BRONISŁAW PIEKARSKI

ALGEBRA WYŻSZA

T. 1 CZ. 1

BRONISŁAW PIEKARSKI

ALGEBRA WYŻSZA

TOM I.

WSTĘP DO ALGEBRY WYŻSZEJ

CZĘŚĆ I.

ZASADY TEORJI DZIAŁAŃ PODSTAWOWYCH
POJĘCIE GRUPY I CIAŁA LICZBOWEGO
TEORJA LICZB ZESPOLONYCH

SKŁAD GŁÓWNY W KOMISJI WYDAWNICZEJ KOŁA
MATEMATYCZNO - FIZYCZNEGO SŁUCHACZÓW
UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

WARSZAWA
1930

WSTĘP DO ALGEBRY WYŻSZEJ

CZĘŚĆ I

Drukarnia „Saturn" Marszałkowska 91

BRONISŁAW PIEKARSKI

ALGEBRA WYŻSZA

TOM I.

WSTĘP DO ALGEBRY WYŻSZEJ

CZĘŚĆ I.

ZASADY TEORJI DZIAŁAŃ PODSTAWOWYCH
POJĘCIE GRUPY I CIAŁA LICZBOWEGO
TEORJA LICZB ZESPOLONYCH

WARSZAWA
1930

BRONISŁAW PIEKARSKI

Wielce Szanownemu
Panu Prof. Samuelowi
Dicksteinowi w dowód
głębokiego szacunku
i poważania pracę tę
składa wdzięczny uczeń.

WSTĘP DO ALGEBRY WYŻSZEJ

W-wa 20/IX 30 r.

CZĘŚĆ I.

ZASADY TEORJI DZIAŁAŃ PODSTAWOWYCH
POJĘCIE GRUPY I CIAŁA LICZBOWEGO
TEORJA LICZB ZESPOLONYCH

WARSZAWA
1930

PAMIĘCI DZIADKA MEGO
DR. MED.
BRONISŁAWA RUSZCZYKOWSKIEGO
B. SŁUCHACZA SZKOŁY GŁÓWNEJ WARSZAWSKIEJ
PRACĘ TĘ
POŚWIĘCAM

PRZEDMOWA

Treść tomu niniejszego stanowi opracowanie szeregu zagadnień należących w znacznej większości do dziedziny arytmetyki teoretycznej, których znajomość posiada pierwszorzędne znaczenie dla studjującego algebrę wyższą. Do wspomnianych zagadnień należy przedewszystkiem, umieszczona na naczelnem miejscu Wstępu do algebry wyższej, ogólna teorja działań zasadniczych oraz teorja liczb zespolonych wraz z ich geometryczną interpretacją

Umieszczając na początku kursu zarys teorji działań zasadniczych, miałem na widoku z jednej strony doniosłe znaczenie, jakie odgrywa pojęcie działania w matematyce wogóle, w algebrze zaś w szczególności, z drugiej — korzyści natury systematycznej i dydaktycznej, płynące z rozwinięcia wspomianej teorji, a polegające na możności osiągnięcia znacznej ścisłości dalszych rozważań, oraz — uzasadnienia wyboru definicyj podstawowych działań arytmetycznych na elementach zbiorów, z któremi mamy do czynienia w algebrze wyższej. W ten sposób stało się możliwem uczynienie wykładu bardziej systematycznym oraz pozbawienie go charakteru dogmatycznego.

Rozważania dotyczące pojęcia grupy i ciała liczbowego mają na celu zaznajomienie czytelnika z pojęciami odgrywającemi rolę podstawową w algebrze wyższej. Treść Rozdziału II nie wyczerpuje oczywiście wspomnianych zagadnień, które zostaną rozwinięte szczegółowo w rozdziałach poświęconych rozwiązywaniu równań algebraicznych. Jednak z uwagi na doniosłe znaczenie, jakie posiadają pojęcia grupy i ciała łączące dwa tak ważne pojęcia, jak pojęcie zbioru i działania, uważałem za wskazane umieścić już we Wstępie do algebry wyższej przynajmniej rozważania, mające na celu wyjaśnienie wspomnianych pojęć

Wreszcie dwa ostatnie rozdziały poświęcone są liczbom zespolonym i ich geometrycznej interpretacji.

Część 2-ga niniejszego tomu obejmować będzie kwaternjony Hamilton'a, liczby zespolone wyższe oraz funkcje algebraiczne całkowite.

Przy opracowywaniu podręcznika posiłkowałem się dziełami poświęconemi omawianym zagadnieniom. W szczególności treść pierwszych 12-tu paragrafów Rozdziału I została opracowana wyłącznie na podstawie §§ 25—33 oraz § 93 Arytmetyki Teoretycznej prof. S. Zaremby (Kraków 1912) oraz §§ 61 i 64 II części Wstępu do Analizy tegoż Autora (Warszawa 1918) Podobnie opracowanie §§ 30—32, 34—38 oparłem na §§ 101, 102, 107—110, 149—151 Arytmetyki Teoretycznej.

Nadto przy opracowywaniu niniejszego tomu korzystałem z dzieła prof. W. Sierpińskiego p.t. „Analiza", skąd w szczególności zaczerpnąłem ogólny układ treści §§ 23—29 [1]) mej pracy oraz dowód twierdzeń XIX i XX § 28 [2]) jak również z dzieła prof. S. Dicksteina „Pojęcia i metody matematyki". Tom I. Część I-sza. Teorya działań Warszawa 1891.

Pozostałe źródła podałem w odsyłaczach.

Na zakończenie spełnię miły obowiązek, składając na tem miejscu serdeczne podziękowanie PP. Prof. Samuelowi Dicksteinowi i Stanisławowi Zarembie za niezmiernie życzliwy stosunek i serdeczne słowa zachęty.

Wreszcie winienem słowa podziękowania P. Dr. Arnoldowi Walfiszowi za wskazówki, udzielone mnie przy opracowywaniu Rozdziału II, oraz memu przyjacielowi Leonowi Maleckiemu za staranną korektę mej pracy.

Bronisław Piekarski

Warszawa, w maju 1930 r.

[1]) W. Sierpiński. Analiza. T. I. Cz. I. Warszawa 1923. Rozdział VII. §§ 59—61 (str. 175—187).

[2]) W. Sierpiński. Analiza. T. I. Cz. III i IV. Warszawa 1925. Rozdział XVI. § 141 (str. 27—31).

ROZDZIAŁ I.

OGÓLNE ZASADY TEORJI DZIAŁAŃ PODSTAWOWYCH.

§ 1.

Ogólne pojęcie działania.

Pojęcie działania zajmuje niezmiernie ważne miejsce w szeregu pojęć, któremi posługuje się współczesna matematyka.

Wyjątkowo doniosłe znaczenie w całokształcie działań posiadają cztery czynności, znane pod nazwami dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, które obejmujemy wspólną nazwą podstawowych działań arytmetycznych.

Znaczenie, jakie nadajemy działaniom podstawowym, nie da się ustalić zapomocą tak ogólnych definicyj, aby istota każdej ze wspomnianych czterech czynności była oznaczona ogólnie w stosunku do elementów każdego dowolnego zbioru. Istnieją wszakże pewne ogólne zasady, któremi kierujemy się zwykle przy podawaniu dla elementów uważanego zbioru definicyj czterech podstawowych działań arytmetycznych.

W niniejszym rozdziale zamierzamy podać pewne ogólne rozważania, których celem będzie wyjaśnienie istoty działań podstawowych oraz ustanowienie wspomnianych wyżej zasad, któremi kierujemy się przy podawaniu definicyj tych działań dla elementów rozważanego zbioru.

Oznaczmy przez Z pewien zbiór wielkości i przyjmijmy, iż liczba elementów, stanowiących razem zbiór Z jest równa pewnej liczbie całkowitej n różnej od zera. Załóżmy dalej, iż po uszeregowaniu elementów uważanego zbioru w pewnym określonym porządku

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \qquad (1)$$

gdzie a_i oznacza element i-ty możemy, przynajmniej w przypadku, gdy zarówno wybór elementów (1), jak również i sposób ich uporządkowania czynią zadość pewnym warunkom ograniczającym, wyznaczyć przez wykonanie na elementach zbioru Z pewnej czynności C określonej przez pewną definicję $\mathcal{D}$ przynajmniej jeden element x zbioru Z.

W omawianym przypadku powiadamy, iż czynność C w odniesieniu do elementów uważanego zbioru Z stanowi pewne działanie /arytmetyczne/ określone za pomocą definicji $\mathcal{D}$; elementowi x nadajemy nazwę wyniku działania C. Celem uproszczenia dalszych rozważań, przyjmijmy następującą umowę:

Jeżeli, uważając jakikolwiek zbiór wielkości Z, określimy pewien symbol S z zachowaniem następujących warunków:

1°. w uważanym zbiorze Z istnieje przynajmniej jeden element, którego symbolem byłby symbol S,

2°. dwa elementy zbioru Z, z których każdy może być uważany za taki, którego symbolem jest symbol S, są zawsze sobie równe,

i 3°. jeżeli z dwóch równych sobie elementów, należących do zbioru Z jeden może być uważany za element, którego symbolem jest symbol S wówczas i drugi z rzeczonych elementów może być uważany za element, którego symbolem jest symbol S,

wówczas powiadamy, iż symbol S posiada ściśle oznaczoną wartość, zaś każdy element, za symbol którego może być uważany symbol S, przedstawia wartość rzeczonego symbolu.

Zauważmy, iż podając w odniesieniu do elementów oznaczonego zbioru Z definicje jakiegokolwiek działania zastosowujemy się zawsze do wymagań następujących:

1°. Jeżeli pewien oznaczony element x należący do uważanego zbioru Z może być uważany za wynik wykonania pewnego działania, na pewnych elementach rzeczonego zbioru, wówczas element x może być uważany za wynik rozważanego działania, wykonanego na elementach odpowiednio równych elementom wpierw rozważanym.

i 2°. Jeżeli pewien element x, należący do uważanego zbioru Z może być uważany za wynik wykonania pewnego działania, na pewnych elementach zbioru Z, wówczas każdy element równy elementowi

x może być uważany za wynik wykonania uważanego działania na uważanych elementach, innemi słowy

1°. Wynik działania winien zależeć wyłącznie od wartości elementów, które poddajemy działaniu,

i 2°. Wynik działania, wykonanego na oznaczonych elementach, winien być oznaczony tylko co do wartości.

Jeżeli pewien element x, należący do zbioru Z, jest wynikiem wykonania pewnego działania /lub szeregu działań/ na oznaczonych elementach

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\ldots a_{i_k} \tag{2}$$

uważanego zbioru, wówczas powiadamy, iż element x jest funkcją elementów (2). Ponieważ każdy zespół oznaczonych działań może być oczywiście uważany za pewne działanie, przeto pojęcie działania nie różni się istotnie od pojęcia funkcji.

§ 2.

Działania jedno- i wieloznaczne.

Jeżeli po dokonaniu wyboru elementów zbioru Z na których ma być w następstwie wykonane pewne oznaczone działanie D i odpowiedniem ich uszeregowaniu tylko równe elementy zbioru Z mogą być uważane za wynik wykonania działania D na rzeczonych elementach, wówczas powiadamy, iż działanie D jest działaniem jednoznacznem. Jeżeli natomiast nie wszystkie elementy zbioru Z, spełniające definicję wyniku działania D są sobie równe, wówczas działanie D nazywamy działaniem wieloznacznem.

Należy zaznaczyć, iż ewentualna wieloznaczność działania nie sprzeciwia się bynajmniej przytoczonym wyżej zasadom, do których stosujemy się zawsze przy podawaniu dla elementów uważanego zbioru definicji pewnego działania D. W samej rzeczy, jeżeli oznaczymy przez X zbiór tych wszystkich nierównych sobie elementów zbioru Z, które czynią zadość definicji wyniku działania D określonego dla każdego zbioru

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\ldots a_{i_k}$$

odpowiednio uszeregowanych elementów zbioru Z, wówczas definicja działania D będzie czynić zadość wspomnianym warunkom, skoro tylko

1°. zastąpienie elementów

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\ldots a_{i_k}$$

zbioru Z przez odpowiednio równe elementy

$$a'_{i_1}, a'_{i_2} \ldots\ldots\ldots a'_{i_k}$$

nie wywoła żadnej zmiany w zbiorze X

oraz 2° każdy element należący do zbioru Z i równy jakiemukolwiek elementowi zbioru X sam do zbioru X będzie należeć.

Uwagi powyższe uwydatniają jeszcze bardziej ścisły związek, jaki istnieje pomiędzy pojęciem działania i pojęciem funkcji.*)

§ 3.

Pojęcie przemienności działania.

Zanim przystąpimy do dalszych rozważań, wprowadzimy jeszcze oznaczenia, które pozwolą nam w dalszym ciągu połączyć większą jasność wykładu z większą zwięzłością.

Wynik wykonania oznaczonego działania na oznaczonych elementach

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n \tag{3}$$

oznaczonego zbioru Z uważanych w wymienionym porządku, czyli funkcję elementów (3) oznaczać będziemy zapomocą symbolu

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

---

*) Porównaj definicje jedno- i wielowartościowej funkcji jednej zmiennej w artykule prof. W. Sierpińskiego "Teorja funkcji zmiennych rzeczywistych" Poradnik dla samouków. Tom I. Warszawa 1923 str. 225 i nast.

Symbol F przyjmujemy za symbol rozważanego działania i nazywamy go charakterystyką działania lub funkcji, symbole zaś

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

elementów zbioru Z na których wykonywujemy uważane działanie nazywamy argumentami funkcji.

Jeżeli wynik pewnego działania D zależy wyłącznie od wartości elementów zbioru Z, na których uważane działanie ma być wykonane, nie zależy zaś od ich uporządkowania, wówczas powiadamy, iż działanie D posiada własność przemienności.

Jeżeli zgodnie z przyjętą przez nas powyżej umową oznaczymy wynik wykonania pewnego działania na elementach

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \tag{4}$$

zbioru Z przez

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

wówczas w przypadku, gdy uważane działanie posiada własność przemienności, jakakolwiek przemiana porządku elementów (4) w symbolu

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

nie wpływa na wartość tego elementu zbioru Z, za którego symbol przyjmujemy symbol

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

Odwrotnie, jeżeli jakakolwiek przemiana dowolnie danych elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

zbioru Z w symbolu

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

nie wpływa na wartość tego symbolu, wówczas działanie, za którego symbol przyjmujemy symbol F, posiada własność przemienności.

W związku z przytoczonemi przez nas powyżej uwagami, dotyczącemi pojęcia przemienności działania, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie.

I. Jeżeli po dokonanym wyborze i uszeregowaniu w oznaczonym porządku elementów uważanego zbioru, które mają być poddane pewnemu określonemu działaniu D, zmiana porządku następowania po sobie dwu jakichkolwiek sąsiednich elementów nie wpływa na wynik uważanego działania, wówczas działanie D posiada własność przemienności.

Dowód powyższego twierdzenia daje się przeprowadzić z łatwością.

W samej rzeczy, ponieważ od każdej dowolnie danej przemiany oznaczonych przedmiotów, możemy zawsze przejść do każdej innej przemiany tychże przedmiotów zapomocą wykonania stosownego ciągu przestawień dwu bezpośrednio następujących po sobie przedmiotów, przeto z uwagi, iż na mocy założenia naszego twierdzenia zmiana następstwa dwu sąsiednich elementów nie wpływa na wynik działania, możemy zawsze od jakiegokolwiek danego uszeregowania elementów, które mają ulec działaniu, przejść do każdego innego uszeregowania rzeczonych elementów zapomocą wykonania skończonej liczby takich czynności, z których każda nie wpływa na wynik działania. Z powyższego wynika natychmiast, iż uważane działanie posiada własność przemienności.

§ 4.

Reguły używania nawiasów.

Podamy teraz pewne ogólne uwagi, dotyczące używania nawiasów w teorji działań.

Załóżmy, iż pewien element x należący do zbioru Z /wraz z pewnemi innemi elementami, należącemi do uważanego zbioru/ ma być poddany pewnemu działaniu D. Załóżmy dalej że na mocy pewnych przyjętych definicyj możemy wynik w działania D wykonanego na uważanych elementach przedstawić w postaci pewnego symbolu S do którego wchodziłby element x. Jeżeli z kolei element x może być uważany za wynik pewnego działania Δ określonego dla elementów uważanego zbioru Z i na mocy pewnych definicyj może być przedstawiony przez pewien symbol Σ , zawierający elementy zbioru Z podlegające działaniu Δ , wówczas wynik w działania D wykonanego na rzeczonych elementach przedstawiamy często zapomocą symbolu S' w który przechodzi symbol S , gdy symbol x zastąpimy przez zamknięty w nawiasie symbol Σ . Gdyby w skład symbolu Σ wchodziły już nawiasy, wówczas w celu zapewnienia większej jasności symboliki zamykamy symbol Σ w nawiasy różniące się kształtem od tych, które wchodzą w skład uważanego symbolu. Tworząc symbol S' z symbolu S zamykamy z reguły symbol Σ w nawiasy, celem uniknięcia wątpliwości w znaczeniu symbolu S , które mogłyby powstać, gdybyśmy podstawili zamiast symbolu x symbol Σ . Zdarzają się jednak przypadki, gdy pominięcie nawiasów nie pociąga za sobą niejasności. W wymienionych przypadkach, w celu uproszczenia budowy symbolu , zwykle nawiasy opuszczamy. Nie jest jednak rzeczą możliwą podanie całkiem ogólnych reguł, dotyczących przypadków w których bez obawy niejasności możnaby opuścić nawiasy. W pewnych szczególnych przypadkach przy opuszczaniu nawiasów kierujemy się powszechnie przyjętym zwyczajem. Przypadki te rozważymy w dalszym ciągu.

§ 5.

Pojęcie tożsamości i równania.

Każdy symbol wyrażający, iż pewne elementy mają być poddane pewnemu działaniu, lub szeregowi działań, nazywamy wzorem lub wyrażeniem matematycznem.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań podamy pewne wyjaśnienia dotyczące niezmiernie ważnego pojęcia równoważności dwu układów związków.

Oświadczenie, iż pewne dwa układy orzeczeń U_1 i U_2 /lub pojedyncze orzeczenia/ są sobie równoważne oznacza, iż logicznem następstwem faktu, iż jeden z uważanych układów wyraża prawdziwy stan rzeczy jest fakt, iż drugi z rzeczonych układów wyraża również prawdziwy stan rzeczy. Jeżeli więc orzekamy, iż pewien układ równości lub nierówności R_1

jest równoważny pewnemu innemu układowi równości lub nierówności R_2, to tem samem stwierdzamy, iż żaden z uważanych układów R_1 i R_2 nie może zachodzić, skoro nie zachodzi i drugi. Innemi słowy, układy R_1 i R_2 jednocześnie tylko zachodzić mogą.

Uważając równość postaci

$$W = W_1 \tag{5}$$

gdzie W i W_1 oznaczają dwa wzory /lub symbole pojedyńczych elementów danego zbioru/ możemy odróżnić dwa przypadki.

W pierwszym z rzeczonych przypadków równość (5) może zachodzić bez względu na wybór elementów wchodzących w skład każdego ze wzorów W i W_1. W takim razie równość

$$W = W_1$$

nazywamy tożsamością /identycznością /. Tożsamość wyraża więc, iż wynik do którego doprowadza wykonanie zaznaczonych we wzorze W działań na pewnych dowolnie przyjętych elementach danego zbioru, z tem jednem zastrzeżeniem, aby zaznaczone we wzorze działania były wykonalne na elementach danego zbioru jest równy wynikowi, do którego doprowadza wykonanie zaznaczonych we wzorze W_1 działań na uważanych elementach, byle tylko były spełnione warunki wykonalności tych działań.

Z określenia tożsamości wynika, iż tożsamość nie wyraża żadnej własności elementów wchodzących w skład wzorów połączonych znakiem równości, lecz tylko pewną własność działań zaznaczonych w rzeczonych wzorach.

Obok rozpatrzonego powyżej, może zajść również drugi przypadek. Mianowicie równość

$$W = W_1$$

może być spełniona tylko w tym przypadku, gdy wybór elementów wchodzących w skład wzorów W i W_1 podlega dalej idącym ograniczeniom aniżeli tym, które określają warunki wykonalności działań zaznaczonych w uważanych wzorach. W tym przypadku równość

$$W = W_1$$

nazywamy równaniem. Równanie wyraża więc pewne ograniczenie, co do wyboru elementów wchodzących w skład wzorów W i W_1.

Może się zdarzyć jednak, iż wogóle nie istnieją takie wartości elementów wchodzących w skład wzorów W i W_1 przy których byłaby spełniona równość

$$W = W_1;$$

w tym ostatnim przypadku orzekamy, iż równanie

$$W = W_1$$

jest niemożliwe.

Oczywiście możemy rozróżnić dwa całkiem analogiczne przypadki w stosunku do każdego ze związków

$$W > W_1$$

oraz

$$W \leqq W_1$$

gdzie W oraz W_1 oznaczają, jak poprzednio, dwa wzory; każdy bowiem z wymienionych związków może zachodzić albo pod jednym warunkiem, iżby działania zaznaczone we wzorach W i W_1 były wykonalne lub też, jeżeli wogóle każdy z rzeczonych związków może zachodzić, to jedynie przy dalszych jeszcze ograniczeniach dotyczących wyboru elementów wchodzących w skład każdego ze wzorów W i W_1.

Słownictwo matematyczne nie rozporządza jednak specjalnemi nazwami, dla odróżnienia od siebie tych przypadków.

§ 6.

Pewien szczególny typ działań /działania typu (T) /

Jak już zaznaczyliśmy /§ 1/ niepodobieństwem jest podać tak ogólną definicję jakiegokolwiek działania, aby można było uważać rzeczone działanie za określone zgóry w stosunku do każdego zbioru, skoro tylko dla elementów uważanego zbioru zostało ustanowione pojęcie równości.

Wobec powyższego wyrazy: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie możemy uważać za nazwy określonych działań w odniesieniu do elementów danego zbioru tylko na podstawie specjalnie dla danego zbioru ustanowionych definicyj. Przy ustanawianiu definicyj rzeczonych działań dla różnych zbiorów stosujemy się zawsze do pewnych zasad ogólnych.

W celu należytego wyjaśnienia wspomnianych zasad zajmiemy się rozpatrzeniem własności pewnego szczególnego typu działań. W dalszym ciągu naszego wykładu rzeczone działania będziemy nazywać działaniami typu (T).*)

Wspólną cechę wszystkich działań typu (T) stanowi specjalny charakter ich definicyj. Mianowicie, podając definicję jakiegokolwiek działania tego typu dla elementów jakiegokolwiek zbioru Z czynimy to zawsze w sposób następujący.

Przedewszystkiem zapomocą pewnej definicji Δ specjalnie dla danego zbioru Z obmyślonej, określamy uważane działanie D w przypadku szczególnym, gdy działaniu D podlegają naraz tylko dwa elementy, należące do uważanego zbioru Z. Jest rzeczą oczywistą, iż definicja Δ winna być w taki sposób zbudowana, iżby były spełnione warunki do których postanowiliśmy się stosować przy ustanawianiu definicji jakiegokolwiek działania wogóle. Definicja Δ winna być nadto taką, aby określone przez nią działanie D było jednoznacznem i wykonalnem na elementach uważanego zbioru Z bez zastrzeżeń.

W celu uproszczenia dalszych rozważań przyjmijmy za symbol wyniku działania D wykonanego na elementach a i b zbioru Z symbol następujący

$$F(a, b)$$

---

*) Nazwa ta została wprowadzona przez prof. S. Zarembę w dziele "Arytmetyka teoretyczna" Kraków 1912, str. 58.

uważając przytem element a za pierwszy, element zaś b za drugi.[*)]

Następnie, mając już określone zapomocą definicji Δ działanie D w przypadku, gdy tylko dwa elementy należące do zbioru Z mają być poddane uważanemu działaniu, rozszerzamy pojęcie działania D tak, aby dowolna liczba n, $(n \geqslant 2)$ elementów uważanego zbioru Z mogła być poddana działaniu D postępując w sposób następujący:

oznaczmy przez

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n \tag{6}$$

gdzie $n > 2$ ciąg oznaczonych elementów zbioru Z, które mają być poddane działaniu D i przyjmijmy

$$s_i = F(s_{i-1}, a_i) \tag{7}$$

gdzie

$$i = 2, 3, 4, \ldots\ldots n$$

kładąc jednocześnie

$$s_1 = a_1$$

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej,[**)] spostrzegamy natychmiast, iż wzór (7)

---

*) Zaznaczamy wyraźnie, iż nie wyłączamy bynajmniej przypadku w którym role elementów a i b określone w definicji Δ działania D niczem by się nie różniły od siebie, a więc przypadku, w którym nie byłoby potrzeby oznaczania ich porządku.

**) Zasada znana pod nazwą zasady indukcji matematycznej /lub zupełnej/ daje się przedstawić w postaci następującego pewnika.

Jeżeli pewne orzeczenie (Ω), obejmujące pewną liczbę całkowitą n sprawdza następujące warunki:

1°. Uważane orzeczenie (Ω) jest prawdziwe w przypadku szczególnym, gdy liczba całkowita n równa się pewnej oznaczonej liczbie całkowitej k, określa w zupełności wartość każdego z pośród symbolów

$$s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$$

jakąkolwiek, byle od liczby 2 nie mniejszą byłaby liczba całkowita n.

Każdy element uważanego zbioru Z, przedstawiający wartość symbolu s_n nazywamy wynikiem wykonania działania D na elementach (6) uważanych w wymienionym porządku.

Powyższa definicja czyni oczywiście zadość warunkom, do których postanowiliśmy zawsze stosować się przy podawaniu definicji jakiegokolwiek działania i określa działanie D, jako działanie jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.

§ 7.

Pojęcie własności łączności działania typu (T).

Przyjmijmy ogólnie za symbol wyniku wykonania działania D na elementach

---

2°. gdyby było rzeczą stwierdzoną, iż orzeczenie (Ω) jest prawdziwe w przypadku, gdy liczba całkowita n równa się pewnej dowolnie przyjętej liczbie całkowitej p nie mniejszej od liczby k, to uważane orzeczenie byłoby prawdziwem również w przypadku, gdy liczba n równa się liczbie całkowitej o jedność większej od liczby p,

to w takim razie orzeczenie (Ω) jest prawdziwem, jakąkolwiek byle od liczby k nie mniejszą byłaby liczba całkowita n. /Porównaj S. Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych. Kraków 1907. str. 10/.

Po bliższe szczegóły, dotyczące zasady indukcji matematycznej, odsyłamy czytelnika do dzieła S. Zaremba. Wstęp do analizy. Część I. Warszawa 1915. str. 42 i nast.

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

zbioru Z uważanych w wymienionym porządku symbol następujący

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n).$$

Załóżmy, iż w szczególnym przypadku, gdy

$$n = 3$$

mamy

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_1, F(a_2, a_3))\ ^{*)} \quad (8)$$

niezależnie od wyboru elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

należących do zbioru Z.

Powiadam, iż jeżeli jest spełniona równość (8) wówczas zachodzi twierdzenie następujące:

Jeżeli oznaczymy przez C ciąg, który otrzymalibyśmy z ciągu

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \quad (9)$$

zastępując w nim dowolną, byle od liczby n mniejszą liczbę $k, (k \geqslant 2)$ bezpośrednio następujących po sobie wyrazów przez wynik wykonania działania D na uważanych wyrazach, wówczas wynik wykonania działania D na elementach, stanowiących ciąg (9) będzie równać się wynikowi wykonania działania D na wyrazach ciągu C o ile przy wykonaniu działania D na elementach, stanowiących ciąg C, zostanie zachowany taki porządek elementów podlegających działaniu, w jakim elementy te następują po sobie w ciągu C.

Powyższa własność działania D nosi nazwę

---

*) Zaznaczamy, iż równość (8), która zależnie od brzmienia definicji Δ działania D może zachodzić, lub nie zachodzić, należy starannie odróżniać od równości

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(F(a_1, a_2), a_3)$$

która zawsze zachodzi, gdy jest następstwem przyjętej przez nas definicji działania D.

własności łączności.

Opierając się na pojęciu łączności, możemy nadać wypowiedzianemu powyżej twierdzeniu brzmienie następujące:

II. Jeżeli pewne działanie D typu (T) posiada własność łączności w przypadku szczególnym, gdy liczba elementów podlegających uważanemu działaniu jest równa 3, wówczas działanie to posiada własność łączności i w przypadku, gdy liczba elementów równa się jakiejkolwiek oznaczonej liczbie całkowitej n.

Dowód przeprowadzimy zapomocą indukcji zupełnej.

W celu udowodnienia naszego twierdzenia, założmy najpierw, iż mamy

$$k = 2$$

Oznaczmy przez a_i i a_{i+1} dwa bezpośrednio następujące po sobie elementy ciągu (9) i połóżmy

$$b = F(a_i, a_{i+1})$$

Gdybyśmy mieli

$$i = 1$$

wówczas na mocy samej definicji działania D mielibyśmy zgodnie z brzmieniem twierdzenia

$$F(a_1, a_2, a_3, \dots a_n) = F(b, a_3, a_4, \dots a_n)$$

Załóżmy przeto, iż

$$i > 1$$

i w razie, gdyby liczba całkowita i była większa od liczby 2, przyjmijmy

$$c = F(a_1, a_2, \dots a_{i-1})$$

umawiając się jednocześnie, iż w przypadku, gdy mamy

$$i = 1$$

należy przyjąć

$$c = a_1$$

Przy powyższych oznaczeniach mamy bezpośrednio na mocy definicji działania D

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = F(F(c, a_i, a_{i+1}), a_{i+2}, \ldots a_n)^{*)} \tag{10}$$

Ponieważ zgodnie z założeniem twierdzenia, działanie D posiada własność łączności w szczególnym przypadku, kiedy trzy elementy podlegają działaniu, przeto mamy

$$F(c, a_i, a_{i+1}) = F(c, F(a_i, a_{i+1}))$$

Skąd z uwagi na równość

$$b = F(a_i, a_{i+1})$$

otrzymujemy

$$F(c, a_i, a_{i+1}) = F(c, b)$$

Wobec powyższego równość (10) możemy napisać w postaci

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = F(F(c, b), a_{i+2}, \ldots a_n) \tag{11}$$

Z drugiej strony mamy, na mocy definicji działania D

$$F(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b, a_{i+2}, \ldots a_n) = F(F(c, b), a_{i+2}, \ldots a_n) \tag{12}$$

Ponieważ zaś z równości (11) i (12) mamy

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = F(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b, a_{i+2}, \ldots a_n)$$

przeto stwierdzamy, iż twierdzenie nasze w przypadku

$$k = 2$$

jest bezsprzecznie prawdziwe.

Załóżmy teraz, iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w przypadku, gdy

---

*) We wzorze powyższym zakładamy milcząco, iż $i+1 < n$. Czytelnik zauważy z łatwością, jaką postać przyjmie wzór (10) a w związku z nim i wzory dalsze, gdyby było $i+1 = n$.

$$k=p$$

i rozpatrzmy przypadek, w którym mielibyśmy

$$k=p+1$$

Weźmy pod uwagę ciąg

$$a_i, a_{i+1}, \ldots\ldots a_{i+p}$$

który wyjęliśmy z ciągu (9) i połóżmy teraz

$$b=F(a_i, a_{i+1}, \ldots\ldots a_{i+p-1}) \tag{13}$$

Na mocy uczynionego założenia oraz równości (13) mamy

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)=F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_{i-1}, b, a_{i+p}, \ldots a_n) \tag{14}$$

Ponieważ zaś w przypadku

$$k=2$$

twierdzenie nasze zostało już udowodnione, przeto

$$F(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b, a_{i+p}, \ldots\ldots a_n)= \tag{15}$$
$$=F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_{i-1}, F(b, a_{i+p}), a_{i+p+1}, \ldots\ldots a_n)$$

Z drugiej strony na mocy definicji działania D mamy

$$F(b, a_{i+p})=F(a_i, a_{i+1}, \ldots\ldots a_{i+p})$$

Przeto

$$F(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b, a_{i+p}, \ldots\ldots a_n)= \tag{16}$$
$$=F(a_1, \ldots a_{i-1}, F(a_i, a_{i+1}, \ldots a_{i+p}) a_{i+p+1}, \ldots a_n)$$

Z równości (14) i (16) otrzymujemy natychmiast równość

$$F(a_1, \ldots\ldots a_n)=F(a_1, \ldots a_{i-1}, F(a_i, \ldots a_{i+p}), a_{i+p+1}, \ldots\ldots a_n)$$

wyrażającą właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy udowodnić.

Ponieważ udowodniliśmy, iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w przypadku, gdy $k=2$, nadto okazaliśmy, iż gdyby twierdzenie było prawdziwe przy $k=p$, $(p\geqslant 2)$ wówczas byłoby również prawdziwe i przy $k=p+1$, przeto opierając się na zasadzie indukcji matematycznej wnosimy natychmiast, iż twierdzenie nasze zachodzi w każdym razie.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

III. Jeżeli pewne działanie D typu (T) posiadające własność przemienności w szczególnym przypadku, gdy działaniu podlegają tylko dwa elementy oznaczonego zbioru Z, posiada nadto własność łączności, to uważane działanie D posiada własność przemienności i w tym przypadku, gdy liczba elementów, podlegających działaniu, jest równa jakiejkolwiek liczbie oznaczonej n.

Dowód powyższego twierdzenia daje się przeprowadzić z łatwością.

W samej rzeczy, niech jak wyżej

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

oznacza wynik wykonania działania D na elementach

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$$

zbioru Z uważanych w wymienionym porządku.

Ponieważ zgodnie z założeniem twierdzenia, uważane działanie posiada własność łączności, przeto mamy

$$\begin{aligned} &F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) = \\ &= F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, F(a_i, a_{i+1}), a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) \end{aligned} \tag{17}$$

oraz

$$\begin{aligned} &F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) = \\ &= F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, F(a_{i+1}, a_i), a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) \end{aligned} \tag{18}$$

Z drugiej strony na mocy założenia twierdzenia

$$F(a_i, a_{i+1}) = F(a_{i+1}, a_i)$$

Wobec powyższego

$$F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, F(a_i, a_{i+1}), a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) =$$

$$= F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, F(a_{i+1}, a_i), a_{i+2}, \ldots\ldots a_n)$$

skąd ze względu na związki *(17)* i *(18)* otrzymujemy

$$F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\ldots a_n) =$$

$$= F(a_1, \ldots\ldots a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots\ldots a_n)$$

Ponieważ, zgodnie z równością powyższą, przemiana porządku następowania po sobie dwu jakichkolwiek sąsiednich elementów ciągu

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

w symbolu

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

pozostaje bez wpływu na wartość tego symbolu, przeto na mocy twierdzenia *I* udowodnionego przez nas w § 3 wnosimy, iż twierdzenie nasze zachodzi w podanem brzmieniu.

Na zakończenie rozważań niniejszego § podamy jeszcze dowód następującego twierdzenia.

IV. Jeżeli pewne działanie D typu *(T)* posiada własność przemienności w szczególnych przypadkach, gdy liczba elementów podlegających działaniu jest równa liczbie *2* lub *3*, wówczas działanie D posiada jednocześnie obydwie własności przemienności i łączności, i w przypadku, gdy liczba elementów podlegających działaniu D jest równa jakiejkolwiek liczbie oznaczonej n.

W celu dowiedzenia naszego twierdzenia weźmy pod uwagę ciąg

$$a_1, a_2, a_3$$

składający się z oznaczonych elementów zbioru Z.

Na mocy założenia naszego twierdzenia mamy

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_2, a_3, a_1) \quad (19)$$

oraz

$$F(F(a_2, a_3), a_1) = F(a_1, F(a_2, a_3)) \quad (20)$$

Z drugiej strony, ponieważ zgodnie z definicją działania D mamy w każdym razie

$$F(a_2, a_3, a_1) = F(F(a_2, a_3), a_1)$$

przeto równość (20) możemy napisać w postaci

$$F(a_2, a_3, a_1) = F(a_1, F(a_2, a_3));$$

uwzględniając zaś równość (19) dochodzimy do równości

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_1, F(a_2, a_3))$$

wyrażającej, iż działanie D posiada własność łączności w przypadku, gdy 3 elementy podlegają uważanemu działaniu. Opierając się przeto na udowodnionem powyżej twierdzeniu II wnosimy natychmiast, iż działanie D, posiada własność łączności w przypadku najogólniejszym. Z drugiej strony z uwagi, iż zgodnie z założeniem naszego twierdzenia działanie D posiada własność przemienności w przypadku szczególnym, gdy dwa elementy podlegają uważanemu działaniu wnosimy, opierając się na twierdzeniu III tego §, iż działanie D posiada własność przemienności i w tym przypadku, gdy liczba elementów podlegających działaniu jest równa jakiejkolwiek liczbie oznaczonej n.

Udowodniliśmy więc, iż działanie D posiada jednocześnie własności łączności i przemienności, bez względu na liczbę elementów podlegających działaniu. Twierdzenie nasze zachodzi przeto w podanem brzmieniu.

Do rozważań naszych dotyczących własności łączności działania typu (T) dołączymy jeszcze następującą uwagę. W razie, gdy oznaczone działanie D typu (T) posiada własność przemienności, wówczas posiada ono własność łączności w znaczeniu nieco szerszem aniżeli to, które wynika z podanego przez nas wyżej określenia. Mianowicie w przypadku, gdy uważane działanie D posiada własność przemienności, możemy zawsze zastąpić bez jakiegokolwiek wpływu na wynik działania, którekolwiek *) z pośród elementów podlegających działaniu, przez wynik wykonania działania D na uważanych elementach.

Wobec powyższego możemy, jakikolwiek dowolny element a z pośród elementów podlegających działaniu, zastąpić zawsze, bez spowodowania zmiany w wyniku uważanego działania, przez dowolną liczbę elementów zbioru Z tak dobranych, aby wynik wykonania działania D na tych elementach był równy elementowi a.

§ 8.

Działania odwrotne.

Weźmy pod uwagę pewne działanie D typu (T). Oznaczmy, jak poprzednio przez

$$F(a,b)$$

wynik wykonania uważanego działania D na dwu elementach

$$a \text{ i } b$$

zbioru Z, uważając przytem element a za pierwszy, element zaś b za drugi, i połóżmy

$$c = F(a,b) \tag{21}$$

W związku z równością powyższą wyłaniają się dwa zagadnienia. Jedno z rzeczonych zagadnień polega na wyznaczeniu elementu a, gdy dane są elementy b i c, drugie - na wyznaczeniu elementu b, gdy dane są elementy a i c. Oczywiście każde z tych zagadnień posiada, przy pewnych przynajmniej zastrzeżeniach, conajmniej jedno rozwiązanie. Równanie (21) prowadzi więc do określenia dwu nowych działań δ_1 i δ_2. Jedno z nich δ_1 określamy jako

---

*) Bez względu na to, czy uważane elementy następują po sobie bezpośrednio, czy też nie.

działanie, które wykonane na elementach c i b zbioru Z, uważanych w porządku w jakim je wymieniliśmy, daje jako wynik element a uważanego zbioru, drugie δ_2 jest działaniem, za wynik wykonania którego na elementach c i a należących do zbioru Z, uważanych w wymienionym porządku przyjmujemy element b tegoż zbioru.

Aby definicje powyższe były całkiem zgodne z temi zasadami, do których postanowiliśmy się stosować zawsze przy podawaniu definicji działania wogóle, oczywiście koniecznem jest i wystarczającem, iżby w razie równości

$$c = c'$$

oraz

$$b = b'$$

równości następujące

$$c = F(x, b)$$

i

$$c' = F(x, b')$$

były sobie równoważne, w razie zaś równości

$$c = c'$$

oraz

$$a = a'$$

były równoważne sobie równości

$$c = F(a, x)$$

i

$$c' = F(a', x)$$

Warunki powyższe są oczywiście zawsze spełnione, albowiem zgodnie z przyjętą przez nas umową, do której postanowiliśmy się zawsze stosować przy ustanawianiu definicji jakiegokolwiek działania wogóle /a więc i działania D typu (T) / koniecznem następstwem równości

$$\alpha = \alpha'$$

oraz

$$\beta = \beta'$$

jest równość

$$F(\alpha, \beta) = F(\alpha', \beta')$$

Określone przez nas powyżej działania δ_1 i δ_2 będą wogóle odmiennemi od siebie, niekoniecznie jednoznacznemi działaniami, przyczem każde z rzeczonych działań będzie wykonalne tylko w razie, gdy elementy podlegające działaniom δ_1 i δ_2 będą czynić zadość pewnym warunkom ograniczającym. Każde z działań δ_1 i δ_2 nazywamy działaniem odwrotnem względem uważanego działania D. W przypadku, gdyby działanie D posiadało własność przemienności, wówczas nie mielibyśmy potrzeby rozróżniania *) działań δ_1 i δ_2, bowiem w uważanym przypadku równania

$$c = F(a, b)$$

oraz

$$c = F(b, a)$$

są sobie równoważne. Jeżeli więc działanie D typu (T) posiada własność przemienności, wówczas działania δ_1 i δ_2 stanowią pewne jedno i to samo działanie δ odwrotne względem działania D, które określamy jako działanie, mające na celu wyznaczenie jednego z dwu elementów podlegających działaniu D skoro jeden z rzeczonych elementów oraz wynik wykonania na uważanych elementach działania D są dane.

Niech, jak wyżej

$$F(a, b)$$

oznacza wynik wykonania działania D na elementach a i b zbioru Z uważanych w wymienionym porządku. Udowodnimy dwa twierdzenia następujące:

V. Jeżeli przy pewnych wartościach elementu b nierówność

$$a \neq a'$$

pociąga za sobą nierówność

$$F(a, b) \neq F(a', b)$$

---

*) Jako dwu różnych działań.

wówczas przy rzeczonych wartościach elementu b działanie δ_1 w razie wykonalności jest działaniem jednoznacznem,
oraz

VI. Jeżeli przy pewnych wartościach elementu a nierówność

$$b \neq b'$$

pociąga za sobą nierówność

$$F(a,b) \neq F(a,b')$$

wówczas przy rzeczonych wartościach elementu a działanie δ_2 w razie wykonalności jest działaniem jednoznacznem.

Spostrzegamy natychmiast, iż twierdzenia powyższe różnią się od siebie tylko pod względem oznaczeń. Skoro zatem uzasadnimy jedno z rzeczonych twierdzeń, wówczas możemy uważać za uzasadnione również i drugie.

Okażemy przeto, iż pierwsze z wysłowionych przez nas powyżej twierdzeń jest prawdziwe.

W samej rzeczy załóżmy, iż w zbiorze Z istnieje element a , czyniący zadość równaniu

$$F(a,b) = c$$

Jeżeli oznaczymy przez a' jakikolwiek element zbioru Z spełniający nierówność

$$a \neq a'$$

wówczas element a' nie może sprawdzać równania

$$F(a',b) = c$$

bowiem mielibyśmy w takim razie

$$F(a,b) = F(a'b)$$

co sprzeciwia się założeniu, iż nierówność

$$a \neq a'$$

pociąga za sobą nierówność

$$F(a,b) \neq F(a',b)$$

Skoro zatem spełnione są założenia naszego twierdzenia, działanie δ_1 będzie rzeczywiście działaniem jednoznacznem.

Twierdzenia nasze zostały przeto udowodnione.

§ 9.

Pojęcie rozdzielności oznaczonego działania względem innego działania.

Wprowadzimy teraz pojęcie rozdzielności pewnego działania Δ względem pewnego innego działania D nie wymagając przytem, aby działania Δ i D były koniecznie działaniami typu (T), zakładając natomiast, iż obydwa uważane działania są działaniami jednoznacznemi, z których pierwsze Δ obejmuje dwa, drugie zaś D przynajmniej dwa elementy zbioru Z.

Oznaczmy przez

$$F(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$

wynik wykonania działania D na elementach

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n \tag{22}$$

$$n \geqslant 2$$

zbioru Z uważanych w wymienionym porządku i przyjmijmy za symbol wyniku wykonania działania Δ na elementach a i b zbioru Z symbol

$$\Phi(a,b)$$

uważając przytem element a za pierwszy, element zaś b za drugi.

Jeżeli niezależnie od wyboru $n+1$, $(n \geqslant 2)$ elementów

$$m, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

zbioru Z, dla którego zostały określone obydwa działania D oraz Δ zachodzą obydwie równości następujące

$$\Phi(m, F(a_1, a_2, \dots a_n)) =$$
$$= F(\Phi(m, a_1), \Phi(m, a_2), \dots \dots \Phi(m, a_n)) \tag{23}$$

oraz

$$\Phi(F(a_1, a_2, \dots a_n), m) =$$
$$= F(\Phi(a_1, m), \Phi(a_2, m), \dots \dots \Phi(a_n, m)) \tag{24}$$

wówczas powiadamy, iż działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania D.

Jeżeli działanie Δ posiada własność przemienności, wówczas obydwie równości (23) i (24) są oczywiście sobie równoważne.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

VII. Jeżeli pewne działanie Δ określone dla elementów zbioru Z posiada własność rozdzielności względem jakiegokolwiek działania D typu (T), określonego dla elementów uważanego zbioru, w szczególnym przypadku, gdy działaniu D podlegają tylko dwa elementy zbioru, wówczas działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania D i w tym przypadku, gdy liczba elementów podlegających działaniu D jest równa jakiejkolwiek liczbie całkowitej n.

Dowód naszego twierdzenia przeprowadzimy zapomocą indukcji zupełnej.

Zauważmy przedewszystkiem, iż na mocy założenia twierdzenie nasze zachodzi oczywiście, gdy

$$n = 2.$$

Załóżmy chwilowo, iż twierdzenie jest prawdziwe w przypadku, gdy

$$n = p$$

gdzie $p \geqslant 2$ i zwróćmy się do przypadku, gdy mamy

$$n = p + 1.$$

Weźmy pod uwagą ciąg

$$a_1, a_2, \ldots\ a_p, a_{p+1}$$

wyjęty z ciągu (22) i połóżmy zgodnie z definicją działania D, jako działania typu (T),

$$F(a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1}) = F(F(a_1, a_2, \ldots a_p), a_{p+1})$$

Ponieważ na mocy założenia twierdzenia, działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania D w przypadku, gdy działaniu podlegają tylko dwa elementy uważanego zbioru, przeto mamy

$$\Phi(m, F(a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1})) =$$

$$= \Phi(m, F(F(a_1, a_2, \ldots a_p), a_{p+1})) = \tag{25}$$

$$= F(\Phi(m, F(a_1, a_2, \ldots a_p)), \Phi(m, a_{p+1}));$$

nadto z uwagi, iż założyliśmy prawdziwość naszego twierdzenia w przypadku

$$n = p$$

mamy

$$\Phi(m, F(a_1, a_2, \ldots a_p)) =$$

$$= F(\Phi(m, a_1), \Phi(m, a_2), \ldots\ldots \Phi(m, a_p))$$

uwzględniając przeto równość (25) możemy napisać

$$\Phi(m, F(a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1})) =$$

$$= F(F(\Phi(m, a_1), \Phi(m, a_2), \ldots\ldots \Phi(m, a_p)), \Phi(m, a_{p+1})) \tag{26}$$

Z drugiej strony, ponieważ działanie D jest zgodnie z założeniem, działaniem typu (T) mamy w każdym razie

$$F(F(\Phi(m, a_1), \Phi(m, a_2), \ldots\ldots \Phi(m, a_p)), \Phi(m, a_{p+1})) =$$

$$= F(\Phi(m,a_1),\Phi(m,a_2)\ldots\ldots\Phi(m,a_{p+1})) \quad (27)$$

Z równości (26) i (27) otrzymujemy natychmiast równość

$$\Phi(m,F(a_1,\ldots a_{p+1})) = F(\Phi(m,a_1),\ldots\ldots\Phi(m,a_{p+1}))$$

wyrażającą właśnie twierdzenie, o którego dowód nam chodziło.

Udowodniliśmy więc, iż, gdyby twierdzenie nasze było prawdziwem w przypadku $n=p$ wówczas byłoby ono prawdziwe w przypadku, gdy $n=p+1$ ponieważ zgodnie z założeniem twierdzenia, działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania D w przypadku szczególnym, gdy $n=2$ przeto, opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, wnosimy, iż działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania D typu (T) jakąkolwiek, byle od liczby 2 nie mniejszą byłaby liczba elementów podlegających działaniu D.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy więc w zupełności.

§ 10.

Ogólne zasady teorji działań zasadniczych.

Opierając się na przeprowadzonych w poprzedzających paragrafach rozważaniach, zajmiemy się teraz szczegółowem omówieniem zasad, któremi kierujemy się przy ustanawianiu teorji działań zasadniczych.

Pragnąc zbudować dla danego zbioru wielkości Z teorję działań zasadniczych określamy zawsze zapomocą specjalnie dla uważanego zbioru ułożonych definicyj dodawania i mnożenie, jako dwa działania typu (T). Za odejmowanie przyjmujemy zawsze działanie odwrotne względem dodawania, dzielenie zaś określamy jako działanie odwrotne względem mnożenia.*)

---

*) Należy zaznaczyć, iż w niektórych przypadkach definicja dzielenia ma inną niż podana wyżej

Z rozważań powyższych wynika , iż zbudowanie teorji działań zasadniczych dla oznaczonego zbioru wielkości Z wymaga ustanowienia tylko dwu specjalnie dla uważanego zbioru obmyślonych definicyj, a mianowicie:

1°. Definicji wyniku dodania do dowolnie obranego elementu a zbioru Z drugiego dowolnie obranego elementu b należącego do zbioru Z.

2°. Definicji wyniku pomnożenia dowolnie obranego elementu a zbioru Z , przyjętego za mnożną przez drugi, przyjęty za mnożnik dowolnie obrany element b należący do zbioru Z.

Wynik wykonania działania dodawania na oznaczonych elementach zbioru Z nazywamy sumą uważanych elementów, same zaś elementy - ulegające dodawaniu - składnikami.

Wynik wykonania działania mnożenia na oznaczonych elementach zbioru Z nazywamy iloczynem uważanych elementów, a elementy ulegające mnożeniu - czynnikami.

Określiwszy ogólnie sumę i iloczyn elementów

---

postać. Istnieją takie zbiory wielkości , iż działanie dzielenia, określone jako działanie odwrotne względem mnożenia, nie zawsze jest wykonalne. Zdarza się mianowicie, iż w uważanym zbiorze Z nie istnieje element , który mógłby być uważany za wynik wykonania dzielenia na pewnych elementach a i b uważanego zbioru Z . Wykonalność dzielenia określonego w powyższym sensie jest wprawdzie możliwa , lecz tylko przy pewnych daleko idących ograniczeniach dotyczących wyboru elementów zbioru Z , które mają ulec dzieleniu. Zmuszeni przeto jesteśmy w celu zachowania właściwej matematyce cechy ogólności określić dzielenie elementów uważanego zbioru w sensie nieco odmiennym od wspomnianego. Mianowicie określamy dzielenie elementów zbioru Z jako działanie polegające na wyznaczeniu takiego elementu q należącego do uważanego zbioru, iżby była spełniona równość

$$a = b \cdot q + r$$

gdzie a i b oznaczają dwa elementy zbioru Z

zbioru Z w przypadku szczególnym, gdy tylko dwa elementy uważanego zbioru podlegają omawianym działaniom, określimy tem samem sumę i iloczyn jakiejkolwiek liczby n, $(n \geqq 2)$ dowolnie uporządkowanych elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

zbioru Z.
Mianowicie sumą elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n \tag{28}$$

uważanych w wymienionym porządku będzie ostatni wyraz s_n ciągu

$$s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots\ldots s_n \tag{29}$$

gdzie

$$s_1 = a_1$$

zaś

$$s_i$$

$$1 < i \leqq n$$

---

podlegające działaniu dzielenia, zaś r - element zbioru, czyniący zadość pewnym specjalnie dla danego zbioru Z określonym warunkom ograniczającym.

Można wszakże uważać dzielenie elementów zbioru Z za działanie, mające na celu przedstawienie w pewnej szczególnej postaci elementu x spełniającego równanie

$$a = b \cdot x$$

gdzie a i b są elementami uważanego zbioru. Wobec powyższego, podana przez nas definicja dzielenia elementów zbioru Z stanowi tylko pozorne odstępstwo od przyjętych wyżej zasad.

Czytelnik zauważy natychmiast, iż zbiór liczb całkowitych jest właśnie takim zbiorem Z, dla którego działanie dzielenia określamy w sposób wyżej omówiony. W dalszym ciągu wykładu poznamy inne przykłady takich zbiorów.

oznacza wynik dodania elementu a_i zbioru (28) do elementu s_{i-1} ciągu (29).

Podobnie, iloczynem elementów (28) uważanych w wymienionym porządku będzie ostatni wyraz ciągu

$$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n \tag{30}$$

gdzie

$$p_1 = a_1$$

zaś

$$p_i$$

$$1 < i \leqq n$$

oznacza wynik pomnożenia elementu a_i zbioru (28) przez element p_{i-1} ciągu (30).

Sumę elementów (28) uważanych w wymienionym porządku, przyjmując ogólnie za numer porządkowy elementu a_k wskaźnik k, oznaczamy zapomocą symbolu

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k \tag{31}$$

iloczyn zaś elementów (28) uważanych w porządku, w którym je wymieniliśmy, oznaczamy przez symbol

$$a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a_k \tag{32}$$

lub symbol

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots \cdot a_k \tag{33}$$

Często posługujemy się do oznaczania iloczynu symbolem

$$a_1 a_2 \ldots\ldots a_k \tag{34}$$

który otrzymujemy z symbolów (32) i (33) przez opuszczenie znaków mnożenia.

Symbol (31) czytamy " a_1 więcej a_2, więcej a_3, i t.d., więcej a_k ", symbole zaś (32), (33) lub (34) - " a_1 razy a_2, razy a_3, i t.d. razy a_k "

Zdarza się często, iż posługiwanie się symbolem (31) do oznaczania sumy oraz symbolami (32), (33) lub (34) w charakterze symbolów iloczynu jest zbyt uciążliwe i niewygodne. Podamy przeto pewien niezmiernie rozpowszechniony sposób symbolizowania sumy i iloczynu, posiadający w wielu przypadkach niezaprzeczoną wyższość nad sposobami wyżej przytoczonemi.

Załóżmy, iż dla każdej wartości całkowitej wskaźnika i, nie większej od pewnej liczby całkowitej n $(n>1)$ symbol

$$a_i$$

oznacza pewien określony element zbioru Z, dla którego zostało, zgodnie z przytoczonemi powyżej zasadami, określone działanie dodawania i uważajmy dwie liczby całkowite

$$p \text{ i } q$$

czyniące zadość nierównościom

$$p \leqq n$$

oraz

$$q \leqq n$$

Przyjmijmy za symbol pewnego elementu zbioru Z symbol

$$\sum_{i=p}^{i=q} a_i \tag{35}$$

którego znaczenie określamy zapomocą umów następujących:

1°. Jeżeli mamy równość

$$p=q$$

a więc jeżeli symbol (35) przyjmuje postać

$$\sum_{i=p}^{i=p} a_i$$

wówczas zachodzi równość następująca

$$\sum_{i=p}^{i=p} a_i = a_p$$

2^0. Jeżeli zachodzi nierówność

$$p < q$$

wówczas mamy

$$\sum_{i=p}^{i=q} a_i = \sum_{i=p}^{i=q-1} a_i + a_q$$

3^0. Jeżeli wreszcie

$$p > q$$

wówczas spełniona jest równość

$$\sum_{i=p}^{i=q} a_i = \sum_{i=p}^{i=q+1} a_i + a_q$$

Opierając się na zasadzie indukcji zupełnej spostrzegamy natychmiast, iż wartość elementu zbioru Z, za którego symbol przylęliśmy symbol (35) jest, na podstawie przyjętych przez nas umów, w zupełności oznaczona.

Symbol

$$\sum_{i=p}^{i=q} a_i$$

który czytamy " suma a_i, i od p do q " jest właśnie tym symbolem sumy, który pragnęliśmy podać.*)

Z określenia symbolu (35) wynika, iż w przypadku, gdy

$$p < q$$

symbol ten przedstawia sumę, której k-tym $(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots q - p + 1)$ składnikiem jest ele-

---

*) Symbol

$$\sum_{i=p}^{i=q}$$

nosi nazwę symbolu sumowania

ment

$$a_{p+k-1}$$

zbioru Z , w razie zaś nierówności

$$p>q$$

symbol (35) przedstawia sumę , której k-tym $(k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots p-q+1)$ składnikiem jest element

$$a_{p-k+1}$$

uważanego zbioru.

Z przytoczonych powyżej uwag wynika, iż w razie istnienia nierówności

$$p\neq q$$

każdy z symbolów

$$\sum_{i=p}^{i=q} a_i \tag{36}$$

oraz

$$\sum_{i=q}^{i=p} a_i \tag{37}$$

przedstawia sumę pewnych jednych i tych samych elementów zbioru Z ,lecz każda z uważanych sum odpowiada innemu uporządkowaniu składników. Jeżeli więc dodawanie elementów zbioru Z nie posiada własności przemienności, wówczas elementy zbioru Z za których symbole przyjmujemy symbole (36) i (37) mogą /lecz nie muszą *) / nie być sobie równe.

Zauważmy, iż w przypadku, gdy mamy

---

*) Ten ostatni przypadek zachodzi wówczas, gdy wszystkie elementy a_i w każdym z symbolów (36) i (37) oznaczają /jakkolwiek każdy z rzeczonych elementów posiada symbol odrębny / jeden i ten sam element zbioru Z .

$$p=q$$

symbol (55) nie przedstawia już sumy, lecz tylko element zbioru Z równy elementowi

$$a_p$$

Skoro jednak rozszerzymy znaczenie wyrazu "suma" w ten sposób, aby wyrażenie "suma o jednym składniku" nie było pozbawione znaczenia, a to na podstawie umowy, iż suma o jednym składniku oznacza element zbioru Z równy uważanemu jedynemu składnikowi sumy, wówczas możemy bez obawy niejasności zachować dla symbolu

$$\sum_{i=p}^{i=p} a_i$$

nazwę sumy.*)

Podamy teraz, analogiczny do przytoczonego wyżej symbolu sumy, symbol iloczynu.

Rozumiejąc, jak wyżej, przez

$$a_i$$

$$i \leqq n$$

oznaczony element zbioru Z, dla którego określiliśmy działanie mnożenia, jako działanie typu (T) i oznaczając przez

$$p \quad \text{i} \quad q$$

dwie liczby całkowite, spełniające nierówności

$$p \leqq n$$

oraz

$$q \leqq n$$

---

*) Po bliższe szczegóły, dotyczące własności symbolu sumy odsyłamy czytelnika do dzieła S. Zaremby. Arytmetyka teoretyczna. Kraków 1912. str. 501 i nast.

przyjmijmy za symbol pewnego elementu zbioru Z symbol

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i \tag{38}$$

którego znaczenie określamy zapomocą umów następujących:

1°. Jeżeli mamy

$$p = q$$

jeżeli więc symbol (38) przyjmuje postać

$$\prod_{i=p}^{i=p} a_i$$

to w takim razie zachodzi równość

$$\prod_{i=p}^{i=p} a_i = a_p$$

2°. Jeżeli jest spełniona nierówność

$$p < q$$

wówczas mamy

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i = \left(\prod_{i=p}^{i=q-1} a_i\right) \times a_q$$

3°. Wreszcie, jeżeli

$$p > q$$

to w takim razie

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i = \left(\prod_{i=p}^{i=q+1} a_i\right) \times a_q$$

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, podobnie jak w przypadku sumy, wnosimy, iż powyższa definicja symbolu (38) określa w zupełności wartość tego elementu zbioru Z, za którego symbol przyjmujemy symbol (38).

Symbol

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i$$

który czytamy "iloczyn a_i, i od p do q "jest tym symbolem iloczynu, który pragnęliśmy wprowadzić.*)

Z podanej definicji symbolu iloczynu wynika, iż symbol

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i$$

przedstawia iloczyn, w którym k-tym czynnikiem jest jeden z elementów

$$a_{p+k-1}$$

i

$$a_{p-k+1}$$

zależnie od tego, czy

$$p < q$$

czy też

$$p > q$$

W pierwszym z uważanych przypadków liczba wszystkich czynników jest równa

$$q - p + 1$$

w drugim -

$$p - q + 1$$

Zaznaczmy, iż w przypadku gdy mnożenie elementów zbioru Z nie posiada własności przemienności, to w razie istnienia nierówności

---

*) Symbol

$$\prod_{i=p}^{i=q}$$

nosi nazwę symbolu brania iloczynu.

$$p \neq q$$

iloczyny

$$\prod_{i=p}^{i=q} a_i \tag{39}$$

oraz

$$\prod_{i=q}^{i=p} a_i \tag{40}$$

mogą /lecz bynajmniej nie muszą [x]) / nie być sobie równe, gdyż jakkolwiek każdy z symbolów (39) i (40) przedstawia iloczyn jednych i tych samych czynników, jednak uporządkowanie czynników w każdym z uważanych iloczynów jest różne.

W razie równości

$$p = q$$

symbol

$$\prod_{i=p}^{i=p} a_i \tag{41}$$

nie przedstawia już iloczynu, rozszerzając jednak znaczenie wyrazu " iloczyn " przez nadanie, jak to uczyniliśmy w przypadku sumy, znaczenia wyrażeniu "iloczyn o jednym czynniku" zachowujemy dla symbolu (41) nazwę iloczynu.

Oznaczanie sumy i iloczynu zapomocą symbolów (35) i (38) szczególnie jest dogodne wówczas, gdy liczba składników lub czynników nie jest oznaczona liczbowo.

W dalszym ciągu niejednokrotnie będziemy korzystać z omówionego wyżej sposobu symbolizowania sum i iloczynów.

Z istoty pojęcia działania odwrotnego względem pewnego innego działania wynika, iż ze względu na całkiem ogólne stanowisko zajmowane przez nas obecnie, wobec działań zasadniczych należy rozróżniać dwa rodzaje odejmowania, z których jedno

---

[x]) Porównaj odsyłacz na str. 33.

ma na celu wyznaczenie elementu x z równości

$$b+x=a \tag{42}$$

drugie zaś - elementu y z równości

$$y+b=a \tag{43}$$

gdzie a i b oznaczają dwa dane elementy zbioru Z.

Całkiem analogicznie winniśmy odróżniać dwa rodzaje dzielenia. Jeden ze wspomnianych rodzajów dzielenia miałby za zadanie wyznaczenie elementu u z równości

$$b\cdot u=a \tag{44}$$

celem zaś drugiego byłoby wyznaczenie elementu v z równości

$$v\cdot b=a \tag{45}$$

Jeżeli, jak to ma miejsce w większości przypadków, dodawanie elementów uważanego zbioru Z posiada własność przemienności, wówczas zgodnie z wypowiedzianemi w § 8 uwagami, istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania. Okoliczność tę możemy stwierdzić również bezpośrednio, niezależnie od podanej przez nas ogólnej teorji działań odwrotnych. W samej rzeczy, w przypadku przemienności dodawania elementów zbioru Z równość (43) jest równoważna równości

$$b+y=a$$

skąd wynika, iż zagadnienie wyznaczenia elementu y z równości (43) nie różni się od zagadnienia wyznaczenia elementu x z równości (42).

W razie przemienności dodawania elementów zbioru Z, a więc jeżeli istnieje tylko jeden rodzaj odejmowania, za symbol elementu x spełniającego równanie

$$b+x=a$$

przyjmujemy symbol

$$a-b$$

który czytamy " a mniej b ". W omawianym przypadku nazywamy element a odjemną, element zaś b - odjemnikiem. Wynik wykonania działania odejmowania nazywamy resztą.

Zgodnie z tem cośmy powiedzieli wyżej, równość

$$b+x=a$$

jest oczywiście równoważna równości

$$x=a-b$$

Podobnie, w razie przemienności mnożenia elementów zbioru Z istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia.

W uważanym przypadku za symbol elementu u spełniającego równanie

$$b \cdot u=a$$

przyjmujemy symbol

$$a:b$$

lub symbol

$$\frac{a}{b}$$

Każdy z przytoczonych powyżej symbolów czytamy " a przez b ". Wynik podzielenia elementu a przyjętego za dzielną przez element b przyjęty za dzielnik zowie się ilorazem. *)

*) W przypadku, gdy dzielenie elementów pewnego zbioru Z określamy jako działanie mające na celu wyznaczenie elementu q uważanego zbioru spełniającego równanie

$$a=b \cdot q+r$$

gdzie element r czyni zadość pewnym specjalnie dla danego zbioru Z określonym warunkom ograniczającym, zachowując przyjęte wyżej nazwy dla elementów a i b nazywamy element q - ilorazem, element zaś r — resztą dzielenia lub krótko resztą.

Zgodnie z wypowiedzianemi powyżej uwagami, równość

$$b \cdot u = a$$

jest równoważna równości

$$u = \frac{a}{b}$$

Działania dodawania i odejmowania nazywamy działaniami stopnia pierwszego, działania zaś mnożenia i dzielenia - działaniami stopnia drugiego.

Wszystkie cztery działania zasadnicze obejmujemy wspólną nazwą działań wymiernych.

Wszelkie połączenie oznaczonych elementów uważanego zbioru Z drogą działań wymiernych nazywamy funkcją wymierną uważanych elementów. Wyrażenie matematyczne, przedstawiające funkcję wymierną zowie się wyrażeniem wymiernem.

Rozważania nasze z teorji działań wymiernych uzupełnimy pewną uwagą, dotyczącą reguł używania nawiasów. Mianowicie, zachowując w mocy ogólne reguły używania nawiasów omówione w § 4, podamy następującą zasadę, którą kierujemy się przy opuszczaniu nawiasów w wyrażeniach wymiernych: jeżeli wynik w pewnego działania stopnia drugiego ma być skombinowany działaniem stopnia pierwszego z pewnem innem wyrażeniem, wówczas opuszczamy nawiasy, w które zgodnie z wspomnianemi wyżej ogólnemi regułami należałoby zamknąć wyrażenie przedstawiające wynik w uważanego działania.

Na zakończenie naszych rozważań podamy pewne ważne twierdzenia, zachodzące w przypadku, gdy działania zasadnicze spełniają pewne szczególne warunki.

W większości przypadków określamy działania dodawania i mnożenia w taki sposób, iż rzeczone działania posiadają własności następujące:

1°. Dodawanie posiada własność łączności i przemienności.

2°. Nierówność

$$b \neq b'$$

pociąga za sobą nierówność

$$a+b \neq a+b' \qquad ^{x)}$$

i 3°. Mnożenie posiada własność rozdzielności względem dodawania.

Udowodnimy teraz zapowiedziane przez nas twierdzenia, zachodzące w przypadku, gdy działania dodawania i mnożenia elementów pewnego zbioru Z spełniają wysłowione wyżej warunki.

VIII. Jeżeli działanie dodawania elementów uważanego zbioru Z posiada własności wymienione pod 1° i 2°, to w takim razie zachodzą równości następujące:

$$a+(b-c)=(a+b)-c \tag{46}$$

$$a-(b-c)=(a+c)-b \tag{47}$$

$$(b-c)-a=b-(a+c) \tag{48}$$

skoro tylko elementy a, b i c zbioru Z są tak dobrane, aby działania zaznaczone w powyższych równościach były wykonalne.

Dowód powyższego twierdzenia daje się przeprowadzić z łatwością.

W samej rzeczy, w celu uzasadnienia równości (46) przyjmijmy

$$x=a+(b-c) \tag{49}$$

Wobec powyższego mamy

$$x+c=[a+(b-c)]+c$$

skąd z uwagi na łączność dodawania elementów zbioru

$$x+c=a+[(b-c)+c]$$

Ponieważ zgodnie z definicją odejmowania

x) Wynika stąd na podstawie twierdzeń V i VI § 8, iż działanie odejmowania w razie wykonalności jest działaniem jednoznacznem.

$$(b-c)+c=b$$

przeto mamy

$$x+c=a+b$$

skąd

$$x=(a+b)-c \tag{50}$$

Z równości (49) i (50) otrzymujemy natychmiast

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$

W ten sposób równość (46) została udowodniona. Przechodząc do dowodu równości (47) połóżmy

$$y=a-(b-c) \tag{51}$$

Ponieważ zgodnie z definicją odejmowania

$$(b-c)+c=b$$

przeto mamy w każdym razie

$$y+b=y+[(b-c)+c]$$

skąd ze względu na założoną łączność dodawania elementów zbioru Z

$$y+b=[y+(b-c)]+c$$

Z drugiej strony, ponieważ zgodnie z równością (51)

$$y+(b-c)=a$$

przeto

$$y+b=a+c$$

skąd

$$y=(a+c)-b \tag{52}$$

z równości (51) i (52) otrzymujemy natychmiast

$$a-(b-c)=(a+c)-b.$$

W ten sposób udowodniliśmy drugą z pośród uważanych równości.

Wreszcie, aby uzasadnić równość (48), przyjmijmy

$$z=(b-c)-a \qquad (53)$$

Ponieważ zgodnie z założeniem twierdzenia dodawanie elementów zbioru Z posiada własność łączności, przeto mamy w każdym razie

$$z+(a+c)=(z+a)+c$$

Z drugiej strony, zgodnie z definicją odejmowania z równości (53) mamy

$$z+a=b-c$$

Wobec powyższego

$$z+(a+c)=(b-c)+c$$

skąd z uwagi na równość

$$(b-c)+c=b$$

otrzymujemy

$$z+(a+c)=b$$

lub wreszcie

$$z=b-(a+c) \qquad (54)$$

Biorąc pod uwagę równości (53) i (54) otrzymujemy natychmiast równość

$$(b-c)-a=b-(a+c)$$

której prawdziwość pragnęliśmy uzasadnić.

Twierdzenie nasze zachodzi przeto w podanem brzmieniu.

Opierając się na dowiedzionem przed chwilą twierdzeniu, udowodnimy teraz twierdzenie następujące.

IX. Jeżeli działanie dodawania elementów pewnego zbioru Z posiada własności wymienione pod 1° i 2°, wówczas wynik w wszelkiej kombinacji skończonej liczby elementów uważanego zbioru Z otrzymany zapomocą skończonego ciągu działań, z których każde jest dodawaniem lub odejmowaniem jest równy w razie wykonalności rzeczonych działań na uważanych elementach zbioru, albo sumie uważanych elementów lub reszcie odejmowania sumy niektórych z pośród nich od sumy pozostałych.

Dowód naszego twierdzenia przeprowadzimy zapomocą indukcji zupełnej.

Zauważmy przedewszystkiem, iż element w zbioru Z musi być wynikiem przynajmniej dwu następujących po sobie działań, w przeciwnym bowiem razie twierdzenie nasze byłoby pozbawione znaczenia. Załóżmy przeto, iż element w zbioru Z jest wynikiem dwu następujących po sobie działań. Zgodnie z uczynionem założeniem, element w będzie wynikiem kombinacji pewnego elementu a zbioru Z, drogą jednego z dwu rzeczonych działań z pewnym innym elementem a' uważanego zbioru, który jest sumą lub różnicą dwu elementów b i c zbioru Z.

W pierwszym z uważanych przypadków twierdzenie nasze jest oczywiście spełnione. Rozpatrzmy przeto przypadek, gdy element a', z którym kombinujemy element a zbioru Z jest różnicą elementów b i c, a więc przypadek, gdy

$$a' = b - c$$

W omawianym przypadku w razie, gdy działanie zapomocą którego kombinujemy element a z różnicą

$$b - c$$

jest działaniem dodawania otrzymujemy równość

$$w = a + (b - c); \tag{55}$$

w razie zaś, gdy uważane działanie jest odejmowaniem, dochodzimy do jednej z równości następujących

$$w = a - (b - c) \tag{56}$$

lub

$$w = (b - c) - a. \tag{57}$$

zależnie od tego, w którym z wzorów powyższych zaznaczone działanie odejmowania jest wykonalne.*)

Z równości (55), (56) i (57) na mocy udowodnionego powyżej twierdzenia VIII wnosimy natychmiast, iż w razie, gdy element w zbioru Z jest wynikiem dwu następujących po sobie działań, z których każde jest dodawaniem lub odejmowaniem, twierdzenie nasze zachodzi w podanem brzmieniu.

Załóżmy teraz, iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w przypadku, gdy liczba n działań za wynik wykonania, których przyjmujemy element w zbioru Z jest równa pewnej liczbie całkowitej k nie mniejszej od liczby 2 i przejdźmy do przypadku w którym mamy

$$n = k + 1$$

Z określenia elementu w zbioru Z wynika, iż mamy jedną z równości następujących

$$w = w' + w'' \tag{58}$$

lub

$$w = w' - w'' \tag{59}$$

gdzie każdy z elementów w' i w'', o ile sam nie jest jednym z elementów należących do zbioru Z, jest albo kombinacją przez jedno z uważanych działań dwu elementów zbioru Z, albo kombinacją elementów zbioru Z otrzymaną zapomocą wykonania najwyżej tylu działań, z których każde polega na dodawaniu lub odejmowaniu, ile wynosi wspomniana wyżej liczba całkowita k. Zgodnie z powyższemi uwagami i na mocy uczynionego przed chwilą założenia będziemy mieli

---

*) Należy zaznaczyć, iż w powyższem rozumowaniu zakładamy milcząco, iż działanie zaznaczone we wzorze

$$b - c$$

jest wykonalne.

$$\left.\begin{array}{lll} w' = a & \text{albo} & w' = a - b \\ & & \\ w'' = c & \text{albo} & w'' = c - d \end{array}\right\} \quad (60)$$

oraz

gdzie każdy z symbolów a , b , c i d oznacza sumę pewnej liczby elementów zbioru Z . Zwracając się przeto do równości (58) i (59) i uwzględniając równości (60) wnosimy natychmiast, iż element w zbioru Z będzie posiadać jedną z postaci następujących:

$$w = a + c \tag{61}$$

$$w = a + (c - d) \tag{62}$$

$$w = (a - b) + c \tag{63}$$

$$w = (a - b) + (c - d) \tag{64}$$

$$w = a - c \tag{65}$$

$$w = a - (c - d) \tag{66}$$

$$w = (a - b) - c \tag{67}$$

$$w = (a - b) - (c - d) \tag{68}$$

Równości (61) i (65) posiadają właśnie kształt zapowiedziany w twierdzeniu; równości zaś (62), (63) , (66) i (67) na mocy poprzedzającego twierdzenia dają się wyrazić w żądanej postaci. Pozostają przeto do uzasadnienia tylko równości (64) i (68) .

Zwracając się do równości (64) zauważmy przedewszystkiem, iż na mocy rzeczonego twierdzenia /równość (46) / mamy

$$w = (a - b) + (c - d) = [(a - b) + c] - d$$

Z drugiej strony na mocy tegoż twierdzenia / równość (46) /

$$(a - b) + c = (a + c) - b$$

Mamy zatem

$$w=[(a+c)-b]-d$$

Ponieważ zaś /Twierdzenie VIII równość (48) /

$$[(a+c)-b]-d=(a+c)-(b+d)$$

przeto ostatecznie

$$w=(a+c)-(b+d)$$

Równość (64) daje się więc przedstawić w żądanej postaci.

Podobnie, przechodząc do równości (68), mamy na mocy wspomnianego już twierdzenia /równość (47) /

$$w=(a-b)-(c-d)=[(a-b)+d]-c$$

Ponieważ dalej /równość (46) /

$$(a-b)+d=(a+d)-b$$

zatem

$$w=[(a+d)-b]-c$$

Z drugiej strony na mocy twierdzenia VIII /równość (48) / z równości powyższej mamy

$$w=(a+d)-(b+c)$$

Równości (68) nadaliśmy więc żądaną postać.

Ostatecznie okazaliśmy, iż gdyby twierdzenie nasze było prawdziwe przy

$$n=k$$

gdzie $k \geqslant 2$, to twierdzenie nasze byłoby prawdziwe i przy

$$n=k+1$$

ponieważ zaś poprzednio okazaliśmy, iż twierdzenie zachodzi przy

$$n=2$$

przeto, opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, wnosimy iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w każdym razie.

X. Jeżeli dodawanie i mnożenie elementów uważanego zbioru Z posiada własności wymienione pod 1°, 2°, 3°, to w takim razie mnożenie elementów zbioru Z posiada własność rozdzielności względem odejmowania.

W samej rzeczy, oznaczmy przez a, b i c trzy elementy zbioru Z i zakładając, iż odejmowanie zaznaczone we wzorze

$$b-c$$

jest wykonalne, połóżmy

$$x = a\cdot(b-c) \tag{69}$$

oraz

$$y = (b-c)\cdot a \tag{70}$$

Wobec powyższego mamy

$$x + a\cdot c = a\cdot(b-c) + a\cdot c$$

Ponieważ zaś na mocy założenia twierdzenia

$$a\cdot(b-c) + a\cdot c = a\cdot[(b-c)+c]$$

nadto zaś

$$(b-c)+c = b \tag{71}$$

przeto

$$x + a\cdot c = a\cdot b$$

Podobnie mamy

$$y + c\cdot a = (b-c)\cdot a + c\cdot a$$

skąd ze względu na równość

$$(b-c)\cdot a + c\cdot a = [(b-c)+c]\cdot a$$

oraz równość (71) otrzymujemy

$$y + c\cdot a = b\cdot a$$

Mamy zatem

$$x = a\cdot b - a\cdot c$$

oraz

$$y = b\cdot a - c\cdot a\ .$$

skąd po uwzględnieniu związków (69) i (70) dochodzimy do następujących równości

$$a\cdot(b - c) = a\cdot b - a\cdot c$$

oraz

$$(b - c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$$

wyrażających właśnie twierdzenie, o którego dowód nam chodziło.

§ 11.

Pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim.

Mając już określone działanie mnożenia elementów uważanego zbioru Z, wprowadzamy elementarne pojęcie potęgi.

Potęgą oznaczonego, za zasadę potęgi przyjętego elementu a zbioru Z, przyjmując za wykładnik oznaczoną liczbę całkowitą dodatnią n, nazywamy element uważanego zbioru Z, którego wartość przedstawiamy przez symbol

$$a^n \tag{72}$$

określając wartość rzeczonego symbolu zapomocą następujących równości

$$a^1 = a$$

oraz

$$a^{k+1} = a^k \cdot a$$

gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią.

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, spostrzegamy natychmiast, iż definicja powyższa określa w zupełności potęgę dowolnie przyjętego za zasadę elementu zbioru Z, przy każdej dowolnej, byle od zera większej całkowitej wartości wykładnika.

Symbol (72) czytamy " a do potęgi n-tej " lub krótko " a do n-tej " x)

Udowodnimy teraz dwa niezmiernie ważne twierdzenia.

XI. Jeżeli mnożenie elementów uważanego zbioru Z posiada własność łączności, wówczas jakikolwiek element zbioru Z oznaczylibyśmy przez a i jakiekolwiek, byle od zera większe byłyby liczby całkowite n i m mamy zawsze

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{73}$$

oraz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{74}$$

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadzimy zapomocą indukcji zupełnej.

Przedewszystkiem zauważmy, iż w przypadku, gdy

$$m = 1$$

równość (73) zachodzi na mocy podanej przez nas definicji potęgi.

Załóżmy przeto chwilowo, iż równość (73) zachodzi jeszcze w przypadku, gdy mamy

$$m = k$$

---

x) Potęgę o wykładniku równym 2 nazywamy zwykle kwadratem, potęgę zaś o wykładniku równym liczbie 3 - sześcianem uważanego elementu a zbioru Z, przyjętego za zasadę.

gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą dodatnią i przyjmijmy

$$m = k+1$$

Mamy wówczas

$$a^n \cdot a^{k+1} = a^n(a^k \cdot a)$$

skąd na mocy własności łączności mnożenia elementów zbioru Z otrzymujemy

$$a^n \cdot a^{k+1} = (a^n \cdot a^k) \cdot a$$

Z drugiej strony, zgodnie z uczynionem powyżej założeniem, mamy

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

przeto

$$a^n \cdot a^{k+1} = a^{n+k} \cdot a$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$a^n \cdot a^{k+1} = a^{n+k+1}$$

lub

$$a^n \cdot a^{k+1} = a^{n+(k+1)}$$

Równość powyższa stwierdza prawdziwość równości *(73)* w przypadku

$$m = k+1.$$

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, wnosimy stąd natychmiast, iż równość *(73)* zgodnie z brzmieniem twierdzenia, zachodzi przy wszelkich całkowitych dodatnich n i m.

Przejdźmy teraz do uzasadnienia drugiej części naszego twierdzenia, mianowicie równości

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

W szczególnym przypadku, gdy

$$m = 1$$

równość (74) zachodzi oczywiście, bowiem mamy zawsze

$$(a^n)^1 = a^n$$

oraz

$$a^{n\cdot 1} = a^n$$

Załóżmy chwilowo, iż równość (74) zachodzi jeszcze w przypadku, gdy

$$m = k$$

gdzie, jak wyżej, k oznacza liczbę całkowitą dodatnią i połóżmy

$$m = k+1$$

Na mocy definicji potęgi mamy

$$(a^n)^{k+1} = (a^n)^k \cdot a^n$$

Ponieważ zaś na mocy uczynionego przed chwilą założenia

$$(a^n)^k \cdot a^n = a^{n\cdot k} \cdot a^n$$

przeto

$$(a^n)^{k+1} = a^{n\cdot k} \cdot a^n$$

Z drugiej strony, zgodnie z udowodnioną powyżej równością (73)

$$a^{n\cdot k} \cdot a^n = a^{n\cdot k+n} = a^{n\cdot(k+1)}$$

Mamy zatem

$$(a^n)^{k+1} = a^{n\cdot(k+1)}$$

Równość powyższa stwierdza prawdziwość drugiej części naszego twierdzenia w przypadku

$$m = k+1$$

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej wnosimy stąd natychmiast, iż równość (74) zachodzi przy wszelkich całkowitych dodatnich n i m.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy więc w zupełności.

XII. Jeżeli mnożenie elementów uważanego zbioru Z posiada prócz własności łączności jeszcze własność przemienności, to oznaczając przez a i b dwa jakiekolwiek elementy zbioru Z przez n zaś jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią mamy zawsze

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad (75)$$

W samej rzeczy, spostrzegamy z łatwością, iż równość (75) zachodzi w tym szczególnym przypadku, gdy

$$n = 1$$

Załóżmy chwilowo, iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w przypadku, gdy

$$n = k$$

i połóżmy

$$n = k+1$$

Mamy wówczas

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b)$$

na mocy definicji potęgi.

Z drugiej strony na podstawie własności przemienności i łączności mnożenia elementów zbioru Z mamy

$$(a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = (a^k \cdot b^k) \cdot (a \cdot b)$$

Wobec powyższego

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a^k \cdot b^k) \cdot (a \cdot b)$$

Ponieważ na mocy uczynionego założenia

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

przeto

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)$$

Skąd, opierając się na definicji potęgi, dochodzimy do równości

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^{k+1}$$

stwierdzającej prawdziwość naszego twierdzenia w przypadku

$$n = k+1$$

Z uzyskanych wyników, opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, wnosimy natychmiast, iż twierdzenie nasze zachodzi w każdym razie.

W bardzo wielu przypadkach mamy do czynienia z takim zbiorem wielkości Z, który czyni zadość następującym warunkom.

1°. Wszystkie liczby całkowite bezwzględne należą do zbioru Z.

2°. Mnożenie elementów zbioru Z posiada własności łączności i przemienności.

3°. Iloczyn dowolnie obranego elementu a zbioru Z przez jedność jest równy uważanemu elementowi a.

4°. Iloczyn elementów zbioru Z równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z czynników iloczynu jest równy zeru.

5°. Dzielenie elementów zbioru Z jest działaniem jednoznacznem, jeżeli tylko element zbioru Z przyjęty za dzielnik jest różny od zera.

W razie gdy uważany zbiór Z czyni zadość wymienionym wyżej warunkom, rozszerzamy pojęcie potęgi i na ten szczególny przypadek, w którym wykładnik potęgi jest równy zeru, wymagając przytem aby dla każdego dowolnie przyjętego elementu a zbioru Z równość

$$a^k \cdot a = a^{k+1}$$

która zgodnie z podaną przez nas definicją potęgi zachodzi tylko dla całkowitych dodatnich wartości liczby k była jeszcze spełniona i dla

$$k=0$$

Spostrzegamy natychmiast, iż warunek powyższy określa w zupełności wartość symbolu

$$a^0$$

skoro tylko element a jest od zera różny.

W samej rzeczy, jeżeli element a zbioru Z jest od zera odmienny, wówczas z równości

$$a^0 \cdot a = a^1$$

która na mocy definicji potęgi jest równoważna równości

$$a^0 \cdot a = a$$

wynika

$$a^0 = 1$$

natomiast w przypadku

$$a = 0$$

wspomniany warunek pozostawia wartość symbolu

$$a^0$$

zupełnie nieoznaczoną.

Opierając się na przytoczonych powyżej uwagach, w razie gdy zbiór Z czyni zadość wspomnianym wyżej warunkom, rozszerzamy pojęcie potęgi na przypadek, w którym wykładnik potęgi jest równy zeru, przez przyjęcie definicji następującej.

Potęga o wykładniku równym zeru jakiegokolwiek byle od zera odmiennego elementu zbioru Z oznacza element zbioru Z równy liczbie 1.

Przy powyższem rozszerzeniu pojęcia potęgi, twierdzenia XI i XII pozostają prawdziwe i wówczas, gdy jedna z liczb całkowitych n i m lub obydwie jednocześnie są równe zeru, byle tylko żaden z elementów a i b zbioru Z nie był równy zeru.

Zastrzeżenie dotyczące elementów a i b jest oczywiście na mocy przytoczonych wyżej uwag konieczne.

Opierając się na podanej przez nas definicji symbolu

$$a^0$$

udowodnimy teraz twierdzenie następujące.

XIII. Jeżeli zbiór Z czyni zadość wymienionym pod 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 i 5^0 warunkom, to oznaczając przez a i b jakiekolwiek byle od zera odmienne elementy zbioru Z mamy równości następujące

$$a^n : a^m = a^{n-m} \tag{76}$$

oraz

$$a^n : b^n = (a : b)^n \tag{77}$$

gdzie przez n oznaczyliśmy liczbę całkowitą ×) przez m zaś jakąkolwiek byle od liczby n nie większą liczbę całkowitą.××)

Spostrzegamy natychmiast, iż warunek aby żaden z elementów a i b zbioru Z nie był równy zeru jest warunkiem koniecznym, bowiem symbol

$$0^0$$

×) Przez wyrażenie "liczba całkowita" rozumiemy tu liczby całkowite dodatnie i liczbę 0.

××) Zaznaczamy, iż warunek

$$m \leqq n$$

jest konieczny, w przeciwnym bowiem razie symbol

$$a^{n-m}$$

byłby /na podstawie przyjętej przez nas definicji potęgi/ pozbawiony znaczenia.

nie posiada żadnej oznaczonej wartości.

W celu uzasadnienia równości *(76)* połóżmy

$$x = a^{n-m}$$

Mamy zatem

$$a^m \cdot x = a^m \cdot a^{n-m}$$

Ponieważ /na mocy twierdzenia XI /

$$a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)}$$

przeto mamy

$$a^m \cdot x = a^n$$

skąd

$$x = a^n : a^m$$

Z równości powyższej, ze względu na jedno - znaczność dzielenia elementów zbioru Z wynika natychmiast równość *(76)* , którą pragnęliśmy uzasadnić.

Przechodząc teraz do udowodnienia równości *(77)* przyjmijmy

$$y = (a : b)^n$$

Mamy tedy

$$y \cdot b^n = (a : b)^n \cdot b^n$$

Ponieważ na mocy udowodnionego wyżej twierdzenia XII

$$(a : b)^n \cdot b^n = [(a : b) \cdot b]^n$$

przeto uwzględniając równość

$$(a : b) \cdot b = a$$

będziemy mieli

$$y \cdot b^n = a^n$$

skąd

$$y = a^n : b^n$$

Z równości powyższej, ze względu na jednoznaczność dzielenia elementów zbioru Z, wynika równość (77), której prawdziwość w ten sposób została udowodniona. Twierdzenie nasze zachodzi przeto w podanem brzmieniu.

§ 12.

Rozszerzenie pojęcia potęgi na przypadek, w którym wykładnik jest liczbą całkowitą ujemną.

W § poprzedzającym okazaliśmy, iż w razie gdy elementy zbioru Z czynią zadość warunkom wysłowionym pod 1⁰, 2⁰, 3⁰, 4⁰ i 5⁰ zachodzą równości następujące

$$(a)\quad \begin{cases} a^n \cdot a^m = a^{n+m} & (78) \\ (a^n)^m = a^{n \cdot m} & (79) \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & (80) \\ a^n : a^m = a^{n-m} & (81) \\ a^n : b^n = (a : b)^n & (82) \end{cases}$$

gdzie n i m oznaczają dwie liczby całkowite nie mniejsze od zera, które w przypadku równości (81) spełniają nadto związek

$$m \leqq n$$

Jeżeli liczby całkowite n i m czynią zadość nierównościom

$$n \geqq 1$$

oraz

$$m \geqslant 1$$

jeżeli nadto w przypadku równości (81) mamy

$$n - m \geqslant 1$$

wówczas równości (78), (79) i (80) zachodzą bez żadnych zastrzeżeń co do wartości elementów a i b zbioru Z, równość (81) tylko przy

$$a \neq 0$$

równość zaś (82) przy

$$b \neq 0$$

Jeżeli zaś liczby całkowite n i m czynią zadość nierównościom

$$n \geqslant 0$$

oraz

$$m \geqslant 0$$

nadto zaś w przypadku równości (81)

$$n - m \geqslant 0$$

wówczas wybór elementów a i b zbioru Z podlega ograniczeniu, polegającemu na tem, aby żaden z nich nie był równy zeru.

Celem niniejszego § jest rozwiązanie następującego zagadnienia:

Czy możliwą jest rzeczą takie rozszerzenie pojęcia potęgi, aby przy zachowaniu na potęgę, o zasadzie a i wykładniku p, symbolu

$$a^p$$

zachodziła każda z równości (a) jakiekolwiek liczby całkowite /dodatnie, ujemne lub zero/ oznaczylibyśmy przez n i m.

Rozszerzając pojęcie potęgi na przypadek, w którym wykładnik potęgi jest równy zeru, zmuszeni byliśmy do ograniczenia wyboru elementu zbioru Z przyjętego za zasadę przez warunek, polegający na tem aby zasada potęgi była od zera odmienna. Przyjmijmy przeto w rozważaniach naszych, mających na celu udzielenie odpowiedzi na powyższe pytanie, analogiczny warunek ograniczający wybór elementu zbioru Z, który przyjmujemy za zasadę potęgi.

Załóżmy chwilowo, iż odpowiedź na postawione przez nas pytanie jest twierdząca i uważajmy równość *(78)* t.j. równość

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (83)$$

w której zakładamy

$$a \neq 0$$

Zgodnie z uczynionem założeniem równość *(83)* zachodzi przy wszelkich całkowitych /dodatnich, ujemnych lub równych zeru/ wartościach n i m.

Przyjmijmy na n jakąkolwiek wartość całkowitą ujemną na m zaś wartość określoną przez równanie

$$m = -n$$

W uważanym przypadku symbol m będzie symbolem oznaczonej liczby całkowitej dodatniej, równość zaś *(83)* przyjmie postać następującą

$$a^n \cdot a^m = a^0 = 1$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$a^n = \frac{1}{a^m}.$$

Opierając się na przeprowadzonych powyżej rozważaniach, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie.

XIV. Jeżeli jest rzeczą możliwą podać taką definicję potęgi o wykładniku ujemnym, a o zasadzie od zera różnej, aby w następstwie jej zachodziły równości *(a)* jakiekolwiek liczby całkowite /dodatnie, ujemne lub zero/ oznaczylibyśmy przez n i m byleby tylko żaden z elementów a i b

zbioru Z nie był równy zeru, to w takim razie rzeczona definicja musi być równoważna definicji następującej:

Potęgą o wykładniku równym dowolnie przyjętej liczbie całkowitej ujemnej p jakiegokolwiek od zera odmiennego elementu a zbioru Z przyjętego za zasadę, nazywamy iloraz podziału liczby 1 przez taką potęgę elementu a, której wykładnik równa się liczbie całkowitej dodatniej, przedstawiającej wartość bezwzględną liczby p.

Okażemy, iż definicja powyższa w zupełności czyni zadość warunkom naszego pytania. W tym celu wystarczy okazać, iż w razie przyjęcia przez nas rzeczonej definicji zachodzą następujące równości

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{lr} a^x \cdot a^y = a^{x+y} & (84) \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y} & (85) \\ a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x & (86) \\ a^x : a^y = a^{x-y} & (87) \\ a^x : b^x = (a : b)^x & (88) \end{array}\right.$$

gdzie a i b oznaczają dwa dowolnie przyjęte elementy zbioru Z, zaś x i y dwie liczby całkowite, z których każda może przybierać jakąkolwiek dodatnią, ujemną lub równą zeru wartość.

Przedewszystkiem uzasadnimy równość (84). W tym celu przyjmijmy

$$n = |x|$$

oraz

$$m = |y|$$

Zgodnie z powyższemi równaniami, każdy z symbolów n i m oznacza pewną określoną od zera nie mniejszą liczbę całkowitą. Ponieważ zgodnie z przeprowadzonemi w poprzedzającym § rozważaniami równość (84) zachodzi niezawodnie, gdy żadna z liczb x

oraz y nie jest od zera mniejsza, przeto pozostają do zbadania dwa przypadki w których przynajmniej jedna z liczb x oraz y jest mniejsza od zera, oraz przypadek w którym obydwie liczby x i y są liczbami ujemnemi. Zważywszy jednak, iż ze względu na założoną własność przemienności mnożenia elementów zbioru Z, przypadek w którym liczby x i y spełniają nierówności

$$x > 0$$

oraz

$$y < 0$$

różni się od przypadku w którym mamy

$$x < 0$$

oraz

$$y > 0$$

tylko pod względem oznaczeń, przeto możemy ograniczyć się do rozpatrzenia z jednej strony przypadku w którym

$$\left.\begin{aligned} x &= +n \\ y &= -m \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

z drugiej zaś - przypadku w którym

$$\left.\begin{aligned} x &= -n \\ y &= -m \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Jeżeli zachodzą związki (89) mamy

$$a^x = a^n$$

oraz

$$a^y = 1 : a^m$$

skąd

$$a^x \cdot a^y = a^n \cdot (1 : a^m)$$

Mamy zatem

$$a^x \cdot a^y \cdot a^m = [a^n \cdot (1 : a^m)] \cdot a^m$$

lub na mocy własności łączności mnożenia elementów zbioru Z

$$a^x \cdot a^y \cdot a^m = a^n \cdot [(1 : a^m) \cdot a^m]$$

stąd ze względu na związek

$$(1 : a^m) \cdot a^m = 1$$

otrzymujemy

$$a^x \cdot a^y \cdot a^m = a^n$$

lub ostatecznie

$$a^x \cdot a^y = a^n : a^m \qquad (91)$$

Z drugiej strony zgodnie z wzorami *(89)* mamy

$$a^{x+y} = a^{n-m} \qquad (92)$$

Jeżeli

$$n \geqslant m$$

wówczas równość *(84)* wynika bezpośrednio z równości *(91)* i *(92)* na mocy samej tylko równości *(81)* . Jeżeli zaś

$$n < m$$

wówczas z równości *(92)* wynika równość

$$a^{x+y} = a^{-(m-n)}$$

równoważna równości

$$a^{x+y} = 1 : a^{m-n}$$

Z równości powyższej otrzymujemy

$$a^{x+y}\cdot a^{m-n}=1$$

Mamy zatem

$$a^{x+y}\cdot a^{m-n}\cdot a^{n}=a^{n}$$

Równość powyższa jest na mocy twierdzenia, polegającego na równości *(78)*, równoważna równości

$$a^{x+y}\cdot a^{m}=a^{n}$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$a^{x+y}=a^{n}:a^{m}$$

uwzględniając zaś wzór *(91)*, dochodzimy do związku

$$a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$$

Równość *(84)* zachodzi przeto również i w uważanym przypadku.

Aby udowodnić, iż równość *(84)* zachodzi we wszystkich przypadkach, pozostaje tylko do dowiedzenia, iż rzeczona równość zachodzi również wówczas, gdy wartość obydwu liczb x i y jest mniejsza od zera, a więc gdy spełnione są związki *(90)*.

W uważanym przypadku mamy

$$a^{x+y}=a^{-(n+m)}$$

lub na mocy przyjętej przez nas definicji potęgi o wykładniku ujemnym

$$a^{x+y}=1:a^{n+m} \qquad (93)$$

Z drugiej strony na mocy związków *(90)* mamy równość

$$a^{x}\cdot a^{y}=a^{-n}\cdot a^{-m}$$

równoważną równości

$$a^{x}\cdot a^{y}=(1:a^{n})\cdot(1:a^{m})$$

Zatem

$$a^{x}\cdot a^{y}\cdot a^{n}\cdot a^{m}=(1:a^{n})\cdot(1:a^{m})\cdot a^{n}\cdot a^{m}$$

skąd ze względu na własności łączności i przemienności mnożenia elementów zbioru Z

$$a^x \cdot a^y \cdot a^n \cdot a^m = [(1 : a^n) \cdot a^n][(1 : a^m) \cdot a^m]$$

lub

$$a^x \cdot a^y \cdot a^n \cdot a^m = 1$$

Z równości powyższej, powołując się na równość (78) otrzymujemy równość

$$(a^x \cdot a^y) \cdot a^{n+m} = 1$$

równoważną oczywiście równości

$$a^x \cdot a^y = 1 : a^{n+m}$$

Równość powyższa, łącznie z równością (93) pociąga za sobą równość (84). W ten sposób udowodniliśmy, iż równość (84) zachodzi, jakiekolwiek całkowite dodatnie, ujemne lub równe zeru byłyby wartości liczb x oraz y.

Przechodząc do uzasadnienia równości (85) zauważmy, iż oprócz przypadków w których zachodzą równości (89) i (90) winniśmy nadto uwzględnić przypadek w którym mamy

$$\left.\begin{aligned} x &= -n \\ y &= +m \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

bowiem w razie równości (85) bynajmniej nie możemy sprowadzić drogą zwykłej zmiany oznaczeń przypadku w którym zachodzą równości (94) do przypadku w którym zachodzą równości (89).

Rozpatrzmy przedewszystkiem przypadek w którym zachodzą związki (89). W omawianym przypadku mamy

$$a^{x \cdot y} = a^{-n \cdot m}$$

skąd z uwagi na równość

$$a^{-n \cdot m} = 1 : a^{n \cdot m}$$

otrzymujemy

$$a^{x\cdot y} = 1 : a^{n\cdot m} \qquad (95)$$

Z drugiej strony mamy oczywiście

$$(a^x)^y = (a^n)^{-m}$$

skąd ze względu na związek

$$(a^n)^{-m} = 1 : (a^n)^m$$

dochodzimy do równości

$$(a^x)^y = 1 : (a^n)^m$$

równoważnej /na mocy równości (79) / równości

$$(a^x)^y = 1 : a^{n\cdot m}$$

Równość powyższa, łącznie z równością (95) ,pociąga za sobą równość (85) .

Zwróćmy się teraz do przypadku w którym zachodzą równości (94) .

W uważanym przypadku zachodzić będzie oczywiście równość (95) .

Z drugiej strony mamy na mocy przyjętych założeń

$$(a^x)^y = (a^{-n})^m$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$(a^x)^y = (1 : a^n)^m$$

Ponieważ zaś na mocy równości (82) mamy niezawodnie

$$(1 : a^n)^m = 1^m : (a^n)^m = 1 : (a^n)^m$$

przeto

$$(a^x)^y = 1 : (a^n)^m$$

skąd z uwagi na równość (79 mamy ostatecznie

$$(a^x)^y = 1 : a^{n\cdot m} \qquad (96)$$

Równości (95) i (96) pociągają za sobą równość (85). Równość (85) w uważanym przypadku niezawodnie przeto zachodzi.

Rozpatrzmy wreszcie przypadek w którym zachodzą związki (90).
W uważanym przypadku mamy

$$a^{x \cdot y} = a^{n \cdot m} \tag{97}$$

oraz

$$(a^{x})^{y} = (a^{-n})^{-m}$$

Z równości powyższej ze względu na związek

$$(a^{-n})^{-m} = 1:(1:a^{n})^{m}$$

zachodzący na mocy przyjętej przez nas definicji potęgi o wykładniku ujemnym, mamy

$$(a^{x})^{y} = 1:(1:a^{n})^{m}$$

Ponieważ zaś na mocy twierdzenia wyrażonego równością (82)

$$(1:a^{n})^{m} = 1^{m}:(a^{n})^{m} = 1:(a^{n})^{m}$$

zaś na mocy równości (79) mamy

$$1:(a^{n})^{m} = 1:a^{nm}$$

przeto

$$(a^{x})^{y} = 1:(1:a^{n \cdot m})$$

skąd

$$(a^{x})^{y} \cdot (1:a^{n \cdot m}) = 1$$

Mamy zatem

$$(a^{x})^{y} \cdot (1:a^{n \cdot m}) \cdot a^{n \cdot m} = a^{n \cdot m}$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$(a^{x})^{y} = a^{n \cdot m} \tag{98}$$

Zestawiając ze sobą równości (97) i (98) dochodzimy do równości (85).

Udowodniliśmy więc, iż równość (85) zachodzi w każdym z trzech przypadków, w których zachodzą związki (89), (94) i (90); ponieważ rzeczona równość zachodzi niezawodnie w przypadku, gdy mamy

$$x = +n$$

oraz

$$y = +m$$

przeto równość (85) zachodzi przy wszelkich całkowitych /dodatnich, ujemnych lub równych zeru/ wartościach wykładników x i y.

Przystąpimy teraz do uzasadnienia równości (86) kładąc w tym celu

$$n = |x|$$

Zauważmy przedewszystkiem, iż równość (86) zachodzi niezawodnie, gdy mamy

$$x = +n$$

bowiem w uważanym przypadku równość (86) przechodzi na równość (80).

Rozpatrzmy przeto przypadek w którym

$$x = -n$$

W uważanym przypadku mamy

$$(a \cdot b)^x = (a \cdot b)^{-n}$$

skąd na mocy przyjętej przez nas definicji potęgi o wykładniku ujemnym

$$(a \cdot b)^x = 1 : (a \cdot b)^n \qquad (99)$$

Z drugiej strony mamy

$$a^x \cdot b^x = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

skąd z uwagi na równość

$$a^{-n}\cdot b^{-n}=(1:a^n)\cdot(1:b^n)$$

otrzymujemy

$$a^x\cdot b^x=(1:a^n)\cdot(1:b^n)$$

Mamy zatem

$$(a^x\cdot b^x)\cdot(a^n\cdot b^n)=(1:a^n)\cdot(1:b^n)\cdot a^n\cdot b^n$$

skąd ze względu na związek

$$(1:a^n)\cdot(1:b^n)\cdot a^n\cdot b^n=[(1:a^n)\cdot a^n]\cdot[(1:b^n)\cdot b^n]=1$$

otrzymujemy natychmiast równość

$$(a^x\cdot b^x)\cdot(a^n\cdot b^n)=1$$

równoważną równości

$$a^x\cdot b^x=1:(a^n\cdot b^n)$$

Ponieważ zaś na mocy równości (80)

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

przeto mamy

$$a^x\cdot b^x=1:(a\cdot b)^n \qquad (100)$$

Zestawiając ze sobą równości (99) i (100) otrzymujemy równość (86), której prawdziwość pragnęliśmy udowodnić. Ostatecznie okazaliśmy, iż równość (86) zachodzi przy wszelkich całkowitych /dodatnich, ujemnych lub równych zeru/ wartościach wykładnika x.

Przechodząc do równości (87) i (88) zauważmy, iż rzeczone równości wynikają bezpośrednio z twierdzeń, z których jedno oparte jest na równości (84), drugie zaś - na równości (86), drogą identycznych rozważań, któremi posługiwaliśmy się w § poprzedzającym, w celu otrzymania /tw. XIII/, twierdzeń polegających odpowiednio na równościach (81) i (82) z twierdzeń wyrażonych zapomocą równości (78) i (80).

Opierając się na przeprowadzonych rozważaniach wnosimy, iż pojęcie potęgi, w tym przypadku w którym zasada potęgi jest od zera odmienna, może być rozszerzone w ten sposób, aby były spełnione wszystkie warunki pytania postawionego przez nas na początku niniejszego §. Rzeczone rozszerzenie pojęcia potęgi może być jednak zgodnie z tw. XIV uskutecznione tylko przez przyjęcie definicji równoważnej definicji następującej:

Potęgą o wykładniku równym oznaczonej liczbie całkowitej ujemnej p jakiegokolwiek byle od zera odmiennego elementu a zbioru Z, przyjętego za zasadę potęgi, nazywamy iloraz podziału liczby 1 przez taką potęgę uważanego elementu a, której wykładnik jest równy liczbie całkowitej dodatniej, przedstawiającej wartość bezwzględną liczby p.

Wobec powyższego przyjmujemy ostatecznie powyższą definicję potęgi o wykładniku ujemnym i dochodzimy do następującego twierdzenia:

XV Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa jakiekolwiek, byle nierówne zeru elementy zbioru Z, spełniającego warunki wymienione pod 1°, 2°, 3°, 4° i 5° w § poprzedzającym, to w takim razie równości (b) zachodzą przy wszelkich całkowitych dodatnich, ujemnych lub równych zeru wartościach wykładników x i y.

Uzyskana powyżej odpowiedź na pytanie dotyczące takiego rozszerzenia pojęcia potęgi na przypadek, w którym wykładnik jest liczbą ujemną, aby równości (b) zachodziły przy wszelkich całkowitych dodatnich, ujemnych lub równych zeru wartościach wykładników x i y nie jest zupełną, bowiem w rozważaniach naszych pominęliśmy przypadek, w którym element zbioru Z przyjęty za zasadę potęgi byłby równy zeru.

W celu uzupełnienia naszych rozważań, zwróćmy się przeto do rozpatrzenia wspomnianego szczególnego przypadku.

Okażemy mianowicie, iż nie jest rzeczą możliwą podać taką definicję potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym, a o zasadzie równej zeru, aby równości (b) zachodziły jakiekolwiek liczby całkowite dodatnie, ujemne lub równe zeru oznaczylibyśmy przez x i y.

Innemi słowy, nie istnieje taka definicja potęgi o wykładniku nie większym od zera, a o zasadzie równej zeru, aby spełnione były wszystkie warunki naszego pytania.

Przedewszystkiem zauważmy, iż gdybyśmy przyjęli taką definicję potęgi o zasadzie równej zeru, a o wykładniku od zera nie większym, przy której wyrażenie

$$0^{x}$$

mogłoby przyjmować, chociażby przy jednej z wspomnianych wartości wykładnika x, wartość od zera odmienną, wówczas rzeczona definicja niewątpliwie warunków naszego pytania spełniać by nie mogła.

W samej rzeczy, oznaczmy przez ν jakąkolwiek liczbę całkowitą, spełniającą nierówność

$$\nu \leqslant 0$$

i połóżmy

$$x = \nu$$

Gdyby

$$0^{\nu} \neq 0$$

wówczas z równości

$$0^{\nu} \cdot 0^{0} = 0^{\nu+0}$$

równoważnej oczywiście równości

$$0^{\nu} \cdot 0^{0} = 0^{\nu}$$

mielibyśmy

$$0^{0} = 1 \qquad (101)$$

Z drugiej strony, kładąc w równości (84)

$$a = 0\,, \quad x = \nu\,, \quad y = -\nu$$

otrzymalibyśmy

$$0^{\nu-\nu} = 0^{\nu} \cdot 0^{-\nu}$$

lub

$$0^0 = 0^\nu \cdot 0^{-\nu} \tag{102}$$

Ponieważ zaś na mocy teorji potęg o wykładnikach dodatnich

$$0^{-\nu} = 0$$

przeto równość (102) pociągałaby za sobą równość

$$0^0 = 0$$

sprzeczną z równością (101).

Pozostaje więc do rozpatrzenia tylko przypadek, w którym na mocy definicji potęgi o zasadzie równej zeru mielibyśmy

$$0^x = 0 \tag{103}$$

przy wszelkich całkowitych wartościach wykładnika x.

Gdyby była spełniona równość (103), wówczas równości (84), (85) i (86) zachodziłyby przy wszelkich całkowitych wartościach wykładników x i y, chociażby nawet jeden z elementów a i b zbioru Z lub obydwa rzeczone elementy byłyby równe zeru. W razie jednak, gdyby

$$a = 0$$

równość (87) już nie zachodziłaby, bowiem w takim razie iloraz

$$a^x : a^y$$

posiadałby postać

$$0^x : 0^y$$

równoważną, na mocy uczynionego założenia, postaci

$$0 : 0$$

skąd wynika, iż uważany iloraz posiadałby nieskończenie wiele wartości, z których nie każda byłaby równa wyrażeniu

$$a^{x-y}$$

które, zgodnie z założeniem, jest w uważanych warunkach równe zeru.

Wobec powyższego wyniku naszych badań, nie wprowadzamy do nauki żadnej definicji potęgi o zasadzie równej zeru, a o wykładniku od zera nie większym i uważamy symbol

$$0^{x}$$

skoro tylko

$$x \leqq 0$$

za pozbawiony wszelkiego znaczenia.

§ 13.

Ogólne uwagi o teorji działań zasadniczych. Zasada zachowania praw formalnych.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zamierzamy podać pewne uwagi ogólne o teorji działań zasadniczych.

Teorja działań, w ścisłem tego słowa znaczeniu, powstała dopiero w końcu pierwszej połowy ubiegłego stulecia. Urobiona pierwotnie na podstawie działań na liczbach całkowitych, dzięki pracom szeregu uczonych, rozwinęła się z czasem w samodzielną teorję, wysuwając się na naczelne miejsce w arytmetyce teoretycznej.

Zagadnienie stosowalności działań zasadniczych określonych pierwotnie dla zbioru liczb oznaczonego rodzaju do zbioru liczb innego rodzaju, powstałych wskutek rozszerzenia pojęcia liczby, skierowało uwagę uczonych na cechy charakterystyczne każdego z działań zasadniczych oraz na związki zachodzące pomiędzy temi działaniami. Badania podjęte w tym kierunku doprowadziły do ścisłego ustalenia pojęcia działania /arytmetycznego/ oraz do wykrycia cech istotnych działań zasadniczych. W ten sposób został ujawniony brak różnic pojęciowych pomiędzy działaniami dodawania i mnożenia z jednej strony, a działaniami odejmowania i dzielenia z drugiej. Okazało się mianowicie, iż różnice pomiędzy rzeczonemi działaniami znajdujemy tylko w terminologji i symbolice, nie zaś w samej naturze tych działań. Okoliczność powyższa wraz z wykryciem związku, jaki zachodzi między działaniami dodawania i odejmowania a działaniami mnożenia i dzielenia, doprowadziła do podziału działań arytmetycznych na proste i odwrotne.[x)]

Jednocześnie zwrócono uwagę na zasadnicze własności dodawania i mnożenia, czyli t.zw. prawa formalne tych działań. Prawa te, wyrażające się znanemi nam z poprzedzających rozważań wzorami

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad {}^{xx)}$$

---

x) Twórca teorji działań Hermann Grassmann w dziele Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik... , wydanem w Lipsku w 1844 roku /Werke I Bd.I Th.str.36/ nazywa działania proste syntetycznemi /synthetische Verknüpfungen/, działania zaś odwrotne analitycznemi /analytische Verknüpfungen/.Hermann Hankel /Theorie der complexen Zahlensysteme,Leipzig,1867, str.4/ dodawanie i mnożenie nazywa działaniami tetycznemi /thetische Operationen/ a odejmowanie i dzielenie - litycznemi /lytische Operationen/. Porównaj także O.Stolz.Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster Theil. Leipzig, 1885. str. 25 i nast.

xx) Z rozważań przeprowadzonych w § 10 wiemy, iż własności powyższe nie stanowią cech istotnych przyjęto za podstawę przy określaniu działań zasadniczych i oparto na nich czysto formalną teorję tych działań.

Właściwym twórcą teorji działań jest Hermann Grassmann, który w świetnem dziele Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik, wydanem w Lipsku w 1844 roku podjął próbę systematycznego zbudowania wspomnianej teorji.*)

Teorja działań podana przez Grassmann'a została następnie rozwinięta i udoskonalona przez H. Hankel'a**), E.Schrödera***), L.Kronecker'a****), Bettazzi'ego*****) i innych.

Formalna teorja działań zasadniczych związana jest ściśle z pracami nad podstawami matematyki w szczególności zaś z pracami nad aksjomatyzacją arytmetyki i algebry. Niezmiernie ważne i interesujące są prace z tej dziedziny E.V.Huntington'a.******)

---

dodawania i mnożenia, lecz tylko pewne właściwości, które zależnie od charakteru wielkości należących do uważanego zbioru rzeczone działania mogą posiadać lub nie.

W dalszym ciągu poznamy takie zbiory wielkości, iż przynajmniej jedna z powyższych własności nie będzie spełniona.

*) Werke Bd.I Th. I. str. 33-45.

**) Hermann Hankel. Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867. str. 18-34. Wykład teorji Hankel'a znajdzie czytelnik w dziele S. Dickstein. Pojęcia i metody matematyki. Tom I. Cz.I. Warszawa 1891. str. 67 i nast.

***) E.Schröder. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig 1873. str. 174-294.

****) L.Kronecker. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modul-Systeme / Mittheilungen der Berliner Akademie, 1888. str. 379-396, 615-648/.

*****) Bettazzi. Teoria della grandezze Pisa 1890.

******) E.V.Huntington. The fundamental laws of addi-

W związku z wyłożoną przez nas w poprzedzających §§ teorją powstaje pytanie, jakiemi względami kierujemy się przy ustanawianiu dla uważanego zbioru definicyj działań zasadniczych? Jakie okoliczności skłaniają nas do przyjęcia wspomnianych praw formalnych, jako zasadniczych własności dodawania i mnożenia?

Odpowiedź na powyższe pytania znajdujemy w sformułowanej w 1862 roku przez H.Hankel'a, t. zw. zasadzie zachowania praw formalnych. /Princip der Permanenz formaler Gesetze/ x) . Wspomnianą zasadę w zastosowaniu do wielkości wypowiada Hankel w sposób następujący. "Jeżeli dwie formy /wyrażenia matematyczne/ wyrażone zapomocą ogólnych symbolów są sobie równe, to pozostają one równe, gdy symbole te nie oznaczają już wielkości dziedziny pierwotnej, gdy więc działania otrzymują treść nową". xx)

---

tion and multiplication in elementary algebra. Reprinted from the Annals of Mathem. 1906 . /Publication Office of Harvard University/. A set of postulates for real algebra,comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups. /Transactions of the Americ. Math. Society. 1905. Vol.6.str.17-41/. A set of postulates for ordinary complex algebra. /Trans. of the Americ. Math. Society . 1905. Vol.6 str. 209-229/. Patrz także inne prace z tej dziedziny ogłaszane przeważnie w Transactions of the Americ.Mathem.Society.

x) H.Hankel l.c. str. 10 i nast. Analogiczną zasadę wypowiedział przed Hankel'em matematyk angielski Peacock. / A Treatise on Algebra 1842/. Wspomnianą zasadę nazwał Peacock "zasadą zachowania form równoważnych" /Principle of permanence of equivualents form/.

xx) "Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen".

Dodaje przytem Hankel, iż zasada zachowania praw formalnych nie winna być stosowana zupełnie swobodnie, gdyż mogłaby stać się krępującą, służy ona jedynie do określenia koniecznych i dostatecznych prawideł, o ile te są od siebie niezależne.

Zasadę tę tłumaczy Hankel w sposób następujący. Niech a, b, c,... oznaczają elementy pewnego zbioru wielkości Z lub pewne funkcje elementów uważanego zbioru. Przypuśćmy, iż elementy a i b zbioru Z skombinowaliśmy ze sobą czysto pojęciowo i uważajmy element c zbioru za wynik wspomnianej kombinacji. We wszystkich dalszych wnioskach i rozumowaniach możemy przeto zastąpić uważaną kombinację elementów a i b zbioru Z przez element c. Jest rzeczą oczywistą, iż jeżeli będziemy kombinować ze sobą według z góry określonych reguł elementy uważanego zbioru, wówczas pomiędzy wynikami rozmaitych połączeń otrzymamy pewne związki, będące logicznem następstwem rzeczonych reguł, niezależne od natury kombinowanych ze sobą elementów. Ponieważ natura połączeń elementów uważanego zbioru jest zupełnie dowolna, przeto, i czysto formalne własności działań są zupełnie dowolne, podlegając temu jedynie zastrzeżeniu, aby własności te nie wyłączały się nawzajem i były od siebie niezależne. Wobec powyższego, przy podawaniu praw formalnych działań, ograniczamy się tylko do bezwzględnie dostatecznych. Można oczywiście utworzyć taki zbiór wielkości, iż zarówno elementy należące do uważanego zbioru, jak również i działania są określone dostatecznie i tylko dostatecznie, który będzie jednak pozbawiony wszelkiej wartości naukowej, skoro tylko przy tworzeniu uważanego zbioru nie nadamy działaniom ściśle określonego znaczenia. Aby więc działania określone dla danego zbioru wielkości posiadały istotne znaczenie dla nauki potrzeba, aby prawa formalne tych działań obejmowały w sobie reguły działań na elementach zbiorów już uprzednio zbadanych. W ten sposób określając dla danego zbioru wielkości działania zasadnicze, staramy się /jakkolwiek nie zawsze to jest możliwe bez wywołania sprzeczności logicznych/ podać takie definicje działań, aby działania zasadnicze posiadały własności, które obejmujemy ogólną nazwą praw formalnych.*)

---

*) Jak wiadomo z arytmetyki, działania zasadni-

Zasada zachowania jest wszakże tylko zasadą kierującą. Oprócz niej konieczne jest podanie jeszcze zasady regulującej, której zadaniem byłoby usunięcie ewentualnych sprzeczności logicznych lub niezgodności z prawdami poprzednio dowiedzionemi, które mogłyby powstać przez zbyt swobodne stosowanie zasady zachowania praw formalnych.

Zasadę tę w zastosowaniu do wielkości możemy wypowiedzieć w sposób następujący:

Wszelkie związki i działania, zachodzące w dziedzinie wielkości nowych nie powinny prowadzić do wyników logicznie sprzecznych lub niezgodnych z prawami odnoszącemi się do dziedziny wielkości już poprzednio zbadanych.*)

W wielu przypadkach do usunięcia tej sprzeczności lub niezgodności wystarcza, jeżeli przy przenoszeniu związków i pojęć z pierwotnej dziedziny wielkości do dziedziny ogólniejszej, pominiemy pewne prawa, które w takim przypadku będą charakteryzować do pewnego stopnia dziedzinę pierwotną. W ten sposób podając definicje działań zasadniczych dla oznaczonego zbioru wielkości, zmuszeni jesteśmy w pewnych szczególnych przypadkach zrezygnować przynajmniej z niektórych praw formalnych, stanowiących cechę charakterystyczną działań określonych dla pewnego innego węższego zbioru wielkości.

Należy zaznaczyć, iż konieczność pominięcia przy ustanawianiu dla danego zbioru wielkości działań zasadniczych przynajmniej jednego z wymie-

cze na liczbach całkowitych zostały wprowadzone w sposób zgodny z poczuciem rzeczywistości. Staramy się przeto przy określaniu działań zasadniczych dla zbiorów wielkości nowego rodzaju zachować te prawa formalne rzeczonych działań, które charakteryzują działania zasadnicze na liczbach całkowitych. W ten sposób postępujemy np. przy określaniu działań zasadniczych na liczbach ujemnych, ułamkowych, niewymiernych, urojonych i t.p.

*) Przykład zastosowania obydwu wspomnianych zasad stanowią przeprowadzone przez nas w § 12 rozważania.

nionych wyżej praw formalnych dodawania i mnożenia obniża w znacznym stopniu znaczenie naukowe uważanego zbioru wielkości, w porównaniu do zbiorów takich wielkości, dla których dodawanie i mnożenie posiadają wszystkie rzeczone własności. Gdyby zachodziła potrzeba pominięcia nie jednego, lecz większej liczby praw formalnych, którym podlegają działania dodawania i mnożenia, wówczas zbiór taki posiadałby przynajmniej przy obecnym stanie nauki conajwyżej znaczenie natury czysto filozoficznej.

Zagadnienie więc ustalenia, które z pośród pięciu wymienionych praw formalnych dodawania i mnożenia można, bez obawy wprowadzenia sprzeczności logicznych oraz niezgodności z prawami już poprzednio ustalonemi, przyjąć jako własności zasadnicze rzeczonych działań na elementach uważanego zbioru jest kwestją niezmiernie ważną. Podając przeto dla danego zbioru wielkości definicje dodawania i mnożenia, dążymy przedewszystkiem do udzielenia odpowiedzi na powyższe pytanie.

R O Z D Z I A Ł II.

POJĘCIE GRUPY I CIAŁA LICZBOWEGO.

§ 14.

Ogólne pojęcie grupy.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór przedmiotów G *) i uważajmy pewne działanie D **) określone dla elementów uważanego zbioru zapomocą definicji Δ. Niech definicja Δ określa uważane działanie D jako działanie jednoznaczne. Oznaczmy przez

$$F(a,b)$$

wynik wykonania uważanego działania D na elementach a i b zbioru G, przyjmując przytem element a za pierwszy, element zaś b za drugi i przyjmijmy symbol F za symbol rzeczonego działania.

O zbiorze G powiadamy, iż stanowi grupę ze względu na działanie D, jeżeli spełnione są warunki następujące:

I. Wynik

$$F(a,b)$$

wykonania działania D na elementach a i b zbioru G należy sam do zbioru G.

II. Jakiekolwiek elementy zbioru G oznaczy-

---

*) Przedmioty należące do uważanego zbioru niekoniecznie muszą posiadać charakter wielkości.

**) Działanie D może nie być działaniem arytmetycznem.

libysmy przez a , b i c mamy zawsze

$$F(a,F(b,c))=F(F(a,b),c)\ ^{x)}$$

o ile tylko działania zaznaczone w każdym ze wzorów $F(a,b)$, $F(b,c)$, $F(a,F(b,c))$ i $F(F(a,b),c)$ są wykonalne.

III. W zbiorze G istnieje taki element i iż dla każdego elementu a zbioru G mamy

$$F(a,i)=a$$

IV. Dla każdego elementu a xx) zbioru G istnieje taki element a' , iż

$$F(a,a')=i\ ^{xxx)}$$

Element i nazywamy elementem obojętnym xxxx), element zaś a' elementem odwrotnym względem elementu a .

Okażemy, iż w zbiorze G istnieje jeden tylko element obojętny i oraz, iż dla każdego elementu a, $(a\neq i)$ zbioru G istnieje jeden tylko element a' odwrotny względem uważanego elementu.

W tym celu okażemy przedewszystkiem , iż dla każdego elementu a należącego do zbioru G mamy zawsze

$$F(a,i)=F(i,a)$$

---

x) Równość powyższa wyraża, iż działanie D posiada własność łączności.

xx) Ze względu na III zakładamy, iż $a\neq i$.

xxx) Porównaj L.E.Dickson. Definitions of a group and a field by independent postulates. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 6. /1905/ str. 199.

xxxx) L.E.Dickson. l.c. /str. 199/ nazywa element i elementem identycznym /identity element/. Element obojętny nazywamy również modułem działania D .

W samej rzeczy, zgodnie z postulatem IV w zbiorze G istnieją takie dwa elementy a' oraz a'' iż

$$F(a, a') = i \qquad (1)$$

oraz

$$F(a', a'') = i \qquad (2)$$

Z drugiej strony na mocy postulatu III mamy dla każdego elementu a zbioru G

$$a = F(a, i) \qquad (3)$$

Z równości powyższej ze względu na równość (2) otrzymujemy

$$a = F(a, F(a', a''))$$

Ponieważ zaś /na mocy postulatu II/

$$F(a, F(a', a'')) = F(F(a, a'), a'')$$

przeto

$$a = F(F(a, a'), a'')$$

skąd po uwzględnieniu równości (1) dochodzimy do związku

$$a = F(i, a'') \qquad (4)$$

Wobec powyższego mamy

$$F(a', a) = F(a', F(i, a''))$$

Równość powyższa z uwagi na równość

$$F(a', F(i, a'')) = F(F(a', i), a'')$$

jest równoważna równości

$$F(a', a) = F(F(a', i), a'')$$

Ponieważ zaś /na mocy postulatu III/ mamy

$$F(a', i) = a'$$

przeto

$$F(a', a) = F(a', a'')$$

skąd z uwagi na równość (2) otrzymujemy natychmiast

$$F(a', a) = i \qquad (5)$$

Wobec powyższego mamy również

$$F(a'', a') = i \qquad (6)$$

Z drugiej strony mamy oczywiście

$$F(i, a) = F(F(i, i), a)$$

skąd ze względu na równość (6) otrzymujemy

$$F(i, a) = F(F(i, F(a'', a')), a)$$

lub /postulat II/

$$F(i, a) = F(F(F(i, a''), a'), a).$$

Z równości powyższej na mocy tegoż postulatu II mamy

$$F(i, a) = F(F(i, a''), F(a', a)).$$

Ostatnia równość z uwagi na związki (4) i (5) jest równoważna równości

$$F(i, a) = F(a, i)$$

Skąd ostatecznie /postulat III/

$$F(i, a) = a \qquad (7)$$

Porównywując ze sobą równości (3) i (7) otrzymujemy natychmiast

$$F(a, i) = F(i, a) \qquad (8)$$

Opierając się na udowodnionej powyżej równości okażemy teraz, iż w zbiorze G istnieje tylko jeden element obojętny.

W samej rzeczy, załóżmy, iż w zbiorze G istnieją dwa elementy obojętne i oraz i_1.

Na mocy definicji elementu obojętnego oraz uczynionego powyżej założenia, mamy

$$F(i_1, i) = i_1 \tag{9}$$

oraz

$$F(i, i_1) = i \tag{10}$$

Ponieważ na mocy udowodnionej poprzednio równości (8)

$$F(i_1, i) = F(i, i_1)$$

przeto ze związków (9) i (10) otrzymujemy natychmiast

$$i_1 = i$$

W ten sposób udowodniliśmy, iż w zbiorze G istnieje jeden tylko element obojętny; pozostaje przeto do okazania, iż w zbiorze G istnieje jeden tylko element odwrotny względem uważanego elementu a.

W tym celu załóżmy, iż w zbiorze G istnieją dwa elementy odwrotne a' oraz a_1' względem danego elementu a *).

Na mocy uczynionego założenia oraz definicji elementu odwrotnego mamy

$$F(a, a') = i \tag{11}$$

oraz

$$F(a, a_1') = i \tag{12}$$

Z drugiej strony mamy w każdym razie /postulat III/

$$a_1' = F(a_1', i)$$

---

*) Zakładamy, iż $a \neq i$.

Z równości powyższej ze względu na równość (11) otrzymujemy

$$a_1' = F(a_1', F(a, a')).$$

Ponieważ zaś /postulat II/

$$F(a_1', F(a, a')) = F(F(a_1', a), a')$$

przeto

$$a_1' = F(F(a_1', a), a')$$

Równość powyższa ze względu na równość

$$F(a_1', a) = F(a, a_1')$$

oraz równość (12) jest równoważna równości

$$a_1' = F(i, a')$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$a_1' = a'$$

Równość ta wyraża, iż w zbiorze G istnieje jeden tylko element odwrotny względem danego elementu a.

Przyjmijmy za zbiór G zbiór C wszystkich liczb całkowitych wymiernych, za działanie zaś D działanie dodawania. Spostrzegamy natychmiast, iż zbiór C stanowi grupę ze względu na rzeczone działanie.

W samej rzeczy, jakiekolwiek liczby całkowite wymierne oznaczylibyśmy przez a, b i c:

1°. Liczba

$$a + b$$

jest liczbą całkowitą

2°

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3°. W zbiorze C istnieje taka liczba 0, iż dla każdej dowolnej liczby całkowitej a mamy

$$a + 0 = a$$

i wreszcie

4°. Dla każdej dowolnej liczby całkowitej a *) istnieje taka liczba całkowita $-a$, iż

$$a+(-a)=0$$

Zbiór C liczb całkowitych wymiernych stanowi więc grupę ze względu na działanie dodawania.

Natomiast ani zbiór liczb całkowitych dodatnich, ani zbiór liczb całkowitych ujemnych nie stanowią, każdy z osobna, grupy ze względu na uważane działanie, bowiem jakkolwiek każdy z rzeczonych zbiorów czyni zadość postulatom I i II, jednak w żadnym z uważanych zbiorów nie istnieje liczba i spełniająca warunek

$$a+i=a \text{ **)}$$

Wprawdzie dołączając do każdego z rzeczonych zbiorów liczbę 0 uzyskalibyśmy spełnienie postulatu III, nie mniej jednak postulat IV nie byłby przez to spełniony. Zbiór C liczb całkowitych wymiernych jest więc najprostszym, stanowiącym grupę ze względu na działanie dodawania, zbiorem liczb.

Ten sam zbiór C liczb całkowitych wymiernych nie stanowi jednak grupy ze względu na działanie mnożenia. Wprawdzie zbiór C czyni zadość w uważanym przypadku postulatom I i II, nadto w zbiorze C istnieje, zgodnie z postulatem III liczba 1 spełniająca równanie

$$a\times 1=a$$

---

*) Zakładamy, iż $a\neq 0$. /Porównaj odsyłacz drugi na str. 81./

**) Zwracamy uwagę czytelnika na okoliczność, iż w przypadku, gdy zbiór G nie zawiera elementu obojętnego, /jak to ma miejsce w przypadku zbioru liczb całkowitych dodatnich, lub całkowitych ujemnych/, postulat IV traci sens, nie wymaga bowiem "niczego". Powiadamy jednak i w tym przypadku, iż postulat IV jest spełniony, lecz jest "pusty".

gdzie a oznacza dowolną liczbę całkowitą wymierną, jednak postulat IV nie jest spełniony, bowiem w zbiorze C nie istnieje liczba całkowita a' czyniąca zadość równości

$$a \times a' = 1$$

Zbiór W wszystkich liczb wymiernych stanowi grupę ze względu na działanie dodawania, nie jest natomiast grupą ze względu na działanie mnożenia, bowiem w zbiorze W nie istnieje odwrotność liczby 0. Jeżeli ze zbioru W usuniemy liczbę 0, wówczas otrzymany w ten sposób zbiór W' wszystkich liczb wymiernych, różnych od zera, będzie oczywiście stanowił grupę ze względu na mnożenie, nie będzie jednak już grupą ze względu na działanie dodawania; postulat III nie będzie bowiem w uważanym przypadku spełniony.

Powyższe uwagi, dotyczące zbioru W liczb wymiernych, stosują się również i do zbioru R liczb rzeczywistych.

§ 15.

Grupy skończone i nieskończone. Grupy abelowe.

Liczba elementów zbioru G, stanowiącego grupę ze względu na pewne oznaczone działanie D może być skończoną lub nieskończoną. Zależnie od tego który z dwu wspomnianych wyżej przypadków zachodzi, rozróżniamy grupy skończone i nieskończone. Liczbę elementów grupy nazywamy jej rzędem.

Jako przykład grupy nieskończonej możemy wziąć którykolwiek z rozpatrzonych powyżej zbiorów C, W, R, W' i R'.

Pierwsze trzy z rzeczonych zbiorów stanowią, każdy z osobna, grupę nieskończoną ze względu na działanie dodawania, każdy z dwu ostatnich - takąż grupę ze względu na działanie mnożenia.

Jako przykład zbioru skończonego, stanowiącego grupę ze względu na działanie mnożenia, może służyć zbiór J pierwiastków czwartego stopnia z jedności. Zbiór ten zawiera tylko cztery elementy, a mianowicie

$$+1, -1, +i, -i.$$

Że zbiór powyższy stanowi grupę ze względu na działanie mnożenia, stwierdzamy z łatwością, bowiem:

1°. Iloczyn jakichkolwiek dwu elementów zbioru $\mathcal{J}$ jest elementem uważanego zbioru,

2°. Mnożenie elementów zbioru $\mathcal{J}$ posiada własność łączności,

3°. W zbiorze $\mathcal{J}$ istnieje element obojętny. Elementem tym jest liczba $+1$
i wreszcie

4°. Dla każdego dowolnego elementu zbioru $\mathcal{J}$ istnieje w uważanym zbiorze element odwrotny.*)

Rząd uważanej grupy jest równy 4.

Jeszcze prostszym przykładem zbioru skończonego, stanowiącego grupę ze względu na działanie mnożenia, jest zbiór pierwiastków równania

$$x^2 - 1 = 0$$

Zbiór ten zawiera tylko dwa elementy, mianowicie

$$+1 \quad \text{i} \quad -1$$

Jest to grupa rzędu 2-go.

Jako inny przykład grupy skończonej, rozważmy układ najmniejszych reszt według modułu 7.**)

---

*) Czytelnik obznajmiony z zasadami teorji liczb urojonych spostrzeże natychmiast, iż mamy

$$\frac{1}{i} = -i \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{-i} = i$$

**) Układ najmniejszych reszt według danego modułu p / p jest liczbą całkowitą/ otrzymamy, dzieląc zbiór wszystkich liczb całkowitych na klasy w ten sposób, iż do klasy

$$[r]_p$$

zaliczamy wszystkie liczby całkowite postaci

Elementami naszej grupy będą więc liczby:

$$0,1,2,3,4,5,6$$

Jako działanie D uważajmy działanie "dodawania", które określimy w sposób następujący: Za "sumę" dwu elementów zbioru M najmniejszych reszt według modułu 7, przyjmujemy zwykłą sumę arytmetyczną uważanych elementów w przypadku, gdy suma ta jest mniejsza od liczby 7, zaś resztę podziału przez liczbę 7 zwykłej sumy arytmetycznej, w razie gdy suma ta jest od liczby 7 większa. W ten sposób mamy

$$1 \oplus 2 = 3,\ 0 \oplus 6 = 6,\ 3 \oplus 4 = 0,\ 4 \oplus 6 = 3$$

$$5 \oplus 3 = 1 \text{ i t.d.}$$

Definicja powyższa określa działanie " dodawania "

$$pk + r$$

gdzie

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

a więc wszystkie liczby całkowite, dające przy dzieleniu przez daną liczbę p reszty równe liczbie r. Ponieważ każda liczba całkowita należy do jednej i tylko jednej klasy według danego modułu p, przeto zbiór tak otrzymanych klas jest /ze względu na własności, jakie wykazują liczby całkowite przy dzieleniu przez liczbę p / równoważny zbiorowi liczb

$$0, 1, 2, 3, \ldots.\ p-1 \qquad (a)$$

Zbiór (a) nazywamy układem najmniejszych reszt według modułu p.

Dowód twierdzenia, iż każda liczba całkowita należy do jednej i tylko jednej klasy według danego modułu p, znajdzie czytelnik w dziele: W. Sierpiński. Teorja liczb. / Kurs Uniwersytecki/. Wydanie drugie. Warszawa, 1925. str. 25.

jako działanie jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.

Jest rzeczą oczywistą, iż uważany zbiór M czyni zadość wszystkim wymienionym na początku poprzedzającego § postulatom.

W samej rzeczy, spostrzegamy z łatwością, iż wspomniane warunki są spełnione, bowiem: " suma " każdych dwu dowolnych elementów zbioru M należy sama do uważanego zbioru, " dodawanie " elementów zbioru posiada własność łączności, w zbiorze M istnieje element obojętny, mianowicie liczba 0 , wreszcie dla każdego dowolnego elementu zbioru istnieje w uważanym zbiorze element odwrotny.*)

Zbiór M stanowi więc grupę ze względu na określone wyżej działanie "dodawania".

Rząd uważanej grupy jest równy 7 .

Usuńmy ze zbioru M liczbę 0 i uważajmy zbiór M' zawierający 6 elementów

$$1,2,3,4,5,6 \tag{14}$$

Przyjmijmy za "iloczyn" dwu elementów zbioru M' ich iloczyn arytmetyczny, jeżeli jest on mniejszy od liczby 7 , zaś resztę podziału iloczynu arytmetycznego uważanych elementów przez liczbę 7 w razie, gdy iloczyn ten jest od liczby 7 większy. W ten sposób mamy

$$1 \otimes 6 = 6,\ 3 \otimes 4 = 5,\ 4 \otimes 2 = 1,$$

$$5 \otimes 6 = 2 \quad \text{i t.d.}$$

Przekonamy się z łatwością, iż zbiór M' stanowi grupę ze względu na określone powyżej działanie "mnożenia". Elementem obojętnym jest liczba 1. Każdemu elementowi zbioru M' odpowiada oczywiście element odwrotny, zawarty w zbiorze M' **) . We

---

*) Elementowi a zbioru M odpowiada jako element odwrotny element $7-a$.

**) Elementom

2,3,4,5 i 6

wszystkich rozpatrzonych powyżej przykładach działanie D , ze względu na które rozważany zbiór stanowił grupę, posiadało własność przemienności.

Grupy tego rodzaju nazywamy grupami przemiennościowemi, lub abelowemi.[x)]

Każdy zbiór G , stanowiący grupę abelową , spełnia więc poza wymienionemi na początku poprzedzającego § czterema postulatami /I, II, III i IV / jeszcze postulat:

V. Jakiekolwiek elementy zbioru G oznaczylibyśmy przez a i b mamy zawsze

$$F(a,b)=F(b,a)$$

Grupy abelowe odgrywają niezmiernie ważną rolę w algebrze.

Na zakończenie niniejszego § podamy przykład zbioru, stanowiącego grupę ze względu na działanie nie posiadające własności przemienności.

Uważajmy zbiór (G), takich obrotów trójkąta równobocznego ABC dokoła jego środka O oraz każdej z trzech wysokości AA', BB' i CC' , przy których trójkąt ABC przekształca się na siebie.[xx)] Spostrzegamy natychmiast, iż istnieje dokładnie sześć obrotów, przekształcających trójkąt na siebie, mianowicie: trzy obroty trójkąta we własnej jego płaszczyźnie dokoła jego środka O o 120^0 , 240^0, 360^0 [xxx)] oraz trzy obroty dokoła trzech wysokości AA' , BB' i CC' o 180^0 /Rys. 1/.

---

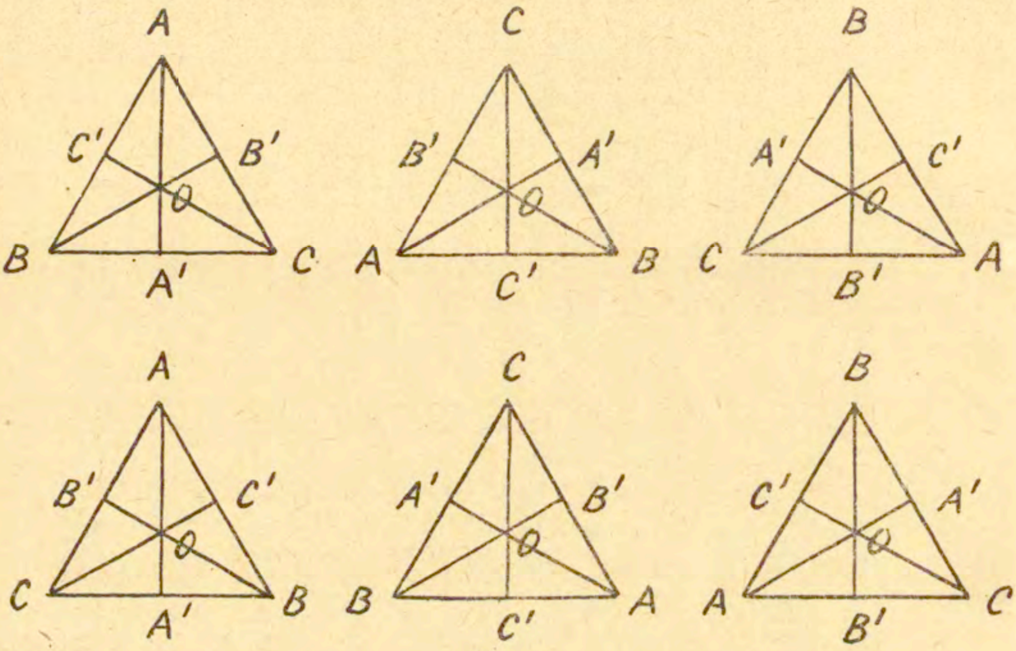
zbioru M' odpowiadają jako elementy odwrotne liczby

4,5,2,3 i 6

x) Nazwa ta została wprowadzona przez Hermite'a.

xx) Rozumiemy przez to taki ruch trójkąta,po którego odbyciu trójkąt pokrywa się ze swem położeniem pierwotnem.

xxx) Obrót odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.



Rys. 1.

Przyjmując, iż wspomniane obroty trójkąta ABC są jedynemi możliwemi, przekształcającemi trójkąt na siebie, stwierdzimy z łatwością, iż zbiór (G) rzeczonych sześciu obrotów stanowi grupę ze względu na działanie polegające na łącznem/składaniu/ze sobą uważanych obrotów.

W samej rzeczy, spostrzegamy natychmiast, iż wynik do którego doprowadza wykonanie jednego po drugim dwu należących do zbioru (G) obrotów trójkąta ABC jest równoważny pewnemu jednemu obrotowi, należącemu do zbioru (G); nadto składanie obrotów podlega prawu łączności. W zbiorze (G) istnieje oczywiście element obojętny: jest nim obrót trójkąta ABC dokoła środka O o kąt równy 360^0, wreszcie dla każdego elementu zbioru (G) istnieje w uważanym zbiorze element odwrotny. Każdemu obrotowi trójkąta ABC dokoła środka O o kąt α / $\alpha = 120^0, 240^0, 360^0$/ odpowiada obrót o kąt $(360-\alpha)^0$. Obrót ten w połączeniu z obrotem dokołą środka o kąt α jest równoważny obrotowi o 360^0, a więc elementowi obojętnemu. Każdemu z trzech obrotów trójkąta ABC o kąt 180° dokoła wysokości AA', BB', CC' odpowiada obrót o dalsze 180° sprowadzający trójkąt do położenia pierwotnego. Zbiór (G) uważanych sześciu obrotów trójkąta ABC stanowi więc grupę ze względu na działanie składania obrotów. Rząd uważanej grupy jest równy 6.

Grupa ta jednak, jak łatwo się o tem przekonać, nie jest grupą abelową.

W samej rzeczy, obrót trójkąta ABC dokoła wysokości AA' przekłada punkt C na B zaś B na C przyczem punkt A pozostaje w miejscu. Wynik ten możemy przedstawić zapomocą podstawienia:*)

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ A, C, B \end{pmatrix}$$

Podobny obrót trójkąta ABC dokoła wysokości CC' przekłada punkt A na B, zaś B na C, podczas gdy punkt C pozostaje w miejscu. Obrót ten jest równoważny podstawieniu:

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ B, A, C \end{pmatrix}$$

Wykonywując teraz obydwa rzeczone obroty jeden po drugim w rozpatrzonym porządku, przekładamy punkt A na B, B na C i wreszcie C na A. Dochodzimy w ten sposób do podstawienia:

---

*) Przez podstawienie rozumiemy przejście od pewnego uporządkowania

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

n elementów pewnego zbioru do jakiegokolwiek innego uporządkowania /różniącego się od danego, conajwyżej porządkiem/:

$$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots\ldots a_{\alpha_n}$$

uważanych elementów.
Podstawienie to oznaczamy zapomocą symbolu

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \\ a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots\ldots a_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ B, C, A \end{pmatrix}$$

które jest równoważne jedynemu obrotowi trójkąta ABC dokoła środka O o kąt równy 240°.
Jeżeli jednak zmienimy porządek następowania po sobie uważanych obrotów, obracając najpierw trójkąt ABC dokoła wysokości CC' następnie zaś dokoła — AA', wówczas wynikowi złożenia obydwu rzeczonych obrotów odpowiada podstawienie

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ C, A, B \end{pmatrix}$$

równoważne jedynemu obrotowi trójkąta ABC dokoła środka O o kąt równy 120°. Działanie składania obrotów, stanowiących elementy zbioru (G), nie posiada więc własności przemienności. Grupa (G) nie jest więc grupą abelową.

§ 16.

Grupy podstawień /przemianowe/.

Przejdziemy teraz do pobieżnego rozpatrzenia pewnej szczególnej klasy grup, odgrywających niezmiernie ważną rolę w ogólnej teorji grup skończonych. W tym celu wprowadzimy przedewszystkiem pojęcie podstawienia.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór Z, zawierający n elementów

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

Przez podstawienie rozumiemy przejście od pewnej przemiany

$$P_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_n})$$

n elementów zbioru

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

do pewnej innej przemiany

$$P_{i'} = (a_{i'_1}, a_{i'_2}, \dots a_{i'_n})$$

uważanych elementów.

Podstawienie to oznaczamy zapomocą symbolu

$$\pi_{i,i'} = \begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots\dots a_{i_n} \\ a_{i''_1}, a_{i''_2}, \dots\dots a_{i''_n} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Ponieważ od każdej dowolnej przemiany

$$i_1, i_2, \dots\dots i_n$$

n liczb

$$1, 2, 3, \dots\dots n$$

możemy przejść zawsze, drogą wykonania stosownego ciągu przestawień dwu elementów, do ich natural - nego uporządkowania [x]) , przeto symbol (15) jest równoważny symbolowi

$$\pi_\alpha = \begin{pmatrix} a_1, & a_2 & & a_n \\ a_{\alpha_1}, & a_{\alpha_2}, & \dots & a_{\alpha_n} \end{pmatrix} \tag{16}$$

gdzie

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$$

oznacza przemianę jaką otrzymujemy z przemiany

$$i''_1, i''_2, \dots\dots i''_n$$

gdy przemiana

---

x) Porównaj: S.Zaremba. Wstęp do analizy. Część I. Warszawa 1915. str. 52. Twierdzenie II. Patrz także: S.Zaremba. Teorja wyznaczników i równań linjowych. Kraków 1909. strona 17. Twierdzenie III.

$$i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$$

przechodzi w przemianę

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n.$$

Przyjmując, iż każdy element zbioru

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \qquad (17)$$

jest jednoznacznie wyznaczony przez odpowiadający mu wskaźnik, możemy w symbolu (16) zastąpić elementy a zbioru (17) przez ich wskaźniki.

Symbol (16) przyjmie wówczas postać

$$\pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots\ldots & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots\ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Jest to szczególnie dogodna postać symbolu podstawienia.

Podamy teraz definicję "mnożenia" podstawień.

Uważajmy dwa dowolnie dane podstawienia

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots\ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (18)$$

oraz

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & n \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots\ldots & \beta_n \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Napiszmy podstawienie π_2 w postaci

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots\ldots & \alpha_n \\ \beta_{\alpha_1}, & \beta_{\alpha_2}, & \beta_{\alpha_3}, & \ldots\ldots & \beta_{\alpha_n} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

którą otrzymujemy z postaci (19) zapomocą wykonania takiego ciągu transpozycyj /przestawień/ dwu sąsiednich par elementów

$$\begin{matrix} i & i+1 \\ \beta_i, & \beta_{i+1} \end{matrix} \qquad (i=1,2,3,\dots n)$$

który doprowadza od przemiany

$$1,2,3,\dots\dots n$$

wypisanej w górnym wierszu podstawienia (19) do przemiany

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n$$

wypisanej w dolnym wierszu podstawienia (18)
Podstawienie (20) otrzymujemy więc przechodząc od przemiany

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n$$

elementów

$$1,2,3,\dots\dots\dots n$$

zbioru Z do przemiany

$$\beta_{\alpha_1},\beta_{\alpha_2},\beta_{\alpha_3},\dots\beta_{\alpha_n}$$

tychże elementów.
Uważajmy podstawienie

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3,\dots\dots & n \\ \beta_{\alpha_1}, & \beta_{\alpha_2}, & \beta_{\alpha_3}\dots & \dots\beta_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Podstawienie powyższe jest oczywiście równoważne wykonaniu na elementach

$$1,2,3,\dots\dots n$$

zbioru Z podstawienia π_1, następnie zaś podstawienia π_2. Nazywamy je "iloczynem" podstawień π_1 i π_2 i oznaczamy przez

$$\pi_1\pi_2$$

pisząc

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots n \\ \beta_{\alpha_1}, \beta_{\alpha_2} \ldots \beta_{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Tak np.

$$\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 3,2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2,3,1 \\ 2,1,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,1,3 \end{pmatrix}$$

Czynność zapomocą której, mając dane dwa podstawienia

$$\pi_1 \text{ oraz } \pi_2$$

otrzymujemy podstawienie

$$\pi_1\pi_2$$

nazywamy "mnożeniem" uważanych podstawień, podstawienia zaś π_1 i π_2 "czynnikami".
"Mnożenie" podstawień nie posiada nacgół własności przemienności.

Tak np. iloczyn

$$\pi_1\pi_2$$

dwóch podstawień

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 3,5,4,1,6,2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 5,1,2,4,3,6 \end{pmatrix}$$

jest równy

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,4,5,6,1 \end{pmatrix}$$

podczas gdy

$$\pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 6,3,5,1,4,2 \end{pmatrix}$$

Mamy zatem

$$\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$$

Zdarzają się jednak przypadki, w których "iloczyn" dwu podstawień jest przemienny. Jako przykład uważajmy dwa podstawienia

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 3,4,5,6,1,2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 6,1,2,3,4,5 \end{pmatrix}$$

Spostrzegamy natychmiast, iż mamy

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,4,5,6,1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,4,5,6,1 \end{pmatrix}$$

W uważanym przypadku

$$\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$$

Natomiast "mnożenie" podstawień posiada własność łączności. W samej rzeczy, uważajmy trzy podstawienia *)

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots a_\alpha \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots a_\beta \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots a_\beta \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots a_\gamma \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

---

*) Przez α , β , γ i δ oznaczylibyśmy dowolne /niekoniecznie różne/ liczby ciągu:

$$1, 2, 3, \ldots n$$

oraz

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots a_\gamma \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_\delta \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

należące do pewnego oznaczonego zbioru podstawień utworzonych z elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

zbioru Z .

Na mocy przyjętej powyżej definicji " mnożenia " podstawień, mamy

$$\pi_2\pi_3 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots a_\beta \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_\delta \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

oraz

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots a_\alpha \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_\gamma \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Wobec powyższego

$$\pi_1(\pi_2\pi_3) = \begin{pmatrix} \ldots\ldots a_\alpha \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_\delta \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

oraz

$$(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \begin{pmatrix} \ldots\ldots a_\alpha \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_\delta \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$\pi_1(\pi_2\pi_3) = (\pi_1\pi_2)\pi_3$$

Podstawienie

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots n \\ 1, 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

nazywamy podstawieniem tożsamościowem.

Podstawienie tożsamościowe spełnia oczywiście równanie

$$\pi_\alpha \varepsilon = \pi_\alpha$$

gdzie

$$\pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1, & 2, & & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

oznacza dowolne podstawienie n elementów zbioru Z.

Podstawienie

$$\pi_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \\ 1, & 2, & \dots & n \end{pmatrix}$$

czyniące zadość równaniu

$$\pi_\alpha \pi_\alpha^{-1} = \varepsilon$$

gdzie ε jest podstawieniem tożsamościowem, nazywamy podstawieniem odwrotnem względem podstawienia π_α.

Spostrzegamy natychmiast, iż podstawienie

$$(\pi_\alpha^{-1})^{-1}$$

odwrotne względem podstawienia

$$\pi_\alpha^{-1}$$

odwrotnego względem danego podstawienia

$$\pi_\alpha$$

jest podstawieniem danem.

Liczba wszystkich różnych podstawień z n elementów jest oczywiście równa liczbie wszystkich różnych przemian z n elementów, a więc

$$n!$$

gdzie

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Tak np. dla zbioru składającego się z trzech elementów

$$a_1, a_2, a_3$$

mamy 6 różnych podstawień, a mianowicie

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix};$$

Zbiór (P) wszystkich różnych podstawień utworzonych z danych n elementów

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n$$

należących do zbioru Z stanowi, jak łatwo się o tem przekonać, grupę ze względu na określone powyżej działanie "mnożenia".

W samej rzeczy, opierając się na przeprowadzonych powyżej rozważaniach, spostrzegamy natychmiast, iż "iloczyn" dwu podstawień π_α oraz π_β, należących do zbioru (P) jest podstawieniem należącem do uważanego zbioru, nadto jak wiemy "mnożenie" podstawień posiada własność łączności. W zbiorze (P) istnieje oczywiście element obojętny; jest nim podstawienie tożsamościowe. Wreszcie dla każdego podstawienia, należącego do zbioru (P), istnieje w uważanym zbiorze podstawienie odwrotne [x]). Grupy, których elementami są podstawienia

---

[x]) Że tak jest istotnie, spostrzegamy z łatwością. W samej rzeczy, uważajmy pewne podstawienie

$$\pi_\alpha = \begin{pmatrix}1, & 2, & \dots & n\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

zawarte w zbiorze (P). Jeżeli uważane podstawienie nie jest własną swoją odwrotnością, wówczas w zbiorze (P) zawierającym , zgodnie z definicją, wszystkie różne podstawienia n elementów

$$a_1, a_2, \dots \alpha_n$$

musi być oczywiście zawarte podstawienie

$$\pi_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n\\ 1, & 2, & & n\end{pmatrix}.$$

utworzone z elementów

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

pewnego zbioru Z, nazywamy grupami podstawień lub grupami przemianowemi uważanych elementów. Jeżeli uważana grupa podstawień zawiera wszystkie możliwe podstawienia, utworzone z n elementów

$$a_1, a_2, \ldots . a_n$$

zbioru Z, wówczas rząd uważanej grupy jest, jak wiemy, równy $n!$.

Taką grupę nazywamy grupą symetryczną podstawień n elementów, lub krótko grupą symetryczną.

Grupa symetryczna (S_n) n $(n > 2)$ *) elementów

$$a_1, a_2, \ldots . a_n$$

zbioru Z nie jest jednak jedyną grupą, jaką tworzą podstawienia rzeczonych elementów. Okazuje się iż istnieją pewne podmnogości zbioru (S_n), stanowiące grupy ze względu na określone powyżej działanie "mnożenia".

Dla przykładu przytoczymy wszystkie grupy, dające się utworzyć z podstawień trzech elementów.

$$a_1, a_2, a_3$$

Uważane podstawienia tworzą następujące grupy:

---

będące podstawieniem odwrotnem względem uważanego podstawienia π_α.

*) W przypadku $n = 2$ można utworzyć tylko jedną grupę. Grupa ta składa się z następujących dwu podstawień

$$\binom{1,2}{1,2}, \binom{1,2}{2,1}. \qquad (S_2)$$

Jest to oczywiście grupa symetryczna rzędu drugiego.

Trzy grupy rzędu drugiego:

$$(A_1)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix};$$

$$(A_2)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix};$$

$$(A_3)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix};$$

Jedną grupę trzeciego rzędu:

$$(B)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix};$$

Wreszcie grupę symetryczną rzędu szóstego:

$$(S_3)\qquad \begin{matrix}\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix}.\end{matrix}$$

Podamy jeszcze grupy utworzone z podstawień czterech elementów

$$a_1, a_2, a_3, a_4.$$

Z rzeczonych podstawień daje się utworzyć 29 grup, a mianowicie:
Dziewięć grup 2-go rzędu:

$$(C_1)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix};$$

$$(C_2)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix};$$

$$(C_3)\qquad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix};$$

(C_4) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix};$

(C_5) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix};$

(C_6) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix};$

(D_1) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix};$

(D_2) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix};$

(D_3) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix};$

Cztery grupy 3-go rzędu:

(E_1) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,1,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,2,4\end{pmatrix};$

(E_2) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,3,2\end{pmatrix};$

(E_3) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,4,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,1,3\end{pmatrix};$

(E_4) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,4,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,2,3\end{pmatrix};$

Siedem grup 4-go rzędu:

(F) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix};$

(G_1) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix};$

(G_2) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix};$

(G_3) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix};$

(H_1) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,4,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,2,3\end{pmatrix};$

(H_2) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,4,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,1,3\end{pmatrix};$

(H_3) $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,2,1\end{pmatrix};$

Cztery grupy 6-go rzędu:

$$(J_1)\quad \begin{matrix}\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,1,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,2,4\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix};\end{matrix}$$

$$(J_2)\quad \begin{matrix}\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,3,2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix};\end{matrix}$$

$$(J_3)\quad \begin{matrix}\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,4,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,1,3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix};\end{matrix}$$

$$(J_4)\quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,4,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,2,3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix};$$

Trzy grupy 8-go rzędu:

$$(K_1)\quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,4,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,2,3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix};$$

$$(K_2)\quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,4,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,1,3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix};$$

$$(K_3)\quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,2,1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix};$$

Jedna grupa 12-go rzędu:

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix},$$
$$(L)\quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,1,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,2,3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,3,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,4,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,2,4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,1,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,4,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,3,1\end{pmatrix};$$

Wreszcie symetryczna grupa rzędu 24-go:

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,1,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,3,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,4,1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,2,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,1,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,4,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,3,1\end{pmatrix},$$

(S_4)

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,1,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,1,4,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,2,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,4,1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,3,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,4,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,1,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,2,1\end{pmatrix}.$$

Grupa ta zawiera w sobie wszystkie poprzedzające.

Znalezienie wszystkich możliwych grup podstawień n elementów stanowi podstawowe zagadnienie teorji grup podstawień. Zagadnienie to, mimo usiłowań całego szeregu uczonych, nie zostało dotychczas niestety rozwiązane.

W końcowych rozdziałach kursu, poświęconych teorji rozwiązywania równań algebraicznych, okażemy, iż pomiędzy grupami podstawień a pierwiastkami równań algebraicznych daje się ustalić niezmiernie ścisły związek. Na związku powyższym oparta jest teorja rozwiązywania równań algebraicznych.

§ 17.

Kwadrat Cayley'a.

Z rozważań przeprowadzonych w §§ poprzedzających wiemy, iż pojęcie grupy wiąże się niezmiernie ściśle z pojęciem działania.

Przez działanie rozumiemy w teorji grup czynność polegającą na podporządkowaniu w sposób jednoznaczny każdej parze

$$(a,b)$$

elementów pewnego zbioru G pewnego innego elementu

$$c$$

tegoż zbioru.

Określonemu w powyższy sposób działaniu nadajemy w teorji grup nazwę "mnożenia" *) . Wynik wykonania "mnożenia" na dwóch elementach a i b należących do uważanego zbioru G nazywamy "iloczynem" uważanych elementów.

Za symbol iloczynu elementów a i b przyjmujemy symbol następujący

$$ab$$

Zaznaczamy, iż nie jest obojętnym porządek w jakim elementy a i b , należące do uważanej grupy G , występują w symbolu

$$ab$$

"Iloczyny ab i ba mogą doprowadzać do różnych elementów uważanej grupy. Tylko w szczególnym przy-

---

*) Określone powyżej "mnożenie" elementów grupy nie jest bynajmniej identyczne z czynnością, której w arytmetyce nadajemy nazwę mnożenia.

Przez "mnożenie" w teorji grup rozumiemy wogóle działanie polegające na wspomnianem podporządkowaniu każdej parze elementów grupy oznaczonego elementu, należącego do uważanej grupy, nie zaś pewną jedną ściśle oznaczoną czynność. Nazwą " mnożenia " obejmujemy więc zbiór wszystkich takich czynności , bez względu na ich charakter lub szczególne własności. W bardzo wielu przypadkach "mnożenie" określone dla elementów pewnej grupy nie posiada wogóle charakteru działania arytmetycznego. Czytelnik spostrzeże natychmiast , iż "mnożenie" podstawień lub rozważone powyżej składanie obrotów trójkąta równobocznego jest przykładem takiego właśnie działania . Ścisłe odróżnianie "mnożenia" w sensie określonym wyżej od czynności, której w arytmetyce nadajemy nazwę mnożenia jest rzeczą niezmiernie ważną.

padku, gdy grupa G jest grupą abelową, mamy zawsze

$$ab = ba$$

Weźmy pod uwagę zbiór Z, zawierający n elementów

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

Niech uważany zbiór Z stanowi grupę G ze względu na określone dla zawartych w nim elementów "mnożenie".

Utwórzmy, zgodnie z ustalonem dla elementów grupy G "mnożeniem", wszystkie możliwe "iloczyny" par elementów grupy i ułóżmy z tak otrzymanych "iloczynów" tablicę kwadratową, wypisując "iloczyn"

$$a_i a_k$$

elementów a_i i a_k grupy na skrzyżowaniu wiersza, odpowiadającego elementowi a_i z kolumną odpowiadającą elementowi a_k.

Otrzymaną w ten sposób tablicę kwadratową:

	a_1	a_2	a_3	....	a_n
a_1	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	....	a_1a_n
a_2	a_2a_1	a_2a_2	a_2a_3	....	a_2a_n
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3a_3	....	a_3a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	a_na_1	a_na_2	a_na_3	....	a_na_n

nazywamy kwadratem Cayley'a.[x]

Jako przykład, uważajmy znany nam już z poprzedzających rozważań zbiór $\mathcal{J}$ pierwiastków czwartego stopnia z jedności. Zbiór ten, jak okazaliśmy w § 15 /str.88/, stanowi grupę ze względu na "mnożenie", za które przyjmujemy zwykłe mnożenie arytmetyczne. W uważanym przypadku kwadrat Cayley'a przedstawia się w sposób następujący:

	$+1$	-1	$+i$	$-i$
$+1$	$+1$	-1	$+i$	$-i$
-1	-1	$+1$	$-i$	$+i$
$+i$	$+i$	$-i$	-1	$+1$
$-i$	$-i$	$+i$	$+1$	-1

Jako inny przykład rozważmy zbiór M najmniejszych reszt według modułu 7. "Mnożenie" elementów

$$0,1,2,3,4,5,6$$

uważanego zbioru określiliśmy w § 15 / str.89 / w sposób następujący: "iloczyn" ab oznacza resztę arytmetycznej sumy elementów a i b zbioru M przy dzieleniu przez liczbę 7 . Zbiór M , jak wiemy, stanowi grupę ze względu na określona w powyższy sposób "mnożenie".

Kwadratem Cayley'a będzie więc w uważanym przypadku:

---

[x]) A.Cayley. On the Theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n=1$. Philosophical Magazine, Vol. VII. /1854/. str. 40--47. Collected Mathematical Papers. Vol. II. str. 123 i nast.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Jako trzeci przykład, weźmy pod uwagę zbiór M' /§ 15 str.90/. Uważany zbiór zawierający 6 elementów

1,2,3,4,5,6

stanowi, jak wiemy, grupę ze względu na "mnożenie", które określamy w sposób następujący: "iloczyn" ab dwu elementów a i b zbioru M' oznacza resztę iloczynu arytmetycznego uważanych elementów przy dzieleniu przez liczbę 7 . Kwadratem Cayley'a jest tu oczywiście:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Weźmy wreszcie pod uwagę zbiór F *) funkcyj

$$f_1(x) = x\,, \qquad f_2(x) = 1 - x\,, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}\,,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x}\,, \qquad f_5(x) = \frac{x-1}{x}\,, \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

"Mnożenie" elementów uważanego zbioru określmy zapomocą wzoru

$$f_\mu(x) f_\nu(x) = f_\nu(f_\mu(x)).$$

W ten sposób mamy:

$$f_2(x) f_3(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(1-x) = \frac{1}{1-x} = f_4(x)\,,$$

$$f_3(x) f_5(x) = f_5(f_3(x)) = f_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 - x = f_2(x)\,,$$

i.t.d.

Opierając się na przytoczonej powyżej definicji "mnożenia" elementów zbioru F, otrzymamy z łatwością następujący kwadrat Cayley'a: **)

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

---

*) Przykład ten zaczerpnęliśmy z artykułu prof. W. Sierpińskiego p.t. Algiebra Wyższa, Poradnik dla samouków. Tom I. wydanie nowe. Warszawa 1923. Str. 210.

**) W tablicy powyższej zastąpiliśmy wszędzie symbol $f_i(x)$ przez f_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Spostrzegamy natychmiast, iż zbiór F stanowi grupę ze względu na określone "mnożenie". Grupa ta, jak łatwo spostrzec, nie jest grupą abelową.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór Z, zawierający n elementów

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$$

Niech zbiór Z stanowi grupę G ze względu na pewne działanie D.

Uporządkowanie elementów uważanej grupy, zarówno w pierwszym wierszu, jak i w pierwszej kolumnie kwadratu Cayley'a, może być całkiem dowolne ; natomiast uporządkowanie elementów grupy w pozostałych wierszach i kolumnach jest ściśle oznaczone przez uporządkowanie pierwszego wiersza i kolumny. Okoliczność powyższa wynika natychmiast z uwagi, iż działanie D, ze względu na które uważany zbiór Z stanowi grupę G, określamy zawsze jako działanie jednoznaczne.*) Wynika stąd bezpośrednio następujące twierdzenie:

W żadnym wierszu i żadnej kolumnie kwadratu Cayley'a nie mogą powtarzać się jedne i te same elementy grupy.

Innemi słowy:

Każdy wiersz i każda kolumna kwadratu Cayley'a zawiera wszystkie elementy grupy.

§ 18.

Izomorfizm.

Wprowadzimy teraz nowe pojęcie, posiadające niezmiernie doniosłe znaczenie w teorji grup.

Weźmy pod uwagę dwa zbiory Z i Z', zawierające każdy n elementów.**)

---

*) Patrz definicję grupy, podaną na początku bieżącego rozdziału /str.80/. Porównaj także uwagi, dotyczące pojęcia działania w teorji grup, wypowiedziane na początku niniejszego §.

**) Liczba elementów uważanych zbiorów może być

Niech

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$$

będą elementami pierwszego z uważanych zbiorów,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$$

- elementami drugiego.

Załóżmy, iż zbiór Z stanowi ze względu na pewne określone jednoznacznie zapomocą definicji Δ działanie D grupę G i oznaczmy przez

$$F(a_i, a_k)$$

wynik wykonania rzeczonego działania D na elementach a_i i a_k zbioru Z, uważając przytem element a_i za pierwszy, element zaś a_k za drugi.

Niech dalej zbiór Z' stanowi grupę G' ze względu na pewne /niekoniecznie różne od D/ działanie D', określone zapomocą definicji Δ' jako działanie jednoznaczne i przyjmijmy symbol

$$F'(\alpha_i, \alpha_k)$$

za symbol wyniku wykonania działania D' na elementach α_i oraz α_k, uważanych w wymienionym porządku.

Jeżeli pomiędzy elementami

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$$

grupy G oraz elementami

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$$

grupy G' daje się ustalić taka odpowiedniość, przy

---

skończoną lub nieskończoną. Przez wyrażenie "zawierające każdy n elementów" pragniemy tylko podkreślić, iż mamy na myśli takie dwa zbiory, które są jednocześnie zbiorami nieskończonemi lub skończonemi. W tym ostatnim przypadku obydwa uważane zbiory składają się z jednakowej liczby elementów.

której elementy

$$a_l \quad \text{oraz} \quad \alpha_l$$

za których symbole przyjmujemy odpowiednie symbole

$$F(a_i, a_k)$$

oraz

$$F'(\alpha_i, \alpha_k)$$

gdzie przez a_i, α_i oraz a_k, α_k oznaczyliśmy pary odpowiadających sobie wzajemnie elementów, należących do grup G i G', odpowiadają sobie nawzajem, wówczas powiadamy, iż pomiędzy grupami G i G' zachodzi odpowiedniość izomorficzna jednostopniowa.

W dalszym ciągu grupy takie nazywać będziemy grupami jednostopniowo izomorficznemi, lub krótko grupami izomorficznemi.

Opierając się na powyższej definicji, spostrzegamy z łatwością, iż dla grup izomorficznych zachodzi następujące, niezmiernie ważne twierdzenie:

Dwie grupy G_1 i G_2, z których każda jest izomorficzna pewnej trzeciej grupie G_3, są izomorficzne względem siebie.

Z pojęcia izomorfizmu wynika, iż wszystkie grupy izomorficzne różnią się między sobą jedynie naturą należących doń elementów, natomiast prawa działań na elementach grup izomorficznych nie wykazują żadnej różnicy. W "budowie" grup izomorficznych nie spostrzegamy więc absolutnie żadnych różnic. Ze wszystkich grup izomorficznych można utworzyć jedną wspólną klasę grup. Klasa ta jest oczywiście grupą. Elementami jej są pewne pojęcia gatunkowe, które otrzymujemy, zbierając w jedno pojęcie ogólne wszystkie elementy grup izomorficznych. Badanie grup izomorficznych sprowadza się więc do badania wspomnianej wyżej grupy, będącej klasą wszystkich grup izomorficznych. Zrozumiałe jest przeto ogromne znaczenie, jakie posiada w teorji grup pojęcie izomorfizmu.

Jako przykład grup izomorficznych, uważajmy grupę 6-go rzędu S_3 utworzoną z podstawień 3-ch elementów oraz grupę 6-go rzędu T, składającą się z podstawień 6-ciu elementów, mianowicie grupę:

$$a_1 = \begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix} \qquad a_5 = \begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix} \qquad a_6 = \begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}$$

oraz grupę:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\1,2,3,4,5,6\end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\3,1,2,5,6,4\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\2,3,1,6,4,5\end{pmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\4,5,6,1,2,3\end{pmatrix}$$

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\5,6,4,3,1,2\end{pmatrix} \qquad \alpha_6 = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\6,4,5,2,3,1\end{pmatrix}$$

Spostrzegamy z łatwością, iż pomiędzy uważanemi grupami zachodzi odpowiedniość izomorficzna. W samej rzeczy, podporządkowując każdemu dowolnie obranemu elementowi a_i grupy $\mathcal{S}_3$ element α_i, należący do grupy T spostrzegamy natychmiast, iż elementy

$$a_i a_k$$

oraz

$$\alpha_i \alpha_k$$

należące odpowiednio do zbiorów $\mathcal{S}_3$ i T są zawsze odpowiednie. Tak np.

$$a_2 a_2 = a_3\,,\ \alpha_2 \alpha_2 = \alpha_3\,;\ a_4 a_6 = a_3\,,\ \alpha_4 \alpha_6 = \alpha_3\,;$$

$$a_5 a_2 = a_6\,,\ \alpha_5 \alpha_2 = \alpha_6\,;\ a_6 a_5 = a_3\,,\ \alpha_6 \alpha_5 = \alpha_3\,;$$

$$a_5 a_3 = a_4\,,\ \alpha_5 \alpha_3 = \alpha_4\,; \qquad \text{i t. d.}$$

Ponieważ, zgodnie z definicją izomorfizmu jednostopniowego, dla każdych dwu grup izomorficznych G_1 i G_2 mamy jednocześnie

$$a_i a_k = a_l$$

oraz

$$\alpha_i \alpha_k = \alpha_l$$

przeto wnosimy stąd, iż kwadraty Cayley'a dla dwu grup izomorficznych różnią się jedynie znakowaniem elementów, nie zaś ich rozmieszczeniem.

W uważanym przez nas przykładzie dla obydwu grup S_3 i T kwadrat Cayley'a posiada postać

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_2	q_2	q_3	q_1	q_6	q_4	q_5
q_3	q_3	q_1	q_2	q_5	q_6	q_4
q_4	q_4	q_5	q_6	q_1	q_2	q_3
q_5	q_5	q_6	q_4	q_3	q_1	q_2
q_6	q_6	q_4	q_5	q_2	q_3	q_1

gdzie q_i oznacza w przypadku grupy S_3 element a_i - w przypadku grupy T element α_i.

Jako inny przykład uważajmy, znaną nam już z poprzedzających rozważań grupę M, zawierającą 7 elementów

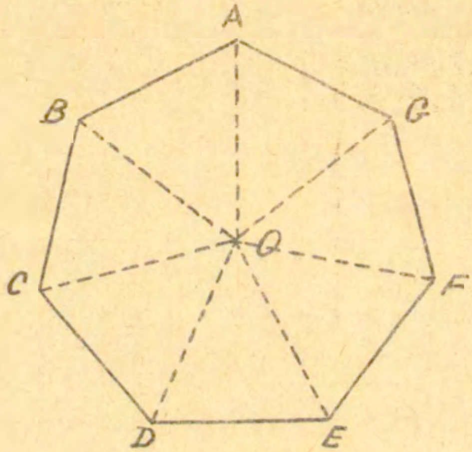
$$0,1,2,3,4,5,6$$

dla której "iloczyn" określiliśmy jako resztę zwykłej sumy arytmetycznej, elementów grupy przy dzieleniu przez liczbę 7, oraz grupę Q składającą się z obrotów siedmiokąta foremnego dokoła środka, przekształcających uważaną figurę na siebie. Grupa ta, jak łatwo spostrzec, jest grupą rzędu 7-go, której elementy stanowią obroty siedmiokąta $ABCDEFG$ /Rys.2./ dokoła środka O o kąty odpowiednio równe

$$0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}.$$

Spostrzegamy natychmiast, iż przyjmując takie podporządkowanie wzajemne elementów uważanych grup, przy którem elementowi k zbioru M odpowiada obrót siedmiokąta $ABCDEFG$ dokoła środka O o kąt $\frac{2k\pi}{7}$ pomiędzy grupami M i Q zachodzi odpowiedniość izomorficzna jednostopniowa.

W uważanym przypadku kwadrat Cayley'a napiszemy w postaci:



Rys. 2.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
p_2	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_1
p_3	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_1	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_7	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_6	p_7	p_1	p_2	p_3	p_4
p_6	p_6	p_7	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_7	p_7	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

gdzie przez p_i oznaczyliśmy element $i-1$ w przypadku grupy M, zaś obrót siedmiokąta $ABCDEFG$ dokoła środka O o kąt $\frac{2(i-1)\pi}{7}$ w przypadku grupy Q.

Czytelnik spostrzeże z łatwością, iż każda z rozważonych powyżej grup M i Q jest izomorficzna następującej grupie podstawień 7 elementów:

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\1,2,3,4,5,6,7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\2,3,4,5,6,7,1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\3,4,5,6,7,1,2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\4,5,6,7,1,2,3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\5,6,7,1,2,3,4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\6,7,1,2,3,4,5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7\\7,1,2,3,4,5,6\end{pmatrix}$$

Poprzestając na przytoczonych powyżej paru przykładach, przystąpimy obecnie do rozszerzenia pojęcia izomorfizmu na przypadek, w którym rzędy uważanych grup nie są sobie równe.

Weźmy pod uwagę dwie grupy Γ i G. Oznaczmy elementy grupy Γ przez

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$$

zaś elementy grupy G -przez

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\ldots a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\ldots$$

Przypuśćmy, iż każdemu z elementów

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$$

grupy Γ podporządkowaliśmy w pewien oznaczony sposób ν elementów grupy G. Niech na mocy rzeczonego podporządkowania każdemu dowolnemu elementowi

$$\alpha_i \qquad (i = 1,2,3,\ldots\ldots)$$

należącemu do grupy Γ odpowiada ν elementów

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots\ldots a_{i\nu}$$

grupy G. Załóżmy dalej, iż w razie ustalenia omawianego podporządkowania elementów grupy G elementom grupy Γ każdemu "iloczynowi"

$$\alpha_i \alpha_k$$

dwóch elementów grupy Γ odpowiada zespół "iloczynów"

$$a_{i\rho} a_{k\sigma}$$

elementów $a_{i\rho}$ oraz $a_{k\sigma}$ grupy G, gdzie przez ρ i σ oznaczyliśmy dwa wskaźniki, przebiegające niezależnie od siebie ciąg liczb

$$1, 2, 3, \ldots \nu$$

Jeżeli pomiędzy elementami uważanych grup Γ i G daje się ustalić omówiona wyżej odpowiedniość, przy której każdemu "iloczynowi"

$$\alpha_i \alpha_k$$

elementów α_i oraz α_k odpowiada zespół " iloczynów "

$$a_{i\rho} a_{k\sigma} \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, \ldots \nu)$$

gdzie przez $a_{i\rho}$ oraz $a_{k\sigma}$ oznaczyliśmy układy elementów grupy G, odpowiadające odpowiednio elementom α_i oraz α_k grupy Γ, wówczas powiadamy, iż pomiędzy grupami G i Γ zachodzi odpowiedniość izomorficzna ν-stopniowa.

Grupa G jest, jak powiadamy, ν - stopniowo izomorficzna z grupą Γ.[x]

Jako przykład weźmy pod uwagę znaną nam już

---

[x] Nazwę ν -stopniowy izomorfizm / ν -stufig Isomorphismus/ wprowadził E. Netto. /Porównaj E.Netto. Gruppen - und Substitutionentheorie. Sammlung Schubert LV. Leipzig 1908.Str. 43/. C.Jordan /Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870/ nazywa każdą kategorję izomorfizmu homomorfizmem /homomorphisme/. O grupie G powiada Jordan, iż jest wielokrotnie homomorficzna /multiplement

z poprzedzających rozważań /§ 16 str. 107./ grupę ósmego rzędu K_1, utworzoną z podstawień czterech elementów

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

oraz grupę Φ, zawierającą cztery elementy

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi_3(x) = -x, \quad \varphi_4(x) = -\frac{1}{x}$$

dla której "mnożenie" określamy zapomocą wzoru

$$\varphi_i(x)\varphi_k(x) = \varphi_k(\varphi_i(x)) \qquad (i,k = 1,2,3,4)$$

Oznaczmy elementy pierwszej z uważanych grup przez

$$a, b, c, d, e, f, g, h$$

kładąc

$$a = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,1,4\end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,4,1\end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,1,2,3\end{pmatrix}.$$

Kwadratami Cayley'a, odpowiadającemi grupom

---

homomorphe/ z grupą Γ, zaś o grupie Γ, iż jest meriedrycznie lub cząstkowo homomorficzna /meriedriquement ou partiellement homomorphe/ z grupą G. Grupy, pomiędzy któremi zachodzi odpowiedniość izomorficzna jednostopniowa, Jordan nazywa grupami izomorficznemi lub pojedyńczo homomorficznemi lub wreszcie holoedrycznie homomorficznemi /isomorphe ou simplement homomorphe ou holoédriquement homomorphe/. Porównaj J.A. de Séguier. Théorie des groupes finis. Eléments de la Théorie des groupes abstraits. Paris 1904. Str. 66.

K_1 i Φ [x]) będą więc w uważanym przypadku tablice:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	a	d	c	h	g	f	e
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	c	b	a	f	e	h	g
e	e	g	h	f	a	d	b	c
f	f	h	g	e	d	a	c	b
g	g	e	f	h	c	b	d	a
h	h	f	e	g	b	c	a	d

oraz

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

---

[x]) Czytelnik spostrzeże z łatwością, iż grupa Φ jest jednostopniowo izomorficzna z grupą czwartego rzędu F, utworzoną z podstawień czterech elementów

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

Patrz § 16 str. 105.

Spostrzegamy z łatwością, iż podporządkowując elementom

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

grupy Φ , odpowiednio pary

$$a, d; \quad b, c; \qquad g, h; \quad e, f;$$

elementów, należących do grupy K_1 , każdemu "iloczynowi" dwu dowolnych elementów grupy Φ odpowiada para pewnych, ściśle oznaczonych elementów grupy K_1. Tak np. na mocy przyjętego powyżej podporządkowania "iloczynowi"

$$\varphi_2 \varphi_3$$

elementów grupy Φ odpowiadają cztery następujące "iloczyny"

$$bg, \ cg, \ bh, \ ch$$

elementów, należących do grupy K_1 ,z których tylko dwa odpowiadają różnym elementom grupy K_1 .Mamy bowiem

$$bg = f, \quad cg = e, \quad bh = e, \quad ch = f$$

Wnosimy stąd, opierając się na przytoczonej definicji izomorfizmu wielostopniowego, iż grupa K_1 jest 2-stopniowo izomorficzna z grupą Φ .

Ta sama grupa K_1 jest 4-stopniowo izomorficzna z grupą drugiego rzędu K

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

utworzoną z pierwiastków równania

$$x^2 - 1 = 0.$$

W samej rzeczy, jeżeli elementom

$$1 \quad \text{i} \quad -1$$

grupy K podporządkujemy odpowiednio elementy

$$a, d, g, h \qquad \text{oraz} \qquad b, c, e, f$$

wówczas każdemu iloczynowi elementów grupy K odpowiadać będą cztery oznaczone elementy grupy K_1.

Tak np. iloczynowi

$$\beta\beta = (-1)(-1) = 1 = \alpha$$

odpowiada 16 iloczynów

$$\begin{array}{llll} bb = a, & bc = d, & be = h, & bf = g, \\ cb = d, & cc = a, & ce = g, & cf = h, \\ eb = g, & ec = h, & ee = a, & ef = d, \\ fb = h, & fc = g, & fe = d, & ff = a \end{array}$$

które, jak łatwo spostrzec, redukują się tylko do czterech różnych elementów

$$a, d, g, h$$

grupy K_1.

Uważajmy wreszcie grupę symetryczną szóstego rzędu S_3, utworzoną z podstawień trzech elementów

$$a_1, a_2, a_3$$

oraz grupę symetryczną drugiego rzędu S_2, podstawień dwóch elementów

$$\alpha_1, \alpha_2$$

Łatwo spostrzec, iż grupa S_3 jest trzystopniowo izomorficzna z grupą S_2. Wystarczy bowiem podporządkować podstawieniu tożsamościowemu

$$\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}$$

elementy

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix}$$

grupy S_3, zaś podstawieniu

$$\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}$$

pozostałe trzy elementy

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}$$

rzeczonej grupy, aby przekonać się, iż pomiędzy grupami S_3 i S_2 zachodzi odpowiedniość izomorficzna 3-stopniowa.

Na zakończenie niniejszego § zaznaczymy, iż każda grupa skończona jest izomorficzna pewnej grupie podstawień. Wobec powyższego, badanie grup skończonych jest równoważne badaniu grup podstawień. Zrozumiałe jest przeto wyjątkowe znaczenie teorji grup podstawień, w ogólnej teorji grup skończonych. W części kursu poświęconej teorji rozwiązywania równań algebraicznych, zajmiemy się szczegółowem zbadaniem własności grup podstawień.

Poprzestając narazie na przytoczonych powyżej ogólnych uwagach, dotyczących pojęcia grupy, przejdziemy do omówienia pojęcia, posiadającego niemniej doniosłe znaczenie od pojęcia grupy. Pojęciem tem jest pojęcie układu liczbowego.

§ 19.

Pojęcie układu liczbowego.

Z pojęcia grupy daje się wyłonić nieco węższe pojęcie układu liczbowego do którego omówienia zamierzamy obecnie przystąpić.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór wielkości U i uważajmy dwa działania D i Δ , określone dla elementów uważanego zbioru odpowiednio zapomocą definicyj (D) i (Δ) . Niech definicje (D) i (Δ) określają uważane działania D oraz Δ jako działania jednoznaczne. Oznaczmy przez

$$F(a,b)$$

wynik wykonania działania D , zaś przez

$$\Phi(a,b)$$

wynik wykonania działania Δ na elementach a i b zbioru U , uważając przytem element a za pierwszy element zaś b za drugi.

O zbiorze U powiadamy, iż stanowi układ liczbowy *) , jeżeli spełnione są następujące postulaty:

I. Wynik

$$F(a,b)$$

wykonania działania D na elementach a i b zbioru U należy sam do zbioru U.

II. Jakiekolwiek elementy zbioru U oznaczylibyśmy przez a , b i c , mamy zawsze

$$F(a,F(b,c))=F(F(a,b),c)$$

jeżeli tylko działania zaznaczone w każdym ze wzorów $F(a,b)$, $F(b,c)$, $F(a,F(b,c))$ i $F(F(a,b),c)$ są wykonalne.

III. W zbiorze U istnieje taki element x , iż dla każdego elementu a zbioru U mamy

$$F(a,x)=a.$$

IV. Dla każdego elementu a zbioru U istnieje taki element a' , iż

$$F(a,a')=x$$

---

*) Termin "układ liczbowy" /number system/ został wprowadzony przez uczonych amerykańskich.

V. Wynik

$$\Phi(a,b)$$

wykonania działania Δ na elementach a i b zbioru U należy do zbioru U.

VI. Jakiekolwiek elementy zbioru U oznaczylibyśmy przez a , b i c mamy zawsze

$$\Phi(a,\Phi(b,c)) = \Phi(\Phi(a,b),c)$$

jeżeli tylko działania zaznaczone w każdym ze wzorów $\Phi(a,b)$, $\Phi(b,c)$, $\Phi(a,\Phi(b,c))$ i $\Phi(\Phi(a,b),c)$ są wykonalne.

VII. W zbiorze U istnieje taki element y , iż dla każdego elementu a zbioru U mamy

$$\Phi(a,y) = a$$

VIII. Dla każdego, byle od elementu x różnego, elementu a zbioru U istnieje w uważanym zbiorze taki element a'' , iż

$$\Phi(a,a'') = y$$

i wreszcie

IX. Jakiekolwiek elementy zbioru U oznaczylibyśmy przez a , b i c mamy zawsze

$$\Phi(a,F(b,c)) = F(\Phi(a,b),\Phi(a,c))$$

o ile tylko działania, zaznaczone w każdym ze wzorów $F(b,c)$, $\Phi(a,b)$, $\Phi(a,c)$, $\Phi(a,F(b,c))$ i $F(\Phi(a,b),\Phi(a,c))$ są wykonalne.[x]

---

[x] Liczbę przytoczonych powyżej dziewięciu postulatów można zredukować do siedmiu, zastępując pary postulatów III, IV, oraz VII , VIII przez dwa następujące:

(III, IV) . Dla każdych dwóch elementów a i b zbioru U ($a = b$ lub $a \neq b$) istnieje w zbiorze U taki element a' , iż

$$F(F(a,a'),b) = b$$

oraz

W dalszych rozdziałach kursu poznamy zbiory, czyniące zadość wymienionym dziewięciu warunkom.

Badając przytoczony powyżej układ dziewięciu postulatów spostrzegamy natychmiast, iż postulaty I, II, III i IV określają zbiór $\mathcal{U}$ jako grupę ze względu na uważane działanie $\mathcal{D}$,postulaty zaś V, VI, VII i VIII wymagają aby zbiór $\mathcal{U}$ stanowił grupę ze względu na działanie Δ ,z tem jednak zastrzeżeniem, iż nie żądamy istnienia w zbiorze $\mathcal{U}$ elementu odwrotnego względem elementu α .Postulat IX ustala wreszcie pewną znaną nam już z rozważań przeprowadzonych w § 9 /str. 25/ zależność pomiędzy obydwoma uważanemi działaniami $\mathcal{D}$ i Δ . Omawiany układ postulatów jest więc równoważny układowi następującemu:

I′. Zbiór $\mathcal{U}$ stanowi grupę ze względu na działanie $\mathcal{D}$.

II′. Zbiór $\mathcal{U}$ jest grupą ze względu na działanie Δ , z tem jednak zastrzeżeniem, iż nie wymagamy istnienia odwrotności modułu działania $\mathcal{D}$.

i wreszcie

III . Działanie Δ posiada własność rozdzielności względem działania $\mathcal{D}$.

/VII, VIII/. Dla każdych dwóch elementów a i b zbioru $\mathcal{U}$ / $a=b$ lub $a \neq b$ / istnieje w zbiorze $\mathcal{U}$ taki element a'', iż

$$\Phi(\Phi(a,a''),b)=b$$

o ile tylko

$$F(a,a)\neq a$$

oraz

$$F(b,b)\neq b$$

Porównaj L.E.Dickson.Definitions of a field by independent postulates.Transactions of the American Mathematical Society . Vol. 4. 1903. Str. 13-20. Patrz także E.V. Huntington. Definitions of a field by sets of independent postulates. Trans. of the Americ. Math. Soc. Vol. 4. 1903. Str. 31-37.

Zauważmy, iż podana przez nas definicja układu liczbowego nie przesądza kwestji dotyczącej liczby elementów należących do zbioru $\mathcal{U}$. Liczba elementów zbioru $\mathcal{U}$ stanowiącego układ liczbowy może być skończoną lub nieskończoną. W pierwszym przypadku powiadamy o zbiorze $\mathcal{U}$,iż stanowi układ liczbowy skończony, w drugim - nieskończony.

§ 20.

Ogólne pojęcie ciała. Ciało liczbowe.

Podana przez nas na początku § poprzedzającego definicja układu liczbowego nie wymaga bynajmniej, aby działania D i Δ posiadały własność przemienności . Najważniejsze atoli znaczenie posiadają takie układy liczbowe , dla których obydwa rzeczone działania posiadają własność przemienności. Układ liczbowy przemiennościowy nazywamy ciałem.

Każdy zbiór $\mathcal{U}$ stanowiący ciało spełnia więc, poza wymienionemi na początku § poprzedzającego dziewięciu postulatami /I, II, III, IV, V,VI, VII, VIII, IX/, jeszcze dwa postulaty następujące:

I_1. Jakiekolwiek elementy zbioru $\mathcal{U}$ oznaczylibyśmy przez a i b mamy zawsze

$$F(a,b)=F(b,a)$$

oraz

V_1. Jakiekolwiek elementy zbioru $\mathcal{U}$ oznaczylibyśmy przez a i b , mamy zawsze

$$\Phi(a,b)=\Phi(b,a) \quad ^{x)}$$

Pojęcie ciała narówni z pojęciem grupy odgrywa zasadniczą rolę w algebrze.

Zauważmy,iż podając definicję ciała nie okre-

---

x) Porównaj wspomniane powyżej prace L.E.Dicksona i E. V. Huntingtona /Trans. of the Americ. Math. Soc. Vol. 4 /1903//.

śliliśmy bliżej natury obydwu uważanych działań $\mathcal{D}$ i Δ .Natura rzeczonych działań pozostaje przeto całkiem dowolną.Jedyne ograniczenia,którym podlegają działania $\mathcal{D}$ i Δ ,polegają na przyjęciu jako własności zasadniczych rzeczonych działań,poza ich jednoznacznością, własności przemienności, łączności i wreszcie własności rozdzielności działania Δ względem działania $\mathcal{D}$. Z uwag powyższych wynika, iż działanie $\mathcal{D}$ oraz Δ niekoniecznie muszą być działaniami arytmetycznemi. Ze względu jednak na pewną analogję zachodzącą pomiędzy uważanemi działaniami a działaniami dodawania i mnożenia w sensie działań arytmetycznych , działaniom $\mathcal{D}$ i Δ nadajemy odpowiednio nazwy "dodawania" i "mnożenia".

Zależnie od liczby elementów zawartych w zbiorze $\mathcal{U}$ stanowiącym ciało, odróżniamy ciała skończone i nieskończone.

Jako przykład ciała skończonego uważajmy znany nam już z poprzedzających rozważań /str. 88/ zbiór M zawierający 7 elementów

$$0,1,2,3,4,5,6$$

dla którego "dodawanie" i "mnożenie" określamy zapomocą następujących definicyj:

"Suma"

$$a \oplus b$$

oznacza resztę arytmetycznej sumy elementów a i b zbioru M przy dzieleniu przez liczbę 7.

"Iloczyn"

$$a \otimes b$$

oznacza resztę arytmetycznego iloczynu uważanych elementów zbioru M przy dzieleniu przez 7.

Czytelnik spostrzeże natychmiast, iż zbiór M czyni zadość wszystkim jedenastu /I, I_1,II,III,IV, V,V_1,VI,VII,VIII,IX/ postulatom, stanowiącym zbiór warunków określających ciało.

Jako inny przykład weźmy pod uwagę zbiór (G_{22}) zawierający cztery elementy

$$a_0, a_1, a_2, a_3$$

dla którego działania D i Δ określamy zapomocą dwu następujących kwadratów Cayley'a:

D	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

oraz

Δ	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
a_1	a_0	a_1	a_2	a_3
a_2	a_0	a_2	a_3	a_1
a_3	a_0	a_3	a_1	a_2

Elementem zerowym jest w uważanym przypadku element a_0, elementem jednostkowym - element a_1.

Jako trzeci przykład uważajmy zbiór (G_{32}) zawierający 9 elementów

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$$

dla którego działania D i Δ określamy odpowiednio zapomocą następujących kwadratów Cayley'a:

D	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_0	a_4	a_5	a_3	a_7	a_8	a_6
a_2	a_2	a_0	a_1	a_5	a_3	a_4	a_8	a_6	a_7
a_3	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_0	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_3	a_7	a_8	a_6	a_1	a_2	a_0
a_5	a_5	a_3	a_4	a_8	a_6	a_7	a_2	a_0	a_1
a_6	a_6	a_7	a_8	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_7	a_7	a_8	a_6	a_1	a_2	a_0	a_4	a_5	a_3
a_8	a_8	a_6	a_7	a_2	a_0	a_1	a_5	a_3	a_4

oraz

Δ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
a_1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2	a_0	a_2	a_1	a_6	a_8	a_7	a_3	a_5	a_4
a_3	a_0	a_3	a_6	a_4	a_7	a_1	a_8	a_2	a_5
a_4	a_0	a_4	a_8	a_7	a_2	a_3	a_5	a_6	a_1
a_5	a_0	a_5	a_7	a_1	a_3	a_8	a_2	a_4	a_6
a_6	a_0	a_6	a_3	a_8	a_5	a_2	a_4	a_1	a_7
a_7	a_0	a_7	a_5	a_2	a_6	a_4	a_1	a_8	a_3
a_8	a_0	a_8	a_4	a_5	a_1	a_6	a_7	a_3	a_2

Element zerowy odnajdujemy z łatwością w elemencie a_0, element jednostkowy - w elemencie a_1.

Zbiór (G_{3^2}) stanowi tak zwane ciało Galois rzędu 3^2.

Nadając elementom zbioru $\mathcal{U}$ charakter wielkości oraz przyjmując za działania $\mathcal{D}$ i Δ zwykłe działania dodawania i mnożenia, przechodzimy od ogólnego pojęcia ciała do pojęcia ciała liczbowego, odgrywającego niezmiernie doniosłą rolę w algebrze i teorji liczb.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór (C). Załóżmy, iż zbiór (C) czyni zadość następującym warunkom:

A. Zbiór (C) zawiera conajmniej dwa elementy.

B_1. Każde dwa elementy a i b zbioru (C) znajdują się w jednym ale tylko jednym ze związków następujących

$$a=b\ ,\ a\neq b.$$

B_2. Dla każdego elementu a zbioru (C) mamy

$$a=a.$$

B_3. Związki

$$a=b \text{ i } b=a$$

tylko jednocześnie zachodzić mogą.

B_4. Związki

$$a=b\ ,\ b=c$$

pociągają za sobą związek

$$a=c.$$

C_1. Istnieje takie podporządkowanie elementów zbioru (C), zwane d o d a w a n i e m, iż każdej parze a i b elementów uważanego zbioru odpowiada w sposób jednoznaczny element

$$a+b$$

zbioru.

C_2. Dodawanie elementów zbioru (C) posiada własność łączności, t.j.

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

C_3. Dodawanie elementów zbioru (C) posiada własność przemienności, t.j.

$$a+b=b+a.$$

C_4. W zbiorze (C) istnieje taki element 0 / z e r o /, iż dla każdego elementu a zbioru (C) mamy

$$a+0=a.$$

C_5. Dla każdego elementu a zbioru (C) istnieje w uważanym zbiorze taki element a', iż

$$a+a'=0.$$

D_1. Istnieje takie podporządkowanie elementów zbioru (C), zwane m n o ż e n i e m, iż każdej parze elementów a i b zbioru odpowiada w sposób jednoznaczny element

$$a\times b$$

należący do uważanego zbioru.

D_2. Mnożenie elementów zbioru (C) posiada własność łączności, t.j.

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c.$$

D_3. Mnożenie elementów zbioru (C) posiada własność przemienności, t.j.

$$a\times b=b\times a.$$

D_4. W zbiorze (C) istnieje taki element 1 /j e d n o ś ć/, iż dla każdego elementu a zbioru mamy

$$a\times 1=a.$$

D_5. Dla każdego elementu a zbioru (C) spełniającego związek

$$a \neq 0$$

istnieje w zbiorze (C) taki element $\bar{a}$, iż

$$a \times \bar{a} = 1.$$

E. Mnożenie elementów zbioru (C) posiada własność rozdzielności względem dodawania, t.j.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

oraz

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Każdy zbiór (C) spełniający przytoczony powyżej układ postulatów nazywamy ciałem liczbowem.*)

Spostrzegamy z łatwością, iż zbiór obejmujący postulaty należące do grupy C , D i E a więc - jedenaście postulatów $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, E)$ dotyczących dodawania i mno-

---

*) Pojęcie ciała liczbowego zostało po raz pierwszy wprowadzone przez R. Dedekinda w 4-m wydaniu dzieła P.G. Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie . Braunschweig 1894. /Suppl. XI. Str.452 i nast./. Rozważania, które doprowadziły Dedekinda do pojęcia ciała liczbowego zostały ogłoszone wcześniej w drugiem wydaniu rzeczonego dzieła Lejeune Dirichleta /Brunświk 1871. Str.423-497/. Patrz także prace Dedekinda ogłoszone w Bulletin des Sciences Mathématiques. Serja I. Tom XI./1876/ Str.278-288. Serja II. Tom I. /1877/. Str.17--41, 69-92, 144-164, 207-248. Amerykanie posługują się do oznaczenia pojęcia ciała terminem pole /field/. Gyula König / Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvolanai, Budapest, 1903; przekład niemiecki J.König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen, Leipzig 1903 . Str. 8/ na oznaczenie ciała liczbowego wprowadził termin domaine orthoïde , przyjęty obok terminu corps przez uczonych francuskich.

żenia elementów zbioru (C) zlewa się ze zbiorem postulatów /I, I_1, II, III, IV, V, V_1, VI, VII, VIII, XI/ skoro tylko przyjmiemy za działania D i Δ odpowiednio działaniа dodawania i mnożenia. Grupa B obejmująca cztery postulaty (B_1, B_2, B_3, B_4) nadaje elementom zbioru (C) charakter wielkości, wreszcie grupa A obejmująca jeden tylko postulat dotyczy liczby elementów zbioru (C).

Najprostszy przykład ciała liczbowego otrzymamy, przyjmując za zbiór (C) zbiór R wszystkich liczb wymiernych. Że zbiór powyższy stanowi ciało jest rzeczą oczywistą. Ciało R składające się ze wszystkich liczb wymiernych lub jak powiadamy ciało liczb wymiernych nazywamy niekiedy według Kroneckera bezwzględnym obszarem wymierności /absoluter Rationalitätsbereich/.

Ciało to jest zawarte w każdem innem ciele liczbowem.

Opierając się na przytoczonych powyżej uwagach, spostrzegamy natychmiast, iż definicja ciała liczbowego jest równoważna definicji następującej.

Ciałem liczbowem (C) nazywamy taki zbiór liczb, iż każde z czterech działań wymiernych /wyjąwszy jedynie dzielenie przez zero/ jest wykonalne na liczbach uważanego zbioru bez zastrzeżeń i doprowadza zawsze do liczb należących do uważanego zbioru.*)

Możemy przeto powiedzieć, iż zbiór (C) liczb stanowi ciało liczbowe, jeżeli odtwarza się przez cztery działania zasadnicze /dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie/.**)

---

*) Porównaj P. G. Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie /4. Auflage/ str. 452.

**) Istnieją takie zbiory liczb, które odtwarzają się już przy pomocy trzech pierwszych działań zasadniczych, t.j. dodawania, odejmowania i mnożenia. Zbiorom posiadającym powyższą własność nadajemy nazwę pierścienia /Ring/.

Przykład pierścienia stanowi zbiór wszystkich liczb całkowitych wymiernych dodatnich, ujemnych i 0/.

Spostrzegamy z łatwością, iż układ postulatów określających pierścień obejmuje 15

Jeżeli do ciała (C) dołączymy jakąkolwiek nie zawartą w niem wielkość α, wówczas zbiór $[C,\alpha]$ nie stanowi już ciała. Aby z otrzymanego w rzeczony sposób zbioru $[C,\alpha]$ utworzyć ciało, wystarczy dołączyć do zbioru $[C,\alpha]$ zbiór wszystkich wielkości otrzymanych z połączenia elementów ciała (C) z elementem α zapomocą czterech podstawowych działań arytmetycznych. W ten sposób otrzymujemy zbiór (C,α), stanowiący ciało (C').

O ciele (C') powiadamy, iż zostało utworzone z ciała (C) przez dołączenie doń elementu α.

Jako przykład ciała (C') otrzymanego z ciała (C) przez dołączenie doń wielkości α rozważmy zbiór $(R,\sqrt{m})$ otrzymany z ciała R liczb wymiernych przez dołączenie doń liczby $\sqrt{m}$, gdzie przez m oznaczyliśmy liczbę całkowitą nie będącą pełnym kwadratem. Ciało $(R,\sqrt{m})$, jak łatwo spostrzec, zawierać będzie wszystkie liczby postaci

$$a+b\sqrt{m}$$

gdzie a i b oznaczają dwie liczby wymierne. Ciało to jest oczywiście zawarte w ciele wszystkich liczb rzeczywistych.

Do ciała (C') możemy z kolei dołączyć w omówiony powyżej sposób nowy nie zawarty w niem element β. Otrzymane w ten sposób ciało (C'') powstaje z ciała (C) przez jednoczesne dołączenie doń dwu elementów α i β.

W ten sposób przez dołączenie do danego ciała liczbowego (C) coraz to nowych wielkości możemy tworzyć nowe ciała liczbowe.

W algebrze atoli mamy do czynienia tylko z pewną szczególną klasą ciał liczbowych - t.zw. ciałami algebraicznemi.

---

postulatów, a mianowicie: $A, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2, D_3, D_4$ i E.

§ 21.

Liczby algebraiczne i przestępne. Ciała algebraiczne.

Do wspomnianego przez nas przy końcu § poprzedzającego pojęcia ciała algebraicznego prowadzi, odgrywające kapitalną rolę w algebrze, pojęcie liczby algebraicznej.

Liczbą algebraiczną nazywamy każdą liczbę, czyniącą zadość równaniu algebraicznemu

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

o spółczynnikach całkowitych wymiernych.*)

Do wprowadzenia pojęcia liczby algebraicznej i związanego z niem wyróżnienia specjalnej klasy ciał liczbowych doprowadziło stwierdzenie istnienia w zbiorze liczb rzeczywistych, liczb nie będących pierwiastkami równań algebraicznych o spółczynnikach całkowitych wymiernych.**) Liczby takie w przeciwieństwie do liczb algebraicznych nazywamy liczbami niealgebraicznemi lub przestępnemi.

Istnienie liczb niealgebraicznych zostało wykryte względnie niedawno, jakkolwiek już Legendre /1752-1833/ wypowiedział wyraźnie przypuszczenie, iż liczba π nie może być pierwiastkiem równania algebraicznego o spółczynnikach całkowitych wymiernych. Ścisły dowód istnienia liczb przestępnych podał pierwszy Joseph Liouville.***)

---

*) Pojęcie liczby algebraicznej zostało wprowadzone przez L. Kroneckera.

**) Zaznaczamy, iż każde równanie algebraiczne o spółczynnikach wymiernych można przez pomnożenie przez dostatecznie wielką liczbę całkowitą sprowadzić do równania o spółczynnikach całkowitych wymiernych.

***) J. Liouville. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même reductible á des irrationelles algé-

Do najważniejszych liczb przestępnych należą liczby e i π. *)

Liczby algebraiczne rzeczywiste stanowią tylko znikomą część zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. W rozdziale poświęconym teorji liczb algebraicznych udowodnimy , iż zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny, a więc, iż pomiędzy omawianym zbiorem liczb a zbiorem liczb całkowitych dodatnich daje się ustalić odpowiedniość doskonała.

Ciało liczbowe , składające się z liczb algebraicznych, nazywamy ciałem liczbowem algebraicznem lub krótko ciałem algebraicznem.

Jako przykład zbioru liczb, stanowiącego ciało algebraiczne, może służyć wspomniany w § poprzedzającym zbiór R wszystkich liczb wymiernych.

---

briques. Journal de mathématiques pures et appliquées. Vol. 16 /1851/ Str. 133 . Po raz pierwszy dowód istnienia liczb przestępnych podał Liouville w krótkiej notatce, ogłoszonej w Comptes Rendus . Tom 18 /1844/ Str. 883 i 910.

*) Dowód przestępności liczby e podał pierwszy Ch. Hermite w rozprawie p.t. Sur la fonction exponentielle . Comptes Rendus. Tom 77 /1873/ Str. 18 - 24, 74 - 79, 226 - 233, 285 - 293. Patrz także Journ. f. Math. Tom 76, str. 303, 342.

Przestępności liczby π dowiódł pierwszy F. Lindemann: Ueber die Ludolphsche Zahl. Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1882. Str. 679 - 682. Patrz także rozprawę tegoż autora: Ueber die Zahl π . Mathematische Annalen . Bd. 20 /1882/ Str. 213-225.

Czytelnika, pragnącego bliżej się zaznajomić z zagadnieniem przestępności liczb e i π odsyłamy do świetnego artykułu B. Calò. O zadaniach przestępnych, a w szczególności o kwadraturze koła, zamieszczonego w dziele F. Enriques. Zagadnienia dotyczące Geometrji Elementarnej . Tom II . Warszawa 1917 . Str. 253 - 311.

Natomiast zbiór liczb rzeczywistych, jakkolwiek stanowi ciało liczbowe , nie jest jednak ciałem algebraicznem, bowiem zbiór ten, jak wiemy, zawiera liczby nie będące pierwiastkami równań algebraicznych o spółczynnikach całkowitych wymiernych.

W dalszym ciągu kursu poznamy cały szereg przykładów ciał liczbowych algebraicznych.

Weźmy pod uwagę równanie n-go stopnia

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

gdzie spółczynniki

$$p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots p_{n-1}, p_n$$

są liczbami całkowitemi wymiernemi.

Załóżmy , iż uważane równanie jest równaniem nieprzywiedlnem , a więc , iż funkcja $f(x)$ nie daje się przedstawić w postaci iloczynu dwu lub więcej funkcyj o spółczynnikach całkowitych wymiernych.

Niech liczba θ będzie pierwiastkiem uważanego równania nieprzywiedlnego

$$f(x) = 0$$

Utwórzmy ogół liczb postaci

$$\varphi(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}\theta^{n-1}$$

gdzie przez

$$a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$$

oznaczyliśmy dowolne liczby wymierne. Liczby tak utworzone stanowią ciało Ω , które nie daje się wytworzyć w ten sam sposób z innego pierwiastka ϑ innego równania nieprzywiedlnego o spółczynnikach całkowitych stopnia różnego od n . Utworzone w powyższy sposób ciało algebraiczne nazywamy ciałem algebraicznem skończonem stopnia n-tego.

Ciała

$$\Omega, \Omega', \Omega'', \ldots\ldots$$

utworzone ze wszystkich pierwiastków

$$\theta, \theta', \theta'', \ldots\ldots$$

danego równania nieprzywiedlnego n-go stopnia

$$f(x)=0$$

nazywamy ciałami algebraicznemi sprzężonemi.

Jeżeli liczba algebraiczna

$$\omega=\varphi(\theta)$$

jest liczba ciała Ω, wówczas liczba

$$\omega'=\varphi(\theta')$$

jest oczywiście liczbą należącą do ciała Ω'. Liczby ω i ω' nazywamy liczbami sprzężonemi.

Jeżeli ciało algebraiczne

$$\Omega$$

jest ciałem stopnia n-tego, wówczas wszystkie ciała

$$\Omega', \Omega'', \Omega''', \ldots\ldots$$

sprzężone z uważanem ciałem Ω są również stopnia n. Skoro zatem jedno z uważanych ciał sprzężonych jest zawarte w drugiem, wówczas obydwa ciała są identyczne. Ciało identyczne ze wszystkiemi ciałami zeń sprzężonemi nazywamy ciałem normalnem lub ciałem Galois.*)

Teorja ciał Galois odgrywa niezmiernie doniosłą rolę w ogólnej teorji ciał algebraicznych. Wspomniane znaczenie zawdzięczają ciała normalne tej okoliczności, iż każde dowolne ciało algebraiczne daje się, jak wykazały badania, sprowadzić do ciała normalnego.

Poprzestając narazie na przytoczonych powyżej pobieżnych uwagach, dotyczących pojęcia ciała algebraicznego, odkładamy szczegółowe rozpatrzenie

---

*) Nazwa ta została wprowadzona przez R. Dedekinda.

własności ciał liczbowych algebraicznych do części kursu, poświęconej teorji rozwiązywania równań algebraicznych.

§ 22.

Pojęcie izomorfizmu dwu ciał.

W § 18 /str.115/ wprowadziłyśmy pojęcie odpowiedniości izomorficznej dwu grup, a więc zbiorów, dla których określamy jedno tylko działanie. Obecnie pragniemy rozszerzyć pojęcie izomorfizmu na takie zbiory, dla których mamy określone jednocześnie dwa działania. Tego właśnie rodzaju zbiory stanowiły przedmiot ostatnich naszych rozważań.

Weźmy pod uwagę dwa zbiory Z i Z'. Oznaczmy elementy pierwszego z uważanych zbiorów przez

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$$

zaś drugiego przez

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$$

Załóżmy, iż dla każdego z uważanych zbiorów Z i Z' mamy określone pewne dwa działania. Niech działaniami temi, określonemi dla elementów zbioru Z będą odpowiednio działania D i Δ, zaś działaniami określonemi dla zbioru Z' pewne /niekoniecznie od działań D i Δ odmienne/ działania D' i Δ'. Załóżmy nadto, iż każde z działań D, Δ, D' i Δ' zostało określone w sposób jednoznaczny dla elementów odpowiedniego zbioru.

Oznaczmy przez

$$F(a_i, a_k)$$

wynik wykonania działania D, zaś przez

$$\Phi(a_i, a_k)$$

wynik wykonania działania Δ na elementach a_i i a_k zbioru Z uważanych w wymienionym porządku.

Niech dalej

$$F'(\alpha_i, \alpha_k)$$

oznacza wynik wykonania działania D', zaś

$$\Phi'(\alpha_i, \alpha_k)$$

wynik wykonania działania Δ' na elementach α_i i α_k zbioru Z', przyjmując przytem element α_i za pierwszy, element zaś α_k za drugi.*) Jeżeli pomiędzy elementami

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$$

zbioru Z oraz elementami

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$$

zbioru Z' daje się ustalić taka odpowiedniość, przy której elementy

$$a_l \text{ oraz } \alpha_l$$

za których symbole przyjmujemy odpowiednio symbole

$$F(a_i, a_k)$$

oraz

$$F'(\alpha_i, \alpha_k)$$

gdzie przez a_i, α_i oraz a_k, α_k oznaczyliśmy pary odpowiadających sobie wzajemnie elementów, należących do uważanych zbiorów Z i Z' odpowiadają sobie nawzajem, jeżeli nadto elementy

$$a_\lambda \text{ oraz } \alpha_\lambda$$

---

*) W razie, gdy każde z działań D, Δ, D', Δ' posiada własność przemienności, niema oczywiście potrzeby oznaczania porządku elementów a_i i a_k oraz α_i i α_k.

należące odpowiednio do zbiorów Z i Z', za których symbole przyjmujemy symbole

$$\Phi(a_i, a_k)$$

oraz

$$\Phi'(\alpha_i, \alpha_k)$$

są elementami odpowiadającemi sobie nawzajem, wówczas powiadamy, iż pomiędzy zbiorami Z i Z' zachodzi odpowiedniość izomorficzna.

Zbiory Z i Z' nazywamy w takim razie zbiorami izomorficznemi.

Opierając się na powyższej definicji odpowiedniości izomorficznej, spostrzegamy natychmiast, iż jedyna różnica zachodząca pomiędzy dwoma zbiorami izomorficznemi Z i Z' tkwi w naturze elementów należących do uważanych zbiorów. Różnica ta jednak nie wpływa bynajmniej na prawa działań, którym podlegają elementy zbiorów Z i Z'. Zbiory izomorficzne wykazują więc najdalej posuniętą analogję w swej strukturze. Z tych względów badanie zbiorów izomorficznych sprowadza się do badania takiego zbioru, który uważamy za przedstawiciela klasy wszystkich zbiorów izomorficznych. Widzimy więc, iż do zbiorów izomorficznych, dla których mamy określone dwa działania, stosują się te same uwagi, które wypowiedzieliśmy w § 18 /str. 116/ z okazji wprowadzenia pojęcia odpowiedniości izomorficznej jednostopniowej dla dwu grup.

Nie potrzeba nadmieniać, iż dwa zbiory izomorficzne pewnemu trzeciemu zbiorowi są pomiędzy sobą izomorficzne.

Szczególnie ważnego znaczenia nabiera pojęcie odpowiedniości izomorficznej w przypadku, gdy obydwa uważane zbiory Z i Z' są zbiorami wielkości o charakterze liczb. W tym przypadku działania D i Δ nie różnią się zupełnie od działań D' i Δ'. Za każde z działań D i D' przyjmujemy zwykłe działanie dodawania, za każde zaś z działań Δ i Δ' zwykłe działanie mnożenia.

Łatwo spostrzec, iż w przypadku, gdy każdy ze zbiorów Z i Z' jest zbiorem pewnego rodzaju liczb, warunki izomorfizmu przyjmują postać.

1°. Każdemu elementowi a_i zbioru Z odpowiada pewien element α_i zawarty w zbiorze Z' i odwrotnie, każdemu elementowi α_i zbioru Z' odpowiada ściśle oznaczony element a_i zbioru Z.

2°. Jeżeli przez a_i, α_i oraz a_k, α_k oznaczymy pary wzajemnie odpowiadających sobie elementów, należących do zbiorów Z i Z', wówczas równości

$$a_i = a_k$$

oraz

$$\alpha_i = \alpha_k$$

są odpowiednio równoważne.

i 3°. Jeżeli przez a_i, α_i oraz a_k, α_k oznaczymy pary odpowiadających sobie wzajemnie elementów, należących do zbiorów Z i Z', wówczas równość

$$a_l = a_i + a_k$$

jest równoważna równości

$$\alpha_l = \alpha_i + \alpha_k$$

zaś równośc

$$a_\lambda = a_i \times a_k$$

jest równoważna równości

$$\alpha_\lambda = \alpha_i \times \alpha_k$$

W szczególnym przypadku, gdy każdy ze zbiorów Z i Z' stanowi ciało liczbowe, warunki powyższe określają odpowiedniość izomorficzną dwóch ciał liczbowych.

ROZDZIAŁ III.

TEORJA LICZB ZESPOLONYCH.

§ 23.

Rozszerzenie pojęcia liczby rzeczywistej. Liczby zespolone.

Jak wiadomo z elementarnego kursu matematyki, pierwiastkowanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie zawsze jest wykonalne. Mianowicie nie istnieją pierwiastki stopnia parzystego z liczb ujemnych. Potęga parzysta każdej liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemną. Okoliczność powyższa zmusza nas przeto do dalszego rozszerzenia pojęcia liczby, dokonanego w ten sposób, aby działanie wyciągania pierwiastka w rozszerzonym zbiorze liczb było wykonalne bez zastrzeżeń, innemi słowy, aby w rzeczonym zbiorze Z istniały takie liczby, których potęgi parzyste byłyby liczbami ujemnemi.

Wspomniane rozszerzenie pojęcia liczby możemy osiągnąć przez dołączenie do zbioru liczb rzeczywistych nowych nie zawartych w nim elementów.

Celem niniejszego § jest omówienie sposobu w jaki rzeczone dołączenie ma być dokonane.

Odpowiedź na powyższe pytanie daje nam wspomniana w § 13 /str.76/ zasada zachowania praw formalnych Hankela.

W myśl powyższej zasady żądamy przedewszystkiem, aby w zbiorze Z , otrzymanym przez dołączenie do zbioru liczb rzeczywistych nowych nie zawartych w nim elementów, suma, różnica, iloczyn i iloraz dwu dowolnie obranych elementów zbioru Z były oznaczonemi elementami uważanego zbioru. Nadto, zgodnie z zasadą Hankela, dodawanie i mnożenie elementów zbioru Z winny być tak określone, aby dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych, w razie gdy składniki względnie czynniki są liczbami rzeczywistemi, było szczególnym przypadkiem dodawania i mnożenia elementów zbioru Z oraz, iżby suma i iloczyn elementów zbioru Z posiadały własność przemienności i łączności, nadto zaś, aby mnożenie elementów zbioru Z posiadało własność rozdzielności względem dodawania.

Oczywistą jest rzeczą, iż działania dodawania i mnożenia elementów zbioru winny być tak określone, aby liczba 0 była modułem dodawania, zaś liczba 1 - modułem mnożenia elementów uważanego zbioru. Innemi słowy, dla każdego elementu z zbioru Z winny zachodzić związki

$$z + 0 = z$$

oraz

$$z \times 1 = z$$

Działania odejmowania i dzielenia, które określamy jako działania odwrotne względem dodawania i mnożenia winny być /wyjąwszy oczywiście dzielenie przez 0 / działaniami wykonalnemi jednoznacznie. Nadto, w myśl wypowiedzianych na początku bieżącego § uwag, żądamy aby działanie wyciągania pierwiastka stopnia naturalnego było zawsze wykonalne, a więc aby dla każdej liczby całkowitej dodatniej n i dla każdego elementu z zbioru Z istniał w uważanym zbiorze element ξ, spełniający równanie

$$\xi^n = z$$

Załóżmy, iż istnieją zbiory spełniające wszystkie wspomniane powyżej warunki i oznaczmy przez Z jeden z rzeczonych zbiorów. Z założenia dotyczącego wykonalności pierwiastkowania w zbiorze Z wynika, iż w uważanym zbiorze istnieje przynajmniej jeden element x czyniący zadość równaniu

$$z^2 = -1$$

Oznaczając jeden z rzeczonych elementów zbioru Z przez i będziemy mieli

$$i^2 = -1 \qquad (1)$$

Element zbioru Z, który oznaczyliśmy powyżej przez i nie jest oczywiście liczbą rzeczywistą /które zgodnie z założeniem należą do zbioru Z/, bowiem w zbiorze liczb rzeczywistych nie istnieje liczba spełniająca równanie (1)

Z założenia, iż suma i iloczyn dwu elementów zbioru Z są określonemi elementami uważanego zbioru oraz z uwagi, iż zbiór Z zawiera wszystkie liczby rzeczywiste wynika, iż wyrażenie

$$a+bi$$

gdzie przez a i b oznaczyliśmy dwie liczby całkowite, jest oznaczonym elementem, zawartym w zbiorze Z.

Weźmy pod uwagę zbiór (Z) składający się ze wszystkich wyrażeń postaci

$$a+bi \;{}^{x)}$$

Każdej parze

$$(a,b)$$

dwu liczb rzeczywistych a i b będzie więc odpowiadał oznaczony element

$$a+bi \qquad (2)$$

zbioru (Z) [xx)]

---

x) Zbiór (Z) stanowi oczywiście oznaczony w zupełności podzbiór zbioru Z.

xx) Jest rzeczą oczywistą, iż w przypadku gdy

$$a \neq b$$

Jest rzeczą oczywistą, iż dwu różnym parom

$$(a,b) \text{ oraz } (c,d$$

odpowiadają zawsze dwa różne elementy

$$a+bi \text{ oraz } c+di$$

należące do zbioru (Z).
W samej rzeczy, gdyby było

$$a+bi = c+di$$

wówczas , w razie równości

$$b = d \qquad (3)$$

mielibyśmy

$$a = c \qquad (4)$$

Z równości (3) i (4) wynikałaby natychmiast równość

$$(a,b) = (c,d)$$

co sprzeciwia się założeniu, iż pary

$$(a,b) \text{ oraz } (c,d)$$

są różne. Z drugiej strony, w razie nierówności

$$b \neq d$$

mielibyśmy

$$i = \frac{a-c}{d-b}$$

a więc element i byłby równy oznaczonej liczbie

---

pary

$$(a,b) \text{ i } (b,a)$$

różniące się porządkiem wchodzących doń elementów należy uważać za różne.

rzeczywistej, co wobec założenia

$$i^2 = -1$$

jest oczywiście niemożliwe.

Z powyższego wynika, iż równość

$$(a, b) = (c, d)$$

pociąga za sobą równości

$$a = c$$

oraz

$$b = d$$

Każdej parze

$$(a, b) \qquad (5)$$

odpowiada więc oznaczony w zupełności element

$$a + bi \qquad (6)$$

zbioru (Z) i odwrotnie, każdemu elementowi (6) zbioru (Z) odpowiada oznaczona jedna i tylko jedna para (5)

Ponieważ, zgodnie z przyjętemi przez nas powyżej warunkami, dodawanie i mnożenie elementów zbioru (Z) posiada własność przemienności i łączności, nadto zaś mnożenie elementów uważanego zbioru posiada własność rozdzielności względem dodawania, przeto mamy:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

oraz

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Przyjmijmy za sumę par

$$(a, b) \text{ oraz } (c, d)$$

parę

$$(x, y)$$

której odpowiada suma elementów

$$a+bi \text{ oraz } c+di$$

zbioru (Z) odpowiadających danym parom.
Wobec powyższego będziemy mieli

$$(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) \qquad (7)$$

Przyjmijmy dalej za iloczyn dwu par

$$(a, b) \text{ oraz } (c, d)$$

parę

$$(x, y)$$

której odpowiada iloczyn elementów

$$a+bi \text{ oraz } c+di$$

należących do zbioru (Z) i odpowiadających uważanym parom. Parą tą jest oczywiście

$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc) \qquad (8)$$

Spostrzegamy z łatwością, iż pomiędzy zbiorem (Z) wszystkich wyrażeń postaci

$$a+bi$$

a zbiorem (P) wszystkich par

$$(a, b)$$

dwu liczb rzeczywistych a i b zachodzi tego rodzaju odpowiedniość, iż każdemu elementowi p_i zbioru (P) odpowiada pewien ściśle oznaczony element z_i zbioru (Z) i odwrotnie, każdy element z_i zbioru (Z) odpowiada pewnemu jednemu i tylko jednemu elementowi p_i zbioru (P). Nadto, działania dodawania i mnożenia elementów zbioru (P) określiliśmy w ten sposób, iż sumie i iloczynowi elementów p_i oraz p_k zbioru (P) odpowiada suma i iloczyn elementów z_i oraz z_k należących do zbioru (Z) i odpowiadających uważanym elementom p_i oraz p_k zbioru (P). Odwrotnie, suma i iloczyn każdych dwu dowolnych elementów z_i i z_k zbioru (Z) odpowiada sumie i iloczynowi elementów p_i i p_k zbioru (P) odpowiadających elementom z_i i z_k. Wnosimy stąd, iż pomiędzy zbiorami (P) i (Z) zachodzi odpowiedniość izomorficzna.

Pozostawiając nierozstrzygniętą kwestję istnienia zbiorów Z, spełniających wszystkie wysłowione na początku niniejszego § /str. 147/ warunki, okazaliśmy, iż każdy zbiór Z zawiera pewien podzbiór (Z) izomorficzny ze zbiorem (P) wszystkich par

$$(a, b)$$

dwu liczb rzeczywistych a i b, dla którego działania dodawania i mnożenia zostały określone przez wzory (7) i (8). Skoro zatem stwierdzimy istnienie przynajmniej jednego zbioru Z, spełniającego wszystkie wspomniane warunki i izomorficznego ze zbiorem (P), wówczas zbiór Z będzie najprostszym zbiorem liczb, spełniającym rzeczone warunki.*)

§ 24.

Działania zasadnicze na liczbach zespolonych.

Weźmy pod uwagę zbiór (Z) wszystkich par po-

---

*) Orzekając, iż zbiór Z jest n a j p r o s t s z y m zbiorem spełniającym warunki wymienione na początku bieżącego § mamy na myśli, iż każdy inny zbiór spełniający rzeczone warunki zawiera jako podmnogość zbiór izomorficzny ze zbiorem Z.

stąci

$$(a,b)$$

gdzie przez a i b oznaczyliśmy dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste.

Przyjmijmy w stosunku do elementów uważanego zbioru (Z) następujące umowy.

I. Dwa elementy (a,b) oraz (c,d) zbioru (Z) uważać będziemy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy mamy jednocześnie

$$a=c$$

oraz

$$b=d$$

II. Sumą dwu elementów (a,b) oraz (c,d) zbioru (Z) nazywać będziemy element

$$(a+c,\ b+d)$$

uważanego zbioru, pisząc

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$

i III. Iloczynem dwu elementów (a,b) oraz (c,d) nazywać będziemy element

$$(ac-bd,\ ad+bc)$$

uważanego zbioru, pisząc

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

Spostrzegamy natychmiast, iż umowy powyższe są zgodne z ogólnemi zasadami omówionemi przez nas w rozdziale I. Z drugiej strony łatwo spostrzec, iż przez przyjęcie rzeczonych umów zbiór (Z) staje się zbiorem liczb.

Nazywać będziemy liczbą zespoloną każdą parę

$$(a,b)$$

dwu liczb rzeczywistych a i b, uważaną jako element zbioru liczb, którym staje się zbiór (Z) po przyjęciu trzech przytoczonych powyżej definicyj.

Oznaczmy przez a i b dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste i uważajmy element

$$(a,b)$$

zbioru (Z). Powyższy element zbioru (Z) stanowi oznaczoną liczbę zespoloną; liczbę rzeczywistą a nazywać będziemy pierwszym, zaś liczbę rzeczywistą b - drugim wyrazem uważanej liczby zespolonej.

Opierając się na przytoczonych powyżej definicjach /I, II i III/ udowodnimy szereg twierdzeń dotyczących własności działań zasadniczych na liczbach zespolonych.

Zauważmy przedewszystkiem, iż mamy twierdzenie następujące:

I. Dodawanie liczb zespolonych posiada własność łączności.

Opierając się na dowiedzionem przez nas w rozdziale I /§ 7 str. 14/ twierdzeniu II, możemy twierdzenie nasze uważać za udowodnione, skoro tylko okażemy, iż jakiekolwiek byłyby liczby zespolone (a,b), (c,d) i (e,f), mamy zawsze

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=[(a,b)+(c,d)]+(e,f) \quad (9)$$

Otóż na mocy definicji dodawania liczb zespolonych mamy

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=(a,b)+(c+e,d+f)=$$

$$=(a+c+e,\ b+d+f)$$

W analogiczny sposób stwierdzamy, iż mamy

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)=$$

$$=(a+c+e,\ b+d+f)$$

Widzimy więc, iż równość (9) rzeczywiście zachodzi. Twierdzenie nasze zostało przeto udowodnione.

II. Dodawanie liczb zespolonych posiada własność przemienności.

Zauważmy, iż ze względu na dowiedzioną powyżej /Tw. I/ własność łączności dodawania liczb zespolonych, wystarczy /Tw. III. Rozdział I, § 7, str. 17/ udowodnić, iż mamy zawsze

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b) \tag{10}$$

jakiekolwiek liczby zespolone oznaczylibyśmy przez (a,b) i (c,d)

Spostrzegamy natychmiast, iż wobec równości

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

oraz

$$(c,d)+(a,b)=(c+a,d+b)$$

równość (10) zachodzi niezawodnie. W ten sposób własność przemienności dodawania liczb zespolonych została udowodniona.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

III. Jeżeli dwie liczby zespolone (a,b) i (a',b') spełniają nierównośc

$$(a,b)\neq(a',b')$$

wówczas jakąkolwiek liczbę zespoloną oznaczylibyśmy przez (c,d), mamy

$$(c,d)+(a,b)\neq(c,d)+(a',b') \tag{11}$$

W samej rzeczy, ze względu na definicję równości liczb zespolonych, związek

$$(a,b)\neq(a',b')$$

jest równoważny jednemu z trzech następujących układów związków

$$\left.\begin{array}{ll} a=a', & b\neq b' \\ a\neq a', & b=b' \\ a\neq a', & b\neq b' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Z drugiej strony, na mocy definicji sumy liczb zespolonych, mamy

$$(c,d)+(a,b)=(c+a,d+b) \qquad (13)$$

oraz

$$(c,d)+(a',b')=(c+a',d+b') \qquad (14)$$

Ponieważ w zakresie liczb rzeczywistych związki (12) pociągają za sobą odpowiednio związki

$$c+a=c+a' \quad , \quad c+b\neq c+b'$$

$$c+a\neq c+a' \quad , \quad c+b=c+b'$$

$$c+a\neq c+a' \quad , \quad c+b\neq c+b'$$

przeto, opierając się na definicji równości liczb zespolonych, wnosimy natychmiast, iż mamy w każdym razie

$$(c+a,d+b)\neq(c+a',d+b')$$

Skąd ze względu na równości (13) i (14) otrzymujemy natychmiast nierówność, której istnienia pragnęliśmy udowodnić.
Twierdzenie nasze zachodzi przeto w podanem brzmieniu.

Niech będą dane dwie liczby zespolone

$$(a,b) \text{ oraz } (c,d)$$

Załóżmy, iż liczba zespolona

$$(x,y)$$

czyni zadość równaniu

$$(c,d)+(x,y)=(a,b) \qquad (15)$$

Na mocy definicji sumy liczb zespolonych, musi być ze względu na (15)

$$c+x=a$$

oraz

$$d+y=b$$

Skąd otrzymujemy natychmiast

$$x=a-c$$

oraz

$$y=b-d$$

Z drugiej strony spostrzegamy z łatwością, iż liczba zespolona

$$(a-c,\ b-d)$$

spełnia uważane równanie (15) .

Wnosimy stąd, opierając się na dowiedzionem przed chwilą twierdzeniu III oraz stwierdzonej własności przemienności dodawania liczb zespolonych, iż /Rozdział I, § 8, str. 22, Tw. V/ mamy twierdzenie następujące:

IV. W stosunku do dodawania liczb zespolonych istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania; działanie odejmowania liczb zespolonych jest działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń zgodnie z wzorem

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,\ b-d)$$

Zauważmy wreszcie , iż zachodzi twierdzenie:

V. W zbiorze liczb rzeczywistych istnieje moduł dodawania. Moduł dodawania liczb zespolonych jest równy liczbie zespolonej

$$(0,0)$$

W samej rzeczy, opierając się na wysłowionem powyżej twierdzeniu IV, spostrzegamy z łatwością , iż warunek konieczny i dostateczny na to aby równość

$$(a,b)+(x,y)=(a,b)$$

zachodziła bez względu na wartość liczby zespolonej (a,b) polega na równości

$$(x,y)=(0,0)$$

Równość powyższa wyraża właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Przejdziemy teraz do udowodnienia grupy twierdzeń, dotyczących własności mnożenia liczb zespolonych.

Zauważmy przedewszystkiem, iż mamy twierdzenie następujące:

VI. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność łączności.

Ze względu na twierdzenie II, § 7 /str. 14 / twierdzenie nasze zostanie udowodnione, skoro tylko stwierdzimy, iż równość

$$(a,b)\cdot[(c,d)(e,f)]=[(a,b)(c,d)]\cdot(e,f) \qquad (16)$$

zachodzi bez względu na wartość liczb zespolonych (a,b) , (c,d) i (e,f).

Otóż, w myśl definicji mnożenia liczb zespolonych, mamy oczywiście

$$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=$$

$$=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)$$

Podobnie znajdujemy, iż

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$

$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)$$

Z równości powyższych wynika natychmiast równość (16) stwierdzająca na mocy uczynionych uwag prawdziwość naszego twierdzenia.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

VII. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność przemienności.

W samej rzeczy z równości

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

oraz

$$(c,d)\cdot(a,b)=(ca-db,cb+da)$$

wynika równość

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$$

wyrażająca nasze twierdzenie w przypadku dwu czynników.

Ponieważ, jak to okazaliśmy wyżej / Tw.VI/ , mnożenie liczb zespolonych posiada własność łączności, przeto opierając się na twierdzeniu III,§ 7 /str. 17/ wnosimy natychmiast, iż twierdzenie nasze zachodzi bez względu na liczbę czynników. W ten sposób własność przemienności mnożenia liczb zespolonych została udowodniona.

Przejdziemy obecnie do dowodu twierdzenia:

VIII. Koniecznym i wystarczającym warunkiem na to, aby iloczyn jakiejkolwiek skończonej liczby liczb zespolonych był równy modułowi dodawania jest, aby przynajmniej jeden czynnik równał się modułowi dodawania.

Zauważmy przedewszystkiem, iż twierdzenie nasze zachodzi w przypadku dwu czynników. W samej rzeczy równość

$$(a,b)\cdot(c,d)=(0,0) \qquad (17)$$

jest równoważna na mocy definicji mnożenia liczb zespolonych układowi równości

$$ac-bd=0 \qquad (18)$$

$$ad+bc=0 \qquad (19)$$

Mnożąc obydwie powyższe równości przez c dochodzimy do układu

$$ac^2-bcd=0$$

$$acd+bc^2=0$$

który, ze względu na związki (18) i (19) jest równoważny układowi

$$a(c^2+d^2)=0$$
$$b(c^2+d^2)=0$$

Z równości powyższych wynika natychmiast, iż albo jednocześnie

$$\left.\begin{aligned} a&=0\\ b&=0\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

lub też

$$c^2+d^2=0$$

t.j.

$$\left.\begin{aligned} c&=0\\ d&=0\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Okazaliśmy więc, iż warunkiem koniecznym na to, aby zachodziła równość (17) jest przynajmniej jeden z układów (20) i (21). Z drugiej strony spostrzegamy z łatwością, iż każdy z układów (20) i (21) stanowi warunek wystarczający aby równość (17) była spełniona. Twierdzenie nasze zachodzi przeto niezawodnie w przypadku dwu czynników.

Posługując się dalej zasadą indukcji matematycznej wnosimy z łatwością, iż twierdzenie nasze jest prawdziwe w przypadku jakiejkolwiek skończonej liczby czynników.

IX. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność rozdzielności względem dodawania i odejmowania.

Powiadam, iż twierdzenie nasze zachodzi w szczególnym przypadku, gdy suma liczb zespolonych zawiera tylko dwa składniki (c,d) i (e,f). W samej rzeczy, ze względu na udowodnioną /Tw.VII/ własność przemienności mnożenia liczb zespolonych, stwierdzimy, iż tak jest istotnie, skoro tylko okażemy, iż równość

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f) \quad (22)$$

zachodzi bez względu na wartości liczb zespolonych (a,b), (c,d) i (e,f).

Otóż na mocy definicji dodawania i mnożenia liczb zespolonych mamy niezawodnie

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)(c+e,d+f)=$$
$$=(ac+ae-bd-bf,\,ad+af+bc+be) \tag{23}$$

Z drugiej strony

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,\,ad+bc)$$

oraz

$$(a,b)\cdot(e,f)=(ae-bf,\,af+be)$$

przeto

$$(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)=$$
$$=(ac-bd+ae-bf,\,ad+bc+af+be) \tag{24}$$

Z równości (23) i (24) wynika natychmiast równość (22), której istnienie pragnęliśmy uzasadnić.

Opierając się teraz na twierdzeniu VII, § 9, /str. 25/ oraz na twierdzeniu X, § 10, / str. 48 / wnosimy na mocy uzyskanego przez nas powyżej wyniku, iż twierdzenie nasze zachodzi w podanem brzmieniu.

Weźmy pod uwagę dwie liczby zespolone (a,b) i (c,d). Załóżmy, iż dla uważanych liczb zespolonych (a,b) i (c,d) istnieje liczba zespolona

$$(x,y)$$

spełniająca równanie

$$(c,d)\cdot(x,y)=(a,b) \tag{25}$$

Zgodnie z definicją iloczynu, mamy wobec (25)

$$(cx-dy, cy+dx)=(a,b)$$

skąd w myśl definicji równości

$$cx-dy=a \tag{26}$$

oraz

$$cy+dx=b \tag{27}$$

Mnożąc pierwsze z powyższych równań przez c, drugie zaś przez d otrzymamy

$$c^2x-cdy=ac$$

oraz

$$cdy+d^2x=bd$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$(c^2+d^2)x=ac+bd \tag{28}$$

Mnożąc teraz równanie (26) przez $-d$, równanie zaś (27) przez c dochodzimy do układu równości

$$-cdx+d^2y=-ad$$
$$c^2y+cdx=bc$$

skąd po dodaniu do siebie powyższych równości otrzymamy

$$(c^2+d^2)y=bc-ad \tag{29}$$

Gdyby było

$$c^2+d^2=0$$

to z uwagi, iż liczby c i d są liczbami rzeczywistemi, mielibyśmy

$$c=0$$

oraz

$$d=0$$

Liczba zespolona (c,d) byłaby więc równa modułowi dodawania i wobec powyższego, zgodnie z udowodnionem powyżej twierdzeniem VIII, równość (25) przyjęłaby postać

$$(0,0)(x,y)=(0,0)$$

Równanie powyższe byłoby spełnione przez każdą liczbę zespoloną (x,y).

Gdybyśmy natomiast mieli

$$(c,d)=(0,0)$$

lecz

$$(a,b)\neq(0,0)$$

wówczas równanie (25) nie byłoby spełnione przez żadną liczbę zespoloną (x,y), gdyż, jak łatwo spostrzec, równania (26) i (27), których lewe strony byłyby zawsze równe zeru nie byłyby nigdy spełnione.

Skoro zatem

$$(c,d)=(0,0)$$

wówczas równanie (25) jest bądź nieozaczone, bądź nierozwiazalne.

Załóżmy przeto, iż

$$(c,d)\neq(0,0)$$

Z powyższego założenia wynika, iż

$$c^2+d^2\neq 0$$

i równania (28) i (29) dają

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

oraz

$$y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Z drugiej strony spostrzegamy z łatwością, iż liczba zespolona

$$(x,y)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

spełnia uważane równanie (25).

Wnosimy stąd, opierając się na udowodnionej własności przemienności mnożenia liczb zespolonych /Tw.VII/, iż mamy twierdzenie następujące:

X. W stosunku do mnożenia liczb zespolonych istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia; działanie dzielenia liczb zespolonych w razie, gdy tylko dzielnik (c,d) jest od modułu dodawania odmienny jest, bez względu na wartość dzielnej (a,b), działaniem jednoznacznem, wykonalnem według wzoru

$$(a,b):(c,d)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

XI. Jeżeli przez z , z' i z'' oznaczymy trzy liczby zespolone, wówczas warunkiem koniecznym i wystarczającym aby równość

$$z\cdot z'=z\cdot z'' \tag{30}$$

pociągała za sobą równość

$$z'=z'' \tag{31}$$

a więc, aby nierówność

$$z\cdot z'\neq z\cdot z'' \tag{32}$$

była równoważna nierówności

$$z'\neq z'' \tag{33}$$

jest nierówność

$$z\neq(0,0) \tag{34}$$

Okażemy przedewszystkiem, iż wspomniany w twierdzeniu warunek jest konieczny.

W samej rzeczy spostrzegamy z łatwością, iż w razie gdy rzeczony warunek nie jest spełniony, a więc gdy mamy

$$z=(0,0)$$

równość (30), zgodnie z udowodnionem powyżej twierdzeniem VIII zachodzi bez względu na wartość liczb zespolonych z' i z'', a więc i w przypadku, gdy równość (31) nie jest spełniona.

Wnosimy stąd, iż istnienie nierówności (34) stanowi konieczny warunek na to, aby równość (30) pociągała za sobą równość (31).

Z drugiej strony stwierdzamy z łatwością, iż rzeczony warunek jest wystarczającym.

Istotnie spostrzegamy natychmiast, iż skoro rzeczony warunek jest spełniony, a więc gdy zachodzi nierówność (34), wówczas równość (30) musi pociągać za sobą równość (31), bowiem w razie przeciwnym, a więc gdyby z równości (30) wynikała nierówność

$$z' \neq z''$$

ilorazy podziału każdego z iloczynów $z \cdot z'$ i $z \cdot z''$ przez liczbę zespoloną z mimo związku

$$z \cdot z' = z \cdot z''$$

nie byłyby sobie równe, a więc wbrew udowodnionemu powyżej twierdzeniu /Tw. X/ iloraz podziału wspólnej wartości ξ iloczynów $z \cdot z'$ i $z \cdot z''$ nie byłby wyznaczony jednoznacznie. Ponieważ zaś na mocy jednoznaczności mnożenia liczb zespolonych równość (31) pociąga za sobą równość (30), przeto równości (30) i (31) są w rzeczywistości równoważne.

Z równoważności równości (30) i (31) wynika natychmiast, iż nierówność (32) jest równoważna nierówności (33).

W ten sposób twierdzenie nasze udowodniliśmy w zupełności.

Na zakończenie rozważań niniejszego § udowodnimy jeszcze twierdzenie

XII. W zbiorze liczb zespolonych istnieje moduł mnożenia. Moduł mnożenia liczb zespolonych równa się liczbie zespolonej

$$(1,0)$$

W samej rzeczy, opierając się na twierdzeniu X niniejszego § spostrzegamy z łatwością, iż warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła równość

$$(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$$

dla każdej dowolnie danej liczby zespolonej (a,b) polega na równości

$$(x,y)=(1,0)$$

wyrażającej właśnie twierdzenie, o którego dowód nam chodziło.

Z przeprowadzonych w niniejszym § rozważań wynika, iż wszystkie cztery działania arytmetyczne /wyjąwszy jedynie dzielenie przez zero/ są w zakresie liczb zespolonych wykonalne jednoznacznie.

§ 25.

Liczby rzeczywiste jako szczególny przypadek liczb zespolonych. Jednostka urojona.

Weźmy pod uwagę zbiór (Z_0) wszystkich liczb zespolonych postaci

$$(a,0)$$

gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą.

W myśl definicji równości liczb zespolonych, dwie liczby

$$(a,0) \text{ oraz } (b,0)$$

będą sobie równe wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$a = b$$

Dalej, zgodnie z definicją sumy i iloczynu liczb zespolonych, mamy

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0) \tag{35}$$

oraz

$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0) \tag{36}$$

Weźmy pod uwagę zbiór (R) wszystkich liczb rzeczywistych i ustalmy pomiędzy zbiorem (Z_0) liczb zespolonych postaci

$$(a,0)$$

a uważanym zbiorem (R) odpowiedniość w ten sposób, iż liczbę zespoloną

$$(a,0)$$

uważać będziemy za odpowiadającą oznaczonej liczbie rzeczywistej

$$\alpha$$

w razie i tylko w razie, gdy zachodzi równość

$$\alpha = a$$

Spostrzegamy natychmiast, iż oznaczając przez α i β dwie liczby rzeczywiste odpowiadające liczbom zespolonym $(a,0)$ i $(b,0)$, sumie

$$(a,0)+(b,0) \tag{37}$$

odpowiadać będzie suma

$$\alpha+\beta \tag{38}$$

iloczynowi zaś

$$(a,0)\cdot(b,0) \tag{39}$$

- iloczyn

$$\alpha\cdot\beta \tag{40}$$

W samej rzeczy, z równości

$$\alpha = a$$

oraz

$$\beta = b$$

mamy

$$\alpha + \beta = a + b$$

oraz

$$\alpha \cdot \beta = a \cdot b ,$$

skąd na mocy wzorów (35) i (36) wnosimy, iż liczby (38) i (40) przedstawiają istotnie liczby rzeczywiste, odpowiadające liczbom zespolonym (37) i (39) .

W ten sposób doszliśmy więc do twierdzenia XIII. Zbiór (Z_0) wszystkich liczb zespolonych postaci

$$(a, 0)$$

gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą , jest izomorficzny ze zbiorem (R) wszystkich liczb rzeczywistych.

Wobec udowodnionego powyżej twierdzenia będzie tylko kwestją znakowania, jeżeli liczby zespolone typu

$$(a, 0)$$

oznaczać będziemy temi samemi symbolami, co odpowiadające im liczby rzeczywiste.

Umówmy się pisać zamiast $(a, 0)$ wprost a ; innemi słowy połóżmy

$$a = (a, 0)$$

przy wszelkiem rzeczywistem a .

Oznaczając przez c jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, przez a i b zaś pierwszy i drugi wyraz liczby zespolonej (a,b) będziemy mieli, zgodnie z przyjętą powyżej umową

$$(a,b)+c=(a,b)+(c,0)=(a+c,b)$$

oraz

$$(a,b)\cdot c=(a,b)\cdot(c,0)=(ac,bc)$$

Na podstawie powyższych równości mamy

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$$

czyli

$$(a,b)=a+b\cdot(0,1)$$

Kładąc w powyższej równości

$$(0,1)=i \tag{41}$$

otrzymamy

$$(a,b)=a+bi \tag{42}$$

Każda więc liczba zespolona daje się przedstawić w postaci (42), gdzie i jest liczbą zespoloną, określoną wzorem (41)

Weźmy pod uwagę liczbę zespoloną

$$(0,1).$$

Na mocy definicji mnożenia liczb zespolonych oraz ze względu na przyjętą powyżej umowę, mamy oczywiście

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$$

czyli wobec (21)

$$i^2=-1$$

Zgodnie z powyższym moglibyśmy liczbę zespoloną i oznaczać przez $\sqrt{-1}$, pisząc

$$i=\sqrt{-1}$$

Liczbę zespoloną

$$i=(0,1)$$

nazywamy jednostką urojoną.

Opierając się na udowodnionych w § poprzedzającym twierdzeniach V i XII spostrzegamy natychmiast, iż mamy twierdzenia następujące:

V. Moduł dodawania liczb zespolonych jest równy zeru.

oraz

XII. Moduł mnożenia liczb zespolonych jest równy jedności.

Innemi słowy, dla każdej liczby zespolonej

$$z=a+bi$$

mamy

$$z+0=z$$

oraz

$$z\cdot 1=z$$

Niech

$$z=a+bi$$

będzie oznaczoną liczbą zespoloną. Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą, liczbę zaś b - częścią urojoną liczby zespolonej z. Liczbę zespoloną, której część rzeczywista jest równa zeru nazywamy liczbą urojoną.[x]

---

[x] Jest rzeczą oczywistą, iż symbol ai jest niemniej realny od symbolu a. Nazwa liczba urojona jest tylko mniej lub więcej odpowiednią nazwą na oznaczenie elementów pewnej szczególnej klasy liczb. Nazwa ta znajduje swe uzasadnienie w okoliczności, iż w razie, gdy rozwiązanie pewnego problemu fizycznego lub nawet geometrycznego wyraża się w liczbach zespolonych, których część urojona jest od zera

Dla działań arytmetycznych na liczbach zespolonych mamy w myśl przyjętych definicyj i udowodnionych twierdzeń /Tw.IV i X/ wzory

$$\left.\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ (a+bi):(c+di) &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

przyczem wszystkie cztery działania arytmetyczne są w zakresie liczb zespolonych /wyjąwszy jedynie dzielenie przez zero/ wykonalne jednoznacznie i doprowadzają do liczb zespolonych . Zbiór

---

odmienna, wówczas rozwiązanie takie nie posiada odpowiednika w rzeczywistości fizycznej, względnie geometrycznej, wskazując iż odpowiednie zjawisko fizyczne, względnie wielkość lub figura geometryczna nie istnieją.

Tak np., jak wiadomo z geometrji analitycznej, równanie

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0 \qquad (a)$$

przedstawia koło, którego środek leży w punkcie $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right)$ i którego promień r wyraża się wzorem

$$r=\sqrt{b^2+c^2-ad}$$

W przypadku, gdy

$$b^2+c^2-ad<0$$

promień koła jest równy liczbie urojonej . W tym przypadku powiadamy, iż równanie (a) przedstawia koło urojone. Koło takie oczywiście nie istnieje.

wszystkich liczb zespolonych stanowi więc ciało liczbowe.[x])

Zauważmy, iż działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych posiadają, jak to okazaliśmy w § poprzedzającym, własności przemienności i łączności, nadto działanie mnożenia posiada własność rozdzielności względem dodawania. W zbiorze liczb zespolonych istnieje, jak okazaliśmy, moduł dodawania - mianowicie liczba zero, oraz moduł mnożenia, którym jest liczba 1. Wreszcie zgodnie z rozważaniami przeprowadzonemi wyżej działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych stanowią przypadek szczególny działań na liczbach zespolonych.

W celu więc okazania, iż zbiór liczb zespolonych stanowi omówione na początku niniejszego rozdziału rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych, należy jeszcze okazać, iż pierwiastkowanie stopnia naturalnego jest zawsze w dziedzinie liczb zespolonych wykonalne. Zagadnienie powyższe rozwiążemy w jednym z § następujących.

§ 26.

Moduł liczby zespolonej.
Liczby zespolone sprzężone.
Norma liczby zespolonej.

Weźmy pod uwagę liczbę zespoloną

$$a + bi$$

Wartością bezwzględną albo modułem uważanej liczby zespolonej

$$a + bi$$

nazywamy liczbę rzeczywistą

---

[x]) Ciało (Z) liczb zespolonych, jak łatwo spostrzec, otrzymujemy z ciała (R) liczb rzeczywistych przez dołączenie doń jednostki urojonej i.

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

pisząc

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (44)$$

przyczem przez wyrażenie

$$\sqrt{0}$$

należy rozumieć liczbę 0.

Spostrzegamy natychmiast, iż definicja powyższa jest rozszerzeniem definicji wartości bezwzględnej /modułu/ liczb rzeczywistych.

W samej rzeczy, zgodnie z definicją równości liczb zespolonych, liczba zespolona

$$a+bi$$

jest wtedy i tylko wtedy równa oznaczonej liczbie rzeczywistej

$$\alpha$$

jeżeli

$$b=0$$

Skoro bowiem położymy

$$a+bi=\alpha \qquad (45)$$

gdzie przez α oznaczyliśmy pewną liczbę rzeczywistą, wówczas ponieważ zdodnie z równością (42)

$$a+bi=(a,b)$$

zaś na mocy umowy ustalającej odpowiedniość izomorficzną pomiędzy zbiorem liczb zespolonych postaci $(\alpha,0)$ a zbiorem liczb rzeczywistych mamy dla każdej dowolnie danej liczby rzeczywistej α

$$\alpha=(\alpha,0)$$

mamy wobec (45)

$$(a,b) = (\alpha, 0);$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$a = \alpha$$

oraz

$$b = 0$$

Z drugiej strony mamy niezawodnie

$$a + 0 \cdot i = (a, 0) = a.$$

W przypadku zaś, gdy

$$b = 0$$

z wzoru (44) otrzymujemy

$$|a| = \sqrt{a^2} \qquad (46)$$

W razie gdy

$$a > 0$$

to z uwagi, iż pierwiastek arytmetyczny stopnia drugiego z liczby dodatniej a^2 jest jedynem rozwiązaniem równania kwadratowego

$$x^2 = a^2$$

otrzymujemy natychmiast

$$|a| = a$$

Jeżeli natomiast

$$a < 0$$

to z wzoru (46) mamy

$$|a| = -a$$

Wreszcie w przypadku

$$a = 0$$

wzór (46) daje

$$|0| = \sqrt{0} = 0$$

Wnosimy stąd, iż definicja wartości bezwzględnej liczby zespolonej obejmuje w sobie, jako przypadek szczególny, definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Zgodnie z wzorem (44) moduł liczby zespolonej jest zawsze oznaczoną w zupełności liczbą rzeczywistą nieujemną, przyczem jest zerem tylko wówczas gdy

$$a = 0$$

oraz

$$b = 0$$

a więc dla

$$a + bi = 0$$

Mamy zatem twierdzenie:

XIV. Moduł każdej liczby zespolonej, od zera odmiennej, jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Moduł zera jest zerem.

Liczbę zespoloną

$$a - bi$$

różniącą się znakiem spółczynnika b w części urojonej od liczby zespolonej

$$z = a + bi$$

nazywamy liczbą zespoloną sprzężoną lub krótko liczbą sprzężoną z liczbą z. Liczbę sprzężoną z liczbą z oznaczać będziemy przez z'.

Z określenia liczb sprzężonych wynika, iż równość

$$z_1 = z'$$

pociąga za sobą równość

$$z_1' = z$$

a więc, iż przy wszelkiem zespolonem z

$$(z')' = z$$

Mamy zatem.

Liczba sprzężona z liczbą sprzężoną z daną liczbą jest daną liczbą.

Jeżeli przez z i z_1 oznaczymy dwie liczby zespolone, spełniające równość

$$z = z_1$$

wówczas mamy oczywiście

$$z' = z_1'$$

i odwrotnie.

Spostrzegamy z łatwością, iż w razie gdy

$$z = z'$$

liczba z jest liczbą rzeczywistą. Odwrotnie, liczby rzeczywiste ze sobą sprzężone są sobie równe.

W szczególnym przypadku gdy

$$z = 0$$

mamy

$$z' = 0$$

i odwrotnie.

Ze wzorów (43) wnosimy natychmiast, iż dla każdych dwu dowolnie danych liczb zespolonych z i z_1 mamy

$$\left.\begin{aligned} z' + z_1' &= (z + z_1)' \\ z' - z_1' &= (z - z_1)' \\ z' \cdot z_1' &= (z \cdot z_1)' \\ \frac{z'}{z_1'} &= \left(\frac{z}{z_1}\right)' \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

przyczem ostatnia z powyższych równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$z_1 \neq 0$$

Widzimy więc, iż działania na liczbach zespolonych sprzężonych doprowadzają zawsze do wyników sprzężonych.

Zgodnie z definicją modułu liczby zespolonej, mamy

$$|a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} =$$
$$= |a+bi|$$

skąd

$$|z'| = |z|$$

Liczby zespolone sprzężone posiadają więc ten sam moduł.

Zauważmy, iż ten sam moduł

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

oprócz liczb

$$a+bi \quad \text{i} \quad a-bi$$

posiadają jeszcze liczby

$$-a+bi \quad \text{i} \quad -a-bi$$

nadto, jak łatwo spostrzec, ten sam moduł $\sqrt{a^2+b^2}$ będą posiadać liczby

$$b+ai\ ,\ b-ai\ ,\ -b+ai\ ,\ -a-bi$$ x)

---

x) Łatwo spostrzec, iż ten sam moduł

$$\sqrt{a^2+b^2} = m$$

posiada każda liczba zespolona, postaci

Iloczyn

$$z \cdot z'$$

liczb zespolonych sprzężonych, nazywamy normą liczby zespolonej z.

Na mocy definicji mnożenia liczb zespolonych, mamy

$$z \cdot z' = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \qquad (48)$$

Norma liczby zespolonej z jest więc liczbą rzeczywistą nieujemną i równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy uważana liczba zespolona jest zerem.

Z równości (48), ze względu na równość (44), otrzymujemy

$$z \cdot z' = |z|^2$$

skąd

$$|z| = \sqrt{z \cdot z'}$$

Zauważmy jeszcze, iż suma liczb zespolonych sprzężonych jest zawsze liczbą rzeczywistą.

W samej rzeczy, na mocy definicji sumy liczb zespolonych, mamy

$$z + z' = (a+bi)+(a-bi) = 2a$$

$$x+yi$$

gdzie przez x i y oznaczyliśmy dwie liczby rzeczywiste takie, iż

$$x^2+y^2 = m^2 \qquad (a)$$

Wyznaczenie więc wszystkich liczb zespolonych, posiadających ten sam moduł, sprowadza się do rozwiązania w liczbach rzeczywistych równania nieoznaczonego (a)

§ 27.

Własności modułu liczb zespolonych.

W niniejszym § zamierzamy podać szereg twierdzeń, dotyczących wałsności modułu liczb zespolonych.

Udowodnimy przedewszystkiem twierdzenie następujące:

XV. Moduł iloczynu liczb zespolonych jest równy iloczynowi modułów czynników.

W samej rzeczy, oznaczając przez z i z_1 dwie liczby zespolone, zaś przez z' i z_1' liczby zespolone sprzężone z uważanemi liczbami, mamy wobec (49)

$$|z \cdot z_1|^2 = (z \cdot z_1)(z \cdot z_1)'$$

Ponieważ zaś zgodnie z (47)

$$(z \cdot z_1)' = z' z_1'$$

przeto mamy

$$(z \cdot z_1) \cdot (z \cdot z_1)' = z \cdot z_1 \cdot z' \cdot z_1'$$

skąd z uwagi na udowodnioną własność przemienności i łączności mnożenia liczb zespolonych, otrzymujemy natychmiast

$$(z \cdot z_1) \cdot (z \cdot z_1)' = (z \cdot z') \cdot (z_1 \cdot z_1')$$

Mamy zatem

$$|z \cdot z_1|^2 = (z \cdot z') \cdot (z_1 z_1')$$

Równość powyższa, ze względu na równość (49), jest równoważna równości

$$|z \cdot z_1|^2 = |z|^2 \cdot |z_1|^2 \qquad (50)$$

skąd z uwagi, iż moduł liczby zespolonej jest zawsze liczbą rzeczywistą od zera nie mniejszą, otrzymujemy natychmiast równość

$$|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$$

wyrażającą twierdzenie, o którego dowód nam chodziło.

W podobny sposób udowodnilibyśmy:

XVI. Moduł ilorazu liczb zespolonych jest równy ilorazowi z podzielenia modułu dzielnej przez moduł dzielnika.

Spostrzegamy natychmiast, iż przyjmując symbol z_k $(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots)$ za symbol oznaczonej w zupełności liczby zespolonej, mamy ze względu na łączność mnożenia liczb zespolonych

$$\left|\prod_{k=1}^{k=n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{k=n} |z_k|$$

Jako ciekawy wniosek z udowodnionego powyżej twierdzenia XV, otrzymujemy twierdzenie:

Iloczyn dwóch liczb, z których każda rozkłada się na sumę dwu kwadratów, jest sumą dwu kwadratów.

W samej rzeczy, kładąc w równości (50)

$$z = a + bi \quad \text{oraz} \quad z_1 = c + di$$

otrzymamy

$$|a+bi|^2 \cdot |c+di|^2 = |(a+bi)(c+di)|^2 =$$

$$= |(ac-bd) + (ad+bc)i|^2$$

skąd ze względu na definicję modułu wynika natychmiast tożsamość

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \qquad (51)$$

wyrażająca wspomniane twierdzenie.

Tak np.

$$146 \cdot 65 = (11^2+5^2) \cdot (7^2+4^2) =$$

$$= (11 \cdot 7 - 5 \cdot 4)^2 + (11 \cdot 4 + 5 \cdot 7)^2 = 57^2 + 79^2$$

Zastępując w tożsamości (51) b przez $-b$ otrzymujemy jeszcze jedną tożsamość

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \quad (3$$

Mamy więc

$$146\cdot 65 = (11^2+5^2)\cdot(7^2+4^2) =$$

$$= (11\cdot 7+5\cdot 4)^2+(11\cdot 4-5\cdot 7)^2 = 97^2+9^2$$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

XVII. Moduł sumy dwu liczb zespolonych jes nie większy od sumy modułów składników.

W celu dowiedzenia naszego twierdzenia załóż my, iż twierdzenie nie jest prawdziwe, a więc, ż dla pewnych liczb zespolonych

$$z = a+bi \quad \text{oraz} \quad z_1 = c+di$$

mamy

$$|z+z_1| > |z|+|z_1| \quad (5$$

W myśl definicji modułu, byłoby więc wobec (4

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} > \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Podnosząc obydwie strony powyższej nierówności d kwadratu, mielibyśmy

$$(a+c)^2+(b+d)^2 >$$

$$> a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

Skąd po odjęciu od obydwu stron wyrażenia:

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

i podzielenie przez 2:

$$ac+bd > \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

Wobec powyższego, mielibyśmy

$$(ac+bd)^2 > (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

co sprzeciwia się nierównosci

$$(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

wynikającej bezpośrednio ze znalezionej przez nas powyżej tożsamości (52)
Nierówność (53) nie może więc zachodzić dla żadnych liczb zespolonych z i z_1, skąd wynika, iż mamy niezawodnie

$$|z+z_1| \leqq |z|+|z_1|$$

W ten sposób twierdzenie nasze zostało udowodnione.

Z uwagi na własność łączności sumy liczb zespolonych mamy na mocy udowodnionego twierdzenia

$$\left|\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{k=n} |z_k|$$

Okażemy teraz, iż mamy twierdzenie następujące:

XVIII. Moduł różnicy dwu liczb zespolonych jest nie mniejszy od różnicy modułów odjemnej i odjemnika.

Załóżmy dla dowodu, iż twierdzenie nasze nie jest prawdziwe, a więc, iż dla pewnych liczb zespolonych z i z_1 mamy

$$|z-z_1| < |z|-|z_1|$$

Dodając do obydwu stron powyższej nierówności

$$|z_1|$$

mielibyśmy

$$|z-z_1|+|z_1| < |z|$$

Skąd z uwagi, iż

$$(z-z_1)+z_1=z$$

byłoby

$$|(z-z_1)+z_1| > |z-z_1|+|z|$$

wbrew twierdzeniu XVII. Musi być zatem przy wszelkich zespolonych z i z_1

$$|z-z_1| \geqslant |z|-|z_1|$$

Twierdzenie nasze zostało przeto udowodnione.

§ 28.

Trygonometryczna postać liczby zespolonej.

Weźmy pod uwagę dwie liczby rzeczywiste a i b. Zajmijmy się wyznaczeniem wszystkich liczb rzeczywistych x, czyniących zadość trzem następującym warunkom

$$\left.\begin{array}{ll} -\pi < x \leqslant \pi & (54) \\ \cos x = a & (55) \\ \sin x = b & (56) \end{array}\right\} \quad (a)$$

W myśl znanej zależności trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (57)$$

mamy wobec (55) i (56)

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (58)$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$-1 \leqslant a \leqslant 1 \qquad (59)$$

Równanie

$$\cos x = a \qquad (60)$$

posiada, jak wiadomo, dla a zawartego w przedziale

$$(-1, 1)$$

jedno tylko rozwiązanie

$$x = \arccos a$$

zawarte w przedziale

$$(0, \pi)$$

oraz jedno rozwiązanie

$$x = -\arccos a$$

zawarte w przedziale

$$(-\pi, 0)$$

Pozostaje przeto do sprawdzenia, czy wspomniane rozwiązania równania (60) spełniają wymieniony na początku przytoczonego powyżej układu wyrunków, warunek (54)

W samej rzeczy spostrzegamy z największą łatwością, iż w przypadku

$$x = \arccos a \tag{61}$$

mamy wobec (59) nierówności

$$0 \leqq x \leqq \pi$$

skąd wnosimy natychmiast, iż

$$\sin x > 0$$

Wobec powyższego, w myśl (57), mamy

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

skąd z uwagi, iż wobec (61)

$$\cos^2 x = \cos^2(\arccos a) = a^2 \tag{62}$$

otrzymujemy natychmiast

$$\sin x = \sqrt{1 - a^2}$$

Równość powyższa ze względu na równość (58) jest oczywiście równoważna równości

$$\sin x = \sqrt{b^2}$$

Mamy zatem

$$\sin x = |b|$$

Podobnie w przypadku

$$x = -\arccos x \tag{63}$$

mamy wobec (59)

$$-\pi \leqq x \leqq 0$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$\sin x \leqq 0$$

Wobec powyższego, mamy

$$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$$

skąd ze względu na związki (62) i (58) otrzymujemy

$$\sin x = -|b|$$

Wobec uzyskanych w poprzedzających rozważaniach wyników wnosimy natychmiast, iż w razie istnienia nierówności

$$b > 0$$

równanie

$$\sin x = b$$

spełnia tylko pierwsza z wartości

$$x = \arccos a$$

oraz

$$x = -\arccos a$$

w razie zaś nierówności $b < 0$

tylko druga z wymienionych wartości x.

Zauważmy dalej, iż ze względu na równość (58) w przypadku

$$b \neq 0$$

mamy

$$-1 < a < 1$$

a więc w myśl (61) i (63)

$$0 < \arccos a < \pi$$

oraz

$$-\pi < -\arccos a < 0$$

Z nierówności powyższych otrzymujemy natychmiast

$$-\pi < x \leqq \pi$$

gdzie

$$x = \pm \arccos a \qquad (64)$$

Widzimy więc, iż warunek (54) jest spełniony przez każdą wartość x, określoną równaniem (64)

Ostatecznie okazaliśmy, iż w przypadku

$$b \neq 0$$

układ warunków (a) posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie, którym dla

$$b > 0$$

jest

$$x = \arccos a$$

zaś dla

$$b < 0$$

jest

$$x = -\arccos a$$

Dalej w razie

$$b = 0$$

mamy w myśl (58)

$$a = \pm 1.$$

W przypadku

$$a = 1$$

oraz

$$b = 0$$

jak łatwo spostrzec układ warunków (a) posiada jedno tylko rozwiązanie, mianowicie

$$x = 0$$

W samej rzeczy, w uważanym przypadku mamy z jednej strony

$$\cos 0 = 1$$

oraz

$$\sin 0 = 0$$

z drugiej zaś dla wszelkich różnych od zera wartości x, spełniających nierówność

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

mamy zawsze

$$\cos x > 1$$

Podobnie w przypadku

$$a = -1$$

oraz

$$b=0$$

z uwagi, iż

$$\cos\pi=-1$$

oraz

$$\sin\pi=0$$

oraz ze względu na nierówność

$$\cos x>-1$$

zachodzącą dla wszelkich x, spełniających nierówność

$$-\pi\leqq x\leqq\pi$$

wnosimy, iż jedynem rozwiązaniem układu warunków (a) jest

$$x=\pi$$

W przypadku

$$b=0$$

mamy więc również tylko jedno rozwiązanie wspomnianego układu warunków, którym w razie

$$a=1$$

jest

$$x=0$$

w razie zaś

$$a=-1$$

jest

$$x=\pi$$

Spostrzegamy natychmiast, iż z uwagi, że dla

$$a = 1$$

mamy

$$\arccos a = 0$$

zaś dla

$$a = -1$$

mamy

$$\arccos a = \pi$$

możemy obydwa uważane przypadki objąć jednym wzorem

$$x = \arccos a$$

Opierając się na uzyskanych, w poprzedzających rozważaniach, wynikach, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

XIX. Jeżeli a i b są dwiema liczbami rzeczywistemi spełniającemi związek

$$a^2 + b^2 = 1$$

wówczas układ warunków

$$-\pi < x \leqq \pi$$

$$\cos x = a$$

$$\sin x = b$$

posiada zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie

$$x = \arccos a$$

dla

$$b \geqq 0$$

oraz

$$x = -\arccos a$$

dla

$$b < 0$$

Weźmy pod uwagę liczbę zespoloną

$$z = x + yi$$

różną od zera. Oznaczmy moduł uważanej liczby zespolonej przez ρ . Wobec powyższego będzie

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Połóżmy dalej

$$\frac{z}{\rho} = a + bi \qquad (65)$$

Z równości powyższej, na mocy definicji równości liczb zespolonych, mamy

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (66)$$

oraz

$$b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad (67)$$

liczby a i b będą więc oznaczonemi w zupełności przez daną liczbę zespoloną Z liczbami rzeczywistemi, przyczem będzie

$$a^2 + b^2 = 1$$

Na mocy udowodnionego powyżej twierdzenia XIX istnieć więc będzie jedna i tylko jedna liczba rzeczywista θ , czyniąca zadość układowi warunków

$$\left.\begin{aligned} -\pi < \theta \leq \pi \\ \cos\theta = a \\ \sin\theta = b \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Liczba θ jest więc oznaczoną w zupełności przez liczbę zespoloną z liczbą rzeczywistą. Liczbę tą nazywamy argumentem głównym lub amplitudą główną liczby zespolonej z.

Zgodnie z (68), (66) i (67), w myśl twierdzenia XIX, amplitudą liczby zespolonej

$$z = x + yi$$

dla

$$y \geqq 0$$

jest

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

zaś

$$-\arccos \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dla

$$y < 0$$

Zauważamy, iż ze względu na związki

$$a = \cos\theta$$

oraz

$$b = \sin\theta$$

równość (65) możemy napisać w postaci

$$\frac{z}{\rho} = \cos\theta + i\sin\theta$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad ^{x)}$$

x) Postać ta po raz pierwszy została wprowadzona przez L.Eulera.

Powyższa postać liczby zespolonej znana jest pod nazwą trygonometrycznej postaci liczby zespolonej *).

Mamy zatem twierdzenie:

XX Każda liczba zespolona z różna od zera daje się zawsze jednym i tylko jednym sposobem przedstawić w postaci

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{69}$$

gdzie ρ oznacza moduł uważanej liczby zespolonej, zaś θ liczbę rzeczywistą spełniającą nierówność

$$-\pi<\theta\leq\pi$$

Łatwo spostrzec, iż argument główny nie jest jedyną wartością argumentu danej liczby zespolonej

$$z=a+bi$$

W samej rzeczy kładąc jednocześnie

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

oraz

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

będziemy mieli

$$\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta$$

Skąd w myśl definicji równości liczb zespolonych

$$\rho\cos\varphi=\rho\cos\theta$$

oraz

*) Postać trygonometryczną liczby zespolonej nazywamy niekiedy postacią biegunową. Nazwa ta jak zobaczymy w dalszym ciągu posiada swe uzasadnienie.

$$\rho \sin\varphi = \rho \sin\theta$$

Z równości powyższych na mocy znanego twierdzenia gonjometrycznego wnosimy natychmiast

$$\varphi = \theta + 2k\pi$$

gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

Widzimy więc, iż argument danej liczby zespolonej z posiada nieskończenie wiele wartości różniących się od argumentu głównego o całkowite wielokrotności liczby 2π.

Spostrzegamy natychmiast, iż w razie pominięcia warunku

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

ograniczającego wartość argumentu liczby zespolonej, przedstawienie danej liczby zespolonej

$$z = a + bi$$

w postaci

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

daje się uskutecznić nieskończenie wielu sposobami, przyczem wartości argumentu φ uważanej liczby zespolonej z określone są równaniem

$$\varphi = \theta + 2k\pi$$

gdzie przez θ oznaczyliśmy argument główny, zaś przez k dowolną liczbę całkowitą.

Spostrzegamy z największą łatwością, iż moduł liczby zespolonej oraz którakolwiek z wartości argumentu określają zawsze w sposób jednoznaczny odnośną liczbę zespoloną. W dalszym ciągu mówiąc o argumencie liczby zespolonej będziemy mieć zawsze na myśli tę jego wartość θ, która czyni zadość nierówności

$$-\pi < \theta \leq \pi,$$

a więc argument główny.

Zauważmy, iż argument liczby rzeczywistej dodatniej jest równy zeru.

W samej rzeczy łatwo spostrzec, iż w przypadku

$$z > 0$$

kładąc

$$|z| = \rho$$

mamy

$$z = \rho(\cos 0 + i \sin 0)$$

Podobnie kładąc jak wyżej

$$|z| = \rho$$

dla

$$z < 0$$

mamy

$$z = -\rho = \rho(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Wnosimy stąd, iż argument liczby rzeczywistej ujemnej jest równy liczbie π.

Dalej spostrzegamy z łatwością, iż argument jednostki urojonej jest równy $\frac{\pi}{2}$.

W samej rzeczy ze względu na równość

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

oraz z uwagi, iż

$$|i| = 1$$

mamy

$$i = |i|\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

W podobny sposób wnosimy, iż argument liczby $-i$ jest równy $-\frac{\pi}{2}$, bowiem z uwagi, iż

$$\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$$

oraz

$$|-i| = 1$$

mamy

$$-i = |-i|\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

skąd na mocy znanych twierdzeń gonjometrycznych otrzymujemy natychmiast

$$-i = |-i|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Z rozważań powyższych wnosimy z największą łatwością, iż argument liczby urojonej

$$z = bi$$

jest równy albo

$$\frac{\pi}{2}$$

albo

$$-\frac{\pi}{2}$$

zależnie od tego czy

$$b > 0$$

czy też

$$b < 0$$

Weźmy pod uwagę dwie liczby zespolone

$$z = a + bi$$

oraz

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

i napiszmy uważane liczby zespolone w postaci

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oraz

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

gdzie przez φ i φ_1 oznaczyliśmy jakiekolwiek wartości argumentów liczb zespolonych z i z_1.

Na mocy definicji mnożenia liczb zespolonych mamy

$$z\cdot z_1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)= \tag{70}$$

$$=\rho\rho_1[(\cos\varphi\cos\varphi_1-\sin\varphi\sin\varphi_1)+(\cos\varphi\sin\varphi_1+\sin\varphi\cos\varphi_1)i]$$

Z równości powyższej ze względu na znane zależności trygonometryczne

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

oraz

$$\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

otrzymujemy natychmiast

$$z\cdot z_1=\rho\rho_1[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)] \tag{71}$$

Widzimy więc, iż argument iloczynu dwu liczb zespolonych jest równy sumie argumentów czynników.

Zaznaczamy z naciskiem, iż twierdzenie powyższe nie jest bynajmniej równoważne twierdzeniu:

Argument główny iloczynu dwu liczb zespolonych jest równy sumie argumentów głównych czynników.

O ile bowiem pierwsze z przytoczonych powyżej twierdzeń jest zawsze prawdziwe bez względu na wartości argumentów danych liczb zespolonych o tyle drugie wyraża prawdziwy stan rzeczy tylko w pewnych szczególnych przypadkach.

Tak np, jeżeli mamy dane dwie liczby zespolone

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

oraz

$$z_1 = +1 + i\sqrt{3}$$

których argumenty główne są odpowiednio równe

$$\frac{3}{4}\pi \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{3}\pi$$

wówczas z uwagi, iż

$$z \cdot z_1 = -(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i$$

argument główny iloczynu uważanych liczb zespolonych z i z_1 jest równy $-\frac{11}{12}\pi$ nie zaś $\frac{13}{12}\pi$, którą to wartość otrzymujemy z wzoru (71). Wzór (71) daje więc tylko jedną z nieskończenie wielu wartości argumentu iloczynu danych liczb zespolonych z i z_1. *)

W razie, gdy rzeczona wartość φ argumentu iloczynu uważanych liczb zespolonych z i z_1 nie jest wartością główną, wówczas z uwagi, iż suma argumentów głównych dwu liczb zespolonych jest zawsze zawarta w przedziale

$$(-2\pi, +2\pi)$$

wartość główną argumentu liczby zespolonej $z \cdot z_1$ znajdujemy z wzoru

---

*) Tylko w szczególnych przypadkach wartość ta jest równa argumentowi głównemu iloczynu danych liczb zespolonych. Ma to mianowicie miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy suma argumentów głównych czynników jest zawarta w przedziale

$$(-\pi, +\pi)$$

$$\theta = \varphi \pm 2\pi$$

gdzie znak — lub + bierzemy zależnie od tego czy wartość φ jest dodatnia czy ujemna.

Ze względu na udowodnioną powyżej /§ 24, Tw. VI, str. 159/ własność łączności mnożenia liczb zespolonych spostrzegamy natychmiast, iż mamy

$$\prod_{k=1}^{k=n} \rho_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{k=n} \rho_k\right)\cdot\left(\cos\sum_{k=1}^{k=n}\varphi_k + i\sin\sum_{k=1}^{k=n}\varphi_k\right) \tag{72}$$

Uważajmy, jak wyżej, dwie liczby zespolone:

$$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oraz

$$z_1 = c + di = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

Mamy wobec (43):

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} =$$

$$= \frac{\rho}{\rho_1}\left(\frac{\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1}{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1}\, i\right)$$

Równość powyższa z uwagi na związki

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$$

oraz

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

jest równoważna równości:

$$\frac{z}{z_1}=\frac{\rho}{\rho_1}\left[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)\right] \qquad (73)$$

Z otrzymanej równości wnosimy natychmiast, iż argument ilorazu dwu liczb zespolonych jest równy różnicy argumentów dzielnej i dzielnika.

Podkreślamy, iż nie należy bynajmniej stąd wnosić, iż argument główny ilorazu dwu liczb zespolonych jest różnicą argumentów głównych dzielnej i dzielnika, gdyż, jak łatwo się o tem przekonać twierdzenie takie jest fałszywe.

§ 29.

Potęgowanie liczb zespolonych.

Wzór Moivre'a.

Przejdziemy teraz do rozpatrzenia potęgowania liczb zespolonych. W tym celu oprzemy się na przeprowadzonych przez nas w § 11 i 12 /str. 49 i nast/ rozważaniach dotyczących ogólnego pojęcia potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim oraz rozszerzenia rzeczonego pojęcia na przypadek, w którym wykładnik potęgi jest liczbą całkowitą ujemną.

W zgodzie z rozważaniami § 11 przyjmijmy następującą definicję:

Potęgą oznaczonej za zasadę potęgi przyjętej liczby zespolonej z, przyjmując za wykładnik oznaczoną liczbę całkowitą n nazywamy liczbę zespoloną, za której symbol przyjmujemy symbol

$$z^n$$

określając jednocześnie wartość rzeczonego symbolu przez przyjęcie dwu następujących równości

$$z^1=z$$

oraz

$$z^{k+1}=z^k\cdot z$$

gdzie przez k oznaczyliśmy dowolną liczbę całkowitą dodatnią.

Definicja powyższa jak to, już zaznaczyliśmy wyżej /str. 50/, określa w zupełności potęgę o wykładniku całkowitym dodatnim dowolnej za zasadę potęgi przyjętej liczby zespolonej.

Dalej z uwagi, iż zbiór liczb zespolonych zgodnie z udowodnionemi powyżej w § 24 i 25 twierdzeniami /Tw. VI, VII, VIII, X, XII i XIII/ czyni zadość wymienionym w § 11 /str. 54/ pod 1°, 2°, 3°, 4° i 5° warunkom, jesteśmy uprawnieni na mocy przeprowadzonych w rzeczonym paragrafie rozważań do wprowadzenia pojęcia potęgi liczby zespolonej o wykładniku równym zeru, a to przez przyjęcie równości następującej

$$z^0 = 1$$

gdzie przez z oznaczyliśmy jakąkolwiek byle od modułu dodawania odmienną liczbę zespoloną.

Mając już ustalone w powyższy sposób pojęcie potęgi liczby zespolonej o wykładniku całkowitym od zera nie mniejszym rozszerzamy pojęcie na przypadek, w którym wykładnik potęgi jest liczbą całkowitą ujemną.

W tym celu przyjmujemy równość następującą

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \qquad (74)$$

gdzie, jak wyżej, przez z oznaczyliśmy dowolną byle nierówną zeru liczbę zespoloną.

Opierając się na przyjętej powyżej równości (74) oraz twierdzeniu XV /§ 12 str. 70/ stwierdzamy z największą łatwością, iż mamy twierdzenie następujące:

XXI Jakiekolwiek byle od modułu dodawania odmienne liczby zespolone oznaczylibyśmy przez z i z_1 równości

$$\left.\begin{aligned} z^x \cdot z^y &= z^{x+y} \\ (z^x)^y &= z^{x\cdot y} \\ z^x \cdot z_1^x &= (z \cdot z_1)^x \\ z^x : z^y &= z^{x-y} \\ z^x : z_1^x &= (z : z_1)^x \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

(75)

zachodzą przy wszelkich całkowitych / dodatnich, ujemnych lub równych zeru/ wartościach wykładników x i y.

Znaleziony przez nas w § poprzedzającym wzór (72) na iloczyn liczb zespolonych przedstawionych w postaci trygonometrycznej prowadzi nas do prostego a jednocześnie niezmiernie ważnego wzoru na potęgę liczby zespolonej.

Kładąc mianowicie w wspomnianym wzorze

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots\cdots = \rho_n = \rho$$

oraz

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \cdots\cdots = \varphi_n = \varphi$$

otrzymamy

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (76)$$

skąd wynika natychmiast wzór

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad (77)$$

znany pod nazwą wzoru Moivre'a.*)

Znaleziony powyżej wzór Moivre'a daje się z łatwością rozszerzyć na przypadek w którym wykładnik potęgi jest liczbą całkowitą ujemną.

W samej rzeczy, na mocy definicji potęgi liczby zespolonej o wykładniku całkowitym mniejszym od zera mamy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} \quad (78)$$

---

*) Wzór (77) jakkolwiek był już znany A. de Moivre'owi w 1707 roku został ogłoszony przezeń drukiem dopiero w 1730 roku w dziele p.t.: Miscellanea analytica /Londyn/. Postać, w której Moivre podał swój wzór była nieco odmienną od przytoczonej powyżej. Wzór Moivre'a w tej postaci, w której podaliśmy go wyżej spotykamy poraz pierwszy w znakomitem dziele L. Eulera p.t.: Introductio in analysin infinitorum /Lozanna 1748/.

skąd wobec

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} \qquad (79)$$

Z drugiej strony zważywszy, iż argument liczby rzeczywistej dodatniej jest równy zeru mamy/wzór (73)/

$$\frac{1}{\cos\psi + i\sin\psi} = \cos(-\psi) + i\sin(-\psi) \qquad (80)$$

bez względu na wartość argumnetu ψ.

Z wzorów (78), (79) i (80) po dokonaniu podstawienia

$$\psi = n\varphi$$

otrzymujemy natychmiast

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) \qquad (80')$$

Wzór powyższy stanowi żądane rozszerzenie wzoru Moivre'a.*)

§ 30.

Pierwiastkowanie liczb zespolonych.

Obecnie, zgodnie z zapowiedzią uczynioną przy końcu § 25 /str. 173/ przystąpimy do omówienia kwestji pierwiastkowania liczb zespolonych. Okażemy mianowicie, iż pierwiastkowanie stopnia naturalnego jest w zakresie liczb zespolonych zawsze wykonalne, innemi słowy, iż dla każdej danej liczby całkowitej n oraz dla każdej dowolnej liczby zespolonej z istnieje w zbiorze liczb zespolonych liczba ξ spełniająca równanie:

---

*) Często posługujemy się nieco odmienną postacią wzoru (80') mianowicie:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi.$$

$$\xi^n = z \text{ *)}$$

W tym celu połóżmy

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

i postarajmy się wyznaczyć moduł i argument liczby zespolonej

---

*) Zauważmy, iż nie mamy potrzeby rozważania przypadku, w którym liczba całkowita n byłaby równą zeru lub od zera mniejszą. Łatwo bowiem spostrzec, iż w przypadku

$$n = 0$$

równość

$$\xi^n = z \qquad (a)$$

zgodnie z rozważaniami poprzedzającego paragrafu mogłaby zachodzić wtedy i tylko wtedy, gdyby było

$$z = 1$$

W tym przypadku równanie (a) byłoby spełnione przy każdej byle od zera odmiennej wartości na ξ.

Gdyby natomiast liczba całkowita n była od zera mniejsza, wówczas równość (a) byłaby równoważna równości

$$\xi^{n'} = a'$$

skoro tylko przyjmiemy

$$n' = -n$$

oraz

$$a' = \frac{1}{a}$$

przez co zagadnienie wyznaczenia liczby ξ sprowadza sie do przypadku, w którym

$$n > 0.$$

$$\xi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{81}$$

czyniącej zadość równaniu

$$\xi^n = z \tag{82}$$

Ponieważ w myśl znalezionego w § poprzedzającym wzoru (76)

$$\xi^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{83}$$

przeto

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Z równości powyższej otrzymujemy natychmiast

$$r^n = \rho \tag{84}$$

oraz

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \tag{85}$$

gdzie przez k oznaczyliśmy dowolną liczbę całkowitą.

Zauważmy, iż bez względu na wartość liczby k możemy zawsze położyć

$$k = nl + \nu$$

gdzie przez l i ν oznaczyliśmy dwie liczby całkowite, z których druga czyni zadość nierównościom

$$0 \leq \nu < n \tag{86}$$

Wobec powyższego równość (85) przyjmie postać

$$n\varphi = \theta + 2(nl + \nu)\pi$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n}2\pi + 2l\pi \tag{87}$$

Ponieważ z jednej strony równanie (84) określa liczbę rzeczywistą dodatnią r w sposób jednoznaczny, z drugiej zaś z uwagi, iż bez względu na wartość liczby całkowitej l mamy zawsze

$$\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi+2l\pi\right)=\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi\right)$$

oraz

$$\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi+2l\pi\right)=\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi\right)$$

przeto każdą liczbę zespoloną ξ czyniącą zadość równaniu (82) możemy napisać w postaci

$$\xi=r\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{\nu}{n}2\pi\right)\right] \quad (88)$$

gdzie ν oznacza liczbę całkowitą dodatnią ograniczoną nierównościami

$$0\leqq\nu<n$$

Z drugiej strony łatwo spostrzec, iż jakąkolwiek byłaby wartość liczby całkowitej ν wzór (88) daje na ξ zawsze wartość spełniającą równanie (82). Zważywszy nadto, iż w razie przyjęcia na ν wartości określonych przez związki (86) różnica dwu jakichkolwiek wartości argumentu φ wynikających z wzoru (87) jest zawsze od całkowitej wielokrotności liczby 2π odmienna spostrzegamy natychmiast, iż wzór (88) daje na ξ tylko nierówne pomiędzy sobą wartości. Skoro zatem we wzorze (88) położymy kolejno

$$\nu=0,1,2,3,\dots\dots n-1$$

otrzymamy dokładnie n różnych wartości liczby ξ spełniających równanie (82)

W ten sposób doszliśmy do twierdzenia:

XXII. Z każdej liczby zespolonej istnieje zawsze pierwiastek każdego stopnia naturalnego. Pierwiastek n-tego stopnia z danej byle od modułu dodawania odmiennej liczby zespolonej posiada dokładnie tyle nierównych pomiędzy sobą wartości, ile wynosi liczba całkowita dodatnia n *)

---

*) Spostrzegamy z łatwością, iż w razie istnienia równości

Okazaliśmy więc, iż pierwiastkowanie stopnia naturalnego jest w zakresie liczb zespolonych wykonalne bez zastrzeżeń.

Wobec powyższego wnosimy, iż zbiór (Z) liczb zespolonych czyni zadość wszystkim warunkom wymienionym na początku niniejszego rozdziału, stanowiąc w ten sposób żądane rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych.

Ostateczny cel naszych rozważań został przeto osiągnięty w zupełności.

$$z=0$$

równanie

$$\xi^n=0$$

posiada bez względu na wartość liczby całkowitej dodatniej n jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie:

$$\xi=0$$

ROZDZIAŁ IV

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA LICZB ZESPOLONYCH.

§ 31.

Ogólne pojęcie wektora.

W niniejszym rozdziale zamierzamy omówić kwestję geometrycznej interpretacji liczb zespolonych. W tym celu wprowadzimy przedewszystkiem ogólne pojęcie wektora.

Nazywać będziemy wektorem każdy zajmujący określone położenie w przestrzeni odcinek prostolinjowy, którego jeden punkt końcowy został na mocy przyjęcia pewnej umowy wyróżniony od drugiego punktu końcowego.

Nazwijmy jeden z wyróżnionych w ten sposób punktów początkiem, drugi zaś końcem rzeczonego wektora.

Oznaczając przez A początek pewnego wektora przez B, zaś jego koniec przyjmujemy za symbol uważanego wektora symbol następujący

$$\overline{AB}$$

Zgodnie z powyższą definicją symbolu wektora, symbole

$$\overline{AB} \quad \text{i} \quad \overline{BA}$$

oznaczają dwa odmienne od siebie wektory jakkolwiek każdy z powyższych symbolów uważany za symbol odcinka prostolinjowego przedstawia jeden i ten sam odcinek.

Początek i koniec wektora obejmujemy wspólną nazwą jego punktów końcowych. Za zbiór wszystkich punktów uważanego wektora $\overline{AB}$ przyjmujemy zbiór wszystkich punktów odcinka prostolinjowego AB, którego punkty końcowe zlewają się z punktami końcowemi wektora $\overline{AB}$. Długość odcinka prostolinjowego AB nazywać będziemy długością uważanego wektora $\overline{AB}$. Za symbol służący do oznaczenia długości wektora $\overline{AB}$ przyjmiemy symbol następujący

$$|AB|$$

Orzeczenie, iż pewien oznaczony wektor $\overline{AB}$ leży na prostej L przyjmujemy za równoważne orzeczenie, iż zarówno punkt początkowy A jak i punkt końcowy B wektora leżą na uważanej prostej L. Podobnie orzekając, iż pewien wektor $\overline{AB}$ położony jest w pewnej płaszczyźnie P rozumiemy przez to, iż prosta L, na której położony jest uważany wektor $\overline{AB}$ leży w płaszczyźnie P.

Zgodnie z przyjętą powyżej definicją, początek i koniec wektora winny być odmiennemi od siebie punktami. W celu wszakże nadania naszym rozważaniom pożądanej ogólności umówmy się zaliczać do zbioru przedmiotów, którym nadajemy nazwę wektorów także punkty pojedyńcze, przyjmując iż punkt pojedyńczy stanowi jednocześnie początek i koniec wektora. Wektor, którego początek i koniec zlewają się ze sobą nazywać będziemy w odróżnieniu od wektora, którego punkty końcowe są od siebie punktami odmiennemi, wektorem niewłaściwym. W ten sposób nazwa wektor właściwy oznaczać będzie tylko taki wektor, którego początek i koniec nie zlewają się ze sobą *).

Wprowadzimy teraz pojęcie równości dwu wektorów.

Zauważmy przedewszystkiem, iż jakiekolwiek wektory oznaczylibyśmy przez V i V_1, zawsze może zajść jeden i tylko jeden z przypadków następujących:

---

*) Porównaj S. Zaremba: Arytmetyka teoretyczna. Kraków 1912. str. 453 i 454.

1/ Wektory V i V_1 są wektorami właściwemi, zaś proste L i L_1, na których położone są uważane wektory V i V_1 nie zlewają się ze sobą.

2/ Wektory V i V_1 są wektorami właściwemi, a proste L i L_1, na których położone są uważane wektory zlewają się ze sobą, i

3/ Przynajmniej jeden z wektorów V i V_1 jest wektorem niewłaściwym.

Pragnąc podać definicją równości dwu wektorów winniśmy przeto uwzględnić każdy z wymienionych powyżej przypadków.

Przyjmijmy definicję następującą:
Równość

$$V = V_1$$

w pierwszym z przytoczonych przypadków orzeka, iż

1° Proste L i L_1, na których leżą uważane wektory V i V_1 są do siebie równoległe, i

2° Proste przechodzące odpowiednio przez początki i końce uważanych wektorów V i V_1 są do siebie równoległe.

W drugim z wymienionych przypadków równość

$$V = V_1$$

wyraża, iż istnieje taki trzeci wektor

$$X$$

nie leżący na prostej, na której położone są uważane wektory, równy w znaczeniu powyżej określonem każdemu z uważanych wektorów V i V_1

Wreszcie w przypadku trzecim równość

$$V = V_1$$

wyraża, iż każdy z wektorów V i V_1 jest wektorem niewłaściwym.*)

Spostrzegamy natychmiast, iż na mocy przyjętej powyżej definicji równości wektorów, równość

$$V = V_1$$

oraz

*) S. Zaremba. l.c. str. 454.

$$V_1 = V$$

są sobie równoważne.

Okażemy teraz, iż w następstwie przyjętej przez nas definicji równości wektorów, mamy twierdzenie następujące.

I Jakiekolwiek wektory oznaczylibyśmy przez V, V_1 i V_2 równości

$$V = V_1$$

$$V_1 = V_2$$

pociągają za sobą równość

$$V = V_2$$

Zauważmy przedewszystkiem, iż twierdzenie nasze jest oczywiste w przypadku, gdy jeden z wektorów V, V_1 i V_2 jest wektorem niewłaściwym.

Załóżmy przeto, iż każdy z wektorów V, V_1 i V_2 jest wektorem właściwym i połóżmy

$$V = \overline{AA_1}$$

$$V_1 = \overline{BB_1}$$

$$V_2 = \overline{CC_1}$$

Okażemy, iż związki

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} \tag{1}$$

oraz

$$\overline{BB_1} = \overline{CC_1} \tag{2}$$

pociągają za sobą związek

$$\overline{AA_1} = \overline{CC_1} \tag{3}$$

W celu udowodnienia naszego twierdzenia rozpatrzmy przedewszystkiem przypadek, w którym proste L_1, L_2 i L_3, na których położone są odpowiednio wektory $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ nie leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie P

W uważanym przypadku prosta AB w żadnym razie nie zlewa się z prostą CB , prosta zaś A_1B_1 napewno nie zlewa się z prostą C_1B_1. Wobec powyższego, każda z par prostych AB i CB oraz A_1B_1 i C_1B_1 wyznacza pewną płaszczyznę.

Niech P_1 oznacza płaszczyznę przechodzącą przez proste AB i CB , zaś P_2 płaszczyznę przechodzącą przez proste A_1B_1 oraz C_1B_1

Ponieważ zgodnie z definicją równości wektorów mamy wobec (1) i (2)

$$AB \parallel A_1B_1$$

oraz

$$CB \parallel C_1B_1$$

przeto

$$P_1 \parallel P_2$$

Mamy zatem

$$AC \parallel A_1C_1 \tag{4}$$

Z drugiej strony na mocy tejże definicji mamy na podstawie równości (1) i (2)

$$L_1 \parallel L_2$$

oraz

$$L_2 \parallel L_3$$

Skąd otrzymujemy natychmiast

$$L_1 \parallel L_3$$

Związek powyższy łącznie ze związkiem (4) pociąga za sobą równość

$$\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$$

której istnienie pragnęliśmy udowodnić.

Zwróćmy się teraz do przypadku, gdy wszystkie trzy proste L_1 , L_2 i L_3 leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie P i rozpatrzmy przedewszystkiem przypadek, w którym żadne dwie z pośród rzeczonych prostych nie zlewają się ze sobą. Weźmy pod uwagę dowolny punkt X w przestrzeni, nie leżący jednak w płaszczyźnie P.

Powiadam, iż w takim razie istnieje jeden i tylko jeden wektor $\overline{XX_1}$, czyniący zadość równaniu

$$\overline{XX_1} = \overline{BB_1} \qquad (5)$$

W samej rzeczy, o ile rzeczony wektor $\overline{XX_1}$ wogóle istnieje, wówczas na mocy definicji równości wektorów końcem jego X_1 może być tylko punkt przecięcia się prostej Δ przechodzącej przez punkt X i równoległej do prostej L_2 z prostą D_1 przechodzącą przez punkt B_1 i równoległą do prostej D łączącej ze sobą punkty B i X. Ponieważ zgodnie z uczynionem założeniem punkt X nie leży na prostej BB_1, przeto proste Δ i D_1 przecinają się w jednym i tylko w jednym punkcie. O ile więc wektor $\overline{XX_1}$ wogóle istnieje, to końcem jego X_1, jak już zaznaczyliśmy, może być tylko rzeczony punkt przecięcia się ze sobą prostych Δ i D_1. Z drugiej strony, opierając się definicji równości wektorów, spostrzegamy natychmiast, iż oznaczając punkt przecięcia się ze sobą prostych Δ i D_1 przez X_1 wektor $\overline{XX_1}$ czyni zadość równości (5). W ten sposób okazaliśmy, iż istnieje jeden i tylko jeden wektor $\overline{XX_1}$ sprawdzający równość (5).

Dalej z uwagi, iż punkt X nie leży na płaszczyźnie P wynika, iż proste L_1, L_2 i Δ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Nie istnieje więc taka płaszczyzna, w której położone byłyby jednocześnie wektory $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{XX_1}$.

Wobec powyższego, opierając się na udowodnionej powyżej części naszego twierdzenia z równości (1) i (5) otrzymujemy natychmiast

$$\overline{AA_1} = \overline{XX_1} \qquad (6)$$

Analogicznie, ponieważ nie istnieje płaszczyzna, w której byłyby położone jednocześnie wektory $\overline{CC_1}$, $\overline{BB_1}$ oraz $\overline{XX_1}$ ze związków (2) i (5) wnosimy podobnie, iż mamy

$$\overline{CC_1} = \overline{XX_1} \qquad (7)$$

Zważywszy wreszcie, iż wektory $\overline{AA_1}$, $\overline{CC_1}$ i $\overline{XX_1}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie, wnosimy na mocy rozpatrzonego wyżej przypadku, iż równości (6) i (7) pociągają za sobą równość

$$\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$$

W ten sposób prawdziwość naszego twierdzenia została udowodniona również w przypadku, w którym proste Δ_1, Δ_2 i Δ_3 leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie, lecz żadne dwie z pośród nich nie zlewają się ze sobą.

Przejdźmy teraz z kolei do rozpatrzenia przypadku, w którym dwie, lecz tylko dwie z pośród prostych Δ_1, Δ_2 i Δ_3 zlewają się ze sobą.

Zauważmy przedewszystkiem, iż w razie, gdyby rzeczonemi prostemi były proste Δ_1 i Δ_3, na których położone są odpowiednio wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{CC_1}$, wówczas twierdzenie nasze zachodziłoby w omawianym przypadku na podstawie przyjętej definicji równości wektorów /przypadek drugi/.

Pozostają przeto do zbadania jedynie przypadki, w których prosta Δ_2 zlewa się albo z prostą Δ_1, albo z prostą Δ_3. Ponieważ obydwa rzeczone przypadki różnią się pomiędzy sobą jedynie pod względem oznaczeń, przeto wystarczy, gdy zbadamy tylko jeden z nich.

Załóżmy więc, iż prosta Δ_2 zlewa się z prostą Δ_1. W takim razie na mocy definicji równości wektorów istnieje wobec (1) taki wektor $\overline{DD_1}$ nie leżący na prostej Δ_1, iż mamy jednocześnie

$$\overline{AA_1} = \overline{DD_1} \qquad (8)$$

oraz

$$\overline{BB_1} = \overline{DD_1} \qquad (9)$$

O ile wektor $\overline{CC_1}$ nie leży na prostej Δ_1, na której położony jest wektor $\overline{DD_1}$, wówczas żadne dwie z pośród prostych L_3, L_2 i Δ_1 nie zlewają się ze sobą. Wobec powyższego, opierając się na uzyskanym ostatnio wyniku, wnosimy natychmiast, iż równość (2) łącznie z równością (9) pociąga za sobą równość

$$\overline{CC_1} = \overline{DD_1} \tag{10}$$

Ponieważ nadto żadne dwie z pośród prostych L_1, L_3 i Δ_1 nie zlewają się ze sobą, przeto na tej samej zasadzie wnosimy, iż z równości (10) i (8) wynika równość (3), której istnienie mieliśmy udowodnić.

Załóżmy przeto, iż wektor $\overline{CC_1}$ leży na prostej Δ_1. Obierzmy na płaszczyźnie P taki punkt Y nie leżący ani na prostej L_1, ani na prostej Δ_1 i wyznaczmy wektor $\overline{YY_1}$ spełniający równanie

$$\overline{YY_1} = \overline{DD_1} \tag{11}$$

Zgodnie z przeprowadzonemi powyżej rozważaniami żądany wektor $\overline{YY_1}$ bezsprzecznie istnieje.

Wobec powyższego z równości (11) oraz równości (8) i (9) wynika, iż mamy

$$\overline{AA_1} = \overline{YY_1} \tag{12}$$

oraz

$$\overline{BB_1} = \overline{YY_1} \tag{13}$$

Niech Δ_2 oznacza prostą, na której położony jest wektor $\overline{YY_1}$

Ponieważ żadne dwie z pośród prostych L_2, L_3 i Δ_2 nie zlewają się ze sobą, przeto mamy wobec (2) i (13)

$$\overline{CC_1} = \overline{YY_1} \tag{14}$$

Z drugiej strony z uwagi, iż każda z prostych L_1, L_3 i Δ_2 jest prostą od pozostałych dwu odmienną z równości (12) i (14) wnosimy, iż mamy

$$\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$$

W ten sposób uzasadniliśmy nasze twierdzenie w uważanym przypadku.

Pozostaje przeto do rozpatrzenia jedynie przypadek, w którym wszystkie trzy proste L_1, L_2 i L_3 zlewają się ze sobą.

Niech L oznacza prostą, na której położone są jednocześnie wektory $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$. W uważanym przypadku równość (1) orzeka, iż istnieje taki wektor $\overline{EE_1}$ nie leżący na prostej L, iż mamy

$$\overline{AA_1} = \overline{EE_1} \tag{15}$$

oraz

$$\overline{BB_1} = \overline{EE_1} \tag{16}$$

Podobnie równość (2) wyraża, iż istnieje wektor $\overline{FF_1}$ nie położony na prostej L sprawdzający jednocześnie równości

$$\overline{BB_1} = \overline{FF_1} \tag{17}$$

oraz

$$\overline{CC_1} = \overline{FF_1} \tag{18}$$

Ponieważ nie istnieje taka prosta, na której leżałyby jednocześnie wektory $\overline{BB_1}$, $\overline{EE_1}$ i $\overline{FF_1}$ przeto na mocy już uzyskanych wyników wnosimy, iż z równości (16) i (17) mamy

$$\overline{EE_1} = \overline{FF_1} \tag{19}$$

Dalej z uwagi, iż wszystkie trzy proste, na których położone są wektory $\overline{CC_1}$, $\overline{EE_1}$ i $\overline{FF_1}$ w żadnym razie zlewać się ze sobą nie mogą, z równości (19) i (18) otrzymujemy

$$\overline{CC_1} = \overline{EE_1} \tag{20}$$

Zważywszy wreszcie, iż wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{CC_1}$ leżą na prostej L w każdym razie od prostej, na kterej położony jest wektor $\overline{EE_1}$ odmiennej spostrzegamy natychmiast, opierając się na definicji równości wektorów /przypadek drugi/, iż mamy

$$\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$$

W ten sposób twierdzenie nasze zostało udowodnione w zupełności $^{x)}$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

II Dwa równe pomiędzy sobą wektory, których wspólnym początkiem jest jeden i ten sam punkt przestrzeni zlewają się ze sobą.

Zauważmy przedewszystkiem, iż twierdzenie nasze jest oczywiste w przypadku, gdy jeden z uważanych wektorów jest wektorem niewłaściwym. Załóżmy przeto, iż obydwa wektory są wektorami właściwemi i oznaczmy przez $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ dwa równe sobie wektory, których początki leżą w jednym i tym samym punkcie A. Ponieważ na mocy definicji równości wektorów proste, na których położone są dwa równe sobie wektory albo zlewają się ze sobą, albo są do siebie równoległe dalej z uwagi, iż proste L_1 i L_2 na których położone są odpowiednio wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ jako posiadające wspólny punkt A w żadnym razie równoległemi być nie mogą, przeto ze względu na równość

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$$

rzeczone proste zlewają się ze sobą.

Wobec powyższego, opierając się na definicji równości dwu wektorów wnosimy, iż istnieje taki trzeci wektor $\overline{BB_1}$ nie położony na prostej L, na której leżą jednocześnie wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$, iż mamy jednocześnie

---

$^{x)}$ Dowód powyższy, jak również dowody trzech twierdzeń następnych, przytoczyliśmy według prof. S.Zaremby /Arytmetyka teoretyczna. Rozdział XII. Str. 455 i nast./

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$$

oraz

$$\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$$

Z równości powyższych otrzymujemy natychmiast

$$AB \parallel A_1B_1$$

oraz

$$AB \parallel A_2B_1$$

Skąd z uwagi, iż punkty A_1 i A_2 leżą, jak to okazaliśmy, wyżej na jednej prostej, wynika iż proste A_1B_1 i A_2B_2 zlewają się ze sobą. Wobec powyższego wnosimy natychmiast, iż punkty A_1 i A_2 przecięcia się prostych A_1B_1 i A_2B_2 również zlewają się ze sobą. Wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ zlewają się więc ze sobą w zupełności. W ten sposób twierdzenie nasze zostało udowodnione.

Przejdźmy teraz do dowodu następującego, niezmiernie ważnego twierdzenia:

III Każdemu punktowi A przestrzeni odpowiada jeden i tylko jeden wektor, którego początek leży w uważanym punkcie A i który równa się dowolnie danemu wektorowi V.

Twierdzenie nasze jest oczywiście prawdziwe w przypadku gdy wektor V jest wektorem niewłaściwym. Załóżmy przeto, iż tak nie jest, a więc, iż wektor V jest oznaczonym wektorem właściwym. W razie, gdy punkt A nie leży na prostej L, na której położony jest wektor V twierdzenie nasze uzasadniliśmy już w tej części dowodu twierdzenia I, w której rozpatrywaliśmy przypadek, gdy żadne dwie z pośród prostych L_1, L_2 i L_3 położonych w jednej płaszczyźnie nie zlewają się ze sobą. Załóżmy przeto, iż punkt A leży na prostej L, na której położony jest wektor V i obierzmy dowolny nie leżący na prostej L punkt X. Na mocy omówionego wyżej przypadku możemy zawsze wyznaczyć wektor $\overline{XX_1}$ równy danemu wektorowi V. Dalej, opierając się na tej samej zasadzie, możemy zawsze wyznaczyć wektor $\overline{AA_1}$ czyniący zadość równości

$$\overline{AA_1} = \overline{XX_1}$$

Ponieważ wektor $\overline{XX_1}$ spełnia nadto równość

$$\overline{XX_1} = V$$

przeto wektor $\overline{AA_1}$ jest równy danemu wektorowi V.

W ten sposób okazaliśmy, iż wektor $\overline{AA_1}$, którego początek leży w danym punkcie A i który jest równy uważanemu wektorowi V istnieje niezawodnie.

Łatwo spostrzec, iż wektor $\overline{AA_1}$ jest jedynym wektorem spełniającym wszystkie warunki naszego twierdzenia. W samej rzeczy, gdyby bowiem istniały dwa wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ spełniające równości

$$\overline{AA_1} = V$$

oraz

$$\overline{AA_2} = V$$

wówczas mielibyśmy

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$$

i wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ na mocy udowodnionego wyżej twierdzenia II zlewałyby się ze sobą. Prawdziwość naszego twierdzenia została przeto udowodniona.

Spostrzegamy z największą łatwością, iż jako szczególny przypadek powyższego twierdzenia mamy twierdzenie:

III Każdemu punktowi A pewnej oznaczonej płaszczyzny odpowiada jeden i tylko jeden wektor położony w uważanej płaszczyźnie P, którego początek zlewa się z punktem A i który jest równy dowolnie danemu wektorowi V leżącemu w płaszczyźnie P.

Jako ostatnie twierdzenie z pośród twierdzeń dotyczących równości wektorów udowodnimy twierdzenie następujące:

IV Jeżeli $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ są dwoma wektorami właściwemi czyniącemi zadość równości

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$$

wówczas wektory $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ spełniają równość

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$$

Zauważmy przedewszystkiem, iż w razie, gdy proste L_1 i L_2, na których położone są odpowiednio wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ nie zlewają się ze sobą twierdzenie nasze zachodzi na podstawie samej tylko definicji równości wektorów /przypadek pierwszy/. Załóżmy przeto, iż wektory $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ są dwoma wektorami właściwemi położonemi na jednej i tej samej prostej L.

W takim razie na mocy definicji równości wektorów istnieje taki wektor $\overline{XX_1}$ nie położony na prostej L, iż mamy

$$\overline{AA_1} = \overline{XX_1}$$

oraz

$$\overline{BB_1} = \overline{XX_1}$$

Obierzmy dowolny nie leżący na płaszczyźnie P, na której położone są wektory $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{XX_1}$ punkt Y i poprowadźmy przez uważany punkt płaszczyznę Q równoległą do płaszczyzny P. Następnie przez punkty B i X poprowadźmy odpowiednio proste Δ_1 i Δ_2 równoległe do prostej AY. Niech Y_1 i Y_2 oznaczają odpowiednio punkty przecięcia się prostych Δ_1 i Δ_2 z płaszczyzną Q.

Mamy zatem

$$\overline{AB} = \overline{YY_1} \tag{21}$$

oraz

$$\overline{YY_2} = \overline{AX} \tag{22}$$

$$\overline{Y_2Y_1} = \overline{XB} \tag{23}$$

Z drugiej strony mamy niezawodnie

$$\overline{AX} = \overline{A_1X_1} \tag{24}$$

oraz

$$\overline{XB} = \overline{X_1B_1} \tag{25}$$

Zestawiając ze sobą równości (22) i (24) oraz (23) i (25) otrzymamy

$$\overline{YY_2} = \overline{A_1X_1}$$

oraz

$$\overline{Y_2Y_1} = \overline{X_1B_1}$$

Z równości powyższych, opierając się na definicji równości wektorów, otrzymujemy natychmiast

$$A_1Y \parallel X_1Y_2$$

oraz

$$X_1Y_2 \parallel B_1Y_1$$

Wobec powyższego mamy

$$A_1Y \parallel B_1Y$$

Ponieważ zaś nadto

$$A_1B_1 \parallel YY_1$$

przeto, powołując się na definicję równości wektorów możemy napisać

$$\overline{A_1B_1} = \overline{YY_1}$$

Z równości powyższej oraz równości (21) wynika równość:

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$$

której istnienie mieliśmy uzasadnić.

W ten sposób twierdzenie nasze zostało udowodnione.

§ 32.

Pojęcie kierunku wektora.

Przejdziemy obecnie do omówienia pojęcia kierunku wektora.

Weźmy pod uwagę dwa wektory właściwe $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ leżące na prostych do siebie równoległych lub zlewających się ze sobą i wyznaczmy trzeci wektor $\overline{AB'}$ czyniący zadość równaniu

$$\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$$

Spostrzegamy z łatwością, iż koniec B' wektora $\overline{AB'}$ będzie położony na prostej AB. Wobec powyższego zajść może jeden ale tylko jeden z dwu następujących przypadków.

1° Punkt A nie jest położony pomiędzy punktami B i B'.

2° Punkt A jest położony pomiędzy punktami B i B'.

W pierwszym z powyższych przypadków powiadamy, iż kierunek wektora $\overline{A_1B_1}$ jest zgodny z kierunkiem wektora $\overline{AB}$, w drugim zaś - iż kierunek wektora $\overline{A_1B_1}$ jest przeciwny kierunkowi wektora $\overline{AB}$.*)

Spostrzegamy natychmiast, iż w następstwie przyjętej powyżej definicji mamy twierdzenie następujące:

Jeżeli kierunek pewnego wektora właściwego V jest zgodny z kierunkiem pewnego innego wektora właściwego V_1, wówczas kierunek wektora V_1 jest zgodny z kierunkiem wektora V.

Jeżeli kierunek pewnego wektora właściwego V jest zgodny z kierunkiem wektora właściwego V_1, zaś kierunek wektora V_1 jest zgodny z kierunkiem pewnego trzeciego wektora właściwego V_2, wówczas kierunek wektora V jest zgodny z kierunkiem wek-

*) Por. S. Zaremba. Arytmetyka teoretyczna. Str. 465.

tora V_2 *)

Dwa wektory właściwe posiadające zgodne kierunki nazywać będziemy wektorami współkierunkowemi.

Wektor niewłaściwy uważamy za pozbawiony kierunku.

Z przytoczonej definicji zgodności kierunków dwu wektorów oraz z pierwszego z podanych wyżej twierdzeń wynika, iż każde dwa dowolnie dane wektory właściwe położone na prostych równoległych lub na prostych zlewających się ze sobą, są albo wektorami współkierunkowemi albo wektorami o kierunkach przeciwnych; odwrotnie, dwa wektory współkierunkowe lub kierunków przeciwnych mogą leżeć tylko albo na prostych do siebie równoległych albo na prostych zlewających się ze sobą.

Równe sobie wektory właściwe są oczywiście zawsze wektorami współkierunkowemi.

§ 33.

Zbiór uporządkowany. Pojęcie osi.

Zanim przystąpimy do zbudowania teorji działań zasadniczych na wektorach zajmiemy się omówieniem pewnych elementarnych pojęć, na których oprzemy nasze dalsze rozważania.

Przedewszystkiem wprowadźmy pojęcie zbioru uporządkowanego.

Weźmy pod uwagę pewien zbiór E.

Dany zbiór E nazywamy zbiorem uporządkowanym, jeżeli na mocy pewnej definicji D z dwu dowolnych byle od siebie odmiennych elementów a i b uważanego zbioru jeden stale poprzedza drugi.

Okoliczność polegającą na tem, iż pewien oznaczony element a zbioru E poprzedza pewien drugi od a odmienny element b tegoż zbioru wyrażamy na piśmie zapomocą symbolu

$$a \prec b \qquad (26)$$

---

*) Dowód powyższych twierdzeń znajdzie czytelnik we wspomnianem dziele prof. Zaremby /str.466 i nast./.

który czytamy " a poprzedza b " lub " b następuje po a ". W razie istnienia związku (26) element a nazywamy elementem wcześniejszym, element zaś b elementem późniejszym zbioru E.

Spostrzegamy natychmiast, iż definicja D ustalająca uporządkowanie elementów danego zbioru winna być tak zbudowana, aby dla każdych trzech dowolnych elementów a, b i c zbioru E zachodziły własności:

1° Związki

$$a \prec b$$

oraz

$$b \prec a$$

wykluczają się wzajemnie

2° Związki

$$a \prec b$$

oraz

$$b \prec c$$

pociągają za sobą związek

$$a \prec c$$

O ile w danym zbiorze uporządkowanym E istnieje element, od którego nie istnieje w uważanym zbiorze element wcześniejszy, wówczas rzeczony ele- nazywamy pierwszym elementem zbioru E. W razie zaś, gdy w zbiorze E istnieje element, od którego niema w uważanym zbiorze elementu późniejszego, wówczas element taki nazywamy ostatnim elementem uważanego zbioru E. x)

Opierając się na pojęciu zbioru uporządkowanego, omówimy nieco bliżej pojęcie osi.

Weźmy pod uwagę pewną oznaczoną płaszczyznę P. Niech L oznacza dowolną prostą leżącą na płaszczyźnie P. Uważajmy dalej pewien wektor wła-

---

x) Por. W. Sierpiński. Zarys teorji mnogości. Cz. I. Liczby pozaskończone. Wydanie drugie. Str. 111.

ściwy $\overline{AB}$ położony na prostej L.

Przyjmijmy umowę następującą. Orzeczenie, iż z dwu niezlewających się ze sobą punktów Q i R prostej L punkt Q poprzedza punkt R jest równoważne orzeczeniu, iż wektor $\overline{QR}$ jest wektorem współkierunkowym z wektorem właściwym $\overline{AB}$.*)

Umowa powyższa ustala, jak łatwo się o tem przekonać, pewien oznaczony porządek następstwa punktów położonych na prostej L, czyli ich uporządkowanie.

W samej rzeczy, spostrzegamy z największą łatwością, iż jakiekolwiek dwa odmienne od siebie punkty prostej L oznaczylibyśmy przez X i Y jeden, lecz tylko jeden z wektorów $\overline{XY}$ i $\overline{YX}$ będzie wektorem współkierunkowym z wektorem właściwym $\overline{AB}$, a więc jeden z uważanych punktów położony będzie przed drugim.

Z drugiej strony, zakładając, iż pewien punkt Q położony na prostej L poprzedza pewien inny punkt R poprzedzający z kolei trzeci punkt S położony na prostej L, spostrzegamy z łatwością, iż wektory $\overline{QR}$ oraz $\overline{RS}$ są wektorami współkierunkowymi z uważanym wektorem $\overline{AB}$. Z uwagi powyższej wynika, iż wektory $\overline{RQ}$ i $\overline{RS}$ posiadają kierunki przeciwne, a więc, iż punkt R leży pomiędzy punktami Q i S.

Wobec powyższego wektory $\overline{QR}$ i $\overline{QS}$ będą wektorami współkierunkowemi, ponieważ zaś wektory $\overline{QR}$ i $\overline{AB}$ są, zgodnie z założeniem, wektorami współkierunkowemi, przeto wektory $\overline{QS}$ i $\overline{AB}$ są również wektorami współkierunkowemi. Punkt Q poprzedza więc punkt S.

Przyjęta przez nas umowa ustala więc istotnie

---

*) Por. S. Zaremba. Arytmetyka teoretyczna. Str. 468.

pewne uporządkowanie punktów prostej L.

Czynność polegającą na uporządkowaniu punktów oznaczonej prostej nazywamy skierowaniem prostej.

Prostej, której punkty zostały w pewien sposób uporządkowane, nadajemy nazwę osi.

Spostrzegamy natychmiast, iż warunkiem dostatecznym do określenia oznaczonej osi jest wyznaczenie dwu odmiennych od siebie punktów osi wraz z zaznaczeniem kolejności następowania po sobie rzeczonych punktów. Za symbol osi przechodzącej przez dwa punkty A i B następujące po sobie w wymienionym wyżej porządku przyjmujemy symbol AB. *)

Weźmy pod uwagę prostą L i oznaczmy przez A i B dwa odmienne od siebie punkty położone na uważanej prostej. Punkty prostej L możemy uszeregować w dwojaki sposób, przyjmując za każdym razem przeciwny porządek następstwa po sobie punktów A i B. W ten sposób każdej prostej odpowiadać będą dwie przeciwnie skierowane osie AB i BA. W celu odróżnienia od siebie obydwu rzeczonych kierunków, nadajemy jednemu z nich nazwę dodatniego, drugiemu zaś - ujemnego. Kwestja, który z dwu kierunków przyjmiemy za dodatni, który zaś za ujemny, jest kwestją najzupełniej obojętną i zależy całkowicie od przyjętej każdorazowo umowy.

§ 34.

Dodawanie i odejmowanie wektorów.

Poprzestając na przytoczonych powyżej uwagach, przystąpimy obecnie do zbudowania teorji działań zasadniczych na wektorach.

Zauważmy przedewszystkiem, iż ze względu na specjalny cel naszych rozważań nie mamy potrzeby rozpatrywania rzeczonych działań w przypadku naj-

---

*) Symbol powyższy jest identyczny z symbolem prostej nieograniczonej, przechodzącej przez punkty A i B. O ile wszakże do oznaczenia prostej nieograniczonej, przechodzącej przez punkty A i B posługujemy się jednocześnie bez różnicy symbolami AB i BA o tyle w przypadku osi symbole AB i BA oznaczają dwa odmienne od siebie twory geometryczne, z których każdy zlewa się z prostą nieograniczoną, przechodzącą przez uważane punkty A i B.

ogólniejszym, a więc w przypadku, gdy zbiór wektorów obejmowałby wszystkie wektory bez względu na ich położenie w przestrzeni. Wystarczy mianowicie, gdy ograniczymy nasze rozważania jedynie do zbioru (V) wektorów położonych w pewnej oznaczonej jednej i tej samej płaszczyźnie P.

Zgodnie z rozważaniami § 10 /str.28/ zbudujemy teorję działań zasadniczych dla zbioru (V) wektorów, skoro tylko ustalimy co należy rozumieć przez wyrażenia "suma" i "iloczyn" dwu wektorów należących do zbioru (V)

Niech będą dane dwa wektory a i b należące do zbioru (V). Obierzmy na płaszczyźnie P dowolny punkt O i zbudujmy wektory $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ równe odpowiednio danym wektorom a i b. Przyjmując punkt O za punkt początkowy, punkt zaś B za punkt końcowy odcinka prostolinjowego OB otrzymamy pewien ściśle oznaczony wektor $\overline{OB}$ będący oczywiście elementem zbioru (V)

Sumą

$$a+b$$

dwu wektorów a i b należących do zbioru (V) nazywać będziemy każdy wektor c równy otrzymanemu w powyższy sposób wektorowi $\overline{OB}$. Spostrzegamy natychmiast, iż przyjęta powyżej definicja czyni zadość obydwu warunkom przytoczonym w § 1 /str. 2 /, do których postanowiliśmy się stosować przy podawaniu definicji jakiegokolwiek działania. Z drugiej strony, rzeczona definicja, jak łatwo się o tem przekonać, określa działanie dodawania wektorów, jako działanie jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.

Okażemy teraz, iż dodawanie wektorów posiada własność łączności.

Niech a, b i c oznaczają trzy dowolnie dane wektory, należące do zbioru (V). Obierzmy na płaszczyźnie P dowolny punkt O i zbudujmy wektory $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ spełniające równości

$$\overline{OA}=a$$

$$\overline{AB}=b$$

$$BC = c$$

Na mocy definicji sumy dwu wektorów mamy

$$a + b = \overline{OB}$$

oraz

$$\overline{OB} + c = \overline{OC}$$

Mamy zatem

$$(a+b)+c = \overline{OC} \qquad (27)$$

Z drugiej strony mamy niezawodnie

$$b + c = \overline{AC}$$

oraz

$$a + \overline{AC} = \overline{OC}$$

Mamy więc

$$a + (b+c) = \overline{OC} \qquad (28)$$

Z równości (27) i (28) otrzymujemy natychmiast

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Równość powyższa, łącznie z twierdzeniem II § 7 /str. 14/ wyraża właśnie twierdzenie, którego prawdziwość pragnęliśmy uzasadnić.

Udowodnimy dalej, iż dodawanie wektorów posiada własność przemienności.

Niech, jak wyżej, a i b oznaczają dwa dowolnie dane wektory, należące do zbioru (V). Oznaczmy przez O dowolny punkt płaszczyzny P i zbudujmy dwa wektory $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ określone przez równania

$$\overline{OA} = a \qquad (29)$$

oraz

$$\overline{AB} = b \qquad (30)$$

Na mocy definicji sumy dwu wektorów należących do zbioru (V) mamy

$$a+b=\overline{OB} \tag{31}$$

Weźmy pod uwagę wektor $\overline{OB'}$ czyniący zadość równości

$$\overline{OB'}=b \tag{32}$$

Z równości powyższej oraz równości (29) mamy na mocy twierdzenia I

$$\overline{AB}=\overline{OB'} \tag{33}$$

Ponieważ, zgodnie z udowodnionem powyżej twierdzeniem IV /str. / równość (33) pociąga za sobą równość

$$\overline{OA}=\overline{B'B}$$

przeto, z uwagi na równość (29)

$$\overline{B'B}=a$$

Wobec powyższego, ze względu na równość (32) otrzymujemy

$$b+a=\overline{OB}$$

Z równości zaś powyższej oraz równości (31) wynika równość

$$a+b=b+a$$

wyrażająca, iż dodawanie wektorów posiada własność przemienności w przypadku dwu składników.

Wobec powyższego, opierając się na udowodnionej powyżej łączności dodawania wektorów, na mocy twierdzenia III § 7 /str.17/, wnosimy natychmiast, iż działanie dodawania wektorów posiada własność przemienności w przypadku gdy liczba składników równa się jakiejkolwiek liczbie oznaczonej n.

W ten sposób twierdzenie nasze zostało udowodnione.

Spostrzegamy z największą łatwością, iż moduł dodawania wektorów istnieje i równa się wspólnej wartości wektorów niewłaściwych.

Dwa wektory, których suma równa się modułowi dodawania wektorów, nazywać będziemy wektorami przeciwnemi. Każdemu wektorowi $\overline{AB}$ należącemu do zbioru (V) odpowiada oczywiście wektor przeciwny również do zbioru (V) należący. Opierając się na definicji wektorów przeciwnych, spostrzegamy natychmiast, iż zbiór wszystkich wektorów przeciwnych względem wektora $\overline{AB}$ jest identyczny ze zbiorem wszystkich wektorów równych wektorowi $\overline{BA}$. Z uwag powyższych wynika, iż wektor przeciwny względem wektora niewłaściwego jest sam wektorem niewłaściwym. W tym przypadku obydwa wektory przeciwne są sobie równe.

Zauważmy dalej, iż mamy twierdzenie następujące:

Jeżeli dwa wektory b i b' czynią zadość nierówności

$$b \neq b'$$

wówczas jakikolwiek wektor oznaczylibyśmy przez a mamy zawsze

$$a + b \neq a + b'$$

Z twierdzenia powyższego oraz z uwagi, iż działanie dodawania wektorów posiada własność przemienności wynika, zgodnie z ogólnemi zasadami omówionemi przez nas w § 8 /str. 22 i nast./, iż istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania wektorów, przyczem działanie to w razie wykonalności jest działaniem jednoznacznem.

Powiadam, iż działanie odejmowania wektorów wykonalne jest bez zastrzeżeń.

W samej rzeczy, weźmy pod uwagę dwa dowolnie dane wektory a i b należące do zbioru (V). Oznaczmy przez b' wektor przeciwny względem wektora b.

Na mocy udowodnionej wyżej własności łączności dodawania wektorów mamy niezawodnie

$$(a + b') + b = a + (b' + b) \qquad (34)$$

Ponieważ zaś, zgodnie z definicją wektora przeciwnego

$$b+b'=\mu$$

gdzie przez μ oznaczyliśmy moduł dodawania wektorów, przeto równość (34) jest równoważna równości

$$(a+b')+b=a+\mu$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$(a+b')+b=a$$

Równość ostatnia na mocy definicji odejmowania /str.38 i nast./ jest równoważna równości

$$a-b=a+b' \qquad (35)$$

Ponieważ wektor b' przeciwny względem danego wektora b zawsze istnieje, przeto suma $a+b'$ istnieje niezawodnie. Wobec powyższego na podstawie udowodnionej wyżej równości (35) wnosimy,iż różnica $a-b$ istnieje w każdym razie. Działanie odejmowania wektorów jest więc, zgodnie z zapowiedzią działaniem wykonalnem bez zastrzeżeń.

Reasumując uzyskane powyżej wyniki stwierdzamy, iż działanie odejmowania wektorów jest działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń,przyczem daje się sprowadzić do dodawania przez podstawienie w miejsce odjemnika,wektora względem niego przeciwnego.

§ 35.

Problem mierzenia.

Pozostawiając narazie otwartą kwestję mnożenia wektorów omówimy pokrótce problem mierzenia,w znaczeniu jakie nadajemy mu w arytmetyce.

Z czysto arytmetycznego punktu widzenia, zagadnienie mierzenia polega na ustanowieniu , przy zachowaniu pewnych zasad ogólnych,dla danego zbioru E przedmiotów, nie będących liczbami *) ,zbioru imion pozwalającego w razie przyjęcia pewnego mniej lub

*) Zbiór E może nie być zbiorem wielkości.

więcej dowolnie obranego elementu $\mathcal{E}$ zbioru E jako odpowiadającego modułowi mnożenia liczb należących do danego zbioru L, podporządkować każdemu innemu elementowi e zbioru E oznaczoną liczbę ℓ należącą do zbioru L.

W razie rozwiązania problemu mierzenia elementów zbioru E, elementowi $\mathcal{E}$ nadajemy nazwę jednostki miary elementów zbioru E, liczbę zaś ℓ należącą do zbioru L i odpowiadającą pewnemu oznaczonemu elementowi e zbioru E nazywamy miarą elementu e. Zgodnie z powyższem, miara jednostki miary $\mathcal{E}$ elementów zbioru E jest równa modułowi mnożenia elementów zbioru liczb L.

Ze względu na specjalny cel niniejszego rozdziału, nie mamy potrzeby omawiać problemu mierzenia w postaci najogólniejszej, ograniczymy się przeto do rozpatrzenia zagadnienia w formie wystarczającej do zupełnego rozwiązania problemu mierzenia wektorów, który doprowadzi nas bezpośrednio do geometrycznej interpretacji liczb zespolonych.

Przy rozwiązywaniu problemu mierzenia elementów pewnego zbioru E liczby należące do zbioru L które mają być miarami elementów zbioru E określamy w ten sposób, aby były spełnione dwa następujące twierdzenia: [x]

---

[x] Należy zaznaczyć, iż problem mierzenia elementów pewnego zbioru przyjmuje różne postacie, zależnie od charakteru zbioru, dla którego pragniemy podać rozwiązanie zagadnienia mierzenia oraz od rodzaju liczb, któremi mamy zamiar posługiwać się przy mierzeniu elementów uważanego zbioru.

Układ warunków, który zamierzamy podać poniżej, obowiązuje ściśle tylko w przypadku, gdy zbiór L liczb jest zbiorem liczb rzeczywistych lub zespolonych pospolitych. W przypadku, gdy liczby, któremi posługujemy się przy mierzeniu elementów pewnego zbioru nie są ani liczbami rzeczywistemi, ani liczbami zespolonemi, liczby mające być miarami elementów danego zbioru określamy w ten sposób, aby były spełnione warunki najbardziej zbliżone do tych, którym czynią zadość bądź liczby rzeczywiste, bądź zespolone pospolite, uważane w charakterze miar elementów pewnego oznaczonego zbioru.

I Jeżeli przy oznaczonej jednostce miary elementów zbioru E liczba l należąca do zbioru L jest miarą oznaczonego elementu e zbioru E, wówczas każda liczba l' należąca do zbioru L, czyniąca zadość równości

$$l' = l$$

i tylko liczba spełniająca powyższą równość jest również miarą uważanego elementu e *)

II Jeżeli przez ε i ε' oznaczymy dwa elementy zbioru E, z których każdy może być przyjęty za jednostkę miary, zaś przez e dowolnie obrany element uważanego zbioru, wówczas oznaczając przez l miarę elementu e w razie przyjęcia elementu ε za jednostkę miary, przez l' miarę elementu e w razie przyjęcia elementu ε' za jednostkę miary, wreszcie przez λ - miarę elementu ε, w razie przyjęcia za jednostkę miary elementu ε', liczby l, l' i λ należące do zbioru liczb L czynią zadość równości

$$l' = l\lambda$$

Łatwo spostrzec, iż bezpośrednim następstwem pierwszego z powyższych twierdzeń jest przyjęcie umowy następującej:

Orzeczenie, iż dwa rozwiązania problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru E nie różnią się pomiędzy sobą wyraża, iż zachodzą okoliczności następujące:

1° Zbiór wszystkich tych elementów zbioru E, z których każdy może być przyjęty za jednostkę miary, nie ulega zmianie przy przejściu od jednego rozwiązania problemu mierzenia elementów zbioru E do drugiego

i 2° Po ustaleniu jednostki miary obydwa rozwiązania dają równe sobie liczby na miarę każdego dowolnie obranego elementu zbioru E.

Jeżeli zbiór E, którego elementy mamy poddać mierzeniu, jest zbiorem wielkości, wówczas wymagamy jeszcze, aby zachodziło twierdzenie następujące:

---

*) Twierdzenie powyższe stanowi konieczny warunek, aby trzy twierdzenia następne nie były pozbawione treści.

III Przy oznaczonej jednostce miary, miary równych sobie elementów zbioru E są sobie równe.*)

Ponieważ miara elementu ε zbioru E, przyjętego za jednostkę miary, równa się modułowi mnożenia liczb należących do zbioru L, przeto z twierdzenia powyższego wynika, iż miara każdego elementu ε' zbioru E równego elementowi ε równa się modułowi mnożenia zbioru liczb L.

Jeżeli zbiór E jest zbiorem wielkości, dla którego zostało określone działanie dodawania, to do warunków poprzedzających dołączamy jeszcze warunek, aby było spełnione twierdzenie następujące:

IV Przy oznaczoczej jednostce miary, miara sumy skończonej liczby elementów zbioru E równa się sumie miar składników.**)

---

*) Należy zaznaczyć, iż w razie, gdy dla elementów zbioru E nie zostało określone, co należy rozumieć przez wyrażenia postaci

$$e < e'$$

bynajmniej nie jest wykluczonem, aby miary nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru E były pomiędzy sobą równe.

**) Jeżeli dla elementów zbioru E zostało określone znaczenie wyrażeń postaci

$$e < e'$$

wówczas wymagamy nadto, aby było spełnione twierdzenie:

V Jeżeli przez e, e' i x oznaczymy trzy elementy zbioru E czyniące zadość nierówności

$$e < x < e'$$

wówczas przy oznaczonej jednostce miary, miara ξ elementu x spełnia nierówność

$$l < \xi < l'$$

gdzie przez l i l' oznaczyliśmy odpowiednio miary elementów e i e' zbioru E.

Spostrzegamy natychmiast, iż przytoczony układ twierdzeń nie obejmuje warunku, aby w razie, gdy działanie mnożenia elementów zbioru , którego elementy mamy poddać mierzeniu, zostało określone, miarą iloczynu dwu elementów zbioru E równała się iloczynowi miar czynników.

Zaznaczamy jednak, iż przypadki w których byłoby możliwem określenie mnożenia elementów oznaczonego zbioru przedmiotów, nie będących oczywiście liczbami, niezależnie od rozwiązania poprzednio problemu mierzenia elementów rzeczonego zbioru stanowią przypadki, w których przytoczony powyżej układ warunków określa w zupełności rozwiązanie problemu mierzenia elementów uważanego zbioru. Z uwagi powyższej wynika, iż dołączenie do układu warunków określających rozwiązanie problemu mierzenia dodatkowego żądania, aby miara iloczynu dwu elementów, należących do danego zbioru, była równa iloczynowi miar czynników, byłoby albo zbytecznem albo mogłoby uniemożliwić rozwiązanie zagadnienia mierzenia elementów uważanego zbioru.

Pragnąc jednak uniemożliwić przypadek, w którym miara iloczynu dwu elementów pewnego zbioru nie była równa iloczynowi miar czynników, określamy iloczyn dwu elementów zbioru, dla którego elementów został rozwiązany problem mierzenia, jako ten element uważanego zbioru, którego miara jest równa iloczynowi miar czynników. Definicja powyższa wymaga oczywiście uprzedniego oznaczenia jednostki miary elementów omawianego zbioru.

Łatwo spostrzec, iż określone w powyższy sposób działanie mnożenia czyni zadość wszystkim warunkom, do których postanowiliśmy się stosować w Rozdziale I przy określaniu mnożenia elementów pewnego oznaczonego zbioru.

Z przytoczonych powyżej uwag wynika, iż w stosunku do problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru, dwa izomorficzne zbiory liczb są sobie równoważne. Okoliczność powyższa potwierdza doniosłość znaczenia pojęcia izomorfizmu dwu zbiorów.

Jest rzeczą oczywistą, iż nie mamy z góry pewności, czy jest rzeczą możliwą rozwiązanie zagadnienia mierzenia elementów oznaczonego zbioru w sposób zgodny z przytoczonemi powyżej zasadami, dlatego też podając rozwiązanie omawianego zagadnienia zmuszeni jesteśmy, w każdym poszczególnym przypadku, podać dowód, iż dane rozwiązanie czyni zadość wszystkim wspomnianym warunkom. *)

§ 36.

Pojęcie płaszczyzny zorjentowanej.

Weźmy pod uwagę oznaczoną płaszczyznę P. Obrawszy na uważanej płaszczyźnie P z dwu prostopadłych do siebie osi jedną oś X_1 za oś odciętych, drugą zaś Y_1 za oś rzędnych, otrzymamy kartezjuszowski układ (X_1, Y_1) spółrzędnych prostokątnych. Uważajmy dalej jakikolwiek drugi układ (X_2, Y_2) spółrzędnych prostokątnych położony w płaszczyźnie P.

Jeżeli przez α oznaczymy dostawę kąta utworzonego przez osie odciętych uważanych układów, przez β' - dostawę kąta utworzonego przez osie rzędnych, przez α' - dostawę kąta utworzonego przez osie Y_1 i X_2, wreszcie przez β - dostawę kąta utworzonego przez osie X_1 i Y_2, wówczas, jak wiadomo z geometrji analitycznej, zależnie od wyboru układu (X_2, Y_2) będziemy mieli albo

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1 \tag{36}$$

albo

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = -1 \tag{37}$$

W przypadku równości (36) powiadamy, iż układ (X_2, Y_2) jest równoskrętny układowi (X_1, Y_1), w przypadku zaś równości (37) orzekamy, iż układ (X_2, Y_2) jest przeciwnieskrętny układowi (X_1, Y_1).

Spostrzegamy z łatwością, iż gdybyśmy zachowując znaczenie symbolów α, β', α i β zamie-

*) Po bliższe szczegóły dotyczące problemu mierzenia odsyłamy czytelnika do dzieła. S. Zaremba. Arytmetyka teoretyczna. Rozdział XII. Problem mierzenia. Str. 115 i nast.

nili pomiędzy sobą uważane układy, a więc w razie jednoczesnej zamiany pomiędzy sobą, z jednej strony symbolów X_1 i X_2, z drugiej zaś - symbolów Y_1 i Y_2, wówczas wartości liczb α i β' nie uległyby żadnej zmianie, wartości zaś liczb α' i β uległyby jedynie zamianie. Wobec powyższego wartość wyrażenia

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta \tag{38}$$

nie uległaby, w razie dokonania rzeczonej zamiany, żadnej zmianie.

Udowodniliśmy zatem dwa twierdzenia następujące:

IX Jeżeli pewien układ U_2 spółrzędnych prostokątnych, położony w oznaczonej płaszczyźnie P jest równoskrętny pewnemu innemu układowi U_1 spółrzędnych prostokątnych położonemu w płaszczyźnie P, wówczas układ U_1 jest równoskrętny układowi U_2.

II Jeżeli pewien układ U_2 spółrzędnych prostokątnych, położony w oznaczonej płaszczyźnie P, jest przeciwnieskrętny pewnemu innemu układowi U_1 spółrzędnych prostokątnych, położonemu w płaszczyźnie P, wówczas układ U_1 jest przeciwnieskrętny układowi U_2.

Twierdzenia powyższe wyrażają własność symetrji pojęcia układów równoskrętnych i przeciwnieskrętnych położonych w jednej i tej samej płaszczyźnie. Opierając się na powyższej własności, możemy orzeczenie, iż pewien układ U_2 spółrzędnych prostokątnych, położony w oznaczonej płaszczyźnie P, jest równoskrętny lub przeciwnieskrętny pewnemu innemu układowi U_1 spółrzędnych prostokątnych położonemu w płaszczyźnie P zastąpić przez orzeczenie, iż uważane układy U_1 i U_2 są równoskrętne względnie przeciwnieskrętne.[x)]

Spostrzegamy z największą łatwością, iż każdy układ spółrzędnych prostokątnych jest sam sobie równoskrętny, bowiem w przypadku, gdy układy (X_2, Y_2)

---

x) Prof. K.Żorawski nazywa układy równoskrętne układami nakładalnemi, - przeciwnieskrętne układami nienakładalnemi /por. K.Żorawski Wykłady geometrji analitycznej. Tom I. Warszawa 1930. Str. 28 i 29/.

oraz (X_1, Y_1) zlewają się ze sobą, wówczas mamy

$$\alpha = \beta' = 1$$

oraz

$$\alpha' = \beta = 0$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1$$

Jeżeli wyrażeniu (38) nadamy nazwę wskaźnika każdego z układów (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) spółrzędnych prostokątnych położonych w pewnej oznaczonej płaszczyźnie P względem drugiego układu, wówczas mamy twierdzenie następujące:

Wskaźnik któregokolwiek z dwu układów (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) spółrzędnych prostokątnych położonych w oznaczonej płaszczyźnie P względem drugiego układu równa się iloczynowi wskaźników każdego z uważanych układów względem jakiegokolwiek trzeciego układu (X, Y) spółrzędnych prostolinjowych położonych w płaszczyźnie P.

W samej rzeczy, zachowując oznaczenia wprowadzone na początku niniejszego paragrafu oznaczmy α_1, α_1' i β_1, β_1' odpowiednio spółczynniki kierunkowe osi X_1 i Y_1, zaś przez α_2, α_2' oraz β_2 i β_2' - spółczynniki kierunkowe osi X_2 oraz Y_2 w układzie (X, Y).

Przy powyższych oznaczeniach mamy na mocy znanych wzorów geometrji analitycznej *)

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1'\alpha_2'$$

$$\alpha' = \beta_1\alpha_2 + \beta_1'\alpha_2'$$

$$\beta = \alpha_1\beta_2 + \alpha_1'\beta_2$$

$$\beta' = \beta_1\beta_2 + \beta_1'\beta_2'$$

---

*) Por. Dr. K. Żorawski. Wykłady geometrji analitycznej. Tom I. Warszawa 1930. Str. 26.

Mamy zatem

$$\alpha\beta' = \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1'\beta_2' + \alpha_1'\alpha_2'\beta_1\beta_2 + \alpha_1'\alpha_2'\beta_1'\beta_2'.$$

oraz

$$\alpha'\beta = \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1'\alpha_2\beta_1\beta_2' + \alpha_1\alpha_2'\beta_1'\beta_2 + \alpha_1'\alpha_2'\beta_1'\beta_2'$$

skąd otrzymujemy natychmiast:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \alpha_1\alpha_2\beta_1'\beta_2' - \alpha_1'\alpha_2\beta_1\beta_2' + \alpha_1'\alpha_2'\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2'\beta_1'\beta_2$$

lub ostatecznie

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)(\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)$$

Równość powyższa wyraża właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy udowodnić.

Jako natychmiastowe wnioski z powyższego twierdzenia otrzymujemy

III Jeżeli każdy z pewnych dwu układów $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ spółrzędnych prostokątnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie P, jest równoskrętny albo przeciwnieskrętny pewnemu trzeciemu układowi $\mathcal{U}$ spółrzędnych prostokątnych, położonemu w uważanej płaszczyźnie P, wówczas uważane dwa układy $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ są pomiędzy sobą równoskrętne.

IV Jeżeli pewien układ $\mathcal{U}_1$ spółrzędnych prostokątnych, położony w oznaczonej płaszczyźnie P jest równoskrętny pewnemu drugiemu układowi $\mathcal{U}_2$ spółrzędnych prostokątnych, położonemu w płaszczyźnie P, zaś pewien trzeci układ $\mathcal{U}$ spółrzędnych prostokątnych, położony w uważanej płaszczyźnie P jest przeciwnieskrętny układowi $\mathcal{U}_2$, wówczas układy $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}$ są pomiędzy sobą przeciwnieskrętne

Weźmy pod uwagę zbiór $(\mathcal{U})$ wszystkich układów spółrzędnych prostokątnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie P. Zbiór (U) możemy podzielić na dwie kategorje K_1 i K_2 w taki sposób, aby każde dwa układy należące do tej samej kategorji były równoskrętne pomiędzy sobą, każdy zaś układ należący do kategorji K_1 i każdy układ należący do kategorji K_2 były układami przeciwnieskrętnemi.

W samej rzeczy, uważajmy pewien oznaczony układ (X, Y) spółrzędnych prostokątnych położony w płaszczyźnie P. Jeżeli do kategorji K_1 zaliczymy wszystkie położone w oznaczonej płaszczyźnie P układy spółrzędnych prostokątnych równoskrętne układowi (X, Y), zaś do kategorji K_2 wszystkie pozostałe układy spółrzędnych prostokątnych, położone w uważanej płaszczyźnie P, wówczas zgodnie z uzyskanemi powyżej wynikami / wnioski III i IV/ otrzymamy żądany podział wszystkich układów spółrzędnych prostokątnych, położonych w płaszczyźnie P.

W razie przeprowadzenia rzeczonego podziału wszystkich układów spółrzędnych prostokątnych położonych w oznaczonej płaszczyźnie P na dwie kategorje, układom należącym do jednej z dwu wspomnianych kategoryj nadajemy nazwę układów prawoskrętnych, układom zaś należącym do drugiej kategorji - układów lewoskrętnych.

Kwestja, której kategorji układy nazwiemy prawoskrętnemi, której zaś lewoskrętnemi, stanowi przedmiot specjalnej umowy, przyjętej dla każdej oznaczonej płaszczyzny P. W każdym razie zagadnienie nadania nazwy układów prawoskrętnych lub lewoskrętnych pewnym z pośród układów spółrzędnych prostokątnych położonych w oznaczonej płaszczyźnie, zostanie rozwiązana w sposób jednoznaczny, skoro przyjmiemy pewien oznaczony układ U spółrzędnych prostokątnych za układ prawoskrętny względnie lewoskrętny.

Oznaczoną płaszczyznę P, dla której na mocy przyjętych umów zostało ustalone kryterjum pozwalające orzec czy dany dowolnie obrany układ U spółrzędnych prostokątnych, położony w płaszczyźnie P jest układem prawoskrętnym, czy też lewoskrętnym, nazywamy płaszczyzną zorjentowaną.

§ 37.

Rozwiązanie problemu mierzenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej.

Weźmy pod uwagę pewną oznaczoną płaszczyznę zorjentowaną P. Niech $\overline{OA}$ oznacza dowolny byle nie zerowy wektor położony w uważanej płaszczyźnie P. Spostrzegamy natychmiast, iż wektorowi $\overline{OA}$ odpowiada jeden i tylko jeden położony w płaszczyźnie P układ U spółrzędnych prostokątnych czyniący zadość warunkom następującym:

1°. Początek O wektora $\overline{OA}$ jest początkiem układu U spółrzędnych prostokątnych.

2°. Oś odciętych X w układzie U spółrzędnych prostokątnych jest osią współkierunkową wektorowi $\overline{OA}$.

3°. Układ U spółrzędnych prostokątnych jest układem prawoskrętnym.

4°. Przy mierzeniu spółrzędnych jakiegokolwiek punktu w układzie U spółrzędnych prostokątnych za jednostkę długości przyjmujemy długość wektora $\overline{OA}$

Układ spółrzędnych prostokątnych, czyniący zadość wszystkim wymienionym wyżej pod 1°, 2°, 3° i 4° warunkom nazywamy układem zespolonym z wektorem $\overline{OA}$.

Przyjmijmy teraz definicję następującą:

Miarą dowolnie obranego wektora v położonego w płaszczyźnie P w razie przyjęcia za jednostkę jakiegokolwiek byle nie zerowego wektora e położonego w uważanej płaszczyźnie P nazywamy liczbę zespoloną

$$x + yi$$

której część rzeczywista x i spółczynnik y jednostki urojonej są odpowiednio równe odciętej i rzędnej końca wektora równego wektorowi v i współpoczątkowego wektorowi e w układzie spółrzędnych prostokątnych zespolonym z wektorem e.*)

---

*) Łatwo spostrzec, iż liczby rzeczywiste x i y

Powiadam, iż przytoczona wyżej definicja miary wektora v położonego w płaszczyźnie P stanowi rozwiązanie problemu mierzenia wektorów położonych w rzeczonej płaszczyźnie. W celu stwierdzenia, iż wspomniana okoliczność rzeczywiście zachodzi wystarczy udowodnić, iż w następstwie powyższej definicji miary wektora v spełnione są wszystkie twierdzenia § 35, stanowiące w myśl przeprowadzonych na wspomnianem miejscu rozważań układ warunków, którym winny czynić zadość liczby będące miarami elementów zbioru, dla którego pragniemy podać rozwiązanie problemu mierzenia.

Okażemy przeto, iż zachodzą następujące twierdzenia:

I. Jeżeli po przyjęciu oznaczonego wektora e, położonego w płaszczyźnie zorjentowanej P, za jednostkę miary wektorów położonych w uważanej płaszczyźnie P pewna liczba zespolona z jest miarą oznaczonego wektora v położonego w płaszczyźnie P, wówczas każda liczba zespolona równa liczbie z jest również miarą wektora v.

II. Jeżeli przez e i e' oznaczymy dwa dowolne, byle nie zerowe wektory, położone w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, przez v zaś dowolny wektor położony w uważanej płaszczyźnie P, wówczas oznaczając przez z miarę wektora v w razie przyjęcia wektora e za jednostkę, przez z' miarę wektora v w razie przyjęcia wektora e' za jednostkę, wreszcie przez ξ miarę wektora e, w razie przyjęcia za jednostkę miary wektora e', liczby zespolone z, z' i ξ czynią zadość równości:

$$z' = z \cdot \xi.$$

III. Przy oznaczonej jednostce miary wektorów, położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, miary równych pomiędzy sobą wektorów położonych w płaszczyźnie P są pomiędzy sobą równe i odwrotnie, wektory których miary są pomiędzy sobą równe są równe pomiędzy sobą.

IV. Przy oznaczonej jednostce miary wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej

---

równają się odpowiednio miarom prostokątnych rzutów wektora v na oś odciętych i oś rzędnych układu spółrzędnych prostokątnych, zespolonego z wektorem e.

P miara sumy skończonej liczby wektorów położonych w płaszczyźnie P jest równa sumie miar składników.

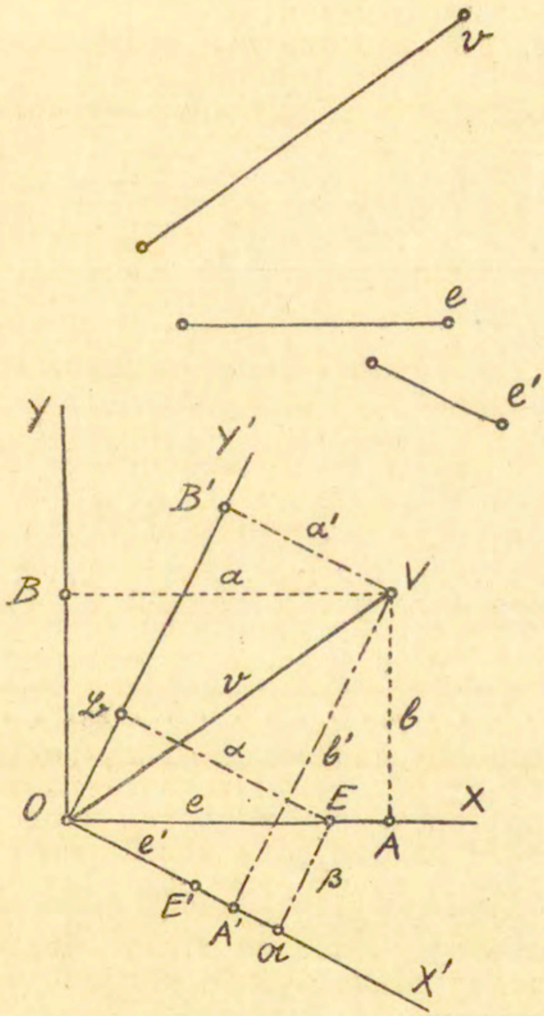
Spostrzegamy natychmiast, iż pierwsze z powyższych twierdzeń zachodzi niezawodnie. Przechodźmy przeto do dowodu twierdzenia II. Weźmy pod uwagę oznaczoną płaszczyznę zorjentowaną P i uważajmy w płaszczyźnie P dwa dowolne, byle od modułu dodawania wektorów odmienne, wektory e i e'. Niech dalej v będzie dowolnym wektorem położonym w płaszczyźnie P.

Obierzmy na płaszczyźnie P /rys.3/ dowolny punkt O i zbudujmy wektory $\overline{OE}$, OE' i $\overline{OV}$ czyniące zadość równościom:

$$\overline{OE} = e,$$

$$\overline{OE'} = e',$$

$$\overline{OV} = v. \text{ x)}$$



Rys.3

Oznaczmy dalej przez X i Y oś odciętych i oś rzędnych w układzie spółrzędnych prostokątnych zespolonym z wekto-

x) Ponieważ liczby zespolone będące miarami wektorem e, zaś przez X' i Y' oś odciętych i oś rzędnych w układzie zespolonym z wektorem e'.

Zachowując oznaczenia przyjęte w założeniu naszego twierdzenia połóżmy

$$z = a + bi$$

$$z' = a' + b'i$$

$$\xi = \alpha + \beta i$$

Ponieważ zgodnie z założeniem twierdzenia liczba zespolona ξ jest miarą wektora e w razie przyjęcia wektora e' za jednostkę miary, przeto liczby α i β są równe odpowiednio odciętej $O\alpha$ i rzędnej $O\beta$ w układzie (X', Y') takiego punktu E położonego na osi odciętych X układu (X, Y), którego odcięta OE w układzie (X, Y) jest równa liczbie $+1$.

Wobec powyższego spółczynniki kierunkowe osi X w układzie (X', Y') równe są odpowiednio liczbom

$$\frac{\alpha}{\rho} \quad \text{i} \quad \frac{\beta}{\rho}$$

gdzie przez ρ oznaczyliśmy długość $|OE|$ wektora e w razie przyjęcia za jednostkę długości wektorów położonych w płaszczyźnie P długości $|OE'|$ wektora e'.

Ponieważ dalej układ (X, Y) jest układem spółrzędnych prostokątnych, przeto spółczynniki kierunkowe osi Y w układzie (X', Y') będą odpowiednio równe

$$-\frac{\beta}{\rho} \quad \text{i} \quad \frac{\alpha}{\rho}.$$

Z powyższego wynika na mocy znanych twierdzeń

---

rów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej nie zależą od położenia na uważanej płaszczyźnie punktów początkowych uważanych wektorów, przeto ograniczenie rozważań do przypadku, w którym wektory byłyby wektorami współpoczątkowemi nie wpłynie bynajmniej na charakter ogólny naszego twierdzenia.

geometrji analitycznej *) , iż pomiędzy spółrzędnemi x', y' dowolnego punktu, położonego na płaszczyźnie P w układzie (X',Y') a spółrzędnemi x, y tegoż punktu w układzie (X,Y) w razie przyjęcia za jednostkę długości przy mierzeniu spółrzędnych punktu w obu układach spółrzędnych długości $|OE'|$ wektora e' zachodzą związki następujące:

$$x' = \frac{\alpha}{\rho}x - \frac{\beta}{\rho}y$$
$$y' = \frac{\beta}{\rho}x + \frac{\alpha}{\rho}y \qquad (39)$$

Zważywszy jednak, iż przy mierzeniu spółrzędnych punktu w układzie (X,Y) przyjmujemy za jednostkę długości długość wektora e nie zaś długość wektora e', który zgodnie z założeniem stanowi jednostkę długości przy mierzeniu spółrzędnych w układzie (X',Y') oraz z uwagi, iż długość wektora e w razie przyjęcia jako jednostki długości, długości wektora e' jest równa ρ, przeto spółrzędne x oraz y punktu w układzie (X,Y) w razie przyjęcia za jednostkę długości przy mierzeniu spółrzędnych w rzeczonym układzie zamiast wektora e' wektora e będą odpowiednio równe ρx oraz ρy.

Wobec powyższego po dokonaniu rzeczonej zamiany jednostki długości wzory (39) przyjmą postać:

$$x' = \alpha x - \beta y$$
$$y' = \beta x + \alpha y \qquad (40)$$

Ponieważ zgodnie z definicją liczb zespolonych z i z', liczby a i b przedstawiają odpowiednio spółrzędne x i y końca V wektora $\overline{OV} = v$ w układzie spółrzędnych (X,Y), liczby zaś a' i b' spółrzędne x' i y' tegoż punktu w układzie (X',Y'), przeto kładąc w równaniach (40) zamiast x, y, x' i y' odpowiednio a, b, a' i b' otrzymamy

$$a' = \alpha a - \beta b$$

---

*) Patrz K.Żorawski. Wykłady geometrji analitycznej. Tom I. Warszawa 1930 /str.25/.

oraz

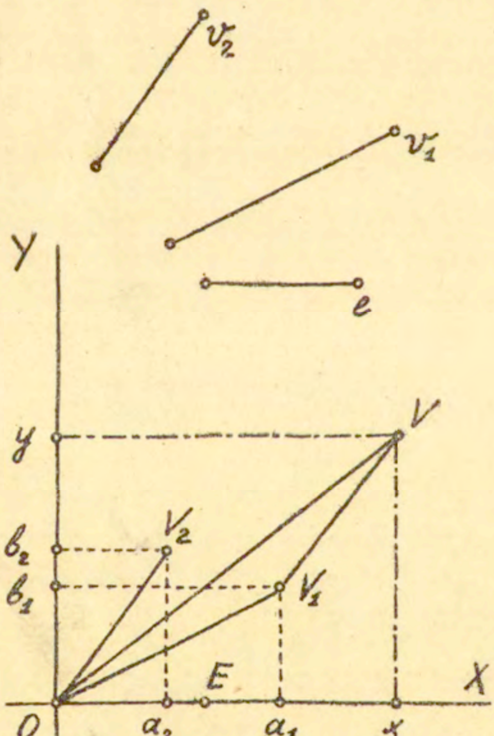
$$b' = \beta a + \alpha b$$

Równości powyższe na mocy definicji mnożenia liczb zespolonych są oczywiście równoważne równości

$$z' = z \cdot \xi$$

której istnienie pragnęliśmy udowodnić.

Ponieważ twierdzenie III oczywiście zachodzi, przeto pozostaje tylko do dowiedzenia ostatnie z wymienionych twierdzeń.



Rys.4

W tym celu weźmy pod uwagę oznaczoną płaszczyznę zorjentowaną P. Przyjmijmy za jednostkę miary wektorów położonych w płaszczyźnie P jakikolwiek byle nie zerowy wektor e i oznaczmy przez X oś odciętych, przez Y oś rzędnych w układzie spółrzędnych prostokątnych zespolonym z wektorem $\overline{OE} = e$. Niech O /rys. 4/ oznacza początek układu (X, Y). Uważajmy dalej dwa dowolne wektory v_1 i v_2 położone w płaszczyźnie P i zbudujmy wektory $\overline{OV_1}$ i $\overline{OV_2}$

równe odpowiednio uważanym wektorom.

Oznaczmy przez z_1 i z_2 liczby zespolone, będące miarami uważanych wektorów v_1 i v_2 i połóżmy

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i.$$

gdzie w myśl definicji miary wektorów liczby rzeczywiste a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 oznaczają odpowiednio spółrzędne punktów V_1 i V_2 będących końcami wektorów $\overline{OV_1}$ i $\overline{OV_2}$.

Jeżeli zbudujemy wektor $\overline{V_1V}$ spełniający równanie

$$\overline{V_1V} = \overline{OV_2}$$

wówczas oznaczając przez x i y spółrzędne punktu V będziemy mieli

$$x - a_1 = a_2$$

$$y - b_1 = b_2$$

stąd otrzymujemy natychmiast

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 \\ y &= b_1 + b_2 \end{aligned} \tag{41}$$

Ponieważ zaś oznaczając przez z miarę wektora $\overline{OV}$, będącego, w myśl definicji dodawania wektorów, sumą wektorów v_1 i v_2

$$z = x + yi$$

przeto z uwagi na związki (41) mamy

$$z = z_1 + z_2$$

Równość powyższa wyraża właśnie twierdzenie, którego prawdziwość pragnęliśmy udowodnić w przypadku dwu składników. Wnosimy stąd, opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, iż twierdzenie nasze zachodzi w podanem brzmieniu.

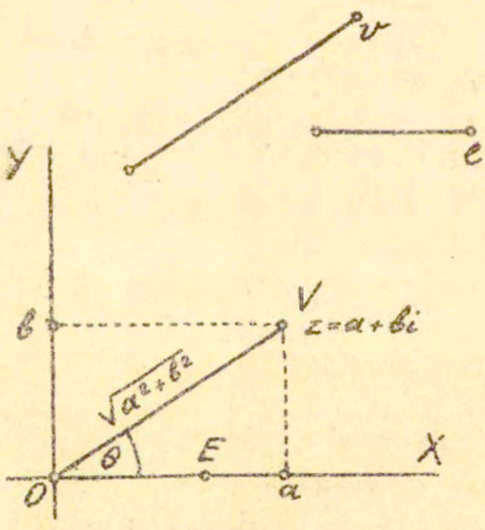
W ten sposób problem mierzenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej został rozwiązany zgodnie z zasadami § 35, do których postanowiliśmy się stosować przy rozwiązywaniu rzeczonego zagadnienia.

Jednocześnie uzyskaliśmy w wektorach położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej geometryczny obraz liczb zespolonych.

§ 38.

Geometryczna interpretacja liczb zespolonych.

Opierając się na uzyskanych w § poprzedzającym wynikach, omówimy teraz kwestję geometrycznej interpretacji liczb zespolonych.



Rys. 5

Weźmy pod uwagę oznaczoną płaszczyznę zorjentowaną P /rys. 5/ i oznaczmy przez (X, Y) układ spółrzędnych prostokątnych zespolony z oznaczonym byle od modułu dodawania wektorów odmiennym wektorem $\overline{OE} = e$ przyjętym za jednostkę miary wektorów położonych w płaszczyźnie P.

Niech dalej v oznacza dowolny wektor położony w płaszczyźnie P.

Zbudujmy na uważanej płaszczyżnie P wektor $\overline{OV}$ czyniący zadość równości $\overline{OV}=v$.

Spostrzegamy natychmiast, iż w razie,gdy liczba zespolona

$$z=a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

jest miarą uważanego wektora v moduł

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

liczby zespolonej z przedstawia stosunek

$$\frac{|OV|}{|OE|}$$

długości wektora v do długości wektora e przyjętego za jednostkę miary wektorów położonych w płaszczyźnie P , zaś argument

$$\theta$$

miarą kąta EOV , którego pierwszym bokiem jest wektor e ,drugim zaś wektor v.

Kąt EOV nosi nazwę amplitudy wektora v .

W myśl przeprowadzonych w § poprzedzającym rozważań, liczba zespolona

$$z=a+bi$$

jest miarą wektora

$$v=\overline{OV}$$

którego początek zlewa się z początkiem O układu (X,Y) spółrzędnych prostokątnych, zespolonym z wektorem $\overline{OE}$ przyjętym za jednostkę miary wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P , zaś koniec zlewa się z punktem V , którego odcięta i rzędna w układzie (X,Y) równają się odpowiednio liczbom rzeczywistym a i b

W ten sposób możemy każdej dowolnie danej liczbie zespolonej

$$z = a + bi$$

podporządkować jeden i tylko jeden punkt V położony na oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, którego odcięta i rzędna równają się odpowiednio liczbom rzeczywistym a i b.

Z drugiej strony każdemu dowolnemu punktowi V płaszczyzny P odpowiada jedna i tylko jedna liczba zespolona

$$z = a + bi$$

której część rzeczywista a i spółczynnik b jednostki urojonej równe są odpowiednio odciętej i rzędnej punktu V.

W ten sposób pomiędzy zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny P a zbiorem wszystkich liczb zespolonych zachodzi odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Punkt V o spółrzędnych prostokątnych a i b odpowiadający danej liczbie zespolonej

$$z = a + bi \qquad (42)$$

nazywamy obrazem geometrycznym liczby zespolonej (42).

Łatwo spostrzec, iż w razie, gdy punkt V jest obrazem geometrycznym liczby zespolonej z odległość punktu V od początku O układu spółrzędnych prostokątnych przedstawia moduł liczby zespolonej z, zaś najmniejszy dodatni kąt, zawarty pomiędzy kierunkiem OX a kierunkiem OV - argument uważanej liczby zespolonej.

§ 39.

Uzupełnienie teorji działań zasadniczych na wektorach.

Mnożenie i dzielenie wektorów.

Pragnąc uzupełnić zapoczątkowane w § 34 /str. 226/ rozważania dotyczące teorji działań zasadni-

…nych na wektorach położonych w oznaczonej płaszczyźnie P niniejszy paragraf poświęcimy omówieniu kwestji mnożenia i dzielenia wektorów.

Wobec rozwiązania problemu mierzenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, w myśl uwag wypowiedzianych przy końcu § 35 /str.235/ określimy w zupełności znaczenie wyrażenia "iloczyn dwu wektorów" skoro tylko przyjmiemy definicję następującą:

D. Iloczynem dwu wektorów v_1 i v_2 położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P nazywać będziemy taki wektor v, którego miara z jest równa iloczynowi $z_1 \cdot z_2$ miar z_1 i z_2 danych wektorów v_1 i v_2. *)

---

*) Opierając się na przytoczonej definicji mnożenia wektorów oraz na twierdzeniu IV § 33, spostrzegamy natychmiast, iż oznaczając przez

$$v_1 \quad \text{i} \quad v_2$$

dwa dowolnie dane wektory położone w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, przez

$$z_1 \quad \text{i} \quad z_2$$

liczby zespolone, będące odpowiednio miarami uważanych wektorów v_1 i v_2 wektorom

$$v_1 + v_2$$

oraz

$$v_1 \times v_2$$

odpowiadają odpowiednio liczby zespolone

$$z_1 + z_2$$

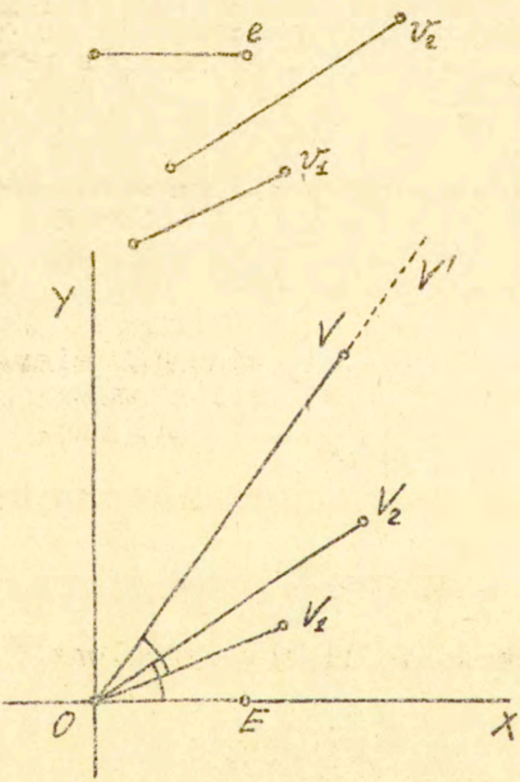
oraz

$$z_1 \times z_2$$

a więc, iż zbiór (V) wszystkich wektorów położonych w płaszczyźnie zorjentowanej P jest izomorficzny ze zbiorem (Z) wszystkich liczb zespolonych.

Opierając sia na powyższej definicji oraz odpowiedniości zachodzącej z jednej strony pomiędzy amplitudą wektora i argumentem liczby zespolonej, będącej miarą uważanego wektora, z drugiej zaś - pomiędzy długością wektora i modułem rzeczonej liczby zespolonej, spostrzegamy iż zgodnie z wzorem (71) /§ 28 str.197/ amplituda wektora v będącego iloczynem dwu danych wektorów v_1 i v_2 równa się sumie amplitud czynników, długość zaś wektora v jest równa iloczynowi długości wektorów v_1 i v_2.

Pragnąc przeto zbudować wektor v, będący iloczynem dwu danych wektorów v_1 i v_2 wystarczy zastosować postępowanie następujące:



Rys.6

Obierzmy na płaszczyźnie P dowolny, byle modułowi dodawania wektorów nierówny, wektor e. Zorjentowawszy płaszczyznę P uważajmy na niej układ (X,Y) spółrzędnych prostokątnych /rys. 6/ zespolony z wektorem $\overline{OE}=e$ i zbudujmy wektory $\overline{OV_1}$ i $\overline{OV_2}$ spełniające równania

$$\overline{OV_1}=v_1$$

$$\overline{OV_2}=v_2$$

Zbudujmy dalej kąt EOV' określony równaniem

$$\measuredangle EOV'=$$

$$=\measuredangle EOV_1+\measuredangle EOV_2$$

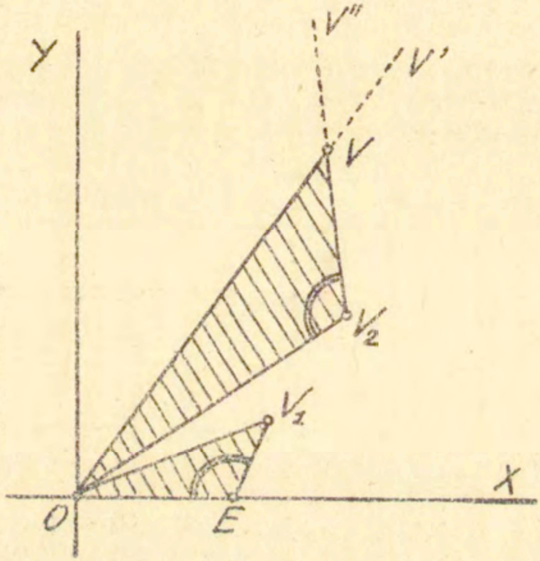
i wyznaczmy na

prostej OV' punkt V, którego odległość OV od początku O układu (X,Y) spółrzędnych czyni zadość równości

$$OV = OV_1 \times OV_2 \quad ^{x)}$$

---

x) Żądaną odległość OV otrzymujemy z łatwością zapomocą następującej konstrukcji:



Rys.7

Połączmy punkt V_1 /rys. 7/ z punktem E i zbudujmy kąt OV_2V'' równy kątowi OEV_1. Łatwo spostrzec, iż punkt V przecięcia się prostej OV', tworzący z osią X kąt XOV' równy sumie kątów XOV_1 i XOV_2 z prostą V_2V'' wyznacza żądaną odległość OV.

W samej rzeczy, z podobieństwa trójkątów OEV_1 i OV_2V mamy

$$\frac{OV}{OV_2} = \frac{OV_1}{OE}$$

skąd

$$OV = \frac{OV_1 \times OV_2}{OE}$$

Z równości powyższej, z uwagi na równość gdzie przez OV_1 i OV_2 oznaczyliśmy odpowiednio odległości końców wektorów $\overline{OV_1}$ i $\overline{OV_2}$ od początku O układu (X,Y)

Wektor $\overline{OV} = v$ jest szukanym iloczynem danych wektorów v_1 i v_2.

Zauważmy, iż określone zapomocą definicji D mnożenie wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, z uwagi na łączność i przemienność mnożenia liczb zespolonych posiada oby - dwie wspomniane własności.

Nadto mnożenie wektorów posiada własność rozdzielności względem dodawania i odejmowania wektorów. *)

$$OE = 1$$

otrzymujemy natychmiast

$$OV = OV_1 \times OV_2$$

*) Przyjmując jako definicję mnożenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P definicję następującą:

D'. Iloczynem dwu wektorów v_1 i v_2 nazywać będziemy taki wektor v, którego amplituda równa jest sumie amplitud czynników, zaś długość równa iloczynowi długości danych wektorów v_1 i v_2, równoważną oczywiście przyjętej na początku niniejszego § definicji D moglibyśmy, opierając się na własności łączności i przemienności dodawania kątów oraz łączności i przemienności mnożenia odcinków prostolinjowych dowieść bezpośrednio, iż mnożenie wektorów posiada własność łączności i przemienności. Nadto zaś, powołując się na własność rozdzielności mnożenia odcinków prostolinjowych względem dodawania i odejmowania okazać, iż rzeczona własność przysługuje określonemu w powyższy sposób mnożeniu wektorów.

Dowód wspomnianych twierdzeń nie nastręcza żadnych trudności.

Szczegółową teorję działań zasadniczych na odcinkach prostolinjowych znajdzie czytelnik w dziele: D.Hilbert. Grundlagen der Geo-

Przechodząc do omówienia dzielenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P zauważmy, iż z uwagi na definicję D mnożenia wektorów oraz twierdzenie X § 24 /str.165/ istnieje w stosunku do mnożenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P tylko jeden rodzaj dzielenia, które o ile tylko dzielnik jest od modułu dodawania wektorów odmienny, jest bez względu na wartość dzielnej działaniem jednoznacznem, przyczem za iloraz

$$\frac{v_1}{v_2}$$

dwu wektorów v_1 i v_2 przyjmujemy taki wektor v, którego miara jest równa ilorazowi $\frac{z_1}{z_2}$ miar z_1 dzielnej v_1 i z_2 dzielnika v_2.

W ten sposób, zgodnie z wzorem (73) /§ 28 str. 200/ amplituda wektora v będącego ilorazem wektorów v_1 i v_2 jest równa różnicy amplitud dzielnej i dzielnika, długość zaś wektora v równa się ilorazowi długości wektorów v_1 i v_2

Aby zbudować wektor v określony równaniem

$$v = \frac{v_1}{v_2}$$

obierzmy za jednostkę miary wektorów położonych w płaszczyźnie P dowolny, byle od modułu dodawania wektorów odmienny, wektor e i uważajmy /rys. 8 / układ (X,Y) spółrzędnych prostokątnych zespolony z wektorem $\overline{OE} = e$

Niech dalej

$$\overline{OV_1} = v_1$$

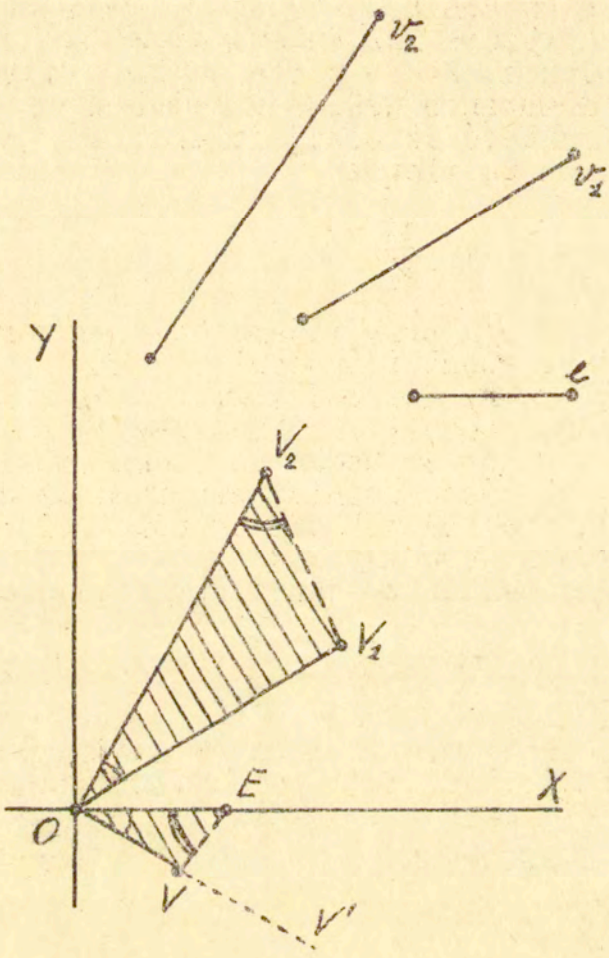
$$\overline{OV_2} = v_2$$

Zbudujmy kąt EOV', czyniący zadość równaniu

$$\sphericalangle EOV' = \sphericalangle EOV_1 - \sphericalangle EOV_2$$

---

metrie. Dritte Auflage. Leipzig und Berlin . 1909. Str. 45 - 50.



Rys.8

poczem na prostej OV' wyznaczmy punkt V, którego odległość OV od początku O układu (X,Y) spółrzędnych określona jest równaniem

$$OV = \frac{OV_1}{OV_2}$$

gdzie, jak poprzednio, OV_1 i OV_2 oznaczają odpowiednio odległości punktów V_1 i V_2 od początku O układu (X,Y).

Otrzymany w powyższy sposób wektor $\overline{OV} = v$ jest żądanym wektorem czyniącym zadość równaniu (43).

§ 40.

Potęgowanie i pierwiastkowanie wektorów.

Na zakończenie niniejszego rozdziału podamy krótkie uwagi dotyczące potęgowania i pierwiastkowania wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P.

Przyjmijmy definicję następującą:

Potęgą oznaczonego, za zasadę potęgi przyjętego wektora v położonego w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P, przyjmując za wykładnik oznaczoną liczbę całkowitą dodatnią n, nazywać będziemy położony w płaszczyźnie P wektor, za którego symbol przyjmujemy symbol

$$v^n$$

określając wartość powyższego symbolu zapomocą dwu następujących równości

$$v^1 = v$$

oraz

$$v^{k+1} = v^k \cdot v$$

gdzie przez k oznaczyliśmy dowolną liczbę całkowitą dodatnią.

Definicja powyższa, w myśl uwag wypowiedzianych w § 11 /str.50/, określa w zupełności potęgę o wykładniku całkowitym dodatnim, dowolnego za zasadę potęgi przyjętego wektora v. Zważywszy, iż zbiór (V) wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P jest izomorficzny ze zbiorem (Z) wszystkich liczb zespolonych jesteśmy, na podstawie przeprowadzonych w § 29 /str.201/ rozważań, uprawnieni do wprowadzenia pojęcia potęgi o wykładniku równym zeru wektora, położonego w oznaczonej płaszczyźnie P przez przyjęcie równości następującej:

$$v^0 = e$$

gdzie przez v oznaczyliśmy dowolny, byle modułowi dodawania wektorów nierówny, wektor, zaś przez e wektor, którego miarą jest liczba zespolona

$$z = (1,0) = 1$$

Przyjmijmy dalej równość następującą:

$$v^{-n} = \frac{e}{v^n} \qquad (44)$$

gdzie, jak wyżej, v oznacza dowolny, byle od modułu dodawania wektorów odmienny wektor położony w płaszczyźnie zorjentowanej P, zaś e wektor przyjęty za jednostkę miary wektorów położonych w uważanej płaszczyźnie P.

Przez przyjęcie równości (44) rozszerzamy pojęcie potęgi oznaczonego, za zasadę potęgi przyjętego wektora v w razie, gdy wykładnik jest liczbą całkowitą, od zera mniejszą.

Opierając się na odpowiedniości izomorficznej, zachodzącej pomiędzy zbiorem wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P i zbiorem wszystkich liczb zespolonych, spostrzegamy, iż w następstwie przyjęcia równości (44) mamy twierdzenie następujące:

Jakiekolwiek, byle od modułu dodawania wektorów odmienne, wektory oznaczylibyśmy przez v_1 i v_2 mamy zawsze

$$v_1^x \cdot v_1^y = v_1^{x+y}$$

$$(v_1^x)^y = v_1^{x \cdot y}$$

$$v_1^x \cdot v_2^x = (v_1 \cdot v_2)^x$$

$$v_1^x : v_1^y = v_1^{x-y}$$

$$v_1^x : v_2^x = (v_1 : v_2)^x$$

przy wszelkich całkowitych /dodatnich, ujemnych lub równych zeru/ wartościach wykładników x i y.

Z definicji mnożenia wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P oraz definicji potęgi wektora o wykładniku całkowitym dodatnim wynika z uwagi na wzór (76) /§ 29 str.202/, iż amplituda wektora v określonego równaniem

$$v = v_1^n \qquad (45)$$

jest równa n-tej wielokrotności amplitudy wektora przyjętego za zasadę potęgi, długość zaś wektora v jest n-tą potęgą długości wektora v_1.

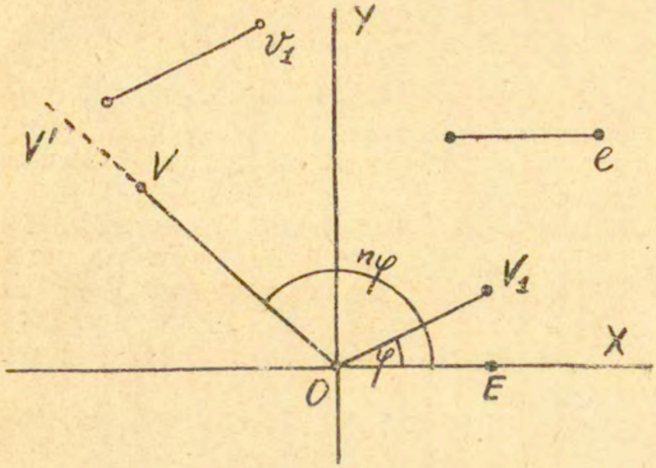
W ten sposób, pragnąc zbudować wektor v czyniący zadość równaniu (45) postępujemy w sposób następujący:

Obrawszy na płaszczyźnie zorjentowanej P /rys. 9/ dowolny wektor właściwy e za jednostkę miary wektorów położonych w płaszczyźnie P uważajmy układ (X,Y) spółrzędnych prostokątnych zespolony z wektorem

$$\overline{OE} = e$$

i zbudujmy wektor $\overline{OV_1}$ taki, iż

$$\overline{OV_1} = v_1$$



Rys. 9

Zbudujmy dalej kąt EOV' czyniący zadość równaniu

$$\measuredangle EOV' = n(\measuredangle EOV_1)$$

i wyznaczmy na prostej OV' punkt V, którego odległość od początku O układu spółrzędnych (X,Y) spełnia równanie

$$OV = (OV_1)^n$$

gdzie odcinek OV_1 jest długością wektora $\overline{OV_1}$. Zbudowany w powyższy sposób wektor $\overline{OV}$ jest n-tą potęgą danego wektora $\overline{OV_1}$ *)

---

*) Łatwo spostrzec /rys.10/, iż końce $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots V_n$ wektorów $\overline{OV_1}, \overline{OV_2}, \overline{OV_3}, \overline{OV_4} \ldots \overline{OV_n}$ stanowiących kolejne naturalne potęgi danego wektora:

$$v_1 = \overline{OV_1}$$

położone są na krzywej spiralnej, której równanie biegunowe można napisać w postaci

$$\rho = r^{\frac{\omega}{\varphi}} \qquad (a)$$

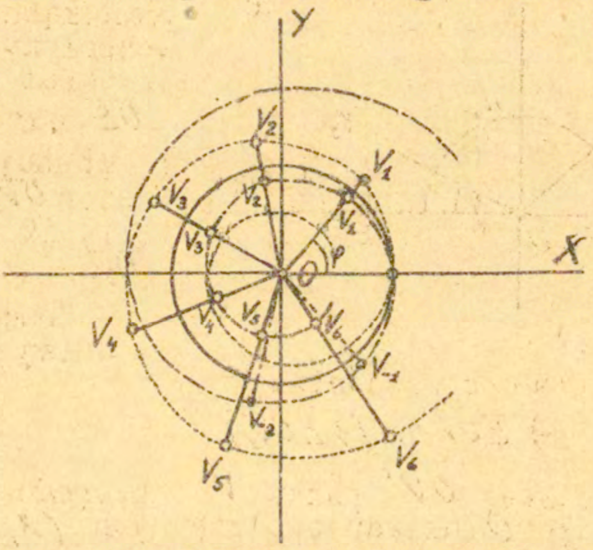
gdzie przez ρ i ω oznaczyliśmy spółrzędne biegunowe, zaś przez r i φ odpowiednio dłu-

Zajmiemy się teraz kwestją wyznaczenia v czyniącego zadość równaniu

$$v^n = V_1 \qquad (46)$$

---

gość i amplitudę danego wektora V_1.



Rys.10

Równanie (a) jest równaniem krzywej przestępnej znanej pod nazwą spirali logarytmicznej.

Z równania (a) wynika, iż w przypadku

$$r > 1 \qquad (b)$$

zwoje spirali oddalają się nieograniczenie od bieguna O wraz ze wzrostem anomalji ω, natomiast w przypadku

$$r < 1 \qquad (c)$$

zbliżają się doń nieograniczenie wraz ze wzrostem ω.

Wreszcie w przypadku

$$r = 1$$

równanie (a) przechodzi w równanie

$$\rho = 1^{\omega}$$

gdzie przez v_1 oznyczyliśmy dowolny wektor położony w płaszczyźnie zorjentowanej P, zaś przez n liczbę całkowitą dodatnią.

Z uwagi na odpowiedniość izomorficzną zachodzącą pomiędzy zbiorem wszystkich wektorów położonych w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P i zbiorem wszystkich liczb zespolonych w myśl twierdzenia XXII Rozdziału III /str.206/ istnieje, w razie gdy wektor v_1 jest wektorem właściwym *) do-

---

które jest równaniem koła o promieniu równym jedności. W tym ostatnim przypadku końce wszystkich wektorów, będących kolejnemi naturalnemi potęgami danego wektora właściwego v_1 położone są na okręgu koła.

Zauważmy dalej, iż bez względu na wartość wektora właściwego v_1 w przypadku

$$\omega = 0$$

równanie (a) daje

$$\rho = r^0 = 1$$

co zgadza się z przyjętą wyżej definicją potęgi wektora właściwego o wykładniku równym zeru. Nadając anomalji ω wartości ujemne krzywa (a) przedstawiać będzie miejsce geometryczne końców $V_{-1}, V_{-2}, V_{-3}, \ldots$ wektorów $\overline{OV_{-1}}, \overline{OV_{-2}}, \overline{OV_{-3}}, \ldots$ będących potęgami danego wektora v_1 o wykładnikach ujemnych.

W tym przypadku, w razie istnienia nierówności (b), zwoje spirali w miarę wzrostu wartości bezwzględnej anomalji zbliżają się nieograniczenie do bieguna O, natomiast w razie nierówności (c) nieograniczenie odeń się oddalają wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej anomalji.

*) W przypadku, gdy wektor v_1 jest równy wektorowi niewłaściwemu μ, równanie

$$v^n = v_1$$

posiada, bez względu na wartość liczby całkowitej n, tylko jedno rozwiązanie, mianowicie

$$v = \mu.$$

kładnie n nierównych pomiędzy sobą wektorów v spełniających równanie (46).

Wobec powyższego, w związku z ustaloną w § 38 odpowiedniością pomiędzy amplitudą wektora położonego w oznaczonej płaszczyźnie zorjentowanej P a argumentem liczby zespolonej, będącej miarą danego wektora z jednej strony, z drugiej zaś - pomiędzy długością wektora a wartością bezwzględną rzeczonej liczby zespolonej, spostrzegamy natychmiast, iż zgodnie z wzorem (88) /§30 str.206/ amplitudy ϑ_ν wektorów v czyniących zadość równaniu (46) dane są przez wzór

$$\vartheta_\nu = \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi \qquad (47)$$

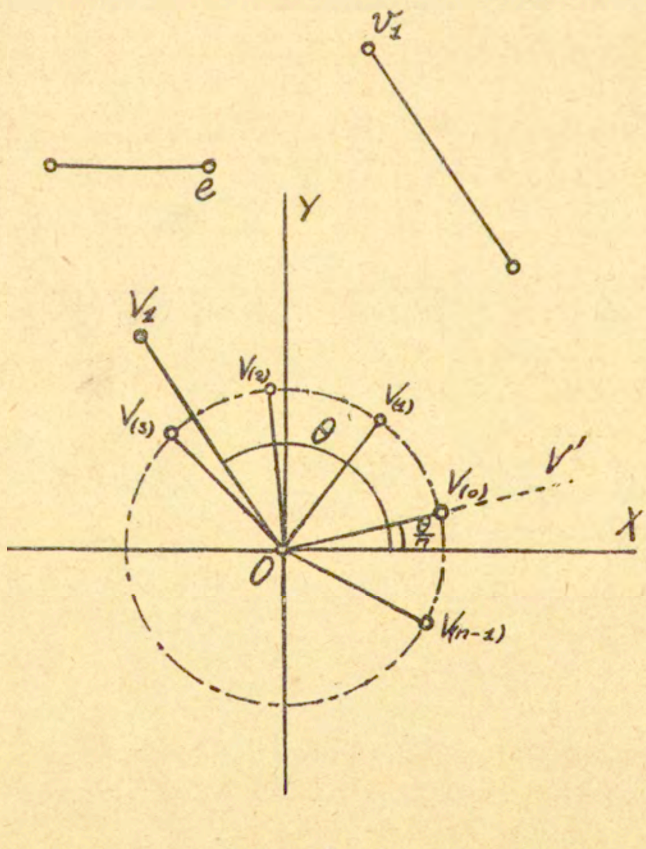
gdzie θ oznacza amplitudę główną wektora v_1, zaś ν - liczbę całkowitą dodatnią ograniczoną nierównościami:

$$0 \leqq \nu < n$$

wspólna zaś długość każdego z wektorów spełniających równanie (46) jest równa pierwiastkowi arytmetycznemu n-tego stopnia z długości wektora v_1

Z uwag powyższych wynika następująca konstrukcja pierwiastków n-tego stopnia z danego wektora v_1

Obierzmy na pła-



Rys.11

szczyźnie zorjentowanej P /rys.11/ dowolny, byle nierówny modułowi dodawania wektorów położonych w płaszczyźnie P wektor e i uważajmy układ (X,Y) spółrzędnych prostokątnych zespolony z wektorem $\overline{OE}=e$.

Zbudujmy wektor $\overline{OV_1}$ czyniący zadość równości

$$\overline{OV_1}=v_1$$

i wyznaczmy kąt EOV' spełniający rowność

$$\sphericalangle EOV'=\frac{\sphericalangle EOV_1}{n}$$

poczem na prostej OV' wyznaczmy punkt $V_{(0)}$,którego odległość od początku O układu (X,Y) spółrzędnych prostokątnych dana jest przez wzór

$$OV_{(0)}=\left|\sqrt[n]{OV_1}\right|$$

Wektor $\overline{OV_{(0)}}=v$ zbudowany w powyższy sposób jest, jak łatwo spostrzec, tym z pośród wektorow spełniających rownanie (46) , którego amplitudę ϑ_ν otrzymujemy z wzoru (47) , kładąc

$$\nu=0.$$

W celu zbudowania pozostałych wektorów czyniących zadość równaniu (46) wystarczy zbudować kolejno wektory $\overline{OV_{(\nu)}}$ $(\nu=1,2,3,.....n-1)$, których amplitudy ϑ_ν otrzymujemy z wzoru

$$\vartheta_\nu=\vartheta_0+\frac{\nu}{n}2\pi \quad (\nu=1,2,3,...n-1)$$

w który przechodzi wzór (47) , skoro przyjmiemy

$$\frac{\theta}{n}=\vartheta_0=\sphericalangle EOV'.$$

Łatwo spostrzec, iż punkty końcowe $V_{(\nu)}$ $(\nu=0,1,2,...n-1)$ wszystkich wektorów $\overline{OV_{(\nu)}}$ będących pierwiastkami n-tego stopnia z danego wektora v_1 położone są na okręgu koła, którego promień jest równy pierwiastkowi arytmetycznemu n-tego stopnia z modułu liczby zespolonej z będącej miarą wektora v_1.

Należy zaznaczyć, iż o ile zbudowanie zapomocą konstrukcji elementarnych, t.j. przy użyciu jedynie cyrkla i linji wektorów, które byłyby bądź sumą i różnicą, bądź iloczynem i ilorazem dwu danych wektorów, lub wreszcie - wektora, który byłby potęgą danego wektora, jest zawsze możliwe, o tyle zbudowanie wektorów będących pierwiastkami stopnia całkowitego z danego wektora nie zawsze da się uskutecznić zapomocą konstrukcji elementarnej.

Okoliczność powyższa wynika z jednej strony z możności zbudowania zapomocą konstrukcji elementarnych tylko takich odcinków, które są pierwiastkami równań algebraicznych o spółczynnikach całkowitych wymiernych stopnia najwyżej drugiego lub - tych z pośród równań stopni wyższych, których rozwiązanie daje się sprowadzić do rozwiązania szeregu równań stopnia ≤ 2, z drugiej zaś z możności dokonania zapomocą rzeczonych konstrukcyj podziału okręgu koła na n równych części, tylko w tym przypadku, gdy liczba całkowita n jest liczbą postaci

$$2^{\nu_0}\cdot(2^{2^{\nu_1}}+1)\cdot(2^{2^{\nu_2}}+1)\cdot\cdots(2^{2^{\nu_k}}+1)$$

gdzie $\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots \nu_k$ oznaczają dowolne, byle nierówne sobie liczby całkowite, od zera nie mniejsze, zaś ν_0 dowolną liczbę całkowitą dodatnią lub zero.

E R R A T A.

Str.	Wiersz	Zamiast	Winno być
4	18	jeszcze	pewne
10	20	działania	działania D
13	10	$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$	$a_1, a_2, a_3,$
13	34	gdy	gdyż
32	11	przylęliśmy	przyjęliśmy
41	25	zbioru	zbioru Z :
49	10	odbito niewyraźnie	$(b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$
66	26	(79	(79),
68	20	na	w
78	27	koniecznośc	konieczność
80	24	zbioru	zbioru G
81	4	$F(a, F(b,c)$	$F(a, F(b,c))$
81	31	identycznym	tożsamościowym
92	5	łącznem	łączeniu
99	20	oznaczylibyśmy	oznaczyliśmy
100	21	spałnia	spełnia
102	29	$a_1, a_2, \ldots\ldots \alpha_n$	$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$
103	26	W przypadku	*) W przypadku
109	16	"Iloczyny	"Iloczyny"
113	15	zaczerpnęiiśmy	zaczerpnęliśmy
114	9	grupy,	grupy G ,
120	3	$2(i-1)\pi$ 7	$\frac{2(i-1)\pi}{7}$
129	10	odbito niewyraźnie:	elementu x.
129	22	III.	III'.
131	20	/str.88/	/str.89/
137	3	XI	IX
139	35	de	des
142	7	liczba	liczbą
143	6	wprowadzilyśmy	wprowadziliśmy
146	19	rownośc	rowność
146	24	liczbewe	liczbowe
148	14	zbioru	zbioru Z
149	25	wykonalnemi jednoznacznie.	jednoznacznemi.

Str.	Wiersz	Zamiast	Winno być
150	2	$(c,d$	(c,d)
156	18	nierównośc	nierówność
157	16	nierówność,	nierówność (11),
158	23	rzeczywistych	zespolonych
160	28	odbito niewyraźnie:	$ad+bc=0$
171	7	V.	V'.,
171	10	XII.	XII'.
171	21	zaś b	zaś bi
179	14	opuszczono: (49)	
180	4	wałsności	własności
182	4	$=97^2\cdot 9^2$	$=97^2+9^2$
183	29	$>\|z-z_1\|+\|z\|$	$>\|z-z_1\|+\|z_1\|$
192	13	$-\arccos\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
200	24	całkowitą n	całkowitą dodatnią n
203	1	wobec	wobec (77):
203	2	$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=$	$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=$
209	12	orzeczenie,	orzeczeniu,
218	10	A_2B_2	A_2B_1
218	12	A_2B_2	A_2B_1
219	23	III	III'.
221	16	$A_1Y\parallel B_1Y$	$A_1Y\parallel B_1Y_1$
222	23	twierdzenie	twierdzenia
227	38	BC	$\overline{BC}$
229	10	/str. /	/str.219/
234	23	x) Jeżeli	xx) Jeżeli
235	3	zbioru	zbioru E,
235	4	miarą	miara
236	28	α,β',α i β	α,β',α' i β
237	13	IX	I
238	17	prostolinjowych	prostokątnych
238	20	oznaczmy	oznaczmy przez
238	29	$\beta=\alpha_1\beta_2+\alpha_1'\beta_2$	$\beta=\alpha_1\beta_2+\alpha_1'\beta_2'$

SPIS RZECZY.

Str.

Str.