

4.44 — powłoki

Krzysztof Wiśniewski

ANALIZA NUMERYCZNA
POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ
STATYKA DLA OBCIĄŻEŃ NIESYMETRYCZNYCH
I DRGANIA SWOBODNE

20/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji 11 kwietnia 1984 r.



56968



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 2. Ark.druk. 2,75

Oddano do drukarni w maju 1984 r.

Nr zamówienia 356/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

ANALIZA NUMERYCZNA POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ: STATYKA
DLA OBCIĄŻEŃ NIESYMETRYCZNYCH I DRGANIA SWOBODNE

1. WSTĘP

Analiza powłok cylindrycznych, poddanych dowolnemu niesymetrycznemu obciążeniu, stanowi zagadnienie o dużym znaczeniu praktycznym w związku z projektowaniem takich konstrukcji jak wieże chłodnicze, silosy, zbiorniki na ciecze i wiele innych. Zazwyczaj konstrukcje te posiadają ekstremalne parametry geometryczne oraz poddane są obciążeniom o skomplikowanym charakterze jak np. działanie wiatru, obciążenie sejsmiczne itp. Z tego względu ważne w procesie projektowania są następujące rodzaje analiz /nie obejmujące oczywiście wszystkich aspektów zachowania się konstrukcji/:

- a/ liniowa analiza statyczna, dostarczająca informacji o stanie sił i przemieszczeń konstrukcji pod działaniem zadanych obciążeń;
- b/ analiza drgań swobodnych, służąca do przybliżonej oceny podatności konstrukcji na dynamiczne działanie obciążeń;
- c/ analiza stateczności szacująca obciążenia krytyczne dla danej konstrukcji.

W niniejszej pracy zbadano zagadnienie statyki i drgań swobodnych powłoki cylindrycznej; stateczność będzie przedmiotem oddzielnego opracowania.

W wielu pracach poświęconych analizie powłok obrotowo-symetrycznych poddanych dowolnemu, niesymetrycznemu obciążeniu wykorzystuje się możliwość wyrażenia funkcji obciążenia i przemieszczenia w postaci skończonych szeregów Fouriera.

Prowadzi to do ciągu zadań jednowymiarowych, które następnie są efektywnie rozwiązywane przy pomocy metody różnic skończonych np. Bushnell i in. [4,5] , elementów skończonych np. Wilson, Zienkiewicz [11,12] lub metod całkowania numerycznego np. Kalnins [7] . W niniejszej pracy zastosowano rozwinięcia w szeregi Fouriera, w połączeniu z metodą różnic skończonych, w sformułowaniu energetycznym. Końcowy układ równań zbudowany jest w oparciu o twierdzenie o minimum energii potencjalnej dla zagadnienia statycznego i twierdzenie Hamiltona dla problemu drgań własnych. Powyższa metoda oraz wariant równań liniowej teorii powłok Sandersa-Koitera [3] stanowią podstawę do zbudowania programów na EMC, które wykorzystano do analizy numerycznej obydwu zagadnień.

Zastosowana metoda różnic skończonych pozwala za pomocą przygotowanych programów analizować powłoki o skokowo zmiennej grubości. W związku z tym wykonano dla przykładu obliczenia powłoki zakładając stałą /zastępczą/ lub zmienną kawałkami grubość powłoki. Na tej podstawie oceniono różnicę stanu przemieszczeń powłoki obciążonej wiatrem oraz częstości i formy drgań swobodnych przyjmując realną i zastępczą grubość powłoki.

Ponadto, w pracy opisano i skomentowano specyficzne cechy analizowanego zagadnienia wiążące się z wykorzystaniem metody różnic skończonych, a także problemy natury numerycznej pojawiające się przy rozwiązywaniu algebraicznego zagadnienia na wartości własne.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII POWŁOK

Do rozwiązania postawionych w pracy zagadnień wykorzystano wariant Sandersa-Koitera liniowej teorii sprężystych powłok cienkich [3,9] . Ponieważ, w klasie teorii liniowych jest to wariant standardowy przytoczone zostaną wyłącznie te równania, które są niezbędne w zastosowanym podejściu wariacyjnym i sformułowaniu przemieszczeniowym. Z tego względu nie przytoczono równań równowagi i ruchu oraz statycznych warunków brzo-

wych. Wykorzystane w pracy równania, w postaci wyspecyfikowanej dla geometrii powłoki cylindrycznej, podane zostaną we współrzędnych cylindrycznych $\{r, \varphi, x\}$, wg rys. 1.

Deformacja powierzchni środkowej charakteryzowana jest przez: składowe tensora odkształceń

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{r} (u_{,\varphi} + w) \\ \varepsilon_x &= v_{,x} \\ \varepsilon_{x\varphi} &= \frac{1}{2} (u_{,x} + \frac{1}{r} v_{,\varphi}) \end{aligned}$$

składowe tensora zmian krzywizny

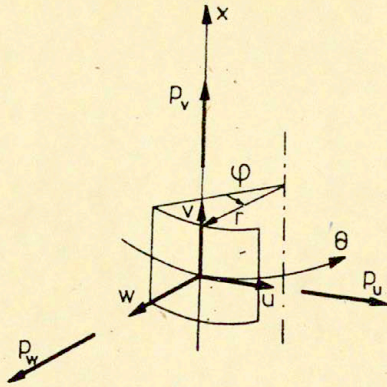
$$(2.2) \quad \begin{aligned} \chi_{\varphi} &= -\frac{1}{r^2} (w_{,\varphi\varphi} - u_{,\varphi}) \\ \chi_x &= -w_{,xx} \\ \chi_{x\varphi} &= -\frac{1}{r} (w_{,x\varphi} - \frac{3}{4} u_{,x} + \frac{1}{4} v_{,\varphi}) \end{aligned}$$

gdzie: w, v, u to składowe wektora przemieszczeń wg rys. 1.

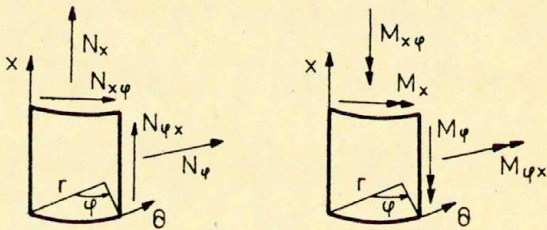
W oparciu o te miary zapiszemy energię odkształcenia sprężystego

$$(2.3) \quad U = \frac{1}{2} \int_S (N_{\varphi} \varepsilon_{\varphi} + N_x \varepsilon_x + N_{x\varphi} \varepsilon_{x\varphi} + M_{\varphi} \chi_{\varphi} + M_x \chi_x + M_{x\varphi} \chi_{x\varphi}) ds$$

gdzie: S oznacza powierzchnię środkową powłoki



Rys. 1 . Podstawowe oznaczenia .



Rys. 2 . Dodatkowo zwroty uogólnionych sił i momentów wewnętrznych .

$N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}$ - składowe wektora sił błonowych

$M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}$ - składowe wektora momentów przekrojowych

Powyższe składowe sił i momentów wyznaczono z zasady prac wirtualnych, wykorzystując odpowiednio oszacowaną, dwuwymiarową postać energii odkształcenia sprężystego. Otrzymane związki fizyczne mają postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} N_\varphi &= B(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) \\ N_x &= B(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) \\ N_{x\varphi} &= B(1-\nu) \varepsilon_{x\varphi} \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} M_\varphi &= D(\chi_\varphi + \nu \chi_x) \\ M_x &= D(\chi_x + \nu \chi_\varphi) \\ M_{x\varphi} &= D(1-\nu) \chi_{x\varphi} \end{aligned}$$

gdzie:

$$B = Eh/(1 - \nu^2)$$

$$D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$$

h - grubość powłoki

E, ν - stałe materiałowe: moduł Younga i współczynnik Poissona.

Dodatknie zwroty składowych sił i momentów wewnętrznych przedstawia rys. 2.

Praca powierzchniowych sił zewnętrznych wyraża się następująco:

$$(2.6) \quad W = \int_S (p_w \cdot w + p_u \cdot u + p_v \cdot v) dS$$

gdzie: p_w, p_v, p_u to składowe wektora obciążenia.

Do przeprowadzenia analizy drgań swobodnych powłoki niezbędne jest wyrażenie na energię kinetyczną powłoki

$$(2.7) \quad K = \frac{1}{2} \int_S \rho h ((\dot{w})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{u})^2) dS$$

przy czym ρ to gęstość masy, a kropka oznacza pochodną po czasie t .

Ze względu na sformułowanie przemieszczeniowe problemu narzucone warunki brzegowe muszą dotyczyć przemieszczeń. Na krawędziach powłoki mogą być zadane wartości składowych wektora przemieszczenia w, v, u oraz składowej wektora obrotu

$\beta_x = -w_{,x}$. Jednorodne statyczne warunki brzegowe są spełniane jako konsekwencja twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o minimum energii potencjalnej.

3. SFORMULOWANIE PROBLEMU BRZEGOWEGO

Do rozwiązania postawionych zagadnień wykorzystano koncepcję rozwinięcia funkcji obciążenia i przemieszczenia w skończony szereg Fouriera. Prowadzi to do ciągu zadań jednowymiarowych, które rozwiązano za pomocą metody różnic skończonych w sformułowaniu energetycznym. Końcowy układ równań zbudowano w oparciu o twierdzenie o minimum energii potencjalnej dla zagadnienia statycznego i twierdzenie Hamiltona dla problemu drgań swobodnych.

Poniżej pokazane zostaną etapy przekształcania odpowiednich funkcjonałów energii od postaci różniczkowo-całkowej do algebraicznej wykorzystanej następnie do rozwiązania zagadnienia na komputerze.

3.1. ZAGADNIENIE STATYCZNE

Zapiszmy funkcjonał energii potencjalnej V w postaci

$$(3.1) \quad V = U - W$$

gdzie:

U - energia odkształcenia sprężystego powłoki w postaci (2.3) ;

W - praca sił powierzchniowych, wg (2.4)

a) ROZDZIELENIE ZMIENNYCH

Pierwszym etapem modyfikacji funkcjonału jest rozdzielenie zmiennych niezależnych przez przyjęcie następującej reprezentacji dla składowych przemieszczeń:

$$\begin{aligned} w(x, \varphi) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^l w_n(x) \cdot \cos n\varphi + \\ &\quad \sum_{m=1}^k w_m(x) \cdot \sin m\varphi \\ (3.2) \quad u(x, \varphi) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^l u_n(x) \cdot \sin n\varphi + \\ &\quad \sum_{m=1}^k u_m(x) \cdot \cos m\varphi \\ v(x, \varphi) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^l v_n(x) \cdot \cos n\varphi + \\ &\quad \sum_{m=1}^k v_m(x) \cdot \sin m\varphi \end{aligned}$$

gdzie: x, φ - współrzędne cylindryczne: południkowa
i kątowa;
 $l; k$ - liczba fal w kierunku obwodowym.

W analogiczny sposób przedstawimy składowe wektora obciążenia działającego na powierzchnię powłoki.

$$\begin{aligned} p_w(x, \varphi) &= p_w^0(x) + \sum_{n=1}^l p_w^n(x) \cdot \cos n\varphi + \\ &\quad \sum_{m=1}^k p_w^m(x) \cdot \sin m\varphi \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad p_u(x, \varphi) = p_u^0(x) + \sum_{n=1}^l p_u^n(x) \cdot \sin n\varphi +$$

$$\sum_{m=1}^k p_u^m(x) \cdot \cos m\varphi$$

$$p_v(x, \varphi) = p_v^0(x) + \sum_{n=1}^l p_v^n(x) \cdot \cos n\varphi +$$

$$\sum_{m=1}^k p_v^m(x) \cdot \sin m\varphi$$

Ponieważ funkcjonal energii potencjalnej jest formą kwadratową więc wykonanie całkowania względem φ prowadzi, że względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, do dekompozycji funkcjonału V na funkcjonały składowe V_j związane z deformacją i obciążeniem w postaci pojedynczej harmoniki j .

$$(3.4) \quad V = \sum_{j=0}^i V_j \quad ; \quad i = l+k$$

W każdym z $(i+1)$ zadań składowych, charakteryzowanych przez parametr j , dla obciążeń (p_w^j, p_v^j, p_u^j) należy określić (w_j, v_j, u_j) . W każdym z funkcjonałów składowych występują wielkości zależne wyłącznie od współrzędnej x ; w tym sensie sprowadzono problem do ciągu zadań jednowymiarowych.

b) APROKSYMACJA SZEREGIEM TAYLORA

Po wybraniu punktów węzłowych przydzielamy im wzajemnie rozłączne lecz pokrywające cały obszar przedziały całkowania. W otoczeniu każdego punktu węzłowego rozwijamy funkcje składowych przemieszczeń $w_j(x)$, $v_j(x)$, $u_j(x)$ w szereg Taylora i obliczamy ich pochodne. Niech $f(x)$ oznacza jedną z funkcji składowych przemieszczeń. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_{,x}(x_0) \cdot s + f_{,xx}(x_0) \cdot \frac{s^2}{2} \\ (3.5) \quad f_{,x}(x) &= f_{,x}(x_0) + f_{,xx}(x_0) \cdot s \\ f_{,xx}(x) &= f_{,xx}(x_0) \end{aligned}$$

przy czym x_0 - współrzędna punktu węzłowego

$$s = x - x_0$$

Po podstawieniu powyższych wielkości do funkcjonałów energii wykonujemy całkowanie względem x , w przedziałach przypisanych punktom węzłowym. Aproksymację szeregiem Taylora wykonano w celu zmniejszenia wrażliwości zadania na sposób przydzielania obszaru całkowania, która to wielkość jest cechą charakterystyczną metod różnicowych [8]. Komentarz na temat efektów powyższej aproksymacji zamieścimy przy omawianiu przykładów numerycznych.

c) DYSKRETYZACJA RÓŻNICOWA

Aproksymacja szeregiem Taylora i zastąpienie pochodnych operatorami różnicowymi stanowią etapy dyskretyzacji zadania.

Do tworzenia operatorów różnicowych wybrano metodę opartą o warunek minimum błędów zaproponowaną w pracach J.Orkiszka i T.Liszki [8] .

Poniżej podano postać tego warunku. Załóżmy, że funkcja przemieszczeń $f(x)$ w otoczeniu punktu węzłowego „0” jest odpowiednio gładka, tak by można ją było rozwinąć w szereg Taylora. Niech „i” będzie punktem sąsiednim punktu „0”. Każdemu „i” przypisuje się kwadrat błędów rozwinięcia B_i i wagę r_i :

$$(3.6) \quad B_i = [f_i - (f_0 + f_{0,x} h_i + f_{0,xx} \frac{h_i^2}{2})]^2$$
$$r_i = h_i^{-3} \quad ; \quad h_i = x_i - x_0$$

Ważony kwadrat błędów rozwinięcia dla wszystkich punktów sąsiednich jest równy:

$$(3.7) \quad B = \sum_{i=1}^2 B_i r_i$$

Warunek minimum tego błędów względem $f_{0,x}$ i $f_{0,xx}$ dostarcza postaci operatorów różnicowych w punkcie „0” .

Kryterium powyższe przy regularnym rozkładzie punktów i we wnętrzu obszaru prowadzi, w przypadku jednowymiarowym, do klasycznej postaci operatorów różnicowych. Natomiast dla punktów brzegowych postać klasyczną otrzymamy przy pewnej zmianie postępowania, określając najpierw $f_{0,x}$, a dopiero później $f_{0,xx}$. W pierwszym etapie pomijamy

człon kwadratowy w (3.6) rozwijając $f(x)$ tylko do najbliższego punktu i wykorzystujemy warunek minimum względem $f_{0,x}$. W drugim etapie stosujemy pełną postać (3.6) rozwijamy $f(x)$ do obydwu punktów, a następnie minimalizujemy B względem $f_{0,xx}$, przy czym pierwsza pochodna wykorzystana jest w postaci różnicowej.

Ostatecznie otrzymaliśmy zdyskretyzowany funkcjonal energii V_j , który związany jest z deformacją i obciążeniem w postaci j -tej harmoniki. V_j jest funkcją kwadratową względem wektora przemieszczeń w punktach węzłowych, dla której na mocy twierdzenia o minimum energii potencjalnej, zapisujemy następujące warunki:

$$(3.8) \quad \frac{\partial V_j}{\partial q_{jz}} = 0 \quad ; \quad j=0, \dots, i, \quad z=1, \dots, 3r$$

przy czym

q_{jz} - składowa przemieszczenia odpowiadająca j -tej harmonice w punkcie węzłowym;

i - liczba wyrazów rozwinięcia w szereg Fouriera;

r - liczba punktów węzłowych.

Rezultatem jest $(i+1)$ układów zawierających $3r$ liniowych równań algebraicznych. Każdy z tych układów można zapisać w postaci

$$(3.9) \quad [K]^j \{q\}^j = \{p\}^j \quad ; \quad j=0, \dots, i$$

gdzie

$[K]^j$ - macierz sztywności infinitezymalnej

$\{q\}^j$ - wektor składowych przemieszczeń

$\{p\}^j$ - wektor składowych obciążeń

Po rozwiązaniu wszystkich układów równań wartości przemieszczeń w dowolnych punktach powłoki określamy stosując superpozycję, zgodnie z reprezentacją (3.2). W analogiczny sposób określamy wartości sił i momentów przekrojowych.

3.2. ZAGADNIENIE DRGAŃ SWOBODNYCH

Analiza drgań swobodnych wymaga uwzględnienia energii odkształcenia i energii kinetycznej powłoki. Wyrażenie na funkcjonał Lagrange'a L jest następujące:

$$(3.10) \quad L = U - K$$

gdzie

U - energia odkształcenia wg (2.3)

K - energia kinetyczna powłoki wg (2.5)

Funkcjonał L zmodyfikujemy tak jak to robiliśmy z funkcjonałem energii potencjalnej V przyjmując funkcje składowych przemieszczeń w postaci :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} w(x, \varphi, t) &= w_j(x, t) \cdot \cos j\varphi \\ u(x, \varphi, t) &= u_j(x, t) \cdot \sin j\varphi \\ v(x, \varphi, t) &= v_j(x, t) \cdot \cos j\varphi \end{aligned}$$

Ponieważ amplitudy zależą od czasu t rozdzielimy zmienne x oraz t uwzględniając zależność

$$\begin{aligned} w_j(x,t) &= w_j(x) \cdot \sin(\omega t + \gamma) \\ (3.12) \quad v_j(x,t) &= v_j(x) \cdot \sin(\omega t + \gamma) \\ u_j(x,t) &= u_j(x) \cdot \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

gdzie

- j - liczba fal w kierunku obwodowym
- ω - częstość kołowa
- γ - przesunięcie fazowe.

Po podstawieniu tych relacji do (3.10) zależność od czasu wyraża się poprzez wystąpienie mnożnika ω^2 przed wyrażeniem na energię kinetyczną oraz mnożnika $\sin^2(\omega t + \gamma)$ wspólnego dla całego Hamiltonianu.

Minimalizacja zdyskretyzowanego funkcjonału względem składowych wektora przemieszczeń $\bar{w}_j, \bar{v}_j, \bar{u}_j$ prowadzi do liniowego jednorodnego układu równań

$$(3.13) \quad ([K]^j + \omega^2 [M]^j) \{q\}^j = \{0\}$$

Układ ten ma nietrywialne rozwiązanie gdy

$$(3.14) \quad \det([K]^j + \omega^2 [M]^j) = 0$$

Warunek powyższy jest uogólnionym algebraicznym zagadnieniem

własnym, w którym macierz sztywności $[K]^j$ i macierz bezwładności $[M]^j$ są funkcjami założonej liczby fal w kierunku obwodowym.

4. TWORZENIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Budując końcowe układy równań (3.9), (3.13) należy uwzględnić specyficzne cechy problemu wynikające ze sformułowania różnicowego. Wszystkie podane niżej uwagi będą dotyczyć cząstkowych funkcjonałów w postaci zdyskretyzowanej, zapisanych jako funkcje składowych wektora przemieszczeń w węzłach siatki.

Jedną z cech specyficznych sformułowania różnicowego jest występowanie każdej dyskretnej niewiadomej tylko w pewnej liczbie wyrażeń na energię w poszczególnych punktach. Uwzględnienie lokalności niewiadomej ma szczególne znaczenie dla czasochłonnego i złożonego procesu generowania macierzy sztywności i bezwładności. W wyniku wykorzystania tej cechy tworzone są wyłącznie elementy niezerowego pasma macierzy. Zdefiniujemy zbiór T_i punktów wykorzystywanych przy budowie operatora różnicowego w punkcie „i”

$$(4.1) \quad T_i = \{ j; df_i = g(\dots, f_j, \dots) \}$$

gdzie

f_j - składowa wektora przemieszczeń przypisanego punktowi „j”;

df_i - operator różnicowy w punkcie „i”;

g - funkcja liniowa względem f_j .

Każdy punkt węzłowy „k” jest używany do tworzenia operatorów różnicowych tylko w pewnej liczbie punktów zbioru R_k .

$$(4.2) \quad R_k = \{j; k \in T_j\}$$

We wnętrzu obszaru zbiory R_k i T_k dla punktu „ k ” są identyczne. Dla punktów strefy brzegowej można podać relację między tymi zbiorami w oparciu o kryterium modyfikowania T_k w tej strefie.

Minimalizując funkcjonal energii potencjalnej V względem niewiadomej przypisanej punktowi „ k ” sumowanie po wszystkich punktach zastępowane jest sumowaniem po punktach należących do R_k

$$(4.3) \quad \frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial q_k} = 0 \quad ;$$
$$i = 1, \dots, r \quad , \quad j \in R_k$$

gdzie

V_i - oznacza energię cząstkową otrzymaną przez całkowanie V w obszarze przypisanym punktowi „ i ”
 r - liczba punktów modelu dyskretnego.

Ograniczenie postępowania, przy tworzeniu równania odpowiadającego q_k do punktów R_k jest konsekwencją lokalności występowania niewiadomej q_k w dyskretnej funkcji energii V .

Drugą z cech charakterystycznych metody różnic skończonych są problemy związane z uwzględnieniem warunków brzegowych nałożonych na obroty tzn. warunków na pochodne składowych przemieszczeń. Warunki te są szczególnie kłopotliwe w zadaniach wielowymiarowych, gdzie zachodzi konieczność rozwiązywa-

nia dodatkowego układu równań oraz podania kryterium wyboru niewiadomych eliminowanych. W przypadkach jednowymiarowych zagadnienie uwzględniania tych warunków wiąże się z problemem sposobu generowania operatorów różnicowych na brzegu i zmianami w budowie układu równań. Założmy, że postać warunku brzegowego jest następująca

$$(4.4) \quad q_l = h(\dots, q_k, \dots)$$

gdzie:

q_l - niewiadoma przypisana punktowi „l”
 q_k - niewiadoma przypisana punktowi „k”
 h - operator liniowy

Przy obliczaniu pochodnej energii względem q_k trzeba wziąć pod uwagę punkty nie należące do R_k , których wyrażenia na energię zawierają q_k . Są to punkty należące do R_l .

Warunek minimum energii przyjmnie postać:

$$(4.5) \quad \frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial q_k} + \sum_m \frac{\partial V_m}{\partial q_k} = 0 \quad ;$$

$$j \in R_k, \quad m \in R_l$$

przy czym

$$(4.6) \quad \sum_m \frac{\partial V_m}{\partial q_k} = \frac{\partial h}{\partial q_k} \sum_m \frac{\partial V_m}{\partial q_l}$$

Ostateczna postać równania przypisanego q_k jest kombinacją liniową:

$$(4.7) \quad r(q_k) + \frac{\partial h}{\partial q_k} \cdot r(q_l) = 0$$

gdzie: $r(q_k)$, $r(q_l)$ są równaniami przypisanymi q_k i q_l bez uwzględniania warunków brzegowych.

Poniżej podamy jednowymiarowy przykład ilustrujący powyższe stwierdzenia.

Wyberzmy ciąg punktów węzłowych $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ przy czym punkt $\{1\}$ jest punktem brzegowym. Niech zbiory T_i , $i=1, 2, 3, 4$, związane ze sposobem tworzenia operatora różnicowego, będą następujące:

$$(4.8) \quad \begin{array}{ll} T_1 = \{1, 2, 3\} & , T_2 = \{1, 2, 3\} \\ T_3 = \{2, 3, 4\} & , T_4 = \{3, 4, 5\} \end{array}$$

Dla powyższych T_i określimy zbiory R_i zgodnie z definicją (4.2).

$$(4.9) \quad \begin{array}{ll} R_1 = \{1, 2\} & , R_2 = \{1, 2, 3, 4\} \\ R_3 = \{1, 2, 3, 4\} & , R_4 = \{3, 4, 5\} \end{array}$$

co pozwala zapisać wyrażenia na pochodne energii potencjalnej

w przypadku bez warunków brzegowych.

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 + V_2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} (V_1 + V_2 + V_3) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} &= \frac{\partial}{\partial q_3} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_4} &= \frac{\partial}{\partial q_4} (V_3 + V_4 + V_5) = 0 \end{aligned}$$

Założmy, że należy uwzględnić warunek brzegowy w dyskretnej postaci

$$(4.11) \quad q_3 = h(q_2)$$

Wtedy pochodna po q_2 ulegnie zmianie

$$(4.12) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{dh(q_2)}{dq_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_3} = 0$$

czyli równanie dla q_2 tworzymy w sposób następujący:

$$(4.13) \quad r(q_3) + \frac{dh(q_2)}{dq_2} \cdot r(q_3) = 0$$

Pozostałe równania pozostają bez zmian.

Punkty $\{1, 2, 3\}$ tworzą strefę brzegową, której zasięg został zdeterminowany typem warunku brzegowego oraz postacią operatora różnicowego w punkcie $\{1\}$. Punkt $\{4\}$ jest punktem wnętrza, w którym czynniki powyższe nie uwidaczniają się.

Reasumując można stwierdzić, że w strefie brzegowej komplikują się procesy tworzenia operatora różnicowego i generowania układu równań.

Wydaje się, że niedogodności te są cechami nieodłącznymi metody różnic skończonych.

5. CHARAKTERYSTYKA PROGRAMÓW NUMERYCZNYCH

W oparciu o opisany poprzednio sposób postępowania zbudowano dwa programy: VESSLIN - do liniowej analizy statycznej oraz VESSDYN - do analizy drgań swobodnych.

Programy napisano w języku FORTRAN IV i uruchomiono na maszynie cyfrowej ODRA 1305. W obu programach uwzględniono pasmowy charakter i symetrię macierzy, tak że w efekcie wszystkie operacje wykonuje się na półpasmach.

W programie VESSLIN podstawowy układ równań zagadnienia rozwiązywany jest za pomocą metody eliminacji Gaussa, w wersji opartej na rozkładzie trójkątnym, dostosowanym do macierzy dodatnio określonej. W efekcie zagadnienie o 60 stopniach swobody, przy przyjęciu funkcji obciążenia i przemieszczenia w postaci 7 pierwszych harmonik, rozwiązywane jest w czasie 120 sekund procesora.

W programie VESSDYN ograniczono się do poszukiwania najmniejszej częstości własnej odpowiadającej danej harmonice. Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia na wartości własne przeprowadzono w oparciu o metodę tzw. iteracji podprzestrzennej opisaną w pracy Bathe'go i Wilsona [2]. Metoda ta wykorzystuje szereg czynników przyspieszających zbieżność lecz jej efektywność zapewniana jest przede wszystkim przez właściwy wybór podprzestrzeni iteracyjnej.

Stosowanie podprogramu opartego na tej metodzie z prowadze-

niem obliczeń z podwójną precyzją, pozwala rozwiązywać zadanie dla jednej harmoniki o 60 stopniach swobody w czasie 40 sekund procesora wliczając w to czas tworzenia macierzy podstawowych.

Cechą obu programów jest to, że bardzo oszczędnie wykorzystuje się pamięć operacyjną i używa zewnętrzne zbiory dyskowe co pozwala znacznie zwiększyć rozmiary zadań obliczanych tymi programami.

6. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Przy pomocy programów VESSLIN I VESSDYN analizowano powłokę cylindryczną o osi pionowej i skokowo zmiennej grubości mającą znaczenie w projektowaniu zbiorników na ciecze. W celach porównawczych obliczenia przeprowadzono dla dwóch modeli tego zbiornika:

a/ o grubości skokowo zmiennej, zgodnej z rzeczywistą geometrią zbiornika ;

b/ o stałej grubości zastępczej, obliczonej jako średnia grubość pasów.

Powłokę zastępczą stosuje się zwykle wtedy gdy wykorzystywane są równania teorii błonowej, z warunkami brzegowymi B lub D wg tablicy 1, patrz np. praca Baczyńskiego i Janasa [i] . W niniejszej pracy dokonamy oceny skutków posługiwania się modelem zastępczym porównując podstawowe wielkości analizy statycznej i drgań swobodnych, otrzymane dla tych dwóch modeli.

Podstawowe wielkości geometryczne analizowanej powłoki, patrz rys.3, są następujące:

$$\begin{aligned} R &= 4300 \text{ [cm]}, H = 2000 \text{ [cm]}, d = 200 \text{ [cm]} \\ h_1 &= 3.2 \text{ [cm]}, h_2 = 2.9 \text{ [cm]}, h_3 = 2.5 \text{ [cm]} \\ h_4 &= 2.2 \text{ [cm]}, h_5 = 1.9 \text{ [cm]}, h_6 = 1.6 \text{ [cm]} \\ h_7 &= h_8 = 1.5 \text{ [cm]}, h_9 = 1.2 \text{ [cm]}, h_{10} = 1.0 \text{ [cm]} \\ h_{6r} &= 1.95 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

Tablica 1. Warunki brzegowe wykorzystywane w przykładach

| | A | B | C | D |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--|
| GÓRNY BRZEG $x=H$ | $N_{xx}=N_{x\varphi}=0$ | $N_{xx}=N_{x\varphi}=0$ | $N_{xx}=N_{x\varphi}=0$ | $N_{xx}=0$ $\int_0^{2\pi} N_{x\varphi} \sin \varphi d\varphi = 0$ $u = e \cdot \sin \varphi; e = \text{const}$ |
| DOLNY BRZEG $x=0$ | $w=u=v=0$ | $u=v=0$ | $w=u=v=0$ $\beta_x=0$ | $u=v=0$ |

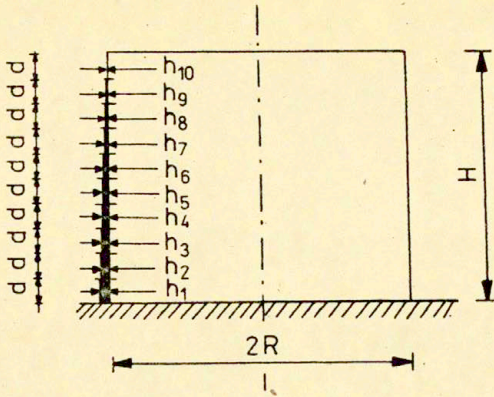
Przyjęto następujące dane materiałowe:

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ [kG/cm}^2\text{]}, \quad \nu = 0.3$$

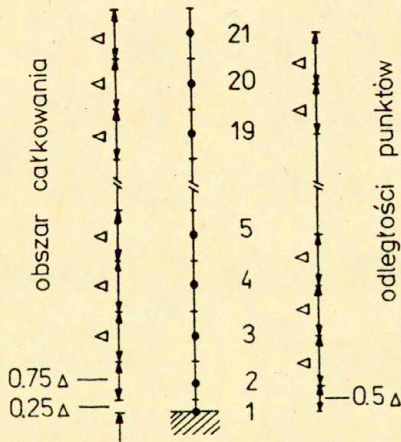
$$g = 7.85 \cdot 10^3 \text{ [kG/cm}^3\text{]}$$

gdzie: E - moduł Younga, ν - współczynnik Poissona,
 g - ciężar objętościowy stali.

Schemat obliczeniowy uwzględniający sformułowanie różnicowe pokazany jest na rys.4, przy czym granice obszaru całkowania przydzielanego punktowi są wyznaczone przez środki odcinków łączących węzły z punktami sąsiednimi. Warunkiem uzupełniającym jest żądanie, żeby w każdym obszarze całkowania grubość powłoki była stała, co jest istotne w przypadku analizowania powłok o skokowo zmiennej grubości. Zasada ta jest spełniona, dla pasów o równej szerokości, gdy punkty węzłowe rozmieszcza się równomiernie, z dodatkowym punktem na dolnej krawędzi powłoki.



Rys. 3 . Geometria zbiornika .



Rys. 4 . Schemat obliczeniowy ; numeracja punktów i przydział obszarów całkowania .

6.1. ZAGADNIENIE STATYCZNE

Analizę statyczną powłoki cylindrycznej, o której mowa powyżej, poddanej działaniu wiatru, przeprowadzono przy pomocy programu VESSLIN. Obciążenie parciem wiatru przyjęto wg Polskiej Normy [10] w postaci:

$$(6.1) \quad p(x, \varphi) = p_0 \cdot C(\varphi), \quad C(\varphi) = \sum_{n=0}^6 c_n \cdot \cos n\varphi$$

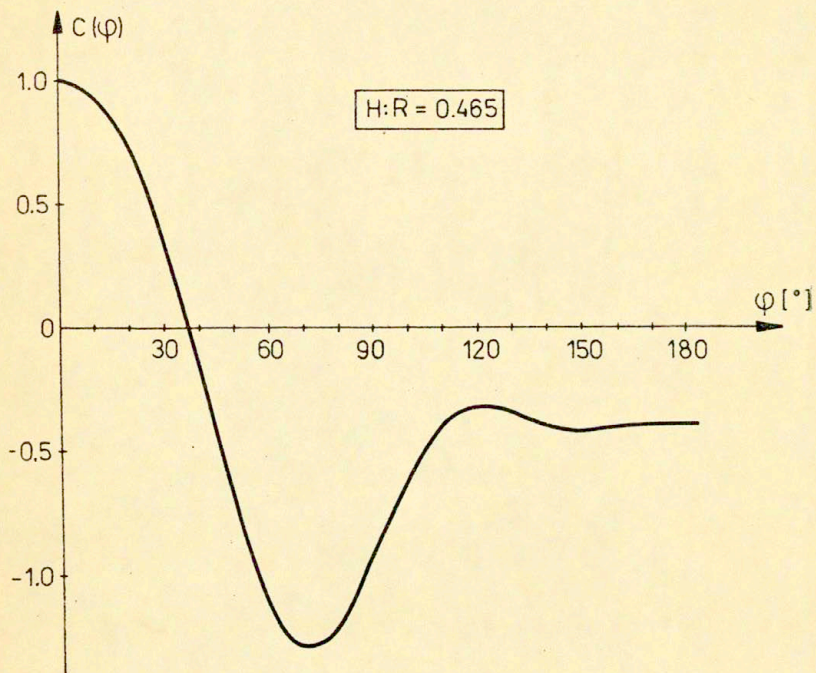
gdzie:

$C(\varphi)$ - jest współczynnikiem aerodynamicznym ciśnienia, uwzględniającym także ssanie wewnętrzne w przypadku powłok otwartych od gór_v. W obliczeniach przykładowych ssanie pominięto. Wartości tego współczynnika dla proporcji analizowanej powłoki podano na rys.5, na którym kąt φ jest odmierzany od płaszczyzny symetrii obciążenia.

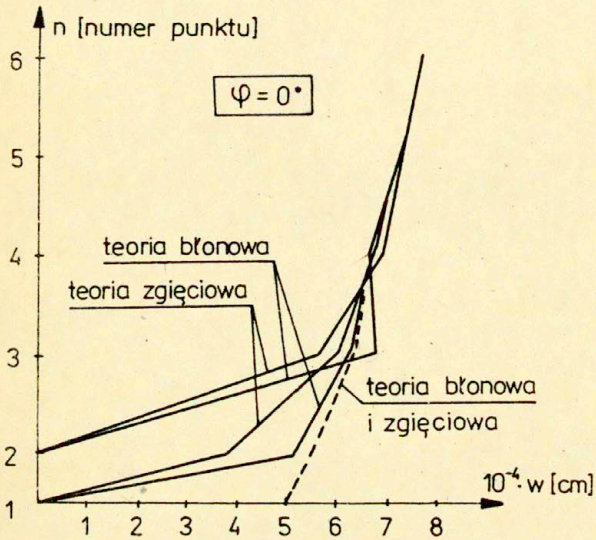
p_0 - jest pewnym globalnym współczynnikiem uwzględniającym między innymi dynamiczny charakter działania wiatru. Współczynnik ten jest uzależniony od podatności powłoki na dynamiczne działanie wiatru i związany jest z częstotliwością drgań swobodnych. W obliczeniach przyjęto wartość $p_0 = 1$.

W związku z postacią obciążenia (6.1) reprezentację dla składowych wektora przemieszczeń (3.2) ograniczono do wyrazów zerowych i członów odpowiadających sumowaniu po n . Obliczenia wykonano dla modelu składającego się z 21 punktów, z różnymi warunkami podparcia dolnej krawędzi i ze swobodnym górnym brzegiem.

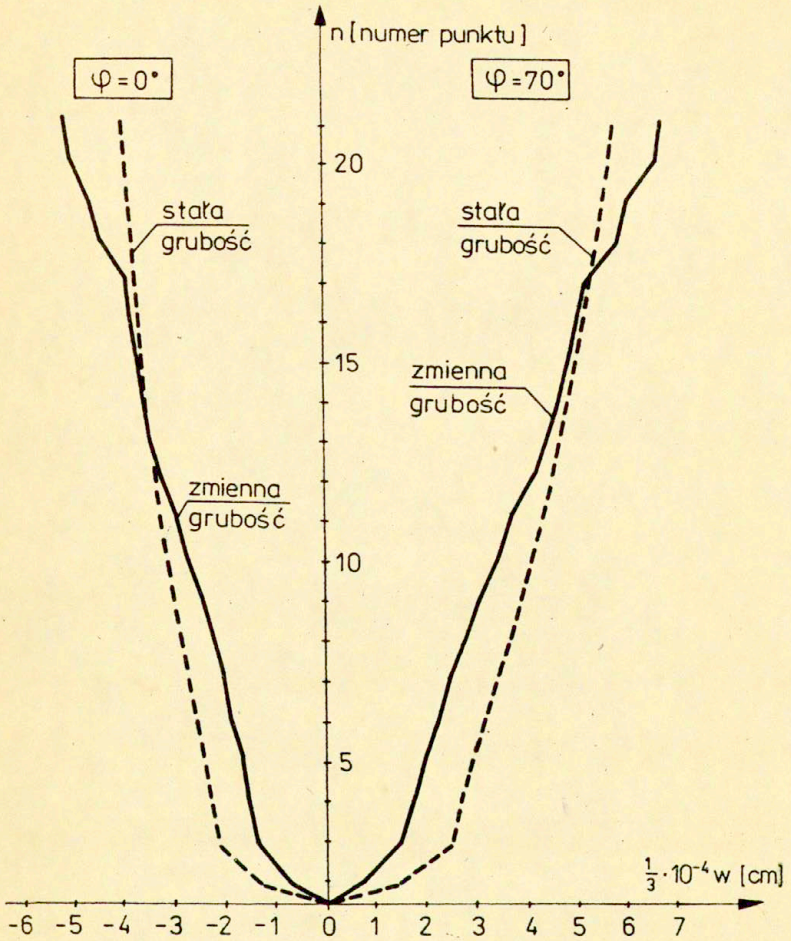
Otrzymane wyniki dla powłoki z warunkami brzegowymi A, obrazujące wpływ rodzaju modelu na stan przemieszczeń, przedstawione zostały na rys. 7, 8, 9 i 10. Rys.7 uwidacznia związek składowej normalnej W wektora przemieszczenia z rozkładem grubości po wysokości powłoki. Rysunek ten pokazuje składową



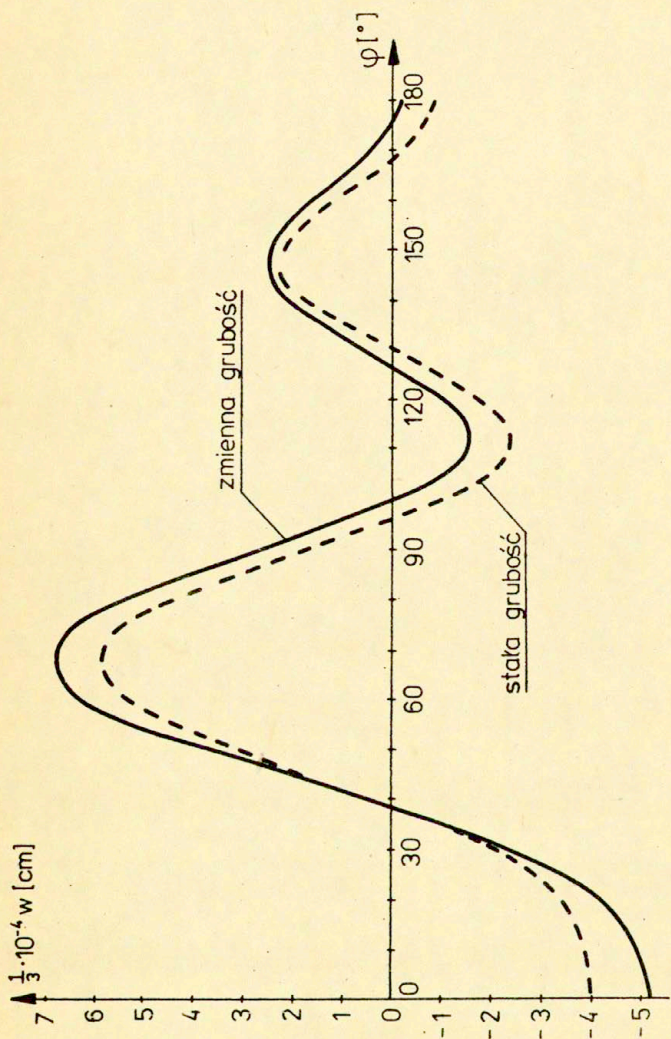
Rys. 5 . Współczynnik aerodynamiczny ciśnienia .



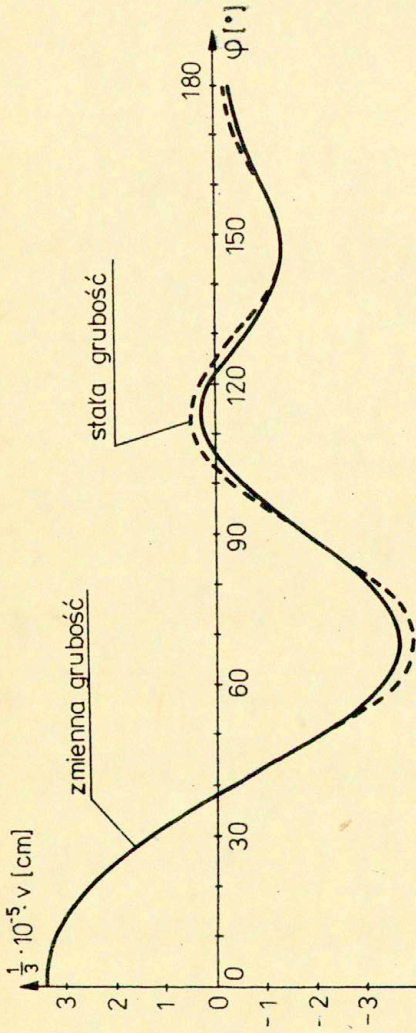
Rys. 6 . Składowa W w strefie brzegowej przy różnych sposobach podparcia dolnej krawędzi . Powłoka o stałej grubości .



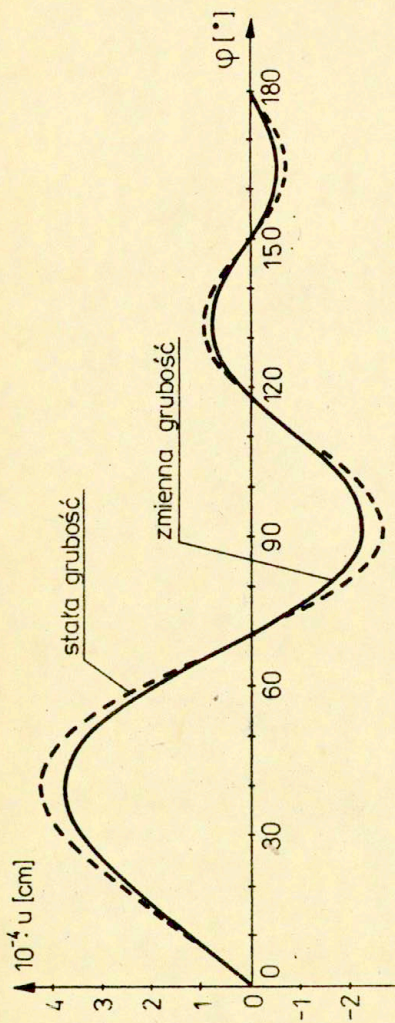
Rys. 7 .Składowa W wektora przemieszczeń dla tworzących $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 70^\circ$.



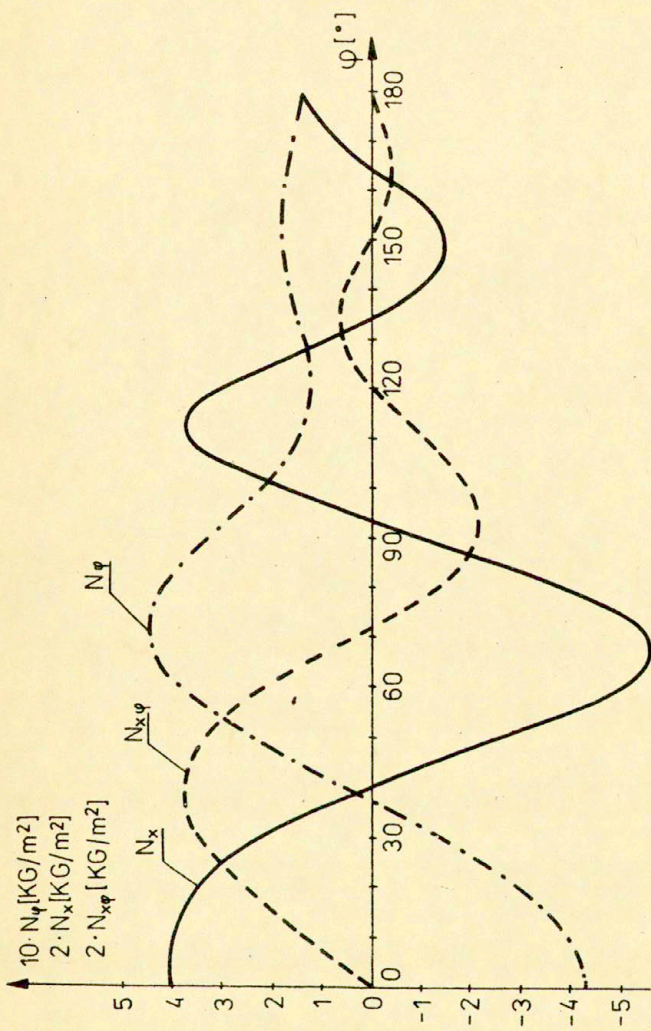
Rys. 8 . Składowa W wektora przemieszczeń górnej krawędzi



Rys .9. Składowa V wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi



Rys .10 . Składowa u wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi



Rys . 11 . Rozkład sił błonowych w połowie wysokości powłoki o stałej grubości , z warunkami brzegowymi A „+” oznacza rozciąganie .

normalną w dwóch charakterystycznych przekrojach, w których składowa ta osiąga najmniejszą i największą wartość. W obu przekrojach przemieszczenia na górnej krawędzi powłoki są większe w przypadku powłoki o zmiennej grubości, natomiast w strefie sześciu dolnych pasów większa jest wartość przemieszczeń powłoki o stałej grubości. Łamany charakter wykresu dla powłoki o zmiennej grubości, spowodowany przez znaczne różnice w przemieszczeniach punktów należących do różnych pasów, jest efektem skokowej zmiany grubości pasów. Wyniki uzyskane dla modelu zastępczego odbiegają w sposób istotny od wyników dla modelu o zmiennej grubości: maksymalna różnica dla przekroju $\varphi=0^\circ$ wynosi 23 % a dla przekroju $\varphi=70^\circ$ jest rzędu 14 %. Stąd wniosek, że ocena stanu przemieszczeń w oparciu o model zastępczy nie może być dokonana w sposób adekwatny. Pomijamy przy tym kwestię, że powłokę zastępczą analizuje się zazwyczaj w oparciu o teorię błonową co jest powodem dodatkowych błędów. Uzupełniające porównanie stanu przemieszczeń umożliwiają rysunki 8,9 i 10 pokazujące poszczególne składowe wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi powłoki.

Wykonano także, dla powłoki o stałej grubości, analizę porównawczą mającą określić wpływ stosowanej teorii powłok (błonowa lub zgięciowa) oraz warunków brzegowych (A lub B lub C) na przemieszczenia powłoki. W oparciu o tę analizę można stwierdzić, że różnice w przemieszczeniach obliczonych wg różnych teorii powłok występują tylko w strefie, w której uwidacznia się sposób podparcia powłoki, patrz rys.6. Dla analizowanej powłoki strefa ta obejmuje dwa dolne pasy. Powyżej tej strefy rezultaty bez względu na zastosowaną teorię powłok i sposób podparcia są identyczne.

Dla powłoki o stałej grubości i warunkach brzegowych A na rys. 11 pokazano rozkład sił błonowych dla przekroju w połowie wysokości powłoki. Zwraca uwagę fakt, że N_φ i N_x mają w przybliżeniu w tym samym miejscu, $\varphi=37^\circ$, punkt zerowy. Obszar od 0° do 37° tworzy strefę czołową, która ze względu na ściskające siły obwodowe N_φ , jest narażona na utratę stateczności. Najbardziej jest zagrożona górna część tej strefy bo siły N_x , rozciągające wzdłuż całej wysokości,

osiągają na górnej krawędzi wartość zerową.

6.2. ZAGADNIENIE DRGAŃ SWOBODNYCH

Dla określenia podatności powłoki na dynamiczne działanie wiatru w procesie projektowania korzysta się między innymi z kryterium opartego na znajomości częstości drgań swobodnych np. Polska Norma [10]. Dlatego też, wykorzystując program VESSDYN, przeprowadzono analizę w rezultacie której otrzymujemy, dla założonej postaci drgań w kierunku obwodowym, najmniejszą częstość własną i odpowiadający wektor własny.

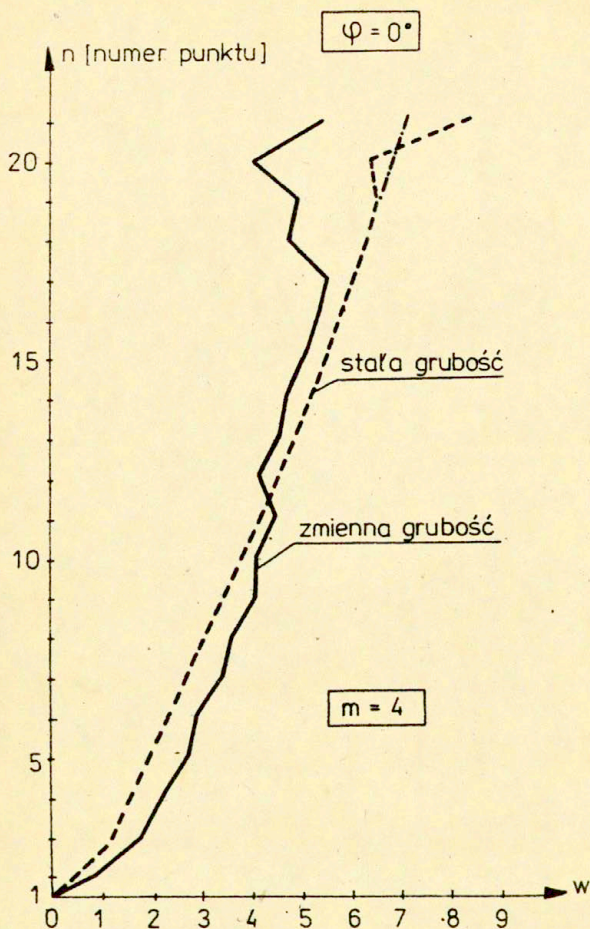
Ponieważ w zagadnieniu na wartości własne dużą rolę odgrywają cechy modelu dyskretnego obliczono kilka przykładów w celu określenia wpływu:

- a/ postaci operatorów różnicowych, oraz
- b/ liczby i rozmieszczenia punktów węzłowych na rezultaty analizy.

Poniższe przykłady dotyczą powłoki z warunkami brzegowymi A i drgań w postaci kilku pierwszych harmonik.

Tworząc operator różnicowy na brzegu bez użycia punktów fikcyjnych uniknięto pojawienia się dodatkowej błędnej częstości własnej. Jednak postać tego operatora spowodowała skokowe zachowanie wektora własnego dla obu modeli powłok, rys. 12, w obszarze przy górnej swobodnej krawędzi. Wektor własny dla powłoki o zmiennej grubości zachowuje się skokowo także w obszarach zmian sztywności, co można stwierdzić przez porównanie z rys. 10 dla tej samej składowej otrzymanej z analizy statycznej.

Wystąpienie skokowego zachowania wykresów świadczy o tym, że zastosowanie rozwinięcia w szereg Taylora (rozdz.3) nie prowadzi do tak zadawalających wyników jak siatki zmodyfikowane, opisane przez Bushnella w [5]. Sprzężenie punktów sąsiednich wprowadzone przez to rozwinięcie nie jest na tyle skuteczne by wyeliminować skokowe zachowanie się wykresu. Innym czynnikiem mającym wpływ na zachowanie gładkiego charakteru wektora własnego i najniższą częstość własną, jest rozkład punktów węzłowych. Wyniki odpowiednich obliczeń zamieszczono w tabelicy 2, gdzie indeks τ oznacza równomierny rozkład,



Rys. 12 . Składowa W wektora własnego odpowiadającego harmonice $m = 4$.

Tablica 2. Częstości drgań swobodnych ω w [rad/s]
dla 6 pierwszych harmonik.

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| ω_{11}^+ | 166.0 | 105.2 | 81.4 | 62.6 | 48.5 | 38.5 | 31.0 |
| ω_{21}^+ | 167.6 | 106.2 | 82.4 | 63.0 | 49.2 | 39.2 | 31.6 |
| ω_{21}^- | 83.0 | 58.6 | 53.2 | 44.5 | 35.7 | 28.5 | 22.9 |

Tablica 3. Minimalne częstości drgań swobodnych ω [rad/s]

| warunki brzegowe | grubość | ω | $m=17$ | $m=18$ | $m=21$ | $m=22$ |
|------------------|---------|------------|--------|--------|--------|--------|
| C | stała | ω^s | 7.946 | 7.874 | | |
| | zmienna | ω^z | | | 8.071 | 8.065 |
| A | stała | ω^s | 7.896 | 7.833 | | |
| | zmienna | ω^z | | | 8.028 | 8.031 |

n - nierównomierny rozkład a liczba umieszczona jako dolny indeks określa liczbę punktów dyskretyzacji. Na podstawie tych wyników można stwierdzić, że korzystniej jest wyodrębnić fikcyjne podobszary powłoki i stosować w nich rozkłady o różnych gęstościach ale równomiernie niż zmieniać zagęszczenie punktów, co zauważył Bushnell w pracy [5]. Kwestia ta wiąże się z różnicą w sposobach tworzenia operatora na brzegu fikcyjnym i we wnętrzu obszaru. Fakt niekorzystnego wpływu zmiennej gęstości potwierdza też pewien przykład, w którym w trzech podobszarach powłoki zadano siatkę o 3 gęstościach, przy czym maksymalna do minimalnej była jak 12:1. Podobszary zagęszczone utworzono w pobliżu obu brzegów. Wyniki otrzymane w oparciu o tę siatkę to wartości ω_{21}^n z tablicy 2. Są one w przybliżeniu o połowę mniejsze od poprawnych ω_{21}^r , otrzymanych dla regularnej siatki. Zmienna gęstość punktów wpływa niekorzystnie także na postać wektora własnego, która cechuje się znacznymi skokami wartości w miejscach zmian gęstości siatki.

Następne przykłady mają na celu określenie w jaki sposób najmniejsza częstość drgań własnych zależy od przyjętego modelu powłoki tzn. od warunków brzegowych i rozkładu grubości wzdłuż tworzącej. Określić to można w oparciu o wyniki analiz podane w tablicy 3, w której ω_{\min} znajduje się zawsze pomiędzy dwoma zamieszczonymi wartościami ω . Na podstawie rezultatów z tablicy 3 można wyciągnąć następujące wnioski:

- 1/ $\omega_{\min}^A < \omega_{\min}^C$ tzn. częstość drgań dla przypadku swobodnego podparcia (warunki A) jest niższa od wartości dla utwierdzenia dolnej krawędzi (warunki C). Sposób podparcia dolnej krawędzi nie wpływa w sposób istotny na ω_{\min} . Jest to zgodne ze stwierdzonym w analizie statycznej (rys.6) niewielkim wpływem warunków brzegowych na stan przemieszczeń powłoki.
- 2/ $\omega_{\min}^s < \omega_{\min}^z$ tzn. minimalna częstość drgań dla powłoki o stałej grubości jest mniejsza od częstości dla powłoki o zmiennej grubości. Tak więc, wykorzystując do obliczeń powłokę zastępczą o stałej grubości otrzymujemy bezpieczne przybliżenie częstości drgań powłoki rzeczywistej.

3/ $m_{min}^s < \bar{m}_{min}^z$ tzn. liczba fal odpowiadająca ω_{min}^s jest mniejsza od liczby fal odpowiadających ω_{min}^z . Ze stałą grubością zastępczą wiąże się mniejsza liczba fal w kierunku obwodowym. Rezultaty dla powłoki o stałej grubości i warunkach brzegowych C porównano z wynikami uzyskanymi wg relacji z pracy Gol'denvejzera i in. [6] .

Stosując metodę asymptotyczną, dla przybliżenia rzędu zero-wego podano w tej pracy następujące wzory na najmniejszą częstość kołową ω_{min} i odpowiadającą liczbę fal m_0 .

$$(6.2) \quad \omega_{min}^2 = \frac{E}{\rho} \frac{2\alpha^2 h}{r H^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

$$m_0^4 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)} r^3 \alpha^2}{H^2 h}$$

gdzie:

α - jest współczynnikiem uwzględniającym warunki brzegowe. Dla warunków C przyjmuje się $\alpha = 1.875$

Dla analizowanej powłoki otrzymano $\omega_{min} = 11.24$ a $m_0 = 16$. Częstość drgań według metody asymptotycznej jest w istotny sposób wyższa od wartości otrzymanej metodą różnic skończonych, w przybliżeniu równej 7.91, natomiast liczba fal postaci drgań jest mniejsza.

Rozbieżności te są efektem różnej jakości metod używanych do rozwiązania problemu. Należy zwrócić uwagę na uproszczenia związane z przyjęciem parametru warunków brzegowych w metodzie asymptotycznej. Pomimo, że ten sam warunek brzegowy w różny sposób wpływa na deformację w postaci różnych harmonik przyjmowana jest stała wartość współczynnika α

7. UWAGI KOŃCOWE

Praca dotyczy wykorzystania rozwinięć w szeregi Fouriera oraz energetycznej metody różnic skończonych do analizy statycznej i drgań swobodnych powłok cylindrycznych o skokowo zmiennej grubości. Bazując na wariancie równań Sandersa-Koitera liniowej teorii powłok opracowano programy numeryczne pozwalające rozwiązywać zagadnienia z klasycznymi warunkami podparcia oraz dla dowolnego, ograniczonego gęstością siatki, rozkładu grubości wzdłuż tworzącej powłoki.

W oparciu o podane przykłady numeryczne dokonano porównań mających na celu sprawdzić zasadność posługiwania się powłoką o stałej grubości, zamiast powłoki o skokowo zmiennej grubości. Należy podkreślić, że wnioski dotyczą tylko powłok o grubości zróżnicowanej podobnie jak w analizowanym przykładzie. Stwierdzono, że powłoka zastępcza nadaje się wyłącznie do szacowania minimalnej częstości drgań swobodnych, ponieważ otrzymuje się dla niej rezultaty stanowiące bezpieczne przybliżenie drgań powłoki rzeczywistej. Natomiast postaci drgań swobodnych oraz stan przemieszczeń otrzymany w analizie statycznej, dla powłoki zastępczej różnią się w sposób istotny od otrzymanych dla powłoki o skokowo zmiennej grubości.

Przeprowadzone obliczenia pozwalają stwierdzić, że zastosowanie koncepcji rozwinięcia w szeregi Fouriera prowadzi do bardzo efektywnych algorytmów numerycznych. Niedogodności związane ze stosowaniem metody różnic skończonych dotyczą problemu drgań swobodnych ponieważ zagadnienie na wartości własne, do którego sprowadza się problem drgań, wykazuje dużą czułość na sposób dyskretyzacji. Stwierdzono, że zastosowane w pracy rozwinięcie w szereg Taylora w przydzielonym obszarze całkowania, mniej skutecznie eliminuje efekty związane z dyskretyzacją niż różnice modyfikowane, zaproponowane przez Bushnella w pracy [5] .

8. LITERATURA

- [1] Z.F.BACZYŃSKI, M.JANAS : Zagadnienia stateczności zbiorników stalowych na cieczy . Prace IPPT , 26 /1969/
- [2] K.-J.BATHE, E.L.WILSON : Numerical methods in finite element analysis . Prentice-Hall , Inc. , 1976
- [3] B.BUDIANSKY, J.L.SANDERS : On the "best" first-order linear shell theory . Progress in Applied Mechanics . Prager Anniversary Volume , 192 , Macmillan , New York 1963 , 129-140
- [4] D.BUSHNELL, B.O.ALMROTH, F.BROGAN : Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis . Comp. Structures , 1 , 361-387 /1971/
- [5] D.BUSHNELL : Analysis of buckling and vibration of ring-stiffened , segmented shells of revolution . Int. J. Solids Structures , 6 , 157-181 /1970/
- [6] A.L.GOL'DENVEJZER, V.B.LIDSKIJ, P.E.TOVSTIK : Svobodnyje kolebanija tonkich uprugich oboloček . Nauka , Moskva 1979
- [7] A.KALNINS : Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads . J. Appl. Mech. , 31 , 467-476 /1964/
- [8] T.LISZKA, T.J.ORKISZ : The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics . Comp. Structures , 11 , 83-95 /1980/
- [9] W.PIETRASZKIEWICZ : Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells . Warszawa-Poznań 1979

- [10] POLSKA NORMA PN-77/B-02011 . Obciążenia w obliczeniach statycznych . Obciążenie wiatrem .
- [11] E.L.WILSON : Structural analysis of axisymmetric solids . AIAA J. , 3 , 2269-2274 /1965/
- [12] O.C.ZIENKIEWICZ : The finite element method . Mc Graw-Hill , London 1977

Spis treści

| | str. |
|---|------|
| 1. Wstęp | 3 |
| 2. Podstawowe równania teorii powłok | 4 |
| 3. Sformułowanie problemu brzegowego | 9 |
| 3.1. Zagadnienie statyczne | 9 |
| 3.2. Zagadnienie drgań swobodnych | 15 |
| 4. Tworzenie układu równań różnicowych | 17 |
| 5. Charakterystyka programów numerycznych | 22 |
| 6. Przykłady numeryczne | 23 |
| 6.1. Zagadnienie statyczne | 26 |
| 6.2. Zagadnienie drgań swobodnych | 35 |
| 7. Uwagi końcowe | 40 |
| 8. Literatura | 41 |