

3.31 — falowody, ośrodki żyrotropowe

Maciej Sowiński

DOZPRASZANIE NA RDZENIU
ŻYROTROPOWYM
UMIESZCZONYM POPRZECZNIE
W FALOWODZIE PROSTOKĄTNYM

23/1982

p. 269a



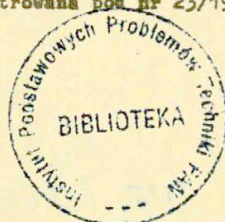
WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 188

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 marca 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 23/1982



57051



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 1 . Ark. druk. 2 .

Oddano do drukarni w maju 1982 r.

Nr zamówienia 275/0/82 | Z - 87.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Sniadeckich 8

Maciej Sowiński
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPPT PAN

ROZPRASZANIE NA RDZENIU ŻYROTROPOWYM UMIESZCZONYM
POPZRZECZNIE W FALOWODZIE PROSTOKĄTNYM

Streszczenie

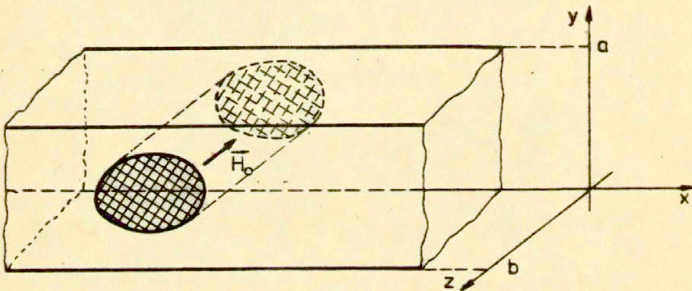
W pracy rozważony został problem rozpraszania fal elektromagnetycznych na cylindrycznym, żyrotropowym rdzeniu, umieszczonym poprzecznie do kierunku propagacji w falowodzie prostokątnym. Oś żyrotropii pokrywa się z osią symetrii cylindrycznego rdzenia. Problem znalezienia pola w takiej strukturze przy pobudzeniu jej falami $H_{m,n}$ bądź $E_{m,n}$ został sprowadzony do zagadnienia dwuwymiarowego a następnie do układu dwóch jednowymiarowych równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju, które mogą być już łatwo rozwiązywane metodami numerycznymi. W celu otrzymania tych równań w pracy zostały użyte: podział pola na tak zwane mody transwersalne podłużnie oraz skalarne potencjały Hertza dla ośrodka żyrotropowego wyprowadzone przez autorów pracy [1].

Na uwagę zasługuje również sformułowanie zagadnienia poszukiwania pola w rdzeniu żyrotropowym w postaci dwóch równań Helmholtza. Funkcje będące rozwiązaniami tych równań sprzężone są tylko warunkami zszycia na konturze przekroju rdzenia.

1. Równania różniczkowe dla potencjałów i warunki ciągłości pola na powierzchni cylindrycznego żyrotropowego rdzenia.

1.1. Postawienie problemu

Rozpatrzmy tutaj problem przejścia fal elektromagnetycznych przez odcinek falowodu prostokątnego z umieszczonym w nim rdzeniem żyrotropowym o cylindrycznym kształcie. Oś żyrotropii pokrywa się z osią symetrii rdzenia i jest prostopadła do jednej z par ścianek falowodu. Praktycznymi przykładami takich struktur są rdzenie anizotropowe bądź ferrytowe - magnesowane stałym polem magnetycznym \vec{H}_0 skierowanym wzdłuż osi rdzenia, rys.1. Zakładamy, że ścianki falowodu są idealnie przewodzące, $\sigma = \infty$, pobudzenie jest zależne harmonicznie od czasu zgodnie z czynnikiem $e^{-i\omega t}$, ośrodek wypełniający falowód poza rdzeniem jest izotropowy.

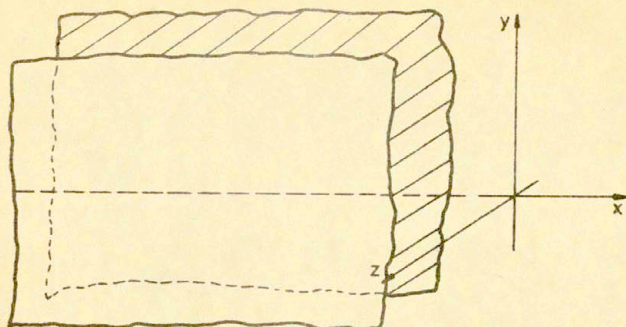


Rys.1.

Przypadek szczególny, a mianowicie pobudzanie struktury pokazanej na rys.1 falami $H_{m,0}$, został rozpatrzony w pracy [3]. Obecnie zajmiemy się pobudzeniami pozostałych typów to znaczy $H_{m,n}$ i $E_{m,n}$ dla $n \neq 0$, co wyczerpie możliwości, gdyż fale $E_{m,0}$ nie mogą się tutaj propagować.

1.2. Opis pola w rdzeniu żyrotropowym

Rozważymy ośrodek żyrotropowy, umieszczony pomiędzy dwiema równoległymi, przewodzącymi płaszczyznami, rys.2.



Rys.2.

Przenikalność magnetyczna i elektryczna dane są następującymi tensorami:

$$(1.1) \quad \overline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}; \quad \overline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon_g & 0 \\ i\epsilon_g & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$$

gdzie: μ , μ_g , μ_0 , ϵ , ϵ_g i ϵ_0 są liczbami zespolonymi, a więc ośrodek może być dowolnie stratny.

Do opisu pola elektromagnetycznego w takim ośrodku użyjemy skalarnych potencjałów Hertza W i V wyprowadzonych dla ośrodka żyotropowego przez S. Przeździeckiego i R.A. Hurda [1], przyjmując jako kierunek - wyróżniony kierunek osi z . Pola elektromagnetyczne wyrażają się przy użyciu tych potencjałów następująco:

$$(1.2) \quad E_z = -\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \nabla_t^2 W; \quad e = \nabla_t \frac{\partial W}{\partial z} + \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} \nabla_t V + i \omega \mu \nabla_t \times W \vec{z}_0$$

$$H_z = -\frac{\mu}{\mu_0} \nabla_t^2 V; \quad h = \nabla_t \frac{\partial V}{\partial z} - \omega \epsilon \frac{\mu_g}{\mu} \nabla_t W - i \omega \epsilon \nabla_t \times W \vec{z}_0$$

gdzie W i V spełniają następujący układ równań:

$$(1.3.) \quad \begin{aligned} (\nabla_t^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2) W &= -\omega \mu \tau_g \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\partial V}{\partial z} \\ (\nabla_t^2 + \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_m^2) V &= \omega \epsilon \tau_g \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}$$

Użyliśmy tu następujących oznaczeń:

$$\begin{aligned} \nabla_t &= \nabla - \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} ; \quad e = E - \bar{z}_0 E_z ; \quad h = H - \bar{z}_0 H_z \\ \tau_g &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon} + \frac{\mu_0}{\mu} ; \quad k_e^2 = \omega^2 \epsilon_0 \frac{\mu^2 - \mu_0^2}{\mu} ; \quad k_m^2 = \omega^2 \mu_0 \frac{\epsilon^2 - \epsilon_0^2}{\epsilon} \end{aligned}$$

\bar{z}_0 - wersor osi z .

W przypadku dwóch równoległych płaszczyzn $z = 0$, i $z = b$ Mikaeljan [2] pokazał, że pola elektromagnetyczne pomiędzy takimi płaszczyznami mają, również dla ośrodka izotropowego, następującą zależność od zmiennej z :

$$(1.4.) \quad E_{z,n} = e_z(x,y) \cos \frac{n\pi}{b} z ; \quad H_{z,n} = h_z(x,y) \sin \frac{n\pi}{b} z ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Łącząc ten wynik z poprzednim możemy opisać pole przy pomocy dwuwymiarowych potencjalnych funkcji Hertza w_n i v_n określonych zgodnie z (1.2) i (1.4) jako;

$$(1.5) \quad \begin{aligned} W_n(x,y,z) &= w_n(x,y) \cos \frac{n\pi}{b} z ; \quad V_n(x,y,z) = v_n(x,y) \sin \frac{n\pi}{b} z ; \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

gdzie w_n i v_n spełniają równania:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} (\nabla^2 + k_e^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) w_n &= -\omega \mu \tau_g \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{n\pi}{b} v_n \\ (\nabla^2 + k_m^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\mu_0}{\mu}) v_n &= -\omega \epsilon \tau_g \frac{\mu_0}{\mu} \frac{n\pi}{b} w_n \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przypadek $n = 0$ został rozpatrzony w pracy [3], w dalszym ciągu będziemy więc zakładać, że $n > 0$, to znaczy $n = 1, 2, 3, \dots$. Dla każdego, ustalonego $n = n_0 > 0$, pole opisane parą funkcji w_{n_0}, v_{n_0} może samodzielnie istnieć w rozpatrywanej tutaj strukturze co bezpośrednio widoczne jest z równań (1.6), które będą spełniane przez pary w_{n_0}, v_{n_0} dla każdego n_0 oddzielnie. Założymy więc, że ustaliliśmy pewną wartość $n = n_0$ i będziemy odtąd opuszczali indeksy przy funkcjach w i v . Założymy ponadto, że poszukiwane rozwiązania układu (1.6) są conajmniej 4-krotnie różniczkowalne. Przy tym założeniu możemy rozwinąć układ (1.6) otrzymując dwa równania 4-tego rzędu. Okazują się one identyczne, to znaczy zarówno w jak i v muszą spełniać równanie:

$$(1.7) \quad \Delta^2 w + \alpha \Delta w + \beta w = 0$$

gdzie:

$$\alpha = k_e^2 + k_m^2 - \frac{n_0^2 \pi^2}{b^2} \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right)$$

$$\beta = \left(k_e^2 - \frac{n_0^2 \pi^2}{b^2} \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \right) \left(k_m^2 - \frac{n_0^2 \pi^2}{b^2} \frac{\mu_a}{\mu} \right) - \omega^2 \epsilon_a \mu_a \tau_0 \frac{n_0^2 \pi^2}{b^2}$$

$$\Delta \triangleq \nabla^2$$

Jest to równanie eliptyczne na całej płaszczyźnie X, Y . Operator $(\Delta^2 + \alpha \Delta + \beta)$ można rozłożyć na iloczyn dwóch operatorów Helmholtza:

$$\Delta^2 + \alpha \Delta + \beta = (\Delta + \Gamma_1^2) (\Delta + \Gamma_2^2) = H_1 \cdot H_2$$

gdzie:

$$(1.8) \quad \Gamma_1^2 = \frac{+\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad ; \quad \Gamma_2^2 = \frac{+\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Ponieważ równanie (1.7) jest jednorodne a składanie operatorów H_1 i H_2 jest przemienne, poszukiwane potencjały w i v muszą spełniać tylko jedno spośród następujących dwóch równań Helmholtza:

$$(1.9) \quad \nabla^2 w + \Gamma_1^2 w = 0$$

$$(1.10) \quad \nabla^2 w + \Gamma_2^2 w = 0$$

Aby jednak funkcje w i v stanowiły parę rozwiązań układu (1.6) muszą spełniać to samo równanie Helmholtza i co więcej, mogą się różnić od siebie tylko o stałą multiplikatywną. Możliwe są więc dwie następujące pary rozwiązań;

$$(1.11) \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{gdzie:} \quad \begin{aligned} H_1 w_1 &= H_1 v_1 = 0 \\ H_2 w_2 &= H_2 v_2 = 0 \end{aligned}$$

Ponadto mają miejsce zależności;

$$(1.12) \quad v_1 = A_1 w_1 \quad ; \quad v_2 = A_2 w_2$$

gdzie:

$$A_i = \frac{\epsilon \cdot b \left(\frac{n_0^2 \pi^2}{b^2} \frac{\epsilon_a}{\epsilon} - k_a^2 + \Gamma_i^2 \right)}{\omega \cdot \mu \cdot \tau_g \cdot \epsilon_a \cdot n_0 \cdot \pi} = \frac{\omega \cdot \epsilon \cdot \tau_g \cdot \mu_a \cdot n_0 \cdot \pi}{\mu \cdot b \left(\frac{n_0^2 \pi^2}{b^2} \frac{\mu_a}{\mu} - k_m^2 + \Gamma_i^2 \right)}$$

dla $i = 1, 2$.

Podobnie postępując możemy otrzymać równanie czwartego rzędu analogiczne do (1.7) dla dowolnego ^{jednorodnego} ośrodka żyotropowego. Jednak w ogólnym przypadku rozłożenie tego równania na dwa niesprężone równania rzędu drugiego jest niemożliwe, na co wskazuje autor [4]. Można go dokonać dla harmonicznej zależności

ci od zmiennej z co zostało tutaj zrobione.

1.3. Opis pola w ośrodku izotropowym otaczającym rdzeń.

Do opisu pola w ośrodku izotropowym użyjemy również potencjalnych funkcji Hertza zgodnie z pracą [1] przyjmując jako kierunek wyróżniony - kierunek \vec{z}_0 , wektora osi z . Funkcje potencjalne U i U spełniają równanie:

$$(1.13) \quad (\nabla^2 + k^2)(U) = 0 ; \quad k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

gdzie: ϵ_0 , μ_0 - przenikalności ośrodka izotropowego:
Dowolne pole elektromagnetyczne wyraża się wzorami:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} E &= \nabla \times \nabla \times U \vec{z}_0 + i\omega \mu_0 \nabla \times U \vec{z}_0 \\ H &= -i\omega \epsilon_0 \nabla \times U \vec{z}_0 + \nabla \times \nabla \times U \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Kładąc $U \equiv 0$ lub $U \equiv 0$ otrzymujemy pola TE i TM względem kierunku \vec{z}_0 .

Ponieważ zarówno w rdzeniu jak i w falowodzie prostokątnym zależność pól od zmiennej z jest postaci $\sin \frac{n\pi}{b} z$, $\cos \frac{n\pi}{b} z$ zależność ta musi być spełniona w całej strukturze z rys.1, aby zachodziła ciągłość składowych stycznych pola na powierzchni rdzenia.

Zakładając, że nadbiegające do struktury z rys.1 pobudzenie składa się z modów o tym samym indeksie $n = n_0$, otrzymujemy dwuwymiarowy opis pola;

$$(1.15) \quad U(x,y,z) = u(x,y) \cos \frac{n_0 \pi}{b} z ; \quad U(x,y,z) = v(x,y) \sin \frac{n_0 \pi}{b} z$$

gdzie funkcje u i v spełniają równanie;

$$(1.16) \quad (\nabla^2 + k_{n_0}^2)(U) = 0 ; \quad k_{n_0}^2 = k^2 - \frac{n_0^2 \pi^2}{b^2}$$

w obszarze płaskim na zewnątrz konturu rdzenia, rys.3.
Całkowite pole elektromagnetyczne wyraża się przez funkcje u
i v następująco:

$$\begin{aligned} e &= -\left(\frac{n_0\pi}{b} \nabla u + i\omega\mu_0\vec{z}_0 \times \nabla v\right) \sin \frac{n_0\pi}{b} z \\ E_z &= -(\nabla^2 u) \cos \frac{n_0\pi}{b} z \\ (1.17) \quad h &= \left(\frac{n_0\pi}{b} \nabla v + i\omega\epsilon_0\vec{z}_0 \times \nabla u\right) \cos \frac{n_0\pi}{b} z \\ H_z &= -(\nabla^2 v) \sin \frac{n_0\pi}{b} z \end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów (1.17) funkcje $1_v u_m$ i $1_A v_m$ dane wzorami;

$$(1.18) \quad u_m(x,y) = e^{i\gamma_{m,n_0} x} \sin \frac{m\pi}{a} y ; \quad v_m(x,y) = e^{i\gamma_{m,n_0} x} \cos \frac{m\pi}{a} y$$

gdzie: $1_v = 1[V \cdot m]$; $1_A = 1[A \cdot m]$ w układzie jednostek MKSA

$$\text{gdzie; } \gamma_{m,n_0} = \sqrt{k_{n_0}^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2}} ; \quad \text{Re}\gamma_{m,n_0} > 0 ; \quad \text{Im}\gamma_{m,n_0} > 0$$

otrzymujemy mody transwersalne podłużnie, oznaczane PPM_{m,n_0} i PPE_{m,n_0} , propagujące się z prawa na lewo, rys.3. Związek tych modów z modami $E_{m,n}$ i $H_{m,n}$ otrzymywanymi przy podziale pola wzdłuż wektora osi propagacji, w naszym przypadku wektora \vec{x}_0 , jest następujący, (por.[5] str.12);

$$\begin{aligned} (1.19) \quad TM_{m,n} = E_{m,n} &= 1_Q \frac{i\omega\epsilon_0 \frac{m\pi}{a}}{k_n^2} \cdot PPE_{m,n} + \frac{i}{k_n^2} \gamma_{m,n} \frac{n\pi}{b} PPM_{m,n} \\ TE_{m,n} = H_{m,n} &= -\frac{i}{k_n^2} \gamma_{m,n} \frac{n\pi}{b} PPE_{m,n} + \frac{4\epsilon_0 i}{k_n^2} \omega \mu_0 \frac{m\pi}{a} PPM_{m,n} \end{aligned}$$

gdzie: $1_Q = 1\left[\frac{V}{A}\right]$; $1_S = 1\left[\frac{A}{V}\right]$ w układzie jednostek MKSA oraz

$$\text{gdzie: } k_n^2 = k^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

Dla przykładu, chcąc pobudzać strukturę z rys.1 pewnym ustalonym modem E_{m_0, n_0} propagującym się z prawa na lewo możemy go wygenerować wzorami (1.17) z pary funkcji potencjalnych:

$$(1.20) \quad \left(\frac{i}{k_{n_0}^2} \gamma_{m_0, n_0} \frac{n_0 \pi}{b} u_{m_0}^-(x, y), \frac{i \omega}{k_{n_0}^2} \epsilon_0 \frac{m_0 \pi}{a} v_{m_0}^-(x, y) \right) = \left(u_{E_{m_0, n_0}}^-(x, y), v_{E_{m_0, n_0}}^-(x, y) \right)$$

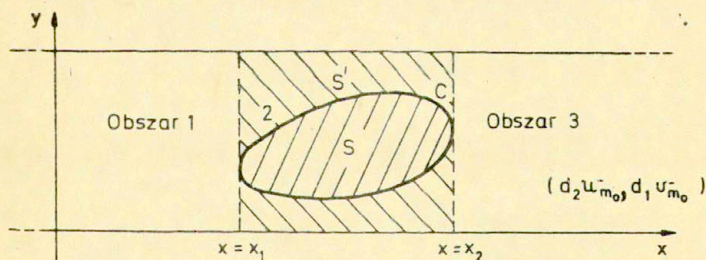
pomnożonych przez \downarrow_v i \downarrow_A odpowiednio.

1.4. Sformułowanie problemu.

Jak wynika z rozważań w poprzednich podpunktach dla ustalonego indeksu $n = n_0$ problem opisuje się przy pomocy dwuwymiarowych potencjalnych funkcji Hertza w, v, u i v . Rysunek 3 przedstawia przekrój struktury z rysunku 1 w płaszczyźnie (X, Y) . W obszarach 1 i 3 pole elektromagnetyczne możemy wyrazić przy pomocy modów PPM $_{m, n_0}$ i PPE $_{m, n_0}$ generowanych przez funkcje:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} u_m^+(x, y) &= e^{-i\gamma_{m, n_0} x} \sin \frac{m\pi}{a} y; & u_m^-(x, y) &= e^{-i\gamma_{m, n_0} x} \cos \frac{m\pi}{a} y \\ u_m^-(x, y) &= e^{i\gamma_{m, n_0} x} \sin \frac{m\pi}{a} y; & u_m^+(x, y) &= e^{i\gamma_{m, n_0} x} \cos \frac{m\pi}{a} y \end{aligned}$$

dla $m = 1, 2, \dots$ $u_0^+(x, y) = \frac{1}{2} e^{i\gamma_{0, n_0} x}$



Rys. 3.

Jako pole pobudzające weźmiemy parę funkcji $(d_2 u_{m_0}^-, d_1 u_{m_0}^-)$ które przy odpowiednim doborze stałych d_1 i d_2 mogą reprezen-

tować mod E_{m_0, n_0} jak w przykładzie (1.20) bądź mod H_{m_0, n_0} , lub liniową kombinację tych modów.

Problem polega na znalezieniu funkcji potencjalnych u i v określonych w S' przy zadanych: pobudzeniu, geometrii i przenikalnościach; żyotropowego rdzenia i ośrodka otaczającego rdzeń.

Pole w obszarze 1 będzie polem, które przetransmituje się poprzez obszar 2 z obszaru 3. Możemy je zapisać jako:

$$(1.22) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\beta} \tau_m u_m^- \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\beta} \pi_m u_m^- \end{pmatrix} \quad \text{dla } x \leq x_1$$

Pole w obszarze 3 będzie sumą pola fal pobudzających i pola odbitego od obszaru 2. Zapiszemy je w postaci:

$$(1.23) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 u_{m_0}^- \\ d_1 u_{m_0}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\beta} R_m u_m^+ \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\beta} R_m u_m^+ \end{pmatrix} \quad \text{dla } x \geq x_2$$

Sformułowany powyżej problem zawężany jest często w praktyce do znalezienia współczynników transmisji τ_m i π_m oraz współczynników odbicia R_m i R_m przy zadanym pobudzeniu i parametrach rdzenia.

W obszarze 2 opisy pola w S' i w S różnią się. W obszarze izotropowym S' pole opisują funkcje u i v spełniające równanie (1.16)

$$(1.16) \quad (\nabla^2 + k_{n_0}^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{w } S'$$

oraz warunki brzegowe na ściankach falowodu:

$$(1.24) \quad u(x,0) = u(x,a) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x,a) = 0$$

W obszarze żyrotropowym S odpowiednikiem pary funkcji (u, v) jest para dwuwymiarowych potencjalnych funkcji Hertza dla ośrodka żyrotropowego $(w, v) = (w_1 + w_2, A_1 w_1 + A_2 w_2)$ (por. podpunkt 1.3) gdzie funkcje w_1 i w_2 są rozwiązaniami równań:

$$(1.9) \quad (\nabla^2 + \Gamma_1^2) w_1 = 0 \quad \text{w } S$$

$$(1.10) \quad (\nabla^2 + \Gamma_2^2) w_2 = 0 \quad \text{w } S$$

zaś stałe A_i dane są wzorami (1.12) i zależą od parametrów ośrodka żyrotropowego i od częstości ω .

Możemy teraz postawić problem znalezienia całkowitego pola w obszarze $S \cup S'$ czyli w obszarze 2, rys.3. Sprowadza się on do znalezienia funkcji u, v spełniających równanie (1.16) w obszarach 1,3 i S' z warunkami brzegowymi (1.24) oraz funkcji w_1 i w_2 spełniających równania (1.9) i (1.10) w obszarze S . Tak postawiony problem jest niejednoznaczny. Aby zapewnić jednoznaczność należy zażądać dodatkowo ciągłości składowych sty-
cznych $\overset{E;H}{\text{pola}}$ elektromagnetycznego generowanego przez funkcje u, v, w_1 i w_2 na granicy obszarów S i S' . Są to tak zwane warunki zszycia, zapisywane w postaci;

$$(1.25) \quad \bar{n} \times H^{(i)} = \bar{n} \times H^{(z)} \quad ; \quad (x, y, z) \in C \otimes Z$$

$$(1.26) \quad \bar{n} \times E^{(i)} = \bar{n} \times E^{(z)} \quad ; \quad (x, y, z) \in C \otimes Z$$

gdzie: indeksem (i) oznaczone zostały pola w ośrodku izotropowym, indeksem (z) - pola w rdzeniu, Z - oś zmiennej z , \otimes - iloczyn kartezjański.

1.5. Warunki zszycia.

Ze względu na cylindryczność i położenie rdzenia względem układu współrzędnych wektor normalny do powierzchni rdzenia leży w płaszczyźnie (X, Y) , czyli $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$. Powoduje to rozpad warunków (1.25), (1.26) na cztery niezależne warunki:

$$(1.27) \quad H_z^{(i)} = H_z^{(z)} \quad \text{dla } (x, y, z) \in C \otimes Z$$

$$(1.28) \quad E_z^{(i)} = E_z^{(z)} \quad \text{--- " ---}$$

$$(1.29) \quad \vec{n} \times h^{(i)} = \vec{n} \times h^{(z)} \quad \text{--- " ---}$$

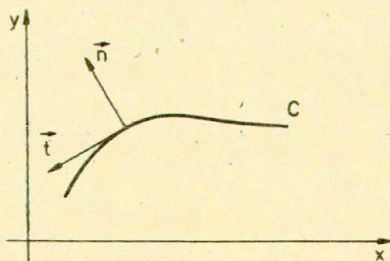
$$(1.30) \quad \vec{n} \times e^{(i)} = \vec{n} \times e^{(z)} \quad \text{--- " ---}$$

Wyrażając $H_z^{(i)}$ i $E_z^{(i)}$ przez funkcje u i v , zaś składowe $H_z^{(z)}$ i $E_z^{(z)}$ przez w_1 i w_2 otrzymujemy z warunków (1.27) i (1.28) warunki:

$$(1.27') \quad k_{n_0}^2 \cdot v = \frac{\mu}{\mu_0} A_1 \Gamma_1^2 w_1 + \frac{\mu}{\mu_0} A_2 \Gamma_2^2 w_2 \quad (x, y) \in C$$

$$(1.28') \quad k_{n_0}^2 u = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \Gamma_1^2 w_1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \Gamma_2^2 w_2 \quad (x, y) \in C$$

Chcąc przekształcić warunki (1.29) i (1.30) należy policzyć w pierw $\vec{n} \times h^{(i)}$ oraz $\vec{n} \times e^{(i)}$ posługując się wzorami (1.17). Przyjmijemy; \vec{t} - wektor styczny do krzywej, jako $\vec{t} = \vec{z}_0 \times \vec{n}$ zgodnie z rys.4.



Rys. 4.

Po przekształceniach otrzymujemy ze wzorów (1.17):

$$\vec{n} \times h^{(i)} = \left(\frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial V}{\partial t} + i \omega \epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} \right) \cos \frac{n_0 \pi}{b} z$$

$$\vec{n} \times e^{(i)} = - \left(\frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial U}{\partial t} + i \omega \mu_0 \frac{\partial V}{\partial n} \right) \sin \frac{n_0 \pi}{b} z$$

Podobnie ze wzorów (1.2) możemy uzyskać, podstawiając $w = w_1 + w_2$, $v = A_1 w_1 + A_2 w_2$ następujące wyrażenia:

$$\vec{n} \times h^{(z)} = \left[\left(\frac{n_0 \pi}{b} A_1 - \omega \epsilon \frac{\mu_g}{\mu} \right) \frac{\partial W_1}{\partial t} + i \omega \epsilon \frac{\partial W_1}{\partial n} + \left(\frac{n_0 \pi}{b} A_2 - \omega \epsilon \frac{\mu_g}{\mu} \right) \frac{\partial W_2}{\partial t} + i \omega \epsilon \frac{\partial W_2}{\partial n} \right] \cos \frac{n_0 \pi}{b} z$$

$$\vec{n} \times e^{(z)} = \left[\left(\frac{n_0 \pi}{b} - \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_1 \right) \frac{\partial W_1}{\partial t} + i \omega \mu A_1 \frac{\partial W_1}{\partial n} + \left(\frac{n_0 \pi}{b} - \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_2 \right) \frac{\partial W_2}{\partial t} + i \omega \mu A_2 \frac{\partial W_2}{\partial n} \right] \sin \frac{n_0 \pi}{b} z$$

Z otrzymanych wyrażeń i warunków (1.29), (1.30) otrzymujemy warunki zszycia;

$$(1.29') \quad \frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial V}{\partial t} + i \omega \epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial W_1}{\partial b_1} + \frac{\partial W_2}{\partial b_2} \quad (x, y) \in C$$

$$(1.30') \quad \frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial U}{\partial t} + i \omega \mu_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial W_1}{\partial c_1} + \frac{\partial W_2}{\partial c_2} \quad (x, y) \in C$$

gdzie:

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{n_0 \pi}{b} A_1 - \omega \epsilon \frac{\mu_g}{\mu} \right) \vec{t} + i \omega \epsilon \vec{n}$$

$$\vec{b}_2 = \left(\frac{n_0 \pi}{b} A_2 - \omega \epsilon \frac{\mu_g}{\mu} \right) \vec{t} + i \omega \epsilon \vec{n}$$

(1.31)

$$\vec{c}_1 = \left(\frac{n_0 \pi}{b} - \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_1 \right) \vec{t} + i \omega \mu A_1 \vec{n}$$

$$\vec{c}_2 = \left(\frac{n_0 \pi}{b} - \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_2 \right) \vec{t} + i \omega \mu A_2 \vec{n}$$

Różniczkowanie w kierunku pewnego dowolnego wektora zespolonego \bar{B} należy, podobnie jak w pracy [3], rozumieć jako:

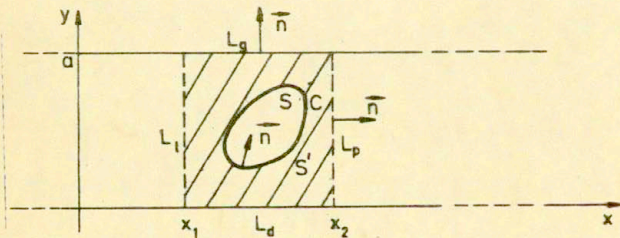
$$(1.32) \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{B}} = \bar{B} \cdot \nabla U \quad ; \quad \text{gdzie } \bar{B} = (B_1, B_2) \quad ; \quad B_1, B_2 \in \mathbb{C}$$

Warunki (1.27'), (1.28'), (1.29') i (1.30') wiążą ze sobą funkcje u , v , w_1 , w_2 i ich pochodne na konturze rdzenia. Są one brakującymi dla uzyskania jednoznaczności zagadnienia poszukiwania funkcji u , v , w_1 i w_2 , sformułowanego w podpunkcie 1.4, warunkami zszycia.

2. Sprowadzenie problemu do układu równań całkowych na konturze rdzenia.

2.1. Całkowa postać funkcji potencjalnych.

Zajmiemy się najpierw całkowym przedstawieniem funkcji u i v w obszarze izotropowym S' , rys.5.



Rys.5.

Podobnie jak w pracach [3] i [8] zastosujemy do obszaru S' ograniczonego krzywymi $L_g \cup L_p \cup L_d \cup L_l$ i C symetryczny wzór Greena, stosując następujące funkcje Greena:

$$(2.1) \quad \Phi(r, r') = \sum_{m=1}^{\infty} (a_i \gamma_{m, n_0})^{-1} \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y'\right) e^{-i \gamma_{m, n_0} |x - x'|}$$

$$(2.2) \quad \Psi(r, r') = (2ai\gamma_{0,n_0})^{-1} e^{-i\gamma_{0,n_0}|x-x'|} + \sum_{m=1}^{\infty} (ai\gamma_{m,n_0})^{-1} \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}y'\right) \cdot e^{-i\gamma_{m,n_0}|x-x'|}$$

Funkcje Φ i Ψ są symetryczne i spełniają równanie;

$$(2.3) \quad -(\nabla_r^2 + k_{n_0}^2) \begin{pmatrix} \Phi(r, r') \\ \Psi(r, r') \end{pmatrix} = -\delta(r-r')$$

oraz warunki brzegowe:

$$(2.4) \quad \left. \begin{matrix} \Phi(r, r') \\ \Psi(r, r') \end{matrix} \right|_{r' \in L_g \cup L_d} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right|_{r' \in L_g \cup L_d} = 0$$

Stosując symetryczny wzór Greena do par funkcji (Φ, u) i (Ψ, v) otrzymujemy, wykorzystując warunki (2.4) i (1.24):

$$(2.5) \quad u(r) = \int_{L \cup L_p \cup C} \left(\Phi(r, r') \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(r') - u(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'}$$

$$(2.6) \quad v(r) = \int_{L \cup L_p \cup C} \left(\Psi(r, r') \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(r') - v(r') \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'}$$

Funkcje $\Phi(r, r')$ i $\Psi(r, r')$ składają się z fal wybiegających od punktu źródła r . Funkcje u i v , (1.22) i (1.23), składają się z fal wybiegających na zewnątrz od rdzenia za wyjątkiem fali pobudzającej $(d_2 u_{m_0}^-, d_1 v_{m_0}^-)$, która biegnie do rdzenia. Biorąc pod uwagę tę własności funkcji Φ , Ψ , u i v

można wyliczyć:

$$(2.7) \quad \int_{L_1 \cup L_p} \left(\phi(r, r') \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(r') - u(r') \frac{\partial \phi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'} = d_2 u_{m_0}^-(r)$$

$$\int_{L_1 \cup L_p} \left(\psi(r, r') \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(r') - v(r') \frac{\partial \psi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'} = d_1 v_{m_0}^-(r)$$

Z zależności (2.5), (2.6) i (2.7) otrzymujemy wzory Kirchhoffa dla funkcji potencjalnych u i v w obszarze S' :

$$(2.8) \quad u(r) = \oint_C \left(\phi(r, r') \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(r') - u(r') \frac{\partial \phi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'} + d_2 u_{m_0}^-(r)$$

$$(2.9) \quad v(r) = \oint_C \left(\psi(r, r') \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(r') - v(r') \frac{\partial \psi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} \right) dl_{r'} + d_1 v_{m_0}^-(r)$$

W przypadku pobudzenia modami nadbiegającymi z lewej strony struktury należy we wzorach (2.8) i (2.9) zastąpić $u_{m_0}^-$ i $v_{m_0}^-$ przez funkcje $u_{m_0}^+$ i $v_{m_0}^+$.

Znając na konturze C funkcje u , v , $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ i $\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}$ możemy w prosty sposób liczyć współczynniki transmisji i odbicia wzorami, które otrzymuje się z (2.8), (2.9), (1.22) i (1.23):

(2.10)

$$\tau_1 = \delta_{l,m_0} d_2 + (ai\gamma_{l,m_0})^{-1} \oint_C \left[e^{-i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \sin \frac{\pi}{a} y' \frac{\partial u}{\partial n} (r') - \frac{\partial}{\partial n_{r'}} \left(e^{-i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \sin \frac{\pi}{a} y' \right) u(r') \right] dl_r$$

(2.11)

$$\pi_1 = \delta_{l,m_0} d_1 + (ai\gamma_{l,m_0})^{-1} \oint_C \left[e^{-i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \cos \frac{\pi}{a} y' \frac{\partial v}{\partial n} (r') - \frac{\partial}{\partial n_{r'}} \left(e^{-i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \cos \frac{\pi}{a} y' \right) v(r') \right] dl_r$$

$$(2.12) \quad R_1 = (ai\gamma_{l,m_0})^{-1} \oint_C \left[e^{i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \sin \frac{\pi}{a} y' \frac{\partial u}{\partial n} (r') - \frac{\partial}{\partial n_{r'}} \left(e^{i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \sin \frac{\pi}{a} y' \right) u(r') \right] dl_r$$

$$(2.13) \quad \mathbb{R}_1 = (ai\gamma_{l,m_0})^{-1} \oint_C \left[e^{i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \cos \frac{\pi}{a} y' \frac{\partial v}{\partial n} (r') - \frac{\partial}{\partial n_{r'}} \left(e^{i\gamma_{l,m_0} \cdot x'} \cos \frac{\pi}{a} y' \right) v(r') \right] dl_r$$

W obszarze S funkcje $w_1(r)$ i $w_2(r)$ przedstawimy w postaci potencjałów warstwy pojedynczej (por.[7], str.155) z pewnymi nieznanymi gęstościami g_1 i g_2 określonymi na konturze C. Jako jąder tych potencjałów użyjemy funkcji;

$$(2.14) \quad G_i(r, r') = -\frac{1}{4} N_0(\Gamma_i | r - r' |) ; \quad i = 1, 2.$$

gdzie: $N_0(z)$ - zerowa funkcja Neumanna.

$$(2.15) \quad w_1(r) = \oint_C G_1(r, r') S_1(r') dl_{r'}$$

$$(2.16) \quad w_2(r) = \oint_C G_2(r, r') S_2(r') dl_{r'}$$

Tak określone funkcje w_1 i w_2 spełniają dla $S_1, S_2 \in L^2(C)$ równania (1.9) i (1.10) we wnętrzu obszaru S oraz są ciągłe w $\text{int}S \cup C$, czyli w domkniętym obszarze S , przy dodatkowym założeniu, że krzywa C jest co najmniej klasy C^1 .

2.2. Wyprowadzenie układu równań całkowych.

Celem niniejszego podpunktu jest sprowadzenie problemu poszukiwania funkcji potencjalnych u, v, w_1 i w_2 , sformułowanego w podpunkcie 1.4, do układu równań całkowych na konturze C . Dwa równania całkowe możemy bezpośrednio uzyskać ze wzorów (2.8) i (2.9) przechodząc z punktem obserwacji r do konturu C , $r \rightarrow C$:

$$(2.17) \quad \frac{1}{2} u(r) + \oint_C \frac{\partial \phi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} u(r') dl_{r'} - \oint_C \phi(r, r') \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(r') dl_{r'} = d_2 u_{m_0}^-(r) ; \quad r \in C$$

$$(2.18) \quad \frac{1}{2} v(r) + \oint_C \frac{\partial \psi(r, r')}{\partial \bar{n}_{r'}} v(r') dl_{r'} - \oint_C \psi(r, r') \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(r') dl_{r'} = d_1 v_{m_0}^-(r) ; \quad r \in C$$

\oint - oznacza całką w sensie wartości głównej Cauchy.

Wykonując takie samo przejście graniczne, $r \rightarrow C$, we wzorach (2.15) i (2.16) i wykorzystując warunki zszycia (1.27') i (1.28') uzyskujemy kolejne dwa równania całkowe:

(2.19)

$$k_{n_0}^2 u(r) - \frac{\mu}{\mu_a} A_1 \Gamma_1^2 \oint_C G_1(r, r') g_1(r') dl_{r'} - \frac{\mu}{\mu_a} A_2 \Gamma_2^2 \oint_C G_2(r, r') g_2(r') dl_{r'} = 0 \quad ; \quad r \in C$$

$$k_{n_0}^2 u(r) - \frac{\epsilon}{\epsilon_a} \Gamma_1^2 \oint_C G_1(r, r') g_1(r') dl_{r'} - \frac{\epsilon}{\epsilon_a} \Gamma_2^2 \oint_C G_2(r, r') g_2(r') dl_{r'} = 0 \quad ; \quad r \in C$$

(2.20)

Zróżniczkujemy teraz zależność (2.15) w kierunku zespolonego wektora $\vec{b}_1 = \left(\frac{\rho_0 \pi}{B} A_1 - \omega \epsilon \frac{\mu_a}{\mu} \right) \cdot \vec{t} + i \omega \epsilon \cdot \vec{n}$, i przejdźmy granicznie z punktem obserwacji r do konturu C .

Przy takim przejściu skoku doznaje tylko ta część w_1 , która różniczkowana jest w kierunku normalnym do konturu. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial w_1}{\partial b_1}(r) = \frac{i \omega \epsilon}{2} g_1(r) + \oint_C \frac{\partial G_1(r, r')}{\partial b_{1,r}} g_1(r') dl_{r'} \quad ; \quad r \in C$$

Podobnie możemy wyliczyć $\left. \frac{\partial w_1}{\partial c_1} \right|_C$, $\left. \frac{\partial w_2}{\partial b_2} \right|_C$; $\left. \frac{\partial w_2}{\partial c_2} \right|_C$

Podstawiając wyliczone funkcje do warunków zszycia (1.29') i (1.30') otrzymamy kolejne dwa równania całkowe:

(2.21)

$$\frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial v}{\partial t}(r) + i\omega \epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial n}(r) = \frac{i\omega E}{2} (s_1(r) + s_2(r)) + \oint_C \frac{\partial G_1(r, r')}{\partial \bar{c}_{1,r}} s_1(r') dl_{r'} + \oint_C \frac{\partial G_2(r, r')}{\partial \bar{c}_{2,r}} s_2(r') dl_{r'} ; r \in C$$

(2.22)

$$\frac{n_0 \pi}{b} \frac{\partial u}{\partial t}(r) + i\omega \mu_0 \frac{\partial v}{\partial n}(r) = \frac{i\omega H}{2} (A_1 s_1(r) + A_2 s_2(r)) + \oint_C \frac{\partial G_1(r, r')}{\partial \bar{c}_{1,r}} s_1(r') dl_{r'} + \oint_C \frac{\partial G_2(r, r')}{\partial \bar{c}_{2,r}} s_2(r') dl_{r'} ; r \in C$$

Równania (2.17 + 2.22) zawierają 8 niewiadomych funkcji u , v , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 , $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial v}{\partial t}$. Otrzymanych równań całkowych jest 6, należy więc wyeliminować dwie niewiadome funkcje spośród wymienionych ośmiu. Okazuje się to możliwe do zrobienia, gdyż znajomość funkcji u i v na konturze C pozwala wyliczyć $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial v}{\partial t}$ na C .

Wprowadźmy na krzywej C parametryzację łukową, opisującą tę krzywą parametrem $s \in [0, D]$, poczynając od pewnego, dowolnie wybranego punktu na krzywej. Wektor wodzący krzywej będzie miał postać $r(s) = [x(s), y(s)]$, gdzie $x, y \in C^1[0, D]$. Funkcje u i v będą teraz funkcjami parametru s , różniczkowalnymi na przedziale $[0, D]$. Policzmy ich pochodne:

$$\frac{du}{ds}(s) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \nabla u \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{t}} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{t}}(s)$$

Aby zachodziła równość $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{t}}$ należy przyjąć kierunek parametryzacji zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwny niż orientacja płaszczyzny (X,Y) na rysunkach 3,4 i 5. Jest to związane z uprzednio przyjętą definicją wektora $\dot{\mathbf{t}}$. Podobnie otrzymamy $\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{t}}$

Wprowadzając wyżej opisaną parametryzację w równaniach (2.19), (2.20) i różniczkując je po ds wyliczymy z tych równań $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{t}}$ i $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{t}}$. Następnie wstawiając do równań (2.21) i (2.22) wyliczone wielkości otrzymujemy w ich miejsce następujące równania całkowe:

$$(2.23) \quad i\omega\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(r) - \frac{i\omega\epsilon}{2} (S_1(r) + S_2(r)) + \oint_C \frac{\partial G_1(r,r')}{\partial \mathbf{B}_{1,r}} S_1(r') dl_{r'} + \oint_C \frac{\partial G_2(r,r')}{\partial \mathbf{B}_{2,r}} S_2(r') dl_{r'} = 0 ; \quad r \in C$$

$$(2.24) \quad i\omega\mu_0 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}(r) - \frac{i\omega\mu}{2} [A_1 S_1(r) + A_2 S_2(r)] + \oint_C \frac{\partial G_1(r,r')}{\partial \mathbf{C}_{1,r}} S_1(r') dl_{r'} + \oint_C \frac{\partial G_2(r,r')}{\partial \mathbf{C}_{2,r}} S_2(r') dl_{r'} = 0$$

Obecnie użyte wektory \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{C}_1 i \vec{C}_2 mają postać:

$$(2.25a) \quad \vec{B}_1 = \left(\frac{n_0 \pi \mu}{b \cdot \mu_a k_{n_0}^2} A_1 \Gamma_1^2 - \frac{n_0 \pi}{b} A_1 + \omega \epsilon \frac{\mu_0}{\mu} \right) \vec{t} - i\omega \epsilon \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B}_2 = \left(\frac{n_0 \pi \mu}{b \cdot \mu_a k_{n_0}^2} A_2 \Gamma_2^2 - \frac{n_0 \pi}{b} A_2 + \omega \epsilon \frac{\mu_0}{\mu} \right) \vec{t} - i\omega \epsilon \cdot \vec{n}$$

$$(2.25b) \quad \vec{C}_1 = \left(\frac{n_0 \pi \cdot \epsilon}{b \cdot \epsilon_a k_{n_0}^2} \cdot T_1^2 - \frac{n_0 \pi}{b} + \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_1 \right) \vec{t} - i \omega \mu A_1 \cdot \vec{n}$$

$$\vec{C}_2 = \left(\frac{n_0 \pi \epsilon}{b \epsilon_a k_{n_0}^2} T_2^2 - \frac{n_0 \pi}{b} + \omega \mu \frac{\epsilon_g}{\epsilon} A_2 \right) \vec{t} - i \omega \mu A_2 \cdot \vec{n}$$

2.3. Układ dwóch równań całkowych Fredholma 1-szego rodzaju.

Równania (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.23) i (2.24) stanowią układ równań całkowych z sześcioma niewiadomymi funkcjami $u, v, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}, g_1$ i g_2

Używając notacji operatorowej układ ten możemy napisać w bardziej zwartej i czytelnej postaci. Oznaczmy;

$$(2.26) \quad g_j(s) \triangleq \frac{T_j^2}{k_{n_0}^2} \oint_C G_j(r, r') g(r') dl_{r'} \quad ; \quad j=1,2$$

$$(2.27) \quad \mathcal{D}_{1,j}(s) \triangleq -\frac{i}{\omega \mu_0} \oint_C \frac{\partial G_j(r, r')}{\partial C_{j,r}} g(r') dl_{r'} \quad ; \quad j=1,2$$

$$(2.28) \quad \mathcal{D}_{2,j}(s) \triangleq -\frac{i}{\omega \epsilon_0} \oint_C \frac{\partial G_j(r, r')}{\partial B_{j,r}} g(r') dl_{r'} \quad ; \quad j=1,2$$

$$(2.29) \quad P_1(s) \triangleq 2 \oint_C \frac{\partial \Psi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} g(r') dl_{r'}$$

$$(2.30) \quad F_2(s) \triangleq 2 \oint_C \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial \vec{n}_{r'}} \mathfrak{g}(r') dl_{r'}$$

$$(2.31) \quad F_1(s) \triangleq -2 \oint_C \Psi(r, r') \mathfrak{g}(r') dl_{r'}$$

$$(2.32) \quad F_2(s) \triangleq -2 \oint_C \Phi(r, r') \mathfrak{g}(r') dl_{r'}$$

Otrzymany układ równań możemy teraz zapisać w postaci:

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} v - \frac{\mu}{\mu_a} A_1 \mathfrak{g}_1(s_1) - \frac{\mu}{\mu_a} A_2 \mathfrak{g}_2(s_2) = 0 \\ u - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a} \mathfrak{g}_1(s_1) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a} \mathfrak{g}_2(s_2) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - \frac{\mu}{\mu_0} \frac{A_1}{2} \mathfrak{g}_1 - \frac{\mu}{\mu_0} \frac{A_2}{2} \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{D}_{11}(s_1) + \mathfrak{D}_{12}(s_2) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathfrak{g}_1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{D}_{21}(s_1) + \mathfrak{D}_{22}(s_2) = 0 \\ v + P_1(v) + F_1\left(\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) = 2 d_1 v_m^- \\ u + P_2(u) + F_2\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) = 2 d_2 u_m^- \end{array} \right.$$

Wśród 10-ciu operatorów występujących w równaniach (2.33), operatory G_j i F_j , $j = 1, 2$, są operatorami całkowymi z jądrem o osobliwości logarytmicznej. Operatory te należą więc do klasy $L^2(C \circ C)$

Operatory $D_{j,l}$; $j, l = 1, 2$, są istotnie osobliwe ze względu na występowanie w wektorach \overline{C}_j , \overline{B}_j , $j = 1, 2$, niezerowej składowej w kierunku wektora stycznego \overline{t} , por. (2.25).

Operatory P_1 i P_2 są także osobliwe. Autor pracy [8] podaje procedurę ich przybliżonego liczenia, wykorzystującą asymptotyczne rozwinięcia szeregów określających funkcje Φ i Ψ , (2.1) i (2.2), względem indeksu sumowania. Osobliwość tkwi w asymptotycznych wyrażeniach na reszty tych szeregów.

Przyglądając się postaci równań (2.33) widzimy, że można zredukować ich liczbę, jak i liczbę niewiadomych funkcji.

Wyliczmy z 1-szego równania u , z 3-go $\frac{\partial u}{\partial n}$ i wstawmy do 5-tego równania z układu (2.33). Otrzymamy:

$$[A_1 \frac{\mu}{\mu_a} (g_1 + P_1 \circ g_1) + \frac{A_1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} F_1 - F_1 \circ \mathcal{D}_{11}] (g_1) + [A_2 \frac{\mu}{\mu_a} (g_2 + P_1 \circ g_2) + \frac{A_2}{2} \frac{\mu}{\mu_0} F_1 - F_1 \circ \mathcal{D}_{12}] (g_2) = 2d_1 \cdot u_{m_0}^-$$

Podobnie wykorzystując równania 2-gie, 4-te i 6-te układu (2.33) otrzymujemy równanie całkowite z dwiema niewiadomymi funkcjami g_1 i g_2 . Zdefiniujmy następujące operatory:

$$(2.34) \quad \mathcal{X}_{1,j} (g) \triangleq [A_j \frac{\mu}{\mu_a} (g_j + P_1 \circ g_j) + \frac{A_j}{2} \frac{\mu}{\mu_0} F_1 - F_1 \circ \mathcal{D}_{1,j}] (g) \quad ; \quad j=1,2$$

$$(2.35) \quad \mathcal{X}_{2,j} (g) \triangleq [\frac{\epsilon}{\epsilon_a} (g_j + P_2 \circ g_j) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} F_2 - F_2 \circ \mathcal{D}_{2,j}] (g) \quad ; \quad j=1,2$$

Otrzymane z układu (2.33) równania całkowite możemy teraz zapisać w postaci układu dwóch równań, równoważnego układowi (2.33):

$$(2.36) \quad \mathcal{K}_{11}(S_1) + \mathcal{K}_{12}(S_2) = 2d_1 \cdot u_{m_0}^-$$

$$\mathcal{K}_{21}(S_1) + \mathcal{K}_{22}(S_2) = 2d_2 \cdot u_{m_0}^-$$

Operatory całkowe $\mathcal{K}_{j,l}$, $j, l = 1, 2$, są zbudowane w postaci sumy i złożeń operatorów G_j , P_j , F_j i $D_{j,l}$, $j, l = 1, 2$, danych wzorami (2.26 + 2.32). Jak widać ze wzorów (2.34) i (2.35) operatory osobliwe $D_{j,l}$ i P_j są składane z operatorami o jądrach całkowalnych w drugiej potędze G_j i F_j , co w efekcie powoduje, że operatory $\mathcal{K}_{j,l}$ posiadają jądra całkowalne w drugiej potędze. Tak więc układ (2.36) jest niejednorodnym układem równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju.

Rozwiązanie układu tych dwóch równań całkowych pozwala w prosty sposób znaleźć wszystkie pozostałe funkcje, potrzebne do określenia pola na zewnątrz rdzenia. Wzory na te funkcje otrzymujemy bezpośrednio z układu równań (2.33):

$$(2.37) \quad \begin{aligned} v &= \frac{\mu}{\mu_0} A_1 \mathcal{G}_1(S_1) + \frac{\mu}{\mu_0} A_2 \mathcal{G}_2(S_2) \\ u &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mathcal{G}_1(S_1) + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mathcal{G}_2(S_2) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} (A_1 S_1 + A_2 S_2) - \mathcal{D}_{11}(S_1) - \mathcal{D}_{12}(S_2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (S_1 + S_2) - \mathcal{D}_{21}(S_1) - \mathcal{D}_{22}(S_2) \end{aligned}$$

Znając z kolei funkcje v , u , $\frac{\partial v}{\partial n}$ i $\frac{\partial u}{\partial n}$ na konturze rdzenia C możemy bądź ze wzorów (2.8), (2.9) i (1.17) liczyć pole elektromagnetyczne na zewnątrz rdzenia bądź ze wzorów (2.10), (2.11), (2.12) i (2.13) liczyć współczynniki odbicia i transmisji, rozpatrywanego urządzenia mikrofalowego.

2.4. Rozwiązywanie numeryczne układu równań.

Cheąc rozwiązywać numerycznie układ równań (2.36) należy wpiery sparametryzować krzywą C , przy czym nie musi być to koniecznie parametryzacja łukowa, która przy skomplikowanym kształcie krzywej C może wręcz utrudnić niż ułatwić obliczenia.

Po sparametryzowaniu krzywej, $r(s)$ opisuje krzywą C dla $s \in [0, D]$.

Podobnie jak w pracy [3], zastosujemy metodę momentów, poszukując funkcji $g_1(s)$ i $g_2(s)$ w postaci szeregów;

$$(2.38) \quad \begin{aligned} g_1(s) &= \sum_{j=1}^N a_j p_j(s) \\ g_2(s) &= \sum_{j=1}^N b_j p_j(s) \end{aligned} \quad \text{gdzie; } p_j(s) = \begin{cases} 1 & r(s) \in l_j \\ 0 & r(s) \notin l_j \end{cases}$$

$j=1, 2, \dots, N$

gdzie: l_j - rozłączne łuki, na które podzielony został kontur C przez podział przedziału $[0, D]$ na N części. Układ równań (2.36) sprowadzi się wtedy do układu $2N$ algebraicznych równań liniowych z $2N$ niewiadomymi $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$. Macierz tego układu, wymiaru $2N \times 2N$ będzie postaci;

$$(2.39) \quad \underline{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{K}}_{11} & \underline{\mathcal{K}}_{12} \\ \underline{\mathcal{K}}_{21} & \underline{\mathcal{K}}_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie: $\underline{\mathcal{K}}_{j,l}$ macierze wymiaru $N \times N$ operatorów $\mathcal{K}_{j,l}$; $j, l = 1, 2$.

Stosując opisaną wyżej metodę, wszelkie obliczenia sprowadzamy do mnożenia macierzy przez macierz lub wektor i do dodawania macierzy i wektorów. I tak macierze $\underline{\mathcal{K}}_{j,l}$ liczymy korzystając ze wzorów (2.34) i (2.35), w których znak złożenia operatorów "o" należy zastąpić znakiem mnożenia macierzy. Aby więc policzyć elementy macierzy $\underline{\mathcal{K}}$ należy policzyć macierze operatorów całkowych $P_j, F_j, G_j, D_{j,l}$, określonych wzorami (2.26 + 2.32).

Przy obliczeniach elementów diagonalu macierzy P_1 i P_2 należy zastąpić łuki l_j odcinkami prostymi, co zostało pokazane w pracy De Jonga [8]. W przypadku liczenia elementów diagonalu pozostałych osobliwych operatorów, należy stosować typowe, numeryczne metody, służące do obliczania całek w sensie wartości głównej Cauchy.

W odróżnieniu od przypadku szczególnego rozważonego w pracy [3], gdzie przy pobudzeniach typu $H_{m,0}$ otrzymaliśmy tylko jedno równanie całkowe, tutaj przy podziale konturu C na N łuków ξ_j , otrzymujemy układ równań algebraicznych wymiaru $2N \times 2N$. Celowe więc wydaje się proponowanie przedstawionej w niniejszej pracy metody do obliczeń rdzeni o małych, w porównaniu z długością fali, wymiarach przekroju, na tyle małych aby nie było konieczności stosowania zbyt dużej liczby podziału N.

Nawiązując do posłowania w pracy [3] potwierdzona tu została hipoteza, według której minimalną liczbą równań całkowych Fredholm'a, do których daje się sprowadzić dane zagadnienie brzegowe, jest minimalna liczba skalarynych funkcji potencjalnych mogących opisać pole w tym zagadnieniu.

Literatura

- [1] S. PRZEŹDZIECKI and R.A. HURD - A Note on Scalar Hertz Potentials for Gyrotropic Media. Division of Electrical Engineering, National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada KIA OR8, 1979.
- [2] A. MIKAELJAN - Elektromagnitnyje wołny w priamougolnom wołnowodzie zapełniennym namagnicznym ferritom. D.A.N. SSSR 1954, Tom XCVIII, No 6, s.941.
- [3] M. SOWIŃSKI - Rozpraszanie na obiektach zyotropowych i anizotropowych umieszczonych w falowodzie. Prace IPPT, nr 55/1980, Warszawa.
- [4] A. GUREWICZ - Ferryty w zakresie mikrofal, PWN, Warszawa 1964, str.176.
- [5] M. SOWIŃSKI - Analiza zakończeń falowodów prostokątnych przy pomocy równań całkowych. Prace IPPT nr 20/1978, Warszawa.
- [6] M. SOWIŃSKI, M. SZALEK - O pewnym zagadnieniu brzegowym dla równania Helmholtza. Prace IPPT nr 40/1977, Warszawa.

- [7] P.B.M. - Równania liniowe fizyki matematycznej. P.W.N.,
Warszawa 1970.
- [8] G. DE JONG - Scattering by a perfectly conducting cylindrical obstacle in a rectangular waveguide. Int. J. Electronics, 1972, vol.32, No 2, 153-167.

	strona
Spis treści	
Streszczenie.....	3
1. Równania różniczkowe dla potencjałów i warunki ciągłości pola na powierzchni cylindrycznego, żyrotropowego rdzenia.....	4
1.1. Postawienie problemu.....	4
1.2. Opis pola w rdzeniu żyrotropowym.....	4
1.3. Opis pola w ośrodku izotropowym otaczającym rdzeń.....	9
1.4. Sformułowanie problemu.....	11
1.5. Warunki zszycia.....	14
2. Sprowadzenie problemu do układu równań całkowych na konturze rdzenia.....	16
2.1. Całkowa postać funkcji potencjalnych.....	16
2.2. Wyprowadzenie układu równań całkowych.....	20
2.3. Układ dwóch równań całkowych Fredholma 1-szego rodzaju.....	24
2.4. Rozwiązywanie numeryczne układu równań.....	27
Literatura.....	29