

3.31 — dyfrakcja

18/1983

H. Kudrewicz, S. Przędzicki

ANALIZA ROZWIĄZANIA
ZAGADNIENIA DYFRAKCJI
NA ASYMETRYCZNEJ PÓŁPŁASZCZYŹNIE
IMPEDANCYJNEJ

18/1983

P. 269



WARSZAWA 1983

<http://rcin.org.pl>

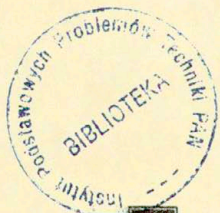
ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 203

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 marca 1983 r.

57019



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 1,8. Ark.druk. 2,5.

Oddano do drukarni w maju 1983 r.

Nr zamówienia 339/83 M-13.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Halina Kudrewicz, Stanisław Przeździecki
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ANALIZA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA DYFRAKCJI NA
ASYMETRYCZNEJ PÓŁPŁASZCZYŹNIE IMPEDANCYJNEJ

1. Wstęp

W 1958 roku G.D. Maliużyniec [1], [2] podał rozwiązanie zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie /a nawet ogólniej na klinie/ o różnych impedancjach po obu stronach. Autor wykorzystał całkę Sommerfelda przedstawiającą rozwiązanie zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie doskonale przewodzącej. Dla nieznannej funkcji występującej pod tą całką ułożył i rozwiązał pewne równanie funkcyjne. Wynik zanalizował metodą punktu siodłowego, wyodrębniając fale powierzchniowe jako składniki rozwiązania pochodzące od biegunów funkcji podcałkowej.

Problem próbowano również rozwiązać klasyczną metodą Wienera-Hopfa /znaną od 1931 roku/, ale trudność stanowiło rozwiązanie macierzewego układu równań Wienera-Hopfa.

Układ ten sprowadzał się łatwo do dwóch równań skalarnych tylko dla dwóch przypadków: tej samej impedancji po obu stronach półpłaszczyzny i impedancji o znakach przeciwnych. Te szczególne przypadki rozwiązano [3], [4].

W 1976 roku R.A. Hurd rozwiązał układ w przypadku ogólnym, jako przykład zastosowania metody opracowanej przez siebie i nazwanej metodą Wienera-Hopfa-Hilberta [5]. Rozwiązanie zostało przeanalizowane szczegółowo w kolejnej pracy z tego cyklu: R.A. Hurd i S. Przeździecki [6]. Pokazano, że wyrażenie asymptotyczne rozwiązania dla pola dalekiego jest identyczne z wyrażeniem asymptotycznym obliczonym przez Bowmana [7] z rozwiązania Maliużynca [2].

Jednak rozwiązanie podane w pracach [5], [6] jak również i rozwiązanie T.B.A. Seniora [3] dla półpłaszczyzny o tej samej impedancji dotyczy tylko tych wartości impedancji, dla których nie ma fali powierzchniowej.

Problem fal powierzchniowych dla takiej samej impedancji oraz dla impedancji o różnych znakach po obu stronach półpłaszczyzny był rozpatrywany przez N.G. Treniewa [4], a dla dowolnych różnych impedancji przez W. Nasalskiego [8], [9].

W niniejszej publikacji przedstawiono analityczne przedłużenie, a ściślej jedną z gałęzi przedłużenia rozwiązania [5], [6] dla wszystkich wartości η_1 i η_2 z płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Wykorzystano wyniki analizy rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie o tej samej impedancji po obu stronach [10], [11].

2. Sformułowanie zagadnienia i krótkie przedstawienie rozwiązania wg [5], [6].

Na półpłaszczyznę $z = 0$, $x \geq 0$ pada fala płaska

$$\Psi_i = \exp[-ik(x \cos \phi_0 + z \sin \phi_0) - i\omega t]$$

pod kątem ϕ_0 , prostopadle do krawędzi y , Rys.1.

Współczynniki załamania półpłaszczyzny są inne dla każdej ze stron

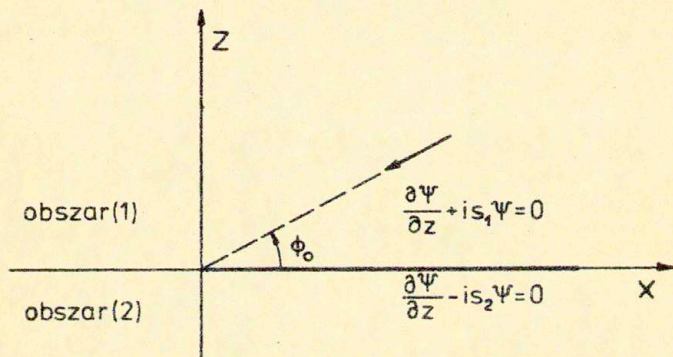
$$s_1 = k \sin \phi_1, \quad s_2 = k \sin \phi_2$$

i zakłada się, że są rzeczywiste: $0 < \phi_j < \frac{\pi}{2}$, $j = 1, 2$.

Należy znaleźć pole \underline{E} , \underline{H} , tak jak fala padająca harmonicznie zależne od czasu, przy założeniu, że na półpłaszczyźnie spełnione są warunki Leontowicza.

Można pokazać, że dla fali padającej prostopadle do krawędzi półpłaszczyzny problem rozwiązania równań Maxwella z warunkiem Leontowicza na półpłaszczyźnie sprowadza się do dwóch problemów TM i TE, z których każdy polega na rozwiązaniu równania Helmholtza dla skalarnej funkcji, z warunkiem mieszanym

na półprostej $x > 0$.



Rys.1. Padająca fala płaska na półpłaszczyznę $z = 0, x \geq 0$ o różnych impedancjach po obu stronach.

Rozpatrzmy problem TM. Skalarną funkcją Ψ jest wtedy składowa pola $\underline{E}: \underline{E} = (0, \Psi, 0)$.

Rozwiązania poszukujemy w postaci sumy pola padającego i ugiętego. Pamiętając, że zależność od czasu jest dana przez związek

$\Psi(x, z, t) = \psi(x, z) e^{-i\omega t}$, czynnik $e^{-i\omega t}$ opuszczamy, ponadto oznaczamy $\psi(x, z) = \Psi$. Mamy więc

$$(1) \quad \Psi = \Psi_i + \Psi_s$$

gdzie

$$(2) \quad \Psi_i = \exp[-ik(x \cos \phi_0 + z \sin \phi_0)]$$

Pole ugięte spełnia równanie Helmholtza

$$(3) \quad \nabla^2 \Psi_s + k^2 \Psi_s = 0$$

z niejednorodnymi warunkami brzegowymi

$$(4) \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial z} + i s_1 \psi_s = i s_1 \left(\frac{\chi_0}{s_1} - 1 \right) e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_+, x>0$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial z} - i s_2 \psi_s = i s_2 \left(\frac{\chi_0}{s_2} + 1 \right) e^{-ikx \cos \phi_0} \quad \text{dla } z=0_-, x>0$$

gdzie

$$(5) \quad \chi_0 = k \sin \phi_0, \quad s_j = k \sin \phi_j, \quad 0 < \phi_j < \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } j=1,2$$

oraz z warunkami ciągłości

$$(6) \quad \psi_s^{(1)} = \psi_s^{(2)} \quad \text{dla } z=0, x<0$$

$$\frac{\partial \psi_s^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \psi_s^{(2)}}{\partial z} \quad \text{dla } z=0, x<0$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$(7) \quad \psi_s^{(1)} = \int_Q A(\alpha) e^{i(\alpha x + \gamma z)} d\alpha \quad \text{dla } z>0$$

$$\psi_s^{(2)} = \int_Q B(\alpha) e^{i(\alpha x - \gamma z)} d\alpha \quad \text{dla } z<0$$

gdzie

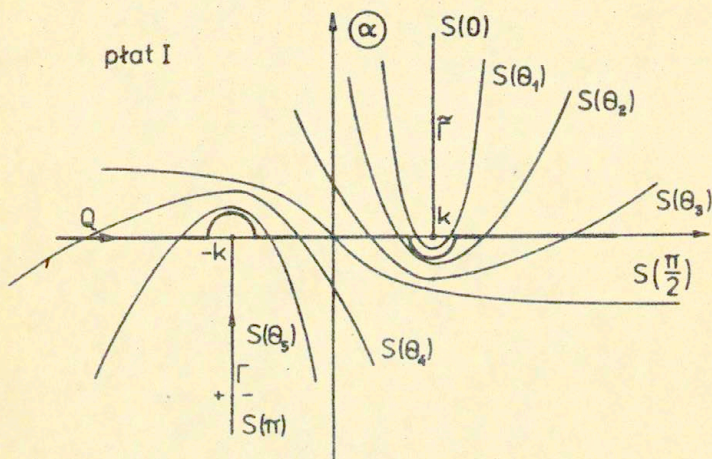
$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

Linia Q leży na dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\pm k$, która jest dziedziną funkcji γ . Dla zbieżności całek, na końcach linii dla $\alpha \rightarrow \pm \infty$ musi zachodzić

$$\operatorname{Im} \alpha = 0, \quad \operatorname{Im} \gamma > 0.$$

Warunek $\operatorname{Im} \gamma > 0$ ustala położenie linii względem punktów rozgałęzienia $\pm k$, mianowicie linia musi przebiegać między nimi. Te wymagania spełnia np. linia przebiegająca wzdłuż osi

rzeczywistej na płacie I określonym warunkiem $\sqrt{k^2 - \alpha^2} = k$ dla $\alpha = 0$, z cięciami wzdłuż półprostych Γ , $\tilde{\Gamma}$, jak na Rys.2.



Rys.2. Płaszczyzna α z cięciem wzdłuż linii $\tilde{\Gamma} = S(0)$ i $\Gamma = S(\pi)$. Linie $S(\theta_n)$ dla $0 < \theta_n < \pi$, gdzie $\theta_n < \theta_{n-1}$ są liniami najszybszego spadku o równaniu $\cos(\beta_n - \theta) = \frac{1}{\text{ch}\beta_n}$, przy oznaczeniach $\beta = \arccos \frac{\alpha}{k}$, $\beta = \beta_r + i\beta_i$, $\theta = \arctg \frac{\alpha}{k}$.

Takie wyodrębnienie płatków jest wygodne dla analizy całek metodą punktu siodłowego, gdyż na płacie I leżą wszystkie krzywe najszybszego spadku $S(\theta)$ dla $0 < \theta < \pi$, Rys.2.

Cięcie Γ poprowadzone jest wzdłuż krzywej $S(\pi)$, cięcie $\tilde{\Gamma}$ - wzdłuż krzywej $S(0)$. Krzywe $S(\theta)$ można naszkicować korzystając z odwzorowań przedstawionych w pracy [10], Rys.6.

Niech linia Q oznacza linię skierowaną, położoną jak na Rys.2. Dyskusja innego położenia linii zostanie przeprowadzona w Rozdziale 3.

Przez \mathcal{Q} oznaczymy obszar położony powyżej /na lewo od/ linii Q , przez \mathcal{S} - obszar położony poniżej /na prawo od/ linii Q .

Wróćmy do całek (7). Należy wyznaczyć nieznane funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$.

Wykorzystanie warunków brzegowych (4) i (6) pozwala zastąpić dwie nieznane funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ czterema funkcjami $L_j(\alpha)$, $U_j(\alpha)$, $j = 1, 2$ również nieznanymi, ale o pewnych własnościach regularności, które umożliwiają ich późniejsze znalezienie.

Mianowicie: funkcje $L_j(\alpha)$ są analityczne w obszarze \mathcal{D} , a funkcje $U_j(\alpha)$ są analityczne w obszarze \mathcal{Q} .

Z (6) i (7) otrzymujemy

$$A(\alpha) - B(\alpha) = L_1(\alpha)$$

(8)

$$\gamma[A(\alpha) + B(\alpha)] = L_2(\alpha)$$

Natomiast z (4) i (7) otrzymujemy

$$(\gamma + s_1)A(\alpha) = U_1(\alpha) + (\alpha - \alpha_0)^{-1} p_1$$

(9)

$$(\gamma + s_2)B(\alpha) = U_2(\alpha) + (\alpha - \alpha_0)^{-1} p_2$$

gdzie

$$p_1 = -(2\pi i)^{-1} (s_1 - \gamma_0),$$

(10)

$$p_2 = -(2\pi i)^{-1} (s_2 - \gamma_0)$$

oraz

$$\alpha_0 = -k \cos \phi_0, \quad \gamma_0 = k \sin \phi_0.$$

Przez wyrugowanie $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ z równań (8), (9) otrzymujemy wektorowe równanie Wienera-Hopfa

$$(11) \quad G(\alpha)L(\alpha) = U(\alpha) + (\alpha - \alpha_0)^{-1} P(\alpha)$$

spełnione we wstędze $\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}$, gdzie

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad U(\alpha) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

(12)

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_1 + \gamma & \frac{s_1 + \gamma}{\gamma} \\ -s_2 - \gamma & \frac{s_2 + \gamma}{\gamma} \end{pmatrix}$$

2.1. Rozwiązanie macierzowego równania Wienera-Hopfa w otoczeniu linii Q .

Twierdzenie 1.

Jeżeli w otoczeniu linii Q istnieje faktoryzacja

$$(13) \quad G(\alpha) = G_U(\alpha) G_L(\alpha)$$

taka, że macierz $G_U(\alpha)$ jest analityczna i nieosobliwa w \mathcal{Q} wraz z pewnym otoczeniem linii Q , a macierz $G_L(\alpha)$ jest analityczna i nieosobliwa w \mathcal{S} wraz z pewnym otoczeniem linii Q , to każde rozwiązanie równania (11) w otoczeniu linii Q wyraża się wzorem

$$(14) \quad L(\alpha) = \frac{G_L^{-1}(\alpha) G_U^{-1}(\alpha_0) P}{\alpha - \alpha_0} + G_L^{-1}(\alpha) C(\alpha)$$

$$U(\alpha) = \frac{G_U(\alpha) G_U^{-1}(\alpha_0) - I}{\alpha - \alpha_0} P + G_U(\alpha) C(\alpha)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, $C(\alpha)$ - wektorową funkcją całkowitą.

Dowód. Skorzystajmy z rozkładu (13) i przepismy równanie (11) w postaci

$$G_U(\alpha) G_L(\alpha) L(\alpha) = U(\alpha) + (\alpha - \alpha_0)^{-1} P$$

Porządkując tak, aby lewa strona była analityczna w \mathfrak{E} a prawa analityczna w \mathfrak{Q} otrzymamy

$$G_L(\alpha)L(\alpha) - \frac{G_U^{-1}(\alpha_0)P}{\alpha - \alpha_0} = G_U^{-1}(\alpha)U(\alpha) + \frac{G_U^{-1}(\alpha) - G_U^{-1}(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} P$$

Powyższa równość zachodzi w pewnym otoczeniu linii Γ , a zatem z twierdzenia o przedłużeniu analitycznym istnieje funkcja całkowita $C(\alpha)$, taka, że

$$G_L(\alpha)L(\alpha) - \frac{G_U^{-1}(\alpha_0)P}{\alpha - \alpha_0} = G_U^{-1}(\alpha)U(\alpha) + \frac{G_U^{-1}(\alpha) - G_U^{-1}(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} P = C(\alpha)$$

Skąd wynika (14).

2.2. Faktoryzacja macierzy $G(\alpha)$. Problem Hilberta

Zgodnie z wynikami prac [5], [6], dla sfaktoryzowania macierzy $G(\alpha)$ zajmiemy się jednorodnym równaniem Wienera-Hopfa

$$(15) \quad Gl = u$$

gdzie $G = G(\alpha)$ jest macierzą określoną wzorem (12), natomiast

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

są nieznanymi wektorowymi funkcjami, analitycznymi odpowiednio w \mathfrak{Q} i \mathfrak{E} .

Ponieważ macierz G jest określona i analityczna na całej dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\alpha = \pm k$ więc jest analityczna w całej płaszczyźnie α z cięciem Γ i $\tilde{\Gamma}$, jak na Rys.2.

Tym samym równanie (15) może być spełnione w całej płaszczyźnie α z cięciem, jeżeli przedłużymy wektor u na obszar $\mathfrak{Q} + \mathfrak{E} - \Gamma$ a wektor l na obszar $\mathfrak{Q} + \mathfrak{E} - \tilde{\Gamma}$. Korzystając z równania (15) pokazuje się, że przedłużenie analityczne wektora u spełnia na linii Γ równanie będące problemem Hilberta dla funkcji u , zaś przedłużenie analityczne wektora l spełnia na linii $\tilde{\Gamma}$

równanie będące problemem Hilberta dla funkcji l .

Macierze $G_U(\alpha)$ i $G_L(\alpha)$ buduje się bądź z wektorów u - rozwiązań problemu Hilberta na linii Γ , bądź z wektorów l - rozwiązań problemu Hilberta na linii $\tilde{\Gamma}$. Oba podejścia są równoważne, ale dla rozpatrywanego równania z macierzą (12) problem pierwszy okazał się łatwiejszy do rozwiązania. Przytoczymy krótko wyniki.

Niech Γ będzie linią skierowaną od $-k-i\infty$ do punktu $-k$. Znakami "+" będziemy oznaczać graniczne wartości funkcji z lewej strony, znakami "-" graniczne wartości z prawej strony linii.

Przyjmijmy oznaczenie $\gamma_+ = \gamma$, wtedy $\gamma_- = -\gamma$.

Z równania (15) mamy

$$(16) \quad \begin{aligned} G_+ l_+ &= u_+ \\ G_- l_- &= u_- \end{aligned}$$

Ponieważ $l_+ = l_-$ więc przez wyrugowanie z (16) wektora l otrzymamy wektorowe równanie Hilberta dla funkcji u

$$(17) \quad H u_- = u_+$$

gdzie

$$(18) \quad H = G_+ G_-^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{s_1 + \gamma}{s_2 - \gamma} \\ -\frac{s_2 + \gamma}{s_1 - \gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy dwa skalarne równania: jedno dla iloczynu funkcji u_1, u_2

$$(19) \quad \frac{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)}{(s_1 - \gamma)(s_2 - \gamma)} (u_1 u_2)_- = (u_1 u_2)_+$$

drugie dla ich ilorazu

$$(20) \quad \left(\frac{u_1}{u_{2+}} \right) \left(\frac{u_1}{u_{2-}} \right) = \frac{(s_1 + \gamma)(s_1 - \gamma)}{(s_2 + \gamma)(s_2 - \gamma)}$$

W równaniach tych funkcja γ jest funkcją parametru t na linii Γ .

Przez zlogarytmowanie równania (19) otrzymujemy

$$(21) \quad \ln(u_1 u_{2+}) - \ln(u_1 u_{2-}) = \ln \frac{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)}{(s_1 - \gamma)(s_2 - \gamma)}$$

Całka Cauchy'ego

$$(22) \quad Q(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{[s_1 + \gamma(t)][s_2 + \gamma(t)]}{[s_1 - \gamma(t)][s_2 - \gamma(t)]} \frac{dt}{t - \alpha}$$

która jest funkcją analityczną dla każdego α nie leżącego na linii Γ , spełnia równanie (21), a tym samym funkcja

$$(23) \quad K_{IU}(\alpha) = \exp\{Q(\alpha)\}$$

spełnia równanie (19). Bez dodatkowych założeń dotyczących klasy poszukiwanej funkcji analitycznej rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Rozwiązaniem równania (19) jest każda z funkcji

$$(24) \quad u_1 u_2 = (k + \alpha)^n K_{IU}(\alpha)$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Logarytmując równanie (20) otrzymujemy

$$(25) \quad \ln \left(\frac{u_1}{u_{2+}} \right) + \ln \left(\frac{u_1}{u_{2-}} \right) = i n \frac{(s_1 + \gamma)(s_1 - \gamma)}{(s_2 + \gamma)(s_2 - \gamma)}$$

Równanie (25) nie jest typowym dla zagadnienia znalezienia funkcji analitycznej, gdy dany jest jej "skok" na linii. Jeżeli jednak utworzymy funkcję będącą iloczynem $\ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)$ i dowolnej,

nieparzystej potęgi $\sqrt{k+\alpha}$, np.:

$$(26) \quad V(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)$$

to dla "skoku" tej funkcji otrzymamy z (25) równanie

$$(27) \quad V_+(\alpha) - V_-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \frac{(s_1 + \gamma)(s_1 - \gamma)}{(s_2 + \gamma)(s_2 - \gamma)}$$

Całka Cauchy'ego

$$(28) \quad V(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{[s_1 + \gamma(t)][s_1 - \gamma(t)]}{[s_2 + \gamma(t)][s_2 - \gamma(t)]} \frac{dt}{t-\alpha}$$

spełnia równanie (27). Zatem funkcja

$$(29) \quad R(\alpha) = \sqrt{k+\alpha} V(\alpha)$$

spełnia równanie (25).

Rozwiązanie równania (20) zapiszemy w postaci

$$(30) \quad \frac{u_1}{u_2} = g^2$$

gdzie:

$$(31) \quad g^2 = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{[s_1 + \gamma(t)][s_1 - \gamma(t)]}{[s_2 + \gamma(t)][s_2 - \gamma(t)]} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Całka (22) nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne. Znaną są jej różne postacie, gdyż występuje również w problemie cyfrakcji na półpłaszczyźnie o tej samej impedancji po obu stronach (dla $s_1 = s_2$), (T.B.A. Senior [3], również [6], [12]).

Całka (28), a więc i całka (31) wyraża się przez funkcje elementarne. Mamy:

$$(32) \quad g^2 = g^2(\alpha, c_1, c_2) = \frac{(\sqrt{k+c_1} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-c_1} + \sqrt{k+\alpha})}{(\sqrt{k+c_2} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-c_2} + \sqrt{k+\alpha})}$$

gdzie

$$(33) \quad c_j = k \cos \phi_j, \quad j=1,2$$

Z (24) i (30) otrzymuje się ciąg funkcji

$$u_1^{(n)} = (\sqrt{k+\alpha})^n \sqrt{K_{IU}} g$$

$$u_2^{(n)} = \pm (\sqrt{k+\alpha})^n \sqrt{K_{IU}} g^{-1}$$

gdzie po wybraniu gałęzi występujących pierwiastków zostaje ustalony znak plus albo minus w drugim z równań, tak, aby spełniony był układ równań (17).

Przyjmuje się dodatnią wartość \sqrt{k} , oraz

$$\sqrt{k+\alpha} = \sqrt{k} \quad \text{dla } \alpha=0$$

$$(34) \quad \sqrt{k+c_j} = \sqrt{k} \quad \text{i} \quad \sqrt{k-c_j} = \sqrt{k} \quad \text{dla } c_j=0$$

$$\sqrt{K_{IU}} = + \exp \left\{ \frac{1}{2} Q(\alpha) \right\}$$

Wtedy wektor $u^{(n)}$ - rozwiązanie równania (17) ma postać

$$(35) \quad u^{(n)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{k+\alpha})^n \sqrt{K_{IU}} g \\ (-1)^n (\sqrt{k+\alpha})^n \sqrt{K_{IU}} g^{-1} \end{pmatrix}$$

Wektor $u^{(n)}$ jest analityczny w całej płaszczyźnie α z cięciem wzdłuż krzywej Γ .

Mając wektor $u^{(n)}$ można z równania Wienera-Hopfa (15) obliczyć wektor $l^{(n)}$

$$(36) \quad l^{(n)} = G^{-1} u^{(n)}$$

Dowodzi się, że dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ wektor $l^{(n)}$ jest analityczny w obszarze $\mathfrak{S} + \Omega - \tilde{\Gamma}$ przez pokazanie, że nie doznaje skoku na krzywej Γ :

$$(37) \quad l_{+}^{(n)} = l_{-}^{(n)}$$

oraz nie ma biegunów.

Macierze faktoryzujące macierz $G(u)$ tworzy się przy pomocy wektorów $u^{(n)}$ i $l^{(n)}$ dla dwóch najniższych wskaźników, aby zapewnić odpowiednio szybkie znikanie w nieskończoności szukanych funkcji

$$(38) \quad G_U(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} & u_1^{(1)} \\ u_2^{(0)} & u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{K_{\text{RU}}} \begin{pmatrix} g & \sqrt{k+\alpha} g \\ g^{-1} & -\sqrt{k+\alpha} g^{-1} \end{pmatrix}$$

gdzie współczynnik $\frac{1}{2}$ jest wzięty dla wygody dalszych rachunków.

$$(39) \quad G_L^{-1}(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} G^{-1}(\alpha) G_U(\alpha)$$

gdzie

$$(40) \quad G(\alpha) = G_U(\alpha) G_L(\alpha)$$

Jako macierz funkcji analitycznych w całej płaszczyźnie $\Omega + \mathfrak{S} - \Gamma$, $G_U(\alpha)$ dana wzorem (38) jest przedłużeniem analitycznym poszukiwanej, analitycznej w Ω macierzy $G_U(\alpha)$.

Wobec równości (37) i wzoru (36) macierz $G^{-1}G_U$ jest analityczna w $\mathfrak{S} + \mathfrak{Q} - \tilde{\Gamma}$. Również $G_L(\alpha)$ jest analityczna w $\mathfrak{S} + \mathfrak{Q} - \tilde{\Gamma}$ jest więc ona przedłużeniem analitycznym szukanej macierzy $G_L(\alpha)$.

Wzory określające macierze $G_L^{-1}(\alpha)$ i $G_U(\alpha)$ oraz $G_U^{-1}(\alpha)$ mają postać

$$(41) \quad G_L^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{K_{IU}}}{2g(s_1+\gamma)(s_2+\gamma)} \begin{pmatrix} (s_2+\gamma)g^2 - s_1 - \gamma & \sqrt{k+\alpha}[(s_2+\gamma)g^2 + s_1 + \gamma] \\ \gamma[(s_2+\gamma)g^2 + s_1 + \gamma] & \sqrt{k+\alpha}[(s_2+\gamma)g^2 - s_1 - \gamma] \end{pmatrix}$$

$$(42) \quad G_L(\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{k+\alpha}g\sqrt{K_{IU}}} \begin{pmatrix} \sqrt{k+\alpha}[(s_2+\gamma)g^2 - (s_1+\gamma)] & \frac{\sqrt{k+\alpha}}{\gamma}[(s_2+\gamma)g^2 + s_1 + \gamma] \\ -(s_2+\beta)g^2 - s_1 - \gamma & \frac{1}{\gamma}[(s_2+\gamma)g^2 - s_1 - \gamma] \end{pmatrix}$$

$$(43) \quad G_U^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}\sqrt{K_{IU}}} \begin{pmatrix} \sqrt{k+\alpha}g^{-1} & \sqrt{k+\alpha}g \\ g^{-1} & -g \end{pmatrix}$$

Wstawiając wyrażenia (38-43) do ogólnej postaci rozwiązania niejednorodnego równania Wienera-Hopfa (14) i badając zachowanie występujących funkcji w nieskończoności otrzymamy warunek $C(\alpha) = 0$ przy żądaniu, aby funkcje $U_j(\alpha)$ były rzędu $O(\alpha^{-\frac{1}{2}})$.

Ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$(44a) \quad L(\alpha) = \frac{G_L^{-1}(\alpha)G_U^{-1}(\alpha_0)P}{\alpha - \alpha_0}$$

$$(44b) \quad U(\alpha) = \frac{G_U(\alpha)G_U^{-1}(\alpha_0) - I}{\alpha - \alpha_0} P$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Można wykazać, że funkcje $L_j(\alpha)$, $U_j(\alpha)$ zachowują się w nie-

skończoności w następujący sposób:

$$(45) \quad U_j(\alpha) = O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \text{ dla } \alpha \rightarrow \infty, \quad j=1,2$$

$$L_1(\alpha) = O(\alpha^{-1}), \quad L_2(\alpha) = O(\alpha^{-\frac{3}{2}}) \text{ dla } \alpha \rightarrow \infty$$

Wstawiając (44b) do (9) otrzymamy wyrażenia dla funkcji podcałkowych $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ w rozwiązaniu (7) problemu dyfrakcji

$$(46) \quad A(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \frac{\sqrt{K_{IU}} g}{\sqrt{K_{IU}^a}} \frac{g_0^{-1}(S_1 - \gamma_0) \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right) + g_0(S_2 + \gamma_0) \left(1 - \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right)}{(\alpha - \alpha_0)(S_1 + \gamma)}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \frac{\sqrt{K_{IU}} g^{-1}}{\sqrt{K_{IU}^a}} \frac{g_0^{-1}(S_1 - \gamma_0) \left(1 - \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right) + g_0(S_2 + \gamma_0) \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+\alpha_0}}\right)}{(\alpha - \alpha_0)(S_2 + \gamma)}$$

gdzie

$$\alpha_0 = -k \cos \phi_0, \quad \gamma_0 = k \sin \phi_0, \quad g_0 = g(\alpha_0), \quad K_{IU}^0 = K_{IU}(\alpha_0)$$

3. Dyskusja rozwiązania względem parametrów impedancyjnych półpłaszczyzny

Zespolone bezwymiarowe parametry η_j charakteryzujące impedancję każdej ze stron półpłaszczyzny są związane z kątami ϕ_j zależnościami

$$(47) \quad \eta_j = \frac{1}{\sin \phi_j}, \quad j=1,2$$

wobec czego mamy

$$(48) \quad S_j = \frac{k}{\eta_j} \quad \text{dla } j=1,2$$

W założeniu zadania przyjęto ograniczenie dla rozpatrywanych kątów: $0 < \phi_j < \frac{\pi}{2}$ z czego wynika ograniczenie dla parametrów η_j : $1 < \eta_j < +\infty$.

Rozwiązanie problemu dyfrakcji (7), (46) przedłuża się bez trudu (poprostu wzory pozostają słuszne) dla tych wartości parametrów η_1, η_2 , dla których punkty zerowe macierzy $G(\alpha)$ nie leżą na rozpatrywanym płacie, czyli - ponieważ płat ten został specjalnie wybrany - dla tych wartości impedancji dla których nie ma fal powierzchniowych. Określimy te zbiory.

Przez falę powierzchniową będziemy rozumieli tutaj ten składnik rozwiązania (7), (46), który pochodzi od bieguna funkcji podcałkowej (różnego od α_0), przy zamianie linii całkowania Q na krzywe najszybszego spadku $S(\theta)$.

Oznaczając przez

$$(49) \quad d_j = \frac{ik}{\eta_j} \sqrt{1 - \eta_j^2}$$

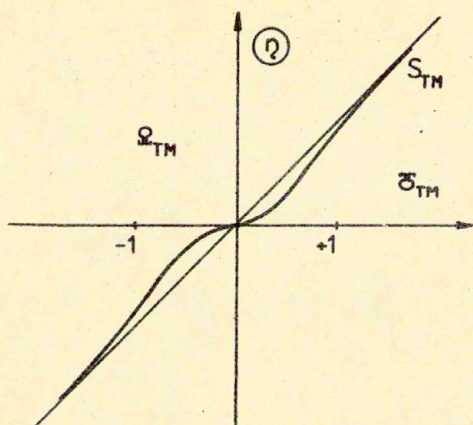
punkty zerowe elementów macierzy $G(\alpha)$, możemy zapisać

$$(50) \quad S_j + \gamma = \frac{(\alpha + d_j)(\alpha - d_j)}{S_j - \gamma}$$

W pracy [10] podano odwzorowanie płaszczyzny η na dwupłatową powierzchnię Riemanna α funkcją $\alpha = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$ oraz płaszczyzny η na płaszczyznę β , gdzie $\alpha = k \cos \beta$, funkcją $\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\eta}\right)$, Rys.6, str.34. Z tych rysunków można odczytać położenie zer $\alpha = \pm d_j$, na powierzchni Riemanna α i położenie tych zer $\beta = \beta_{d_j}$ i $\beta = \pi - \beta_{d_j}$ na płaszczyźnie katowej β dla każdej wartości η_j , dla $j = 1, 2$.

Z tych odwzorowań wynika, że jeżeli na płaszczyźnie α wybieramy płaty tak, że linię cięcia prowadzimy symetrycznie z punktów $\pm k$ do nieskończoności, to na płaszczyźnie η obrazem tych linii jest krzywa przechodząca przez początek układu i symetryczna względem niego. Krzywa ta dzieli płaszczyznę η na dwie równe części. Dla η_j leżących po jednej stronie krzywej, zera $\alpha = \pm d_j$ leżą na jednym płacie, a dla η_j z przeciwnej strony krzywej, zera leżą na drugim płacie.

Dla płatów wybranych tak, jak na Rys.2 obrazem linii cięcia Γ i $\tilde{\Gamma}$ jest krzywa S_{TM} na płaszczyźnie η (o równaniu $\operatorname{Re} \frac{i}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2} = -1$), przedstawiona na Rys.3.



Rys.3. Płaszczyzna ζ i linia S_{TM} oddzielająca obszary istnienia (Ω_{TM}) i nieistnienia (σ_{TM}) fal powierzchniowych.

Oznaczmy przez Ω_{TM} obszar leżący powyżej krzywej S_{TM} , a przez σ_{TM} obszar leżący poniżej S_{TM} .

Dla $\zeta_j \in \Omega_{TM}$ zera $\alpha = \pm d_j$ leżą na płacie I, a dla

$\zeta_j \in \sigma_{TM}$ zera $\alpha = \pm d_j$ leżą na płacie II powierzchni α .

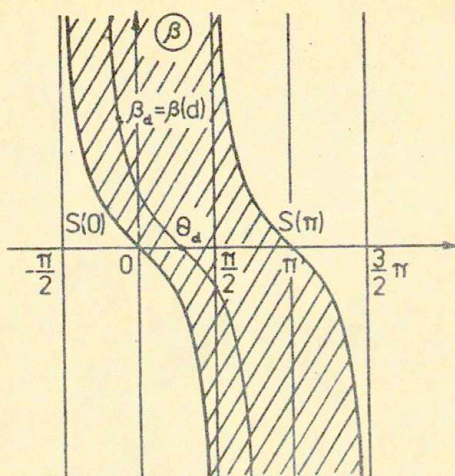
Dla $\zeta_j \in S_{TM}$ punkty $\pm d_j$ leżą na cięciu $\tilde{\Gamma}$ i Γ .

Obrazem krzywej S_{TM} z płaszczyzny ζ /czyli linii Γ i $\tilde{\Gamma}$ z płaszczyzny α / na płaszczyźnie β są dwie graniczne krzywe najszybszego spadku $S(0)$ i $S(\pi)$, Rys.4.

Obszar zawarty między tymi krzywymi jest obrazem obszaru Ω_{TM} i jednocześnie płyta I powierzchni Riemanna α .

Dla wzajemnej jednoznaczności odwzorowania $\alpha \rightleftharpoons \beta$ brzeg $\text{Re } \beta = -\frac{\pi}{2}$ trzeba skleić z brzegiem $\text{Re } \beta = \frac{3}{2}\pi$, tak, żeby powstał walec. Zakreskowana część walca jest obrazem płyta I, niezakreskowana jest obrazem płyta II.

Należy nadmienić, że dla wzajemnej jednoznaczności wszystkich trzech odwzorowań $\alpha \rightleftharpoons \zeta$, $\beta \rightleftharpoons \zeta$, $\alpha \rightleftharpoons \beta$ wartości α muszą



Rys.4. Płaszczyzna $\beta = \arccos \frac{\alpha}{k} = \arcsin (-\frac{1}{2})$.

być brane z dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\pm k$, wartości η z dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia ± 1 , a wartości β z omówionego wyżej walca.

W konkluzji, z przeprowadzonej analizy położenia punktów zerowych elementów macierzy $G(\alpha)$ wynika, że rozwiązanie (7), (46) zostało znalezione dla

$$\eta_1 \in \mathfrak{S}_{TM}, \quad \eta_2 \in \mathfrak{S}_{TM}$$

jak na Rys.3. Wtedy zera $\pm d_1$ i $\pm d_2$ leżą na płacie II płaszczyzny α , na niezakreskowanym obszarze płaszczyzny /walca/ β .

3.1. Analiza rozwiązania. Całki Cauchy'ego rozwiązujące problemy Hilberta (19), (20) jako przedłużenie analityczne całek Cauchy'ego faktoryzujących pewne funkcje.

Wróćmy do rozwiązania skalarnych problemów Hilberta (19), (20). Wprowadźmy dwie funkcje:

$$(51) \quad K_I(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \frac{(S_1 + \gamma)(S_2 + \gamma)}{\gamma^2}$$

i

$$(52) \quad K_{II}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \left(\frac{S_1 + \gamma}{S_2 + \gamma} \right)^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}}$$

gdzie $S_1 = \frac{k}{\eta_1}$, $S_2 = \frac{k}{\eta_2}$, $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$

Funkcje te można przedstawić w postaci

$$(53) \quad K_I(\alpha, \eta_1, \eta_2) = K(\alpha, \eta_1) K(\alpha, \eta_2)$$

i

$$(54) \quad K_{II}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \left[\frac{K(\alpha, \eta_1)}{K(\alpha, \eta_2)} \right]^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}} \stackrel{\text{ozn}}{=} \frac{\tilde{K}(\alpha, \eta_1)}{\tilde{K}(\alpha, \eta_2)}$$

gdzie

$$(55) \quad K(\alpha, \eta_j) = \frac{k + \eta_j \gamma}{\eta_j \gamma} = \frac{S_j + \gamma}{\gamma}$$

jest funkcją występującą w równaniu Wienera-Hopfa dla zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie o tej samej impedancji po obu stronach, czyli w równaniu Wienera-Hopfa, które powstaje dla rozwiązania (7) równania Helmholtza (3) z warunkami (4) dla $S_1 = S_2 = S$.

Funkcja $\tilde{K}(\alpha, \eta_j)$ jest funkcją złożoną

$$(56) \quad \tilde{K}(\alpha, \eta_j) = [K(\alpha, \eta_j)]^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}}$$

Przez $K_{\Pi}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ oznaczamy dowolną ze względu na wybór logarytmu gałąź funkcji

$$K_{\Pi}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = e^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \frac{s_1+\alpha}{s_2+\alpha}}$$

natomiast gałąź pierwiastka na płaszczyźnie z cięciem Γ określamy przez (34).

Funkcje $K(\alpha, \eta_j)$ i $\tilde{K}(\alpha, \eta_j)$ spełniają założenia twierdzenia Wienera-Hopfa o faktoryzacji w otoczeniu linii Q /obliczenie $\text{ind}_Q K(\alpha, \eta_j)$ znajduje się w Dodatku pracy [11], warunek $\text{ind}_Q \tilde{K}(\alpha, \eta_j) = 0$ jest wnioskiem z istnienia całki (60a)

- obliczenia w Dodatku tej pracy/.

Wobec tego w otoczeniu linii Q istnieje i jest jedyna faktoryzacja

$$(57) \quad K(\alpha, \eta_j) = K_U(\alpha, \eta_j) K_L(\alpha, \eta_j)$$

gdzie

$$(58a) \quad K_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln \frac{s_j + \gamma(t)}{\gamma(t)} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

$$(58b) \quad K_L(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-Q} \ln \frac{s_j + \gamma(t)}{\gamma(t)} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

oraz

$$(59) \quad \tilde{K}(\alpha, \eta_j) = \tilde{K}_U(\alpha, \eta_j) \tilde{K}_L(\alpha, \eta_j)$$

gdzie

$$(60a) \quad \tilde{K}_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{s_j + \gamma(t)}{\gamma(t)} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

$$(60b) \quad \tilde{K}_L(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-q}^1 \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{s_j + \gamma(t)}{\gamma(t)} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

A zatem w otoczeniu linii Q istnieje i jest jedyna faktoryzacja

$$(61) \quad K_I(\alpha, \eta_1, \eta_2) = K_{IU}(\alpha, \eta_1, \eta_2) K_{IL}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$$

gdzie

$$(62a) \quad K_{IU}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = K_U(\alpha, \eta_1) K_U(\alpha, \eta_2)$$

$$(62b) \quad K_{IL}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = K_L(\alpha, \eta_1) K_L(\alpha, \eta_2)$$

oraz

$$(63) \quad K_{II}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = K_{IUI}(\alpha, \eta_1, \eta_2) K_{IIL}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$$

gdzie

$$(64) \quad K_{IUI}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \frac{\tilde{K}_U(\alpha, \eta_1)}{\tilde{K}_U(\alpha, \eta_2)}, \quad K_{IIL}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \frac{\tilde{K}_L(\alpha, \eta_1)}{K_L(\alpha, \eta_2)}$$

Interesują nas funkcje $K_U(\alpha, \eta_j)$ i $\tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)$.

Zgodnie z twierdzeniem Wienera-Hopfa każda z funkcji

$K_U(\alpha, \eta_j)$, $\tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)$ jest analityczna i nie ma punktu

zerowego w obszarze Ω .

Ponadto można udowodnić następujące twierdzenia o ich przedłużeniu na obszar $\Omega + \bar{\Omega} - \Gamma$.

Twierdzenie 2.

Funkcja

$$(65) \quad K_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\gamma(t) + s_j}{\gamma(t) - s_j} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

jest przedłużeniem analitycznym funkcji (58a).

Zgodnie z symboliką przyjętą w teorii funkcji zmiennej zespolonej zarówno funkcję jak i jej przedłużenie analityczne oznaczamy tym samym symbolem.

Twierdzenie 3.

Funkcja

$$(66) \quad \tilde{K}_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{[s_j + \gamma(t)][s_j - \gamma(t)]}{\gamma^2(t)} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

jest przedłużeniem analitycznym funkcji (60a).

Dowód Twierdzenia 2 znajduje się w Dodatku. Analogicznie przebiega dowód Twierdzenia 3.

Utwórzmy funkcję złożoną

$$(67) \quad \overset{*}{K}_U(\alpha, \eta_j) = [\tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)]^{\sqrt{k+\alpha}} = \exp[\sqrt{k+\alpha} \ln \tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)]$$

gdzie gałąź $\sqrt{k+\alpha}$ na płaszczyźnie α z cięciem Γ wybieramy, tak jak dotychczas: $\sqrt{k+\alpha} = +\sqrt{k}$ dla $\alpha=0$.

Z definicji (67) i analityczności funkcji $\tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)$ wynika, że dowolna gałąź funkcji $\overset{*}{K}_U(\alpha, \eta_j)$ jest funkcją analityczną /i nie mającą zer/ dla $\alpha \notin \Gamma$.

Iloraz funkcji (67) dla $j = 1$ i 2 jest również funkcją analityczną i bez zer w całej płaszczyźnie $\alpha \notin \Gamma$.

$$(68) \quad \overset{*}{K}_{\text{IIU}}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \frac{\overset{*}{K}_U(\alpha, \eta_1)}{\overset{*}{K}_U(\alpha, \eta_2)}$$

Funkcja $\overset{*}{K}_{\text{IIU}}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ poprzez (67) i (66) wyraża się wzorem

$$(69) \quad \overset{*}{K}_{\text{IIU}}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{[s_1 + \gamma(t)][s_1 - \gamma(t)]}{[s_2 + \gamma(t)][s_2 - \gamma(t)]} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Funkcja $\tilde{K}_{IU}^*(\alpha, \eta_1, \eta_2)$, identyczna z funkcją $g^2(\alpha, c_1, c_2)$ daną wzorem (31), jest rozwiązaniem równania (21).

$$(70) \quad \tilde{K}_{IU}^*(\alpha, \eta_1, \eta_2) = g^2(\alpha, c_1, c_2).$$

Określona przez (62a), (65) funkcja

$$K_{IU}(\alpha, \eta_1, \eta_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{[\gamma(t) + s_1][\gamma(t) + s_2]}{[\gamma(t) - s_1][\gamma(t) - s_2]} \frac{dt}{t - \alpha} \right\},$$

identyczna z funkcją (23), jest rozwiązaniem równania (19).

3.2. Przedłużenie rozwiązania dla $\eta_1 \in \Omega_{TM}$

Dla $\eta_1 \in \mathbb{T}_{TM}$ rozwiązanie (7), (46) jest wyznaczone przez dwie skalarne funkcje K_{IU} i $\tilde{K}_{IU}^* = g^2$. Pierwsza jest jednym z czynników faktoryzacji funkcji $K_I(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ w otoczeniu linii Q przedłużonym na obszar $\Omega + \mathcal{S} - \Gamma$, druga jest funkcją złożoną $\tilde{K}_{IU}^* = (\tilde{K}_{IU})^{\sqrt{k+\alpha}}$, przy czym operacja $(\)^{\sqrt{k+\alpha}}$ jest dokonana na funkcji będącej czynnikiem faktoryzacji funkcji $K_{II}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$, również w otoczeniu linii Q i przedłużonej na obszar $\Omega + \mathcal{S} - \Gamma$. Wobec tego naturalną jest metoda przedłużenia rozwiązania dla $\eta_1 \in \Omega_{TM}$ polegająca na znalezieniu obu funkcji $K_{IU}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ i $\tilde{K}_{IU}^*(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ dla $\eta_1 \in \Omega_{TM}$ i przedłużeniu ich na obszar $\Omega + \mathcal{S} - \Gamma$. Te przedłużone funkcje będą spełniały na krzywej Γ odpowiednie równania - problemy Hilberta. Macierz $G(\alpha)$ można zapisać w równoważnej postaci

$$(71) \quad G(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_1 + \gamma & \frac{s_1 + \gamma}{\gamma} \\ -s_2 - \gamma & \frac{s_2 + \gamma}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + d_1)(\alpha - d_1)}{s_1 - \gamma} & \frac{(\alpha + d_1)(\alpha - d_1)}{\gamma(s_1 - \gamma)} \\ -\frac{(\alpha + d_2)(\alpha - d_2)}{s_2 - \gamma} & \frac{(\alpha + d_2)(\alpha - d_2)}{\gamma(s_2 - \gamma)} \end{pmatrix}$$

gdzie $d_j = \frac{ik}{\eta_j} \sqrt{1 - \eta_j^2}$, $s_j = \frac{k}{\eta_j}$, $j=1, 2$.

Znaleziono rozwiązanie problemu dyfrakcji dla przypadku 1.

1. /Macierz $G(\alpha)$ jest nieosobliwa na płacie I/

$$\Leftrightarrow / \eta_1 \in \mathfrak{D}_{TM} \text{ i } \eta_2 \in \mathfrak{D}_{TM} /$$

Należy znaleźć rozwiązanie dla pozostałych przypadków:

2. /Macierz $G(\alpha)$ jest osobliwa w punktach $\alpha = \pm d_1$ na płacie I/

$$\Leftrightarrow / \eta_1 \in \mathfrak{Q}_{TM}, \eta_2 \in \mathfrak{D}_{TM} /$$

3. /Macierz $G(\alpha)$ jest osobliwa w punktach $\alpha = \pm d_2$ na płacie I/

$$\Leftrightarrow / \eta_1 \in \mathfrak{D}_{TM}, \eta_2 \in \mathfrak{Q}_{TM} /$$

4. /Macierz $G(\alpha)$ jest osobliwa w punktach $\alpha = \pm d_1$ i $\alpha = \pm d_2$ na płacie I/

$$\Leftrightarrow / \eta_1 \in \mathfrak{Q}_{TM} \text{ i } \eta_2 \in \mathfrak{Q}_{TM} /$$

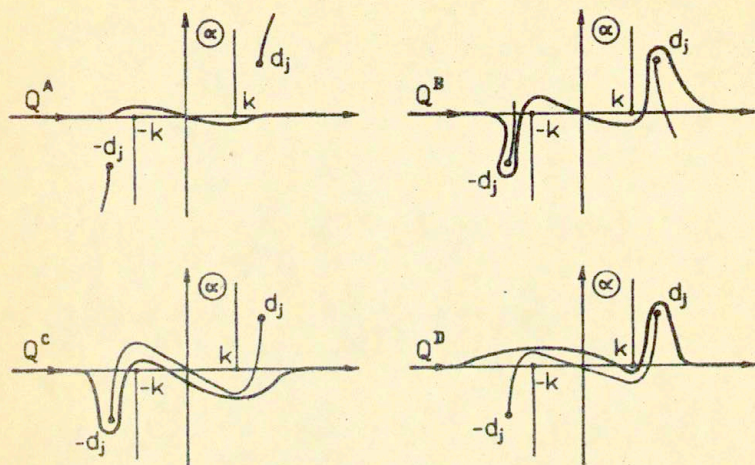
Wróćmy do problemu faktoryzacji funkcji $K_I(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ i $K_{II}(\alpha, \eta_1, \eta_2)$ określonych wzorami (53) i (54), a zatem do problemu faktoryzacji funkcji

$$K(\alpha, \eta_j) = \frac{k + \eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

i

$$\tilde{K}(\alpha, \eta_j) = \left(\frac{k + \eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{k + \alpha}}}$$

Jak pokazano w [11], dla funkcji $K(\alpha, \eta_j)$ z dwoma zerami $\alpha = \pm d_j$ istnieją cztery sposoby faktoryzacji: w otoczeniu linii Q^A, Q^B, Q^C, Q^D , położonych względem punktów $\pm d_j$ jak na Rys.5.



Rys.5. Położenie linii Q^A , Q^B , Q^C , Q^D na płaszczyźnie α i sposób prowadzenia cięcia dla wyboru gałęzi funkcji $\bar{K}(\alpha, \eta_j)$ faktoryzowanej w otoczeniu każdej z linii.

$$K(\alpha, \eta_j) = K_V^A K_L^A ; K(\alpha, \eta_j) = K_V^B K_L^B ; K(\alpha, \eta_j) = K_V^C K_L^C ; K(\alpha, \eta_j) = K_V^D K_L^D$$

Do znalezienia czynników faktoryzacji funkcji $K(\alpha, \eta_j)$ w otoczeniu każdej z linii Q^X , $X = A, B, C, D$ wykorzystujemy funkcję

$$\bar{K}(\alpha, \eta_j) = \frac{K(\alpha, \eta_j)(\alpha - k)(\alpha + k)}{(\alpha - d_j)(\alpha - d_j)} = \frac{-\eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{k - \eta_j \sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

Funkcja $\bar{K}(\alpha, \eta_j)$ nie ma punktów zerowych na płacie I i spełnia wszystkie założenia twierdzenia Wienera-Hopfa o faktoryzacji w otoczeniu każdej z linii, zatem czynniki faktoryzacji

$K_V(\alpha, \eta_j)$, $K_L(\alpha, \eta_j)$ można wyrazić za pomocą całek Cauchy'ego z $\ln \bar{K}(\alpha, \eta_j)$.

Dla funkcji K_V otrzymujemy wzory

$$(71a) \quad K_U^A(\alpha, \eta_j) = \frac{\alpha + d_j}{\alpha + k} \bar{K}_U(\alpha, \eta_j)$$

$$(71b) \quad K_U^B(\alpha, \eta_j) = \frac{\alpha - d_j}{\alpha + k} \bar{K}_U(\alpha, \eta_j)$$

$$(71c) \quad K_U^C(\alpha, \eta_j) = \frac{1}{\alpha + k} \bar{K}_U(\alpha, \eta_j)$$

$$(71d) \quad K_U^D(\alpha, \eta_j) = \frac{(\alpha + d_j)(\alpha - d_j)}{\alpha - k} \bar{K}_U(\alpha, \eta_j)$$

gdzie

$$(72) \quad \bar{K}_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_q \ln \frac{-\eta_j \gamma}{k - \eta_j \gamma} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2, funkcja

$$(73) \quad \bar{K}_U(\alpha, \eta_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_r \ln \frac{\gamma(t) + s_j}{\gamma(t) - s_j} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

jest przedłużeniem analitycznym funkcji (72).

Dla funkcji $\bar{K}(\alpha, \eta_j)$ punkty $\alpha = \pm d_j$ są punktami rozgałęzienia. Można jednak zawsze wybrać taką jej gałąź aby linia w otoczeniu której dokonuje się faktoryzacji nie przecinała linii cięcia poprowadzonej z punktów $\pm d_j$. Do faktoryzacji w otoczeniu linii Q^A i Q^B wybieramy gałąź określoną przez cięcie łączące punkty $\pm d_j$ przez punkt w nieskończoności, do faktoryzacji w otoczeniu linii Q^C i Q^D gałąź określoną przez cięcie nie przechodzące przez punkt w nieskończoności, jak pokazano na Rys.5.

Korzystając z funkcji $\bar{K}(\alpha, \eta_j)$ zapiszemy

$$(74) \quad \tilde{K}(\alpha, \eta_j) = \left[\frac{(\alpha + d_j)(\alpha - d_j)}{(\alpha + k)(\alpha - k)} \bar{K}(\alpha) \right]^{\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}}}$$

Dla każdej z gałęzi $\tilde{K}(\alpha, \eta_j)$ spełniony jest warunek $\tilde{K}(\alpha, \eta_j) \rightarrow 1$ dla $\alpha \rightarrow \infty$. Obliczenie indeksu tej funkcji na każdej z linii wobec trudnych rachunków pominiemy. Wypiszemy natomiast wzory dla składnika faktoryzacji $\tilde{K}_U(\alpha, \eta_j)$ w postaci iloczynu, w którym pierwszy czynnik jest funkcją analityczną w obszarze Ω^X (dla $X = A$, lub $X = B$, lub $X = C$, lub $X = D$), a drugi z własności całki Cauchy'ego, jest również funkcją analityczną w tym obszarze, o ile całka istnieje. Następnie obliczymy te całki. Należy zauważyć, że ze zbieżności całki Cauchy'ego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln f(t) \frac{dt}{t-\alpha}$$

gdzie $f(\alpha) \rightarrow 1$ dla $\alpha \rightarrow \pm\infty$ na linii Q , wynika warunek $\text{ind}_Q f(\alpha) = 0$. Tak więc oba założenia $f(\alpha) \rightarrow 1$ dla $\alpha \rightarrow \pm\infty$ i $\text{ind}_Q f(\alpha) = 0$ stanowią warunek konieczny i wystarczający istnienia całki Cauchy'ego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln f(t) \frac{dt}{t-\alpha}$$

Mamy:

$$(75a) \quad \tilde{K}_U^A = \left(\frac{\alpha + d_j}{\alpha + k} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha+k}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Q^A} \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \left[\frac{t-d_j}{t-k} \bar{K}(t, \eta_j) \right] \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

$$(75b) \quad \tilde{K}_U^B = \left(\frac{\alpha - d_j}{\alpha + k} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha+k}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Q^B} \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \left[\frac{t+d_j}{t-k} \bar{K}(t, \eta_j) \right] \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

$$(75c) \quad \tilde{K}_U^C = (\alpha + k)^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha+k}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{Q^C} \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \left[\frac{(t+d_j)(t-d_j)}{t-k} \bar{K}(t, \eta_j) \right] \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

$$(75d) \quad \tilde{K}_U^D = \left(\frac{(\alpha + d_j)(\alpha - d_j)}{\alpha + k} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha + k}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{q^D} \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \left(\frac{R(t, \eta_j)}{t-k} \right) \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Przyjmujemy oznaczenie

$$[\tilde{K}_U^X(\alpha, \eta_j)]^{\sqrt{k+\alpha}} = \tilde{g}^X(\alpha, d_j) \quad \text{dla } X=A, B, C, D.$$

Z (75abod) wynikają następujące wzory dla funkcji $\tilde{g}^X(\alpha, d_j)$ obliczonej przy faktoryzacji w otoczeniu każdej z linii q^X ($X = A, B, C, D$), dla $\eta_j \in \Omega_{TM}$

$$(76a) \quad \tilde{g}^A(\alpha, d_j) = \frac{\alpha + d_j}{\alpha + k} \hat{\tilde{g}}^A(\alpha, d_j)$$

$$(76b) \quad \tilde{g}^B(\alpha, d_j) = \frac{\alpha - d_j}{\alpha + k} \hat{\tilde{g}}^B(\alpha, d_j)$$

$$(76c) \quad \tilde{g}^C(\alpha, d_j) = \frac{1}{\alpha + k} \hat{\tilde{g}}^C(\alpha, d_j)$$

$$(76d) \quad \tilde{g}^D(\alpha, d_j) = \frac{(\alpha + d_j)(\alpha - d_j)}{\alpha + k} \hat{\tilde{g}}^D(\alpha, d_j)$$

Z obliczeń umieszczonych w Dodatku mamy dla $\eta_j \in \Omega_{TM}$

$$(77) \quad g^2(\alpha, d_j) = \frac{(\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})}{\sqrt{k+\alpha}(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})}$$

$$(78) \quad \hat{\tilde{g}}^A(\alpha, d_j) = \frac{\sqrt{\alpha+k}(\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha})}{(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})}$$

$$\text{gdzie } g^2(\alpha, d_j) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} \int_{q^A} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \left[\frac{S_1 + \sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k^2 - t^2}} \right] \frac{dt}{t-\alpha} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} \int_{q^A} \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln K(t, \eta_j) \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

$$\overset{A}{g}^2(\alpha, d_j) = \delta^2 g(\alpha, d_j) [g^2(\alpha, d_j)]^{-1}$$

$$\delta^2 g(\alpha, d_j) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} \int_{q^A} \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \frac{t-d_j}{t-k} \frac{dt}{t-\alpha} \right\}$$

Funkcję $\overset{B}{g}^2(\alpha, d_j)$ otrzymamy zmieniając znak przy d_j we wzorze (78).

Dla wszystkich $\eta_j \notin S_{TM}$ i $\alpha \notin \Gamma$ na płacie I powierzchni Riemanna funkcje $\overset{A}{g}^2(\alpha, \eta_j)$ i $K_U^A(\alpha, \eta_j)$ określone są w następujący sposób

$$(79) \quad \overset{A}{g}^2(\alpha, \eta_j) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})}{\sqrt{k+\alpha}(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})} & \text{dla } \eta_j \in S_{TM} \\ \frac{\alpha+d_j}{\sqrt{k+\alpha}} \frac{\sqrt{k+d_j} + \sqrt{k+\alpha}}{(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d_j} + \sqrt{k+\alpha})} & \text{dla } \eta_j \in \Omega_{TM} \end{cases}$$

$$(80) \quad K_U^A(\alpha, \eta_j) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta_j \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta_j \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha} \right\} & \text{dla } \eta_j \in S_{TM} \\ \frac{\alpha+d_j}{\alpha+k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\eta_j \sqrt{k^2-t^2} + k}{\eta_j \sqrt{k^2-t^2} - k} \frac{dt}{t-\alpha} \right\} & \text{dla } \eta_j \in \Omega_{TM} \end{cases}$$

gdzie

$$d_j = \frac{ik}{\eta_j} \sqrt{1-\eta_j^2}$$

przy czym gałąź pierwiastka wybierana jest tak, że $\text{Im } d_j > 0$ dla $\text{Re } \eta_j > 0$, $\text{Im } \eta_j > 0$.

Dla $\eta_j \in S_{TM}$ funkcje $K_U(\alpha, \eta_j)$ i $g^2(\alpha, \eta_j)$ są określone przez przejście graniczne we wzorach (79), (80), gdyż dla tych

wartości parametru, zera funkcji logarytmowanych w obliczanych całkach Cauchy'ego leżą na linii całkowania.

Aby wykazać ciągłość funkcji $\hat{g}^2(\alpha, \eta_j)$ danej wzorem (79) na linii S_{TM} przypomnijmy, że przy odwzorowaniu funkcją

$$d_j = \frac{ik}{\eta_j} \sqrt{1 - \eta_j^2} \quad \text{płaszczyzny } \eta_j \quad \text{w płaszczyznę zer } \alpha = d_j,$$

linia S_{TM} odwzorowuje się w linię Γ i $\bar{\Gamma}$ na Rys.2. Przy przejściu η_j przez linię S_{TM} z obszaru \mathcal{D}_{TM} do obszaru Ω_{TM} zera $\alpha = \pm d_j$ wychodzą z płata II na płat I przez cięcie Γ i $\bar{\Gamma}$.

Aby zapewnić ciągłość funkcji $\hat{g}^2(\alpha, \eta_j)$ na linii $\bar{\Gamma}$ należy przy przejściu d_j przez cięcie $\bar{\Gamma}$ zmienić znak $\sqrt{k-d_j}$ we wzorze. Wtedy formuła dla $\eta_j \in \mathcal{D}_{TM}$ przechodzi w formułę dla $\eta_j \in \Omega_{TM}$. Dla każdego ustalonego α punkty $\eta_j = 0$ i $\eta_j = -1$ nie są punktami regularnymi funkcji $g^2(\alpha, \eta_j)$.

W ten sam sposób pokazuje się analityczność funkcji $K_U^A(\alpha, \eta_j)$ dla $\eta_j \in S_{TM}$, $\eta_j \neq 0$, $\eta_j \neq -1$. Wymaga to jednak większego trudu ze względu na to, że występujące we wzorach (80) całki Cauchy'ego nie wyrażają się przez funkcje elementarne. Poprzestaniemy na skonstruowaniu rozwiązania powstałego przez całkowanie wzdłuż linii $Q = Q^A$.

3.3. Rozwiązanie dla przypadku 2: $\eta_1 \in \Omega_{TM}$, $\eta_2 \in \mathcal{D}_{TM}$

Rozwiązanie otrzymujemy ze wzorów (46), gdzie podstawiamy

$$(81) \quad s_1 + \gamma = \frac{(\alpha + d_1)(\alpha - d_1)}{s_1 - \gamma}$$

$$(82) \quad \sqrt{K_{IU}} = \sqrt{\frac{\alpha + d_1}{\alpha + k}} \sqrt{K_U(\alpha, \eta_1) K_U(\alpha, \eta_2)}$$

$$(83) \quad g = \frac{\hat{g}^A(\alpha, d_1)}{g(\alpha, d_2)} = \sqrt{\frac{\alpha + d_1}{\alpha + k}} \frac{\hat{g}^A(\alpha, d_1)}{g(\alpha, d_2)}$$

Funkcja $K_U(\alpha, \eta_j)$ określona jest wzorem (58a), $\hat{g}^A(\alpha, d_1)$ wzorem (78) dla $j = 1$, $\hat{g}^2(\alpha, d_2)$ wzorem (77) dla $j = 2$.

Po podstawieniu widać, że funkcja podcałkowa $A(\alpha)$ oprócz bieguna I rzędu w punkcie $\alpha = \alpha_0$ ma biegun I rzędu w punkcie $\alpha = d_1$. Residuum obliczone w tym biegunie wyznacza amplitudę fali powierzchniowej prowadzonej przez górną stronę półpłaszczyzny. Granicę cienia $\theta = \theta_d$ tej fali wyznacza położenie obrazu $-\beta_d$ punktu d na płaszczyźnie β , Rys.4. Funkcja podcałkowa $B(\alpha)$ nie ma bieguna innego niż α_0 . Dolna strona półpłaszczyzny nie prowadzi więc fali powierzchniowej.

Wzory (46) nie obowiązują dla $\alpha_0 = -d_1$. Przypadek pobudzenia półpłaszczyzny falą powierzchniową należy rozpatrzyć oddzielnie.

3.4. Rozwiązanie dla przypadku 3: $\eta_1 \in \mathfrak{E}_{TM}, \eta_2 \in \mathfrak{Q}_{TM}$

Rozwiązanie otrzymujemy ze wzorów (46), gdzie podstawiamy

$$(84) \quad S_2 + \gamma = \frac{(\alpha + d_2)(\alpha - d_2)}{S_2 - \gamma}$$

$$(85) \quad \sqrt{K_{IU}} = \sqrt{\frac{\alpha + d_2}{\alpha + k}} \sqrt{K_U(\alpha, \eta_1) K_U(\alpha, \eta_2)}$$

$$(86) \quad g = \frac{g(\alpha, d_1)}{\tilde{g}(\alpha, d_2)} = \sqrt{\frac{k + \alpha}{d_2 + \alpha}} \frac{g(\alpha, d_1)}{\tilde{g}(\alpha, d_2)}$$

gdzie $k(\alpha, \eta_1)$ jest dana wzorem (58a), $\tilde{g}(\alpha, d_1)$ wzorem (77), $\tilde{g}(\alpha, d_2)$ wzorem (78).

W tym przypadku funkcja $A(\alpha)$ nie ma dodatkowego bieguna, funkcja $B(\alpha)$ ma oprócz $\alpha = \alpha_0$ biegun I rzędu $\alpha = d_2$. Fala powierzchniowa o amplitudzie równej residuum $B(\alpha)$ policzonym dla $\alpha = d_2$ jest prowadzona przez dolną stronę półpłaszczyzny. Rozwiązanie jest dane dla $\alpha_0 \neq -d_2$.

3.5. Rozwiązanie dla przypadku 4: $\eta_1 \in \Omega_{TM}, \eta_2 \in \Omega_{TM}$

Rozwiązanie otrzymujemy ze wzorów (46) podstawiając

$$(87) \quad s_1 + \gamma = \frac{(\alpha - d_1)(\alpha - d_1)}{s_1 - \gamma}$$

$$s_2 + \gamma = \frac{(\alpha - d_2)(\alpha - d_2)}{s_2 - \gamma}$$

$$(88) \quad \sqrt{K_{IU}} = \sqrt{\frac{\alpha + d_1}{\alpha + k}} \sqrt{\frac{\alpha + d_2}{\alpha + k}} \sqrt{K_U(\alpha, \eta_1) K_U(\alpha, \eta_2)}$$

$$(89) \quad g = \sqrt{\frac{\alpha + d_1}{\alpha + d_2}} \frac{\overset{A}{g}(\alpha, d_1)}{\overset{A}{g}(\alpha, d_2)}$$

gdzie $K_U(\alpha, \eta_j)$ dane jest wzorem (58 a) dla $j = 1, 2$, $\overset{A}{g}(\alpha, d_j)$ wzorem (78) dla $j = 1, 2$.

W tym przypadku funkcja $A(\alpha)$ ma oprócz $\alpha = \alpha_0$ biegun I rzędu $\alpha = d_1$, a funkcja $B(\alpha)$ - biegun I rzędu $\alpha = d_2$. Górna strona półprzeczyny prowadzi falę powierzchniową określoną przez biegun $\alpha = d_1$, dolna falę powierzchniową określoną przez biegun d_2 . Wzory są słuszne dla $\alpha_0 \neq -d_1$ i $\alpha_0 \neq -d_2$.

Dodatek

I. Przedłużenie analityczne całki Cauchy'ego

Dana jest funkcja zespolona zmiennej zespolonej

$$(D1) \quad K(\alpha, \eta) = \frac{\sqrt{k^2 - \alpha^2} + \frac{k}{\eta}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

gdzie liczba k jest parametrem rzeczywistym dodatnim, $k > 0$,
 η - parametrem zespolonym, $\eta \in \mathfrak{S}_{TM}$.

Rozpatrujemy ją na wybranym płacie I powierzchni Riemanna α z cięciem Γ i $\tilde{\Gamma}$, Rys. D1, dla tych wartości η , dla których funkcja $K(\alpha, \eta)$ nie ma zer na płacie I, to jest dla $\eta \in \mathfrak{S}_{TM}$.

Niech Q oznacza linię skierowaną ABCD, dla $\operatorname{Re} \alpha \in (-\infty, +\infty)$, a Γ linię skierowaną od $-k - i\infty$ do punktu $-k$.

Twierdzenie

Funkcja

$$(D2) \quad K_U(\alpha, \eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{\sqrt{k^2 - t^2} + \frac{k}{\eta}}{\sqrt{k^2 - t^2} - \frac{k}{\eta}} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

jest przedłużeniem analitycznym funkcji

$$(D3) \quad K_U(\alpha, \eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \ln \frac{\sqrt{k^2 - t^2} + \frac{k}{\eta}}{\sqrt{k^2 - t^2}} \frac{dt}{t - \alpha} \right\}$$

Dowód

1. Dla każdego ustalonego $k > 0$ i $\eta \in \mathfrak{S}_{TM}$ funkcja $K(\alpha, \eta)$ spełnia następujące warunki:

- jest funkcją analityczną i różną od zera na płaszczyźnie α z cięciem Γ i $\tilde{\Gamma}$.
- $K(\alpha, \eta) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \pm\infty} 1$ na linii Q .
- $K(\alpha, \eta) = 1 + \frac{k}{\eta} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \approx 1 - \frac{ik}{\eta\alpha}$ dla $\alpha \rightarrow \pm\infty$.

d. $\text{Ind}_Q K(\alpha, \eta) = 0$, gdzie $\text{Ind}_Q K(\alpha, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_Q d[\arg K(\alpha, \eta)]$.

2. $\ln K(\alpha, \eta) = \ln |K(\alpha, \eta)| + i \arg K(\alpha, \eta)$ jest funkcją analityczną na płaszczyźnie α z cięciem. Wobec własności b, c, d funkcji $K(\alpha)$ mamy na linii Q

$$\ln K(\alpha, \eta) \rightarrow 0 + i0 \text{ dla } \alpha \rightarrow -\infty, \quad \ln K(\alpha, \eta) \rightarrow 0 + i0 \text{ dla } \alpha \rightarrow +\infty.$$

3. Wobec tego całka Cauchy'ego

$$F(\alpha, \eta) = \int_Q \ln K(t, \eta) \frac{dt}{t - \alpha}$$

jest jednostajnie względem α i bezwzględnie zbieżna i jest dla każdego ustalonego k i η funkcją analityczną dla $\alpha \in \Omega$, gdzie Ω oznacza obszar położony na lewo od linii Q .

4. Zamykamy linię Q jak na Rys. D1 i korzystamy z twierdzenia Cauchy'ego

$$\oint_C \ln K(t, \eta) \frac{dt}{t - \alpha} = 0$$

gdzie C oznacza linię ABCDEFGHIA.

Dla $|t| \rightarrow \infty$ całka po łukach DE i HI dąży do zera i mamy

$$\int_{ABCD} = \int_{HGFE}$$

5. W otoczeniu punktu $t = -k$ mamy

$$K(t, \eta) = 1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}\eta\sqrt{t+k}} \approx \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}\eta\sqrt{t+k}}$$

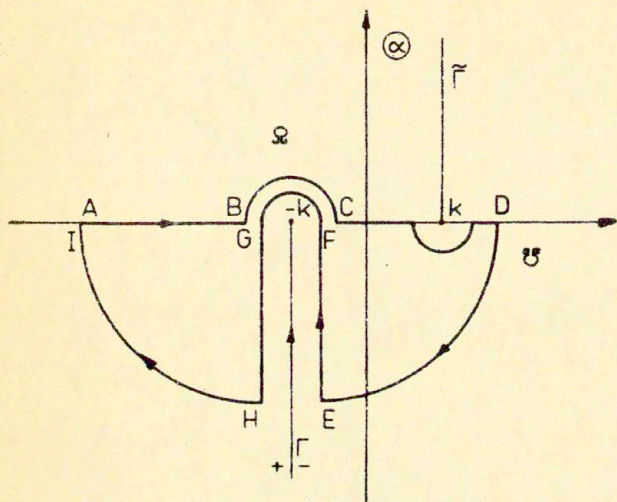
Stąd

$$\ln K(t, \eta) \approx -\frac{1}{2} \ln(t+k).$$

Dla $t = -k + re^{i\varphi}$ mamy następujące oszacowanie

$$\int_{F_6} \left| \ln \frac{K(t, \eta)}{t - \alpha} \right| |dt| \approx \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{|\ln r + i\varphi|}{|k + \alpha|} r d\varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

gdzie $d|t|$ oznacza długość różniczki łuku.



Rys.D1. Zamianą linii całkowania dla przedłużenia całki Cauchy ego z obszaru Ω na obszar $\Omega + \mathcal{U} - \Gamma$

6. Zatem dla $\alpha \in \Omega$ i każdego η ze zbioru \mathfrak{S}_{TM} zachodzi równość

$$F(\alpha, \eta) = \int_{FE} [\ln K_+(t, \eta) - \ln K_-(t, \eta)] \frac{dt}{t - \alpha} = \int_{FE} \ln \frac{K_+(t, \eta)}{K_-(t, \eta)} \frac{dt}{t - \alpha},$$

gdzie indeksem "+" oznaczono graniczną wartość funkcji z lewej, a indeksem "-" - graniczną wartość funkcji z prawej strony linii F E. Przyjmując $(\sqrt{k^2 - \alpha^2})_+ = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, $(\sqrt{k^2 - \alpha^2})_- = -\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ w funkcji podcałkowej (D3) na linii Γ otrzymujemy tezę.

II. Obliczenie funkcji $g^2(\alpha, d)$ i $\delta^2 g(\alpha, d)$

Obliczmy funkcję

$$g^2(\alpha, d) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} I_1(\alpha, d) \right\}$$

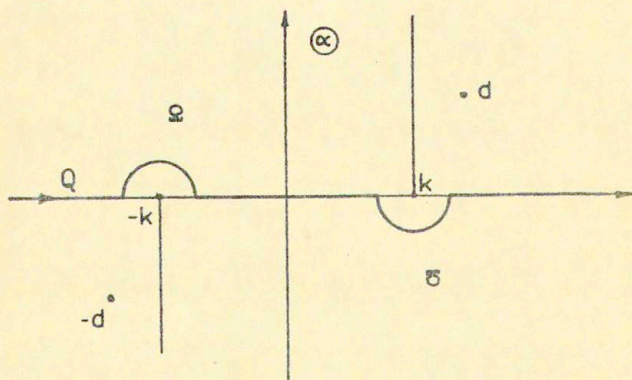
gdzie

$$I_1(\alpha, d) = \int_Q \frac{1}{\sqrt{k+t}} \ln \frac{s + \sqrt{k^2 - t^2}}{\sqrt{k^2 - t^2}} \frac{dt}{t - \alpha}$$

przy czym

$$s^2 - (k^2 - t^2) = (t-d)(t+d).$$

Linia Q leży na płaszczyźnie α jak pokazano na Rys.D2, parametr $\alpha \in \Omega$, gdzie przez Ω oznaczono obszar leżący nad linią Q .



Rys.D2. Położenie linii całkowania w całkach Cauchy'ego $I_1(\alpha, d)$, $I_2(\alpha, d)$.

Oznaczmy

$$F(s) = \int_Q \frac{\ln(s + \sqrt{k^2 - t^2})}{\sqrt{k+t}} \frac{dt}{t-\alpha}$$

Wtedy

$$I(\alpha, d) = F(s) - F(0)$$

Różniczkując względem parametru s mamy

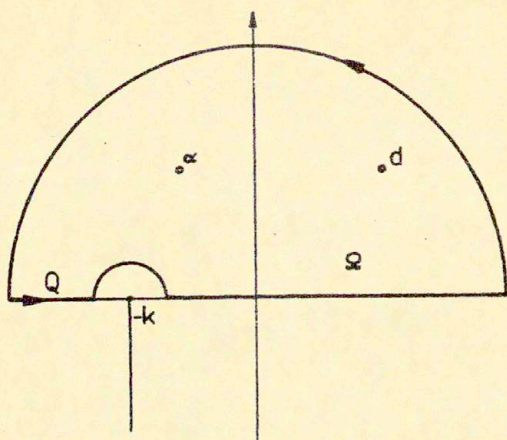
$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \int_Q \frac{1}{\sqrt{k+t}} \frac{1}{s + \sqrt{k^2 - t^2}} \frac{dt}{t-\alpha} = \int_Q \frac{(s - \sqrt{k^2 - t^2}) dt}{\sqrt{k+t} (t-d)(t+d)(t-\alpha)} = \\ &= \int_Q \left[\frac{s}{\sqrt{k+t} (t-d)(t+d)(t-\alpha)} \right] dt - \int_Q \left[\frac{\sqrt{k-t}}{(t-d)(t+d)(t-\alpha)} \right] dt \end{aligned}$$

Funkcja podcałkowa w całce pierwszej jest funkcją analityczną w górnej, a w całce drugiej analityczną w dolnej półpłaszczyźnie. Zamieniamy całkę po linii Q na całkę po linii zamkniętej dla całki pierwszej w górnej /Rys.D2a/, a dla drugiej w dolnej /Rys.D2b/ półpłaszczyźnie i korzystamy z twierdzenia Cauchy'ego

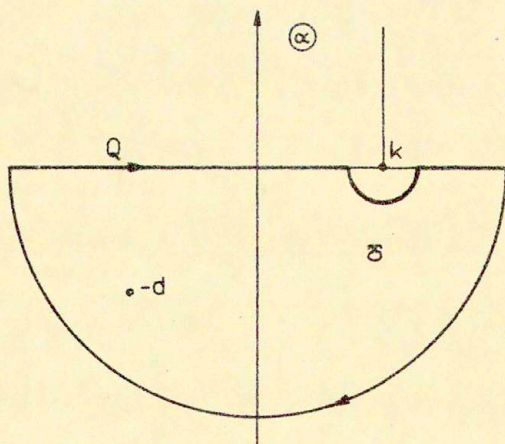
$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= 2\pi i \left[\operatorname{res}_d \left[\frac{s}{\sqrt{k+d} (d-\alpha) 2d} \right] + \operatorname{res}_\alpha \left[\frac{s}{\sqrt{k+\alpha} (\alpha^2 - d^2)} \right] + \operatorname{res}_{-d} \left[\frac{\sqrt{k+d}}{2d(d+\alpha)} \right] \right] = \\ &= 2\pi i \left[\frac{s}{\sqrt{k+d} (d-\alpha) 2d} + \frac{s}{\sqrt{k+\alpha} (\alpha^2 - d^2)} + \frac{\sqrt{k+d}}{2d(d+\alpha)} \right] = \\ &= 2\pi i \left[\frac{\sqrt{k+d}}{2d(\alpha+d)} - \frac{\sqrt{k-d}}{2d(\alpha-d)} + \frac{\sqrt{k^2 - d^2}}{\sqrt{k+\alpha} (\alpha^2 - d^2)} \right], \end{aligned}$$

gdzie skorzystano z zależności $d = \sqrt{k^2 - s^2}$, czyli $s = \sqrt{k^2 - d^2}$.
Zamieńmy zmienne

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{d(d)} \frac{d(d)}{ds} = - \frac{dF}{d(d)} \frac{s}{\sqrt{k^2 - s^2}} = - \frac{dF}{d(d)} \frac{\sqrt{k^2 - d^2}}{d}$$



Rys.D2a. Zamknięcie linii całkowania dla funkcji podcałkowej analitycznej w Ω



Rys.D2b. Zamknięcie linii całkowania dla funkcji analitycznej w obszarze \mathfrak{B}

Czyli

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d(d)} &= -2\pi i \frac{d}{\sqrt{k^2-d^2}} \left[\frac{\sqrt{k+d}}{2d(\alpha+d)} - \frac{\sqrt{k-d}}{2d(\alpha-d)} + \frac{\sqrt{k^2-d^2}}{\sqrt{k+\alpha}(\alpha^2-d^2)} \right] = \\ &= -2\pi i \left[\frac{1}{2(\alpha+d)\sqrt{k-d}} - \frac{1}{2(\alpha-d)\sqrt{k+d}} + \frac{d}{\sqrt{k+d}(\alpha^2-d^2)} \right] \\ F(s) &= 2\pi i \int_c^{d(s)} \left[-\frac{1}{2(\alpha+x)\sqrt{k-x}} + \frac{1}{2(\alpha-x)\sqrt{k+x}} - \frac{2t}{2\sqrt{k+\alpha}(\alpha^2-x^2)} \right] dx \end{aligned}$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Zgodnie z oznaczeniem

$$I(\alpha, d) = 2\pi i \int_{d(0)}^{d(s)} [] dx = 2\pi i \int_k^{\sqrt{k^2-s^2}} [] dx$$

Wg. I.M. Rżiżika [13] str.90 2.246 (dla $\beta\Delta = \alpha+k, \beta=-1$)
mamy

$$(D4) \int \frac{dx}{(\alpha-x)\sqrt{x+k}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha+k}} \ln \frac{\sqrt{x+k} + \sqrt{\alpha+k}}{\sqrt{x+k} - \sqrt{\alpha+k}}$$

Zgodnie z tym wzorem

$$\int [] dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha+k}} \ln \frac{\sqrt{x+k} + \sqrt{\alpha+k}}{\sqrt{x+k} - \sqrt{\alpha+k}} \cdot \frac{\sqrt{k-x} + \sqrt{k+\alpha}}{\sqrt{k-x} - \sqrt{k+\alpha}} (\alpha^2 - x^2)$$

Wobec tego

$$I(\alpha, d) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k+\alpha}} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{d+k} + \sqrt{\alpha+k}}{\sqrt{d+k} - \sqrt{\alpha+k}} \cdot \frac{\sqrt{k-d} + \sqrt{k+\alpha}}{\sqrt{k-d} - \sqrt{k+\alpha}} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2-d^2}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{\alpha+k} - \sqrt{2k}}{\sqrt{\alpha+k} + \sqrt{2k}} \right]$$

Ostatecznie po przekształceniach

$$I(\alpha, d) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \frac{(\sqrt{k+d} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d} + \sqrt{k+\alpha})}{\sqrt{\alpha+k}(\sqrt{\alpha+k} + \sqrt{2k})}$$

Stąd

$$g^2(\alpha, d) = \frac{(\sqrt{k+d} + \sqrt{k+\alpha})(\sqrt{k-d} + \sqrt{k+\alpha})}{\sqrt{k+\alpha}(\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha})}$$

Obliczmy funkcję

$$\delta^2 g(\alpha, d) = \exp \left[\frac{\sqrt{k+\alpha}}{2\pi i} I_2(\alpha, d) \right],$$

gdzie

$$I_2(\alpha, d) = \int_Q \frac{1}{\sqrt{t+k}} \ln \frac{t-d}{t-k} \frac{dt}{t-\alpha}$$

Linia Q leży na płaszczyźnie α , jak pokazano na Rys.D2, $\alpha \in \Omega$.

Oznaczmy

$$F(\alpha, d) = \int_Q \frac{1}{\sqrt{t+k}} \frac{\ln(t-d)}{t-\alpha} dt$$

Wtedy $I_2(\alpha, d) = F(\alpha, d) - F(\alpha, k)$

$$\frac{\partial F(\alpha, d)}{\partial d} = \int_Q \left(\frac{1}{\sqrt{t+k}} \frac{(-1)}{t-d} \frac{1}{t-\alpha} \right) dt = 2\pi i [\text{res}_d(\quad) + \text{res}_\alpha(\quad)] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{(-1)}{\sqrt{d+k} (d-\alpha)} + \frac{(-1)}{\sqrt{\alpha+k} (\alpha-d)} \right],$$

gdzie dla skorzystania z twierdzenia Cauchy'ego kontur całkowania zamykamy linią leżącą w górnej półpłaszczyźnie jak na Rys.D2a.

Stąd

$$F(\alpha, d) = 2\pi i \left[- \int_c^d \frac{dx}{\sqrt{x+k} (x-\alpha)} + \frac{\ln(d-\alpha)}{\sqrt{k+\alpha}} \right],$$

gdzie c jest dowolną stałą /niezależną od d /.

$$I_2(\alpha, d) = F(\alpha, d) - F(\alpha, k) = 2\pi i \left[\frac{\ln \frac{d-\alpha}{k-\alpha}}{\sqrt{k+\alpha}} - \int_k^d \frac{dx}{\sqrt{k+x}(x-\alpha)} \right].$$

Korzystając ze wzoru (D4) mamy

$$\int_k^d \frac{dx}{\sqrt{k+x}(x-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \left(\frac{\sqrt{d+k} + \sqrt{\alpha+k}}{\sqrt{d+k} - \sqrt{\alpha+k}} \frac{\sqrt{2k} - \sqrt{\alpha+k}}{\sqrt{2k} + \sqrt{\alpha+k}} \right).$$

Skąd po przekształceniach otrzymujemy

$$I_2(\alpha, d) = \frac{2\pi i}{\sqrt{k+\alpha}} \ln \left(\frac{\sqrt{k+d} + \sqrt{k+\alpha}}{\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha}} \right)^2.$$

Wobec tego

$$\delta^2 g(\alpha, d) = \left(\frac{\sqrt{k+d} + \sqrt{k+\alpha}}{\sqrt{2k} + \sqrt{k+\alpha}} \right)^2.$$

Literatura

- [1] G.D. Maliuziniec - Wzbudzenie, odbicie i promieniowanie fal powierzchniowych na klinie z zadanymi impedancjami granic, *Doklady AN SSSR*, 121, 3, 436-439, (1958)
- [2] G.D. Maliuziniec - Das Sommerfeldsche Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten. *Ann.Phys. /Leipzig/*, 7, 6, 107-112 (1960).
- [3] T.B.A. Senior - Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. *Proc.Roy.Soc. A*213, 436-458 (1952).
- [4] N.G. Freniew - Dyfrakcja elektromagnetycznych fal powierzchniowych na półpłaszczyźnie impedancyjnej /w jęz.ros./, *Radiotechnika Elektronika* 3, 2, 163-171, (1958).
- [5] R.A. Hurd - The Wiener-Hopf-Hilbert method for diffraction problems, *Can.J.Phys.*, 54, 7, 775-780, (1975).
- [6] R.A. Hurd and S. Przeździecki - Diffraction by a half-plane with different face impedances - a re-examination, *Can.J.Phys.*, 59, 1337 (1981).
- [7] J.J. Bowman - High-frequency backscattering from an absorbing infinite strip with arbitrary face impedances. *Can. J.Phys.*, 45, 2409 (1967).
- [8] W. Nasalski - Dyfrakcja fali niejednorodnej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. *Prace IPPT* Nr 171, 1980.
- [9] W. Nasalski - Dyfrakcja elektromagnetycznych fal powierzchniowych na półpłaszczyźnie impedancyjnej. *Prace IPPT* Nr 181, 1980.
- [10] H. Kudrewicz, S. Przeździecki - Dyfrakcja fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Analiza rozwiązania w zależności od impedancji półpłaszczyzny. *Prace IPPT* Nr 187, 1981.

- [11] H. Kudrewicz, S. Przeździecki - Metoda Wienera-Hopfa dla równania $U(\alpha) = K(\alpha)L(\alpha) + D(\alpha)$ w przypadku funkcji $K(\alpha)$ z zerami. Struktura rozwiązania dla zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Prace IPPT Nr 194, 1982.
- [12] B. Noble - Methods based on the Wiener-Hopf technique. Pergamon Press, London 1958.
- [13] I.M. Rizik, I.S. Gradsztejn - Tablice całek sum, szeregów i iloczynów. Państwowe Wydawnictwo Techniczno-Teoretycznej Literatury, Moskwa 1951 Leningrad /w języku rosyjskim/.