

7.72 — lepko-sprężystość

Marek Miksa

**WPLYW MAŁYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH
CZOPA
NA NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA POPRZECZNEGO**

41/1986

P-269a



WARSZAWA 1986

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 października 1986 r.



56848



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,42 Ark.druk. 2,5

Oddano do drukarni w grudniu 1986 r.

Nr zamówienia 30/87.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Marek Miksa
Pracownia Fizyki Polimerów IPPT PAN
Politechnika Świętokrzyska - Kielce

WPLYW MAŁYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA NA NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA POPRZECZNEGO

Streszczenie

Rozpatrzono szczegółowo wpływ dodatkowych harmonicznych drgań skrętnych czopa ślizgowego łożyska poprzecznego, nałożonych na ustalony ruch czopa, na zmianę siły nośnej łożyska. Założono, że amplituda i częstość drgań są na tyle małe, że człony inercyjne w równaniach ruchu można zaniedbać.

Wykazano, że dodatkowe drgania nie wpływają na siłę nośną łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej, natomiast w przypadku gdy czynnikiem smarującym jest ciecz opisywana modelem cieczy drugiego rzędu, siła nośna zwiększa się. Przyczyną wzrostu siły nośnej jest występowanie składowej siły równoległej do mimośrodu.

1. WSTĘP

Wpływ małych drgań harmonicznych nałożonych na przepływ podstawowy, tj. na kinematyczne i dynamiczne parametry charakteryzujące dany przepływ, takie jak średnia prędkość, wydatek, średnia siła nośna itp., był tematem wielu prac. Ich krótki przegląd znaleźć można w pracy S. Zahorskiego [1]. W pracy tej określono również zmianę siły nośnej wywołaną dodatkowymi drganiami nałożonymi na ruch płaskiego suwaka.

Niniejsza praca stanowi bezpośrednie rozszerzenie wyników poprzednich na przypadek obrotowego łożyska poprzecznego.

Przyjmujemy, że czop łożyska poddany jest działaniu dodatkowych, harmonicznym drgań skrętnych, panewka natomiast pozostaje nieruchoma. Interesować nas będzie jak dodatkowe drgania wpływają na siłę nośną łożyska. Z sytuacją taką spotykamy się w praktyce smarowania, ponieważ w rzeczywistości nigdy wał maszynowy nie porusza się równomiernie. Jak wykażemy niżej zmianę siły nośnej łożyska wywołuje efekt naprężeń normalnych charakteryzujący nienewtonowską ciecz smarującą. Metoda perturbacyjna zaproponowana przez Waltersa [5], zastosowana w pracach S. Zahorskiego [1,8], pozwala na uzyskanie efektywnych rozwiązań. Zakładamy przy tym, że amplituda i częstość drgań są na tyle małe, że człony inercyjne w równaniach ruchu można zaniedbać. Traktując łożysko jako nieskończenie długie (bez wpływów bocznych) mamy do czynienia z przypadkiem płaskiego przepływu.

2. GEOMETRIA ŁOŻYSKA

Geometria łożyska przedstawiona jest na Rys.1, gdzie oznaczono: e - mimośród łożyska (bezwzględny), R_1 - promień panewki, R_2 - promień czopa, punkt O - środek panewki, punkt C - środek czopa.

Przybliżoną zależność grubości warstwy smarującej h w funkcji kąta θ otrzymamy w postaci [3]

$$h = c (1 + \epsilon \cos \theta) , \quad (2.1)$$

gdzie $c = R_1 - R_2$ jest luzem promieniowym łożyska, a $\epsilon = e/c$ mimośrodem względnym.

3. USTALONY PRZEPŁYW CIECZY NEWTONOWSKIEJ W ŁOŻYSKU

3.1. Założenia upraszczające równania ruchu.

Zagadnienie przepływu cieczy newtonowskiej w ślizgowym łożysku poprzecznym stanowi podstawę teorii smarowania. Za początek badań w tej dziedzinie uznaje się prace O.Reynoldsa z końca XIX stulecia. Reynolds, a później inni autorzy uzyskiwali równania ruchu dla cieczy smarującej z równań Naviera-Stokesa, dokonując odpowiednich uproszczeń. Uproszczenia te wynikają z następujących założeń [3,9]:

- 1° Siły masowe są pomijalnie małe;
- 2° Ciśnienie jest stałe na całej grubości warstwy smarującej. Założenie to wynika z faktu, że grubość warstwy olejowej jest pomijalnie mała w stosunku do innych charakterystycznych wymiarów łożyska;
- 3° Nie ma poślizgów cieczy na powierzchniach granicznych, tzn. na powierzchni czopa i panewki;
- 4° Przepływ jest laminarny;
- 5° Siły bezwładności są pomijalnie małe (dłg małych liczb Reynoldsa i wibracyjnych liczb Reynoldsa);
- 6° Lepkość jest stała na całej grubości warstwy olejowej;
- 7° łożysko jest nieskończenie długie stąd składowa prędkość w kierunku osi jest równa zero (brak wpływów bocznych);
- 8° Ciecz jest nieściśliwa.

W oparciu o powyższe założenia równania ruchu płynu lepkiego Naviera-Stokesa w łożysku redukują się do postaci:

$$\frac{\partial p_N}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p_N}{\partial z} = 0. \quad (3.1)$$

W powyższych równaniach p_N oznacza ciśnienie, μ jest dynamicznym współczynnikiem lepkości, u_N składową prędkości obwodowej wzdłuż osi x (Rys.16).

3.2. Rozkład prędkości i ciśnienia.

Jak wynika z równań (3.1), ciśnienie p_N jest funkcją jednej zmiennej x . Pozwala to nie tylko formalnie zastąpić pochodną cząstkową ciśnienia p_N pochodną zwykłą, ale przede wszystkim scałkować po z równanie (3.1)₁.

W wyniku dwukrotnego całkowania otrzymujemy

$$u_N = \frac{1}{2\mu} \frac{dp_N}{dx} z^2 + C_1 z + C_2 \quad . \quad (3.2)$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 określimy z warunków brzegowych. Przyjmujemy mianowicie, że czop łożyska obraca się z prędkością U , panewka zaś jest nieruchoma, tzn.

$$u_N \Big|_{z=0} = U \quad , \quad u_N \Big|_{z=h} = 0 \quad . \quad (3.3)$$

Wykorzystując powyższe warunki brzegowe w równaniu (3.2) otrzymujemy następujące wyrażenia dla prędkości u_N i jej pochodnej:

$$\frac{\partial u_N}{\partial z} = -\frac{u}{h} + \frac{1}{\mu} \frac{dp_N}{dx} \left(z - \frac{h}{2} \right), \quad (3.4)$$

$$u_N = u \left(1 - \frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2\mu} \frac{dp_N}{dx} z (z-h). \quad (3.5)$$

Oznaczmy wydatek przypadający na jednostkę szerokości żyłyska w kierunku osi x przez q . Warunek ciągłości wymaga, aby $\partial q / \partial x = 0$, a zatem

$$q = \text{const}. \quad (3.6)$$

Wydatek ten obliczmy następująco:

$$q = \int_0^h u_N dz, \quad (3.7)$$

a po podstawieniu rozwiązania (3.5) i scałkowaniu:

$$q = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp_N}{dx} + \frac{uh}{2}. \quad (3.8)$$

Wyrażenie (3.8) spotykamy zwykle w literaturze w formie

tzw. jednowymiarowego równania Reynoldsa

$$\frac{dp_N}{dx} = 6\mu \frac{h - \bar{h}}{h^3}, \quad (3.9)$$

w którym \bar{h} będąc stałą całkowania oznacza grubość warstwy cieczy w miejscu, gdzie $dp_N/dx = 0$.

Podstawienie wyrażenia (2.1) oraz $x = R \cdot \theta$ ($R_1 \approx R_2 \approx R$) do równania Reynoldsa pozwala określić rozkład ciśnienia w szczelinie smarującej w funkcji kąta θ . Otrzymujemy zatem

$$\frac{dp_N}{d\theta} = 6\mu UR \frac{c(1 + \varepsilon \cos \theta) - \bar{h}}{c^3(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}. \quad (3.10)$$

Po scałkowaniu i wykorzystaniu warunków brzegowych Sommerfelda (por. [3,9]), a mianowicie

$$p_N|_{\theta=0} = 0, \quad p_N|_{\theta=2\pi} = 0, \quad (3.11)$$

rozkład ciśnienia i jego pochodnej dane są zależnościami [3]

$$p_N = \frac{6\mu UR \varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{c^2(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{dp_N}{d\theta} = \frac{6\mu NR}{c^2} \left[\frac{1}{(1+\varepsilon \cos\theta)^2} - \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\frac{\varepsilon^2}{2})(1+\varepsilon \cos\theta)^3} \right] \quad (3.13)$$

3.3. Siła nośna łożyska.

Istnienie w trakcie pracy łożyska bezwymiarowego mimośrodowo ε wiąże się z wytworzeniem nierównomiernego i w pewnych strefach większego od otoczenia ciśnienia.

Siłą nośną łożyska nazywamy siłę zewnętrzną na jednostkę długości łożyska jaką może zrównoważyć wypadkowa elementarnych sił pochodzących od ciśnienia panującego w warstwie smarującej. Składowe siły nośnej obliczymy według wzorów

$$X_{ON} = \int_0^{2\pi} p_N R \cos\theta d\theta, \quad (3.14)$$

$$Z_{ON} = \int_0^{2\pi} p_N R \sin\theta d\theta. \quad (3.15)$$

W myśl oznaczeń na Rys.1a, składowa X_{ON} ma kierunek odcinka OC, natomiast składowa Z_{ON} jest do niego prostopadła.

Po podstawieniu do wzorów (3.14) i (3.15) rozkładu ciśnienia danego związkiem (3.12) otrzymamy

$$X_{ON} = 0, \quad (3.16)$$

$$Z_{0N} = \frac{6\mu R^2 \pi \varepsilon}{c^2 (1-\varepsilon^2)^{1/2} (1+\varepsilon^2/2)} \quad (3.17)$$

4. USTALONY PRZEPŁYW CIECZY DRUGIEGO RZĘDU W ŁOŻYSKU POPRZECZNYM

4.1. Równanie konstytutywne.

Model nieściśliwego płynu drugiego rzędu jest najprostszym modelem umożliwiającym opis efektów naprężeń normalnych w cieczach lepkosprężystych. Możemy stosować go wówczas, gdy przepływy charakteryzują się małą liczbą Debory, tzn. dla małych prędkości lub krótkich efektów pamięci (por. [6]).

Równanie konstytutywne ma postać

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{1}} + \mu \underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1 (\underline{\underline{A}}_2 - \underline{\underline{A}}_1^2) + (\alpha_1 + \alpha_2) \underline{\underline{A}}_1^2 ; \quad (4.1)$$

$$\text{tr} \underline{\underline{A}}_1 = 0 ,$$

gdzie $\underline{\underline{T}}$ oznacza tensor naprężenia, p - ciśnienie hydrostatyczne, $\underline{\underline{A}}_1$, $\underline{\underline{A}}_2$ są kinematycznymi tensorami Rivlina-Ericksena zdefiniowanymi następująco:

$$\underline{\underline{A}}_1 = \nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T ; \quad (4.2)$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \dot{\underline{\underline{A}}}_1 + \underline{\underline{A}}_1 \nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T \underline{\underline{A}}_1 .$$

Wskaźnik T oznacza transpozycję. Współczynniki μ , α_1 , α_2 są stałymi materiałowymi i zwykle dla rzeczywistych cieczy

$$\mu > 0 ; \quad \alpha_1 < 0 ; \quad \alpha_2 > 0 . \quad (4.3)$$

Założmy, że pole prędkości \vec{v} cieczy drugiego rzędu i ciśnienia p można wyrazić w następujący sposób [1,7]:

$$\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}' , \quad p = p_N + p' , \quad (4.4)$$

gdzie wskaźnik N dotyczy cieczy newtonowskiej, natomiast prim oznacza odpowiednie przyrosty dla cieczy drugiego rzędu. Podstawiając do równania ruchu (z pominięciem sił bezwładności) związek konstytutywny (4.2) i uwzględniając (4.4) otrzymamy

$$\nabla p_N - \mu \nabla^2 \vec{v}_N = 0 , \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla p' - \mu \nabla^2 \vec{v}' = & \alpha_1 \operatorname{div} \left[\underline{A}_2(\vec{v}_N) - \underline{A}_1(\vec{v}_N) \right] + \\ & + (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{div} \underline{A}_1^2(\vec{v}_N) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Prawa strona równania (4.6) zależy tylko od rozkładu prędkości cieczy newtonowskiej \vec{v}_N . Przyjmując dalej $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (płyn nieściśliwy) stwierdzamy, że równanie (4.6) jest spełnione dla $\vec{v}' = 0$ jeśli:

$$\begin{aligned} p = p + p' = p_N + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{dp_N}{dt} + \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + \alpha_2 \right) \alpha^2 ; \\ \alpha^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{A}_1^2 . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Powyższy rezultat zwany jest twierdzeniem Tannera [2].

Twierdzenie to mówi, że rozkład prędkości \vec{v} cieczy drugiego rzędu jest taki sam jak dla cieczy newtonowskiej, o ile w obu przypadkach identyczne są kinematyczne warunki brzegowe. Zmianie ulega wartość ciśnienia p , które dla tej cieczy określamy według wzoru (4.7). Twierdzenie Tannera pozwala więc stosunkowo prosto rozszerzyć rozwiązanie dla cieczy newtonowskiej na przypadek cieczy drugiego rzędu, przy zachowaniu identycznych kinematycznych warunków brzegowych. W niniejszej pracy zastosujemy tę metodę dla łożyska poprzecznego, zakładając, że czynnikiem smarującym jest np. olej wzbogacony dodatkiem polimeru, opisywany równaniem konstytutywnym cieczy drugiego rzędu.

Dla obliczenia siły nośnej łożyska niezbędna będzie znajomość składowej T_{zz} tensora naprężenia. Aby tę składową określić na podstawie równania konstytutywnego (4.1), musimy wcześniej wyznaczyć tensory $\tilde{A}_1, \tilde{A}_1^2, \tilde{A}_2$.

Przeprowadźmy rozważania w biegunowym układzie współrzędnych (r, θ) . Odpowiednie składowe prędkości \vec{v} oznaczymy przez v_r i v_θ . Oś r układu biegunowego współrzędnych pokrywa się z promieniem czopa (por. Rys.1). Z definicji mamy więc

$$(\nabla \vec{v}) = \begin{bmatrix} v_{r,r} & v_{\theta,r} \\ \frac{1}{r} v_{r,\theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} v_{\theta,\theta} + \frac{v_r}{r} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

a po uproszczeniach wynikających z założenia cienkiej warstwy smarującej, polegających m.in. na przyjęciu, że składowa promieniowa prędkości jest pomijalnie mała w stosunku do składowej obwodowej i podobnie pomijalny jest gradient prędkości w kierunku obwodowym w stosunku do gradientu w kierunku

promieniowym, otrzymujemy

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = \begin{bmatrix} 0 & v_{\theta,r} \\ -\frac{v_{\theta}}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

W macierzach (4.8) i (4.9) przecinek oznacza pochodną cząstkową po współrzędnej znajdującej się po przecinku. Kontynuując obliczenia otrzymamy

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & v_{\theta,r} - \frac{v_{\theta}}{r} \\ v_{\theta,r} - \frac{v_{\theta}}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

a oznaczając $\kappa = v_{\theta,r} - v_{\theta}/r$, mamy również

$$\tilde{A}_1^2 = \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 \\ 0 & \kappa^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa^2 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2} \text{tr} \tilde{A}_1^2 = \kappa^2.$$

Składową T_{zz} tensora naprężenia obliczymy ze związku

konstrytuwnego (4.1) z uwzględnieniem efektu naprężeń normalnych opisanego równaniem (4.7). Weźmiemy także pod uwagę wyniki (4.10) i (4.11). Po wykonaniu prostych działań arytmetycznych otrzymujemy

$$-T_{zz} = p_N + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{dp_N}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha^2, \quad (4.12)$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right)^2. \quad (4.13)$$

Powracając do oznaczeń użytych w p.3, wyrażenie (4.13) przybiera postać następującą:

$$\alpha^2 = \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \frac{u_N}{R} + \left(\frac{u_N}{R} \right)^2, \quad (4.14)$$

gdzie z uwagi na założenie cienkiej warstwy cieczy smarującej uwzględniono, że $r = R_2 + z = R + z \approx R$.

4.2. Siła nośna łożyska.

Siłę nośną łożyska obliczać będziemy według wzorów analogicznych do związków (3.14) i (3.15) właściwych dla cieczy newtonowskiej. W ten sposób

$$X_0 = \int_0^{2\pi} -T_{zz}|_{z=0} R \cos \theta d\theta, \quad (4.15)$$

$$Z_0 = \int_0^{2\pi} -T_{zz}|_{z=0} R \sin \theta d\theta. \quad (4.16)$$

Podstawiając do (4.15) wyrażenie (4.12) otrzymujemy

$$X_0 = \int_0^{2\pi} \left\{ p_N + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{dp_N}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \frac{u_N}{R} + \left(\frac{u_N}{R} \right)^2 \right] \right\} R \cos \theta d\theta. \quad (4.17)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{dp_N}{dt} &= \frac{dp_N[\theta(t)]}{dt} = \frac{dp_N}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \\ &= \frac{dp_N}{d\theta} \frac{1}{r} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} u_N \frac{dp_N}{d\theta} = \\ &= \frac{1}{R} u_N \frac{dp_N}{d\theta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie jak wcześniej założono $r \approx R$, to wyrażenie na X_0 przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 X_0 = & \int_0^{2\pi} p_N R \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N R \cos \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right) R \cos \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{R} \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} u_N \right) R \cos \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{1}{R^2} u_N^2 R \cos \theta d\theta .
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Oznaczając całki po prawej stronie wyrażenia (4.19) odpowiednio przez I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 oraz po podstawieniu do tych całek wyrażeń (3.4), (3.5), (3.12), (3.13) określających kolejno u_N , $\partial u_N / \partial z$, p_N , $dp_N / d\theta$ otrzymamy

$$J_1 = 0 , \tag{4.20}$$

$$J_2 = \frac{12 \pi \alpha_1 R u^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}} , \tag{4.21}$$

$$J_3 = -4 \pi \alpha_1 R \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \frac{2(2 + \varepsilon^2)(2\varepsilon^2 - 5) + 9}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} , \tag{4.22}$$

$$J_4 = 4\pi\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} \frac{c}{R} \left[\frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} + \right. \\ \left. - \frac{3\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right], \tag{4.23}$$

$$J_5 = 0. \tag{4.24}$$

Sumując powyższe całki otrzymamy składową siły nośnej X_0 skierowaną wzdłuż mimośrodu w postaci

$$X_0 = 4\pi\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \varepsilon \frac{(2+\varepsilon^2)(13-7\varepsilon^2)+9}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}} + \\ + 4\pi\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} \left[\frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} + \right. \\ \left. - \frac{3\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \frac{c}{R}. \tag{4.25}$$

Wszystkie całki $I_1 + I_5$ są typu $\int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^m} d\theta$

gdzie l, m, n są liczbami naturalnymi; sposób ich obliczania znaleźć można w pracy J.F.Bookera [4].

Analogiczne obliczenia jak dla składowej X_0 przeprowadzimy dla składowej Z_0 prostopadłej do mimośrodu. Podobnie jak poprzednio po podstawieniu do (4.16) wyrażeń (4.12), (4.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 Z_0 = & \int_0^{2\pi} p_N R \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{R} \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} u_N \right) \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{1}{R^2} u_N^2 \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta .
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wprowadzając oczywiste oznaczenia kolejnych całek we wzorze (4.26) napiszemy

$$Z_0 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \tag{4.27}$$

a po wykonaniu całkowania za pomocą tablic J.F.Bookera, otrzymujemy

$$J_1 = \frac{6 u \mu R^2 \pi \epsilon}{c^2 (1 - \epsilon^2)^{1/2} (1 + \epsilon^2/2)} , \tag{4.28}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \quad , \quad (4.29)$$

Ostatecznie mamy

$$Z_0 = Z_{0N} = \frac{6\mu\mu R^2}{c^2} \pi \varepsilon \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2} (1+\varepsilon^2/2)} \quad . \quad (4.30)$$

Porównując wyniki na siłę nośną łożyska poprzecznego dla cieczy newtonowskiej i cieczy drugiego rzędu, stwierdzamy, że

$$X_{0N} = 0 \quad , \quad Z_{0N} \neq 0 \quad , \quad (4.31)$$

w przypadku cieczy newtonowskiej,

$$X_0 \neq 0 \quad , \quad Z_0 = Z_{0N} \neq 0 \quad , \quad (4.32)$$

w przypadku cieczy drugiego rzędu.

5. PRZEPŁYW CIECZY NEWTONOWSKIEJ W ŁOŻYSKU Z UWZGLĘDNIENIEM DODATKOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA

5.1. Rozkład prędkości i ciśnienia.

Rozpatrzmy przypadek gdy czop łożyska poddany jest dodatkowym skrętnym drganiom harmonicznym o małej amplitudzie. Częstość tych drgań jest stała i wynosi ω .

Warunki brzegowe (3.3) przyjmują postać

$$u_N^\omega = u + \partial u \exp i\omega t, \quad u_N^\omega = 0 \quad (5.1)$$

$|_{z=0} \qquad \qquad \qquad |_{z=h}$

W powyższych wzorach ∂ jest małym parametrem charakteryzującym amplitudę drgań, u_N^ω oznacza prędkość cieczy newtonowskiej przy dodatkowych drganiach skrętnych czopa. Poszukując rozkładu prędkości u_N^ω i analogicznie zdefiniowanego ciśnienia p_N^ω przewidujemy ich postać w formie szeregów (por. [5]):

$$u_N^\omega = u_N + \partial u_{N1} \exp i\omega t + \partial^2 (\bar{u}_{N2} + \bar{u}_{N2} \exp i\omega t + \bar{\bar{u}}_{N2} \exp 2i\omega t) + \dots, \quad (5.2)$$

$$p_N^\omega = p_N + \partial p_{N1} \exp i\omega t + \partial^2 (p_{N2} + \bar{p}_{N2} \exp i\omega t + \bar{\bar{p}}_{N2} \exp 2i\omega t) + \dots, \quad (5.3)$$

Występujące we wzorach (5.2) i (5.3) wielkości u_{N1} , u_{N2} , \bar{u}_{N2} , $\bar{\bar{u}}_{N2}$, p_{N1} , p_{N2} , \bar{p}_{N2} , $\bar{\bar{p}}_{N2}$ mogą być wielkościami zespolonymi. Zatem poszukiwane funkcje u_N^ω , p_N^ω mogą być także funkcjami zespolonymi. Fizyczne znaczenie mają tylko ich części rzeczywiste zależne od warunków początkowych.

Prędkość u_N^ω oraz ciśnienie p_N^ω muszą spełniać równania ruchu Naviera-Stokesa (3.1). Po podstawieniu wyrażeń (5.2) i (5.3) do równań ruchu, ograniczeniu się do efektów drugiego rzędu i porównaniu członów występujących przy ∂^n , ($n=0, 1, 2$) otrzymamy:

dla $n = 0$ (jest to rozpatrzony w p.3 ruch ustalony)

$$\frac{\partial p_{N1}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial p_N}{\partial z} = 0; \quad (5.4)$$

dla $n = 1$

$$\frac{\partial p_{N1}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial p_{N1}}{\partial z} = 0; \quad (5.5)$$

dla $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{N2}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial x} \exp i\omega t + \frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial x} \exp 2i\omega t = \mu \left(\frac{\partial^2 u_{N2}}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \bar{u}_{N2}}{\partial z^2} \exp i\omega t + \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_{N2}}{\partial z^2} \exp 2i\omega t \right), \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_{N2}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial z} \exp i\omega t + \frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial z} \exp 2i\omega t = 0.$$

Układ równań (5.4) jest identyczny z równaniami (3.1). Z postaci warunków brzegowych (5.1) wynika, że dla $n = 0$, czyli dla członów nie zawierających ϑ , warunki te są identyczne z warunkami (3.3). Zachowując w mocy warunki brzegowe dla ciśnienia (3.11) otrzymamy rozwiązanie dane wzorami (3.4), (3.5), (3.12) i (3.13).

Układ równań (5.5) ma formalnie tę samą postać co układ (5.4). Z warunków brzegowych (5.1) wynika, że

$$u_{N1} \Big|_{z=0} = u; \quad u_{N1} \Big|_{z=h} = 0. \quad (5.7)$$

Zakładając ponadto, że

$$p_{N1} \Big|_{\theta=0} = p_{N1} \Big|_{\theta=2\pi} = 0 \quad (5.8)$$

otrzymamy rozwiązanie dla u_{N1} , p_{N1} jak dla u_N i p_N .

Dla rozwiązania układu równań (5.6) przyrównajmy wyrażenia przy $\exp i m t$ ($m=0,1,2$). Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{N2}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_{N2}}{\partial z^2} &= 0, \quad \text{dla } m=0, \\ \frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_{N2}}{\partial z^2} &= 0, \quad \text{dla } m=1, \\ \frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_{N2}}{\partial z^2} &= 0, \quad \text{dla } m=2; \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{N2}}{\partial z} = 0, \quad \text{dla } m=0,$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{p}}_{N2}}{\partial z} = 0, \quad \text{dla } m=1, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\bar{p}}}_{N2}}{\partial z} = 0, \quad \text{dla } m=2.$$

Warunki brzegowe dla równań (5.9) i (5.10) są następujące:

$$p_{N_2}(\theta=0) = p_{N_2}(\theta=2\pi) = p_{N_2}(Q) = \quad (5.11)$$

$$= \bar{p}_{N_2}(2\pi) = \bar{p}_{N_2}(0) = \bar{p}_{N_2}(2\pi) = 0 ,$$

$$u_{N_2}(z=0) = u_{N_2}(z=h) = \bar{u}_{N_2}(0) = \quad (5.12)$$

$$= \bar{u}_{N_2}(h) = \bar{u}_{N_2}(0) = \bar{u}_{N_2}(h) = 0 .$$

Z postaci równań (5.9), (5.10) i warunków brzegowych (5.11) i (5.12) wynika, że rozwiązania dla $m = 0, 1, 2$ będą identyczne. Ograniczmy się zatem do analizy przypadku $m = 0$. Całkując równanie (5.9)₁ z uwzględnieniem (5.10)₁ i po wykorzystaniu odpowiedniego warunku (5.12) otrzymujemy

$$u_{N_2} = \frac{1}{2\mu R} z(z-h) \frac{dp_{N_2}}{d\theta} \quad (5.13)$$

.W równaniu (5.13) podobnie jak wcześniej w p.3 przyjęto $x = R \cdot \theta$. Obliczając wydatek objętościowy

$$q_v = \int_0^h u_{N_2} dz = \int_0^h \frac{1}{2\mu R} z(z-h) \frac{dp_{N_2}}{d\theta} dz = -\frac{1}{12\mu R} h^3 \frac{dp_{N_2}}{d\theta} , \quad (5.14)$$

przy braku upływów bocznych, mamy

$$\frac{dp_{N2}}{d\theta} = - \frac{12\mu R q_v}{h^3} \quad (5.15)$$

Całkując równanie (5.15) otrzymujemy

$$p_{N2} = -12\mu R q_v \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} + C \quad (5.16)$$

Dla znalezienia stałych całkowania q oraz C wykorzystamy warunki brzegowe $p_{N2}(0) = p_{N2}(2\pi) = 0$, wymienione wcześniej w zależnościach (5.11). Podstawiając te warunki do równania (5.16) otrzymamy

$$0 = -12\mu q R \int_0^0 \frac{d\theta}{h^3} + C, \quad (5.17)$$

$$0 = -12\mu q R \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h} + C.$$

Z pierwszego z równań (5.17) wynika, że $C = 0$, a ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{c^3(1+\varepsilon \cos\theta)^3} = \\ &= \frac{1}{c^3} \frac{2\pi \varepsilon^3 (2-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \neq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

to jedynym rozwiązaniem układu równań (5.17) jest $q = 0$, $C = 0$, a co za tym idzie na podstawie wzoru (5.16) $p_{N2} = 0$. Łatwo zauważyć, że z równania (5.13) dla $p_{N2} = 0$ wynika także $u_{N2} = 0$.

5.2. Siła nośna łożyska.

Jak wynika z obliczeń przeprowadzonych w p.5.1 ciśnienie P_N^w wyraża się następująco:

$$p_N^w = p_N + \varepsilon p_N \exp i \omega t, \quad (5.19)$$

ponieważ $p_{N1} = p_N$, $p_{N2} = \bar{p}_{N2} = \overline{\overline{p}_{N2}} = 0$.

Ze wzoru (5.19) wynika, że ciśnienie p_N^w składa się z dwóch części stałej p_N i okresowo zmiennej zależnej od czasu $p_N \exp i \omega t$. Z uwagi na występowanie w części harmonicznnej dodatkowego parametru - czasu t , zachodzi konieczność uśrednienia ciśnienia p_N^w w wybranym przedziale czasu, np. jednego pełnego cyklu. W ten sposób dochodzimy do definicji składowych siły nośnej

$$X_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p_N + \varepsilon p_N \exp i \omega t) R \cos \theta d\theta dt, \quad (5.20)$$

$$Z_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p_N + \varepsilon p_N \exp i \omega t) R \sin \theta d\theta dt, \quad (5.21)$$

gdzie Re oznacza część rzeczywistą funkcji podcałkowych.

Ponieważ $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \text{Re}(\exp i\omega t) dt = 0$, to ze wzorów (5.20), (5.21), (3.14), (3.15) oraz (3.16) wynika, że

$$X_{\omega N} = X_{0N} = 0, \quad Z_{\omega N} = Z_{0N}. \quad (5.22)$$

W oparciu o wyniki (5.22) stwierdzamy, że dodatkowe drgania skrętne czopa nie wpływają na wielkość siły nośnej łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej.

6. PRZEPŁYW CIECZY DRUGIEGO RZĘDU W ŁOŻYSKU Z UWZGLĘDNIENIEM DODATKOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA

6.1. Rozkład prędkości i ciśnienia.

Przyjmując kinematyczne warunki brzegowe dla cieczy drugiego rzędu identyczne z warunkami dla cieczy newtonowskiej, także w przypadku istnienia dodatkowych drgań czopa, możemy w rozważanym zadaniu zastosować twierdzenie Tannera [2]. Twierdzenie to, jak pokazano w p.4.1, umożliwia określenie rozkładu ciśnienia i prędkości w przepływie cieczy drugiego rzędu, jeśli znany jest rozkład prędkości i ciśnienia w przepływie cieczy newtonowskiej.

Punktem wyjścia będą więc newtonowskie rozkłady prędkości u_N^{ω} i ciśnienia p_N^{ω} obliczone w p.5.1. Mają one postać

$$u_N^{\omega} = u_N + \varepsilon u_N \exp i\omega t, \quad (6.1)$$

$$p_N^{\omega} = p_N + \varepsilon p_N \exp i\omega t. \quad (6.2)$$

Ponieważ w związkach (6.1) i (6.2) występują wielkości zespolone, fizyczny sens będą miały odpowiednie części rzeczywiste. Na podstawie wyników (3.5) i (3.12) określających rozkłady prędkości u_N i ciśnienia p_N w przepływie ustalonym stwierdzamy, że

$$\operatorname{Re} u_N = u_N ; \quad \operatorname{Re} p_N = p_N . \quad (6.3)$$

Uwzględnienie (6.3) w wyrażeniach (6.1) i (6.2) daje dla części rzeczywistych

$$u_N^w = u_N + \partial u_N \operatorname{Re} \exp i \omega t , \quad (6.4)$$

$$p_N^w = p_N + \partial p_N \operatorname{Re} \exp i \omega t . \quad (6.5)$$

Do obliczenia siły nośnej łożyska potrzebna będzie znajomość składowej T_{zz}^w tensora naprężenia. Na mocy twierdzenia Tannera i na podstawie wyprowadzonych w rozdziale 4.1 wzorów (4.12) i (4.13), w których u_N zastępujemy przez u_N^w , a p_N przez p_N^w , otrzymujemy

$$-T_{zz}^w = p_N^w + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{dp_N^w}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha^2 , \quad (6.6)$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{\partial u_N^w}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N^w}{\partial z} \frac{u_N^w}{R} + \left(\frac{u_N^w}{R} \right)^2 , \quad (6.7)$$

a po uwzględnieniu (6.7) w (6.6),

$$\begin{aligned}
 -T_{ZZ}^{\omega} = p_N^{\omega} + \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{dp_N^{\omega}}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial u_N^{\omega}}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 \left. - 2 \frac{\partial u_N^{\omega}}{\partial z} \frac{u_N^{\omega}}{R} - \left(\frac{u_N^{\omega}}{R} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Po podstawieniu do równania (6.8) w miejsce u_N^{ω} i p_N^{ω} odpowiednich związków (6.4) i (6.5) otrzymamy wyrażenie na T_{ZZ}^{ω} jako sumę trzech składników rzędu ϑ^0 , ϑ^1 , ϑ^2 . Oznaczając poszczególne człony tej sumy odpowiednio przez T_{ϑ^0} , T_{ϑ^1} , T_{ϑ^2} możemy napisać

$$-T_{ZZ}^{\omega} = T_{\vartheta^0} + \vartheta T_{\vartheta^1} + \vartheta^2 T_{\vartheta^2} \tag{6.9}$$

gdzie T_{ϑ^0} określone jest wzorami (4.12) i (4.14).

Wykorzystując ponadto równanie (4.18) otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned}
 T_{\vartheta^1} = \frac{\alpha_1}{\mu} \left[\frac{2}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} u_N \operatorname{Re}(\exp i \omega t) + 2 p_N \operatorname{Re}(i \omega \exp i \omega t) \right] + \\
 - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[2 \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 \operatorname{Re}(\exp i \omega t) + \right. \\
 \left. - \frac{4}{R} \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N \operatorname{Re}(\exp i \omega t) + \frac{2}{R^2} u_N u_N \operatorname{Re}(\exp i \omega t) \right],
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$T_{\partial z} = \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N (\operatorname{Re} \exp i \omega t)^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} \exp i \omega t \right)^2 + \right. \\ \left. - \frac{2}{R} \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N (\operatorname{Re} \exp i \omega t)^2 + \frac{u_N}{R} (\operatorname{Re} \exp i \omega t)^2 \right]. \quad (6.11)$$

6.2. Siła nośna łożyska.

Podobnie jak w zagadnieniu dotyczącym harmonicznym zmian ciśnienia w cieczy newtonowskiej (por. rozdz. 5) mamy teraz do czynienia ze zmienną w czasie składową T_{ZZ}^w tensora naprężenia. Składowe jednostkowej siły nośnej łożyska X_w oraz Z_w obliczamy jako wielkości uśrednione dla jednego pełnego okresu drgań, analogicznie do definicji (5.20) oraz (5.21). Mamy więc

$$X_w = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(-T_{ZZ}^w \right) \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt, \quad (6.12)$$

$$Z_w = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(-T_{ZZ}^w \right) \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt, \quad (6.13)$$

gdzie T_{ZZ}^w określone jest wyrażeniem (6.9).

Wykorzystując zależności

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re} \exp i \omega t dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re} i \omega \exp i \omega t dt = 0 \quad (6.14)$$

w równaniach (6.12) i (6.13) oraz biorąc pod uwagę postać związku (6.10), otrzymamy

$$X_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(T_{\vartheta^0} + \vartheta^2 T_{\vartheta^2} \right) \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt, \quad (6.15)$$

$$Z_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(T_{\vartheta^0} + \vartheta^2 T_{\vartheta^2} \right) \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt. \quad (6.16)$$

Do obliczenia całek (6.15) i (6.16) skorzystamy z następujących zależności:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\operatorname{Re} \exp i \omega t)^2 dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = 1, \quad (6.17)$$

co prowadzi do

$$X_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^0} \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} \vartheta^2 \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta, \quad (6.18)$$

$$Z_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^0} \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \vartheta^2 \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta . \quad (6.19)$$

Pierwszą całkę po prawej stronie wzoru (6.18) obliczyliśmy wcześniej w rozdziale 4.2, poświęconym sile nośnej łożyska dla ustalonego przepływu cieczy drugiego rzędu. Oznaczyliśmy ją wówczas przez X_0 , a jej wartość określa związek (4.25). W tym samym rozdziale obliczyliśmy pierwszą całkę po prawej stronie związku (6.19). Oznaczając ją przez Z_0 , stwierdziliśmy jednocześnie na podstawie wzoru (4.30), że jej wartość jest taka sama jak w rozwiązaniu dla cieczy newtonowskiej Z_{0N} .

Przyrost siły nośnej łożyska wynikający z nałożenia dodatkowych drgań reprezentują drugie całki po prawych stronach równań (6.18) i (6.19). Oznaczamy te przyrosty odpowiednio przez

$$X_{\omega\vartheta^2} = \frac{1}{2} \vartheta^2 \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta , \quad (6.20)$$

$$Z_{\omega\vartheta^2} = \frac{1}{2} \vartheta^2 \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta . \quad (6.21)$$

Po podstawieniu do całek (6.20) i (6.21) wyrażenia (6.11) stwierdzamy, że

$$X_{\omega\vartheta^2} = J_2 + J_3 + J_4 + J_5 , \quad (6.22)$$

gdzie I_2, I_3, I_4, I_5 określone są wzorami (4.21), (4.22), (4.23) i (4.24). Wykorzystując zatem obliczenia z rozdziału 4 możemy napisać

$$\begin{aligned} \chi_{\omega\vartheta^2} &= \frac{1}{2} \vartheta^2 \chi_0 = \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^2 \left\{ 4\pi\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \varepsilon \frac{(2+\varepsilon^2)(13-7\varepsilon^2)+9}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad + 4\pi\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \frac{c}{R} \left[\frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Łatwo zauważyć, że dla składowej $Z_{\omega\vartheta^2}$ mamy

$$Z_{\omega\vartheta^2} = J_2 + J_3 + J_4 + J_5 , \quad (6.24)$$

skąd otrzymujemy ze wzoru (4.29)

$$Z_{\omega\vartheta^2} = 0 . \quad (6.25)$$

Na podstawie powyższych wyników możemy stwierdzić, że dla cieczy drugiego rzędu nałożenie dodatkowych harmonicznych drgań skrętnych na ustalony ruch czopa wywołuje dalszy wzrost składowej siły nośnej łożyska, w kierunku równoległym do mimośrodu. Druga składowa pozostaje niezmienną przyjmując wartość jak dla cieczy newtonowskiej.

6.3. Określenie względnego przyrostu siły nośnej łożyska dla cieczy drugiego rzędu.

Wzrost siły nośnej łożyska dla cieczy drugiego rzędu w skutek istnienia dodatkowych harmonicznnych drgań skrętnych czopa reprezentować będzie bezwymiarowy współczynnik K_1 zdefiniowany poniżej:

$$K_1 = \frac{\text{dodatkowa siła nośna wynikająca z nałożenia drgań}}{\text{siła nośna dla ruchu ustalonego czopa}},$$

który po zastosowaniu oznaczeń użytych wcześniej przyjmuje postać

$$K_1 = \frac{\vartheta^2 \sqrt{X_{\omega\vartheta}^2 + Z_{\omega\vartheta}^2}}{\sqrt{X_0^2 + Z_0^2}} = \frac{\vartheta^2 X_{\omega\vartheta}^2}{\sqrt{X_0^2 + Z_0^2}}, \quad (6.26)$$

gdzie uwzględniono zależność (6.25). W dalszym ciągu będziemy korzystać ze współczynnika $K = K_1/\vartheta^2$, niezależnego od amplitudy dodatkowych drgań. Wielkości $X_{\omega\vartheta}^2$, X_0 , Z_{0H} określone są wzorami (6.23), (4.25) i (3.17). Przekształcając na ich podstawie zależność (6.26), otrzymamy dla współczynnika K

$$K = \frac{De \frac{1}{2} [f_1(\varepsilon) + K_0 f_2(\varepsilon)]}{\sqrt{De^2 [f_1(\varepsilon) + K_0 f_2(\varepsilon)]^2 + f_3^2(\varepsilon)}}, \quad (6.27)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$f_1(\varepsilon) = 4\varepsilon \frac{(2+\varepsilon^2)(13-7\varepsilon^2)+9}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad (6.28)$$

$$f_2(\varepsilon) = 4 \left[\frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} - \frac{3\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right], \quad (6.29)$$

$$f_3(\varepsilon) = \frac{6\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(1+\varepsilon^2/2)}, \quad K_0 = \frac{c}{R}, \quad (6.30)$$

zaś liczbę Debory De zdefiniowano następująco:

$$De = - \frac{\alpha_1}{\mu} \frac{u}{R}. \quad (6.31)$$

W rzeczywistych łożyskach parametr K_0 oraz mimośród względny ε przyjmują wartości podane w pracy D.D.Fullera [9] w następującym zakresie:

$$0,4 \leq \varepsilon \leq 0,9, \quad 0,5 \cdot 10^{-3} \leq K_0 \leq 4 \cdot 10^{-3}.$$

Zależność współczynnika K od liczby Debory De dla różnych wartości mimośrodu ε pokazano na Rys.2. Obliczenia numeryczne wykazały ponadto, że współczynnik ten praktycznie nie zależy bezpośrednio od luzu względnego łożyska $K_0 = c/R$.

7. WNIOSKI

Wyniki uzyskane w pracy pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- 1^o Nałożenie na ruch ustalony czopa dodatkowych harmonicznym drgań skrętnych nie powoduje zmiany siły nośnej łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej.
- 2^o Zastosowanie w łożysku jako czynnika smarującego cieczy opisywanej modelem cieczy drugiego rzędu powoduje zwiększenie siły nośnej łożyska zarówno dla ustalonego ruchu czopa, jak i w przypadku dodatkowych drgań skrętnych. Jakościowe zmiany siły działającej na czop pokazane zostały na Rys.3. Z rysunku tego wynika, że składowa siły nośnej w kierunku prostopadłym do kierunku mimośrodów nie zmienia się w żadnym z rozważanych przypadków.
- 3^o Na podstawie wykresu przedstawionego na Rys.2 możemy stwierdzić, że dla wzrastających wartości mimośrodu względnego ϵ , co odpowiada w rzeczywistości zwiększonemu obciążeniu łożyska, dodatkowa siła nośna $X_{\omega} \epsilon^2$ wzrasta w zakresie małych liczb Debory. Dla większych liczb Debory, począwszy od $De \approx 0,3$, współczynnik K dąży do 0,5.

LITERATURA

1. S.Zahorski, Effect of small-amplitude harmonic vibrations on viscoelastic flows in a plane slider bearing, Arch. Mech., 34, 1, 73-88, 1982
2. R.I.Tanner, Plane creeping flows of incompressible second-order-fluids, Phys.Fluids, 9, 1246, 1966
3. A.Cameron, The principles of lubrication, Longmans 1966
4. J.F.Booker, A table of the journal - bearing integrals, Trans of ASME, ser.D, 533-535, June 1965

5. T.E.R.Jones, K.Walters, The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear, J.Phys.A.Gen.Phys., 4, 85, 1971
6. S.Zahorski, Mechanics of viscoelastic fluids, Martinus Nijhoff-Polish Sci.Publ., The Hague-Warszawa 1982
7. A.C.Pipkin, Lectures on viscoelasticity theory, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1972
8. S.Zahorski, Effects of inertia and high-frequency harmonic vibrations on the lift and frictions forces in viscoelastic slider-bearing flows, Arch.Mech., 34, 3, 359-373, 1982
9. D.D.Fuller, Teoria i praktyka smarowania, PWT Warszawa 1960

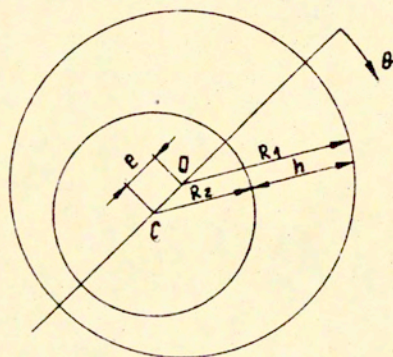
Effect of small torsional vibrations of the shaft
on the load capacity of a journal bearing

Abstract

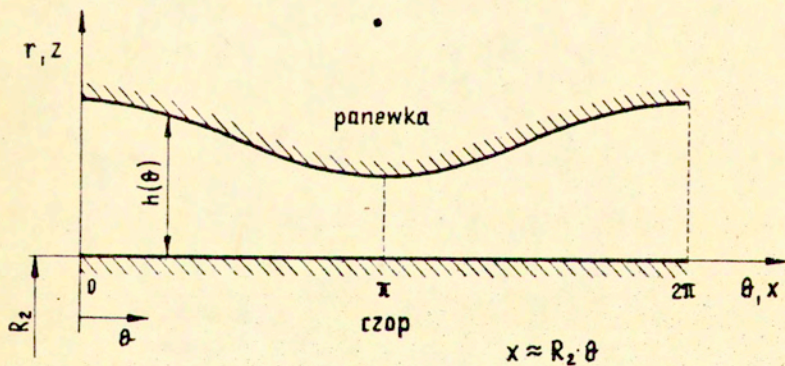
An effect of additional harmonic vibrations of torsional character, superposed on steady motions of the shaft of a journal bearing, on the variability of the load capacity is considered in detail. It is assumed the amplitude of vibrations and frequency are small enough to neglect inertia terms in the equations of motion.

It is shown that the additional vibrations do not alter the load capacity of a bearing in the case of Newtonian fluids. On the contrary, in the case in which the lubricating medium is described by the model of second-order fluid the load capacity increases. This is due to the existence of the force component parallel to the direction of eccentricity.

a,



b,

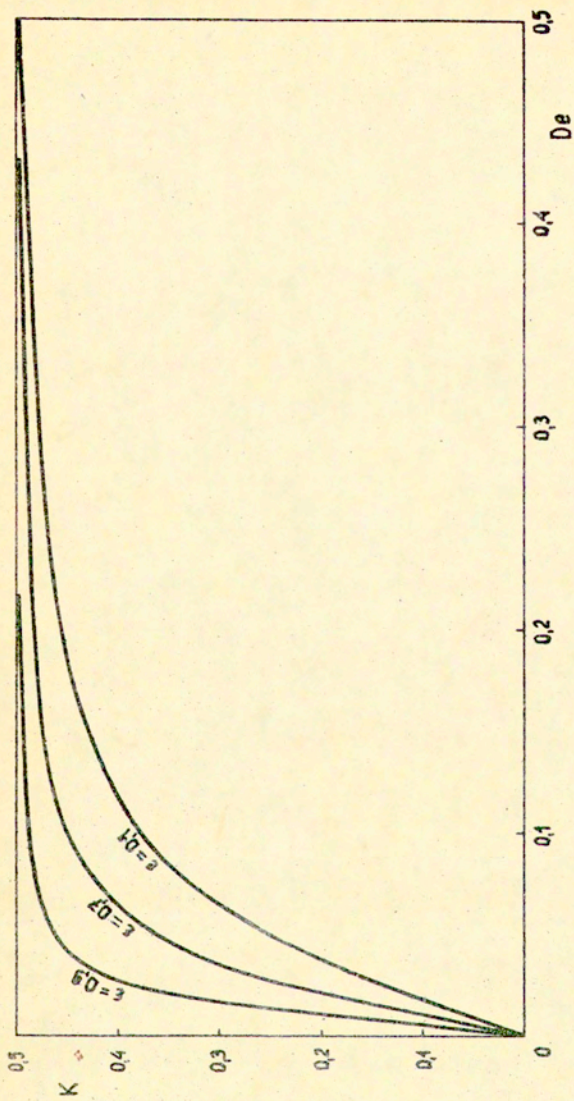


Rys. 1

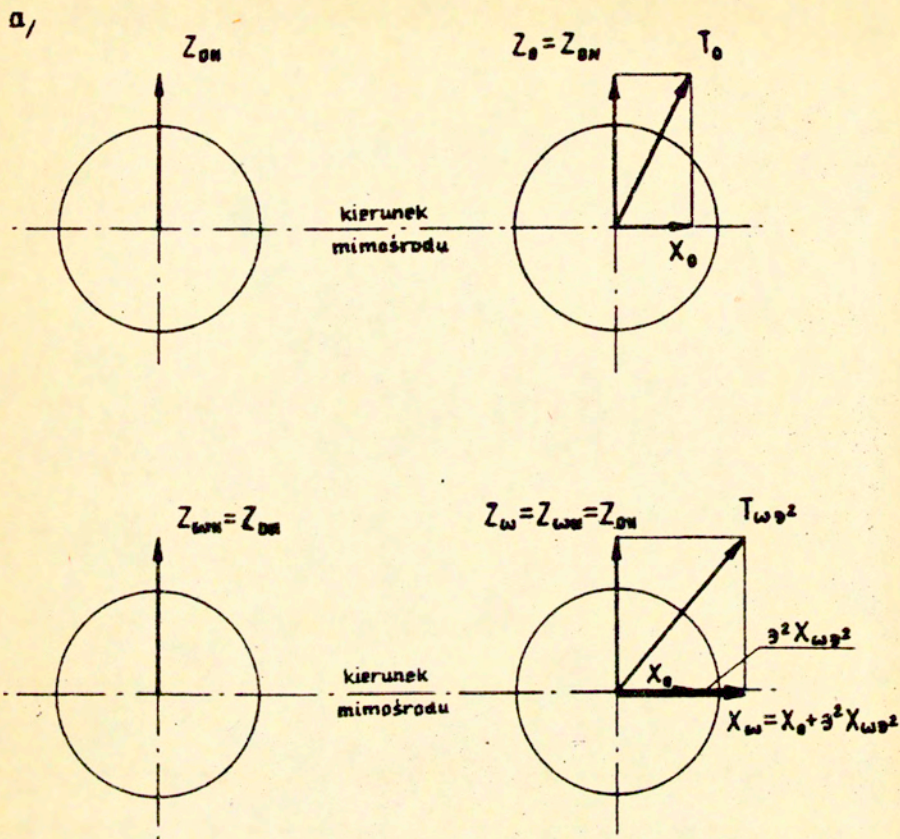
Geometria łożyska

a, naturalna (przybliżona)

b, w rozwinięciu



Rys. 2



Rys. 3

Kierunki działania siły nośnej

a/ ruch ustalony

b/ ruch z uwzględnieniem drgań