzki który oznacza zbiór tysiąca jedności.)

Tablice następujące są trochę więcéj złożone: rozciągają się one od 1020 aż do 108000. Piérwsza kolumna, którą się tam spostrzega po lewéj stronie, nosząca napis N, zawiéra liczby całkowite od 1200 aż do 10800. Kolumna następująca, oznaczona 0, przedstawia części dziesiętne logarytmów odpowiadających tym liczbom; tak że połączenie tych dwóch kolumn tworzy ciąg tablicy piérwszéj, i daje natychmiast logarytmy liczb od 1200 aż do 10800. Każdy z tych logarytmów ma tylko siedm piérwszych cyfer dziesiętnych.

Jeżeli zwrócimy uwagę na kolumnę mającą za nagłówek N, to spostrzeżemy że liczby, składające ją, nie są wszystkie napisane w całości; dwie ostatnie cyfry po prawéj stronie każdéj z nich są same położone na swém miejscu; co do innych, widzimy je na pięć razy raz tylko jeden wskazane. Lecz łatwo w czytaniu wrócić je do należytego stanu.

Jeżeli zwrócimy uwagę na kolumnę oznaczoną 0, widzimy, po lewéj stronie téj kolumny, pewne liczby oddzielone, ze trzech składające się cyfer, które postępują zawsze powiększając się o jedność, i które nie są w odległościach zupełnie równych, jedne od drugich. Po prawéj stronie tejże saméj kolumny, są liczby, z cztérech cyfer każda, nie zostawiające przedziału między sobą; tak że możnaby było mniemać, że pewne logarytmy mają tylko cztéry cyfry, gdy tymczasem inne mają ich siedm.

Lecz nie powinno to wcale nikogo mylić; każda bowiem liczba oddzielona może być uważana jako napisana pod nią samą, naprzeciwko każdéj z liczb cztérocyfrowych znajdujących się w téjże saméj kolumnie, i to tyle razy ile jest potrzebném aby każdy wiersz był zapełnionym: wtedy więc gdy się nie znajduje, naprzeciwko pewnéj liczby, jak tylko cztéry cyfry w kolumnie oznaczonéj 0, potrzeba napisać, po lewéj stronie tych czterech cyfer, liczbę oddzieloną z trzech cyfer, najbliższą na którą się natrafia podnosząc wzrok do góry.

Kiedy dwie liczby są dziesięć razy większe jedna od drugiéj, ich logarytmy mają za różnicę logarytm 10 który jest 1, a tém samém, ich część dziesiętna jest tąż samą (420). Tym sposobem połączenie dwóch piérwszych kolumn, o których niedawno mówiliśmy, daje także, co dziesięć, logarytmy liczb zawartych między 10200 i 108000. Dla znalezienia logarytmów liczb pośrednich, potrzeba uciec się do kolumn oznaczonych 1, 2, 3, 4, i t. d. Te kolumny zamykają w sobie cztéry ostatnie dziesiętne logarytmów liczb, zakończonych przez cyfry które są na czele tych kolumn. Tym sposobem kolumna oznaczona 0 zamyka w sobie cztéry ostatnie cyfry logarytmów liczb, zawartych między 10200 i 108000, które są zakończone przez zero, i oprócz tego liczby oddzielone o których już mówiliśmy, a które powinny być także uważane jako położone po lewéj stronie cyfer które zamykają inne kolumny. Kolumna oznaczona 1 zamyka w sobie cztéry ostatnie cyfry logarytmów wszystkich liczb zakończonych przez 1; kolumna oznaczona 2, zamyka cztéry ostatnie cyfry logarytmów wszystkich liczb zakończonych przez 2; kolumna oznaczona 3, zamyka cztéry ostatnie cyfry logarytmów wszystkich liczb zakończonych przez 3; i tak daléj aż do 9. Mamy, w ten sposób, tablicę w dwóch rzędach, w któréj bada się naprzód piérwszą kolumnę, oznaczoną N; a, kiedy się wynajdzie cztéry pierwsze cyfry, liczby któréj chcemy otrzymać logarytm, śledzi się wzrokiem wiersz w którym te cyfry się znajdują, aż się przybędzie nakoniec do kolumny na czele któréj znajduje się piąta cyfra liczby danéj; wtedy mamy przed oczyma cztéry ostatnie cyfry dziesiętne logarytmu szukanego. Co się tyczy trzech pierwszych cyfr, to są one wyrażone przez liczbę oddzieloną, w drugiéj kolumnie, a mianowicie w najbliższéj na którą natrafiamy podnosząc wzrok do góry.

Ostatnia kolumna zawiéra różnice logarytmów dwóch liczb po sobie następujących o pięciu cyfrach i części tych różnic, to jest wielo-czyny tychże samych różnic pomnożone przez $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, i t. d., aż do $\frac{9}{10}$. Każda z tych małych tablic znajduje się położoną bezpośrednio pod różnicą któréj ta tabliczka wskazuje części. Dzieli się ona na dwie kolumny przez linią pionową: na lewo są liczby dziesiętne od 1 aż do 9; na prawo i naprzeciwko, są części odpowiadające. Zobaczymy nieco daléj jaki jest użytek tych tablic.

Lecz, na początku tablic, te różnice jako nadto liczne, a, tém samém znajdujące się bardzo blisko jedne drugich, niedozwoliłyby umieszczenia w jednéj kolumnie małych tablic części proporcyonalnych w przestrzeni któraby się znajdowała między niemi. Dla tego to właśnie urządzono je naprzód w dwóch kolumnach: pierwsza z tych różnic zajmuje pierwszą kolumnę; dwie następne, nie wychodząc z linii pozioméj w której powinny być umieszczone, są odsunięte na prawo, i zajmują drugą kolumnę; dwie różnice po sobie następujące znajdują się w pierwszéj kolumnie, a dwie następne w drugiéj: i tak daléj. Na cztérech pierwszych stronicach, nie umieszczono w tablicach części tych różnic jak tylko co dwie.

Dla zrobienia tych wyłożeń jaśniejszemi, załączamy tu jedną ze stronic tablicy *Callet'a.*

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	DIFF.
7680	885.3612	3669	3725	3782	3828	3895	3951	4008	4065	4121	57
81	4178	4234	4291	4347	4404	4460	4517	4573	4630	4686	1 | 6
82	4143	4800	4856	4913	4969	5026	5082	5139	5195	5252	2 | 11
83	5308	5365	5421	5478	3534	5591	5647	5704	5761	5817	3 | 17
84	5874	5950	5987	6043	6100	6156	6213	6269	6326	6382	4 | 23
7685	6439	6495	6552	6608	6665	6721	6778	6834	6891	6947	5 | 29
86	7904	7060	7117	7173	7230	7286	7343	7399	7456	7512	6 | 34
87	7569	7625	7682	7738	7795	7851	7908	7964	8021	8077	7 | 40
88	8134	8170	8247	8303	8360	8419	8473	8529	8586	8642	8 | 46
89	8699	8755	8812	8868	8925	8981	9037	9094	9150	9207	9 | 51
7690	9263	9320	9376	9433	9489	9546	9602	9659	9715	9772	
91	9828	9885	9941	9998							
	886.				0054	0110	0167	0223	0280	0336	
92	0393	9449	0506	0562	0619	0675	0732	0788	0844	0901	
93	0957	1014	1070	1127	1183	1240	1296	1352	1409	1465	
94	1522	1578	1635	1691	1748	1804	1860	1917	1773	2030	
7695	2086	2143	2199	2256	2312	2368	2425	2481	2538	2594	
96	2651	2707	2763	2820	2876	2933	2989	3046	3102	3158	
97	3215	3271	3328	3384	3441	3497	3553	3610	3666	3723	
98	3779	3835	3892	3948	4005	4061	4118	4174	4230	4287	
99	4343	4490	4456	4512	4569	4625	4682	4738	4794	4851	
7700	4907	4964	5020	5076	5133	5189	5246	5302	5358	5415	
01	5471	5528	5584	5640	5697	5753	5810	5866	5922	5979	
02	6035	6092	6148	6204	6261	6317	6373	6430	6486	6543	
03	6599	6655	6712	6768	6824	6881	6938	6994	7050	7106	
04	7163	7219	7275	7332	7388	7445	7501	7557	7614	7670	
7705	7726	7783	7839	7896	7952	8008	8065	8121	8177	8234	
06	8290	8346	8403	8459	8515	8572	8628	8685	8741	8797	
07	8854	8919	8966	9023	9079	9135	9192	9248	9304	9361	
08	9417	9473	9530	9586	9642	9699	9755	7811	9868	9924	
09	9980										
	887.	0037	0093	0149	0206	0262	0318	0375	0431	0487	
7710	0544	0600	0665	0713	0769	0825	0882	0938	0994	1051	
11	1107	1163	1220	1276	1332	1389	1445	1501	1558	1614	
12	1679	1727	1783	1839	1895	1952	2008	2064	2121	2177	
13	2233	2290	2346	2402	2459	2515	2571	2627	2684	2740	
14	2796	2853	2909	2965	3022	3078	3134	3190	3247	3303	
7715	3359	3416	3472	3528	3584	3641	3697	3753	3810	3866	
16	3922	3978	4035	4091	4147	4204	4260	4316	4372	4429	
17	4485	4541	4598	4654	4710	4766	4823	4879	4935	4901	
18	5048	5104	5160	5217	5273	5329	5385	5442	5498	5554	
19	5610	5667	5723	5779	5835	5892	5948	6004	6060	6117	
7720	6173	6229	6286	6342	6398	6454	6511	6567	6623	6679	
21	6736	6792	6848	6904	6961	7017	7073	7129	7185	7242	
22	7298	7354	7410	7467	7523	7579	7635	7692	7748	7804	
23	7860	7917	7973	8029	8085	8142	8198	8254	8310	8366	
24	8423	8479	8535	8591	8648	8704	8760	8816	8872	8929	
7725	8985	9041	9097	9154	9210	9266	9322	9378	9435	9491	
26	9547	9603	9659	9716	9772	9828	9884	9941	9997		
	888.									0053	
27	0109	0165	0222	0278	9334	0390	0446	0503	0559	0615	
28	0671	0727	0784	0840	0896	0952	1008	1064	1121	1177	
29	1233	1289	1345	1402	1458	1514	1570	1626	1683	1739	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Widzimy w tablicy, na lewo kolumny N, dwie inne kolumny, które opuściliśmy, gdyż one nie mają żadnego związku z teoryą logarytmów.

UŻYCIE TABLIC LOGARYTMOWYCH.

423. Zagadnienie I. *Mając daną liczbę jakąkolwiek, znaleźć jéj logarytm, za pomocą tablic.*

Liczba dana może być całkowitą i mniejszą od 108000; albo téż, ta liczba może być dziesiętną, taką że jéj cyfry tworzą, bez względu na przecinek, liczbę mniejszą od 108000. Przywodzi się ten drugi przypadek do pierwszego; uważając naprzód liczbę jak gdyby była całkowitą, a dając późniéj jéj logarytmowi cechę odpowiednią.

1szy Przypadek. Jeżeli liczba dana jest mniejszą od 1200, otrzyma się ją w pierwszym tysiącu, pomiędzy liczbami naturalnemi które są w kolumnach oznaczonych N. Liczba która się znajduje po jéj prawéj stronie, w tymże samym wierszu a w kolumnie następującéj, pod napisem *Log.*, będzie częścią dziesiętną jéj logarytmu; co się zaś tyczy cechy odpowiadającéj temu logarytmowi, ta jest zawsze równą 0, 1, 2 albo 3, stosownie do tego jak pierwsza cyfra znacząca liczby wyraża jedności proste, dziesiątki, sta lub tysiące.

2gi Przypadek. Jeżeli liczba dana jest zawartą między 1200 i 10800, będzie się ją szukało w tablicy która następuje po *pierwszym* tysiącu; i znalazłszy ją w kolumnie pod napisem N, powinno się patrzeć w kolumnie następującéj oznaczonéj 0. Jeżeli tam ujrzymy siedm cyfer wręcz obok siebie postawionych w porządku liczby naturalnéj, otrzymamy od razu część dziesiętną logarytmu szukanego. Lecz, jeżeli tam się znajdzie tylko cztery cyfry, to dostarczą one cztery ostatnie cyfry téjże saméj części dziesiętnéj; późniéj się zauważy że się ciągnie po ich lewéj stronie, margines albo przestrzeń próżna; będziemy więc postępowali po tym marginesie podnoszącym się stopniami do góry; i pierwsza liczba z trzech cyfer złożona na którą tam natrafimy, będzie natenczas wyrażała trzy pierwsze cyfry części dziesiętnéj logarytmu szukanego. Napisawszy więc tę liczbę po lewéj stronie cztérech cyfer które już uprzednio otrzymaliśmy, będziemy mieli liczbę z siedmiu cyfer złożoną jak powyżéj : nakoniec dołączy się tu jeszcze cecha odpowiednia. Na przykład, obok 7680, znajduję 8853612 w tymże samym wierszu i w kolumnie oznaczonéj 0; mam więc, od razu, część dziesiętną logarytmu szukanego; pozostaje mi tylko jeszcze dołączyć cechę 3. Gdyby liczba była 7,680, jéj cecha byłaby zero; mielibyśmy za cechę 1, gdyby liczba była 76,80; 2, gdyby nią była 768,0. Obok 7695, w kolumnie oznaczonéj 0, znajduję tylko 2086; lecz trzymając się marginesu, pierwszą liczbą na którą natrafiam, podnosząc wzrok do góry jest 886; moim logarytmem jest więc 3,8862086. Jeśliby liczba miała pięć cyfer, i gdyby była mniejszą od 10800, znalazłoby się podobnież jéj logarytm.

3^{ci} Przypadek. Jeżeli liczba jest zawartą między 10800 i 108000, mamy najzwykléj pięć cyfer znaczących; odsunąwszy, na chwilę, cyfrę ostatnią, będziemy szukali, jak powyżéj, liczby wyrażonéj przez cztery pierwsze. W tym celu będzie się śledziło wzrokiem wiersz na którym tę się liczbę znalazło, przebiegając go od lewéj ku prawéj ręce, aż się przyjdzie do kolumny, na wierzchu któréj jest napisaną piąta cyfra którą odsunęliśmy. Cztery cyfry które są, zarazem, w wierszu czterech pierwszych cyfer liczby danéj, i w kolumnie odpowiadającéj cyfrze piątéj, będą wyrażały cztery ostatnie dziesiętne logarytmu téj liczby. Co się tyczy trzech pierwszych, znajdzie się je, jak powyżéj, idąc w górę wzdłuż marginesu kolumny oznaczonéj 0. Niech będzie naprzykład, 772,37 liczba dana, któréj chcemy znaleźć logarytm; szukamy naprzód liczby 7723 w kolumnie N, posuwając się potem wzdłuż wiersza liczby świeżo znalezionéj nie widzimy nic wcale na marginesie kolumny 0; lecz trochę wyżéj, natrafiamy na trzy cyfry 887 najbliżéj, po nad wierzchem liczby danéj, w tymże marginesie położone; przebiegamy daléj, od lewéj ku prawéj ręce, wiersz liczby 7723, i zatrzymujemy się na kolumnie oznaczonéj 7, w któréj (naprzeciwko liczby 7723) znajdziemy cztery ostatnie cyfry dziesiętne 8254. Część dziesiętna logarytmu szukanego jest więc 0,8878254; a logarytmem szukanym jest 2,8878254. Jeśliby liczba dana była zawartą między 100000 i 108000, znalazłoby się podobnież jéj logarytm.

424. Przypadek w którym liczba dana nie znajduje się w tablicy. Wyłożenia szczegółowe, które poprzedzają, dają sposób znalezienia logarytmu liczby całkowitéj mniejszéj od 108000, jakoteż

logarytmu liczby dziesiętnéj, któréj cyfry, nie zważając na przecinek, wyrażają liczbę niższą od téj granicy. Dla otrzymania logarytmów liczb większych, uważa się, że dzieląc te liczby przez potęgę odpowiednią z 10, można będzie zawsze zmniejszyć je tak aby były zawarte w granicach tablicy, Otóż takie dzielenie zmniejsza logarytm o liczbę całkowitą jedności (420), i nie zmienia, tém samém, jego części dziesiętnéj. Zagadnienie sprowadza się więc do znalezienia logarytmu liczby która nie jest całkowitą, i która jest niższą od 108000.

Na dowodzenie tego, *przyjmuje się że, w granicach mało oddalonych od siebie, wzrost logarytmów jest proporcyonalny do wzrostu liczb.*

Niech będzie, na przykład, liczba 76807,753 ; powiemy :

logarytm 76807 jest 4,8854008 ;
logarytm 76808 jest 4,8854065 ;

ich różnica, wskazana w tablicy, jest 57 (jedności dziesiętnych siódmego porządku) ; a zatém, kiedy liczba powiększa się o jedność, jéj logarytm powiększa się o 57; jeżeli więc liczba powiększa się tylko o 0,753, jéj logarytm musi być powiększonym o ilość x, oznaczoną przez proporcyą

$$\frac{1}{0,753} = \frac{57}{x};$$

zkąd : $$x = 57 \times 0,753.$$

Tak więc, *dla otrzymania* x, *mnoży się różnicę tablic przez część dziesiętną liczby danéj.*

W mnożeniu 57 przez 0,753, potrzeba wziąć tylko część całkowitą wieloczynu; gdyż część dziesiętna wyrażałaby najwięcéj *dziesiąte* części jedności siódmego porządku, to jest jedności ósmego porządku, które się zaniedbuje w wartości logarytmów.

Aby pomnożyć 57 przez 0,753, będzie potrzeba mnożyć kolejno przez 7,5 i 3; te wieloczyny znajdują się całkiem obrachowane w małéj tablicy umieszczonéj pod spodem 57, w ostatniéj kolumnie po prawéj stronie tablicy. Są one sprowadzone do cyfer które należy zachować, przypuszczając że mnożnik wyraża dziesiętne. Tym sposobem, naprzeciwko 7, położono 40, zamiast 39,9 który byłby wieloczynem dokładnym; naprzeciwko 5 położono 29 zamiast 28,5; naprzeciwko 3, położono 17 zamiast 17,1. W przypadku obecnym, w którym 5 wyraża setne, wieloczyn odpowiedni będzie 2,9, za który można będzie podstawić 3 : 3 wyraża tysiączne, a wieloczyn odpowiedni musi być podzielonym przez 100; ten wieloczyn będzie wyrażał wtedy 0,17 i powinien być opuszczony.

Wartość na x będzie, według tego, 43; a zatém, dla otrzymania logarytmu żądanego, należy dodać do logarytmu 76807, 43 jedności siódmego porządku; co czyni 4,8854051.

Jeżelibyśmy chcieli otrzymać logarytm 76807753, ten byłby oczywiście 7,8854051. W ogólności, byleby zachowano też same cyfry, w tymże samym porządku, na jakiemkolwiekbądź miejscu położy się przecinek, część dziesiętna logarytmu, którą Niemcy zowią zwykle *mantyssą*, pozostaje tąż samą.

Uwaga. Urządza się rachunki sposobem następującym:

Liczba.	*Logarytm.*	
76807..........	8854008	
7.........	40	
5........	2	9
3.......		17
Log 76807,753 =	4,8854051	

W dodawaniu, nie pisze się summ częściowych pochodzących z cyfer położonych po prawéj stronie linii pionowéj; zachowa się tylko zatrzymania które te summy mogą dać dla siódmego porządku.

425. Zagadnienie II. *Mając dany logarytm, znaleźć, za pomocą tablic, liczbę odpowiadającą temu logarytmowi.*

Pierwszy przypadek. Jeżeli logarytm, nie zważając na cechę, znajduje się pomiędzy logarytmami pierwszego tysiąca, otrzyma się natychmiast liczbę mu odpowiadającą; ta liczba będzie w kolumnie oznaczonéj N, poprzedzającéj bezpośrednio kolumnę która zawiéra logarytm dany, i w wierszu tegoż logarytmu. Napisawszy ją, położy się przecinek, tak ażeby liczba miała jedną cyfrę całkowitą więcéj niż cecha ma jedności (419).

Przykłady: $2{,}17026172 = \log 148$;

$0{,}06781451 = \log 1{,}169$.

Drugi przypadek. Jeżeli logarytm nie znajduje się w piérwszéj tablicy to należy szukać trzech piérwszych dziesiętnych tego logarytmu pomiędzy liczbami oddzielonemi, które spostrzegamy w kolumnie oznaczonéj 0, drugiéj tablicy; a znalazłszy je, potrzeba będzie zająć się wyszukaniem cztérech ostatnich cyfer logarytmu pomiędzy liczbami cztérech cyfer, znajdującemi się w téjże saméj kolumnie, spuszczając się na dół. Jeśli się otrzyma te cztéry ostatnie cyfry, zobaczymy liczbę szukaną w kolumnie oznaczonéj N, i w wierszu cztérech ostatnich cyfer dziesiętnych logarytmu. Wypiszemy tę liczbę, i damy dla przecinka miejsce jakie mu wskaże cecha logarytmu.

Przykłady: $4{,}8872796 = \log 77140$;

$2{,}8863779 = \log 769{,}8$.

Trzeci przypadek. Jeżeli nie znajdziemy, w kolumnie oznaczonéj 0, cztérech ostatnich cyfer logarytmu danego, zatrzymamy się wtedy na tych cyfrach które się do nich najbardziéj przybliżają, dając zawsze liczbę mniejszą od liczby utworzonéj przez ostatnie cztéry cyfry logarytmu; posuwać się będziemy po wierszu na którym zatrzymaliśmy się, przebiegając go wzdłuż od lewéj ku prawéj ręce; a, gdy zdarzy się nam znaleźć w tymże wierszu cztéry ostatnie cyfry logarytmu danego, postępować będziemy, podnosząc się do góry albo spuszczając się na dół, kolumną na któréj znaleźliśmy je; cyfrę którą zobaczymy na wierzchu i u spodu téj kolumny, będzie piątą cyfrą liczby szukanéj, któréj cztéry pierwsze znajdą się, jak powyżéj, w kolumnie oznaczonéj N.

Chcemy wiedzieć, na przykład, do jakiéj liczby należy logarytm mający, za część dziesiętną, 8871276? szukam 887 pomiędzy liczbami oddzielonemi kolumny oznaczonéj 0; przebiegam, spuszczając się na dół, tęż samą kolumnę, i znajduję że 1107 przybliża się najbardziéj *na mniéj* do 1276; posuwam się wierszem poczynającym się przez 1107, i znajduję 1276 w tymże wierszu; podnoszę się do góry w kolumnie zawierającéj w sobie 1276, znajdując cyfrę 3 na zagłówku téj kolumny; wracam na nowo do cyfer 1276, i widzę że wiersz, gdzie się te cyfry znajdują, odpowiada liczbie 7711; piszę tę liczbę, i po prawéj jéj stronie kładę cyfrę 3 którą już uprzednio znalazłem: co mi daje 77113. To jest liczba którą potrzeba było znaleźć. Kładę późniéj na miejscu odpowiedniém przecinek, wedle wartości cechy.

Przykłady: $4{,}8871276 = \log 77113$;

$$2{,}8871276 = \log 771{,}13.$$

Czwarty przypadek. Jeżeli logarytm dany nie znajduje się w żadnym z przypadków poprzedzających, dla otrzymania liczby odpowiadającéj temu logarytmowi, będzie się musiało szukać, jak powyżéj (trzeci przypadek), logarytmu przybliżającego się do niego najbardziéj *na mniéj*, późniéj liczby całkowitéj mu odpowiadającéj; ta liczba i następująca będą zawiérały liczbę żądaną; wydobędzie się nakoniec różnicę z jedną z tych liczb całkowitych, za pomocą proporcyi przyjętéj (424).

Przykład. Weźmy do znalezienia liczbę któréj logarytm ma, za część dziesiętną, 8870282. Znajdzie się, jak już o tém była uprzednio wzmianka, że ten logarytm jest zawartym między 8870262 i 8870318, które odpowiadają liczbom 77095 i 77096; różnicą tych dwóch logarytmów, wskazaną w tablicy, jest 57 jedności ostatniego porządku; a logarytm dany przewyższa najmniejszy z dwóch o 20 jedności tegoż samego porządku. Powiémy więc: dla różnicy 57 między logarytmami odpowiada różnica 1 między liczbami; więc, dla różnicy 20 między logarytmami musi odpowiadać, między liczbami, różnica x oznaczona przez proporcyą

$$\frac{57}{20} = \frac{1}{x};$$

zkąd wynika, $x = \frac{20}{57}$; a tém samém, liczbą szukaną jest $77095 + \frac{20}{57}$, albo, sprowadzając ten ułamek do formy dziesiętnéj, 77095,35.

Tak więc, *dla otrzymania* x, *potrzeba podzielić różnicę między logarytmem danym i najmniejszym z dwóch logarytmów które go między sobą zawiérają, przez różnicę tablic.*

Uwaga I. Jeżeli odciągnie się jeden od drugiego dwa logarytmy po sobie następujące 8870262 i 8870318, znajduje się na różnicę 56 a nie 57. Można przyjąć wszelako różnicę 57 daną przez Callet'a, która, z powodu cyfer dziesiętnych nie zapisanych w tablicy, jest tak bliską lub bliższą prawdziwéj jak 56.

Uwaga II. Można, za pomocą małych tablic części proporcyonalnych, wykonać zamianę wartości x na dziesiętne. Szuka się tam, w kolumnie po prawéj stronie, liczby przybliżającéj się najbardziéj do 20 *na mniéj ;* znajduje się 17, które odpowiada 3; 3 jest cyfrą dziesiętnych liczby szukanéj. Ponieważ pozostaje jeszcze (od 17 do 20) 3 jedności siódmego porządku, zamieni się je na 30 jedności ósmego porządku; szuka się na nowo, w kolumnie po prawéj stronie, liczby przybliżającéj się najbardziéj do 30, i cyfra 5, która jest położoną po lewéj stronie 29, jest cyfrą setnych.

Uwaga III. Urządza się rachunek w sposób następujący :

Logarytm.	*Liczba.*
8870282	
8870262.	77095
20.	35

4,8870282 = log 77095,35.

Gdybyśmy szukali liczby mającéj za logarytm 5,8870282, byłaby nią oczywiście 770953,5. W ogólności, znalazłszy, jak powyżéj, siedm cyfer po sobie następujących liczby żądanéj, bez względu na cechę logarytmu, położy się przecinek, w taki sposób aby od-dzielić, po lewéj stronie, liczbę cyfer wyższą o jedność od téjże cechy.

426. Uwaga IV. Nie możemy wskazać tu granicy błędu który można popełnić, przypuszczając wzrost logarytmów proporcyonalnym do wzrostu liczb. Zauważmy tylko, iż przejrzenie tablic okaże że ta proporcyonalność jest prawie dokładną w granicach dostatecznie oddalonych. Różnica dwóch logarytmów po sobie następujących zmienia się, w rzeczy saméj, bardzo powoli; i, mając wzgląd na stopień przybliżenia który dają tablice, ta różnica pozostaje często stałą w przeciągu wielu stronic; wynika ztąd oczywiście że, dla liczb całkowitych zawartych w tych stronicach, wzrost logarytmów jest proporcyonalny do wzrostu liczb.

Kiedy się używa téj proporcyi dla uzupełnienia logarytmu liczby jakiéjkolwiek (424), błąd odnosi się tylko do jedności dziesiętnych porządku niższego jak siódmy. Kiedy ta proporcya stosuje się do wyszukania liczby odpowiadającéj logarytmowi danemu, nie może ona dostarczyć, przez wzgląd na stopień przybliżenia tablic, tylko dwie cyfry najwięcéj, oprócz pięciu cyfer bezpośrednio z tablicy otrzymanych.

ZASTOSOWANIE TEORYI LOGARYTMÓW.

427. Sposób wykonywania mnożeń, dzieleń, i t. d. Kiedy jakakolwiek liczba nieznana wynika z mnożeń, dzieleń, podnoszeń do potęg lub wyciągań pierwiastków, wykonać się mających na liczbach danych, dla oznaczenia jéj wartości, szuka się wartości jéj logarytmu, który wynika z działań daleko prostszych. Mając znany logarytm, otrzymuje się liczbę mu odpowiadającą, jak już o tém mówiliśmy (425).

Przykład. Obrachować wyrażenie:

$$x = \frac{\sqrt[7]{36926{,}5^3} \times \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{6258{,}96^2}}.$$

Mamy, według zasad (411 i nast.):

$$\log x = \frac{3}{7}\log 36926{,}5 + \frac{1}{5}\log 2629 - \frac{2}{3}\log 6258{,}96$$

Szuka się trzech logarytmów w tablicach, i wykonywa się rachunek:

1°
$$\begin{array}{rcl} & 36926 \ldots\ldots 5673323 & \\ & 5 \ldots\ldots\ldots 59 & \\ \log 36926{,}5 & = 4{,}5673382 & \\ 3\log 36926{,}5 & = 13{,}7020146 & \\ \frac{3}{7}\log 36926{,}5 & = \ldots\ldots\ldots\ldots & 1{,}9574307 \end{array}$$

2°
$$\begin{array}{rcl} \log 2629 & = 3{,}4197906 & \\ \frac{1}{5}\log 2629 & = \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}6839581 \end{array}$$

3°
$$\begin{array}{rcl} & 62589 \ldots\ldots 7964980 & \\ & 6 \ldots\ldots\ldots 42 & \\ \log 6258{,}96 & = 3{,}7965022 & \\ 2\log 6258{,}96 & = 7{,}5930044 & \\ \frac{2}{3}\log 6258{,}96 & = \ldots\ldots\ldots\ldots & 2{,}5310015 \\ \log x & = \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}1103873 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1103873 & \\ 1103540 & 12893 \\ \hline 333 & 99 \end{array}$$

Więc $x = 1{,}289399.$

428. Przypadek w którym niektóre liczby dane są mniejszemi jak jedność. Według naszych definicyj, tylko liczby większe od jedności mają logarytmy. Jest więc rzeczą ważną żeby liczby, na których się działa, spełniały wszystkie ten warunek. Otóż można będzie zawsze w taki sposób się urządzić aby to miało miejsce; gdyż, jeżeli mamy mnożyć pewną liczbę przez liczbę a niższą od jedności,

można będzie ją dzielić przez liczbę $\frac{1}{a}$, która jest większą jak 1; a, jeżeli mamy dzielić ją przez a, można będzie mnożyć ją przeciwnie, przez $\frac{1}{a}$.

PRZYKŁAD. Obrachować wyrażenie :

$$x=\left(\sqrt[3]{13572 \times \frac{1}{11}}\right)^2.$$

Pisze się :

$$x=\left(\sqrt[3]{\frac{13572}{11}}\right)^2;$$

a więc mamy : $\log x = \frac{2}{3}(\log 13572 - \log 11)$.

Otóż znajdziemy :

$$\log 13572 = 4,1326439$$
$$\log 11 = 1,0413927$$

$$\log 13572 - \log 11 = 3,0912512$$
$$2(\log 13572 - \log 11) = 6,1825024$$
$$\log x = \frac{2}{3}(\log 13572 - \log 11) = 2,0608341$$

0608341

0608111 11503

230 608

Więc : $x = 115,03608$.

429. PRZYPADEK W KTÓRYM DANA LICZBA DO OBRACHOWANIA JEST MNIEJSZĄ OD JEDNOŚCI. Jeśliby liczba do obrachowania była sama przez się mniejszą od 1, nasze definicye nie oznaczyłyby jéj logarytmu. W tym przypadku, byłoby najstosowniéj pomnożyć ją nasam-

przód, przez potęgę z 10 tak wielką, aby wieloczyn tym sposobem otrzymany przewyższał jedność; możnaby było zastosować wtedy sposób poprzedzający, dzieląc wypadek przez też samą potęgę z 10.

Przykład. Obrachować wyrażenie :

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{375} \times 0{,}5142}.$$

Ponieważ x jest mniéjszém od 1, rozmnożymy je przez 10^n; n powinno być oznaczoném późniéj; tak postępując, otrzymamy :

$$10^n \times x = 10^n \times \sqrt[5]{\frac{1}{375} \times \frac{5142}{10000}} = \frac{10^n}{\sqrt{\frac{375 \times 10000}{5142}}};$$

a tém samém,

$$\log(10^n \times x) = n - \frac{1}{5}(\log 375 + \log 10000 - \log 5142).$$

Otóż znajdziemy

$$\begin{aligned} \log 375 &= 2{,}5740313 \\ \log 10000 &= 4, \\ \log 5142 &= 3{,}7111321 \\ \hline \log 375 + \log 10000 - \log 5142 &= 2{,}8628992 \\ \frac{1}{5}(\log 375 + \log 10000 - \log 5142) &= 0{,}5725798. \end{aligned}$$

Widzimy że dosyć wziąć $n = 1$, aby odciąganie mogło się wykonać należycie. Będzie więc :

$$\log 10x = 1 - 0{,}5725798 = 0{,}4274202.$$

Obrachuje się potém liczbę odpowiadającą :

0,4274202		
0,4274050	. . . .	26753
152		94

Tak więc : $10x = 2{,}675594$; zkąd $x = 0{,}2675594$.

O CECHACH ODJEMNYCH.

430. Definicya cechy odjemnéj. Nasze definicye nie oznaczają logarytmów dla liczb mniejszych jak jedność; otóż, aby rozciągnąć aż do nich korzyści tego sposobu skracającego rachunek, widzieliśmy uprzednio (429), że należy zrobić je wyższémi nad 1, mnożąc przez potęgę odpowiednią z 10. Lecz inaczéj zwykle się postępuje w praktyce. Nie zmienia się liczb mniejszych od jedności; określa się, przez ugodę stanowczą, logarytmy tych liczb dowodząc że własności, które posiadają logarytmy zwyczajne (numeru 411 i nast.), rozciągają się bez żadnych zmian do logarytmów nowych.

Dla określenia logarytmu liczby A niższéj od jedności, zauważmy że można zawsze mnożyć A przez pewną potęgę n z 10, wybraną w taki sposób, żeby wieloczyn był większym jak 1, a zatém miał swój logarytm (403). Otóż widzieliśmy (420) że kiedy się dzieli przez 10^n liczbę większą jak 10^n, część dziesiętna jéj logarytmu nie zmienia się, lecz cecha (która przynajmniéj musi być równą n), jest zmniejszoną o n jedności. *Przyjętém zostało* rozciągnienie tego twierdzenia do liczb mniejszych jak 10^n, które, przez dzielenie, stają się niższémi od jedności, i *nazwanie logarytmem* A *logarytmu* (A $\times$ 10^n), *zmniejszonego o* n *jedności*.

Przykład. Jaki jest logarytm 0,0076807753?

Jeżeli, dla utkwienia myśli, pomnoży się tę liczbę przez 1000, w sposób taki aby zrobić ją większą od 1 a mniejszą od 10, wieloczyn jest 7,6807753, a logarytmem tego wieloczynu jest (424), 0,8854051. Będzie się przeto musiało odciągnąć 3 od wypadku dla otrzymania logarytmu szukanego. Tak więc, przez definicyą :

$$\log 0{,}0076807753 = 0{,}8854051 - 3.$$

Ponieważ 3 jest liczbą całkowitą, odciągniemy ją od cechy która staje się odjemną, część zaś dziesiętna pozostaje dodatną. Pisze się tym sposobem wypadek :

$$\log 0{,}0076807753 = \overline{3}{,}8854051.$$

Jeżeli, dla zrobienia liczby A większąj ak 1 a mniejszą jak 10, potrzeba pomnożyć ją przez 10^n, cecha wieloczynu, którą jest zero, staję się $-n$ po wykonaniu odciągania. Wynika ztąd łatwo że, *cecha odjemna logarytmu liczby niższéj od jedności, zamyka w sobie liczbę jedności równą miejscu jakie zajmuje, poczynając od przecinka, piérwsza cyfra znacząca liczby.*

431. Rachunki dotyczące liczb mniejszych jak jedność. Wypada z umowy służącéj za definicyą dla logarytmów liczb niższych od jedności, że *oblicza się część dziesiętna tych logarytmów wedle prawideł podanych* (423 *i* 424), *to jest nie zważając na przecinek, i że daje się potém dla wypadku cechę odjemną, któréj wartość jest równą miejscu jakie zajmuje piérwsza cyfra znacząca liczby po przecinku.*

Odwrotnie, *oblicza się cyfry liczby odpowiadającéj logarytmowi którego cecha jest odjemną, wedle prawideł podanych* (425 *i* 426), *to jest bez względu na cechę; i kładzie się potém przecinek, w sposób taki aby miejsce pierwszéj cyfry znaczącéj, począwszy od przecinka, było równém liczbie jedności cechy.*

432. Rozciągnienie własności logarytmów, do przypadku w którym liczby są mniejszémi jak jedność. Własność zasadnicza logarytmów opiéra się na tém że *logarytm wieloczynu z dwóch czynników jest równy summie logarytmów dwóch czynników.* Dowiedziemy że ta własność rozciąga się do przypadku w którym czynniki są mniejszémi jak jedność.

Niech będą dwie liczby A, B, obie niższe od 1: niech będą 10^p i 10^q potęgi z 10, przez które należy mnożyć je, ażeby stały się większémi jak 1 a mniejszémi jak 10. Logarytmy dwóch wieloczynów muszą być zawarte między 0 i 1 (419); tak że oznaczając je przez $0,a$ i $0,b$, otrzymujemy:

$$\log(A \times 10^p) = 0,a,$$
$$\log(B \times 10^q) = 0,b.$$

Wynika natenczas z definicyi (430), że:

$$\log A = 0,a - p,$$
$$\log B = 0,b - q;$$

a zatém,

$$[1] \qquad \log A + \log B = 0{,}a + 0{,}b - p - q.$$

Z drugiéj strony, własność zasadnicza (411), zastosowana do liczb $(A \times 10^p)$ i $(B \times 10^q)$, większych jak 1, daje :

$$\log\{(A \times 10^p)(B \times 10^q)\} = \log(A \times 10^p) + \log(B \times 10^q),$$

albo
$$\log(AB \times 10^{p+q}) = 0{,}a + 0{,}b;$$

a tém samém, jeżeli zastosujemy do liczby AB, która jest mniejszą jak 1, ugodę (430), otrzymamy :

$$\log AB = \log(AB \times 10^{p+q}) - (p+q),$$

zkąd wynika :

$$[2] \qquad \log AB = 0{,}a + 0{,}b - (p+q).$$

Porównywając nakoniec równości [1] i [2] :

$$[3] \qquad \log AB = \log A + \log B.$$

Co było do dowodzenia. Tak samo rozumując możnaby jeszcze było rozciągnąć powyższe twierdzenie, do przypadku w którymby jedna z liczb A, B miała swą wartość większą jak 1.

Własność zasadnicza będąc tym sposobem rozciągniętą do wszystkich przypadków, inne własności logarytmów (314, 315, 316), znajdują się, przez toż samo, uogólnionémi ; gdyż są one następstwami piérwszéj

433. Prawidła rachunku dla działań odbyć się mających na logarytmach z cechą odjemną. Logarytm, z cechą odjemną, może być uważany jako dwumian formy $(-a + b)$, w którym $-a$ przedstawia cechę, a zaś b część dziesiętną. Zatém, jeżeli natrafimy na taką liczbę w dodawaniu, potrzeba będzie dodać część dziesiętną,

a odciągnąć cechę. Jeżeli mamy, przeciwnie, odciągnąć ją, powinniśmy odjąć część dziesiętną, a dodać cechę.

Przykłady.

Dodawanie.	*Odciąganie.*
$2,7396452$	$\bar{3},5236729$
$\bar{3},6854386$	$\bar{2},7854831$
$\bar{2},6734895$	$\bar{2},7381898$
$\bar{1},0985738$	

Jeżeli mamy mnożyć liczbę, z cechą odjemną, przez liczbę całkowitą, mnoży się odrębnie część dziesiętną i cechę przez mnożnik, robiąc późniéj uproszczenie wieloczynów częściowych.

Przykład.

Mnożenie.

$$\begin{array}{r}
\bar{3},89367386 \\
24 \\
\hline
357469544 \\
178734772 \\
\hline
21,44817264 \\
-\,72 \\
\hline
\end{array}$$

Wieloczyn jest : $\overline{51},44817264$

Jeżeli idzie o podzielenie jéj przez liczbę całkowitą, dzieli się naprzód cechę odjemną dzielnéj przez dzielnik; a jeżeli dzielenie wykona się dokładnie, kończy się działanie, dzieląc część dziesiętną. Lecz, jeżeli cecha dzielnéj nie jest dokładnie podzielną przez dzielnik, dla zachowania w ilorazie formy jaką ma dzielna, bierze się iloraz przez *nadmiar;* otrzymuje się tym sposobem cechę odjemną ilorazu, a resztę dodatną, którą dodaje się do części dziesiętnéj dzielnéj; wreszcie, dzieląc summę przez dzielnik, otrzymuje się część dziesiętną dodatną ilorazu.

Przykłady.

Dzielenie : 1szy Przypadek.

$$\begin{array}{r|l} \overline{12},7328642 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & \overline{2},1221440 \end{array}$$

Dzielenie : 2gi Przypadek.

$$\begin{array}{r|l} \overline{13},2672958 & \\ \cline{2-2} 3 & \overline{3},4534591. \end{array}$$

Piérwszy przypadek nie potrzebuje objaśnienia. Co się zaś tyczy drugiego, zauważmy że, 13 nie jest podzielném przez 5, a że najmniejsza liczba, wyższa nad 13 i podzielna przez 5, jest 15, można więc napisać dzielną pod kształtem $-15+2,2672958$; a że iloraz z -15 przez 5 jest -3, iloraz zaś z 2,2672958 przez 5 jest 0,4534591; tém samém, ilorazem zupełnym, jest $\overline{3},4534591$. Ten wypadek otrzymuje się oczywiście wedle prawidła wysłowionego powyżéj.

434. Zastosowanie. Te umowy dozwolą nam zastosować sposoby zwyczajne rachunku logarytmów, do przypadków w których pewne liczby są mniejszémi jak jedność, nie potrzebując robienia ich, przedewszystkiem, większémi jak 1. Wróćmy, w rzeczy saméj, do rachunku numeru 429. Chcemy obliczyć wyrażenie:

$$x=\sqrt[5]{\frac{1}{375}\times 0,1542}.$$

Mamy:
$$\log x=\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375}+\log 0,1542\right).$$

Otóż:
$$\log\frac{1}{375}=\log 1-\log 375=0-2,5740313.$$

Ten logarytm *całkiem odjemny* zwykle się przekształca na inny mu równoważny, którego część dziesiętna jest dodatną, sposobem następującym:

$$\begin{aligned}-2,5740313&=-3+(1-2,5740313)\\&=-3+0,4259687;\end{aligned}$$

albo $$-2,5740313 = \bar{3},4259687.$$

Przeto $$\log\frac{1}{375} = \bar{3},4259687;$$

podobnież $$\log 0,5142 = \bar{1},7111321;$$

więc : $$\log\frac{1}{375} + \log 0,5142 = \bar{3},1371008,$$

a $$\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375} + \log 0,5142\right) = \bar{1},4274202.$$

A tém samém, liczbą odpowiadającą jest :

$$x = 0,2675594.$$

UŻYCIE DOPEŁNIEŃ.

435. Definicya. Nazywa się *dopełnieniem* (complementum) liczby N do 10, różnica 10 — N. Jeżeli liczba N jest dodatną i mniejszą jak 10, cyframi dopełnienia są dopełnienia do 9, cyfer liczby N, prócz ostatniéj cyfry znaczącéj po prawéj ręce, która jest dopełnieniem do 10 ostatniéj cyfry liczby N.

Przykłady. $$\text{dop. } 3,72543 = 6,27457;$$

$$\text{dop. } 7,28540 = 2,71460.$$

Jeżeli liczba jest dodatną i większą jak 10, otrzymuje się część dziesiętną dopełnienia według tegoż samego prawidła ; a dla otrzymania części całkowitéj, odejmuje się 10 od części całkowitéj liczby, dodaje się 1, i bierze się wypadek ze znakiem — .

Przykład. $$\text{dop. } 12,7258 = \bar{3},2742.$$

Gdyż mamy odciągnąć od 10 liczbę 12,7258 (433).

Jeżeli liczba N ma cechę odjemną, dodaje się do 10 ową cechę ze zmienionym znakiem, zmniejszając ją o jedność, i pisze się, potém, dopełnienie części dziesiętnéj.

PRZYKŁAD : dop. $\bar{3},74652 = 12,25348$.

Gdyż mamy do wykonania działanie $10 + 3 - 0,74652$.

436. UŻYCIE DOPEŁNIEŃ. Kiedy, w rachunkach logarytmowych, przywiedzeni zostajemy do wykonania odciągania, przekształca się je najczęściéj na dodawanie, za pomocą dopełnień. Mamy, w rzeczy saméj, jednako :

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Dosyć więc, dla obliczenia różnicy $(a - b)$, dodać do a dopełnienie liczby b i odjąć 10 od wypadku.

W ogólności, dla obliczenia wyrażenia $(a - b + c - d + e - f)$, zastępuje się je przez wyrażenie równoważne

$$(a + \text{dop.}\, b + c + \text{dop.}\, d + e + \text{dop.}\, f - 30),$$

którego wartość otrzymuje się przez dodawanie.

PRZYKŁAD. Obliczyć piątą potęgę ułamku $\frac{2}{37}$. Mamy :

$$\log 2 = \ldots\ldots\ 0,30103000$$

$$\log 37 = 1,56820172$$

$$\text{dop.} \log 37 = \ldots\ldots\ 8,43179828$$

$$\log \frac{2}{37} = \ldots\ldots\ \bar{2},73282828;$$

$$\log\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 5 \log \frac{2}{37} = \bar{7},66414140.$$

6641414	
6641341	46146
73	77

Więc $\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 0,000004614677$

O RÓŻNYCH UKŁADACH LOGARYTMÓW.

437. Istnieje nieskończona liczba układów logarytmów. Można wybrać do woli dwa postępy, jeden różnicowy zaczynający się od zera, drugi ilorazowy, którego piérwszym wyrazem jest 1; dostarczą one oczywiście układ logarytmów, posiadający wszystkie własności dowiedzione w numerze 411 i następnych. Liczba tych układów jest więc nieskończoną. Wiążą się one jedne z drugiemi za pomocą prostego prawa, które wynika z twierdzenia następującego.

438. Twierdzenie. *Stosunek logarytmów dwóch liczb jest tenże sam zawsze we wszystkich układach.*

W rzeczy saméj, niech będą A i B dwie liczby jakiekolwiek; i niech będzie $\frac{m}{n}$ ułamek, o wyrazach całkowitych, który, w pewnym układzie, przedstawia stosunek ich logarytmów. Będziemy przeto mieli:

[1] $$\frac{\log A}{\log B} = \frac{m}{n}; \quad \text{zkąd} \quad n \log A = m \log B.$$

Otóż ta ostatnia równość jest równoważną ze związkiem:

$$\log A^n = \log B^m; \quad \text{zkąd} \quad A^n = B^m. \qquad [2].$$

Lecz, jeżeli weźmiemy pod uwagę inny układ logarytmów, w którym logarytmy będą wskazane przez oznaczenie log', można będzie wziąć, w tym układzie, logarytmy dwóch członków równości [2]; tak postępując, otrzymamy:

$$n \log' A = m \log' B, \quad \text{zkąd} \quad \frac{\log' A}{\log' B} = \frac{m}{n}. \qquad [3].$$

A tém samém

[4] $$\frac{\log' A}{\log' B} = \frac{\log A}{\log B}.$$

Co było do dowodzenia.

Uwaga. Dowodzenie poprzedzające przypuszcza że stosunek dwóch logarytmów uważanych jest wymiernym. Gdyby to miejsca nie miało, możnaby było uważać dwie inne liczby, tak mało różniące się jak się tylko podoba od piérwszych, a spełniające ten warunek: twierdzenie stosuje się, jakkolwiekby te liczby przybliżonémi zostały, do dwóch logarytmów danych, przeto przyznać należy, jako rzecz oczywistą, że powyższe twierdzenie da się zarówno i całkowicie zastosować do nichże samych.

439. Wniosek. Wyciągnie się z równości [4]:

$$\frac{\log' A}{\log A} = \frac{\log' B}{\log B}. \qquad [5]$$

Tak więc, *stosunek logarytmów téjże saméj liczby, w dwóch układach różnych, jest tymże samym dla wszystkich liczb.*

440. Moduł. Jeżeli, dla dwóch układów oznaczonych, przedstawimy ten stosunek stały przez M, mamy:

$$\log' A = M \log A. \qquad [6]$$

A zatém, *kiedy się poznało logarytmy wszystkich liczb w pewnym układzie, dla otrzymania logarytmów w innym układzie, należy mnożyć piérwsze przez liczbę stałą* M. Ta liczba stała nazywa się *modułem* nowego układu względem piérwszego.

441. Zasada. Wynika z twierdzenia poprzedzającego, że mając tablicę logarytmów ułożoną, można będzie ułożyć drugą, byleby się tylko znało jeden z logarytmów nowego układu. Gdyż wyciąga się z równości [4]:

$$\log' A = \log A \times \frac{\log' B}{\log B}. \qquad [7]$$

Jeśli więc mamy $\log' B$, to dla otrzymania nowego logarytmu liczby A, dosyć pomnożyć $\log A$ przez stosunek znany $\frac{\log' B}{\log B}$.

Dla określenia układu logarytmów, daje się zwykle liczbę mającą za swój logarytm jedność. Ta liczba nazywa się *zasadą*, *grunten* albo *podstawą* (basis) układu.

Podstawą czyli zasadą układu pospolitego jest 10.

442. Obrachowanie logarytmu liczby w układzie jakimkolwiek. Wedle tego co poprzedza, tablice logarytmów pospolitych, obliczone dla przypadku w którym zasadą jest 10, dozwolą obliczyć logarytm liczby w układzie jakimkolwiek. Załóżmy sobie, na przykład, obliczyć logarytm liczby 7698, w układzie którego zasadą jest 12. Znajduje się w tablicach Callet'a, że, w układzie którego zasadą jest 10,

$$\log 7698 = 3,8863779, \quad \log 12 = 1,07918125$$

W układzie którego zasadą jest 12, mamy:

$$\log' 7698 = x, \quad \log 12 = 1.$$

Więc (441):

$$x = 3,8863779 \times \frac{1}{1,07918125},$$

$$x = 3,60122815.$$

443. Obliczenie zasady jakiegokolwiek układu, w którym znamy logarytm jakiéjkolwiek liczby. Zamierzmy sobie, na przykład, znaleźć zasadę układu, w którym logarytm liczby 25 jest 0,78321. Mamy, w tym układzie, oznaczając zasadę przez x:

$$\log' x = 1, \quad \log' 25 = 0,78321.$$

Lecz, w układzie pospolitym, mamy:

$$\log 25 = 1,39794001.$$

Więc (441): $$\log x = \frac{1,39794001}{0,78321} = 1,7848853,$$

a tém samém, $$x = 60,93759.$$

ĆWICZENIA.

I. Jaki jest stosunek q postępu ilorazowego złożonego z 11stu wyrazów, a którego piérwszym wyrazem jest 10, ostatnim zaś 100? Jaka jest summa S tego postępu?

Znajduje się: $$q = 1{,}258925, \quad S = 447{,}5910.$$

II. Jaka jest zasada x pewnego układu logarytmów, w którym 6 jest logarytmem 729?

Znajduje się: $$x = 3.$$

III. Jakie są zasady wymierne, dające na logarytm 20stu liczby wymierne?

Znajduje się że zasada jest równą 20^p, p będąc całkowitém.

IV. Jaka jest zasada x układu, w którym liczba całkowita dana a jest równą jéj logarytmowi?

Znajduje się: $$x = \sqrt[a]{a}.$$

V. Rozwiązać układ:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \log x + \log y = \frac{m}{n}.$$

Spostrzega się, że drugie zrównanie jest równoważnem związkowi $xy = \sqrt[n]{10^m}$; i zostaje się przywiedzionym do zagadnienia znanego.

VI. Rozwiązać układ

$$x^4 + y^4 = a^4, \quad \log x + \log y = \frac{p}{q}.$$

Tenże sam sposób.

VII. Obliczyć wyrażenie:

$$x = \frac{\left(\sqrt[5]{3226727}\right)^6}{\left(\sqrt[7]{10732872}\right)^4}.$$

Znajduje się: $$x = 6439{,}743.$$

VIII. Obliczyć wyrażenie :

$$x = \frac{\left(\sqrt[12]{0,0000782567}\right)^{25}}{\left(\sqrt[16]{0,000389672}\right)^{30}}.$$

Znajduje się : $x = 0,006875045$

IX. Obliczyć wyrażenie :

$$x = \frac{\sqrt[4]{(b^2 - a^2)^6 \times c^2}}{\sqrt[3]{a + d\ \sqrt{e}}},$$

w którém $a = 4,528627$, $b = 21,72857$, $c = \frac{30}{59}$, $d = 0,00873$, $e = 4839$.

Znajduje się : $x = 3966,30.$

X. Obliczyć wyrażenie :

$$x = \frac{\sqrt[3]{a^2 + b\ \sqrt{c}}}{10\ \sqrt[4]{d - ae^2}},$$

w którém $a = 27,35825$, $b = 3,2782$, $c = \frac{52}{79}$, $d = 38,54$,

$= 0,003528.$

Znajduje się : $x = 0,3648341.$

ROZDZIAŁ XXII.

O PROCENCIE SKŁADANYM I O UMORZENIACH DŁUGU.

PROCENT SKŁADANY.

444. Definicye. *Procent* (z łacińskiego : *pro centum*, za sto czyli od setki), albo *prowizya*, jest wynagrodzenie wypłacane wierzycielowi przez dłużnika za wypożyczenie pewnéj summy pieniędzy, zwanéj *kapitałem*. Przy oznaczeniu wysokości procentu ustanawia się ile od każdego sta kapitału opłacać należy procentu na rok i ten procent na rok od sta nazywa się *stopą procentu ;* i tak jeżeli zgodzono się liczyć od każdego sta kapitału po 5 na rok, mówi się że kapitał oddany został na procent po 5 od sta, co się pisze 5%. Procenta są *proste* albo *pojedyncze* i *składane*. Procent pojedynczy jest wtenczas kiedy oblicza się od kapitału pierwotnie wypożyczonego, chociażby ten najdłużéj znajdował się w ręku dłużnika; procent zaś jest składany, kiedy po upływie pewnego przeciągu czasu, procent za tenże czas od kapitału należny, dolicza się do kapitału i w następnym takimże przeciągu czasu liczy się procent od kapitału połączonego z procentem za czas poprzedzający.

W formułach które niebawem udowodnimy, przedstawimy kapitał wypożyczony przez C, kapitał powiększony swym procentem składanym przez A, stopę procentu przez s, a trwanie pożyczki (obrachowane na lata) przez n. Oprócz tego, oznaczymy przez r procent roczny od 1 franka ; tak że r będzie *setną częścią* stopy procentu.

445. Formuła ogólna procentu składowego. Ponieważ 1^f przynosi r^f przez rok, i staje się, tém samém $(1+r)$ po upływie roku, kapitał C stanie się, w przeciągu tegoż czasu, $C(1+r)$. Tak więc,

aby obrachować co się staje z jakimkolwiek kapitałem, umieszczonym na rok, należy pomnożyć go przez $(1+r)$.

Ten kapitał $C(1+r)$, umieszczony na początku drugiego roku, na rok, stanie się więc $C(1+r)(1+r)$, albo $C(1+r)^2$. Ta nowa summa, umieszczona na rok trzeci, mnoży się jeszcze przez $(1+r)$, i staje się $C(1+r)^3$. Więc, ogólnie, summa umieszczona, mnożona przez $(1+r)$, staje się po n latach :

[1] $$A = C(1+r)^n.$$

Taką jest formuła procentu składanego.

446. Przypadek w którym czas umieszczenia zawiera ułamek lat. Jeżeli trwanie pożyczki składa się z n lat i z k dni, rachuje się naprzód co się staje z kapitałem C, po n latach, przez formułę [1]. Potém, zauważywszy że 1 frank przynosi w k dniach, na procencie prostym, $\frac{kr}{t}$ (t jest liczbą dni roku), wnosi się z tego, że 1 frank staje się, po tymże czasie, $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, i że A staje się $A\left(1+\frac{kr}{t}\right)$. Więc, oznaczając przez A′ kapitał szukany, i zastępując A przez jego wartość [1], otrzymamy :

[2] $$A' = C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right).$$

446. Zagadnienia. Te formyły posłużą do rozwiązania kilku zagadnień, dla których użycie logarytmów jest nieodbicie potrzebne.

1° *Na co się zamieni summa dana* C, *umieszczona na stopę daną* $100r$, *w przeciągu czasu danego ?* Używa się formuły [1] albo formuły [2], według tego jak czas dany składa się z liczby dokładnéj n lat, lub z lat n i dni k.

2° *Jaką summę potrzeba umieścić obecnie, na stopę daną* $100r$, *dla otrzymania summy oznaczonéj* A, *po upływie czasu danego ?* Używa się jeszcze jednej z formuł [1] i [2]; i znajduje się stosownie do przypadku :

[3] $$C = \frac{A}{(1+r)^n},$$

albo [4] $$C = \frac{A}{(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right)}.$$

3° *Kapitał dany* C *tak został umieszczony, że wydał summę daną* A, *w przeciągu czasu danego. Jaką jest stopa procentu?* Jeżeli czas jest liczbą całkowitą lat, wyciągnie się z formuły [1] :

[5] $$(1+r) = \sqrt[n]{\frac{A}{C}}.$$

Lecz, jeżeli czas składa się z liczby całkowitej n lat i k dni, potrzeba użyć równania [2], które jest $(n+1)^{\text{ego}}$ stopnia względem r, i którego rozwiązanie należy do algebry wyższéj. Można, wszelako, przez pewne macaniny odpowiednio skierowane, otrzymać prędko wartość przybliżoną stopy procentu. Uważmy, w rzeczy saméj, że, według formuły,

[2] $$A = C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right),$$

kapitał A powiększa się lub zmniejsza w miarę powiększania się lub zmniejszania stopy procentu r. Jeżeli więc da się dla r piérwszą wartość dowolną r', i obrachuje przez logarytmy wartość drugiego członka, znajdziemy wartość A′, większą od A, jeżeli r' jest za wielkie, a mniejszą od A, jeżeli r' jest za małe. Porównywając wartość znalezioną A′ z wartością daną A, przekonamy się czy r' jest większém lub mniejszém jak stopa procentu nieznana. Wybierze się, według tego, inną wartość dla r, która da miejsce do nowego rachunku i do nowego porównania; owoż, tak postępując, za pomocą kilku prób, zamknie się łatwo r pomiędzy dwoma granicami, które dostarczą prędko wartości przybliżonéj stopy procentu.

4° *Przez jaki czas trzeba umieścić kapitał dany* C, *na stopę procentu daną* $100r$, *aby ten kapitał wydał summę oznaczoną* A ? Ponieważ nie wiemy, czy czas nieznany jest lub nie jest złożony z liczby całkowitéj lat, nie mamy prawa używać formuły [1], która była utworzoną dla przypadku w którym n jest całkowitém. Wszelako, chcąc z niéj zrobić użytek, mamy :

$$(1+r)^n = \frac{A}{C};$$

zkąd wyciąga się, biorąc logarytmy z obu stron, i dzieląc potém przez $\log(1+r)$:

[6] $$n = \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}.$$

Jeżeli iloraz z podzielenia $(\log A - \log C)$ przez $\log(1+r)$ jest liczbą całkowitą, jest on oczywiście liczbą lat szukaną; gdyż formuła [6] pociąga za sobą formułę [1]. Jeżeli iloraz nie jest całkowitym, należy ztąd wnosić że czas nieznany nie jest liczbą całkowitą lat. Jednakże można dowieść że, w tym przypadku, *część całkowita ilorazu jest częścią całkowitą nieznanego czasu.* Gdyż oznaczając przez p i $(p+1)$ dwie liczby całkowite po sobie następujące które zawiérają między sobą ułamek [6]; będziemy mieli:

$$p < \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} < p+1;$$

zkąd się wyciąga:

$$p \log(1+r) < \log A - \log C < (p+1)\log(1+r),$$

albo $$\log(1+r)^p < \log\frac{A}{C} < \log(1+r)^{p+1}.$$

Zkąd, powracając do liczb, wynika:

$$(1+r)^p < \frac{A}{C} < (1+r)^{p+1},$$

albo [7] $$C(1+r)^p < A < C(1+r)^{p+1},$$

nierówności dowodzące powyżéj wysłowionego twierdzenia.

Jeżeli chcemy teraz znaleźć liczbę k dni uzupełniających czas szukany, zauważmy że formuła [2], którą należało zastosować w tym przypadku, daje, zastępując w niéj n przez p:

$$\log A = \log C + p\log(1+r) + \log\left(1 + \frac{kr}{t}\right);$$

zkąd : $$p = \frac{\log A - \log C - \log\left(1 + \frac{kr}{t}\right)}{\log(1 + r)}.$$

Otóż p jest największą liczbą całkowitą zawartą w ułamku niewłaściwym $\frac{\log A - \log C}{\log(1 + r)}$.

Jeżeli więc oznaczymy przez R resztę z podzielenia, równość poprzedzająca będzie się mogła wyrazić :

$$p = p + \frac{R - \log\left(1 + \frac{kr}{t}\right)}{\log(1 + r)};$$

więc [8] $$\log\left(1 + \frac{kr}{t}\right) = R.$$

Znamy więc logarytm liczby $\left(1 + \frac{kr}{t}\right)$; przeto łatwo będzie można wyciągnąć z niego liczbę $\left(1 + \frac{kr}{t}\right)$, a tém samém nieznaną k.

Dajmy teraz kilka zastosowań liczebnych.

447. Zastosowania liczebne. Przykład I. *Jaki kapitał da* 8000 *franków, wypożyczone na* 39 *lat, po* $4\frac{1}{2}$ *od* 100 *rocznie?*

Formuła [1] :

$$\log A = \log C + n \log(1 + r).$$

$$\log C = \log 8000 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}9030900$$

$$\log(1 + r) = \log(1{,}045) = 0{,}0191162904$$

$$n \log(1 + r) = 39 \log(1{,}045) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}7455353$$

$$\log A = \ldots\ldots\ldots\ldots = 4{,}6486253;$$

zkąd $$A = 44527^{f}{,}19.$$

Przykład II. *Gdyby ktokolwiek z żyjących na początku ery chrześciańskiéj miał był przezorność umieścić* 1 *centym po* 5 *od* 100, *do jakiéj summy ten centym byłby urósł, na początku roku* 1863, *to jest pozostając umieszczonym na procencie składanym przez* 1862 *lat?*

Formuła [1] :

$$\log A = \log C + n \log(1+r).$$

$$\log C = \log(0{,}01) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \bar{2}$$

$$\log(1+r) = \log(1{,}05) = 0{,}02118929907$$

$$n \log(1+r) = 1862 \log(1{,}05) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 39{,}3234475$$

$$\log A = \ldots\ldots\ldots\ldots = 37{,}3234475;$$

zkąd : $A = 21059472 \times 10^{30}$ franków (przybliżenie) liczba złożona z 38 cyfer.

Aby przedstawić tę summę ogromną pod kształtem lepiéj ocenić się dającym, obrachujmy wymiary sfery ze złota, która jest równowartą summie wskazanej. Ciężarem gatunkowym złota jest 19,5, a ceną kilogramu złota $\frac{31000}{9}$ franka. Oznaczmy, nadto, przez x promień sfery w metrach; jéj objętość będzie $\frac{4\pi x^3}{3}$; a więc jéj ciężar : $\frac{\pi^{3}}{3} \times 19500$ kilogramów; a tém samém, jéj wartość w frankach będzie $\frac{4\pi x^3}{3} \times 19500 \times \frac{31000}{9}$. Będzie więc :

$$A = \frac{4\pi x^3 \times 19500 \times 31000}{27};$$

a tém samém : $$x^3 = \frac{27A}{4\pi \times 19500 \times 31000}.$$

$$\log 27 = 1{,}43136376$$

$$\log A = 37{,}32344749$$

$$\text{dop.} \log 4 - 10 = \bar{1}{,}39794001$$

$$\text{dop.} \log \pi - 10 = \bar{1}{,}50285013$$

$$\text{dop.} \log 19500 - 10 = \bar{5}{,}70996539$$

$$\text{dop.} \log 31000 - 10 = \bar{5}{,}50863831$$

$$\log x^3 = 28{,}87420509,$$

$$\log x = 9{,}6247350;$$

zkąd : $$x = 4214392 \times 10^3 \text{ metrów.}$$

Tak więc promień sfery wart jest blisko 4214392 kilometrów; jéj objętość zawiérałaby, zatém, więcéj niż 290 milionów razy objętość ziemi.

Przykład III. *Jaka jest wartość obecna summy, która po* 33 *latach wraz z procentem składanym po* 5 *od* 100 *na rok wynosiłaby* 7220 *fr.?*

Formuła [3] : $$\log C = \log A - n \log(1 + r).$$

$$\log A = \log 7220 = \ldots\ldots\ldots = 3{,}85853720$$

$$\log(1 + r) = \log(1{,}05) = 0{,}021189299$$

$$n \log(1 + r) = 33 \log(1{,}05) = \ldots\ldots\ldots = 0{,}69924687$$

$$\log C = \ldots\ldots\ldots = 3{,}15929033$$

zkąd : $$C = 1443^{f}{,}08.$$

I ta to summa stanie się, przez nagromadzenie procentów po 5 od 100, podczas 33 lat, 7220 fr.

Przykład IV. *Summa* 28895 *fr. umieszczona, jest temu* 73 *lat ;*

urosła obecnie do 250000 fr. Pytanie jaka była stopa procentu?

Formuła [5] : $$\log(1+r)=\frac{\log A-\log C}{n}.$$

$$\log A=\log 250000=5{,}3979400$$

$$\log C=\log\ \ 28895=4{,}4068227$$

$$\log A-\log C=0{,}9371173;$$

$$\log(1+r)=0{,}01283722;$$

zkąd : $$1+r=1{,}03000.$$

Stopą procentu jest więc 3 od 100.

Przykład V. *Po jakim czasie kapitał* 7700 *fr. urośnie do summy* 42850 *fr., gdy stopa procentu jest* 4 *od* 100 *rocznie?*

[6] : $$n=\frac{\log A-\log C}{\log(1+r)}.$$

$$\log A=\log 42050=4{,}6319508$$

$$\log C=\log\ \ 7700=3{,}8864907$$

$$\log A-\log C=0{,}7454601,$$

$$\log(1+r)=\log(1{,}04)=0{,}0170333.$$

Więc n jest liczbą całkowitą ilorazu $\frac{0{,}7454601}{0{,}0170333}$. Jest przeto :

$$n=43 \text{ lat,} \quad \text{a} \quad R=0{,}0130282.$$

Więc, formuła [8] daje :

$$\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)=0{,}0130282.$$

A tém samém $$1 + \frac{kr}{t} = 1,030453.$$

Zkąd : $\frac{kr}{t} = 0,030453$, a więc $k = \frac{0,030453 \times 365}{0,04} = 278.$

Tak więc czas szukauy jest 43 lat, 278 dni.

Uwaga. Zastąpiliśmy we wzorze [2] t, liczbę dni roku zwyczajnego przez 365, lecz w handlu, gdy się bierze procent od kapitału na pewną liczbę miesięcy i dni, uważa się rok jakoby złożony z 360 dni, czyli z 12 miesięcy iczących po 30 dni.

DOPEŁNIENIE TEORYI PROCENTÓW SKŁADANYCH.

448. Teorya procentów składanych opiéra się całkowicie na *dwóch piérwszych formułach* uprzednio wyłożonych.

Rozumując jak powyżéj, a zastępując w formule [1] A przez x, a C przez a, otrzymamy:

$$x = a(1 + r)^n.$$

Ta formuła zamyka w sobie cztéry ilości x, a, r, n; może więc przybrać cztéry kształty następujące :

$$\log x = \log a + n \log(1 + r), \quad \log a = \log x - n \log(1 + r),$$

$$n = \frac{\log x - \log a}{\log(1 + r)}, \quad \log(1 + r) = \frac{\log x - \log a}{n};$$

każdy z nich odpowiada odrębnemu zagadnieniu, którego czytelnik znajdzie sam przez się wysłowienie. Na przykład, *jeżelibyśmy chcieli wiedzieć po ilu latach kapitał staje się* k *razy większym*, dosyć zastąpić x przez ka w trzeciéj formule, która staje się

$$n = \frac{\log k}{\log(1 + r)};$$

widzimy że ten czas jest, i słusznie, niezależnym od wartości kapitału; potrzeba trochę więcéj jak 14 lat aby kapitał oddany na procent składany po 5 od sta został podwojonym.

449. Kiedy czas umieszczenia summy nie trwa liczby całkowitéj lat, lecz składa się, na przykład, z n lat p dni, otrzymuje się wartość ostateczna x, wypożyczonéj summy a, dodając do wyrażenia poprzedzającego $a(1+r)^n$ procent prosty od téj ostatniéj summy podczas p dni; rozumując jak powyżéj (445), otrzymamy:

$$x = a(1+r)^n\left(1 + \frac{p}{360}r\right).$$

Poszukiwanie procentu r od 1 franka na rok, jest wtenczas zagadnieniem istotnie trudném, które rozwiążemy za pomocą znanego sposobu *przybliżeń kolejnych* (zob. ostatni rozd. I tomu naszéj algebry).

Przykład. *Kapitał* $2743^f,75$ *został umieszczonym na procent składany* 4 *od* 100; *jaka będzie jego wartość po upływie* 12 *lat* 3 *miesięcy?*

$$a = 2743^f,75, \quad r = 0,04, \quad n = 12, \quad p = 90.$$

$$\log x = \log 2743^f,75 + 12\log(1,04) + \log(1,01).$$

$$\log(1,04) = 0,0170334$$

$$12\log(1,04) = 0,1944008$$

$$\log 2743^f,75 = 3,4383445$$

$$\log(1,01) = 0,00432137$$

$$\log(10\ x = 3,63706595;$$

zkąd: $x = 4335^f,75.$

AMORTYZACYE CZYLI UMORZENIA DŁUGÓW

450. Definicya. Pewna osoba wypożycza dziś summę C, którą zobowiązuje się spłacić w latach n, na stopę procentu r od jednego franka: dla uiszczenia się z długu, płaci ona, na końcu każdego roku, summę oznaczoną a, obrachowaną tak ażeby po n

wypłatach równych, spłaciła wszystko, kapitał i procenta składane. Summa a, którą ta osoba płaci tym sposobem rocznie, nazywa się *ratą amortyzacyjną.*

451. Formuła ogólna amortyzacyj. Załóżmy sobie znaleźć formułę wiążącą kapitał C, ratę amortyzacyjną a, stopę procentu r i trwanie pożyczki n.

Jeżeliby dłużnik czekał, na spłacenie swego długu, końca n^{tego} roku, byłby winien, w téj epoce (444), $C(1+r)^n$. Lecz płaci on, na końcu piérwszego roku, piérwszą summę a; zaliczając tym sposobem na lat $(n-1)$ przed terminem tę opłatę częściową, uwalnia się od summy któréj wartość, w rachunku ostatecznym, powinna być równą $a(1+r)^{n-1}$; gdyż ta summa oddana na procent składany, przez lat ~~(1 — r)~~, przyniosłaby powyżéj wymienioną kwotę. n-1
Podobnież summa a, wypłacona na końcu drugiego roku, wyrównywa swą wartością summie $a(1+r)^{n-2}$, zapłaconéj na końcu lat n. Zobaczymy, tymże samym sposobem, że summa a, wypłacona na końcu przedostatniego roku, musi być policzoną za wartość równą $a(1+r)$; i że summa a, wypłacona na końcu n^{tego} roku, wchodzi w rachunek ostateczny za swą wartość a. Powinniśmy więc otrzymać zrównanie :

$$C(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots\ldots + a(1+r) + a.$$

Ponieważ drugi członek, odwrotnie napisany, jest summą n wyrazów postępu ilorazowego rosnącego, którego piérwszym wyrazem jest a, a stosunkiem $(1+r)$, więc stosując formułe [7] n^{ru} 389, otrzymamy :

$$C(1+r)^n = \frac{a(1+r)^n - a}{r}.$$

albo, zniosłszy mianownik r,

$$[1] \qquad a\{(1+r)^n - 1\} = Cr(1+r)^n.$$

Taką jest formuła ogólna amortyzacyj albo umorzeń długów.

452. Drugi sposób. Można otrzymać tę formułę innym sposobem.

Dłużnik odbiérający dziś summę C, winien, na końcu piérwszego roku, $C(1+r)$; a ponieważ wypłaca on wtedy summę a, jego dług sprowadza się do $C(1+r)-a$. Na końcu drugiego roku, en dług powiększył się procentem rocznym, stał się więc $\{C(1+r)-a\}(1+r)$, albo $C(1+r)^2-a(1+r)$; lecz naówczas dłużnik wypłaca nową summę a, co sprowadza dług do $C(1+r)^2-a(1+r)-a$. Rzecz jest oczywista, że na końcu trzeciego roku, ten dług który powiększył się procentem rocznym, lecz który także zmniejszył się wypłatą nowej raty amortyzacyjnéj a, jest równym $C(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a$. Zaś, na końcu n roku, ten dług jest równym

$$C(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-\ldots\ldots-a(1+r)-a.$$

Otóż, w téj epoce, dług powinien być umorzonym; potrzeba więc żeby wyrażenie poprzedzające było równém zeru; a tém samém, żeby było zrównanie :

$$C(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots\ldots+a(1+r)+a,$$

jak w piérwszym sposobie.

453. Uwaga. Można nakoniec przyjść do formuły [1], nie potrzebując uprzednio zajmować się otrzymaniem summy wyrazów postępu ilorazowego. Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że jedna osoba pożycza drugiéj summę $\frac{a}{r}$, na n lat. Dłużnik będzie musiał płacić, każdego roku, procent prosty $\frac{a}{r}\times r$ albo a; i, na końcu, pozostanie mu jeszcze do zapałcenia summa pożyczona $\frac{a}{r}$. Otóż, wyobraźmy sobie że ten procent został wniesiony, w chwili w któréj jego należytość przypada, do rąk trzeciéj osoby, obowiązanéj zająć się umieszczeniem go na procent; ta ostatnia osoba odbierze tym sposobem, przez coroczne raty amortyzacyjne, n summ równych a, i będzie posiadała w swém ręku, po n latach, to wszystko w co kapitał $\frac{a}{r}$ *urósł* w przeciągu tego czasu. Otóż to powiększenie kapi-

tału jest $\frac{a}{r}(1+r)^n - \frac{a}{r}$. Więc to wyrażenie przedstawia summę całkowitą amortyzacyj opłaconych; a ponieważ, z założenia, te wypłaty częściowe powinny uskutecznić umorzenie długu, potrzeba zatém żeby było :

$$\frac{a}{r}(1+r)^n - \frac{a}{r} = C(1+r)^n,$$

formuła która w niczém się nie różni od zrównania [1].

454. Zagadnienia. Formuła [1] służy do rozwiązania cztérech zagadnień odrębnych, według tego jak się bierze za nieznaną tę lub ową ze cztérech liter wchodzących do jéj składu.

1° *Jaką ratę amortyzacyjną* a, *należy płacić na końcu każdego roku, dla umorzenia w* n *latach pożyczki danéj* C, *jakoteż jéj procentów składanych, gdy stopą procentu od jednego franka jest* r ? Formuła [1] daje :

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \qquad [2]$$

Dla zastosowania téj formuły, oblicza się naprzód $(1+r)^n$ przez logarytmy ; od tego odciąga się jedność, co daje mianownik. Potém, za pomocą formuły :

$$\log a = \log Cr + n \log(1+r) - \log\{(1+r)^n - 1\},$$

oblicza się $\log a$, a tém samém, a

2° *Jaką summę* C *można pożyczyć dziś, ofiarując wypłatę jéj, w* n *latach, przez* n *rat amortyzacyjnych równych* a, *na stopę procentu* r *od* 1 *franka?* Formuła [1] daje :

$$C = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r(1+r)^n}. \qquad [3]$$

Przy obrachowaniu nowéj formuły przez logarytmy, należy postępować tak samo jak powyżéj.

3° *Pożyczając summę* C, *na stopę procentu* r, *i zamierzając sobie wypłacić ją, za pomocą rat amortyzacyjnych równych* a, *przez jaki czas należy płacić ratę amortyzacyjną?* Formuła [1], daje rozwiązując ją względem $(1 + r)^n$:

$$(1 + r)^n = \frac{a}{a - Cr};$$

zkąd wynika :

$$[4] \qquad n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1 + r)}.$$

Zagadnienie nie jest możebném, jak tylko wtedy kiedy dwumian $(a - Cr)$ jest dodatnym; gdyż liczby odjemne nie mają logarytmów rzeczywistych. Widzimy wreszcie, *a priori*, że tak istotnie być powinno ; gdyż Cr przedstawia procent prosty od kapitału pożyczonego ; a więc oczywiście, rata amortyzacyjna a musi koniecznie przewyższać ten procent, jeżeli chcemy aby umorzenie długu po pewnym przeciągu czasu dało się uskutecznić.

Jeżeli formuła [4] daje dla n liczbę całkowitą, ta liczba rozwiąże pytanie. Lecz, jeżeli dzielenie nie wykona się dokładnie, potrzeba ztąd wnosić że zagadnienie jest niepodobném. Wszelako, można dowieść że, w tym przypadku, jeżeli oznaczymy przez p i $(p + 1)$ dwie liczby całkowite po sobie następujące które zawiérają między sobą ułamek [4], liczba p rat amortyzacyjnych nie uiściłaby długu, gdy tymczasem jedna rata więcéj byłaby do opłacenia bardziéj niż dostateczną. W rzeczy saméj, ponieważ mamy :

$$p < \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1 + r} < p + 1,$$

będzie także :

$$p \log(1 + r)^p < \log a - \log(a - Cr) < (p + 1) \log(1 + r),$$

albo $$\log(1 + r)^p < \log \frac{a}{a - Cr} < \log(1 + r)^{p+1};$$

a tém samém, $$(1+r)^p < \frac{a}{a-Cr} < (1+r)^{p+1}.$$

Można jeszcze znieść mianownik, ponieważ ten jest dodatnym; a wtedy przyjdzie:

$$(a-Cr)(1+r)^p < a < (a-Cr)(1+r)^{p+1};$$

zkąd wyciąga się łatwo:

$$\frac{a\{(1+r)^p-1\}}{r} < C(1+r)^p, \quad \frac{a\{(1+r)^{p+1}-1\}}{r} > C(1+r)^{p+1}.$$

Te dwie nierówności dowodzą twierdzenia powyżéj wysłowionego.

Zastosuje się więc, do wszystkich przypadków, formułę [4]; ta formuła da nam liczbę p rat amortyzacyjnych do opłacenia; jeśli jest reszta, obrachuje się łatwo różnicę, $C(1+r)^p - \frac{a\{(1+r)^p-1\}}{r}$, należną na początku $(p+1)^{tego}$ roku; i z tego się zrobi przedmiot opłaty wyłącznéj, albo umowy szczególnéj.

4° *Jeżeli pożyczamy summę* C, *i zamierzamy sobie wypłacić ją, wraz z jéj procentami składanémi, płacąc, podczas* n *lat, ratę amortyzacyjną* a; *jaką jest stopa procentu?*

Formuła [1] jest, względem r, zrównaniem $(n+1)^{go}$ stopnia, które da się rozwiązać za pomocą sposobów szczególnych. Przychodzi się do wartości przybliżonéj na ilość nieznaną r, opiérając się na uwadze następującéj.

Kiedy C *i* a *są dane, liczba* n *rat amortyzacyjnych powiększa się lub zmniejsza, w miarę jak stopa procentu* r *powiększa się lub zmniejsza.* Dosyć, w rzeczy saméj, dla przekonania się o tém, powrócić do drugiego sposobu (452), który dostarczył formuły ogólnéj rat amortyzacyjnych; rozpoznaje się że dług, na końcu piérwszego roku, $C(1+r)-a$, jest o tyle większym o ile r jest większe, że toż samo się dzieje na końcu każdego roku, gdyż mnoży się każdą razą dług poprzedzający przez $(1+r)$, i że zmniejsza się późniéj wieloczyn o ilość stałą a. Przeto, jeżeli n wypłat wystarczą dla umorzenia długu, gdy stopa procentu ma pewną wartość r, te wypłaty nie wystarczą nadal, kiedy stopa procentu zostanie podniesioną.

To przypuściwszy, wróćmy do formuły [1] pod kształtem :

$$[4] \qquad n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)},$$

formuła w której r jest ilością nieznaną. Jeżeli damy dowolnie dla r pewną wartość r', to gdy ta wartość jest mniejszą od wartości której szukamy, wartość odpowiednia n' ułamku [4] będzie mniejszą od wartości danéj n; przeciwnie zaś, n' będzie większém od n, jeżeli r' jest większe od r. Dowiemy się więc, porównywając n' z n, czy wartość, przypisywana dowolnie dla r, jest za mocną albo za słabą; i będziemy mogli, tém samém, za pomocą kilku macanin odpowiednio skierowanych, otrzymać szybko wartość dostatecznie przybliżoną na r.

455. Zastosowania liczebne. Przykład I. *Jaką jest rata amortyzacyjna umarzająca, w 51 latach, summę 34600 fr,. wiedząc przytém że stopa procentu jest 4 od 100 rocznie?*

Formuła [2] daje :

$$\log a = \log Cr + n\log(1+r) - \log\{(1+r)^n - 1\}.$$

$$\log(1+r) = \log(1{,}04) = 0{,}0170333393$$

$$n\log(1+r) = 51\log(1{,}04) = 0{,}8687003;$$

zkąd : $$(1+r)^n = 7{,}390950.$$

To przypuściwszy :

$$\log Cr = \log 1384 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}1411361$$

$$n\log(1+r) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}8687003$$

$$\log\{(1+r)^n - 1\} = \log 6{,}39095 = 0{,}8055654$$

$$\text{dop.}\log\{(1+r)^n - 1\} - 10 = \ldots\ldots = \bar{1}{,}1944346$$

$$\log a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}2042710.$$

Więc : $$a = 1600^{f}{,}556.$$

Przykład II. *Umieszczając, na początku każdego roku, summę* 50 *fr. po* 6 *od* 100 *rocznie, jaką summę* x *odbierze wierzyciel po upływie* 24 *lat?*

Formuła :

$$x = \frac{a\left\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\right\}}{r},$$

daje :

$$\log(1+r) = \log(1,06) = 0,0253058653$$

$$(n+1)\log(1+r) = 25\log(1,06) = 0,6326466;$$

zkąd : $$(1+r)^{n+1} = 4,29187;$$

otóż : $$1+r = 1,06$$

więc : $$(1+r)^{n+1} - (1+r) = 3,23187.$$

To przypuściwszy :

$$\log a = \log 50 = 1,6989700$$

$$\log\left\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\right\} = \log 3,23187 = 0,5094539$$

$$\text{dop. }\log r - 10 = \text{dop. }\log 0,06 - 10 = 1,2218488$$

$$\log x = 3,4302727.$$

Więc : $$x = 2693^{\text{f}},225.$$

Przykład III. *Jaką summę* C *można pożyczyć płacąc przez* 37 *lat, w terminie każdéj raty amortyzacyjnéj* 825 *fr., na stopę procentu po* $4\frac{1}{2}$ *od* 100 *rocznie?*

Formuła [3] daje :

$$\log C = \log a + \log\left\{(1+r)^n - 1\right\} - \log(1+r)^n - \log r.$$

$$\log(1+r) = \log(1,045) = 0,01911629$$

$$n\log(1+r) = 37\log(1,045) = 0,7073027;$$

zkąd : $$(1+r)^n = 5,09686.$$

To przypuściwszy : $\log a = \log 825 = 2{,}9164540$

$$\log\{(1+r)^n - 1\} = \log 4{,}09686 = 0{,}6124512$$

$$\text{dop. } \log(1+r)^n - 10 = \ldots\ldots\ldots = \bar{1}{,}2926973$$

$$\text{dop. } \log r - 10 = \text{dop. } \log 0{,}045 - 10 = 1{,}3467875$$

$$\log C = 4{,}1683900;$$

zkąd : $C = 14736^f{,}35.$

Przykład IV. *Po jakiem czasie summa* 260000 *fr. zostanie umorzoną przez raty amortyzacyjne wynoszące* 10000 *franków, wiedząc że stopą procentu jest* $3\frac{1}{4}$ *od* 100 *rocznie?*

Formuła [4] : $n = \dfrac{\log a - \log(a-(r)}{\log(1+r)}$:

daje : $\log a = \log 10000 = 4$

$$\log(a - Cr) = \log 1550 = 3{,}1903317$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}8096683,$$

$$\log(1+r) = \log(1{,}0325) = 0{,}0138901;$$

Więc : $n = \dfrac{0{,}8096683}{0{,}0138901} = 58,\ldots.$

Potrzeba więc będzie płacić 58 rat amortyzacyjnych wynoszących po 10000 fr. Lecz ponieważ dzielenie pozostawia resztę, summa dana nie będzie całkiem umorzoną. Na zakończenie rachunku, należy obrachować z jednéj strony, to co jest należném, po upływie 58 lat, to jest $s = 260000 \times (1{,}0325)^{58}$; obrachować, z drugiéj, to co się zapłaciło przez raty amortyzacyjne, to jest $p = \dfrac{10000 \times \{(1{,}0325)^{58} - 1\}}{0{,}0325}$; i wziąć różnicę $(s - p)$.

$\log 260000 = 5{,}41497335$ $\qquad$ $\log 10000 = 4$

$58 \log(1{,}0325) = 0{,}80562348$ $\qquad$ $\log 5{,}391804 = 0{,}7317345$

$\log s = 6{,}22059683$; dop. $\log 0{,}0325 - 10 = 1{,}4881166$

zkąd : $\quad s = 1661869^{f}.$ $\qquad$ $\log p = 6{,}2198507$;

Nadto $(1{,}0325)^{58} = 6{,}391804.$ $\qquad$ $p = 1659017^{f}.$

Więc summa która pozostaje wierzycielowi należną, $(s-p) = 2852$ fr.

PRZYKŁAD V. *Pożycza się summę* 35000 *fr., i spłaca się ją, wraz z jéj procentami składanémi, przez* 52 *rat amortyzacyjnych wynoszących każda* 1600 *franków. Jaką jest stopa procentu?*

Formuła [4] : $\quad n = \dfrac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}.$

Przypuśćmy naprzód : $r = 0{,}04$; ztąd wynika : $a - Cr = 200.$

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$

$$\log(a - Cr) = \log 200 = 2{,}3010300$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}9030900;$$

$$\log(1 + r) = \log(1{,}04) = 0{,}0170333.$$

Dzieląc 0,9030900 przez 0,0170333, otrzymuje się na iloraz 53, liczbę większą od 52. Więc stopa procentu jest mniejszą od 4.

Przypuśćmy $r = 0{,}035$; wtedy $a - Cr = 375.$

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$

$$\log(a - Cr) = \log 375 = 2{,}5740313$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}6300887;$$

$$\log(1 + r) = \log(1{,}035) = 0{,}0149403.$$

Dzieląc 0,630087 przez 0,0149403, otrzymuje się na iloraz 42, liczbę o wiele za słabą. Więc stopa jest daleko bliższą 4 niż $3\frac{1}{2}$.

Przypuśćmy więc: $r = 0,039$; wtedy $a - Cr = 235$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$

$$\log(a - Cr) = \log 235 = 2,3710679$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0,8330521\,;$$

$$\log(1 + r) = \log(1,039) = 0,0166155.$$

Iloraz z 0,8330521 przez 0,0166155 jest 50, liczba za słaba: więc stopa jest wyższą nad 3,90.

Przypuśćmy $r = 0,0395$; wtedy $a - Cr = 217,50$.

$$\log a = \log 1600 = 3,2041200$$

$$\log(a - Cr) = \log 217,50 = 2,3374593$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0,8666607\,;$$

$$\log(1 + r) = \log(1,0395) = 0,0168245.$$

Iloraz z podzielenia 0,8666607 przez 0,0168245 daje 51. Stopa procentu jest więc wyższą nad $3^f,95$. Jest więc zawartą między $3^f,95$ i 4. Znamy ją przeto tym sposobem przybliżoną na mniéj niż $0^f,05$; i można łatwo posunąć daléj wartość przybliżoną stopy szukanéj.

456. Przypadek rent wieczystych. Wartość raty amortyzacyjnéj a, przeznaczona do spłacenia pożyczki C, w czasie danym n, zmniejsza się kiedy n powiększa się: gdyż, dzieląc oba wyrazy drugiego członka przez $(1 + r)^n$, formuła [2] może się napisać:

$$a = \frac{Cr}{1 - \dfrac{1}{(1 + r)^n}}\,;$$

zkąd widzimy że, im n jest większém, tém ułamek $\dfrac{1}{(1 + r)^n}$ jest mniejszym; im więcéj mianownik wzrasta, tém bardziéj wartość na a staje się mniejszą. Jeżeli więc epoka spłacenia oddala się nieograniczenie, to jest, jeżeli n wzrasta nieograniczenie, wartość na a, zawsze przewyższająca Cr, ponieważ mianownik jest mniejszym od 1, zmniejsza się, i ma za *granicę* Cr, to jest procent prosty summy pożyczonéj. Otóż, ten przypadek stanowi właśnie *rentę wieczystą*.

ĆWICZENIA.

I. Na co się zamieni po upływie 41 lat, kapitał 8500 franków umieszczony na $4\frac{1}{2}$ od 100?

Znajduje się 51663f,86.

II. Ludność 200000 dusz powiększa się przez rok o $1\frac{1}{4}$ na 100; o ile podniesie się ona po upłynioném stuleciu?

Znajduje się 692681.

III. Przez jaki czas kapitał 3500 franków powinien być umieszczonym, po 5 od 100, aby urósł do tejże saméj summy co kapitał 4300 franków, umiesczonych po 4 od 100, w przeciągu 18 lat?

Znajduje się 18 lat, 249 dni.

IV. Dwa kapitały są umieszczone na procentach składanych: jeden wynoszący 38000 franków, po $4\frac{1}{2}$ od 100; drugi 99398 franków, po $3\frac{1}{2}$ od 100; po jakim czasie podniosą się one do tejże saméj summy?

Znajduje się 100 lat.

V. Jaka jest wartość obecna renty rocznéj 1500 franków, płatnych przez 36 lat, gdy procentem jest 5 od 100, a piérwsza wypłata powinna się odbyć za rok?

Formula
$$A = \frac{1500 \times \left\{(1,05)^{36} - 1\right\}}{(1,05)^{36} \times 0,05};$$

daje 24820f,32.

VI. Chcemy spłacić dług wynoszący 25000 franków, w 7 wypłatach corocznych równych, gdy procentem jest 4 od 100. Jaką powinna być wartość raty amortyzacyjnéj?

Znajduje się 4165f,16.

VII. Jaką jest rata amortyzacyjna umarzająca, w 48 latach, pożyczkę 36000 franków, na stopę procentu po $3\frac{1}{4}$ od 100?

Znajduje się $1628^f,14$.

VIII. Chcemy kupić 3000 franków renty za kapitał wynoszący 91650 franków. Na ile lat, rachując procent 3 od 100, możemy nabyć prawo posiadania téj renty?

Znajduje się 84 lat.

IX. Jaką jest wartość rzeczywista, na stopę po 5 od 100, 24ch rat amortyzacyjnych, z których piérwsza wynosząca 1000 franków, płatną jest za rok, a następne tworzą wyrazy postępu ilorazowego rosnącego którego stosunkiem jest $\frac{11}{10}$? Obrachować wysokość ostatniéj raty amortyzacyjnéj.

Formuła jest $$S = \frac{a}{1+r} \times \frac{\left(\frac{q}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+r} - 1},$$

w któréj: $a = 1000, \quad q = \frac{11}{10}, \quad r = 0{,}05, \quad n = 24.$

Znajduje się: $S = 50817^f,41.$

Ostatnia rata amortyzacyjna wynosi $8954^f,30$.

X. Robotnik składa, na początku każdego tygodnia, summę a w kassie oszczędności, przez n lat kolejno po sobie następujących. Jaką jest, po upływie tego czasu, summa M jego książeczki, gdy stopą procentu jest r od 1 franka, a procenta kapitalizują się na końcu każdego roku?

Znajduje się: $$M = a\left(52 + \frac{53r}{2}\right) \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

XI. Pewna osoba wnosi, do banku przezorności, summę v, na początku każdego roku, przez n lat kolejno po sobie następujących. Pytanie jaką summę a odbiérać ona będzie, na początku każdego roku, przez $2n$ lat następnych, aby była całkiem spłaconą ze swych uprzednio umieszczonych na banku funduszów.

Znajduje się: $$a = \frac{v(1+r)^{2n}}{(1+r)^n - 1}.$$

XII. Jeżeli warunki pozostają te same jak w zagadnieniu poprzedzającém, jaką powinna być liczba n, ażeby summa a była przynajmniéj równą k razy summie v?

Znajduje się warunek :

$$(1+r)^n \overline{>} \frac{k+\sqrt{k(k+4)}}{2}$$

zkąd się wyprowadzi granicę niższą dla n.

ROZDZIAŁ XXIII.

O FUNKCYACH W OGÓLNOŚCI.

DEFINICYA FUNKCYJ. — CIĄGŁOŚĆ.

457. Kiedy dwie wielkości *zmienne* są związane jedna z drugą, tak że dla każdéj wartości jednéj z nich odpowiada wartość oznaczona drugiéj, mówi się że te wielkości są *funkcyami* jedna drugiéj.

I tak, w kole, powierzchnia jest funkcyą promienia, i odwrotnie promień jest funkcyą powierzchni; ta zależność wzajemna wyraża się przez formułę $S = \pi r^2$. Podobnież, przestrzeń przebieżona przez ciało spadające jest funkcyą czasu wyrażoną przez formułę $e = \frac{1}{2} g t^2$; i nawzajem trwanie spadania jest funkcyą przestrzeni przebieżonéj, daną przez związek *odwrotny* $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$.

Uważa się zwykle jedną z wielkości x jako zmieniającą się w sposób dowolny, i nazywa się ją *zmienną niezależną*, gdy tym czasem zachowuje się nazwisko *funkcyi* dla drugiéj wielkości y, któréj zmiany są zależne od zmiany piérwszéj; na mocy téj ugody pisze się

$$y = f(x).$$

Zależność dwóch zmiennych nie jest zawsze taką, aby można było obrachować jedną za pomocą drugiéj; tak, na przykład, największość sprężystości pary wodnéj i jéj temperatura, lubo zmieniają się jedna z drugą, nie dozwoliły dotąd jednak najznakomitszym fizykom wyrazić ich związku za pomocą ścisłéj formuły; spożycie żywności jest funkcyą nieznaną ceny nabytku, i t. d. Podobne funkcye, nazwane *empirycznemi*, nie mogą być dane jak tylko przez doświadczenie; dla określenia ich, układa się za pomocą doświadczeń licznych i dokładnych tablice zawierające, z jednéj strony wartości sąsiędnie i bardzo liczne zmiennéj niezależnéj, a z drugiéj wartości odpowiednie funkcyi. Zacytujemy na przykład tablicę następującą, która daje ilości *siarczanu sody* rozpuszczające się w 100 częściach wody pod wpływem różnych temperatur.

TEMPERATURA.	SÒL STAŁA rozpuszczona w 100 częściach wody.	TEMPERATURA.	SÓL STAŁA rozpuszczona w 100 częściach wody.
0°00	5,02	32°73	50,65
11,67	10,12	33,88	50,04
13,30	11,74	40,15	48,78
17,91	16,73	45,04	47,81
25,05	28,11	50,40	46,82
28,76	37,35	59,79	45,52
30,75	43,05	70,61	44,35
31,84	47,37	84,42	42,96

458. « *Ilość zmienna może zmieniać się w sposób ciągły, lub nieciągły : jeżeli zmienna, przechodząc z jednéj wartości w drugą, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie, mówimy że zmienia się w sposób ciągły.*

» *Funkcyą ciągłą zmiennéj danéj nazywamy funkcyą, która zmienia się w sposób ciągły, gdy zmienna ta w takiż zmienia się sposób.*

» Gdy mówimy, że zmienna przechodząc z jednéj wartości w drugą, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie, to rozumiemy tém orzeczeniem wartości tak dodatne jak odjemne. I tak jeżeli zmienna przechodzi z wartości odjemnéj $-a$, do wartości dodatnéj $+b$, winna przejść przez wszystkie wartości odjemne zmniejszające się bez względu na znak, zacząwszy od a aż do 0, przejść przez wartość 0, i następnie zacząwszy od 0, przez wszystkie wartości dodatne, zwiększające się aż do b. Przechodząc więc z wartości odjemnéj do dodatnéj, lub odwrotnie, zmienna ciągła winna przejść koniecznie przez wartość 0.

» Funkcya może być ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych pomiędzy pewnemi dwoma wartościami x_0

i X, a przestać być ciągłą, gdy zmienna przybiera te wartości. Mówimy wtedy, że funkcya jest ciągłą tylko pomiędzy pewnemi granicami zmiennéj niezależnéj. Tak na przykład wstawa jest funkcyą ciągłą łuku: lecz styczna jest funkcyą ciągłą łuku tylko między wartościami $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$ tegoż łuku; przestaje bowiem być ciągłą dla tych wartości, dla których jest nieskończoną i w bliskości których przeskakuje z bardzo wielkich wartości dodatnych, do bardzo wielkich odjemnych, i odwrotnie. »

(*Określenia ciągłości powyżéj przytoczone* są wyjęte z *Wiadomości Wstępnych* stanowiących Część I Rachunku Różniczkowego p. Folkierskiego.)

Charakterem rozróżniającym funkcye ciągłe jest możność przyjmowania przyrostków tak małych jak się tylko podoba, kiedy zmienna niezależna wzrasta stopniami dostatecznie małemi. I tak funkcya

$$y = ax$$

jest funkcyą ciągłą ilości x, ponieważ jéj przyrostek

$$a(x+h) - ax \qquad \text{albo} \qquad ah$$

odpowiedni przyrostkowi h zmiennéj niezależnéj, dąży do zera w miarę jak ten ostatni staje się coraz mniéjszym.

Wielkości fizyczne są ogólnie funkcyami ciągłemi. *Natura non facit saltus.*

PRZEDSTAWIENIE GEOMETRYCZNE FUNKCYJ CIĄGŁYCH.

459. Wróćmy do tablicy numeru 457 i zatrzymajmy się na temperaturze 32°,73, dla któréj funkcya zmienia raptownie pochód.

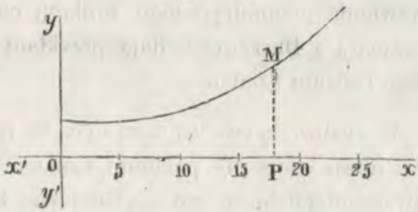
Niech będą $x'0x$, $y'0y$ dwie osie (fig. 21) prostokątne nieograniczone; przypuśćmy oś $0x$ podzieloną na części równe i napiszmy przy punktach podziału liczby

$$0°{,}01,\ 0°{,}02,\ 0°{,}03,\ 0°{,}04, \ldots\ldots,\ 1°{,}00,\ 1°{,}01\ldots\ldots;$$

potém przez punkta noszące numera wpisane w piérwszą kolumnę tablicy, wynieśmy prostopadłe równe (wedle pewnej skali) liczbom odpowiednim wpisanym w drugą kolumnę; złączmy nakoniec rysem ciągłym końce tych prostopadłych, a otrzymamy linią, która dostała nazwisko *krzywéj rozpuszczalności* siarczanu sody.

Ta krzywa ma nad tablicą poprzedzającą dwie korzyści : naprzód pokazuje jaśniéj w jaki sposób rozpuszczalność zmienia się z temperaturą; potém dozwala znaleźć rozpuszczalności odpowiadające temperaturom pośrednim.

Fig. 21.

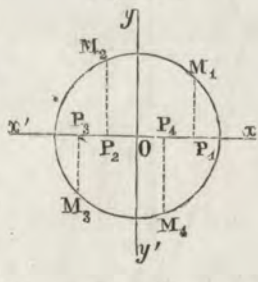


Chcemy wiedzieć, na przykład, rozpuszczalność dla temperatury $15°\frac{1}{2}$; przez punkt P, naznaczony $15°\frac{1}{2}$, na osi Ox, wynieśmy prostopadłą MP aż do spotkania się jéj z krzywą, a liczba która mierzy tę długość, na skali przyjętéj, wyraża ilość soli którą rozpuszcza woda w tej temperaturze.

460. W ogólności, gdy się posiada tablicę wartości funkcyi dla pewnych wartości zmiennéj niezależnéj, albo formułę która posłużyć może do ułożenia téj tablicy, otrzymuje się *krzywą przedstawiającą* funkcyą, odnosząc na oś Ox wartości zmiennéj niezależnéj i wynosząc prostopadłe równe wartościom odpowiednim funkcyi.

Punkt jakikolwiek M, pewnéj krzywéj jest oznaczony gdy się daje liczby które mierzą prostopadłą MP i odległość OP ; daje się tym liczbom nazwisko *spółrzędnych* punktu M; pierwsza jest *rzędną* a druga *odcinkiem*, lub *odciętą*, punktu. Spółrzędne są wreszcie zdolne przyjąć znaki; odcięte dodatne biorą się w kierunku Ox a odcięte odjemne w kierunku Ox'; tak samo, odnoszą się rzędne powyżej lub poniżej osi $x'Ox$, według tego jak te rzędne mają przed sobą znak $+$ albo znak $-$; tym sposobem uważając koło mające *początek* O

Fig. 22.



w środku, *spółrzędne* będą

$$
\begin{array}{llll}
+ M_1P_1 & + OP_1 & \text{dla punktu } M_1, \\
+ M_2P_2 & - OP_2 & \text{dla punktu } M_2, \\
- M_3P_3 & - OP_3 & \text{dla punktu } M_3, \\
- M_4P_4 & + OP_4 & \text{dla punktu } M_4.
\end{array}
$$

Oznacza się zwykle odcięte przez x, a rzędne przez y.

461. Nie będziemy zastanawiali się dłużéj nad pożytkiem przedstawienia geometrycznego funkcyj empirycznych. Prace PP. Regnault'a i Despretz'a dają przykłady znakomite i dobrze znane tego rodzaju działań.

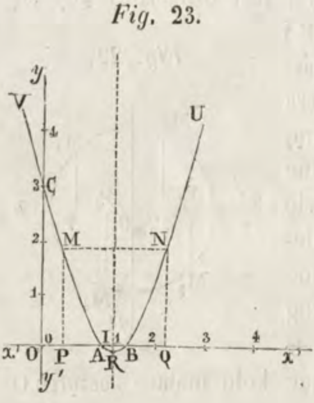
W analizie używa się krzywych w tym jedynie celu aby przedstawić obraz widoczny pochodu funkcyi. Linia jest malowidłem jasno uwydatniającém prawo algebraiczne które wiąże zmienne między sobą, a jéj zgięcia, jéj pochód pokazują jednym rzutem oka to coby tylko zupełna dyskusya zrównania nie bez trudu wyświecić należycie potrafiła.

Przykład. *Studyum funkcyi*

$$y = 2x^2 - 5x + 3.$$

Przypuśćmy dwie osie prostokątne Ox i Oy podzielone na części równe, i naznaczmy 1, 2, 3,... przy punktach podziału.

Fig. 23.



Formuła

$$y = 2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

pokazuje że rzędna jest zerem dla $x = 1$ i $x = \frac{3}{2}$, i że ona jest równą 3 dla $x = 0$. Krzywa przecina więc oś Ox w A i B, a oś Oy w C.

Gdy x powiększa się począwszy od $\frac{3}{2}$, dwa czynniki $x-1$, $x-\frac{3}{2}$ są dodatnemi, i powiększają się nieustannie; y wzrasta więc bez granicy pozostając dodatném. Ztąd gałąź nieskończona BNU która wznosi się po nad Ox, oddala się także od Oy.

Gdy x zmniejsza się począwszy od 1, dwa czynniki $x-1$, $x-\frac{3}{2}$ są odjemnemi, i powiększają się nieustannie w wartości bezwzględnéj; y wzrasta więc jeszcze bez granicy pozostając dodatném. Zkąd gałąź nieskończona AMCV przebija Oy w C.

Nakoniec, kiedy x jest zawartém pomiędzy 1 i $\frac{3}{2}$, dwa czynniki $x-1$, $x-\frac{3}{2}$ są znaków przeciwnych, y jest odjemném, i mamy łuk ARB, położony pod spodem Ox; łuk ten spaja dwie gałęzie VMA, UNB. Punkt najniższy R tego łuku odpowiada największości $y=2(x-1)\left(\frac{3}{2}-x\right)$, mającej miejsce z powodu równości czynników $x-1$ $\frac{2}{3}-x$, których summa jest stałą. Odcięta tego punktu R jest więc pół summą $\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)$ odciętych punktów A i B, a R znajduje się na równoległej do Oy poprowadzonéj przez środek I linii AB w odległości IR $=\frac{1}{8}$.

Połóżmy

$$x=\mathrm{OI}+\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)+\alpha,$$

przyjdzie

$$y=2\alpha^2-\frac{1}{8};$$

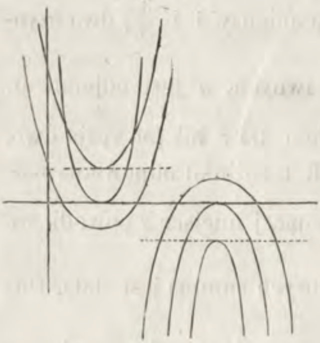
rzędna y pozostaje tąż samą kiedy α zmienia znak. Jeżeli więc weźmiemy, po jednéj i po drugiéj stronie I, dwie długości równe IQ, IP, i gdy wyniesiemy prostopadłe QN, PM aż do ich spotkania się z krzywą, figura MPQN będzie prostokątem; tak że krzywa jest symetryczną względem równoległéj do Oy poprowadzonéj przez środek I prostéj AB.

Krzywe przedstawiające funkcyą ogólną

$$y = ax^2 + bx + c$$

mają wszystkie kształt podobny do poprzedzającéj; są to *parabole* złożone z podwójnéj gałęzi nieskończonéj i symetrycznéj względem równoległéj do Oy. Gałęzie nieskończone są skierowane ku Oy albo ku Oy', według tego jak a jest dodatném lub odjemném; gdyż dla wartości dostatecznie wielkich na x, wyraz ax^2, jak wiemy, daje swój znak trójmianowi: Nadto, krzywa przecina Ox w dwóch punktach, jest styczną do tej osi, albo nie spotyka jéj wcale, według tego jak równanie

Fig. 24.



$$ax^2 + bx + c = 0$$

ma swe pierwiastki rzeczywiste i nierówne, rzeczywiste i równe, albo urojone. Te różne przypadki są przedstawione na *fig.* 24.

PIERWSZA WŁASNOŚĆ OGÓLNA FUNKCYJ CIĄGŁYCH.

462. Funkcye ciągłe posiadają pewne własności ogólne. Przytoczmy naprzód następującą, którą KEPLER wysłowił pierwszy (1615), a którą FERMAT wziął potem (1655) za podstawę swéj teoryi największości i najmniejszości:

W sąsiedztwie największości albo najmniéjszości, każda funkcya ciągła pozostaje prawie nieruchomą i zmienia się tylko stopniami bardzo małemi.

Ten fakt występuje bezpośrednio, z wpatrzenia się w krzywe. Kiedy rzędna krzywéj przestanie wzrastać, to jest przechodzi przez największość, albo przestaje zmniejszać się, to jest przechodzi przez najmniejszość, styczna do krzywéj staje się równoległą do osi Ox; rzędna téj stycznéj staje się więc stałą. Otóż, ponieważ w sąsiedztwie punktu zetknięcia można przyrównać cząstkę czyli element krzywéj do cząstki czyli elementu stycznéj, widoczna przeto że mały łuk krzywéj znajdujący się blisko największości albo najmniejszości ma rzędną niemal stałą. Funkcya przedstawiona przez tę rzędną zmienia się wtedy stopniami bardzo małemi.

Wynika ztąd że, *dla zbadania w jakich okolicznościach wielkość zmienna staje się największością, potrzeba wyrazić że ta wielkość uważana w dwóch stanach po sobie następujących nieskończenie sąsiednich ma też samą wartość : równość wypadkowa, wzięta w chwili granicy w któréj dwa stany po sobie następujące jednoczą się, dostarczy własności charakterystycznéj największości albo najmniejszości.*

« Taki charakter jest filozoficznie tém bardziéj właściwym, że sta-
» nowi wyrażenie wprost wynikające z uwagi ogólnéj często na-
» stręczonéj przez różne zjawiska naturalne które przedstawiają
» zwyczajne przykłady największości albo najmniejszości, takie jak
» zmiany wysokości słońca w obiegu dziennym, nierówne trwanie
» dni i nocy w różnych porach roku, i t. d. We wszystkich przy-
» padkach podobnych, badacze rozsądni dostrzegali zawsze że stan
» największości albo najmniejszości znajduje się stanowczo rozróż-
» nionym od stanów poprzednich albo następnych przez pewien
» rodzaj zatrzymania się szczególnego, które przypominają niekiedy
» nazwania zwyczajem uświęcone, gdy nadewszystko dotyczą pór
» roku (*przesilenia dnia z nocą*, po francuzku *solstices*, wyraz pocho-
» dzący z łacińskiego : *sol stat*). » (August Comte, *Geometrya Analityczna.*)

Ta własność znajduje w każdéj chwili swe zastosowanie w mechanice przemysłowéj, gdzie się szuka często jakie rozporządzenia potrzeba przyjąć, jaką wartość należy nadać pewnéj wielkości którą się umie władać, dla wykonania pracy oznaczonéj z najmniejszym o ile można kosztem, albo pracy największéj z wydatkiem oznaczonym.

ZASTOSOWANIA ANALITYCZNE ZASADY POPRZEDZAJĄCÉJ.

463. *Znaleźć największość lub najmniejszość funkcyi* $\mathrm{x}^{\mathrm{m}} + \mathrm{y}^{\mathrm{m}}$, *wiedząc że summa* $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ *jest stałą i równą* a.

Funkcya do zrobienia największością lub najmniéjszością jest

$$x^m + (a - x)^m.$$

Równając dwie wartości sąsiednie téj funkcyi, mamy związek

$$(x + h)^m + (a - x - h)^m = x^m + (a - x)^m,$$

który można napisać

$$(1) \qquad (x + h)^m - x^m + (a - x - h)^m - (a - x)^m = 0.$$

Wreszcie mamy

$$\frac{(x + h)^m - x^m}{(x + h) - x} = (x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2}$$

$$+ x^2(x + h)^{m-3} + \dots + x^{m-2}(x + h) + x^{m-1},$$

albo

$$(x + h)^m - x^m = h\left[\begin{array}{c}(x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2} \\ + x^2(x+h)^{m-3} + \dots + x^{m-2}(x+h) + x^{m-1}\end{array}\right],$$

podobnież

$$(a - x - h)^m - (a - x(^m$$

$$= - h\left[\begin{array}{c}(a - x - h)^{m-1} + (a - x)(a - x - h)^{m-2} + \dots \\ + (a - x)^{m-2}(a - x - h) + (a - x)^{m-1}\end{array}\right];$$

ak że związek (1) staje się

$$h[(x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2} + \dots + x^{m-1}]$$

$$= h\left[\begin{array}{c}(a - x - h)^{m-1} + (a - x)(a - x - h)^{m-2} + \dots \\ + (a - x)^{m-1}.\end{array}\right],$$

albo, znosząc czynnik h i robiąc $h=0$,

$$mx^{m-1}=m(a-x)^{m-1},$$

$$x^{m-1}=(a-x)^{m-1},$$

$$x=a-x;$$

zkąd $$x=\frac{a}{2},$$

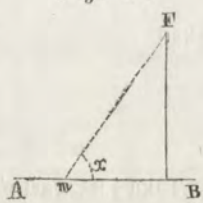
a tém samém,

$$y=a-x=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}.$$

Tak więc, bądź to dla największości, bądź to dla najmniejszości, dwa czynniki x i y powinny być równemi. Widzimy wreszcie łatwo że najmniejszość albo największość, ma miejsce według tego jak m jest $>$ albo $<$ od 1.

464. *Krążek poziomy* m *umieszczony na stole poziomym* AB, *jest oświecony przez lampę* F, *której spodek jest w odległości stałéj* Bm $=$ a *od środka* m *krążka; na jakiéj wysokości* FB $=$ h *należy osadzić lampę* F *ażeby krążek odbierał największość światła.*

Fig. 25.



Wiemy że natężenie światła, jakie odbiera powierzchnia, jest proporcyonalne do wstawy nachylenia promieni, i odwrotnie proporcyonalne do kwadratu z odległości światła do punktu oświeconego powierzchni. Oznaczmy przez x kąt zmienny $\widehat{BmF}$, przez A zaś natężenie światła które odbiera normalnie powierzchnia położona o jedność odległości od ogniska F; jeżeli więc promień wychodzący z ogniska spotyka powierzchnią krążka, pod jakiemkolwiek nachyleniem x, i w odległości $Fm=\frac{a}{\text{dos}\, x}$, ilość światła, jaką ta powierzchnia w tym punkcie odbiera, będzie :

$$\frac{\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{wst}\,x}{a^2}}{\mathrm{dos}^2 x}, \quad \text{albo} \quad \frac{\mathrm{A}}{a^2}\mathrm{wst}\,x\,\mathrm{dos}^2 x, \quad \text{albo} \quad \frac{\mathrm{A}}{a^2}(\mathrm{wst}\,x - \mathrm{wst}^3 x).$$

Przeto

$$\mathrm{wst}\,x - \mathrm{wst}^3\,x$$

jest funkcyą, którą należy zrobić największością; równając dwie wartości nieskończenie bliskie funkcyi, mamy

$$\mathrm{wst}\,x - \mathrm{wst}^3\,x = \mathrm{wst}\,(x+h) - \mathrm{wst}^3\,(x+h),$$

albo

$$\frac{\mathrm{wst}^3\,(x+h) - \mathrm{wst}^3\,x}{\mathrm{wst}\,(x+h) - \mathrm{wst}\,x} = 1,$$

albo

$$\mathrm{wst}^2\,(x+h) + \mathrm{wst}\,x\,\mathrm{wst}\,(x+h) + \mathrm{wst}^2\,x = 1$$

a więc przechodząc do granicy, to jest robiąc $h = 0$,

$$3\mathrm{wst}^2\,x = 1\,;$$

zkąd

$$\mathrm{wst}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

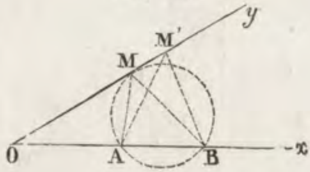
Taką jest wartość na x, która odpowiada największości oświecenia. Jest wreszcie rzeczą oczywistą że tu właśnie największość ma miejsce, gdyż oświecenie jest *zerem* już to dla $x = 0$, już to dla $x = \frac{\pi}{2}$.

ZASTOSOWANIE GEOMETRYCZNE.

465. *Znaleźć punkt* M *na prostéj* Oy, *z którego widzi się długość* AB *pod kątem* $\widehat{\mathrm{AMB}}$, *największym możebnym.*

Niech będzie M′ punkt nieskończenie sąsiedni punktu nieznanego M; równość kątów (462) $\widehat{\mathrm{AMB}}$, $\widehat{\mathrm{AM'B}}$ wymaga aby czworobok MM′AB był wpisanym. Na granicy, gdy M′ jednoczy się z M, prosta Oy jest styczną, i wyszukanie punktu M sprowadza się do znalezienia punktu zetknięcia koła przechodzącego przez dwa punkta dane A i B i stycznego do linii prostéj danéj Oy; innemi słowy, odległość OM jest średnią proporcyonalną między OA i OB.

Fig. 26.

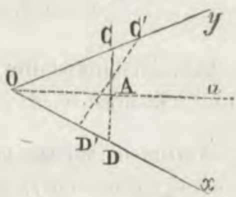


Rozpoznaje się, w rzeczy saméj, a posteriori że każdy punkt prostéj Oy, inny jak punkt zetknięcia M, jako położony na zewnątrz koła, jest wierzchołkiem kąta mniejszego jak kąt $\widehat{\mathrm{AMB}}$.

466. *Przez punkt* A *wzięty wewnątrz kąta* $\widehat{\mathrm{yOx}}$, *poprowadzić sieczną* CD *taką, aby prostokąt* AC . AD *był najmniéjszym możebnym.*

Niech będzie C′D′ sieczna nieskończenie sąsiednia siecznéj szukanéj CD; czworobok CC′DD′ jest wpisanym, gdyż mamy

Fig. 27.



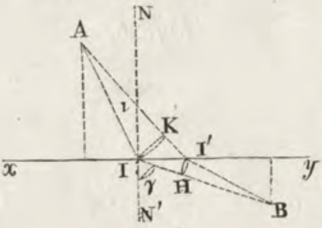
$$\mathrm{AC} \,.\, \mathrm{AD} = \mathrm{AC'} \,.\, \mathrm{AD'}.$$

Koło przechodzące przez cztery wierzchołki staje się styczném w C i D do boków kąta $\widehat{y\mathrm{O}x}$; cięciwą zetknięcia CD musi więc być prostopadła spuszczona z punktu danego A na dwójsieczną Ou kąta $\widehat{y\mathrm{O}x}$.

467. Zadanie Fermat'a. *Mając dane dwa punkta* A *i* B *położone w dwóch środkach różnych które rozłącza linia prosta* xy, *a oraz oznaczywszy przez* v *i* v′ *prędkości odpowiedne rozchodzenia się światła w obu środkach, chcemy wiedzieć drogę* AIB *jaką musi postępować światło punktu świecącego, aby przejść od pierwszego punktu do drugiego w czasie jak najkrótszym.*

Niech będzie I′ punkt sąsiedni punktu I. Z punktów A i B jako środków, długościami AI i BI′ wziętemi za promienie, zakreślmy dwa łuki IK, I′H. Różnica czasów których używa światło do przebieżenia dróg AIB, AI′B ma za wyrażenie :

Fig. 28.



$$\frac{\mathrm{I'K}}{\mathrm{V}} - \frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{V'}}$$

$$= \mathrm{II'}\left(\frac{1}{\mathrm{V}}\,\frac{\text{wst}\,\widehat{\mathrm{I'IK}}}{\text{wst}\,\widehat{\mathrm{IKI'}}} - \frac{1}{\mathrm{V'}}\,\frac{\text{wst}\,\widehat{\mathrm{II'H}}}{\text{wst}\,\widehat{\mathrm{IHI'}}}\right).$$

Wyrażając że ta różnica jest zerem na granicy, i oznaczywszy przez i i r kąty *wpadania* $\widehat{\mathrm{AIN}}$ i *załamania* $\widehat{\mathrm{BIN'}}$, otrzymamy

$$\frac{1}{\mathrm{V}}\,\text{wst}\,i = \frac{1}{\mathrm{V'}}\,\text{wst}\,r \qquad \text{albo} \qquad \frac{\text{wst}\,i}{\text{wst}\,r} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V'}}.$$

Takie jest prawo pojedyńczego załamywania się światła Deskarta.

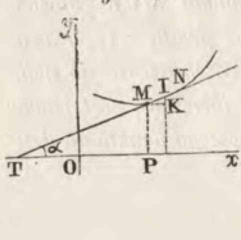
DRUGA WŁASNOŚĆ OGÓLNA FUNKCYJ CIĄGŁYCH.

468. Zastanawianie się nad krzywemi wystawia jeszcze na widok inną własność bardzo ważną funkcyj ciągłych :

Zmianom bardzo małym zmiennéj niezależnéj x, *poczynając od wartości oznaczonéj, odpowiadają zmiany funkcyi przybliżenie proporcyonalne.*

Ponieważ w sąsiedztwie punktu zetknięcia, można przyrównać element krzywéj do elementu stycznéj, widzimy że w rozciągłości MN tego elementu spólnego, stosunek $\frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{MK}}$ różnicy rzędnych do różnicy odciętych jest stałym i równym stycznéj trygonometrycznéj nachylenia $\widehat{\mathrm{IMK}} = \alpha$ prostéj MT na oś Ox.

Fig. 29.



Ta zasada jest bardzo pożyteczną w matematyce zastosowanéj; ile razy zmienna niezależna, waha się oscyllacyjnie około swéj wartości średniéj x_0 od któréj ta zmienna oddala się bardzo mało, innemi słowy, kiedy mamy $x = x_0 + z$, gdzie z jest liczbą zmienną bardzo małą względem stałéj x_0, można, bez błędu dostrzegać się dającego, zastąpić zawsze każdą funkcyą x, matematyczną albo empiryczną, znaną lub nieznaną, przez $A + Bz$ gdzie A i B są liczbami stałemi. . .

Zastosowaliśmy już tę zasadę robiąc użycie proporcyi tablicowéj $\frac{x}{\Delta} = \frac{d}{1}$ albo $x - \Delta d = 0$ dla wyszukania logarytmów liczb wyższych nad 10^4.

FUNKCYE WIELU ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH. — JEDNORODNOŚĆ.

469. Wielkość zależy często od wielu innych; i tak ciężar ciała jest funkcyą cztérech zmiennych niezależnych, jego trzech wymiarów i jego gęstości. Prócz zmiennych, wchodzą niekiedy do oznaczenia funkcyi, ilości które pozostają stałemi w pytaniu które się traktuje; jakoż, w miejscu daném, natężenie g ciężkości nie zmienia się, a trwanie wachnięć wahadła zależy od jego długości zmiennéj i od stałéj g. Dla wyrażenia że ilość u jest funkcyą wielu zmiennych niezależnych $x, y, z, \ldots$, używa się oznaczenia

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

a pisze się

$$u = f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

dla wskazania że funkcya zawiéra nadto stałe albo *parametry* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$..

Funkcye matematyczne poddzielają się na *algebraiczne* i *przestępne;* piérwsze są te na których działaniami wskazanemi do wykonania mogą być tylko, dodawania, odciągania, mnożenia, dzielenia, podnoszenia do potęg całkowitych lub ułamkowych, lecz zawsze stopni znanych; drugiémi zaś są te które zawierają inne działania wskazane na zmiennych niezależnych; takiémi są, na przykład, ilości wykładnicze a^x, logarytmy, linie czyli stosunki trygonometryczne,....

470. Mówi się w ogólności że funkcya $f(a, b, c,...)$ jest *jednorodną* względem liter $a, b, c,...$, kiedy mamy

$$f(ka, kb, kc,...) = k^m(a, b, c,...),$$

gdzie k oznacza liczbę nieoznaczoną jakąkolwiek; wykładnik zaś m nazywa się *stopniem jednorodności* funkcyi.

Przykłady. Funkcya $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ jest jednorodną stopnia -2, gdyż mamy

$$\frac{1}{k^2a^2} + \frac{1}{k^2b^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = k^{-2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Podobnież, funkcya $\frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5b}$ jest jednorodną stopnia 0; gdyż mamy

$$\frac{3(ka) + \sqrt{kakb}}{2ka + 5kb} = \frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5b} = k^0\,\frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5b}.$$

W przypadku wielomianu całkowitego, wszystkie wyrazy powinny być tegoż samego stopnia, i znajduje się definicya numeru 30.

Twierdzenie. *Kiedy się traktuje przez algebrę pytanie jakiekolwiek geometryi, zostawiając nieoznaczoną jednostkę długości, wszelkie związki takie jak* (a, b, c,...) = 0, *do których się przychodzi między liczbami* a, b, c,..., *mierzącemi różne linie* A, B, C,... *figury, mają ich piérwszy członek* f(a, b, c,...) *jednorodny.*

W rzeczy saméj, rozumowania i rachunki które nas przyprowadziły do związku

(1) $$f(a, b, c,...) = 0,$$

są całkiem niezależnemi od jedności długości przyjętéj; jeśliby więc wybraną została linia A za jedność długości, znalazłoby się między liczbami 1, b', c',..., któreby mierzyły różne linie figury, związek tegoż samego kształtu

$$(2) \qquad f(1, b', c',...) = 0;$$

otóż mamy

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a},...,$$

gdyż stosunek liczb które mierzą dwie wielkości jest niezależnym od jedności wybranéj. Zrównanie (2) staje się więc

$$(3) \qquad f\left(1, \frac{b}{a}, \ \frac{c}{a},....\right) = 0$$

a gdy ten nowy związek jest jednorodnym i stopnia zéro, zrównanie (1) które się otrzymuje mnożąc (3) przez najwyższą potęgę a^m liczby a wchodzącéj do mianownika, jest jednorodném i stopnia m.

471. Dowodzenie nie przypuszcza że funkcya $f(a, b, c,...)$ jest algebraiczną. Wskazuje ono, nadto, sposób przywrócenia jednorodności w zrównaniu pochodzącém z zadania w którém wzięto za jedność jedną z linij figury. Potrzeba, oznaczając jedność przez i, podzielić przez i, każdą literę przedstawiającą linią, potém znieść mianowniki. Dodajmy że litery przedstawiające powierzchnie lub objętości powinny, stosownie do prawideł podanych w geometryi, być traktowane jako wieloczyny złożone z dwóch albo z trzech linij; nakoniec litery przedstawiające kąty albo funkcye kołowe wyrażające tylko stosunki dwóch linij, są czynnikami stopnia zera, i potrzeba w nich odrzucić wszelkie zastosowanie twierdzenia poprzedzającego.

Tym sposobem pojęta zasada jednorodności, przedstawia wysoko w nauce ceniony sposób weryfikacyi czyli sprawdzania. W każdém poszukiwaniu geometryczném, gdzie jedność została nieoznaczoną, jeżeli natrafimy w ciągu rachunku na zrównanie niejednorodne, należy się zatrzymać, wnosząc ztąd słusznie że rozumowanie albo rachunek muszą być błędnemi.

Ta zasada dostarczy nawet dowodzeń najprostszych i bezpośrednich, pewnych twierdzeń zasadniczych geometryi i mechaniki (zob. Notę II *Geometryi* LEGENDRE'A, i numer 26 *Mechaniki* POISSON'A, drugą edycya).

Przytoczmy jeden tylko przykład :

Powierzchnia trójkąta jest oczywiście funkcyą jego boków a, b, c i jego kątów A, B, C; wreszcie ta funkcya $\varphi(a, b, c, A, B, C)$ jest jednorodna i drugiego stopnia; powinno więc być

$$\varphi(ka, kb, kc, A, B, C) = k^2\varphi(a, b, c, A, B, C).$$

Otóż piérwszy członek przedstawia powierzchnią wszystkich trójkątów podobnych trójkątowi danemu, ponieważ kąty są też same, a boki proporcyonalne; związek poprzedzający wyraża więc że *powierzchnie trójkątów podobnych mają stosunek równy* k^2, to jest *równy stosunkowi kwadratów z dwóch boków odpowiednich jakichkolwiek.*

ĆWICZENIA.

I. Niech będzie funkcya jednorodna i drugiego stopnia z n ilości $a_1, a_2, \ldots, a_n$; dowieźć że mamy

$$V = V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2,$$

przypuszczając że $V_1, V_2, \ldots, V_n$ są funkcyami linijnemi zamykającemi w sobie odpowiednio $n, n-1, \ldots, 1$ ilości.

II. Znaleźć na krzywéj danéj punkt M taki, aby trójkąt utworzony przez styczną w tym punkcie do krzywéj i dwie osie spółrzędnych był, największym albo najmniejszym możebnym. — Rozwiązać toż samo pytanie, podstawiając za trójkąt, prostokąt wystawiony na odciętéj i rzędnéj punktu M.

III. Znaleźć na krzywéj danéj punkt H taki, aby summa jego odległości od dwóch punktów stałych A i B położonych na płaszczyznie linii krzywéj była największością albo najmniejszością.

IV. Mając daną krzywą i cięciwę stałą AB, znaleźć na téj cięciwie punkt M taki, aby cięciwa AB była największą albo najmniejszą możebną pomiędzy wszystkiemi cięciwami przechodzącemi przez punkt M. Rozwiązać toż samo pytanie podstawiając wieloczyn utworzony z odcinków MA i MB zamiast długości cięciwy.

V. Pomiędzy wszystkiemi cięciwami téjże saméj długości wpisanemi w krzywą daną, znaleźć tę która odcina największy albo najmniejszy odcinek możebny.

VI. Nakreślić krzywe przedstawione przez funkcye

$$y = \operatorname{wst} x, \quad y = \operatorname{st} x, \quad y = \operatorname{dos} x,$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}}.$$

ROZDZIAŁ XXIV.

O KOMBINACYACH W OGÓLNOŚCI.

DEFINICYE.

472. *Kombinacyami z* m *przedmiotów* branych po n, nazywają się grupy otrzymane z zestawienia z sobą wszelkiemi sposobami możebnémi tych przedmiotów branych po n do każdéj grupy tak, aby dwie grupy różniły się między sobą przynajmniéj jednym przedmiotem do składu ich wchodzącym.

Przemianami czyli *permutacyami* z n przedmiotów nazywają się w algebrze różne sposoby ustawienia ich według figury oznaczonéj, na przykład w linii prostéj.

Zgodzono się nazwać *waryacyami* z m *przedmiotów* po n branych różne sposoby ustawienia tych przedmiotów według figury oznaczonéj, w linii prostéj na przykład, biorąc je zawsze przy każdém ustawieniu po n.

Wynika z tych definicyj że gdyby, po znalezieniu wszystkich *kombinacyj* z m przedmiotów po n branych, wykonało się, w każdéj grupie z n przedmiotów wszystkie *przemiany* możebne, otrzymałoby się dokładnie wszystkie *waryacye* możebne z tych m przedmiotów branych po n. Tak że, jeżeli się rozmnoży liczbę kombinacyj z m przedmiotów branych po n, przez liczbę przemian którą można wykonać na grupie zamykającéj w sobie n przedmiotów, otrzyma się dokładnie na wieloczyn liczbę waryacyj możebnych z tych m przedmiotów branych po n.

Oznaczywszy więc przez K_n^m liczbę kombinacyj z m przedmiotów branych po n; przez P_n liczbę przemian którą można wykonać na grupie zamykającéj w sobie n przedmiotów, a przez

W_n^m liczbę waryacyj możebnych z m przedmiotów po n branych, otrzymamy związek

$$K_n^m \times P_n = W_n^m,$$

ztąd się wyciąga $$K_n^m = \frac{W_n^m}{P_n};$$

to jest że, dla otrzymania liczby kombinacyj z m przedmiotów branych po n, należy podzielić liczbę waryacyj możebnych z tych m przedmiotów branych po n, przez liczbę przemian którą można wykonać na grupie zawierającéj w sobie n przedmiotów.

Po znalezieniu więc wartości W_n^m i P_n; znajdziemy, tém samém, za pomocą wzoru powyższego wartość K_n^m.

Dla łatwiejszego zrozumienia, przypuśćmy że przedmioty o które rzecz idzie są literami alfabetu. K_n^m oznaczać będzie wtedy liczbę sposobów wzięcia m liter po n, tak dalece że się otrzymuje, mnożąc je, tyleż wieloczynów *różnych*. P_n oznaczać będzie liczbę sposobów napisania wciąż jedne po drugich n liter oznaczonych. Nakoniec W_n^m oznaczać będzie liczbę sposobów napisania wciąż jedne po drugich n liter, wziętych, wszelkiemi sposobami możebnémi, z całkowitéj liczby m liter.

WARYACYE.

473. Niech będą $a, b, c, d, \ldots h, k, l,$ litery wzięte pod uwagę w liczbie m.

Liczba waryacyj z tych m liter wziętych po *jednéj* jest oczywiście równą liczbie tych liter; mamy więc

$$W_1^m = m.$$

Starajmy sie utworzyć waryacye z m liter wziętych po *dwie*. Do osiągnięcia czego, wystarczy wziąć z kolei każdą z m liter, i napisać po prawéj jej stronie każdą z $m-1$ liter pozostałych; co daje

ab	*ba*	*ca* ..... *la*
ac	*bc*	*cb* ..... *lb*
ad	*bd*	*cd* ..... *lc*
...	...	... .
...	...	... .
ak	*bk*	*ck* ..... *lh*
al	*bl*	*cl* ..... *lk*

Znajdziemy tym sposobem wszystkie waryacye z dwóch liter złożone; na dowodzenie tego dosyć wykazać że żadna waryacya nie została opuszczoną, ani też żadna nie była powtórzoną. Otóż,

1° uważmy waryacyą jakąkolwiek *ck*. Brano każdą z kolei literę dla utworzenia jakiejkolwiek kolumny pionowéj; wziętą więc została mianowicie litera *c*. Po téj literze, została napisaną kolejno każda z liter pozostałych; została więc napisaną szczególnie litera *k*; co dało waryacyą *ck*. Więc, żadna waryacya nie została opuszczoną.

2° Porównajmy dwie waryacye jakiekolwiek napisane w tablicy powyższéj. Albo te waryacye będą się znajdowały w téj saméj kolumnie pionowéj, a wtedy będą się między sobą różniły ostatnią literą; albo te waryacye będą się znajdowały w dwóch kolumnach różnych, a wtedy będą się one między sobą różniły pierwszą literą. Więc wszystkie otrzymane waryacye są różne.

Więc nakoniec, mamy istotnie tym sposobem wszystkie waryacye z dwóch liter złożone. Pozostaje oznaczyć ich liczbę. Otóż, znajduje się tyle kolumn ile jest waryacyj z m liter wziętych po *jednéj* czyli tyle ile jest liter, to jest m; a że mamy $m-1$ waryacyj w każdéj kolumnie, jest więc całkowicie $m(m-1)$ waryacyj z m liter wziętych po *dwie;* mamy przeto:

$$W_2^m = m(m-1).$$

Utwórzmy waryacye z trzech liter złożone. Aby to otrzymać, dosyć wziąć każdą z kolei waryacyą utworzoną z m liter wziętych po *dwie*, i napisać po prawéj jéj stronie $m - 2$ liter pozostałych, co daje

abc	*acb*	*bca*	*kla*
abd	*acd*	*bcd*	*klb*
abe	*ace*	*bce*	*klc*
...	...	... .	...
...	...	... .	...
abl	*acl*	*bcl*	*klh*.

Otrzymamy istotnie tym sposobem wszystkie waryacye złożone z trzech liter. W rzeczy saméj :

1° Uważmy waryacyą jakąkolwiek *bck*. Braliśmy, z kolei, każdą waryacyą otrzymaną z m liter wziętych po *dwie* dla otrzymania jakiejkolwiek kolumny pionowéj; wziętą więc została w szczególności waryacya *bc*. Napisaną została po niéj każda z liter pozostałych; napisaną więc została w szczególności litera k, co utworzyło waryacyą *bck*. Więc żadna z waryacyj nie została opuszczoną.

2° Porównajmy dwie waryacye jakiekolwiek napisane w tablicy powyższéj. Albo te waryacye są w téjże saméj kolumnie pionowéj, a wtedy różnią się między sobą ostatnią literą; albo te waryacye są w dwóch kolumnach różnych, a wtedy różnią się przynajmniéj porządkiem dwóch pierwszych liter, jak *abk* i *bak*. Więc wszystkie waryacye napisane są różne.

Więc nakoniec, mamy istotnie tym sposobem wszystkie waryacye z liter wziętych po *trzy*. Pozostaje wskazać ich liczbę. Otóż, znajduje się tyle kolumn ile jest waryacyj z m liter wziętych po *dwie*, to jest W_2^m albo $m(m-1)$; a że, w każdéj kolumnie, mamy $m-2$ waryacyj, jest więc całkowicie $m(m-1)(m-2)$ waryacyj z m liter wziętych po *trzy;* przeto mamy

$$W_3^m = m(m-1)(m-2).$$

Prawo tworzenia się tych wartości jest oczywistém. Lecz można je dowieść sposobem ogólnym. Przypuśćmy że już znalezioną została liczba W_{n-1}^m waryacyj z m liter wziętych po $n-1$, i że chcemy utworzyć waryacye z m liter wziętych po n. Aby to otrzymać, dosyć wziąć z kolei każdą z wartości utworzonych z m liter wziętych po $n-1$, i napisać po niéj każdą z liter pozostałych, które są w liczbie $m-(n-1)$ albo $m-n+1$. Utworzy się tyle kolumn pionowych ile jest waryacyj otrzymanych z m liter wziętych po $n-1$, i każda z tych kolumn będzie miała $m-n+1$ waryacyj. 1° Żadna waryacya mogąca być otrzymaną z m liter wziętych po n nie została opuszczoną; gdyż, niech będzie, na przykład, waryacya $abc.....gh$ którą przypuśćmy utworzoną z n liter. Braliśmy z kolei każdą waryacyą otrzymaną z m liter wziętych po $n-1$ dla utworzenia jakiejkolwiek kolumny pionowéj; wziętą więc została mianowicie waryacya $abc.....g$. Napisaną została po niéj każda z liter pozostałych; napisaną więc została w szczególności litera h, co utworzyło waryacyą $abc.....gh$. 2° Żadna waryacya nie była powtórzoną; gdyż, jeżeli porównamy dwie waryacye napisane w tablicy świeżo przez nas ułożonéj, albo te waryacye będą się znajdowały w téjże saméj kolumnie pionowéj, a wtedy będą się one między sobą różniły ostatnią literą; albo będą się znajdowały w dwóch kolumnach różnych, a wtedy będą się one między sobą różniły przynajmniéj porządkiem $n-1$ pierwszych liter, jak $abc.....gh$ i $gbc.....ah$.

Więc nakoniec, mamy istotnie wszystkie waryacye zawierające po n liter. Dla wskazania ich liczby, należy pomnożyć liczbę kolumn, albo liczbę waryacyj otrzymanych z m liter wziętych po $n-1$, to jest W^m_{n-1}, przez liczbę waryacyj zawartych w każdéj kolumnie, to jest przez $m-n+1$; otrzymamy więc

$$W^m_n = W^m_{n-1} \times (m-n+1).$$

Ta formuła jest ogólną, można w niéj dać na n wszystkie wartości całkowite od 2 aż do n; otrzymuje się tym sposobem

$$\begin{aligned}
W^m_2 &= W^m_1 \times (m-1) \\
W^m_3 &= W^m_2 \times (m-2) \\
W^m_4 &= W^m_3 \times (m-3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W^m_n &= W^m_{n-1} \times (m-n+1).
\end{aligned}$$

Mnożąc te równości stronami, znosząc czynniki W_2^m, W_3^m, W_4^m, ... W_{n-1}^m spólne obu członkom, i zastępując czynnik W_1^m przez jego wartość m, otrzymamy

$$W_n^m = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots (m-n+1).$$

474. Uwaga. Drugi członek składa się z n czynników, które idą zmniejszając się o jedność, począwszy od m który jest pierwszym. Tak więc liczba czynników jest zawsze równą skazówce n przywiązanéj do W_n^m; liczba waryacyj wziętych po *dwie* jest wyrażoną przez 2 czynniki; liczba waryacyj wziętych po *trzy* jest wyrażoną przez 3 czynniki, i t. d.; liczba waryacyj wziętych po n jest wyrażoną za pomocą n czynników.

Przykład I. *Ile można utworzyć liczb z* TRZECH *cyfer otrzymanych z* PIĘCIU *początkowych cyfer nieparzystych* 1, 3, 5, 7, 9?

Liczbą szukaną jest liczba waryacyj z *pięciu* przedmiotów wziętych po *trzy*; jest więc równą wieloczynowi z 3 czynników, których pierwszym jest 5, a inne idą zmniejszając się kalejno o jedność. Tą liczbą jest więc

$$5 \times 4 \times 3 \quad \text{albo} \quad 60.$$

Przykład II. *Ile można utworzyć wstązek majacych rysy* CZTEROKOLOROWE *wzięte z* SIEDMIU *kolorów pryzmatu?*

Liczbą szukaną jest liczba waryacyj z 7 przedmiotów wziętych po *cztery*; jest więc równą wieloczynowi z 4 czynników, których pierwszym jest 7, a inne idą zmniejszając się kolejno o jedność. Tą liczbą jest więc

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \quad \text{albo } 840,$$

Przykład III. *Sześciu graczy bawią się grą w karty w któréj daje się jedną kartę każdemu; w iloraki sposób karty tych graczy zmienić się mogą?*

Liczbą szukaną jest liczba waryacyj z 32 przedmiotów wziętych po *sześć;* jest więc równą wieloczynowi z 6 czynników, których pierwszym jest 32, a inne idą zmniejszając się kolejno o jedność. Tą liczbą jest więc

$$32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \quad \text{albo} \quad 652458240.$$

Gdyby gra była z 52 kart, liczbą szukaną byłaby

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \quad \text{albo} \quad 14658134400.$$

PRZEMIANY.

475. Obrachujmy teraz liczbę przemian możebnych, która się daje wykonać na n przedmiotach. Przemiany różnią się od waryacyj tém tylko że się bierze wszystkie litery; innemi słowy, liczba przemian z n przedmiotów jest równą liczbie waryacyj z n przedmiotów po n; to jest że można napisać

$$P_n = W_n^n.$$

Gdy więc zastąpimy m przez n w wartości na W_n^m, otrzymamy wartość P_n. Otrzymuje się tym sposobem

$$P_n = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 2 \,.\, 1$$

albo

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots (n-1) \,.\, n.$$

To jest liczba przemian z n przedmiotów jest równą wieloczynowi ciągu naturalnego liczb całkowitych, od 1 aż do n.

Zauważyć należy że, tak tu jak we wzorze waryacyj, liczba czynników jest równą n.

Możnaby było wyprowadzić wprost tę formułę.

Przypuśćmy, w rzeczy samej, że się znalazło przemiany z $n-1$ liter a, b, c, ... k, i że ich liczba jest P_{n-1}. Dla utworzenia przemian z n liter, weźmie się każdą z przemian $n-1$ liter, i wprowadzi się do niéj n^{ta} literę, l, kolejno na wszystkie miejsca. Przemiany tym sposobem otrzymane będą wszystkie różne; gdyż będą się one między sobą różniły, albo porządkiem $n-1$ liter pierwotnych, albo miejscem które zajmuje n^{ta} litera wprowadzona l. Wreszcie, żadna nie będzie opuszczoną; gdyż, jeśli zaùważymy przemianę *ablc.....k*, na przykład, widzimy że ta pochodzi z przemiany *abc.....k* zawierającéj $n-1$ liter, w któréj została wprowadzoną litera l na trzecie miejsce: ta przemiana jest więc taką jaką powinna była być otrzymaną. Znaleźliśmy więc istotnie tym sposobem wszystkie przemiany z n liter. Otóż, każda przemiana z $n-1$ liter dostarczy n przemian z n liter; gdyż litera l może być położona na n miejscach różnych.

Otrzymamy więc

$$P_n = P_{n-1} \times n.$$

Jeżeli, w tym wzorze, który jest ogólnym, weźmiemy na n wszystkie wartości od 2 aż do n, znajdziemy

$$P_2 = P_1 . 2$$

$$P_3 = P_2 . 3$$

$$P_4 = P_3 . 4$$

$$. \; . \; . \; . \; .$$

$$P_n = P_{n-1} . n.$$

Mnożąc stronami, znosząc czynniki spólne w obu członkach, i uważając że liczba przemian z *jednéj* litery jest równą 1, albo że $P_1 = 1$ przyjdzie

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 ..... n.$$

476. Możnaby jeszcze przemiany w ten sposób wyłożyć.

Kiedy liczby m i n są równemi, wszystkie przedmioty figurują w każdéj grupie; te waryacye różniące się tylko rozporządzeniem przedmiotów, biorą nazwisko *przemian*. Oznaczywszy przez P_m liczbę przemian z m przedmiotów, mamy formułę

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1.$$

Wskazuje się często wieloczyn $1.2.3\ldots\ldots m$ przez oznaczenie $m!$

Oto sposób postępowania dla utworzenia przemian. Dwie litery a i b dają miejsce tylko dwom przemianom ab i ba. W przypadku trzech liter a, b, c, kładzie się c po prawéj stronie każdéj z przemian ab i ba, potém posuwa się kolejno tę literę o jedno miejsce od prawéj ku lewéj ręce aż do pierwszego miejsca. Tym sposobem przemiana ab dostarczy

$$abc,\quad acb,\quad cab,$$

a przemiana ba

$$bac,\quad bca,\quad cba.$$

Ogólnie, mając dane wszystkie przemiany z $m-1$ przedmiotów, utworzymy przemiany z m przedmiotów kładąc m^{ty} po prawéj stronie każdéj z przemian poprzedzających, i posuwając go kolejno o jedno miejsce od prawéj ku lewéj ręce aż do pierwszego miejsca.

Przykład I. *Ilu sposobami można zaprządz do dyliżansu 5 koni oznaczonych?*

Liczbą szukaną jest liczba przemian z pięciu przedmiotów; jéj wartość jest więc

$$1.2.3.4.5 \quad \text{albo} \quad 120.$$

Przykład II. *Gospodyni domu ofiaruje swym gościom 12 talerzy deseru; ilu sposobami mogą one być ustawionemi na stole?*

Liczbą szukaną jest liczba przemian z dwunastu przedmiotów, to jest

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 \quad \text{albo} \quad 479001600.$$

PRZYKŁAD III. *Ilu sposobami karty mogą być ułożone w pakiecie ze 24 kart?*

Liczbą szukaną jest liczba przemian z 24 przedmiotów; to jest

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.$$

Wykonywając rachunki, otrzyma się

$$620448401733239439360000.$$

WIELOCZYNY RÓŻNE.

477. Znalazłszy liczbę waryacyj z m przedmiotów wziętych po n, i liczbę przemian możebnych z n przedmiotów, otrzymuje się natychmiast liczbę kombinacyj wziętych po n za pomocą formuły

$$K_n^m = \frac{W_n^m}{P_n}$$

uzasadnionej w numerze 472.

Podstawiając za W_n^m i P_n ich wartości (473, 475), znajdziemy

$$K_n^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\quad\dots\quad n}.$$

Jest, w tém wyrażeniu, n czynników w liczniku i tyleż w mianowniku. Licznik ma za swój piérwszy czynnik liczbę całkowitą m przedmiotów; inne czynniki idą zmniejszając się kolejno o jedność. Mianownik jest wieloczynem ciągu naturalnego liczb całkowitych od 1 aż do liczby n przedmiotów wchodzących do każdej kombinacyi.

Możnaby było otrzymać także tę formułę *wprost.*

Przypuśćmy że się znalazło kombinacye z m liter wziętych po $n-1$, i że chcemy utworzyć kombinacye z tychże liter wziętych po n. Można będzie, po prawéj stronie każdéj kombinacyi złożonéj z $n-1$ liter, napisać kolejno każdą z $m-(n-1)$ albo $m-n+1$ liter pozostałych. Lecz, jest łatwo dostrzedz że każda kombinacya zawierająca n liter, będzie tym sposobem powtórzoną n razy; gdyż ona pochodzi zarówno z wprowadzenia jednéj którejkolwiek z n liter do niéj wchodzących, do kombinacyi utworzonej z $n-1$ innych.

Dla otrzymania liczby kombinacyj z liter wziętych po n, będzie przeto potrzeba mnożyć liczbę kombinacyj z liter wziętych po $n-1$ przez $m-n+1$, i dzielić wieloczyn przez n. Tak więc mamy

$$K_n^m = K_{n-1}^m \times \frac{m-n+1}{n}.$$

Jeżeli, w tym wzorze, który jest ogólnym, weźmiemy na n wszystkie wartości od 2 aż do n, znajdziemy szereg równości

$$K_2^m = K_1^m \times \frac{m-1}{2},$$

$$K_3^m = K_2^m \times \frac{m-2}{3}$$

$$K_4^m = K_3^m \times \frac{m-3}{4}$$

. . . .

$$K_n^m = K_{n-1}^m \times \frac{m-n+1}{n}.$$

Mnożąc stronami, znosząc czynniki spólne w obu członkach, i uważając że $K_1^m = m$, albo $\frac{m}{1}$, przyjdzie

$$K_n^m = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdots \frac{m-n+1}{n}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n}.$$

478. Oto sposób postępowania dla utworzenia wieloczynów różnych. Niech będzie pięć liter a, b, c, d, e. Wieloczyny złożone z liter wziętych po *dwie* otrzymują się mnożąc każdą literę kolejno przez litery po niéj następujące; témi wieloczynami są więc

ab,	bc,	cd,	de,
ac,	bd,	ce,	
ad,	be,		
ae,			

Utworzą się wieloczyny zawierające po *trzy* litery, mnożąc każdy z wieloczynów poprzedzających przez różne litery które następują po ostatnim czynniku wieloczynu uważanego; znajdziemy tym sposobem

abc,	acd,	ade,	bcd,	bde,	cde.
abd,	ace,		bce,		
abe,					

Ogólnie, dla utworzenia wieloczynów z m przedmiotów wziętych po n, potrzeba położyć po prawéj stronie każdego wieloczynu rzędu poprzedzającego, różne przedmioty które następują po przedmiocie kończącym ten wieloczyn.

Przykład I. *W radzie złożonéj z dwunastu członków, wyciąga się losem kommissya z pięciu członków, dla zajęcia się pewną pracą. Ilu sposobami ta kommissya mogłaby być złożoną?*

Liczbą szukaną jest liczba kombinacyj z dwunastu przedmiotów wziętych po *pięć*. Licznik musi się składać z pięciu czynników 12.11.10.9.8; a mianownik z pięciu czynników 1.2.3.4.5. Liczbą szukaną będzie więc

$$\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} \quad \text{albo} \quad 11.9.8 \quad \text{albo nakoniec} \quad 792.$$

Przykład II. *Pocztmistrz, mający* 15 *koni w swéj stajni, musi ich* *dostarczyć 4 do przeprzęgu powozu osób odbywających podróż extra-pocztą; ilu sposobami może on to wykonać?*

Liczbą szukaną jest liczba kombinacyj z pietnastu przedmiotów wziętych po *cztéry*. Licznik musi się składać z czterech czynników 15.14.13.12; a mianownik, z cztérech czynników 1.2.3.4. Liczbą szukaną będzie więc

$$\frac{15.14.13.12}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \quad \text{albo} \quad 15.7.13, \quad \text{albo nakoniec} \quad 1365.$$

Przykład III. *Każdy gracz rozdający karty, w grze pikietowéj, daje* 12 *kart z* 32 *swemu przeciwnikowi; ilu sposobami tenże jego przeciwnik może być usłużonym?*

Liczbą szukaną jest liczba kombinacyj z 32 przedmiotów wziętych po *tuzinie*, to jest

$$\frac{32.31.30.29.28.27.26.25.24.23.22.21}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.10.11.12},$$

albo, znosząc czynniki spólne w liczniku i mianowniku,

$$31.29.26.23.21.20 \quad \text{albo} \quad 225792840$$

479. Uwaga I. Wartość K_n^m może być położona pod innym kształtem który dobrze jest poznać.

Pomnożywszy dwa wyrazy K_n^m przez wieloczyn

$$(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots 3.2.1,$$

albo $$1.2.3.4\ldots(m-n),$$

otrzymamy

$$K_n^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots 3.2.1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ n \times 1\ .\ 2\ .\ 3\ldots(m-n)}.$$

Otóż, licznik jest wtedy wieloczynem ciągu malejącego liczb całkowitych od m aż do 1, albo, co na jedno wychodzi, wieloczynem ciągu naturalnego liczb od 1 aż do m. Można więc napisać

$$K_n^m = \frac{1.2.3.4.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots m}{1.2.3.\dots.\, n \times 1.2.3.\dots.(m-n)}.$$

A ponieważ K_n^m jest koniecznie liczbą całkowitą, widzimy że *wieloczyn ciągu naturalnego liczb od* 1 *aż do* m, *jest zawsze podzielnym przez wieloczyn* 1.2.3.... n, *oraz przez wieloczyn* 1.2.3.... $(m-n)$, *i przez wieloczyn z tych dwóch wieloczynów.*

Możnaby było zauważyć podobnież, pod piérwszym kształtem K_n^m, że wieloczyn $m(m=1)\,(m-2)\dots.(m-n+1)$ jest zawsze podzielnym przez wieloczyn 1.2.3....n; albo że *wieloczyn z* n *liczb całkowitych po sobie następujących jest zawsze podzielnym przez wieloczyn z* n *liczb początkowych.*

Uwaga II. Wynika także z formy którą nadaliśmy wartości K_n^m że *liczba kombinacyj z* m *przedmiotów wziętych po* n, *jest równą liczbie kombinacyj z tychże samych przedmiotów wziętych po* m — n.

W rzeczy saméj, wzór powyższy jest ogólnym, można więc dać dla n wartość jakąkolwiek byleby mniejszą jak m; dajmy mu wartość $m-n$, to jest przemieńmy n na $m-n$; wyniknie ztąd że $m-n$ przemieni się na $m-(m-n)$ albo na n. Znajdziemy więc

$$K_{m-n}^m = \frac{1.2.3.4.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots m}{1.2.3.\dots.(m-n) \times 1.2.3\dots\, n}.$$

Przeto $$K_n^m = K_{m-n}^m,$$

co było do dowodzenia.

Możnaby było dostrzedz tę własność wprost. Gdyż, jeżeli weźmiemy n liter, na przykład, z większéj ich liczby m, pozostanie ich $m-n$; dla każdéj kombinacyi z n odpowiada jedna kombinacya z $m-n$ liter, i *vice versa*. A jeżeli kombinacye z liter wziętych po n są wszystkie różne, będzie toż samo miało miejsce z kombinacyami z liter wziętych po $m - n$, i *odwrotnie*. Więc te kombinacye są w téjże saméj liczbie.

480. Zagadnienie I. *Pomiędzy kombinacyami z dwunastu liter*, a, b, c,..., *i t. d., wziętemi po* PIĘĆ, *ile znajduje się takich które zawierają zarazem* TRZY *litery oznaczone* a, b, c?

Na rozwiązanie tego zagadnienia, wystawmy sobie że chcemy utworzyć kombinacye z liter wziętych po *pięć* które zawierają zarazem a, b i c. Rozpoczniemy od napisania tych 3 liter; a za temi trzema literami, potrzeba będzie napisać *dwie* inne, wzięte pomiędzy $12 - 3$ albo dziewięcioma literami pozostałémi. Liczbą szukaną jest więc liczba kombinacyj z 9 liter wziętych *po dwie*; to jest

$$\frac{9.8}{1.2} \quad \text{albo} \quad 36.$$

Gdyby żądano wiedzieć ogólnie : *ile, pomiędzy kombinacyami z* m *liter wziętych po* n, *jest takich które zawiérają zarazem* p *liter oznaczonych?* zauważyłoby się podobnież że, dla otrzymania kombinacyj żądanych, należałoby naprzód napisać p liter wchodzących do wszystkich tych kombinacyj, potém dopełnić liczbę n liter w każdéj kombinacyi, biorąc $n - p$ liter spełniających pomiędzy $m - p$ literami jeszcze nie napisanémi. Liczbą szukaną byłaby więc liczba kombinacyj z $m - p$ liter wziętych po $n - p$, to jest

$$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\ldots\ldots[m-p-(n-p)+1]}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \quad \ldots\ldots \quad (n-p)},$$

albo $$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \quad \ldots\ldots \quad (n-p)}.$$

Zagadnienie II. *Pomiędzy kombinacyami z dwunastu liter* a, b, c,..., *i t. d., wziętych po* PIĘĆ, *ile jest takich które nie zawiérają ni* a, *ni* b, *ni* c?

Jeżeli się odłoży na stronę 3 litery a, b, c które nie powinny wchodzić do kombinacyj żądanych, pozostanie ich $12 - 3$ albo 9;

liczbą szukaną jest więc liczba kombinacyj z dziewięciu liter wziętych po *pięć*, to jest

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} \text{ albo } 126.$$

Gdybyśmy chcieli wiedzieć ogólnie : *ile, pomiędzy kombinacyami z* m *liter wziętych po* n, *jest takich które nie zawiérają żadnéj z* p *liter oznaczonych* a, b, c, *i t. d.*, zauważyłoby się podobnież że odłożywszy na stronę te p liter które nie powinny wchodzić do kombinacyj żądanych, pozostałoby ich $m-p$. Liczbą szukaną byłaby więc liczba kombinacyj z $m-p$ liter wziętych po n, to jest

$$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-4)\ldots\ldots(m-p-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n}.$$

Zagadnienie III. *Pomiędzy kombinacyami z dwunastu liter* a, b, c,..., *i t. d., wziętych po* pięć, *ile jest takich które zawiérają przynajmniéj jedną z 3 liter* a, b, c?

Gdy się znajdzie liczbę wszystkich kombinacyj złożonych z liter wziętych po *pięć*, potém liczbę tych kombinacyj które nie zawiérają ni a, ni b, ni c, różnicą tych dwóch liczb będzie liczba kombinacyj do których wchodzi koniecznie jedna przynajmniéj z 3 liter a, b, c. Otóż, liczbą wszystkich kombinacyj z dwunastu liter wziętych po *pięć* jest

$$\frac{12.11.10.9.8}{1.\ 2.\ 3.4.5} \text{ albo } 792.$$

Dopiéro co otrzymaliśmy że liczbą tych kombinacyj do których nie wchodzą ni a, ni b, ni c jest 126; różnica 792 — 126, albo 666 będzie więc liczbą szukaną.

Gdybyśmy chcieli dowiedzieć się ogólnie : *ile, pomiędzy kombinacyami z* m *liter wziętych po* n, *jest takich które zawiérają przynajmniéj jedną z* p *liter oznaczonych* a, b, c, *i t. d.*, zauważalibyśmy podobnież że liczbą szukaną jest różnica między liczbą wszystkich kombinacyj z m liter wziętych po n, a liczbą tych kombinacyj nie zawiérających żadnéj z p liter oznaczonych; liczba która została świeżo wyrażoną. Liczbą szukaną byłaby więc

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n}$$

$$-\frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-n+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ n}.$$

PRZEMIANY Z POWTÓRZENIEM.

481. *Liczba przemian którą można wykonać na przedmiotach różnych* a, b, c,..... l, *biorąc każdy z nich liczbę razy odpowiednio równą* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, *jest daną przez formułę*

$$(1)\qquad \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}$$

w które

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

W rzeczy saméj, m przedmiotów różnych

$$a_1, a_2, \ldots a_\alpha, b_1, b_2, \ldots b_\beta, \ldots, l_1, l_2, \ldots l_\lambda$$

dałyby miejsce do $m!$ przemian. Wystawmy sobie te przemiany uporządkowane w grupy takie, że w każdéj z nich, dla przejścia z jednéj przemiany do drugiéj, wystarczy przemienić między sobą przedmioty $a_1\, a_2 \ldots a_\alpha$; każda grupa będzie zawiérała $\alpha!$ przemian, które się sprowadzą do jednéj kiedy α przedmiotów $a_1\, a_2 \ldots a_\alpha$ staną się równémi a; liczba wszystkich przemian sprowadzi się wtedy do liczby grup poprzedzających, to jest do $\frac{m!}{\alpha!}$. Zobaczymy tak samo że, kiedy przedmioty $b_1\, b_2 \ldots b_\beta$ będą zastąpionémi przez b, liczba przemian musi być podzieloną przez $\beta!$ i tak daléj. Tak że formułą ostateczną jest właśnie formuła (1).

Na przykład, jeżeli mamy *cztéry* litery *a* i *pięć* liter *b*, z témi *dziewięcioma* literami można utworzyć liczbę przemian oznaczoną przez

$$\frac{P_9}{P_4.P_5} = \frac{9\,!}{4\,!\,5\,!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4 \times 1.2.3.4.5} = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}$$

albo
$$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126.$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

482. W grach hazardownych, forma gry oznacza pewną liczbę kombinacyj mogących się wszystkie urzeczywistnić zarówno i dających się rozdzielić na dwie kategorye : te które są korzystne dla gracza i te które stanowią jego stratę. Głównym interesem gracza jest przedewszystkiem wiedzieć, nie o liczbie bezwzględnéj przypadków mu przychylnych lub przeciwnych, lecz jedynie o *stosunku liczby przypadków szczęśliwych do liczby całéj wszystkich przypadków*. Ten stosunek przyjął nazwisko *prawdopodobieństwa*.

Oto kilka przykładów :

Urna zawiéra 50 kulek między któremi jest 30 białych a 20 czarnych; gracz zakładający się o wyciągnięcie jednéj kulki białéj ma prawdopodobieństwo wygrania równe $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$, a prawdopodobieństwo jego przeciwnika jest $\frac{2}{5}$.

Z gry kompletnéj 52 kart wyciąga się 13 kart tegoż samego koloru, układając je na los szczęścia. Jakie jest prawdopodobieństwo sprowadzenia w dwóch piérwszych kartach króla i damy? Liczbą rozporządzeń możebnych z 13 kart jest 1.2.3....13, a po ustaleniu króla i damy na piérwszém i na drugiém miejscu, pozostaje tylko 11 kart które można rozporządzić 1.2.3....11 sposobami; podobieństwo szukane jest więc

$$\frac{1.2.3...11}{1.2.3...10.11.12.13} = \frac{1}{12.13} = \frac{1}{156}.$$

Takiemi są zadania które dały miejsce do teoryi kombinacyj; ta teorya, któréj znajdują się piérwsze ślady w *logistyce* (arytmetyka ogólna) Jana Butteo (1559), należy się właściwie mówiąc pracóm Paskala, Fermat'a, Leibnitz'a, Bernoulli'ego.

ĆWICZENIA.

I. Pewien gracz bierze 12 kart z 32; ilu sposobami będzie mogło się zdarzyć: 1° aby ten gracz miał 4 asy; 2° aby nie miał żadnéj figury; 3° aby miał przynajmniéj jedną żołądź?

Stosując formuły numeru 480 znajduje się następujące odpowiedzi: 1° 3108105 sposobami; 2° 125970 sposobami; 3° 223088684 sposobami.

II. Daje się nazwisko *kombinacyj zupełnych* tym w których każda litera może być połączoną z niąż samą i ze wszystkiemi. Dowieść że liczba kombinacyj zupełnych z m liter wziętych po n jest równą liczbie kombinacyj bez powtórzenia z $m+n-1$ liter wziętych po n. 2° Liczba *waryacyj zupełnych* z m liter wziętych po n jest m^n.

III. Oznaczywszy przez P_n liczbę sposobów rozłożenia wielokąta na trójkąty przez przekątne, mamy

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n = P_n + P_{n-1} P_3 + P_{n-2} P_4 + \dots + P_3 P_{n-1} + P_n.$$

IV. Łączy się po dwa, przez linie proste, n punktów takich, że trzy jakiekolwiek z pomiędzy nich nie są w linii prostéj. Jaką jest liczba przecięć poprowadzonych linij?

Znajduje się $\quad \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3).$

V. n osób są ustawione w koło; każda z nich posiada pewną summę z któréj jest obowiązaną wręczyć cząstkę oznaczoną swemu sąsiadowi na prawo każda więc odbierze pewną summę do lewéj ręki a wręczy inną z ręki prawéj. Chcemy oznaczyć jakie powinny być stosunki fortun pierwotnych aby po wymianie osoby były zarówno bogate.

ROZDZIAŁ XXV

DWUMIAN NEWTONA.

WIELOCZYN Z ILUKOLWIEK DWUMIANÓW MAJĄCYCH TENŻE SAM PIÉRWSZY WYRAZ.

483. Twierdzenie. *Wieloczyn z* m *wielomianów jest summą algebraiczną wszystkich wieloczynów z* m *czynników utworzonych z jednego wyrazu piérwszego wielomianu, jednego wyrazu drugiego,....., i jednego wyrazu ostatniego.*

Jużeśmy raz to twierdzenie dostatecznie uzasadnili (28), teraz udowodnimy je na nowo innym sposobem.

Drugie dowodzenie. Twierdzenie to zostało już dowiedzioném w przypadku dwóch czynników (27); dosyć przeto okazać że kiedy to twierdzenie jest prawdziwem dla wieloczynu P złożonego z n wielomianów, jest także prawdziwém dla wieloczynu złożonego z $n+1$ wielomianów.

Otóż wynika z równości

$$P(a+b+c+\ldots.+k+l)=Pa+Pb+Pc+\ldots..+Pk+Pl,$$

i ze składu wieloczynu P :

1° Że wszystkie wyrazy nowego wieloczynu zamykają w sobie $n+1$ czynników, do których składu wchodzą : jeden wyraz piérwszego wielomianu, jeden wyraz drugiego,..., i jeden wyraz ostatniego;

2° Że wszystkie te wyrazy są różne, ponieważ dwa jakiekolwiek z pomiędzy nich różnią się między sobą, bądź to ostatnim czynnikiem, bądź to wyrazem pochodzącym z wieloczynu P;

3° Że wszystkie możliwe wieloczyny z $n+1$ czynników zostały otrzymane; gdyż umieściliśmy kolejno każdy z wyrazów ostatniego wielomianu po prawéj stronie wszystkich wieloczynów z n czynników utworzonych, biorąc jeden wyraz w każdym z n pierwotnie danych wielomianów.

484. Zastosujmy to twierdzenie do wieloczynu z m dwumianów

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$$

uporządkowanego według potęg ubywających litery x.

Wieloczyn z tych m czynników dwumianowych jest summą wieloczynów otrzymanych biorąc wszelkiémi sposobami możebnémi jeden wyraz w każdym z nich. Jeżeli weźmiemy piérwsze wyrazy m dwumianów, otrzymamy piérwszy wyraz x^m wieloczynu. Jeżeli weźmiemy drugi wyraz a w piérwszym czynniku dwumianu, i piérwszy wyraz x we wszystkich innych, otrzymamy wieloczyn ax^{m-1} który jest stopnia $m-1$; biorąc tak samo drugi wyraz b w drugim czynniku dwumianowym, a piérwszy wyraz x we wszystkich innych, znajdziemy bx^{m-1}; jedném słowem, drugi wyraz jakiegokolwiek z czynników dwumianowych, połączony z piérwszémi wyrazami wszystkich innych, daje na wieloczyn wyraz zawierający x^{m-1}. Zebrawszy wszystkie te wyrazy stopnia $m-1$, widzimy że x^{m-1} ma za mnożnik summę z m ilości $a, b, c,\ldots, l$, summę którą w skróceniu oznaczymy przez S_1. Tak więc drugim wyrazem wieloczynu jest S_1x^{m-1}.

Weźmiemy teraz drugie wyrazy w dwóch jakichkolwiek czynnikach dwumianowych, a piérwsze we wszystkich innych, utworzymy wyrazy stopnia $m-2$, takie jak abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}, i t. d. Zebrawszy wszystkie te wyrazy, widzimy że x^{m-2}, położone na czynnik spólny, będzie rozmnożone przez summę kombinacyj z m liter $a, b,\ldots. l$ po *dwie* branych. Oznaczmy przez S_2 summę tych kombinacyj; trzecim wyrazem wieloczynu będzie S_2x^{m-2}.

Biorąc także drugie wyrazy w trzech jakichkolwiek czynnikach dwumianowych a piérwsze we wszystkich innych, utworzymy wyrazy stopnia $m-3$, takie jak $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, i t. d. Zbierając te wyrazy w jeden, i nazywając S_3 summę kombinacyj z liter $a, b, \ldots l$ branych po *trzy*, otrzymamy czwarty wyraz $S_3 x^{m-3}$ wieloczynu.

Ogólnie, biorąc drugie wyrazy w n jakichkolwiek czynnikach dwumianowych a piérwsze w $m-n$ innych, utworzymy wyrazy stopnia $m-n$; zebrawszy te wyrazy i przedstawiwszy przez S_n summę kombinacyj z m liter $a, b, \ldots\ldots, l$ po n branych, znajdziemy wyraz ogólny wieloczynu : $S_n x^{m-n}$.

Otrzymamy wyrazy piérwszego stopnia biorąc drugie wyrazy we wszystkich czynnikach dwumianowych, wyjąwszy w jednym, a piérwszy w tym ostatnim; te wyrazy zebrane dają przedostatni wyraz wieloczynu $S_{m-1}x$. Nakoniec wieloczyn $abc \ldots l$ drugich wyrazów we wszystkich czynnikach dwumianowych, wieloczyn który oznaczymy przez S_m, daje ostatni wyraz wieloczynu szukanego.

Tak więc wieloczyn z m czynników dwumianowych rozwija się w sposób następujący :

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} \ldots + S_n x^{m-n} \ldots + S_{m-1} x + S_m.$$

A zatém wieloczyn z m dwumianów jest

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$$

$$= x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_n x^{m-n} + \ldots + S_{m-1} x + S_m.$$

DWUMIAN NEWTONA.

485. Gdy uczynimy $a = b = c = \ldots = l$ w równości poprzedzającéj, piérwszy członek staje się

$$(x+a)^m.$$

W drugim członku, każdy wyraz summy S_1 sprowadza się do a, a tém samém, S_1 jest równém ma. Każdy wyraz summy S_2 sprowadza się do a^2; zatém S_2 równa się a^2 wziętemu tyle razy, ile może powstawać różnych wieloczynów z m ilości branych po dwie, to jest

$$\frac{m(m-1)}{1.2} a^2.$$

Podobnież, każdy wyraz summy S_3 sprowadza się do a^3; zatém S_3 równa się a^3 powtórzonemu tyle razy ile można otrzymać różnych wieloczynów z m ilości branych po trzy, to jest

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3.$$

W ogólności, każdy wyraz summy S_n równa się a^n rozmnożonemu przez liczbę pokazującą ile wypada różnych wieloczynów z m ilości branych po n, to jest

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n} a^n.$$

Nakoniec, ostatni wyraz, albo wieloczyn z m ilości równych $a, b, \ldots l$, sprowadza się do a^m.

Tym sposobem postępując znajdujemy wzór

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3x^{m-3} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} a^nx^{m-n} + \ldots + \frac{m}{1} a^{m-1}x + a^m,$$

znany w algebrze pod nazwiskiem *dwumianu Newtona* (binomium Neutoni). Jest on niezmiernie rozległego w całéj matematyce niższéj użycia; służy bowiem do utworzenia rozwinięcia potęgi jakiéjkolwiek dwumianu.

Zmiana a na $-a$ nie zmienia wyrazów położonych na miejscach nieparzystych jako zawiérających potęgi parzyste ilości a; daje znak — dla wyrazów zajmujących miejsca parzyste; mamy więc

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \dots \pm a^m.$$

486. Uwaga. We wzorze dwumianu, wykładniki ilości x idą zmniejszając się stopniami o jedność, wykładniki zaś ilości a idą przeciwnie powiększając się o jedność; summa wykładników obu ilości a i x w każdym wyrazie jest stale równą m.

Liczbą wyrazów rozwinięcia jest zawsze $m+1$; gdyż wykładniki ilości x tworzą szereg z m początkowych liczb całkowitych, powiększony wykładnikiem *zero* ostatniego wyrazu,

$$m, \quad m-1, \quad m-2, \dots\dots, \quad 1, \quad 0,$$

czyli, razem wziąwszy $m+1$ wyrazów.

487. *W rozwinięciu* $(x+a)^m$ *wyrazy równooddalone od skrajnych mają spółczynniki równe.*

W rzeczy samej, spółczynnik wyrazu a^nx^{m-n}, mającego przed sobą n wyrazów, jest liczbą K_n^m różnych wieloczynów z m liter wziętych po n; spółczynnik wyrazu $a^{m-n}x^n$ mającego po sobie n wyrazów, to jest spółczynnik wyrazu który ma ich przed sobą $m-n$, jest liczbą K_{m-n}^m różnych wieloczynów z m liter wziętych po $m-n$; otóż wiemy że te dwie liczby K_n^m i K_{m-n}^m są sobie równe.

Można jeszcze powiedzieć że $(x+a)^m$ jest symetryczném względem ilości x i a, więc toż samo powinno się rozumieć o jego rozwinięciu; bytność wyrazu ka^nx^{m-n} pociąga więc za sobą exystencyą wyrazu symetrycznego $ka^{m-n}x^n$; otóż te dwa wyrazy, mające tenże sam spółczynnik, są równooddalonémi od skrajnych; jeden z nich ma n wyrazów znajdujących się przed nim a drugi n wyrazów następujących po nim.

488. *Dla przejścia z jakiegokolwiek wyrazu do tuż po nim następującego w rozwinięciu* (x + a)^m, *należy dodać* 1 *do wykładnika ilości* a, *zmniejszyć wykładnik ilości* x *o jedność, rozmnożyć dawny spółczynnik przez dawny wykładnik ilości* x *i rozdzielić przez nowy wykładnik ilości* a.

W rzeczy saméj, wyraz zajmujący miejsce $n+1$ ma na swe wyrażenie

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1.2....n}a^n x^{m-n},$$

zkąd, zmieniając n na $n-1$,

$$T_n=\frac{m(m-1)...(m-n+2)}{1.2...(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1},$$

i dzieląc stronami,

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{m-n+1}{n}\ \frac{a}{x}.$$

To twierdzenie jest bardzo użyteczném w praktyce, kiedy idzie o rozwinięcie potęgi szczególnéj dwumianu danego.

PRZYKŁADY.

Należy wprawiać się w rozwijanie prędkie potęg dwumianu. Prawidło świeżo wskazane przyczyni się wiele do ułatwienia rachunku.

1° $$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4$$
$$+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

Dla przejścia z drugiego wyrazu do trzeciego, należy mnożyć drugi przez 6 i dzielić przez 2, czyli, co na jedno wyjdzie pomnożyć przez 3. Dla przejścia z trzeciego wyrazu do czwartego, należy mnożyć czwarty przez 5 i dzielić przez 3; podzieli się naprzód 21 przez 3, co daje 7, potém pomnoży się ten wypadek przez 5, co daje 35. Rozwinięcie zawiéra $7+1$ albo 8 wyrazów, a że wyrazy równooddalone od skrajnych są równe, przeto po znalezieniu cztérech piérwszych, napisze się cztéry inne bezpośrednio.

2° $$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5$$
$$+ 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x\, a^8.$$

Rozwinięcie zawiéra 9 wyrazów; jest więc potrzebném obrachowanie pięciu piérwszych; przyszedłszy do wyrazu $70a^4x^4$, uważa się że spółczynniki już otrzymane na nowo występują.

3° $$(x-a)^{11} = x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8$$
$$+ 330a^4x^7 - 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a^8x^3$$
$$- 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}.$$

Liczba wyrazów jest parzysta, ostatni wyraz ma znak —, a wyrazy mające tenże sam spółczynnik przybiérają znaki przeciwne.

4° $$(x-a)^{12} = x^{12} - 12ax^{11} + 66a^2x^{10} - 220a^3x^9$$
$$495a^4x^8 - 792a^5x^7 + 924a^6x^6 - 792a^7x^5 + 495a^8x^4$$
$$- 220a^9x^3 + 66a^{10}x^2 - 12a^{11}x + a^{12}.$$

Rozwinięcie zawiéra liczbę nieparzystą wyrazów, więc ostatni ma znak +, a wyrazy mające tenże sam spółczynnik są oznaczone tymże samym znakiem.

5° $$\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^7 = \frac{x^7}{128} + \frac{7x^6y}{32} + \frac{21x^5y^2}{8} + \frac{35x^4y^3}{2}$$
$$+ 70x^3y^4 + 168x^2y^5 + 224xy^6 + 128y^7.$$

489. Spółczynniki idą wzrastając dopóki mamy

$$\frac{m-n+1}{n} > 1, \quad \text{albo} \quad n < \frac{m+1}{2}.$$

Kiedy m jest parzystém, liczba $m+1$ wyrazów jest nieparzystą, i znajduje się w środku jeden spółczynnik większy jak wszystkie inne. Gdy m jest nieparzystém znajdują się w środku dwa spółczynniki równe między sobą i przewyższające wszystkie inne. To też, dla otrzymania największéj liczby różnych wieloczynów z 12 przedmiotów, należy połączyć je po 6; gdyby było daném 11 przedmiotów; należałoby połączyć je po 5, albo po 6.

TRÓJKĄT ARYTMETYCZNY PASKALA.

490. Nieco przed *Newtonem*, *Paskal* podał, w konstrukcyi swego trójkąta równoważnik (équivalent) wzoru dwumianu, lecz nie wyraził go sposobem algebraicznym.

Nazywa się *trójkątem arytmetycznym* tablica następująca, któréj piérwsza linia pozioma zawiéra spółczynniki $(x+a)^1$, druga spółczynniki $(x+a)^2, \ldots, m^{ta}$ spółczynniki $(x+a)^m$:

1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	K_1^m	K_2^m	K_3^m	K_4^m	…	…	…	…	…

Nie zważając na kolumnę jedności, widzimy że liczba położona na przecięciu $m^{téj}$ linii z $n^{tą}$ kolumną jest K_n^m. Tosamość

$$K_n^m = K_n^{m-1} + K_{n-1}^{m-1},$$

która łatwo da się sprawdzić, i która już uprzednio została dowiedzioną (394), okazuje że *każdy wyraz trójkąta arytmetycznego jest summą liczby położonéj nad tym wyrazem i liczby położonéj po lewéj stronie téj ostatniéj*. Ta własność służy do utworzenia trójkąta; tak więc, aby wyprowadzić piątą linią z czwartéj, mówi się:

$$1+0=1, \quad 4+1=5, \quad 6+4=10, \quad 4+6=10, \quad 1+4=5,$$

dopisując wreszcie *jedność*, zamykamy piątą linią.

Wyrazy piérwszéj kolumny (zawsze niezważając na kolumnę jedności) nazwano *liczbami figurycznémi piérwszego rzędu*, wyrazy drugiéj, *liczbami figurycznémi drugiego rzędu*,..., wyrazy n$^{t\acute{e}j}$, *liczbami figurycznemi* n^{tego} *rzędu*. Własność poprzedzająca wysławia się wtedy p^{enta} *liczba figuryczna rzędu* q+1 *jest summą* (p — 1)$^{t\acute{e}j}$ *figury tegoż samego rzędu i* p$^{t\acute{e}j}$ *figury rzędu* q; co się może napisać

$$F_p^{q+1} = F_{p-1}^{q+1} + F_p^q.$$

Zmieniając kolejno p na $p-1$, $p-2$,... 2, mamy

$$F_{p-1}^{q+1} = F_{p-2}^{q+1} + F_{p-1}^q,$$

$$F_{p-2}^{q+1} = F_{p-3}^{q+1} + F_{p-2}^q,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$F_2^{q+1} = F_1^{q+1} + F_2^q.$$

Dodając, i zastępując F_1^{q+1} przez F_1^q, gdyż wszystkie piérwsze liczby figuryczne rzędu jakiegokolwiek są równe *jedności* a tém samém równe między sobą, znajdziemy związek

$$F_p^{q+1} = F_p^q + F_{p-1}^q + F_{p-2}^q + \dots + F_2^q + F_1^q,$$

co wyraża że *summa* p *piérwszych liczb figurycznych rzędu* q *jest równą* p$^{ent\acute{e}j}$ *liczbie figurycznéj rzędu* q + 1. Na przykład, mamy

$$70 = 35 + 20 + 10 + 4 + 1.$$

p^{enta} liczba figuryczna rzędu $q+1$ jest na przecięciu $(q+1)^{entéj}$ kolumny z $(p+q)^{entą}$ linią; ma więc na swą wartość

$$K_{q+1}^{p+q} = \frac{p(p+1)\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p}.$$

491. SUMMA p POCZĄTKOWYCH LICZB CAŁKOWITYCH CIĄGU NATURALNEGO. Jest to p^{enta} liczba figuryczna rzędu 2, $\frac{p(p+1)}{2}$; ta liczba jest liczbą kul $p^{entéj}$ warstwy stosu kul trójkątnego. Widzimy że stos kul z n warstw złożony zawiéra liczbę kul równą summie z n piérwszych liczb figurycznych drugiego rzędu, to jest $n^{téj}$ liczbie figurycznéj trzeciego rzędu $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$. To też daje się często liczbóm figurycznym trzeciego rzędu nazwisko *liczb piramidalno-trójkątnych*.

SUMMA KWADRATÓW Z p POCZĄTKOWYCH LICZB CAŁKOWITYCH. — Tosamość

$$k^2 = k + (k-1)k = k + 2\,\frac{(k-1)k}{1.2},$$

okazuje że k^2 jest równém k więcéj dwa razy $(k-1)^{entą}$ liczbę figuryczną drugiego rzędu. Ilość $1^2+2^2+3^2+\ldots+p^2$ otrzyma się więc dodając do summy p początkowych liczb naturalnych, podwójną summę $(p-1)^{entych}$ liczb figurycznych rzędu 2, to jest dwójnasób $(p-1)^{entéj}$ liczby figurycznéj rzędu 3; znajdziemy tym sposobem

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+p^2$$

$$= \frac{p(p+1)}{1.2} + 2\,\frac{(p-1)p(p+1)}{1.2.3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

SUMMA SZEŚCIANÓW Z p POCZĄTKOWYCH LICZB CAŁKOWITYCH. — Tosamość

$$k^3 = k + k(k^2-1) = k + 6\,\frac{(k-1)k(k+1)}{1.2.3}.$$

okazuje że k^3 jest równém k więcéj sześć razy $(k-1)^{\text{entą}}$ liczbę figuryczną trzeciego rzędu.

Ilość $1^3+2^3+3^3\ldots+p^3$ otrzyma się więc dodając do summy p początkowych liczb naturalnych, sześć razy $(p-1)^{\text{entą}}$ liczbę figuryczną rzędu 4; otrzymuje się tym sposobem

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+p^3$$

$$=\frac{p(p+1)}{1.2}+6\,\frac{(p-1)p(p+1)(p+2)}{1.2.3.4}=\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2.$$

ROZWINIĘCIE $(a\pm b\sqrt{-1})^m$.

492. Jeżeli we wzorze

$$(a+b)^m=a^m+mba^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}b^2a^{m-2}+\ldots$$

zastąpimy b przez $b\sqrt{-1}$, wyrazy w których wykładnik b jest parzystym zachowują tęż samą wartość bezwzględną i będą na przemiany dodatnémi i odjemnémi; wyrazy zawiérające potęgi nieparzyste ilości b będą mnożonémi na przemiany przez $+\sqrt{-1}$ i $-\sqrt{-1}$; mamy więc

$$(a+b\sqrt{-1})^m=a^m-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4-\ldots$$

$$+\sqrt{-1}\left[ma^{m-1}b-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\ldots\right]=\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1},$$

a zamieniając b na $-b$,

$$(a-b\sqrt{-1})^m=a^m-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4-\ldots$$

$$-\sqrt{-1}\left[ma^{m-1}b-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\ldots\right]=\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1}.$$

POTĘGI WIELOMIANÓW.

493. Twierdzenie numeru 483 okazuje że rozwinięcie

$$(a+b+c+\ldots+l)^m$$

jest ciągiem wyrazów kształtu

$$ka^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda,$$

w których wykładniki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ mają zawsze summę równą m, spółczynniki są liczbą przemian

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda},$$

które można wykonać na literach $a, b, c, \ldots, l$, biorąc α razy piérwszą, β razy drugą, ..., λ razy ostatnią.

Wyrazem ogólnym $(a+b+c+\ldots+l)^m$ jest więc

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

z warunkiem

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=m;$$

wyraz ten pisze się sposobem symbolicznym

$$(a+b+c+\ldots+l)^m = \Sigma \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda.$$

W zastosowaniu tego wzoru, wieloczyny

$$\alpha!,\quad \beta!,\ldots\quad \lambda!$$

powinny być zastąpione przez jedność kiedy się robi

$$\alpha=0,\quad \text{albo}\quad \beta=0,\ldots,\quad \text{albo}\quad \lambda=0.$$

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW Z WIELOMIANÓW.

494. Załóżmy sobie wyciągnąć pierwiastek m^{ty} z wielomianu

$$P = Ax^p + A_1x^{p-1} + ... + A_nx^{p-n} + ... + A_p.$$

Przedstawmy ten pierwiastek przez

$$R = Bx^r + B_1x^{r-1} + ... B_nx^{r-n} + ... + B_r;$$

musi być jednako (tak samo)

$$\begin{cases} Ax^p + A_1x^{p-1} + ... + A_nx^{p-n} + ... A_p \\ = (Bx^r + B_1x^{r-1} + ... + B_nx^{r-n} + ... + B_r)^m. \end{cases}$$

Co wymaga: naprzód, aby dwa członki były tegoż samego stopnia; potém, aby też same potęgi ilości x miały też same spółczynniki.

Piérwszy warunek

$$p = mr$$

dowodzi, że zagadnienie jest niepodobném, jeżeli $\frac{p}{m}$ nie jest całkowitém. Przypuśćmy ten warunek spełniony, liczba całkowita do któréj się sprowadza $\frac{p}{m}$ wyraża stopień r pierwiastku którego potrzeba oznaczyć $r+1$ spółczynników. W tym celu podnosi się wielomian R do potęgi m, co daje nowy wielomian stopnia $mr = p$, i wyraża się że spółczynniki tego nowego wielomianu są równe spółczynnikóm odpowiednim w danym wielomianie P; otrzymuje się tym sposobem $p+1$ zrównań, z których $r+1$ piérwsze posłużą do oznaczenia kolejno $B, B_1, \ldots, B_r$; następujące są *zrównaniami warunkowemi*, którym muszą zadosyć czynić wartości znalezione dla $B, B_1, \ldots, B_r$ aby zagadnienie było możebném.

Zastanówmy się nad kształtem $p+1$ zrównań wiążących spółczynniki wielomianu danego ze spółczynnikami pierwiastku. Widzimy łatwo że ze wszystkich wyrazów rozwinięcia

$$(Bx^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_nx^{r-n} + \ldots + B_r)^m$$

zawiérających B_n^q, ten który przybiéra najwyższy stopień w x jest

$$m(Bx^r)^{m-1} B_nx^{r-n} = mB_nB^{m-1}x^{mr-n}.$$

Wreszcie jest to jedyny wyraz stopnia $mr - n$ zawiérający B_n, Wynika ztąd :

1° *Że nieznana* B_n *nie znajduje się w żadném z* n *piérwszych zrównań;*

2° *Ze ta nieznana figuruje tylko w piérwszym stopniu i to dopiéro w* $(n + 1)^{\text{entém}}$ *zrównaniu.*

Tak więc, piérwsze zrównanie zamyka tylko nieznaną B, drugie daje B_1 przez zrównanie stopnia piérwszego, po zastąpieniu B przez jego wartość; po znalezieniu B i B_1, trzecie daje B_2, w którém ta nieznana znajduje się w piérwszém stopniu, i tak daléj. Nic więc łatwiejszego jak rachunek spółczynników pierwiastku.

Przykład. Szukajmy, za pomocą tego sposobu, pierwiastku sześciennego z wielomianu

$$8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27.$$

Aby ten wielomian mógł przyoblec kształt

$$(ax^2+bx+c)^3 = a^3x^6 + 3a^2bx^5 + \left.\begin{matrix}3ab^2\\+3a^2c\end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix}6abc\\+b^3\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}3ac^2\\+3b^2c\end{matrix}\right| x^2 + 3bc^2x + c^3$$

potrzeba żeby było

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} 8 &= a^3, \\ 12 &= 3a^2b, \\ -30 &= 3(ab^2 + a^2c); \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \begin{cases} -35 = b^3 + 6abc, \\ 45 = 3(ac^2 + b^2c), \\ 27 = 3bc^2 \\ -27 = c^3. \end{cases}$$

Związki (1) dają kolejno wartości

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -3,$$

sprowadzające związki (2) do tosamości. Pierwiastkiem szukanym jest więc

$$2x^2 + x - 3.$$

Używa się często zrównań warunkowych dla ustalenia wartości pewnych spółczynników nieoznaczonych wielomianu piérwotnego.

ĆWICZENIA.

I. W rozwinięciu $(x+a)^m$, summa spółczynników zajmujących miejsca parzyste jest równą summie spółczynników zajmujących miejsca nieparzyste, a summą wszystkich spółczynników jest 2^m.

II. Znaleźć summę wartości które przybiéra funkcya

$$x(x-1)(2x+1)$$

kiedy zmienna niezależna x staje się kolejno $1, 2, \ldots, n$.

III. Oznaczyć wartość za x sprawdzającą nierówność

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\cdots\left(1 - \frac{p}{x}\right) > 1 = \alpha,$$

gdzie p jest liczbą całkowitą daną a α ilością dodatną bardzo małą.

IV. Znaleźć summę z kwadratów spółczynników dwumianu.

V. Oznaczywszy przez A_p^n liczbę waryacyj z n liter po p wziętych, dowieźć że mamy

$$n^p = A_p^n + B_p A_{p-1}^n + C_p A_{p-2}^n + \dots + L_p A_2^n + n,$$

gdzie spółczynniki B_p, C_p,..., L_p wyciągają się ze związków

$$B_p = B_{p-1} + p - 1,$$

$$C_p = C_{p-1} + (p-2) B_{p-1},$$

$$D_p = D_{p-1} + (p-3) C_{p-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$L_p = 1 + 2K_{p-1}.$$

Wyprowadzić ztąd związek

$$S_p = \frac{1}{p+1} A_{p+1}^{n+1} + \frac{B_p}{p} A_p^{n+1} + \frac{C_p}{p-1} A_{p-1}^{n+1} + \dots$$

$$+ \frac{L_p}{3} A_3^{n+1} + \frac{1}{2} A_2^{n+1} + \dots$$

w którym S_p oznacza summę *pentych* potęg z n początkowych liczb całkowitych.

Zastosowania : $1^6 + 2^6 + \dots + 10^6 = 1978405.$

VI. Pomiędzy trzema ilościami jakiemikolwiek x, a, β a m liczbą całkowitą i dodatną, istnieje związek

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+\beta)^{m-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a(a-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n} + \dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ ma[a-(m-1)\beta]^{m-2}[x+(m-1)\beta] + a(a-m\beta)^{m-1}.$$

VII. Dowieźć że oznaczywszy przez x i y dwie ilości jakiekolwiek, a przez n liczbę całkowitą i dodatną, mamy jednako (tak samo)

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}$$

$$+\ldots+\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

ROZDZIAŁ XXVI

LOGARYTMY UWAŻANE JAKO WYKŁADNIKI.

ZMIANY FUNKCYI WYKŁADNICZEJ a^x.

495. Nowa teorya logarytmów, którą tu podać chcemy, opiéra się całkiem na własnościach funkcyi wykładniczéj a^x, gdzie a oznacza liczbę jakąkolwiek dodatną.

Lemma I. — *Wszystkie potęgi wymierne z jakiéjkolwiek liczby dodatnéj są dodatnémi.* To wynika z tego że uważamy same tylko wartości dodatne radykali (95).

Lemma II. — *Wszystkie potęgi dodatne z jakiéjkolwiek liczby dodatnéj są większe albo mniejsze jak jedność, w miarę tego jak ta liczba jest sama przez się wyższą lub niższą od 1. Rzecz przeciwna ma miejsce dla potęg odjemnych.*

W rzeczy saméj, niech będzie a liczba większa jak 1, a zaś $a^{\frac{m}{n}}$ jakakolwiek potęga dodatna téj liczby; mamy

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

otóż, ponieważ a przewyższa 1, taż sama własność powinna się utrzymać przy potędze całkowitéj a^m, a tém samém przy radykalu $\sqrt[n]{a^m}$. Jeżeli a jest mniejszém jak 1, można zawsze przedstawić je przez $\frac{1}{a'}$, gdzie a' jest liczbą przewyższającą 1, a związek $a^x = \frac{1}{a'^x}$ okazuje że a^x jest mniejszém od 1, ponieważ a'^x jest większém jak jedność.

Ostatnia część wysłowienia wynika ztąd że potęgi odjemne a^{-x} liczby jakiejkolwiek są równemi $\frac{1}{a^x}$, a więc odwrotnémi swych potęg dodatnych.

496. Twierdzenie I. *Kiedy zmienna niezależna* x *przybiéra wartości wymierne rosnące, funkcya* a^x *zmienia się zawsze w tymże samym kierunku; powiększa się ona lub zmniejsza, w miarę tego jak* a *jest większém lub mniejszém od jedności.*

W rzeczy saméj niech będą x_0 i x_0+h dwie wartości wymierne kolejno przypisywane dla x; znak ilości x_0 jest dowolnym, lecz h jest dodatném; wynika z lemmy poprzedzającéj, że iloraz $\frac{a^{x_0+h}}{a^{x_0}} = a^h$ jest większym lub mniejszym od 1, w miarę tego jak liczba a jest sama przez się większą lub mniejszą jak jedność.

497. Twierdzenie II. *Funkcya* a^x *zmienia się w sposób ciągły, kiedy* x *wzrasta sposobem ciągłym; innémi słowy, można dać dla zmiennéj niezależnéj* x *przyrost dosyć mały, aby funkcya* a^x *doznała zmiany mniejszéj jak wszelka ilość dana* ε.

Przypuśćmy naprzód $a > 1$, i niech będzie x_0 jakakolwiek wartość wymierna ilości zmiennéj x; mamy

$$a^{x_0-h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Oznaczmy przez $\frac{1}{n}$ ułamek z mianownikiem całkowitym większy jak h; twierdzenie będzie dowiedzioném, jeżeli okażemy że można zawsze wziąć n dosyć wielkiém aby zadosyć czyniło nierówności $a^{x_0}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon$ albo jéj równoważnéj $a < \left(1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)^n$. Otóż wiemy że potęgi całkowite liczby większéj od jedności mogą wyjść po za wszelką granicę daną (382 *bis*).

Jeżeli a jest mniejszém od 1, można zawsze przedstawić je przez $\frac{1}{a'}$, gdzie a' jest liczbą przewyższającą jedność, a wtedy równość $a^x = \frac{1}{a'^x}$ okazuje, że kiedy a'^x zmienia się w sposób ciągły, toż samo się dzieje z funkcyą a^x.

498. Wniosek. *Kiedy* x *wzrasta w sposób ciągły od* $-\infty$ *do* $+\infty$, *funkcya* a^x *przechodzi przez wszelkie wartości dodatne, i przybiéra raz tylko każdą z nich.*

Są dwa przypadki do rozróżnienia.

1° Przypuśćmy a wyższém nad jedność; $+a^x$, mające za swą wartość naprzód jeden dla $x=0$, staje się nieskończenie wielkiém dla $x=\infty$ (382 *bis*); więc, na mocy *ciągłości*, kiedy x wzrasta od 0 do $+\infty$, funkcya a^x przechodzi przez wszystkie liczby zawarte między 1 i $+\infty$. Dajmy teraz dla x wartości odjemne, i połóżmy, w tym celu

$$x=-x',$$

będziemy mieli

$$a^x=\frac{1}{a^{x'}};$$

kiedy x wzrasta od 0 do $+\infty$, $a^{x'}$ wzrasta w sposób ciągły od 1 do $+\infty$, tak że a^x zmniejsza się od 1 do 0. Tak więc, streściwszy się, kiedy x wzrasta sposobem ciągłym od $-\infty$ do $+\infty$, funkcya a^x przejdzie przez wszystkie liczby zawarte między 0 i $+\infty$; wreszcie, gdy ta funkcya postępuje ciągle wzrastając, nabywa ona raz tylko każdą z wartości dodatnych.

2° Jeżeli a jest mniejszém jak jedność, połóżmy

$$a=\frac{1}{a'},$$

tak że a' jest wyższém nad 1, co daje

$$a^x=\frac{1}{a'^x}.$$

Widzimy że kiedy x rośnie od 0 do $+\infty$, a'^x wzrasta od 1 do $+\infty$, a^x zaś ubywa od 1 do 0; kiedy znowu x zmniejsza się od 0 do $-\infty$, a'^x ubywa od 1 do 0, a^x zaś wzrasta od 1 do $+\infty$.

Tak więc, kiedy x wzrasta w sposób ciągły od $-\infty$ do $+\infty$, i gdy zarazem a nie przestaje być mniejszém od jedności, funkcya a^x ubywa sposobem ciągłym od $+\infty$ do 0. Funkcya a^x przejdzie jeszcze przez wszystkie wartości dodatne przechodząc raz tylko przez każdą z nich.

DEFINICYA FUNKCYI a^x, KIEDY x JEST NIEWYMIERNÉM.

499. Uwagi poprzedzające dozwolą określić funkcyą a^x kiedy x jest niewymiernėm. Weźmy, dla łatwiejszego zrozumienia, $a^{\sqrt{7}}$, i przypomnijmy, w kilku słowach definicyą liczby niewymiernéj $\sqrt{7}$.

Arytmetyka daje sposób otrzymania największéj liczby dziesiętnych, setnych, i t. d., *których* kwadrat jest zawartym w liczbie całkowitéj danéj. Znajduje się tak postępując, za pomocą sposobów znanych (*), że liczba 7 przewyższa kwadraty z liczb

$$(1) \qquad 2 \quad 2,6 \quad 2,64 \quad 2,645 \quad 2,6457\ldots$$

a jest niższą od kwadratów z liczb

$$(2) \qquad 3 \quad 2,7 \quad 2,65 \quad 2,646 \quad 2,6458\ldots$$

Różnica pomiędzy jedną z liczb ciągu (1) a odpowiednią jéj liczbą z ciągu (2) może stać się mniejszą jak wszelka ilość oznaczona, i toż samo się zastosuje do różnicy z kwadratów tych liczb. Kwadraty z liczb ciągu (1) i kwadraty z liczb ciągu (2), przybliżają się więc nieograniczenie do liczby 7 która jest, dla tych dwóch szeregów kwadratów, granicą spólną. Ciągi (1) i (2) mają same przez się granicę spólną, a tą granicą jest to co się właśnie nazywa *pierwiastkiem kwadratowym* z 7. Liczby tworzące ciągi (1) i (2) są wartościami przybliżonémi z $\sqrt{7}$, na mniéj niż *jedność*, na mniéj niż *jedną dziesiętną*, i t. d., przez *niedomiar* albo przez *nadmiar*.

Teraz, jeżeli w funkcyi a^x zastąpimy x przez wartości przybli-

(*) SERRET, *Początki arytmetyki*, rozdział XIII.

żone z $\sqrt{7}$, otrzymamy dwa szeregi liczb które będą się przybliżały coraz bardziéj, i które będą miały granicę spólną; gdyż dwie jakiekolwiek z pomiędzy nich, odpowiedaiące dwóm wartościóm z $\sqrt{7}$ przybliżonym na mniéj niż $\frac{1}{10^n}$, będą się różniły między sobą o tak mało jak tylko zechcemy (497), ponieważ różnica $\frac{1}{10^n}$ ich wykładników będzie się zmniejszała do woli w miarę tego jak będzie rosło n. Tą granicą spólną jest wyraźnie wartość z $a^{\sqrt{7}}$.

Można okazać bardzo jasno że ta definicya wskazuje dla $a^{\sqrt{7}}$ wartość *jedyną* i *oznaczoną*. Przypuśćmy, w rzeczy saméj, że odnosimy do téjże saméj linii prostéj, poczynając od początku stałego, długości równe wartościóm funkcyi a^x; odcinki odpowiadające dla przypadku w którym x jest zastąpione przez wartości przez niedomiar z $\sqrt{7}$ będą miały ich końce w pewnéj stronie, a odcinki odpowiadające dla przypadku w którym x jest zastąpione przez wartości przez nadmiar z $\sqrt{7}$ będą się kończyły w drugiéj stronie. Twierdzenie I okazuje że dwie strony są całkiem *rozłączone*, twierdzenie II, że przedział który rozłącza je nie ma rozciągłości *skończonéj*. Nie może więc istnieć pomiędzy témi stronami tylko prosty *punkt odgraniczenia*, i dla tego to właśnie odległość tego punktu od początku jest zmierzoną przez $a^{\sqrt{7}}$.

NOWA DEFINICYA LOGARYTMÓW.

500. Kiedy mamy związek $a^x = y$ w którym a jest liczbą jakąkolwiek dodatną, mówi się że x jest logarytmem liczby y, co się tak wyraża $x = \log y$. W nauce logarytmów zachodzą, jak widzimy, trzy rzeczy do uważania: wartości x, to jest logarytmy; wartości y to jest liczby tym logarytmom odpowiadające; ilość stała a, która, raz obrana, jest taż sama na wszystkie liczby i ich logarytmy, i dla tego nazywa się *gruntém* albo *zasadą logarytmów*. Wyrachowane logarytmy x, odpowiadające wszystkim liczbom y stosownie do obranéj zasady a stanowią *układ logarytmów*. Różnych układów może być mnóstwo nieskończone, podług tego, jak coraz inną liczbę dodatną obierzemy na wartość zasady a.

Ta definicya wskazuje logarytm jedyny dla każdéj liczby dodatnéj, gdyż wiemy że, kiedy x wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, a^x przechodzi przez wszystkie wartości dodatne, i przechodzi raz tylko przez każdą z nich.

W każdym układzie, logarytmem jedności jest zero, a logarytmem zasady jest 1; gdyż

$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a.$$

Kiedy zasada jest większą jak jedność, liczby większe jak 1 mają swe logarytmy dodatne, liczby mniejsze jak jedność mają swe logarytmy odjemne. Rzecz przeciwna ma miejsce kiedy zasada jest mniejszą od jedności (495.

Nakoniec, liczby odjemne nie mają swych logarytmów.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW.

501. *Logarytm wieloczynu z ilukolwiek liczb jest równy summie logarytmów tych liczb.*

Niech będą, w rzeczy saméj, $x, x', x'',\ldots$ logarytmy liczb $y, y', y'',\ldots$; mamy

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'',\ldots,$$

zkąd, mnożąc

$$a^{x+x'+x''+\cdots} = yy'y''\cdots;$$

summa $x + x' + x'' + \ldots$ jest więc właśnie logarytmem wieloczynu $yy'y''\ldots$

Logarytm ilorazu z dwóch liczb jest równy różnicy logarytmów tych liczb.

Niech będą, w rzeczy saméj, x i x' logarytmy liczb y i y'; mamy

$$a^x = y, \qquad a^{x'} - y',$$

zkąd, dzieląc,

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'};$$

więc $x - x'$ jest logarytmem ilorazu $\frac{y}{y'}$.

Logarytm potęgi n*téj* *pewnéj liczby jest równy, jakiémkolwiek jest* n (*całkowitém albo ułamkowém, dodatném lub odjemném*), *wieloczynowi z* n *przez logarytm téj liczby.*

W rzeczy saméj, podnosząc do potęgi n dwa członki zrównania

$$a^x = y,$$

które wyraża że x jest logarytmem liczby y, otrzymamy związek

$$a^{nx} = y^n,$$

który okazuje że nx jest logarytmem potęgi y^n.

Wynika ztąd że, *jeżeli liczby* a, aq, aq^2,... *są w postępie geometrycznym, ich logarytmy*

$$\log a, \quad \log a + \log q, \quad \log a + 2\log q,$$

tworzą postęp arytmetyczny; ta własność posłużyła nam za punkt wyjścia w rozdziale XXI.

ZMIANA UKŁADU.

502. Przypuśćmy że się obrachowało logarytmy liczb w układzie którego zasadą jest a, i że chcemy obliczyć je w drugim układzie mającym za zasadę a'. Nazwijmy, x logarytm liczby jakiéjkolwiek y w piérwszym układzie, x' logarytm téj saméj liczby w drugim układzie, mamy

$$a^x = y, \qquad a'^{x'} = y;$$

zkąd

$$a^x = a'^{x'}.$$

Weźmy logarytmy obu stron téj równości w piérwszym układzie, zauważywszy że logarytmem liczby a jest jedność, przyjdzie

$$x = x' \log a',$$

zkąd

$$x' = \frac{x}{\log a'}.$$

Znajdziemy tym sposobem prawidło numeru 442; *dla zmiany układu, potrzeba dzielić dawne logarytmy przez logarytm nowéj zasady wziętéj w dawnym układzie.*

To twierdzenie, zastosowane mianowicie do zasady a daje związek ważny

$$\log a = \frac{1}{\log a'} \quad \text{albo} \quad \log a \log a' = 1.$$

TWIERDZENIE ODWROTNE WŁASNOŚCI ZASADNICZEJ LOGARYTMÓW.

503. Log x jest jedyną funkcyą zmiennéj x, posiadającą własność wyrażoną przez związek

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

W rzeczy saméj, zastępując kolejno w téj równości y przez $x, x^2, x^3, \ldots,$ znajdziemy

$$f(x^2) = 2f(x),$$

$$f(x^3) = f(x) + f(x^2) = 3f(x),$$

$$f(x^4) = f(x) + f(x^3) = 4f(x),$$

, ogólnie, jeżeli m jest liczbą całkowitą dodatną,

$$f(x^m) = mf(x).$$

A że, gdy x jest liczbą jakąkolwiek dodatną, można zawsze położyć

$$x = e^z, \quad \text{zkąd} \quad z = \text{l}.x;$$

przyjdzie wtedy

$$f(e^{zm}) = mf(e^z).$$

Piérwszy członek jest symetrycznym względem m i z, drugi członek nie powinien przeto być zmienionym przez przemianę tych dwóch liter, a więc mamy

$$mf(e^z) = zf(e^m),$$

zkąd

$$f(e^z) = \frac{f(e^m)}{m} z$$

albo

$$f(x) = k.l.x = \log x,$$

przy zasadzie jakiejkolwiek.

ROZWIĄZANIE ZRÓWNAŃ WYKŁADNICZYCH.

504. Nazywa się zrównaniem *wykładniczém* zrównanie kształtu

$$a^x = b,$$

w którém dwie ilości dane a i b są dodatnémi, a wykładnik x ilością nieznaną która powinna sprawdzić równość. Łatwo można rozwiązać podobne zrównanie za pomocą logarytmów. Biorąc logarytmy w dwóch członkach zrównania, znajdziemy

$$x \log a = \log b;$$

zkąd

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Otrzymamy tym sposobem wartość nieznanéj.

PRZYKŁADY.

1° $$7^x = 1254$$

$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,8450982} = 3,666197.$$

2° $$3^x = 0,462$$

$$x = \frac{\log 0,462}{\log 3} = -0,702878.$$

Można jeszcze rozwiązać zrównania wykładnicze więcéj zawikłane jak poprzedzające. Niech będzie zrównanie

$$a^{b^x} = c,$$

w którém piérwszy członek wskazuje że liczba a jest podniesioną do potęgi oznaczonéj przez b^x, i gdzie trzy litery a, b, c przedstawiają liczby dane dodatne. Biorąc logarytmy dwóch członków, mamy

$$b^x \times \log a = \log c,$$

zkąd

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

Przywodzi się tym sposobem dane zrównanie do wykładniczego zwyczajnego. Aby pytanie było możebném, potrzeba żeby a i b były zarazem wyższémi albo niższémi od jedności, tak aby drugi członek posiadał zawsze jedną wartość dodatną. Biorąc powtórnie logarytmy, otrzymamy

$$x \log b = \log\log c - \log\log a;$$

zkąd

$$x = \frac{\log\log c - \log\log a}{\log b}.$$

505. Pan JAN PANKIEWICZ, znakomity matematyk i gorliwy rozsiewca nauk ścisłych w *Encyklopedyi powszechnéj*, podał w ostatnim tomie tego pisma krótką wiadomość o *ilościach wykładniczych.*

Z téj pięknéj jego pracy następny ustęp w całości przytaczając, na tém, w téj chwili, nasze poszukiwania o *funkcyach wykładniczych* ograniczymy.

« Ilością wykładniczą nazywa się ilość zawiérająca jeden lub więcéj wykładników zmiennych. Równaniem wykładniczém jest równanie, w którém niewiadoma jest wykładnikiem. Rachunek z ilościami wykładniczemi, nazywa się *rachunkiem wykładniczym*, którego piérwsze zasady podał Jan Bernouilli w r. 1695, a nazwał go tak Leibnitz. Rachunek wykładniczy jest tylko częścią rachunku różniczkowego. Ilości wykładnicze i logarytmiczne, pozostają z sobą w najściślejszym związku. I tak, na mocy własności logarytmów można napisać $y = a^x$ albo $\log y = x \log a$. Rachunek wykładniczy drogą przekształceń tego rodzaju, oddaje znakomite usługi we wszystkich częściach analizy. »

ĆWICZENIA.

I. Znaleźć funkcyą $f(x)$, która jest określoną przez jeden z następujących związków :

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

$$f(x) \,.\, f(y) = f(x + y),$$

$$f(x) \,.\, f(y) = f(xy).$$

II. Rozwiązać układy

$$\begin{cases} x^p = y^q, \\ x^q = y^p; \end{cases}$$

$$(y + 1)^x = 100,$$

$$(y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}.$$

III. Rozwiązać zrównania

$$\left(\frac{295}{867}\right)^{1-x} = 632 \left(\frac{56}{99}\right)^{\frac{5x}{9}},$$

$$3^{2x}.4^{6x+7} = 9^{x-2}.7^{1-x}.$$

ROZDZIAŁ XXVII

RACHUNKI LICZEBNE.

SPOSÓB PRZYBLIŻEŃ KOLEJNYCH PRZEZ PODSTAWIENIE.

506. Niech będzie równanie kształtu

$$x = f(x);$$

kiedy x_1 jest wartością przybliżoną na x, znajdziemy, blisko,

$$x = f(x_1).$$

Oznaczając tę wartość przez x_2 i podstawiając na nowo, otrzymamy trzecią wartość

$$f(x_2) = x_3,$$

która dostarczy czwartéj

$$f(x_3) = x_4,$$

i tak daléj. Liczby

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots.$$

tym sposobem otrzymane tworzą szereg który niekiedy dąży bardzo prędko do wartości dokładnéj na x.

507. Dla przekonania się czy sposób ten da się właściwie zastosować, oznaczmy przez $x_1 + h$ prawdziwą wartość pierwiastku, znajdziemy

$$x_1 + h = f(x_1 + h),$$

a błąd $x - x_2$ wartości następującéj $x_2 = f(x_1)$, otrzyma na swe wyrażenie

$$f(x_1 + h) - f(x_1),$$

albo, rozwijając i porządkując względem h,

$$\mathrm{A}h + \mathrm{B}h^2 + \ldots..$$

Ten błąd jest więc bardzo blisko równym Ah, i aby x_2 było wartością więcéj przybliżoną do x jak x_1, to jest, aby się sposób udał zupełnie, potrzeba żeby A było mniejszém jak *jedność*.

ROZWIĄZANIE ZRÓWNANIA $ax^2 + bx + c = 0$, KIEDY a JEST BARDZO MAŁÉM WZGLĘDEM b i c.

508. Kiedy a jest bardzo małém względem b i c, radykał $\sqrt{b^2 - 4ac}$ różni się bardzo mało od zera, i dla otrzymania wartości przybliżonéj pierwiastku,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

należałoby posunąć bardzo daleko wyciąganie pierwiastku kwadratowego z dwumianu $b^2 - 4ac$. Wreszcie czynnik $\frac{1}{2a}$ pozostaje zawsze bardzo wielkim, a więc małemu błędowi popełnionemu w liczniku odpowiada błąd znaczny na x. To też w tym przypadku, dla rozwiązania zrównania

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

uciekamy się zwykle do sposobu przybliżeń kolejnych. Zajmujemy się wreszcie samym tylko pierwiastkiem dążącym do $-\frac{c}{b}$; otrzymujemy potém drugi, który jest bardzo wielkim, odciągając pierwszy od $-\frac{b}{a}$.

509. Przed rozpoczęciem, zróbmy uwagę ważną. Niech będą

$$\alpha,\quad \alpha^2,\quad \alpha^3, \ldots\ldots,\quad \alpha^n, \ldots,$$

potęgi kolejno po sobie następujące ułamku, a

$$k_1,\quad k_2,\quad k_3, \ldots\ldots,\quad k_n, \ldots\ldots$$

liczby które nie są bardzo wielkie, albo raczéj takie, że ułamki

$$\frac{1}{k_1},\quad \frac{1}{k_2},\quad \frac{1}{k_3}, \ldots\ldots,\quad \frac{1}{k_n}, \ldots\ldots$$

nie są dosyć małe aby mogły się porównać pod względem swéj małości do α. Szereg

$$k_1\alpha,\quad k_2\alpha^2,\quad k_3\alpha^3,\ \ldots\ldots,\quad k_n\alpha^n,\ \ldots\ldots$$

będzie złożonym z wyrazów takich, że w rachunku przybliżenia, można będzie zaniedbać jeden którykolwiek z pomiędzy nich w porównaniu do wyrazu tuż przed nim położonego.

Mówi się wtedy że ilości α i $k_1\alpha$ są *pierwszego rzędu*, i że

$$k_2\alpha^2,\quad k_3\alpha^3,\ \ldots\ldots,\quad k_n\alpha^n,\ \ldots\ldots$$

są ilościami bardzo małemi *drugiego, trzeciego,..... n^tego^ rzędu.*

510. To przypuściwszy, wróćmy po zrównania

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

i połóżmy

$$x = -\frac{c}{b}\,y,\qquad \frac{ac}{b^2} = \alpha;$$

znajdziemy

$$\alpha y^2 - y + 1 = 0$$

albo

(1) $$y = 1 + \alpha y^2.$$

Jeżeli α jest bardzo małém, można zaniedbać αy^2 i napisać jako piérwsze przybliżenie

$$y_0 = 1.$$

Ta wartość przypuszcza oczywiście błąd piérwszego rzędu; podstawiając ją w drugi członek zrównania (1) popełnimy na y błąd piérwszego rzędu, na y^2 błąd tegoż samego rzędu, a tém samém, na $1 + \alpha + \alpha y^2$, z powodu czynnika α, błąd drugiego rzędu; znajdziemy więc, drugą wartość przybliżoną, do ilości drugiego rzędu

$$y_1 = 1 + \alpha.$$

Podstawienie y_1 w zrównanie (1) pociągnie za sobą na y błąd drugiego rzędu, na y^2 błąd tegoż samego rzędu, a tém samém, na $1 + \alpha y^2$ błąd trzeciego rzędu; należałoby więc, w rozwinięciu

$$1 + \alpha(1 + \alpha)^2 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3,$$

znieść wyraz α^3, który jest rzędu ilości już zaniedbanych, i wziąć na trzecią wartość

$$y_2 = 1 + \alpha + 2\alpha^2,$$

która jest przybliżoną do ilości trzeciego rzędu.

Postępując daléj podobnież znalazłoby się

$$y_3 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3,$$

$$y_4 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3 + 14\alpha^4,$$

. . . .

Prawo spółczynników jest następujące:

Spółczynnikiem ilości α^{2n} *jest summa podwójnych wieloczynów spółczynników* α^0 *i* α^{2n-1}, α^1 *i* α^{2n-2}, ..., α^{n-1} *i* α^n. *Spółczynnikiem potęgi nieparzystéj* α, *takiéj jak* α^{2n+1}, *jest summa podwój-*

nych wieloczynów α^0 *i* α^{2n}, α^1 *i* α^{2n-2}, ..., α^{n-1} *i* α^{n+1}, *powiększona kwadratem spółczynnika* α^n. *Tym sposobem mamy, dla spółczynnika* α^3,

$$2(1.2)+1^2=5,$$

a dla spółczynnika α^4

$$2(1.5+1.2)=14.$$

Czytelnik udowodni łatwo ogólność tego prawa.

511. Formuły

$$x_0=-\frac{c}{b},$$

$$x_1=-\frac{c}{b}(1+\alpha),$$

$$x_2=-\frac{c}{b}(1+\alpha+2\alpha^2),$$

$$x_3=-\frac{c}{b}(1+\alpha+2\alpha^2+5\alpha^3),$$

$$x_4=-\frac{c}{b}(1+\alpha+2\alpha^2+5\alpha^3+14\alpha^4),$$

. . . .

zadosyć uczynią warunkóm które stanowią dobry rachunek przez przybliżenia kolejne : 1° każda otrzymuje się z poprzedzającéj przez dodanie wyrazu poprawy; 2° błąd popełniony jest zawsze rzędu wyższego nad rzęd ostatniego użytego wyrazu. Wynika ztąd że dla rozpoznania w każdéj chwili czy wartość którą mamy jest przybliżoną przez niedomiar lub przez nadmiar, dosyć, w ogólności, zauważyć znak wyrazu który następuje po ostatnio obrachowanym.

Przykład. Niech będzie zrównanie

$$0{,}000015x^2 + 100x - 3 = 0\,;$$

mamy

$$a = \frac{15}{10^6}, \qquad b = 10^2, \qquad c = -3,$$

$$-\frac{c}{b} = \frac{3}{10^2} = +\ 0{,}03000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ldots..$$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = -\frac{15\,.\,9}{10^{12}} = -\ \ldots\ldots\ldots\ 1\ 35000\ 00000\ 00000\ldots..$$

$$-\frac{2a^2c^3}{b^5} = \frac{2\,.\,15^2\,.\,27}{10^{22}} = +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 121\ 50000\ldots..$$

$$-\frac{5a^3b^4}{b^7} = \ldots\ldots = -\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x' = +\ 0{,}02999\ 99998\ 65000\ 00121$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{10^8}{15} = -6666666{,}66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66$$

$$x'' = -\frac{b}{a} - x' = -6666666{,}69666\ 66665\ 31666\ 66788.$$

Te wartości są dokładne z dwudziestoma cyframi dziesiętnemi.

512. Zrównanie zagadnienia mającego na celu *wymiar głębokości studni* jest jedném ze zrównań które należy traktować za pomocą sposobu poprzedzającego; gdyż a jest wtedy przedstawionem przez

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{(340)^2} < \frac{1}{(10^3)^2} \qquad \text{albo} \qquad \frac{1}{10^6}.$$

Ograniczając się na piérwszém przybliżeniu, znajdujemy

$$x = \frac{t^2}{\frac{2}{g} + \frac{2t}{v}} = \frac{gt^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{gt}{v}},$$

wreszcie dzieląc

$$\frac{1}{1 + \frac{gt}{v}} = 1 - \frac{gt}{v} + \frac{g^2t^2}{v^2} + \dots,$$

tak że, gdy zaniedbamy wyrazy rzędu $\frac{1}{v^2}$, można zastąpić $\frac{1}{1 + \frac{gt}{v}}$ przez $1 - \frac{gt}{v}$, i formuła staje się

$$x = \frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{gt}{v}\right) = \frac{gt^2}{2} - \frac{g^2t^3}{2v}.$$

ZASTOSOWANIE DO RACHUNKU PROCENTU.

513. Wiémy że summa x, wydana przez kapitał a umieszczony na procent składany, którego setną częścią stopy czyli *denarem* jest r, podczas n lat więcéj p dni, jest przedstawioną przez formułę

$$x = a(1 + r)^n \left(1 + \frac{p}{360} r\right).$$

Rok się uważa jakoby złożony z 12 miesięcy liczących każdy 30 dni. Wyciągnie się ztąd

$$(1) \qquad \log(1 + r) = \frac{1}{n}(\log x - \log a) - \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{pr}{360}\right).$$

Czynnik $1 + \frac{pr}{360}$ różni się mało od jedności, tak że jego logarytm jest bliskim zera, i druga część drugiego członka może być opuszczoną. Jeżeli więc nieznaną pytania jest r, weźmiemy na piérwsze przybliżenie wartość r_1 wynikającą ze zrównania niezupełnego

$$\log(1+r)=\frac{1}{n}(\log x-\log a);$$

ponieważ wartość r_1 zostając przybliżoną przez nadmiar, więc jéj podstawienie w zrównanie (1) da drugą wartość r_2, przybliżoną przez niedomiar, która dostarczy z kolei wartość przez nadmiar r_3, tak że rachunek odbywa się w najlepszych warunkach; liczby otrzymane tworzą dwa szeregi zbieżne których prawdziwą wartością na r jest granica spólna.

Niech będzie, na przykład, *wskazaną do znalezienia stopa na którą należy umieścić* 5073f,21c *dla otrzymania, po* 41 *latach* 5 *miesiącach* 12 *dniach, summy wynoszącéj* 29575f,15c.

Mamy formułę

$$\log(1+r)=\frac{1}{41}(\log 29575-\log 5073{,}21)-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{162}{360}r\right)$$

albo

$$\log(1+r)=0{,}0186742-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9}{20}r\right).$$

Piérwsza wartość przez nadmiar, r_1:

$$\log(1+r)=0{,}0186742,\ \ 1+r_1=1{,}043936,\ \ r_1=0{,}043936.$$

Druga wartość przez niedomiar, r_2:

$$\log(1+r_2)=0{,}0186742-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9.0{,}043936}{20}\right)$$

$$=0{,}0184689,$$

$$1+r_2=1{,}043444,\qquad r_2=0{,}043444.$$

Trzecia wartość przez nadmiar, r_3:

$$\log(1+r_3) = 0,0186742 - \frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9.0,043936}{20}\right)$$

$$= 0,01846898,$$

$$1+r_3 = 1,043445, \qquad r_3 = 0,043445.$$

Denar szukany r jest więc zawartym między 0,043444 a 0,043445; weźmy

$$r = 0,04344,$$

jestto procent od 1 franka; dla otrzymania procentu od 100 franków, to jest stopy, mnoży się go przez 100, co daje

$$4^{f},344.$$

ROZWIĄZANIE JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU CZTERECH ZRÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA.

514. Kiedy mamy rozwiązać jakikolwiek układ zrównań stopnia piérwszego o *wielkich spółczynnikach*, wykonywamy rachunek przez podstawienie, a dla zmniejszenia błędów o ile tylko podobna, poczynamy od wzięcia wartości na nieznaną któréj spółczynnik jest największym.

Oto przykład tego rodzaju rachunku.

Niech będzie układ

(1) $196,23571x - 2,501672y - 22,21482z + 0,0416723u = 29,56134,$

(2) $24,30612x + 0,3816749y - 4,006138z - 59,32164u = 567,4132,$

(3) $43,56712x - 6,080936y + 52,00458z - 6,200349u = 26,71432,$

(4) $88,96672x + 37,42016y + 67,41692z - 3,403915u = 77,4236.$

Zastępując, w (2), (3), (4), x przez wartość wyciągniętą ze zrównania (1), otrzymamy nowy układ

$$(5)\qquad x = 0{,}1491221 + 0{,}1261967y + 0{,}1120626z - 0{,}000210215u,$$

$$(6)\qquad 0{,}688409y - 1{,}282338z - 59{,}32674u = 563{,}7886,$$

$$(7)\qquad -5{,}531133y + 56{,}88982z - 6{,}209507u = 20{,}21750,$$

$$(8)\qquad 38{,}52489y + 77{,}38676z - 3{,}422617u = 64{,}1567.$$

Wszystkie spółczynniki obrachowanémi zostały przez logarytmy; oto, na przykład, rachunek spółczynnika y w zrównaniu (1):

$$\begin{aligned} \log 2{,}501672 &= 0{,}3982304 + \\ \log 198{,}23571 &= 2{,}2971821 - \\ &\overline{\phantom{0{,}0000000}} \\ &\quad \bar{2}{,}1010483 \quad \ldots 0{,}01261967. \end{aligned}$$

Rozpatrując się w zrównaniach (6), (7), (8), widzimy że największym spółczynnikiem jest liczba która mnoży z w zrównaniu (8); wyciągniemy więc wartość z ze zrównania (8),

$$(9)\qquad z = 0{,}829040 - 0{,}498055y + 0{,}044227411,$$

i, podstawiając ją w (6) i (7), otrzymamy

$$(10)\qquad 1{,}327084y - 59{,}38345u = 564{,}8517,$$

$$(11)\qquad 33{,}86390y + 3{,}693550u = 26{,}9439.$$

Rozwiązując wtedy (10) względem u, przyjdzie

$$(12)\qquad u = -9{,}51193 + 0{,}0223477y,$$

a potém, podstawiając w (11),

$$33{,}94644y = 62{,}0767,$$

zkąd wynika

$$y = 1{,}82866.$$

Nakoniec wracając kolejno do zrównań (12), (9), (5), znajdziemy

$$u = -9{,}47106, \qquad z = -0{,}5006, \qquad x = 0{,}1181.$$

Sprawdzenie. Kładąc te wartości w zrównaniu (3) i rachując przez logarytmy, znajdziemy

$$5{,}145 - 11{,}1200 - 26{,}03 + 58{,}7238$$

dla piérwszego członka; ta summa musiałaby być równą 26,71432 aby wartości nieznanych były dokładnémi: owoż przewyższa ona tę liczbę o 0,00448; błąd całkowity odpowiadający dla zrównania (3) jest więc mniejszym jak $\frac{1}{2}$ setnych.

DRUGI SPOSÓB. — UŻYCIE LOGARYTMÓW GAUSSA.

515. Rachunki poprzedzające są bardzo mozolne; można skrócić je posiadając Tablicę logarytmów Gaussa: te Tablice dają $\log(\mu \pm \nu)$, kiedy znamy $\log \mu$ i $\log \nu$, nie potrzebując wracać do liczb μ i ν. Piérwsze ogłoszenie tych Tablic odnosi się do r. 1812.

Dla wyłożenia *nowéj metody* dosyć jest okazać: w jaki sposób przechodzi się z jednego układu do drugiego zawiérającego w sobie jedno zrównanie jako też jedną nieznaną mniej jak poprzedzający. Założmy sobie, na przykład, wyrugować x pomiędzy trzema zrównaniami o trzech niewiadomych

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = l, \\ a'x + b'y + c'z = l', \\ a''x + b''y + c''z = l'', \end{cases}$$

w sposób taki aby znaleźć układ dwóch zrównań na y i z

$$(3) \qquad \begin{cases} \beta y + \gamma z = \lambda, \\ \beta' y + \gamma' z = \lambda'. \end{cases}$$

Dzieląc każde ze zrównań (1) przez spółczynnik x, otrzymamy układ równoważny

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x+\frac{b}{a}\,y+\frac{c}{a}\,z&=\frac{l}{a},\\ x+\frac{b'}{a'}\,y+\frac{c'}{a'}\,z&=\frac{l'}{a'},\\ x+\frac{b''}{a''}\,y+\frac{c''}{a''}\,z&=\frac{l''}{a''},\end{aligned}\right\}\quad \text{albo}\quad \left\{\begin{aligned} x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z&=\mathrm{L},\\ x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z&=\mathrm{L}',\\ x+\mathrm{B}''y+\mathrm{C}''z&=\mathrm{L}'',\end{aligned}\right.$$

i dosyć odciągnąć te ostatnie zrównania wzięte po dwa dla otrzymania dwóch zrównań na y i z szukanych,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{B}-\mathrm{B}')y+(\mathrm{C}-\mathrm{C}')z&=\mathrm{L}-\mathrm{L}',\\ (\mathrm{B}-\mathrm{B}'')y+(\mathrm{C}-\mathrm{C}'')z&=\mathrm{L}-\mathrm{L}'',\end{aligned}\right\}\quad \text{albo}\quad \left\{\begin{aligned} \beta y+\gamma z&=\lambda,\\ \beta' y+\gamma' z&=\lambda'.\end{aligned}\right.$$

Rachuje się B, C, L, B′, C′, L′,... za pomocą zrównań

$$\log \mathrm{B}=\log b-\log a,\ \log \mathrm{C}=\log c-\log a,\ \log \mathrm{L}=\log l-\log a,$$

$$\log \mathrm{B}'=\log b'-\log a',\ \log \mathrm{C}'=\log c'-\log a',\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log \mathrm{B}''=\log b''-\log a'',\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

potém dla otrzymania $\beta, \gamma, \lambda, \beta', \ldots,$ odciąga się spółczynniki poprzedzające wzięte po dwa.

Lecz, co należy przedewszystkiem zauważyć, to to, że zrównania (3) są tylko zrównaniami przejścia; musimy działać wkrótce, na nich jak to się odbywało na układzie (1), tak że nie liczby $\beta, \gamma, \lambda, \ldots,$ są użytecznémi do poznania, lecz właściwie ich logarytmy. Tablica dająca wprost $\log\beta, \log\gamma, \ldots,$ w funkcyi $\log \mathrm{B}, \log \mathrm{B}', \log \mathrm{C}, \ldots,$ skróciłaby więc rachunki w sposób znakomity; taką jest przysługa *Tablic Gaussa.*

516. Ostatecznie, oto droga postępowania :

Szuka się naprzód logarytmów wszystkich spółczynników układu (1), potém pisze się zrównania symboliczne

$$(1')\quad \begin{cases} x\log a + y\log b + z\log c = \log l, \\ x\log a' + y\log b' + z\log c' = \log l', \\ x\log a'' + y\log b'' + z\log c'' = \log l'', \end{cases}$$

zkąd się wyciąga, dzieląc przez spółczynniki x

$$(2')\quad \begin{cases} x + y\log \mathrm{B} + z\log \mathrm{C} = \log \mathrm{L}, \\ x + y\log \mathrm{B}' + z\log \mathrm{C}' = \log \mathrm{L}', \\ x + y\log \mathrm{B}'' + z\log \mathrm{C}'' = \log \mathrm{L}'', \end{cases}$$

a potém, przez odciąganie,

$$(3')\quad \begin{cases} y\log\beta + z\log\gamma = \log\lambda, \\ y\log\beta' + z\log\gamma' = \log\lambda'. \end{cases}$$

Te zrównania znajdują się tym sposobem przygotowane do rachunku następnego.

Spółczynniki układu (2′) są dane przez zrównania

$$\log \mathrm{B} = \log b - \log a, \qquad \log \mathrm{C} = \log c - \log a, \ldots$$

a spółczynniki zrównań (3′)

$$\log\beta = \log(\mathrm{B} - \mathrm{B}'), \qquad \log\gamma = \ldots, \ldots$$

są dostarczonémi bezpośrednio przez Tablice. Wszystko więc sprowadza się do wzięcia logarytmów spółczynnników piérwotnych i do wykonania potém dość licznych odciągań.

SPOSÓB NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

517. Mamy często do rozwiązania zrównania linijne

$$ax + by + cz + \ldots + l = 0,$$

$$a'x + b'y + c'z + \ldots + l' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

których spółczynniki są dostarczone przez doświadczenia lub spostrzeżenia (obserwacye); i zdarza się prawie zawsze że liczba m zrównań tych przewyższa liczbę n nieznanych. Wartości x, y, z,... wyciągnięte z n zrównań danych nie mogą zadosyć uczynić dokładnie zrównaniom pozostałym, gdyż obserwacye nie posiadają ścisłości bezwzględnéj; ich podstawienie zamiast niszczyć piérwsze członki tych zrównań, nadaje im wartości więcéj lub mniéj małe,

$$\varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \varepsilon'',\ldots$$

które nazwano *błędami*, które zmieniają się z n zrównaniami branemi dla oznaczenia x, y, z,...

Wybiéra się wtedy pomiędzy zrównaniami danémi i pomiędzy kombinacyami w liczbie nieskończonéj do których te zrównania mogą dać miejsce, n zrównań takich, żeby summa z kwadratów

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots$$

błędów odpowiadających była najmniejszą możebną.

Piérwsza myśl która się przedstawia jest *zrobienie najmniejszością summy z bezwzględnych wartości błędów;* lecz analiza nie daje się użyć do tego warunku wyłączającego znak ilości; zrównanie warunkowe wyrażałoby najmniejszość przewyżki błędów dodatnych nad błędami odjemnémi, a nie najmniejszość summy bezwzględnych wartości błędów; a więc wskazywałoby tylko *zrównoważenie* (*kompensacyą*) błędów, które mogłyby mieć wszelako wielkie wartości bezwzględne. Dla tego to obowiązani jesteśmy uważać summę *potęg parzystych* błędów, i aby nie być wciągniętymi w rachunki bardzo zawikłane, brać *summę ich kwadratów*.

518. Oto w jaki sposób znakomity Gauss rozwiązuje to zagadnienie (*Pamiętniki Getyngskie*, tom II).

Niech więc będą pary wartości które, podstawione w zrównania

$$ax + by + n = 0,$$

$$a'x + b'y + n' = 0,$$

$$a''x + b''y + n'' = 0,$$

dają błędy ε, ε', ε'',..., tak że mamy

$$ax + by + n = \varepsilon,$$

$$a'x + b'y + n' = \varepsilon',$$

$$a''x + b''y + n'' = \varepsilon''.$$

Przypuśćmy że zostały obrachowane summy

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = (aa),$$

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = (bb),$$

$$n^2 + n'^2 + n''^2 = (nn);$$

$$ab + a'b' + a''b'' = (ab),$$

$$an + a'n' + a''n'' = (an),$$

$$bn + b'n' + b''n'' = (bn);$$

mamy

$$\begin{aligned} S = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 = (nn) + 2(an)x + 2(bn)y \\ + (aa)x^2 + 2(ab)xy \\ + (bb)y^2. \end{aligned}$$

Jeżeli więc położymy

$$A = (an) + (aa)x + (ab)y,$$

wyrażenie

$$\begin{aligned} S - \frac{A^2}{(aa)} = (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} \\ + 2y\left[(bn) - \frac{(an)(ab)}{(aa)}\right] \\ + y^2\left[(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}\right]. \end{aligned}$$

stanie się niezależném od x; można mu dać formę

$$\mathrm{S} - \frac{\mathrm{A}^2}{(aa)} = (nn,\ 1) + 2(bn,\ 1)y + (bb,\ 1)y^2,$$

gdzie spółczynniki są dane przez zrównania:

$$(nn,\ 1) = (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)},$$

$$(bn,\ 1) = (bn) - \frac{(an)(ab)}{(aa)},$$

$$(bn,\ 1) = (bb) - \frac{(an)^2}{(aa)}.$$

To wykonawszy, połóżmy jeszcze

$$\mathrm{B} = (bn,\ 1) + (bb,\ 1)y;$$

wyrażenie

$$\mathrm{S} - \frac{\mathrm{A}^2}{(aa)} - \frac{\mathrm{B}^2}{(bb,\ 1)} = (nn,\ 1) - \frac{(bn,\ 1)^2}{(bb,\ 1)}$$

jest niezależném od y; obrachujmy je i wskażmy wypadek przez $(nn,\ 2)$, przyjdzie

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}^2}{(aa)} + \frac{\mathrm{B}^2}{(bb,\ 1)} + (nn,\ 2);$$

S jest summą kwadratów, a zatém musi być większém jak *zero*, a dzielniki (aa), $(bb,\ 1)$ są dodatnémi (519), najmniejszość S będzie miała miejsce dla

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0,$$

to jest dla

$$(an) + (aa)x + (ab,\ 1)y = 0,$$

$$(bn,\ 1) + (bb,\ 1)y = 0.$$

Te zrównania są łatwe do rozwiązania; nie potrzeba wykonywać eliminacyi; ostatnie daje y, którego wartość podstawiona w piérwsze, przywiedzie je do piérwszego stopnia o jednéj nieznanéj x.

519. Powiedziało się powyżéj że dzielniki (aa), $(bb, 1)$ były dodatnémi; to mniemanie, oczywiste dla (aa), które jest summą kwadratów, wymaga dowodzenia dla $(bb, 1)$.

Otóż, mamy

$$(bb, 1) = (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = \frac{(bb)(aa) - (ab)^2}{(aa)},$$

i mianownik jest summą trzech kwadratów

$$(ab' - ba')^2 + (ab'' - ba'')^2 + (a'b'' - b'a'')^2.$$

Nic łatwiejszego jak uogólnienie pięknego sposobu poprzedzającego, który Gauss potrafił tak szczęśliwie zastosować do poprawy elementów planety *Pallas*.

ĆWICZENIA.

1. Rozwiązać zrównania

$$0{,}0382025x - 0{,}00655533y - 0{,}0718334z + 0{,}0565703u$$
$$= 124944{,}66,$$
$$0{,}0465752x - 0{,}00407850y - 0{,}0915866z + 0{,}0362259u$$
$$= 152292{,}21$$
$$0{,}0517211x + 0{,}00054720y - 0{,}1032346z - 0{,}0049063u$$
$$= 168846{,}94,$$
$$0{,}0323338x + 0{,}00305495y - 0{,}0634685z - 0{,}271300u$$
$$= 105498{,}00.$$

Znajduje się

$$x = 3348538, \quad y = 1218098, \quad z = 41798, \quad u = 141587,4.$$

II. Zastosować sposób najmniejszych kwadratów do układu

$$0 = -183'',93 + 0,79363x + 143,66y + 0,39493z$$
$$+ 0,95920u - 0,18856v + 0,17387t,$$
$$0 = -6'',81 - 0,02658x + 46,71y + 0,02658z$$
$$- 0,20858u + 0,15946v + 1,25782t,$$
$$0 = -0'',06 + 0,58880x + 358,12y + 0,26208z$$
$$- 0,85234u + 0,14912v + 0,17775t,$$
$$0 = -3'',09 + 0,01318x + 28,39y - 0,01318z$$
$$- 0,07861u + 0,91704v + 0,54365t,$$
$$0 = -0'',02 + 1,73436x + 1846,17y - 0,54603z$$
$$- 2,05662u - 0,18833v - 0,17445t,$$
$$0 = -8'',98 - 0,12606x - 227,42y + 0,12606z$$
$$- 0,38939u + 0,17176v - 1,35441t,$$
$$0 = -2'',31 + 0,99584x + 1579,03y + 0,06456z$$
$$+ 1,99545u - 0,06040v - 0,33750t,$$
$$0 = +2'',47 - 0,08089x - 6722y + 0,08089z$$
$$- 0,09970u - 0,46359v + 1,22803t,$$
$$0 = +0'',01 + 0,65311x + 1329,09y + 0,38994z$$
$$- 08439u - 0,04305v + 0,34268t,$$
$$0 = -317'',73 + 0,69957x + 1719,32y + 0,12913z$$
$$- 1,38787u + 0,17130v - 0,08360t,$$
$$0 = +117'',97 - 0,01315x - 43,84y + 0,01315z$$
$$+ 0,02929u + 1,02138v - 0,27187t.$$

Zostajemy przywiedzeni do zrównań

$$0 = +17'', 11 + 5{,}42383t,$$

$$0 = +75'',23 + 2{,}22346v - 0{,}37766t,$$

$$0 = +25'',66 + 9{,}29213u - 0{,}36175v - 0{,}57384t,$$

$$0 = -115'',81 + 0{,}71612z + 1{,}11063u - 0{,}06392v + 0{,}25868t,$$

$$0 = -13854'' + 2458225y + 62{,}13z - 0{,}5058u + 213{,}84v + 73{,}45t,$$

$$0 = -371'',09 + 5{,}91569x + 7203{,}91y - 0{,}00344z - 2{,}20516u - 0{,}34664v - 0{,}18194t;$$

zkąd się wyciągnie

$$t = -3'',15, \qquad v = -34'',37, \qquad u = -4'',29$$

$$z = -166'',44, \qquad y = +0'',054335, \qquad x = -3'',06.$$

(Gauss, Poprawy elementów planety *Pallas.*)

III. Zastosować sposób przybliżeń kolejnych do zrównania

$$ax^3 - bx + c = 0,$$

gdzie a, b, c są liczbami dodatnémi.

NOTA

W ostatnich czasach napisano we Francyi wiele dzieł elementarnych arytmetyki zupełnie już wydoskonalonéj, z nich najbardziéj cenionémi są : *Briot*, *Bertrand* i *Alfred Serret*. Nie będziemy wcale rozbiérali świetnych prac tych dwóch piérwszych autorów, lecz natomiast przytoczymy w całości z *Początków Arytmetyki*, klassycznego dzieła P. *Serret'a*, kilka twierdzeń niezbędnie nam potrzebnych do ścisłego wyłożenia *teoryi wieloczynu ilukolwiek algebraicznych jednomianów* całkowitych lub ułamkowych (23).

O STOSUNKACH.

1. Nazywa się *stosunkiem* jednéj wielkości do drugiéj, tegoż samego rodzaju, liczba która mierzy piérwszą wielkość gdy druga jest wzięta za jedność.

Kiedy dwie wielkości są *wielokrotnikami* trzeciéj, ta trzecia jest nazwaną *spólną miarą* dwóch piérwszych.

Kiedy dwie wielkości są mierzone tąż samą jednością, otrzymuje się ich stosunek dzieląc liczbę która mierzy piérwszą wielkość przez liczbę mierzącą drugą.

W rzeczy saméj, przypuśćmy *naprzód*, że liczby mierzące wielkości o które rzecz idzie są całkowitémi, i niech témi liczbami będą 25 i 18, na przykład. Jedność użyta jest wtedy spólną miarą dwóch wielkości, i rzecz oczywista że piérwsza wielkość jest równą $\frac{25}{18}$ drugiéj. A zatém, jeżeli druga wielkość jest wziętą za jedność, piérwsza musi być mierzoną przez liczbę $\frac{25}{18}$; ta liczba wyraża więc, według definicyi, stosunek piérwszéj wielkości do drugiéj.

Przypuśćmy *powtóre* że liczby mierzące są ułamkowémi, i niech témi liczbami będą $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$. Jeżeli sprowadzimy te ułamki do jednakowego mianownika, to staną się one $\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$ i $\frac{5 \times 4}{4 \times 7}$: ułamek jedności $\frac{1}{4 \times 7}$ jest spólną miarą dwóch wielkości, a ułamek ten jest zawartym 3×7 razy w piérwszéj, i 5×4 razy w drugiéj; wynika ztąd że piérwsza wielkość jest równą $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$ drugiéj; Stosunek piérwszéj wielkości do drugiéj jest więc równym $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$, to jest równy $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$.

Stosunek dwóch wielkości jest ilorazem liczb które mierzą te wielkości, przywiedzeni więc jesteśmy do nazywania *stosunkiem liczby jednéj do drugiéj* ilorazu piérwszéj liczby przez drugą. I tak stosunek liczby $\frac{3}{4}$ do liczby $\frac{5}{7}$ jest $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$; piérwsza liczba $\frac{3}{4}$ nazywa się *licznikiem* stosunku, druga zaś $\frac{5}{7}$ jest jego *mianownikiem*. Te nazwania są istotnie naturalnémi; widzieliśmy bowiem że ułamki zwyczajne o wyrazach całkowitych przedstawiają tylko ilorazy albo stosunki.

Dwa stosunki są *odwrotnémi* jeden drugiego, kiedy licznik jednego jest równy mianownikowi drugiego, i odwrotnie. I tak, $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ i $\frac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$ są stosunkami odwrotnémi.

2. *Stosunek nie zmienia wartości gdy się mnoży albo dzieli oba jego wyrazy przez tę samą liczbę.*

W rzeczy samej, niech będą stosunki $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ i $\frac{\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}\right)}{\left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{9}\right)}$. Według prawideł rachunku ułamków, piérwszy stosunek jest równym $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$; drugi jest równym $\frac{\left(\frac{3 \times 2}{4 \times 9}\right)}{\left(\frac{5 \times 2}{7 \times 9}\right)}$ albo $\frac{3 \times 2 \times 7 \times 9}{4 \times 9 \times 5 \times 2}$, albo nakoniec $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$; a zatém, dwa stosunki są sobie równémi. Wynika ztąd, że piérwszy ze stosunków uważanych nie zmienia swéj wartości gdy się mnoży oba jego wyrazy przez $\frac{2}{9}$

albo, co na jedno wychodzi, że drugi stosunek nie zmienia swéj wartości gdy się dzieli oba jego wyrazy przez $\frac{2}{9}$.

Wynika ztąd że można sprowadzić ilekolwiek stosunków do jednakowego mianownika za pomocą prawidła używanego dla ułamków zwyczajnych o wyrazach całkowitych. Widzimy także że można zastosować do stosunków prawidła dodawania i odciągania ułamków.

3. *Dla otrzymania wieloczynu ilukolwiek stosunków, dosyć pomnożyć je stronami odpowiedniémi.*

Niech będą dwa stosunki $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ i $\frac{\left(\frac{8}{11}\right)}{\left(\frac{2}{9}\right)}$; potrzeba dowieźć równości

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)} \times \frac{\left(\frac{8}{11}\right)}{\left(\frac{2}{9}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{8}{11}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{2}{9}\right)},$$

a na to dosyć przywieźć każdą z tych liczb do formy ułamkowéj zwyczajnéj, za pomocą prawideł odpowiednich rachunkowi ułamków. Znajduje się tym sposobem że dwie liczby dane są równémi jedna i druga $\frac{3 \times 7 \times 8 \times 9}{4 \times 5 \times 11 \times 2}$.

Oczywista że dla podzielenia jednego stosunku przez drugi, dosyć pomnożyć stosunek dzielnéj przez stosunek odwrotny stosunku dzielnika.

4. *W ciągu stosunków równych, summa liczników i summa odpowiednich mianowników tworzą stosunek równy stosunkom danym.*

W rzeczy saméj, uważmy ilekolwiek stosunków równych stosunkowi $\frac{5}{7}$. Każdy licznik wart jest $\frac{5}{7}$ mianownika odpowiedniego; więc summa wszystkich liczników jest $\frac{5}{7}$ summy wszystkich mianowników; innémi słowy, stosunek summy liczników do summy odpowiednich mianowników jest równy stosunkowi danemu $\frac{5}{7}$.

Uwaga. Dowiodłoby się podobnież że *kiedy dwa stosunki są równe, różnica liczników i różnica mianowników, tworzą stosunek równy stosunkom danym.*

5. *Kiedy dwa stosunki są równe, otrzymuje się wypadki równe mnożąc licznik każdego z nich przez mianownik drugiego.*

Niech będą dwa stosunki równe $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ i $\dfrac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)}$. Sprowadzając je do jednakowego mianownika, stają się one

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{5}{7}\times\frac{5}{2}\right)},\quad \frac{\left(\frac{7}{3}\times\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{5}{2}\times\frac{5}{7}\right)};$$

te dwa stosunki równe mają tenże sam mianownik, przeto ich liczniki są równe.

Mamy więc równość

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{7}{3}\times\frac{5}{7}.$$

Co dowodzi powyżéj wysłowionego twierdzenia.

(SERRET, *Początki Arytmetyki*, rozdział XV.)

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

ZNACZNIĖJSZE OMYŁKI DRUKU.

Wykaz ten rozpoczniemy uwagą, iż w pierwszej połowie tomu, a mianowicie od strony 60 do strony 304, napotykamy często galikanizm, który jednak, jako nieutrudniający zrozumienia przedmiotu, a jedynie pod względem gramatykalnym błędny, wystarczy kilkoma wskazać przykładami, aby nań zwrócić uwagę czytelnika. I tak :

Str.	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
68	5	z x	x
69	19	z Q	na Q
81	15	z m jak z n	na m jak na n
		i t. p.,	i t. p.

W ogóle wyrażenia takie jak wartość z x, potęgi ubywające z b, i t. d. (pochodzące z francuzkiego de x, de b), należy zastąpić przez : wartość na x, potęgi ubywające b.

INNE WAŻNIEJSZE OMYŁKI SĄ :

Str.	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
5	22	osiągnienia	osiągnięcia
8	24	jarzący	jarzęcy
12	4	uo	do
19	1	ieloczyn	wieloczyn
38	1 od dołu	miejscu	miejsce
42	3	prpywiązany	przywiązany
52	1	jednomian	jednomiany
55	23	Mnożebności	Możebności
58	2	dzielna.	dzielnik.
64	12	będą,	będzie,
77	1	definicyę	definicyą
95	22	prąga	pociąga
106	14	gdy się	gdy
138	18	jednę	jedną
183	1	męszczyzni	męszczyzn
197	23	powierzchnię	powierzchnią
201	19	wody wina	wody i wina
216	7	pierwsza	pierwszą

Str.	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
224	11 i 12	dwoma	dwiema
228	13	dwoma	dwiema
233	9	zrównania	zrównanie
245	10	w którém	w których
262	6	3	253
290	20	ua	na
—	23	mający	mającą
295	7	poniew	ponieważ
296	18	kąd	zkąd
310	6	równemi	są równemi
342	7	to jest wyrazy na xy,	to jest wyrazy na x^2, wyrazy na xy,
343	5	w zrównaniu	w zrównanie
i w kilku innych miejscach			
358	15	przybiera	przybiorą
370	18	sprowadzać	sprawdzać
385	20	dłogość	długość
387	16	plaśnienie	plaśnięcie
394	12	długość	długości
405	17	w O	w O, a
406	16	ek koniec	łek koniec
407	9	ego	jego
413	6	staje	staje się
433	3 od dołu	dwoma zmiennem	dwiema zmiennemi
440	21	Ta	ta
449	24	est	jest
450	1 od dołu	sposób	w sposób
458	18	wzorze	wzór
464	6	między dwa	między każde dwa
465	7	jest	to jest
469	4 od dołu	jes	jest
472	3	a która	ta która
475	10	warstwa górna,	warstwa któraby leżała bezpośrednio nad warstwą górną
479	2 od dołu	dwoma wyrazami	dwa wyrazy
480	12	następującemi	następujące
485	1 od dołu	mianownik	mnożnik
502	4 od dołu	cyfrę	cyfra
510	1	większąj ak	większą jak
589	12	wtedy	wtedy :
591	13	odjemnemi ;	odjemnemi,

Str.	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
61	21	Q' na iloraz i R'	Q na iloraz i R
87	15	$\ldots\ldots(x^{m-n-1} - 1)$	$\ldots\ldots(x^{m-n+1} - 1)$
104	16	$\infty^3 + \beta^3$	$= \alpha^3 + \beta^3$
108	10	$f\left(k, z - \frac{}{n}\right)$	$f\left(k, z - \frac{p}{n}\right)$
115	8	$3x - 4 =$	$3x - 4 = 3,$
218	19	$x < 2c +$	$x < 2c + y$
264	15	$(a + b + c + d \frac{A}{a};$	$(a + b + c + d) \frac{A}{a};$
279	17	$= 8 + \frac{2x^2}{4} - \frac{26x}{15}$	$= 8 + \frac{2x^2}{3} - \frac{26x}{15}$
281	17	$x'' = -\frac{a}{b}$	$x'' = -\frac{b}{a}$
294	18	$x' = x'' = -\frac{b}{2b}$	$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$
296	17	$ax' -$	$ax'^2 -$
297	6	$= -\frac{a}{b}$	$= -\frac{b}{a}$
303	1 z dołu	$x' = \frac{al + bn}{a(m - b)}$	$x' = \frac{al + bn}{a(m - n)}$
308	5	$(x = x'')$	$(x - x'')$
311	16	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \ \frac{p^2}{4} + q$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$
339	17	$\frac{2pq}{+q}.$	$\frac{2pq}{p + q}.$
353	11	$\pm\sqrt{36 + 13 - 36};$	$\pm\sqrt{36^2 + 13 - 36};$
353	1 z dołu	$+\sqrt{-11\sqrt{13}}$	$+\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}$
363	1 z dołu	$a^2 =$	$\alpha^2 =$
364	4 z dołu	zrównania	rozwiązania
370	13	TG do A,	TG do AB,
370	3 z dołu	BT,	BT_1
372	1 z dołu	$\frac{\pi R^2}{\pi x} =$	$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} =$
376	2	$x +$	$x^2 +$
393	17	AP i PQ	AP i BQ
401	8	$bx = y$	$bc = y$
412	24	$\frac{1}{3} x. \pi z.$	$\frac{1}{3} x. \pi z^2.$
439	5	$2x = r\sqrt{\ }.$	$2x = r\sqrt{3}.$

Str.	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
439	15	$\pi^2x^2(x^2+y)^2 =$	$\pi^2x^2(x^2+y^2) =$
459	2 z dołu	$rn^2+(2n-r)n$	$rn^2+(2a-r)n$
463	4	$\frac{1}{d}=\frac{1}{c}\times\frac{1}{}$,...	$\frac{1}{d}=\frac{1}{c}\times\frac{1}{q}$,...
469	1 z dołu	$s=\frac{a}{1-}$	$s=\frac{a}{a-q}$
526	18	$\frac{\pi^3}{3}\times$	$\frac{4\pi x^3}{3}\times$
549	13	$y=$	$-y=$
549	14	$x-1\frac{2}{3}-x$	$x-1$ i $\frac{3}{2}-x$
549	15	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)$
575	10	$m(m=1)(m-2)\ldots$	$m(m-1)(m-2)\ldots$
580	4 z dołu	na prawo	na prawo;
599	19	$a^{x_0-h}-a^{x_0}=$	$a^{x_0+h}-a^{x_0}=$
624	2 z dołu	$+(ab,1)y=$	$+(ab)y=$
631	4 i 5	o worazach	o wyrazach
633	18	8	9

TYMŻE SAMYM NAKŁADEM WYSZŁY

W DZIEDZINIE MATYMATYKI :

---

1. Norzewski Roch. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géometrie.* Paris, 1852, in-8°, avec planches (wyczerpane).

2. G. H. Niewęgłowski, professor analizy w Szkole wyższéj Polskiéj Montparnasse, egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika. *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne ; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia), in-8°, stron 352. Paryż, 1866. Cena 1 tal. 10 srg.

3. — *Geometryi część I. Geometrya płaska*, (wydanie drugie) w Paryżu, 1868r., stron 436, in-8°, figury w tekscie. Cena 1 talar 10 srg.

4. — *Geometryi część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryą starożytnych i metody geometryi nowoczesnéj (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 srg.

5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych z notami.* Paryż, 1870 roku, in-8°, stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 srg.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. Folkierski, inżynier cyw, b. uczeń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencyat n. m. P. F. Sorbony, Professor mechaniki w Szkole Wyższéj Przygotowawczéj w Paryżu, tom I, zawierający rachunek różniczkowy, oraz dodatek Władysława Trzaski o wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, str. XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 srg.

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I (Główne artykuły przez pp. Frankego, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę). Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 tal.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II (Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego). Paryż, 1872, in-4°, stron 240, figur 8. Cena 2 tal. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 srg. 6 fen.).

NA CZTERECHSETNĄ ROCZNICĘ URODZIN KOPERNIKA 19 LUTEGO 1873 ROKU WYSZŁY NASTĘPUJĄCE DZIEŁA :

9. *Wykład Hydrauliki* wraz z teoryą machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z hydrostatyki i hydrodynamiki, przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Wł. Klugera (Inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, str. LVI i 1019. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 fr.

10. *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych, tom II. *Rachunek Całkowy*. Część pierwsza : Całkowanie różniczek i t. d. Paryż, 1873, stron XVI i 740, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* (molekularnéj) przez Władysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznéj. Tomu I^go^, Części różniczkowéj zeszyt pierwszy, Paryż, 1873, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający prace pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskeigo. Paryż, 1853, str. VIII i 358, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Mechanika Rozumowa* przez G. H. Niewęgłowskiego, dwa tomy. Tom I *Statyka*. Paryż, 1873. In-8°, stron 512, z figurami, cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry*, przez Adolfa Sągajłę w czterech tomach. Tom I : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8°, stron 632 z figurami. Cena 5 fr. 50 c.

15. *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dr. Teofila Żebrawskiego, Człon. Akad. Krakowskiéj. Kraków, 1873, in-8°, stron 617 z 4 tablicami. Cena 3 tal.

W ROKU 1873 i 74 DRUKOWAĆ SIĘ BĘDĄ :

16. *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* Władysława Gosiewskiego, professora Fizyki matematycznéj, tomu I^go^ części Różniczkowéj zeszyt drugi.

17. Adolf Sągajło, professor Matematyki : *Algebry* tom II o *Wyznacznikach*, in-8°.

18. — *Geometrya Analityczna*, w trzech tomach, in-4°, Tom I.

19. *Zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego*, tom III. *Całkowanie równań różniczkowych*, przez Władysława Folkierskiego. Wice-Prezesa i stałego sekretarza Tow. Nauk Ścisłych, in-8°.

20. *Mechaniki Rozumowéj* G. H. Niewęgłowskiego tom II : *Dynamika*, in-8°.

21. *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, Tom IV.

Zarząd Biblioteki Kórnickiéj czuje potrzebę wyrazić żal swój, że był zmuszonym znacznie podnieść cenę ostatnich nakładów. Ma to miejsce szczególniéj w dziełach matematycznych, drukowanych w Paryżu, gdzie papier nowym obłożony podatkiem, podwyższone taryfy drukarskie i niesłychane trudności korekty wpłynęły tak niekorzystnie na koszta druku, iż nawet podniesione ceny o wiele jeszcze pokryć ich nie mogą.

Dotychczas niżej wymienione księgarnie zgłosiły się z obietnicą sprzedawania po stałych cenach wszystkich nakładów Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu zaraz po wykończeniu każdego tomu.

w WARSZAWIE, pp. Gebethner i Wolff.
» » Michał Glücksberg.
» » J. J. Okoński.
» » Maurycy Orgelbrand.
» » Sonnewald.

w KRAKOWIE, » Józef Czech.
» » D. E. Friedlein (Rynek, 11).
» » Fr. Trzecieski (księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych).
» » Nowolecki.

we LWOWIE, » A. D. Bartoszewicz (księgarnia Polska, ulica Kopernika l. 12).
» » Gubrynowicz i Schmidt.
» » Milikowski.
» » F. H. Richter.
» » Karol Wild.

w POZNANIU, » W. E. Czapiński (księgarnia P. H. Richtera).
» » Mieczysław Leitgeber i Spółka.
» » J. K. Żupański.

w ŚREMIE, » K. Gąsiorowski.

w TORUNIU, » F. T. Rakowicz.

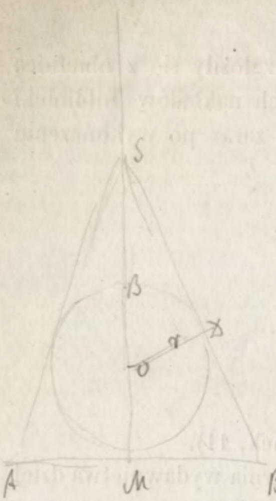
w DREZNIE, » J. I. Kraszewski.

w BERLINIE, » E. Bock (księgarnia Behra, ulica pod Lipami, 27).

w PARYŻU, Księgarnia Luksemburska, 16, *rue de Tournon*.

Z zamówieniami zgłaszać się należy do Zarządu Biblioteki Kórnickiej, pod adressem : Dr. Z. Celichowski w Kórniku (W. Ks. Poznańskie).

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, rue Mignon, 2.



$\cancel{\frac{H}{2}}\, x, h$

$x : h = r : \sqrt{(h-r)^2 - r^2}$

$$x = \frac{hr}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$$

$$\frac{h^2 r^2}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$$

$\cancel{h - r^2 - r^2}$

$\cancel{h - 2r^2}$

$$\frac{h^2}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 - 2rh}} = y$$

$h^4 = y(h^2 - 2rh)$

$h^4 - yh^2 + 2ryh = 0$

$h^3 - yh + 2ry = 0$

$h^5(h^2 - y) + 2ry = 0$

SĄGAJŁO

ALGEBRA

1