

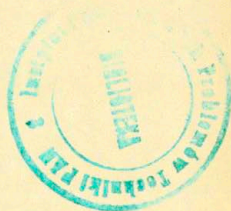
19 / 1984

H. Kudrewicz, S. Przeździecki

ANALITYCZNE PRZEDŁUŻENIE
ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA DYFRAKCJI
FALI PŁASKIEJ
NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE IMPEDANCYJNEJ
WZGLĘDEM PARAMETRU IMPEDANCYJNEGO

19/1984

P. 269

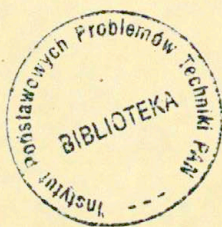


WARSZAWA 1984

Prace Zakładu Teorii Pól Elektromagnetycznych

Praca nr 205

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1984 r.



56967



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,4. Ark.druk.2,75.
Oddano do drukarni w kwietniu 1984r.
Nr zamówienia 297/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Halina Kudrewicz
Stanisław Przeździecki
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ANALITYCZNE PRZEDŁUŻENIE ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA DYFRAKcji
FALI PŁASKIEJ NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE IMPEDANCYJNEJ
WZGLĘDEM PARAMETRU IMPEDANCYJNEGO

W pracy sformułowano twierdzenie o przedłużeniu analitycznym rozwiązania zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej względem parametru będącego impedancją tej półpłaszczyzny i podano dowód przez konstrukcję tego przedłużenia.

1. Sformułowanie problemu dyfrakcji

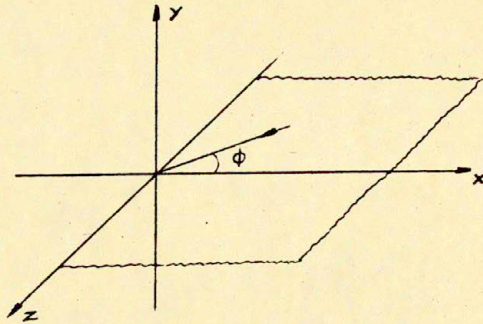
Na półpłaszczyznę impedancyjną opisaną przez warunek Leontowicza

$$(1) \quad \underline{n} \times \underline{E} = -Z_p \left[\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{H}) \right]$$

pada elektromagnetyczna fala płaska pod kątem ϕ do półpłaszczyzny, prostopadle do jej krawędzi.

We wzorze (1) \underline{E} oznacza wektor pola elektrycznego, \underline{H} - wektor pola magnetycznego, \underline{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do półpłaszczyzny i skierowany do obszaru, w którym rozpatruje się pole, $Z_p = \sqrt{\frac{\mu_p}{\epsilon_p}}$, gdzie μ_p , ϵ_p są elektromagnetycznymi parametrami danej półpłaszczyzny.

Należy znaleźć pole elektromagnetyczne w każdym punkcie przestrzeni.



Rys. 1

2. Rozwiązanie T.B.A. Seniora [1], 1952 r.

Zagadnienie jest harmoniczne w czasie.

Przyjęto zależność od czasu za pomocą czynnika $e^{-i\omega t}$

Problem rozpada się na dwa niezależne problemy: dla pola TM, gdzie $\underline{E} = (0, 0, E_z)$, $\underline{H} = (H_x, 0, H_y)$ i dla pola TE, gdzie $\underline{H} = (0, 0, H_z)$, $\underline{E} = (E_x, 0, E_y)$, przy geometrii zadania jak na Rys. 1.

W każdym z problemów należy rozwiązać równanie Helmholtza

$$(2) \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

z wynikającymi z (1) warunkami brzegowymi

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial y} && \text{dla } y = +0, x > 0 \\ u &= -i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial y} && \text{dla } y = -0, x > 0. \end{aligned}$$

dla pola TM, gdzie $\underline{E} = (0, 0, E_z)$, $u = E_z$

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} && \text{dla } y = +0, x > 0 \\ u &= -i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} && \text{dla } y = -0, x > 0 \end{aligned}$$

dla pola TE, gdzie $\underline{H} = (0, 0, H_z)$, $u = H_z$

Parametr η jest liczbą $\eta = \frac{Z_p}{Z}$,
gdzie $Z_p = \sqrt{\frac{\mu_p}{\epsilon_p}}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, przy czym μ_p , ϵ_p są
parametrami półprzewodnika, μ , ϵ parametrami ośrodka,
 $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ liczbą falową.

Padająca fala ma postać

$$(5) \quad u_i(x, y) = e^{-ik(x \cos \phi + y \sin \phi)}$$

2.1. Rozwiązanie dla pola TM

Senior wprowadza prąd magnetyczny $I_1(x)$ i elektryczny
 $I_2(x)$:

$$(6) \quad I_1(x) = E_z(x, +0) - E_z(x, -0)$$

$$(7) \quad I_2(x) = H_x(x, +0) - H_x(x, -0) .$$

Poszukuje rozwiązania przy następujących założeniach :

1^o $I_1(x)$, $I_2(x)$ są funkcjami całkowalnymi dla $0 \leq x < \infty$

2^o $I_1(x)$, $I_2(x)$ zachowują się jak e^{ikx} dla $x \rightarrow +\infty$.

Warunek 1^o jest odpowiednikiem sformułowanego dla
funkcji \underline{E} i \underline{H} warunku na ostrzu żądającego takiej po-
staci tych funkcji, aby ostrze nie promieniowało energii.

Warunek 2^o to odpowiednik warunku "fali wybiegają-
cej", t.j. żądania, aby dla stratnego ośrodka $k = k_r + ik_i$

funkcje $I_1(x)$, $I_2(x)$ były wykładniczo tłumio-
ne gdy $x \rightarrow +\infty$.

Dla funkcji $I_1(x)$, $I_2(x)$ Senior układa równania całkowe, które po dokonaniu transformacji Fouriera rozwiązują metodą Wienera-Hopfa.

Następnie pole elektryczne wyraża za pomocą pola padającego i prądów zaindukowanych, co prowadzi do rozwiązania w postaci całki typu odwrotnej transformacji Fouriera

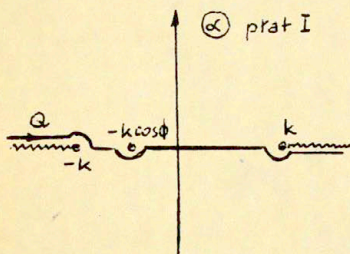
$$u(x, y, \eta) = u_i(x, y) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{kz}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} I_2(\alpha, \eta) + \frac{y}{|y|} \cdot I_1(\alpha, \eta) \right\} e^{i\alpha x} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2} |y|} d\alpha$$

gdzie funkcje $I_1(\alpha, \eta)$, $I_2(\alpha, \eta)$ są transformacjami Fouriera prądów (6) i (7).

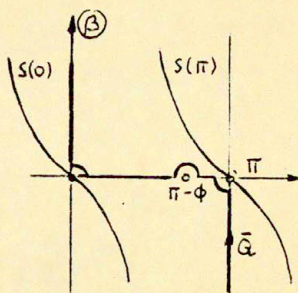
Po podstawieniu uprzednio znalezionych transformat $I_1(\alpha, \eta)$, $I_2(\alpha, \eta)$ rozwiązanie przybiera postać całki na płaszczyźnie zmiennej zespolonej α z cięciem dla $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ np. jak na Rys. 2.

$$(8) u(x, y, \eta) = u_i(x, y) - \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \frac{k K_0^*(-k \cos \phi, \eta)}{(\alpha + k \cos \phi) K_L^*(\alpha, \eta)} \cdot \left\{ 1 - \eta \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{k + \alpha}{k} (1 + \cos \phi)} \right\} e^{i\alpha x} e^{i|y| \sqrt{k^2 - \alpha^2}} d\alpha$$

Linia Q leży wzdłuż osi $\text{Im } \alpha = 0$ na płacie I dwupłatowej powierzchni Riemanna α , gdzie $\sqrt{k^2 - \alpha^2} = +k$ dla $\alpha = 0$ i omija punkty rozgałęzienia i biegun funkcji podcałkowej jak pokazano na Rys. 2a.



Rys.2a



Rys.2b

Występujące pod znakiem całki funkcje $K_U^*(\alpha, \eta)$ i $K_L^*(\alpha, \eta)$ są czynnikami faktoryzacji funkcji

$$(9) \quad K^*(\alpha, \eta) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

$$(10) \quad K^*(\alpha, \eta) = \frac{K_L^*(\alpha, \eta)}{K_U^*(\alpha, \eta)}$$

w otoczeniu linii Q .

Funkcja $K^*(\alpha, \eta)$ ma dwa punkty rozgałęzienia $\alpha = k$,

$$\alpha = -k \text{ i dwa punkty zerowe } \alpha_d = \frac{i k}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$$

(11)

Oba punkty zerowe leżą na jednym z dwóch płatów powierzchni Riemanna α .

Senior dokonał faktoryzacji funkcji $K^*(\alpha, \eta)$ dla takiej impedancji η , dla której punkty zerowe α_d leżą na płacie II.

Czynniki faktoryzacji dane są wzorami

$$(12) K_L^*(\alpha, \eta) = \left(\frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k - \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ik\sqrt{1-\eta^2} - \eta\alpha}{ik\sqrt{1-\eta^2} + \eta\alpha} \right) \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{1 - \sqrt{1-\eta^2}}{1 + \sqrt{1-\eta^2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k - \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}} \right)^{\frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right)} \ln \left(\frac{1 - \eta \cos s}{1 + \eta \cos s} \right) ds \right\}$$

$$(13) K_V^*(\alpha, \eta) = \left(\frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k + \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ik\sqrt{1-\eta^2} - \eta\alpha}{ik\sqrt{1-\eta^2} + \eta\alpha} \right) \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{1 - \sqrt{1-\eta^2}}{1 + \sqrt{1-\eta^2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k - \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}} \right)^{\frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right)} \ln \left(\frac{1 - \eta \cos s}{1 + \eta \cos s} \right) ds \right\}$$

Znane są też postaci funkcji $K_L^*(\alpha, \eta)$, $K_V^*(\alpha, \eta)$ obliczone dla innych zakresów parametru η , dla przypadku występowania fali powierzchniowej [2] .

Do analizy pola dalekiego dla wartości $kr \gg 1$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Senior zastosował metodę punktu siodłowego. W tym celu wygodnie jest dokonać zamiany zmiennych przestrzennych w całce (8) kładąc

$$(14)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

i zamiany zmiennej całkowania

$$(15) \quad \alpha = k \cos \beta$$

Transformacja (15) przeprowadza płaszczyznę α z cięciem jak na Rys. 2a w pas $0 < \operatorname{Re} \beta < \pi$, Rys. 2b. Skierowana linia Q przechodzi w skierowaną linię \bar{Q} , a całka (8) w całkę

$$(16) \quad u(r, \theta) = u_i(r, \theta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{Q}} \frac{K_0^*(-k \cos \phi, \eta)}{(\cos \phi + \cos \beta) K_L^*(k \cos \beta, \eta)} \cdot \\ \cdot \left(1 - 2\eta \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) e^{ikr(\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta)} d\beta.$$

W metodzie punktu siodłowego, zamiast całkować wzdłuż linii \bar{Q} , dla każdego punktu obserwacji o kącie θ całkuje się wzdłuż krzywej najszybszego spadku $S(\theta)$ z rodziny krzywych o równaniu

$$(17) \quad \beta_r - \theta = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_i}$$

gdzie $\beta_r + i\beta_i = \beta$

Dwie linie skrajne: $S(0)$ dla $\theta = 0$ i $S(\pi)$ dla $\theta = \pi$ naszkicowano na Rys. 2b. Wszystkie pozostałe dla $0 < \theta < \pi$ leżą między nimi.

Zastąpienie drogi całkowania Q przez krzywą najszybszego spadku $S(\theta)$ i przybliżone obliczenie całki wzdłuż tej krzywej daje dla każdego kąta θ asymptotyczną wartość całki (16) dla $r \rightarrow \infty$.

Rozpatrzmy obszar $0 < \theta < \pi$.

Zgodnie z tw. Cauchy'ego przy zmianie linii całkowania mamy:

$$(18) \quad \int_{\bar{Q}} \psi(\beta, \eta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta = \int_{S(\theta)} \psi(\beta, \eta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta + \\ + 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{\beta=\beta_k} \psi(\beta, \eta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)}$$

gdzie przez β_k oznaczono bieguny funkcji $\Psi(\beta, \eta)$ leżące między liniami \bar{Q} i $S(\theta)$, przy czym przyjęto oznaczenie

$$\Psi(\beta, \eta) = \frac{K_0^*(-k \cos \phi, \eta)}{(\cos \phi + \cos \beta) K_L^*(k \cos \beta, \eta)} \left(1 - 2\eta \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

Funkcja $\Psi(\beta, \eta)$ ma biegun w punkcie $\beta = \pi - \phi$. Składnik drugi prawej strony wzoru (18) ma postać:

$$2\pi i \operatorname{res}_{\beta=\pi-\phi} \Psi(\beta, \eta) e^{ikr \cos(\beta-\theta)} = \begin{cases} -\frac{1-\eta \sin \phi}{1+\eta \sin \phi} e^{-ikr \cos(\phi+\theta)} & \text{dla } 0 < \theta < \pi - \phi \\ 0 & \text{dla } \pi - \phi < \theta < \pi \end{cases}$$

Jest to fala odbita znana z optyki geometrycznej.

Jeżeli funkcja $\Psi(\beta, \eta)$ ma oprócz bieguna w punkcie $\pi - \phi$ biegun w punkcie β_d w ogólności zespolonym, tak położonym, że drugi składnik prawej strony wzoru (18) istnieje w obszarze kątowym $0 < \theta < \theta_{\max}$, to taką falę płaską w ogólności niejednorodną będziemy nazywali falą powierzchniową.

Podobnie dla obszaru $\gamma < 0$ mówimy o fali odbitej i fali powierzchniowej jako o przyczynkach do całki pochodzących od residuum funkcji podcałkowej liczonego w istniejących biegunach leżących między linią \bar{Q} , a krzywymi najszybszego spadku $S(\theta)$ dla $0 < \theta < \pi$.

2.2. Własności rozwiązania T.B.A. Seniora

1. W rozwiązaniu T.B.A. Seniora nie ma fali powierzchniowej.

2. Na krawędzi półpłaszczyzny prąd magnetyczny $I_1(x)$, elektryczny $I_2(x)$ i pole elektryczne $\underline{E}(x,y) = (0,0,u(x,y))$ zachowuje się w następujący sposób:

$$I_1(x) = 0(\sqrt{x}), \quad I_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow +0} C, \quad \text{gdzie } C \text{ jest określona stałą,}$$

$$u(x,0) = 0(\sqrt{x}).$$

Wzór (8), po wstawieniu $\frac{1}{\eta}$ w miejsce η przedstawia rozwiązanie problemu dyfrakcji dla pola TE.

3. Problem jednoznaczności rozwiązania zagadnienia dyfrakcji dla półpłaszczyzny

W przypadku padania fali płaskiej na półpłaszczyznę doskonale przewodzącą, tzn. dla równania Helmholtza z warunkiem Dirichleta lub Neumanna na półprostej, warunek wypromieniowania w nieskończoności zapewnia jednoznaczność rozwiązania w klasie funkcji o odpowiedniej regularności [3].

Dla półpłaszczyzny impedancyjnej, czyli dla równania Helmholtza z warunkiem mieszanym na półprostej, brak jest twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania. Dla impedancji pasywnej, tzn. dla przypadku $\operatorname{Re} \eta > 0$ fizycy formułują tzw. warunek fali wybiegającej. Żądają aby w nieskończoności nad półpłaszczyznę rozwiązanie, po odjęciu fali odbitej, wykładniczo malało do zera. Taki warunek spełnia rozwiązanie Seniora. W przypadku impedancji aktywnej dostarczającej energii otoczeniu, dla $\operatorname{Re} \eta < 0$, trudno jest sformułować sensownie warunek w nieskończoności.

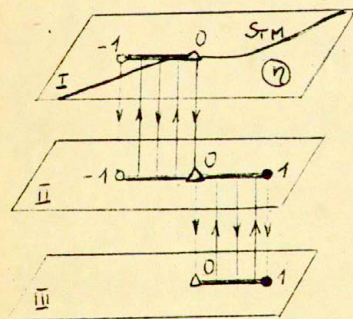
Powszechnie uważa się, że rozwiązanie zagadnienia dyfrakcji dla impedancji aktywnej otrzyma się przez przedłużenie

analityczne względem η rozwiązania znalezionej dla impedancji pasywnej.

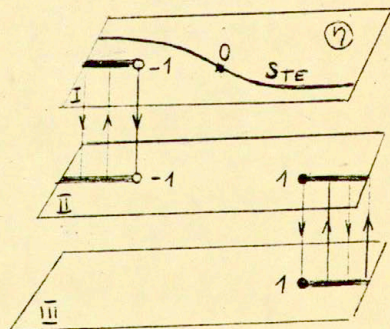
W związku z tym powstaje pytanie, czy przedłużenie takie jest jedno. Odpowiedź formułujemy w postaci następującego twierdzenia.

3.1. Twierdzenie o przedłużeniu rozwiązania zagadnienia dyfrakcji dla półpłaszczyzny impedancyjnej

Przedłużenie analityczne względem parametru η rozwiązania T.B.A. Seniora $u(x, y, \eta)$, [1] jest niejednoznaczne. Dla pola typu TM przedłużenie przedstawia funkcję analityczną z punktami rozgałęzienia $\eta = 0$, $\eta = -1$, $\eta = 1$. Jej powierzchnia Riemanna składa się z trzech płatów przedstawionych na Rys. 3a, gdzie rozwiązanie Seniora znajduje się poniżej krzywej S_{TM} na płacie I.



Rys. 3a



Rys. 3b

Dla pola typu TE przedłużenie przedstawia funkcję analityczną z punktami rozgałęzienia $\eta = \infty$, $\eta = -1$, $\eta = 1$. Jej powierzchnia Riemanna składa się z trzech płatów przedstawionych na Rys. 3b, gdzie rozwiązanie Seniora znajduje się powyżej krzywej S_{TE} o równaniu.

$$(\text{Im} \eta)^2 = \frac{(\text{Re} \eta)^2}{1 + (\text{Re} \eta)^2}$$

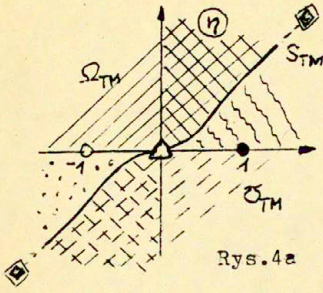
Krzywe S_{TM} i S_{TE} odwzorowują się w siebie przez inwersję.

Dowód twierdzenia polega na konstrukcji trzech omówionych płatów. Konstrukcja ta wynika bezpośrednio z analizy rozwiązania przeprowadzonej w pracach [4-5]. Przedstawimy zatem tylko szkic metody zastosowanej do otrzymania rozwiązania, w którym zawiera się rozwiązanie Seniora. Metoda polega na poszukiwaniu rozwiązania w postaci całki będącej superpozycją fal płaskich. Zwrócimy uwagę na te elementy metody, które są nieskonwencjonalne albo nowe, a z których w istotny sposób korzystamy dla znalezienia wszystkich przedłużeń znanego rozwiązania Seniora.

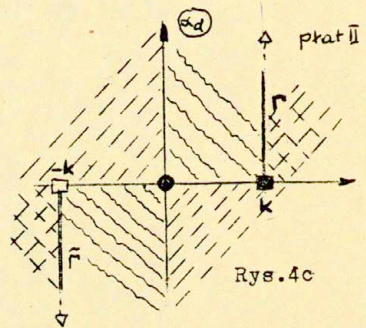
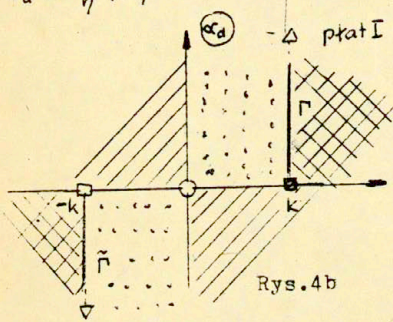
Na początku znajdziemy wszystkie wartości impedancji, dla których jedna z gałęzi rozwiązana jest opisana formułami Seniora (8-13). W tym celu znajdziemy położenie punktów zerowych (11) funkcji $K^*(\alpha, \eta)$ na powierzchni Riemanna α i β dla każdej wartości η .

4. Dyskusja położenia punktów zerowych funkcji $K^*(\alpha, \eta)$ w zależności od parametru η

Na Rys. 4 przedstawiono odwzorowania płaszczyzny zmiennej zespolonej η funkcją $\alpha_d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$, Rys. 4abc oraz funkcją $\beta_d = \arcsin(-\frac{1}{\eta})$, Rys. 4ad.

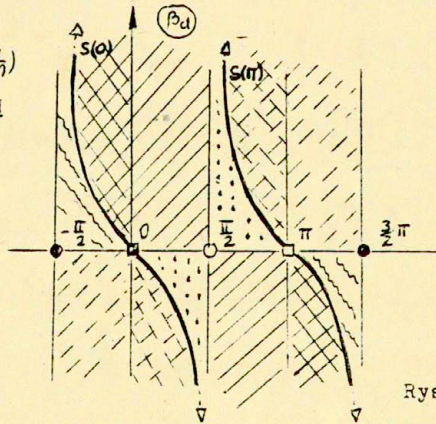


$$\alpha_d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$$



$$\beta_d = \arcsin(-\frac{1}{\eta})$$

$$\beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$$



W pierwszym przypadku otrzymano dwupłatową powierzchnię Riemanna identyczną z powierzchnią α , którą na Rys. 4 bc przedstawiono w postaci dwóch płatów położonych obok siebie, wyodrębnionych przez cięcia wzdłuż krzywych Γ i $\tilde{\Gamma}$. Przez płat I oznaczono ten, dla którego $\sqrt{k^2 - \alpha^2} = k$ dla $\alpha = 0$.

Takiego podziału na płaty będziemy używali w dalszej części tej pracy. W wyniku odwzorowania $\beta_d = \arcsin\left(-\frac{1}{\eta}\right)$ (lub $\beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$) otrzymano walec, który na Rys. 4d przedstawiono rozcięty wzdłuż tworzącej $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ($\beta = \frac{3}{2}\pi$). Ten walec jest obrazem powierzchni α_d odwzorowanej funkcją $\beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$, Rys. 4 bcd. Rozcięty walec jest znany jako tzw. "płaszczyzna kątowna" β otrzymana z powierzchni α przez transformację $\beta = \arccos \frac{\alpha}{k}$.

Odwzorowanie płaszczyzny η w powierzchnię Riemanna α_d nie jest wzajemnie jednoznaczne. Jednemu punktowi płaszczyzny η odpowiadają dwa punkty powierzchni Riemanna α_d , leżące oba na jednym płacie. To samo odnosi się do transformacji płaszczyzny η w walec β_d . Natomiast transformacja $\beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$ przeprowadza powierzchnię Riemanna α_d w walec β_d wzajemnie jednoznacznie.

Rysunki 4 będziemy wykorzystywali w dwojaki sposób:

1. Przy ustalonej wartości parametru $\eta = \eta_0$ czyli dla wybranego punktu η_0 na płaszczyźnie η , rysunki 4bc potraktujemy jak rysunki przedstawiające dziedzinę funkcji $K^*(\alpha, \eta_0)$, czyli dwa płaty powierzchni Riemanna α , a rysunek 4d - jako powierzchnię Riemanna β , z naniesionymi na nią dwoma punktami zerowymi funkcji $K^*(\alpha, \eta_0) = K^*(\beta, \eta_0)$

odpowiadającymi punktowi η_0 . Na tych powierzchniach będzie leżała linia całkowania Q , czy też krzywe najszybszego spadku $S(\theta)$.

2. Przy konstruowaniu przedłużenia analitycznego rozwiązania znalezione przy ustalonym η , zarówno funkcję $K^*(\alpha, \eta)$ jak i występujące pod całką funkcje zależne od α i od η będziemy traktowali jak funkcje dwóch zmiennych zespolonych α i η , albo jak funkcje dwóch zmiennych zespolonych α i α_d lub β i β_d . Wtedy z rysunków będziemy odczytywali dziedzinę funkcji $K^*(\alpha, \eta)$ jako iloczyn kartezjański: powierzchni Riemanna α i płaszczyzn η , albo powierzchni Riemanna α i takiej samej powierzchni Riemanna α_d , lub powierzchni Riemanna β i takiej samej powierzchni Riemanna β_d . Warto zaznaczyć, że dziedzina występującej pod całką (8) funkcji $K_L^*(\alpha, \eta)$ jest inna niż dziedzina funkcji $K^*(\alpha, \eta)$.

Na Rys. 4abcd odpowiadające sobie obszary i punkty są tak samo oznaczone.

Linia S_{TM} , Rys. 4a, dzieli płaszczyznę η na dwie części. Obszar położony nad linią będziemy oznaczali przez Ω_{TM} , a obszar położony pod linią przez \mathcal{U}_{TM} . Obrazem linii S_{TM} są linie cięcia Γ i $\tilde{\Gamma}$ na płaszczyźnie α_d , krzywe $S(0)$ i $S(\pi)$ na płaszczyźnie β_d . Obszar Ω_{TM} odwzorowuje się na płat I powierzchni α_d , w obszar zawarty między krzywymi $S(0)$ i $S(\pi)$ na płaszczyźnie β_d , natomiast obszar \mathcal{U}_{TM} odwzorowuje się na płat II powierzchni α_d , w pozostałą część płaszczyzn β_d .

Dla $\eta \in \Omega_{TM}$ punkty zerowe funkcji na płaszczyźnie β faktoryzowanej w obszarze zawierającym wszystkie krzywe najszybszego spadku $S(\theta)$

dla $0 < \theta < \pi$ i linię Q w rozwiązaniu Seniora, a dla $\eta \in \mathcal{U}_{TM}$ - leżą poza tym obszarem. Zatem rozwiązanie Seniora przedłuża się bezpośrednio poprzez wzory (8-13) na obszar \mathcal{U}_{TM} .

Odcinek linii S_{TM} dla $\text{Re} \eta > 0$ (dla impedancji pasywnych) jest znany w literaturze, jako krzywa oddzielająca wartości impedancji dla których fala powierzchniowa istnieje, od tych dla których nie ma fali powierzchniowej [6].

Charakterystyczne punkty odwzorowań to $\eta = -1$, $\eta = +1$, $\eta = 0$ i $\eta = \infty$. Dla $\eta = -1$ jest tylko jeden punkt $\alpha_d = 0$ na płacie I, $\beta_d = \frac{\pi}{2}$. Dla $\eta = 1$ - jeden punkt $\alpha_d = 0$ na płacie II, $\beta_d = -\frac{\pi}{2}$ (albo ten sam $\beta_d = \frac{3}{2}\pi$).

Punkt $\eta = 0$, oznaczony trójkątem, odwzorowuje się w ∞ , co symbolicznie oznaczono również trójkątem na liniach będących obrazem linii S_{TM} . Natomiast punkt ∞ odwzorowuje się w punkty $\alpha_d = -k$, $\beta_d = \pi$ i $\alpha_d = k$, $\beta_d = 0$, co oznaczono również symbolicznie na linii S_{TM} i jej obrazach.

Pełniejsze omówienie odwzorowań znajduje się w [4].

5. Metoda rozwiązania problemu dyfrakcji

Rozwiązanie przedstawiamy w postaci sumy fali padającej $u_i(x, y)$ i rozproszonej $u_s(x, y, \eta)$

$$(20) \quad u(x, y, \eta) = u_i(x, y) + u_s(x, y, \eta)$$

Fala rozproszona spełnia równanie Helmholtza

$$(21) \quad \nabla^2 u_s + k^2 u_s = 0$$

z niejednorodnymi warunkami brzegowymi na półprostej

$$(22a) \quad \left(u_s - i \frac{2}{k} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_{y=0} = (-1 + \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi} \quad \text{dla } x > 0$$

$$(22b) \left(u_s + i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_{y=0} = - (1 + \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi} \quad \text{dla } x > 0$$

i z warunkami ciągłości funkcji i pochodnej w aperturze

$$(23) \quad u_s(x, +0) = u_s(x, -0) \quad \text{dla } x < 0$$

$$(24) \quad \frac{\partial u_s}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u_s}{\partial y}(x, -0) \quad \text{dla } x < 0.$$

Rozwiązania $u_s(x, y)$ poszukujemy w postaci całki, oddzielnie dla $y > 0$ i $y < 0$

$$(25a) \quad u_s(x, y) = \int_Q A(\alpha) e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y > 0$$

$$(25b) \quad u_s(x, y) = \int_Q B(\alpha) e^{i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y < 0$$

gdzie

$$(26) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

5.1. Analiza poźbzenia linii całkowania Q

Na to, aby móc spręczyćwać co oznaczają całki (25ab), potrzebna jest jednoznaczna i ciągła zależność między zmiennymi α i γ związanymi relacją (26). Zależność taka istnieje wyłącznie wtedy, gdy zmienne α przyjmuje wartości z dwupłatowej powierzchni Riemanna α z punktami rozgałęzienia $\alpha = -k$, $\alpha = +k$.

Drogę całkowania na tej powierzchni należy położyć tak, żeby zapewnić całkom zbieżność. Załadawszy, żeby linia nie przechodziła przez punkty osobliwe funkcji podcałkowej wystarczy zbadać zbieżność całki dla $|\alpha| \rightarrow \infty$. O zbieżności całek decyduje czynnik wykładniczy, o ile funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ będą niższego rzędu. Zastosujemy kryterium bezwzględnej zbieżności.

Ponieważ mamy

$$\left| e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} \right| = e^{-x \operatorname{Im} \alpha} e^{-y \operatorname{Im} \gamma} \quad \text{dla } y > 0$$

$$\left| e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} \right| = e^{-x \operatorname{Im} \alpha} e^{y \operatorname{Im} \gamma} \quad \text{dla } y < 0$$

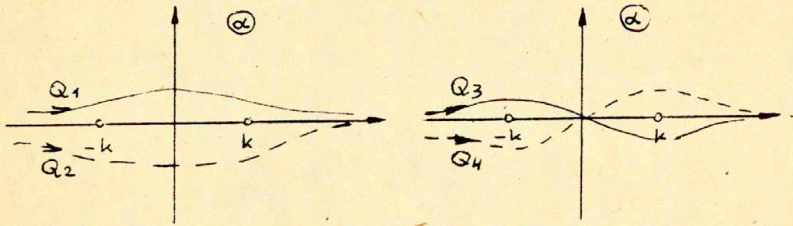
to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności całek (25) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ jest takie położenie linii Q , aby nie przechodziła przez punkty osobliwe funkcji podcałkowej i aby na jej końcach był spełniony warunek

$$(27) \quad \operatorname{Im} \alpha = 0, \quad \operatorname{Im} \gamma > 0 \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty$$

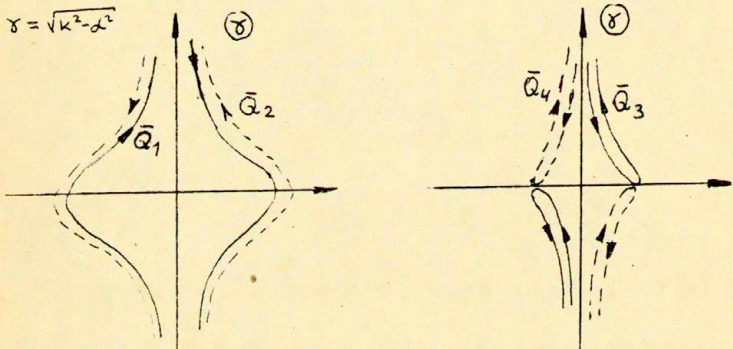
O punktach osobliwych funkcji $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ nic na razie powiedzieć nie umiemy. Funkcja $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ma dwa punkty rozgałęzienia $\alpha = -k$ i $\alpha = +k$. Zbadajmy dla jakiego z czterech możliwych topologicznie położenia linii Q względem tych punktów, Rys. 5a, jest spełniony warunek (27). W tym celu odwzorowujemy każdą z linii za pomocą funkcji $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$. Odwzorowania te, dla k rzeczywistego, naszkicowano na Rys. 5b. Obraz linii Q_n dla $n = 1, 2, 3, 4$ oznaczono przez \bar{Q}_n , przy czym obrazy są dwa, bo odwzorowano linię każdą z dwóch gałęzi pierwiastka.

Z położenia linii \bar{Q}_1 i \bar{Q}_2 widać, że warunek (27) nie jest spełniony na liniach Q_1 i Q_2 . Pozostają dwa pozostałe położenia: Q_3 i Q_4 .

Skierowana linia Q_3 leży tak, że punkt $-k$ jest po jej prawej stronie, a punkt $+k$ po lewej. Przeciwnie usytuowane są te punkty względem linii Q_4 . Jeżeli dokonamy transformacji α na $-\alpha$, to linia Q_3 stanie się linią $-Q_4$ i odwrotnie.



Rys.5a



Rys.5b

Zbadajmy jak zmieni się równanie Helmholtza (21) i warunki brzegowe (22) przy zamianie k na $-k$. Równanie Helmholtza pozostaje takie samo, a zamiana w warunkach brzegowych daje w efekcie zamianę stron półpłaszczyzny, wobec tego wystarczy znaleźć rozwiązanie dla jednego z położenia linii.

Przyjmujemy położenie Q_3 i opuścimy wskaźnik przy literze Q .

Na płacie I powierzchni Riemanna α przedstawionym na Rys. 4b, spełniona jest zależność $\text{Im } \gamma > 0$ wszędzie poza obszarami $0 < \text{Re } \alpha < k, \text{Im } \alpha > 0$ i $-k < \text{Re } \alpha < 0, \text{Im } \alpha < 0$, a na płacie II przeciwnie. Wobec tego zgodnie z warunkiem (27) końce linii Q będą leżały na osi $\text{Im } \alpha = 0$ na płacie I.

Dla półpłaszczyzny pasywnej, fizyczną rolę odgrywa takie rozwiązanie, w którym cała linia leży na płacie I. Dla skonstruowania wszystkich przedłużeń analitycznych tego rozwiązania będziemy musieli w ślad za punktami zerowymi α_d "pociągnąć" linię całkowania na płat II unieruchamiając jej końce.

Po ustaleniu położenia linii Q w całkach (25) przechodzimy do wyznaczenia funkcji $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$.

Warunki brzegowe (22-24) służą do ułożenia równań całkowych dla tych funkcji

$$(28) \quad \int_Q \{A(\alpha) - B(\alpha)\} e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \quad \text{dla } x < 0$$

$$\int_Q i\gamma \{A(\alpha) + B(\alpha)\} e^{i\alpha x} d\alpha = 0$$

$$(29) \quad \int_Q \left(1 + \frac{\gamma}{\kappa} \gamma\right) A(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = (-1 + \gamma \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi} \quad \text{dla } x > 0$$

$$\int_Q \left(1 + \frac{\gamma}{\kappa} \gamma\right) B(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = -(1 + \gamma \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi}$$

Z warunku istnienia rozwiązania równań (29) otrzymujemy informację o położeniu linii całkowania Q względem punktu $\alpha_0 = -k \cos \phi$, który jak się później okaże jest biegunem funkcji $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$,

Mianowicie, punkt $\alpha_0 = -k \cos \phi$ musi leżeć powyżej (na lewo od) linii Q, [4].

Rozwiązanie równań (28-29) wyrażają się przez nieznanne cztery funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ o tych własnościach, że $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ są analityczne poniżej (na prawo od) linii Q wraz z pewnym jej otoczeniem, natomiast funkcje $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ są analityczne powyżej (na lewo od) linii Q wraz z pewnym jej otoczeniem. Wszystkie te funkcje znikają dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w obszarach swojej określoności.

Z równań (20) wynikają relacje między funkcjami $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ i funkcjami $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, a z równań (29) wynikają relacje między funkcjami $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ i funkcjami $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$. Wypiszemy dwie pierwsze

$$(30) \quad \begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[L_1(\alpha) + \frac{1}{8} L_2(\alpha) \right] \\ B(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} L_2(\alpha) - L_1(\alpha) \right] \end{aligned}$$

Wstawiając (30) do (25ab) otrzymamy rozwiązanie wyrażone przez funkcje $L_1(\alpha) = L_1(\alpha, \eta)$, $L_2(\alpha) = L_2(\alpha, \eta)$

$$(31) \quad u_s(x, y, \eta) = \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{8} L_2(\alpha, \eta) + \frac{y}{|y|} L_1(\alpha, \eta) \right] e^{i\alpha x} e^{i\alpha |y|} d\alpha$$

Funkcje $L_1(\alpha, \eta)$ i $L_2(\alpha, \eta)$ otrzymujemy z następujących równań Wienera - Hopfa, gdzie dla uproszczenia zapisu znów będziemy zaznaczali w argumentach tylko zależność tych funkcji od zmiennej α :

$$(32a) \quad U_1(\alpha) = (k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}) L_1(\alpha) - \frac{1}{\pi i} \frac{\eta k \sin \phi}{\alpha + k \cos \phi}$$

$$(32b) \quad U_2(\alpha) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} L_2(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \frac{k}{\alpha + k \cos \phi}$$

Każde z równań możemy napisać w postaci

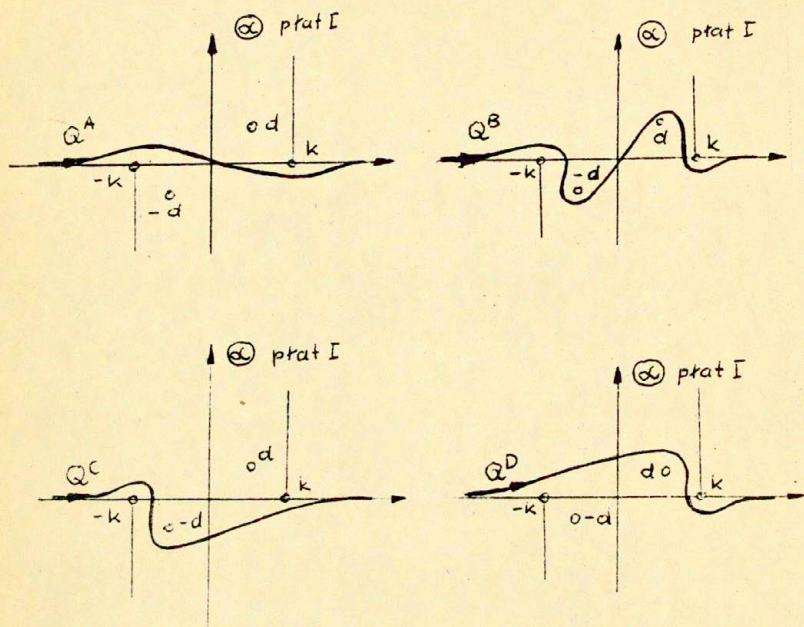
$$U_i(\alpha) = K_i(\alpha, \eta) L_i(\alpha) + D_i(\alpha) \quad \text{dla } i = 1, 2$$

gdzie funkcje $K_i(\alpha, \eta)$ oraz $D_i(\alpha)$ są dane tak, jak wynika z (32a) i (32b).

Każda z funkcji $K_i(\alpha, \eta)$ jest określona na dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\alpha = +k$, $\alpha = -k$ i ma na tej powierzchni dwa punkty zerowe (11) dla każdej wartości η , tak jak pokazano na Rys. 4abc.

Istnienie punktów zerowych faktoryzowanej funkcji $K_i(\alpha, \eta)$ jest cechą istotną problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej, odróżniającą go od problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie doskonale przewodzącej.

Istnienie punktów zerowych faktoryzowanej funkcji daje możliwość położenia linii całkowania Q na powierzchni Riemanna na więcej niż jeden sposób. W otoczeniu każdej linii rozwiązanie równań Wienera-Hopfa (32) jest inne, a to prowadzi do istnienia różnych funkcji $u_s(x, y, \eta)$, (31), dla tej samej wartości parametru η . Traktując $u_s(x, y, \eta)$ jako funkcję parametru η , przy ustalonych x, y , pokażemy, że trzy z nich są wzajemnym przedłużeniem analitycznym względem η . Wszystkie rozwiązania równań (32) przedstawiono w [5], każde z równań rozwiązuje się oddzielnie, ale w otoczeniu tej samej linii. Niech $\eta \in \Omega_{TII}$. Ponieważ funkcja $K_i(\alpha, \eta)$ ma dwa punkty zerowe, to istnieją 4 istotnie różne położenia linii całkowania Q , przy czym każda może całkowicie leżeć na płacie I, jak pokazano na Rys.6.



Rys.6

W [5] znaleziono ogólną postać rozwiązania równań Wienera-Hopfa w otoczeniu każdej z linii i zbadano zachowanie rozwiązania w nieskończoności.

Okazało się, że w otoczeniu linii Q^D nie istnieje rozwiązanie $L_1^D(\alpha)$, $U_1^D(\alpha)$ w klasie funkcji znikających w nieskończoności, w otoczeniu linii Q^A istnieje jedno rozwiązanie,

w otoczeniu linii Q^B też jedno, natomiast w otoczeniu linii Q^C - jednoparametrowa rodzina rozwiązań $L_i^C(\alpha; \lambda_i)$ dla $i = 1, 2$.

Funkcje $L_i^X(\alpha) = L_i^X(\alpha, \eta)$, $X = A, B, C$, występujące pod całką (31), gdzie odpowiednio kładziemy $Q = Q^A$, $Q = Q^B$ i $Q = Q^C$ wyrażają się wzorami

$$(34) \quad L_1^A(\alpha) = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{K_V^A(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{\sqrt{k + \alpha_0} \sqrt{k - \alpha}} K_L^A(\alpha, \eta)$$

$$L_2^A(\alpha) = -\frac{k}{\eta \pi i} \frac{K_V^A(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{K_L^A(\alpha, \eta)} \quad \text{dla } \alpha_0 \neq -d$$

$$(35) \quad L_1^B(\alpha) = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{K_V^B(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{\sqrt{k + \alpha_0} \sqrt{k - \alpha}} K_L^B(\alpha, \eta)$$

$$L_2^B(\alpha) = -\frac{k}{\eta \pi i} \frac{K_V^B(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{K_L^B(\alpha, \eta)} \quad \text{dla } \alpha_0 \neq d$$

$$(36) \quad L_1^C(\alpha; \lambda_1) = \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{\sqrt{k - \alpha}} \left[\lambda_1 (\alpha - \alpha_0) \sqrt{k + \alpha_0} + \frac{k \sin \phi}{\pi i} K_V^C(\alpha_0, \eta) \right] \frac{1}{K_L^C(\alpha, \eta)}$$

$$L_2^C(\alpha; \lambda_2) = \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[\lambda_2 (\alpha - \alpha_0) - \frac{k}{\eta \pi i} K_V^C(\alpha_0, \eta) \right] \frac{1}{K_L^C(\alpha, \eta)}$$

gdzie $\alpha_0 = -k \cos \phi$.

Stałe λ_1 i λ_2 są niezależne od α ale mogą być zależne od wszystkich parametrów zadania, w tym także od η .

Funkcje $K_V^X(\alpha, \eta)$ i $K_L^X(\alpha, \eta)$ powstają w wyniku faktoryzacji

$$(37) \quad K(\alpha, \eta) = \frac{K_V^X(\alpha, \eta)}{K_L^X(\alpha, \eta)}$$

funkcji

$$(38) \quad K(\alpha, \eta) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

w otoczeniu każdej z linii Q^X dla $X = A, B, C$, jak na Rys. 6.

Między faktoryzowaną przez Seniora funkcją (9), a funkcją (38) zachodzi związek

$$(39) \quad K(\alpha, \eta) = \frac{1}{\eta} K^*(\alpha, \eta)$$

Na liniach Q^A i Q^B funkcja $K(\alpha, \eta)$ spełnia założenia twierdzenia Wienera-Hopfa [5], wobec tego dla $X = A$ i $X = B$ czynniki faktoryzacji wyrażają się za pomocą całek Cauchy'ego wzdłuż tych linii

$$(40) \quad K_0^X(\alpha, \eta) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{Q^X} \frac{\ln K(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right] \quad \text{dla } \alpha \in \Omega^X$$

$$(41) \quad K_L^X(\alpha, \eta) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{Q^X} \frac{\ln K(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right] \quad \text{dla } \alpha \in \mathcal{D}^X$$

gdzie Ω^X oznacza obszar położony powyżej (na lewo od) skierowanej linii Q^X , \mathcal{D}^X oznacza obszar położony poniżej (na lewo od) skierowanej linii Q^X .

Dla sfaktoryzowania funkcji $K(\alpha, \eta)$ w otoczeniu linii Q^C wykorzystuje się:

1^o. Pomocniczą funkcję

$$(42) \quad \bar{K}(\alpha, \eta) = \frac{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2} - k}$$

spełniającą na tej linii, jak również na każdej linii Q zadośćczyniącej warunkowi (27) i położonej na płacie I, założenia twierdzenia Wienera-Hopfa.

2^o Faktoryzację

$$(43) \quad \bar{K}(\alpha, \eta) = \frac{\bar{K}_U(\alpha, \eta)}{\bar{K}_L(\alpha, \eta)}$$

gdzie

$$(44) \quad \bar{K}_U(\alpha, \eta) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln \bar{K}(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right] \quad \text{dla } \alpha \in \Omega$$

$$(45) \quad \bar{K}_L(\alpha, \eta) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln \bar{K}(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right] \quad \text{dla } \alpha \in \mathcal{D}.$$

3^o Tożsamość ze względu na α i η

$$(46) \quad K(\alpha, \eta) \equiv \frac{(\alpha+d)(\alpha-d)}{(\alpha+k)(\alpha-k)} \bar{K}(\alpha, \eta).$$

4^o Twierdzenie o jednoznacznej faktoryzacji [5].

W rezultacie otrzymujemy

$$(47a) \quad K_U^C(\alpha, \eta) = (\alpha+k) \bar{K}_U(\alpha, \eta)$$

$$(47b) \quad K_L^C(\alpha, \eta) = \frac{(\alpha+d)(\alpha-d)}{\alpha-k} \bar{K}_L(\alpha, \eta)$$

gdzie $\bar{K}_U(\alpha, \eta)$ dana jest wzorem (44), a $\bar{K}_L(\alpha, \eta)$ wzorem (45).

6. Przedłużenie analityczne funkcji $\bar{K}_V(\alpha, \eta)$ i $\bar{K}_L(\alpha, \eta)$ względem α

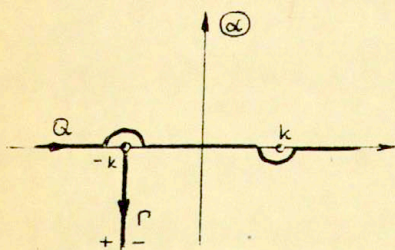
Funkcja (44) jest analityczna i nie ma punktów zerowych w obszarze Ω , a funkcja (45) jest analityczna i nie ma punktów zerowych w obszarze \mathcal{D} na płacie I.

Ponieważ $\ln \bar{K}(\alpha, \eta)$ jest funkcją analityczną na płacie I, gdyż $\bar{K}(\alpha, \eta)$ nie ma tam punktów zerowych, to przez przesunięcie linii całkowania w całce Cauchy'ego dla $\alpha \in \Omega$ i zwiniecie jej do linii Γ przez przejście graniczne, można funkcję (44) przedłużyć na obszar $\alpha \notin \Gamma$, wg zależności

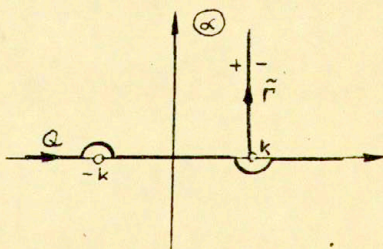
$$(48) \quad \bar{K}_V(\alpha, \eta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2 - t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2 - t^2} - k} \frac{dt}{t - \alpha} \right\} \quad \text{dla } \eta \in \Omega_{TM}$$

gdzie Γ oznacza linię skierowaną od punktu $-k$ do punktu $-k - i\omega$, jak pokazano na Rys. 7a.

W podobny sposób można przedłużyć funkcję (45) na obszar $\alpha \notin \tilde{\Gamma}$ wg zależności:



Rys. 7a



Rys. 7b

$$(49) \quad \bar{K}_L(\alpha, \eta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2 - t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2 - t^2} - k} \frac{dt}{t - \alpha} \right\} \quad \text{dla } \eta \in \Omega_{TM}$$

gdzie $\tilde{\Gamma}$ oznacza linię skierowaną od punktu k do punktu $k + i\infty$, jak pokazano na Rys. 7b.

Dowód znajduje się w [7], Dodatek I.

Wzór (48) wynika bezpośrednio z równości

$$\int_{\alpha} \ln \frac{R(t, \eta)}{t - \alpha} dt = \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\bar{K}_+(t, \eta)}{\bar{K}_-(t, \eta)} \frac{dt}{t - \alpha} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega$$

a wzór (49) - z równości

$$\int_{\alpha} \ln \frac{\bar{K}(t, \eta)}{t - \alpha} dt = \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\bar{K}_+(t, \eta)}{\bar{K}_-(t, \eta)} \frac{dt}{t - \alpha} \quad \text{dla } \alpha \in \mathcal{C}$$

dla funkcji (42), gdzie przyjęto $(\sqrt{k^2 - \alpha^2})_+ = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$
 $(\sqrt{k^2 - \alpha^2})_- = -\sqrt{k^2 - \alpha^2}$, przy czym indeks "+" oznacza graniczną wartość funkcji z jednej, a indeks "-" graniczną wartość funkcji z drugiej strony linii, jak pokazano na Rys. 7.

7. Przedłużenie analityczne funkcji $K^X(\alpha, \eta)$, $K^X(\alpha, \eta)$ dla $X = A, B, C$

Przez przesunięcie linii całkowania w całce Cauchy'ego (40) można przedłużyć funkcję $K_U^A(\alpha, \eta)$ na dowolny obszar $\alpha \in \mathcal{C}^A$ nie zawierający punktu $-d$, a funkcję $K_U^B(\alpha, \eta)$ na dowolny obszar $\alpha \in \mathcal{C}^B$ nie zawierający punktu d . Podobnie można wykorzystać przesunięcie linii całkowania w całce Cauchy'ego we wzorze (41) do przedłużenia funkcji $K_L^X(\alpha, \eta)$ na dowolny obszar $\alpha \in \Omega^X$ nie zawierający zera funkcji $K(\alpha, \eta)$.

Dla przedłużenia funkcji $K_U^X(\alpha, \eta)$ na całą płaszczyznę $\alpha \notin \Gamma$, a funkcji $K_L^X(\alpha, \eta)$ na całą płaszczyznę $\alpha \notin \tilde{\Gamma}$ wykorzystujemy inne przedstawienie tych funkcji wynikające z tożsamości (46) i faktoryzacji funkcji pomocniczej (43-45).

Otrzymujemy:

$$(50a) \quad K_U^A(\alpha, \eta) = \frac{\alpha+k}{\alpha+d} \bar{K}_U(\alpha, \eta)$$

$$(50b) \quad K_L^A(\alpha, \eta) = \frac{\alpha-d}{\alpha-k} \bar{K}_L(\alpha, \eta)$$

$$(51a) \quad K_U^B(\alpha, \eta) = \frac{\alpha+k}{\alpha-d} \bar{K}_U(\alpha, \eta)$$

$$(51b) \quad K_L^B(\alpha, \eta) = \frac{\alpha+d}{\alpha-k} \bar{K}_L(\alpha, \eta)$$

I tak kolejno dla $\eta \in \Omega_{TM}$ przedłużenie funkcji występujących w lewej stronie wzorów (50-51) przedstawiają prawe strony, gdzie funkcja $\bar{K}_U(\alpha, \eta)$ jest wyrażona przez (48), a funkcja $\bar{K}_L(\alpha, \eta)$ przez (49).

Tak samo uzyskamy przedłużenie funkcji $K_U^C(\alpha, \eta)$ na obszar $\alpha \notin \Gamma$ i funkcji $K_L^C(\alpha, \eta)$ na obszar $\alpha \notin \tilde{\Gamma}$ podstawiając we wzorze (47) w miejsce funkcji $\bar{K}_U(\alpha, \eta)$ wyrażenie (48), a w miejsce funkcji $\bar{K}_L(\alpha, \eta)$ wyrażenie (49).

Ostatecznie podstawiając wyrażenia (34) - (36) do wzoru (31) i uwzględniając (20) otrzymamy rozwiązanie:

$$(52) \quad u^X(x, y, \eta) = u_l(x, y) - \frac{k}{2\pi i} \int_{\alpha^X} \frac{K_U^X(\alpha, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{K_L^X(\alpha, \eta)} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{\eta} - \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{2(k+\alpha)}{k}} \cos \frac{\phi}{2} \right] e^{i\alpha x} e^{i|y|\eta} d\alpha$$

gdzie $d \neq -\alpha_0$ dla $X=A$ (wobec (50a)), $d \neq \alpha_0$ dla $X=B$ (wobec (50b)),

oraz dwuparametrową rodzinę rozwiązań

$$(53) \quad u^C(x, y; \lambda_1, \lambda_2) = u_i(x, y) - \frac{k}{2\pi i} \int_{Q^C} [(\alpha - \alpha_0)(\lambda_2 + \frac{\gamma}{|\gamma|} \lambda_1 \sqrt{k + \alpha}) - \\ - \sqrt{\alpha_0 + k} \bar{K}_U(\alpha_0, \eta) (D\sqrt{k + \alpha} + \frac{\gamma}{|\gamma|} \tilde{D}\sqrt{k + \alpha})] \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \frac{(\alpha + d)(\alpha - d)}{\alpha - k} \frac{1}{\bar{K}_L(\alpha, \eta)} \\ \cdot e^{i\alpha x} e^{i\gamma/|\gamma|} d\alpha.$$

$$\text{gdzie } D = \frac{k}{\eta\pi i}, \quad \tilde{D} = -\frac{k \sin \phi}{\pi i}$$

Uwaga 1.

Położenie linii Q^A lub Q^B względem obu punktów d i $-d$ jest istotne dla rozwiązania równań Wienera-Hopfa, inaczej, dla znalezienia funkcji $K_L^X(\alpha, \eta)$ dla $X = A$ lub $X = B$ we wzorze (52). W ostatecznej formule (52) istotne jest już tylko położenie linii Q^X względem jednego z dwóch punktów - tego, który jest punktem zerowym funkcji $K_L^X(\alpha, \eta)$, czyli biegunem funkcji podcałkowej. Linia Q^Y zostawia ten punkt po swojej lewej stronie.

Uwaga 2.

Formuła (53) stanowi ogólną postać rozwiązania, tzn. istnieją takie wartości stałych, niezależnych od α ale zależnych od parametrów zadania, w tym również od η :

$$(65a) \quad \lambda_1^A = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \frac{\bar{K}_U(\alpha_0, \eta)}{\sqrt{k + \alpha_0}}$$

$$(65b) \quad \lambda_2^A = -\frac{k}{\eta\pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \bar{K}_U(\alpha_0, \eta)$$

dla których zachodzi równość

$$(66) \quad u_S^C(x, y, \eta; \lambda_1^A, \lambda_2^A) = u_S^A(x, y, \eta)$$

oraz takie wartości stałych

$$(67a) \quad \lambda_1^B = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 - d} \frac{\bar{K}_U(\alpha_0, \eta)}{\sqrt{k + \alpha_0}}$$

$$(67b) \quad \lambda_2^B = - \frac{k}{\eta \pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 - d} \bar{K}_V(\alpha_0, \eta)$$

dla których zachodzi równość

$$(68) \quad u_S^C(x, y, \eta; \lambda_1^B, \lambda_2^B) = u_S^B(x, y, \eta)$$

Stałe λ_1^A i λ_2^A wyznaczamy z warunku

$$(69) \quad \operatorname{res}_{\alpha=-d} L_i^C(\alpha, \eta) = 0 \quad \text{dla } i=1, 2,$$

a stałe λ_1^B i λ_2^B wyznaczamy z warunku

$$(70) \quad \operatorname{res}_{\alpha=d} L_i^C(\alpha, \eta) = 0$$

Dla dalszej wygody zostawiamy podaną wyżej klasyfikację i będziemy mówili o rozwiązaniu u^A , u^B i rodzinie rozwiązań u^C .

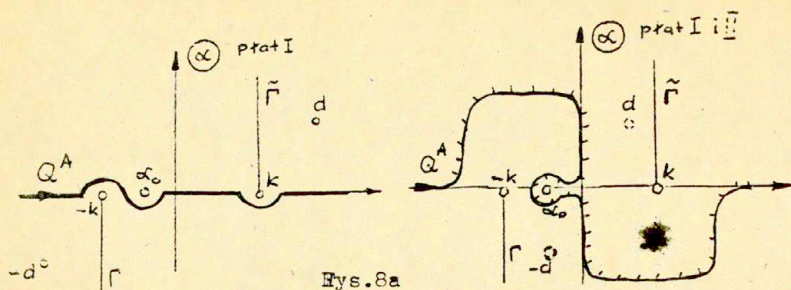
8. Konstrukcja trzech płatów powierzchni Riemanna rozwiązania

$u(x, y, \eta)$ jako funkcji analitycznej η przy ustalonych wartościach x i y .

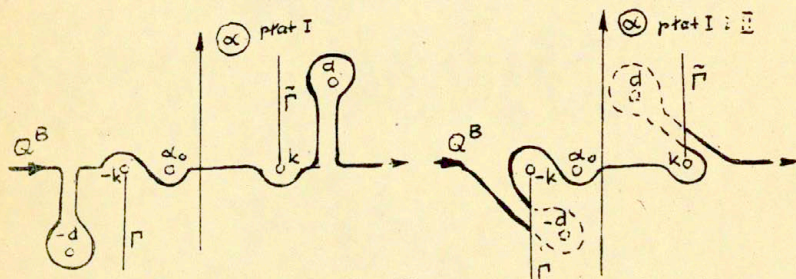
Na płacie I położymy rozwiązanie $u^A(x, y, \eta)$ określone

wzorem (52) dla $X = A$, na płacie II rozwiązanie $u^B(x, y, \eta)$ określone wzorem (52) dla $X = B$, a na płacie III jedno z rodziny rozwiązań (53), jako przedłużenie rozwiązania $u^B(x, y, \eta)$ na linii $0 < \operatorname{Re} \eta < 1$. Konstrukcję zaczynamy od ustalenia położenia linii Q^A , Q^B i Q^C i znalezienia wszystkich rozwiązań dla dowolnej wartości pasywnej η z obszaru $\operatorname{Re} \eta > 0$ i $\eta \in \Omega_{\Gamma M}$. Obszar ten jest pokratkowany linią ciągłą na Rys. 4a. Punkty zerowe funkcji $K(\alpha, \eta)$ leżą w tak samo pokratkowanym obszarze na płaszczyźnie α , Rys. 4b i na płaszczyźnie β , Rys. 4d. Punkty α_d na płaszczyźnie α będziemy oznaczali przez d i $-d$, przyjmując $\operatorname{Im} d > 0$ dla tak wybranej wartości η . Ich obrazy na płaszczyźnie β będziemy oznaczali odpowiednio przez \bar{d} i $-\bar{d}$. Każda z linii Q^A , Q^B , Q^C spełniająca warunek (27) może w całości leżeć na z lewej strony. Następnie przedłużymy względem η każde z rozwiązań.

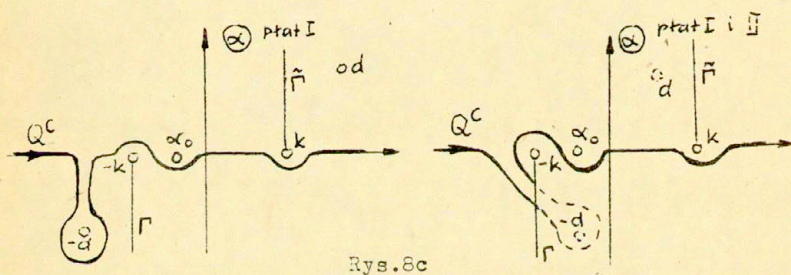
Przedłużenie polega na takim odkształceniu linii Q^X , aby wędrujące po płatach Riemanna wraz ze zmianą η punkty zerowe, jak pokazują Rys. 4abcd, nie przecięły linii. Dla wygody, ustanowimy wspólne dla wszystkich wartości η położenie linii Q^A , wspólne dla wszystkich η położenie linii Q^B i wspólne dla wszystkich η położenie linii Q^C . Przypominamy, że to położenie ma być takie, żeby dla linii Q^A punkt d leżał z lewej a punkt $-d$ z prawej strony linii, dla linii Q^B przeciwnie, a dla linii Q^C oba punkty leżały z lewej strony linii.



Rys. 8a



Rys. 8b



Rys. 8c

Okazuje się jednak, że dwupłatowa powierzchnia α nie jest rozcinana żadną z linii Q spełniającą warunek (27) na dwie rozłączne części. Tę samą cechę zachowuje topologicznie równoważna jej powierzchnia walca β , gdzie obraz linii Q leży końcami na tworzących walca; dla $\text{Re} \alpha \rightarrow -\infty$, $\text{Im} \alpha = 0$ mamy $\text{Re} \beta = \pi$, $\text{Im} \beta \rightarrow -\infty$, a dla $\text{Re} \alpha \rightarrow +\infty$,

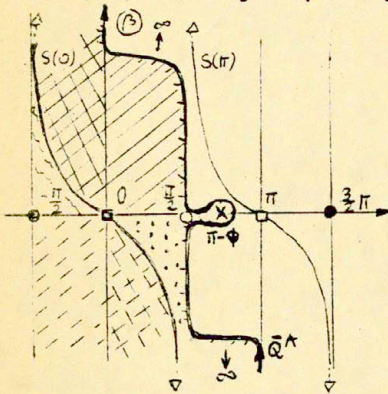
$\text{Im } \alpha = 0$ mamy $\text{Re } \beta = 0$, $\text{Im } \beta \rightarrow +\infty$. Wobec tego, nie można stwierdzić, z której strony skierowanej linii Q leży punkt d , a z której $-d$, o ile cała linia i te punkty nie leżą na tym samym płacie. Inaczej mówiąc linia Q może być zarówno linią Q^A jak i Q^B , jak i Q^C . Z drugiej strony, jeżeli dla $\eta \in \Omega_{TM}$ można przeprowadzić klasyfikację rozwiązań, to paradoksalnie wygląda fakt, że ta klasyfikacja urywa się dla $\eta \in \mathcal{U}_{TM}$.

Jak łatwo zauważyć, jeżeli walec β rozetniemy np. wzdłuż tworzącej $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ($\beta = \frac{3}{2}\pi$) jak na Rys. 4d, to dla każdej linii skierowanej \bar{Q} bez pętli - obrazu linii Q - można określić stronę lewą i prawą. Tak samo można określić stronę lewą i prawą skierowanej linii Q bez pętli położonej na rozciętej wzdłuż osi $\text{Re } \alpha = 0$ na płacie II (odpowiednio do rozcięcia walca) powierzchni Riemanna α . A więc można przeprowadzić klasyfikację rozwiązań dla każdego η , pod warunkiem rozcięcia powierzchni Riemanna. Taka klasyfikacja jest zależna od linii rozcięcia, ale ponieważ w efekcie końcowym wszystkie trzy rozwiązania tworzą trójpłatową powierzchnię Riemanna η , to wybór linii rozcinającej wprowadza jedynie podział na płaty, w tym przypadku tak, jak pokazano na Rys. 3.

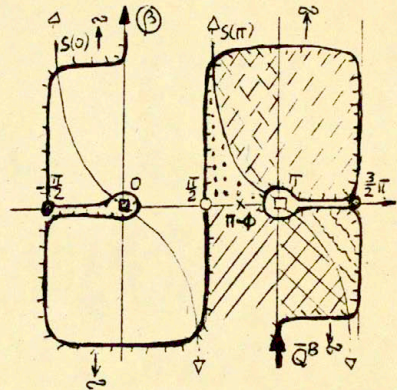
8.1. Przedłużenie rozwiązania $u^A(x, y, \eta)$

Wspólne położenie linii Q^A dla wszystkich wartości η przyjęto tak jak pokazuje linia na Rys. 8a, której zakreślono lewą stronę. Na Rys. 9a przedstawiono obraz tej linii na płaszczyźnie β , oznaczony przez \bar{Q}^A . Również

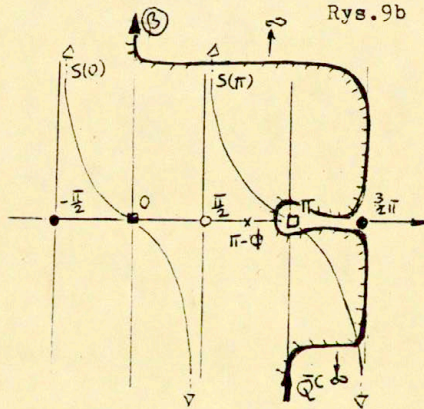
zakreskowano lewą stronę i zaznaczono obszary, w których leży punkt zerowy \bar{d} , gdy η przyjmuje wszystkie wartości z płaszczyzny zmiennej zespolonej odpowiednio do Rys. 4a.



Rys. 9a



Rys. 9b



Rys. 9c

Gdy η przybiera wszystkie wartości z płaszczyzny zmiennej zespolonej, punkty d leżące z lewej strony linii Q^A na rozciętej powierzchni Riemanna wypełniają obszar $\text{Re } \alpha > 0$ na płacie I i II. To położenie linii Q^A określa wybór gałęzi $\sqrt{1-\eta^2}$.

poprzez warunek $\operatorname{Re} d > 0$ dla $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$. Równość $\operatorname{Re} d = 0$ zachodzi na odcinku $-1 < \operatorname{Re} \eta < 1$, który jest linią cięcia dla $\sqrt{1-\eta^2}$. Dla $0 < \operatorname{Re} \eta < 1$ punkty d leżą na osi urojonych na płacie II /na linii umownego rozcięcia powierzchni α /, a punkty \bar{d} na tworzącej $\operatorname{Re} \beta = \frac{3}{2}\pi$ / $\operatorname{Re} \beta = -\frac{\pi}{2}$ /. Dla $-1 < \operatorname{Re} \eta < 0$ punkty d leżą na osi urojonych na płacie I, punkty \bar{d} na $\operatorname{Re} \beta = \frac{\pi}{2}$, Rys. 4.

Korzystając z metod przedłużenia funkcji $K_U^A(\alpha, \eta)$ i $K_L^A(\alpha, \eta)$ (rozdział 6 i 7) napiszemy dla $\alpha \notin \Gamma$

$$(71) \quad K_U^A(\alpha, \eta) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha}\right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{TM} \\ \frac{\alpha+k}{\alpha+d} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha}\right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{TM} \end{cases}$$

gdzie $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$, przy czym gałąź pierwiastka wybiera się tak, że $\operatorname{Re} d > 0$, skąd wynika $|\arg \eta - \pi| < \arg \sqrt{1-\eta^2} < \arg \eta$ dla każdego η z wyjątkiem odcinka $-1 < \operatorname{Re} \eta < 1$.

$$(72) \quad K_L^A(\alpha, \eta) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha}\right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{TM} \\ \frac{\alpha-d}{\alpha-k} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha}\right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{TM} \end{cases}$$

Drugi wiersz wzoru (71) przedstawia znaną postać przedłużenia (50a), (48), a drugi wiersz wzoru (72) znaną postać przedłużenia (50b), (49).

Pierwszy wiersz wzoru (71) przedstawia przedłużenie funkcji (40), gdzie $X = A$, otrzymane przez przesunięcie linii całkowania w całce Cauchy'ego i zwiniecie jej do linii Γ , gdy punkty zerowe funkcji $K(\alpha, \eta)$ leżą na płacie II, dla $\eta \in \mathcal{S}_{TM}$. Pierwszy wiersz wzoru (72) ^{przedstawia} przedłużenie funkcji (41) przez zwiniecie linii całkowania w całce Cauchy'ego do linii $\tilde{\Gamma}$, również dla $\eta \in \mathcal{S}_{TM}$.

Dla tego zakresu parametru funkcja $K_U^*(\alpha, \eta) = \eta K_U^A(\alpha, \eta)$ została przedstawiona przez Seniora w postaci (13), a funkcja $K_L^*(\alpha, \eta) = \eta K_L^A(\alpha, \eta)$ — w postaci (12).

Obie funkcje (71) i (72) są nieciągłe na $-1 < \text{Re} \eta < 0$, zatem tak skonstruowane rozwiązanie $U^A(x, y, \eta)$ jest na tej linii nieciągłe.

Na linii $0 < \text{Re} \eta < 1$ funkcje (71) i (72) są ciągłe jako funkcje parzyste d , mamy bowiem $\frac{k}{\eta} = \sqrt{k^2 - d^2}$.

8.2. Przedłużenie rozwiązania $U^B(x, y, \eta)$

Dla wartości η dążących z obszaru \mathcal{Q}_{TM} do krzywej S_{TM} , przecinających ją i następnie przybierających wartości z obszaru \mathcal{S}_{TM} , Rys. 4a, punkt d dąży do $\tilde{\Gamma}$ i ją przecina, a punkt $-d$ dąży do Γ i ją przecina. Następnie każdy z punktów przechodzi na płat II, umieszczony na Rys. 8abc pod płatem I. Dla rozróżnienia, części linii Q^B i punkty na płacie II są oznaczone linią przerywaną. W przedłużonym względem η rozwiązaniu linia Q^B zostaje również przez te punkty "pociągnięta" na płat II, jak pokazano na Rys. 8b.

Wspólne położenie obrazu linii Q^B dla wszystkich η przedstawiono na płaszczyźnie β , Rys. 9b, ponieważ na płaszczyźnie α rysunek byłby nieczytelny (położenie linii Q^B można łatwo pokazać na modelu przestrzennym powierzchni α). Na Rys. 9b zakreskowano lewą stronę linii \bar{Q}^B i zaznaczono obszary, w których leżą punkty $-\bar{d}$, gdy η przyjmuje wszystkie wartości z płaszczyzny zmiennej zespolonej, odpowiednio do Rys. 4a.

Gdy η przyjmuje wszystkie wartości z płaszczyzny zmiennej zespolonej punkty $-d$ leżące z lewej strony linii Q^B na rozciętej powierzchni α wypełniają obszar $Re\{\alpha < 0$ na płaszczyźnie I i II.

Dla wszystkich η nie należących do przedziału $-1 < Re\eta < 1$ i $\alpha \notin \Gamma$ funkcja $K_U^B(\alpha, \eta)$ wyraża się wzorem

$$(73) \quad K_U^B(\alpha, \eta) = \frac{\alpha+k}{\alpha-d} \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta\sqrt{k^2-t^2}+k}{\eta\sqrt{k^2-t^2}-k} \frac{dt}{t-\alpha} \right]$$

Dla wszystkich η nie należących do przedziału $-1 < Re\eta < 1$ i $\alpha \notin \tilde{\Gamma}$ funkcja $K_L^B(\alpha, \eta)$ wyraża się wzorem

$$(74) \quad K_L^B(\alpha, \eta) = \frac{\alpha+d}{\alpha-k} \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta\sqrt{k^2-t^2}+k}{\eta\sqrt{k^2-t^2}-k} \frac{dt}{t-\alpha} \right].$$

Tak skonstruowane rozwiązanie $U^B(x, y, \eta)$ jest nieciągłe na $-1 < Re\eta < 1$, gdyż w tym przedziale nieciągłe są funkcje (73) i (74).

Na odcinku $-1 < Re\eta < 0$ funkcja $K_U^B(\alpha, \eta)$, (73) jest przedłużeniem analitycznym funkcji $K_U^A(\alpha, \eta)$, (71), a funkcja

$K_L^B(\alpha, \eta)$, (74) jest przedłużeniem analitycznym funkcji $K_L^A(\alpha, \eta)$, (72), zatem rozwiązanie $U^B(x, y, \eta)$ jest przedłużeniem analitycznym rozwiązania $U^A(x, y, \eta)$.

Jednak funkcje $K_U^B(\alpha, \eta)$ i $K_L^B(\alpha, \eta)$ są nieciągłe również na odcinku $0 < \operatorname{Re} \eta < 1$, podczas, gdy funkcje $K_U^A(\alpha, \eta)$ i $K_L^A(\alpha, \eta)$ są ciągłe. Wobec tego na tym odcinku poszukamy przedłużenia rozwiązania $U^B(x, y, \eta)$ wśród rozwiązań z rodziny (53).

8.3. Wybranie $U^C(x, y, \eta)$ z rodziny (53)

Na Rys. 8c naszkicowano przejście linii Q^C na płat II powierzchni Riemanna α , przy przejściu punktów d i $-d$ na płat II. Na Rys. 9c przedstawiono wspólne położenie linii \bar{Q}^C dla wszystkich wartości η , takie, że oba punkty \bar{d} i $-\bar{d}$ leżą z lewej strony linii.

Dla przedłużenia rozwiązania $U^B(x, y, \eta)$ posłużymy się przedłużeniem każdej z funkcji $L_i^B(\alpha, \eta)$ wchodzącej pod całkę we wzorze (31) dla $i = 1, 2$, $Q = Q^B$.

Spośród rodziny funkcji (36) wybieramy takie, dla których jest spełniony warunek

$$(74) \quad \operatorname{res}_{\alpha=-d} L_i^B(\alpha, \eta) = \operatorname{res}_{\alpha=d} L_i^C(\alpha, \eta, \lambda_i) \quad \text{dla } d = -d, \quad i = 1, 2$$

dla $0 < \operatorname{Re} \eta < 1$, czyli gdy \bar{d} przecina linię $\operatorname{Re} \alpha = 0$ na płacie II, a $-\bar{d}$ przecina linię $\operatorname{Re} \beta = \frac{3}{2} \pi$ ($\operatorname{Re} \beta = -\frac{\pi}{2}$).

Otrzymujemy :

$$\lambda_1^d = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \frac{\bar{K}_V(\alpha_0, \eta)}{\sqrt{k+d}} \quad (75)$$

$$\lambda_2^d = - \frac{k}{\eta \pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \bar{K}_V(\alpha_0, \eta).$$

Stąd

$$L_1^C(\alpha, \eta, \lambda_1^d) = \frac{k \sin \phi}{\pi i} \frac{\bar{K}_V(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \frac{1}{\sqrt{k+d} \sqrt{k-d}} \frac{\alpha - k}{\alpha - d} \frac{1}{\bar{K}_L(\alpha, \eta)} \quad (76)$$

$$L_2^C(\alpha, \eta, \lambda_2^d) = - \frac{k}{\eta \pi i} \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \frac{\bar{K}_V(\alpha_0, \eta)}{\alpha - \alpha_0} \frac{\alpha - k}{\alpha - d} \frac{1}{\bar{K}_L(\alpha, \eta)}.$$

Podstawiając (76) do (31), albo (75) do (53) otrzymujemy rozwiązanie $U^C(x, y, \eta)$ (jako przedłużenie analityczne rozwiązania $U^B(x, y, \eta)$) określone wzorem (52) dla $X = C$, gdzie funkcje $K_U^C(\alpha, \eta)$ i $K_L^C(\alpha, \eta)$ są dane zależnościami

$$(77) \quad K_U^C(\alpha, \eta) = \begin{cases} \frac{\alpha+k}{\alpha+d} \exp \left[- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-d} \right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{\Gamma}^+ \\ (\alpha+k) \exp \left[- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-d} \right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{\Gamma}^- \end{cases}$$

dla $\alpha \notin \Gamma$

$$(78) \quad K_L^C(\alpha, \eta) = \begin{cases} \frac{\alpha-d}{\alpha-k} \exp \left[- \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-d} \right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{\tilde{\Gamma}}^+ \\ \frac{(\alpha-d)(\alpha+d)}{\alpha-k} \exp \left[- \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \ln \frac{\eta \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-d} \right] & \text{dla } \eta \in \mathcal{D}_{\tilde{\Gamma}}^- \end{cases}$$

dla $\alpha \notin \tilde{\Gamma}$.

Obie funkcje (77) i (78) są nieciągłe na $0 < \operatorname{Re} \eta < 1$.

/ na linii cięcia dla $\sqrt{1-\eta^2}$ we wzorze $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$ / .

Na odcinku $-1 < \operatorname{Re} \eta < 0$, który leży w obszarze Ω_{TK} funkcje (71) i (72) są ciągłe, gdyż są parzyste względem d , wobec zależności $\frac{k}{\eta} = \sqrt{k^2 - d^2}$.

Drugi wiersz wzoru (77) przedstawia przedłużenie analityczne funkcji $K_U^C(\alpha, \eta)$ danej przez (47a), (44), a drugi wiersz wzoru (78) przedstawia przedłużenie analityczne funkcji $K_L^C(\alpha, \eta)$ danej przez (47b), (45).

Na tym kończy się konstrukcja trzech pól powierzchni Rizmanna $u(x, y, \eta)$, przedstawionych na Rys. 3a.

Rozwiązanie dla przypadku TE otrzymuje się przez wstawienie we wzorach (52), (53) $\frac{1}{\eta}$ w miejsce η . Wobec tego Rys. 3b otrzymuje się z Rys. 3a przy pomocy odwzorowania przez inwersję.

Literatura

1. T.B.A. Senior - Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. Proc. Roy. Soc. A. 213, str. 436/1952/.
2. N.G. Treniew - Dyfrakcja elektromagnetycznych fal powierzchniowych na półpłaszczyźnie impedancyjnej /w jęz.ros./ . Radiotechnika i elektronika 3, 2, 163 /1958/.
3. D.S. Jones - The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi - infinite domains. Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 668 /1953/.
4. H. Kudrewicz, S. Przeździecki - Dyfrakcja fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Analiza rozwiązania w zależności od impedancji półpłaszczyzny. Prace IPPT Nr 187, 1981.
5. H. Kudrewicz, S. Przeździecki - Metoda Wienera-Hopfa. dla równania $U(\alpha) = K(\alpha) L(\alpha) + D(\alpha)$ w przypadku funkcji $K(\alpha)$ z zerami. Struktura rozwiązania dla zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Prace IPPT Nr 194, 1982.
6. J.J. Bowman - High - frequency backscattering from an absorbing infinite strip with arbitrary face impedances. Can. J. Phys., 45, 2409 /1967/.
7. H. Kudrewicz, S. Przeździecki - Analiza rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na asymetrycznej półpłaszczyźnie impedancyjnej, Prace IPPT Nr 18, 1983.