

7.71 — teoria drgań; rezonans

15/1984

Józef Bajkowski

REZONANSE WEWNĘTRZNE  
W NIELINIOWYCH UKŁADACH  
DRGAJĄCYCH

CZĘŚĆ I

15/1984

P.269

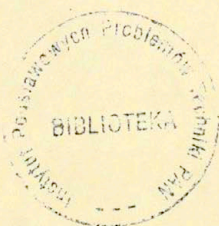


WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 lutego 1984 r.

Opracowanie wykonano w ramach programu prac problemu węzłowego 05.12 - "Analiza i optymalna synteza nieliniowych układów drgających"



56963



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,9. Ark.druk. 1,5.  
Oddano do drukarni w marcu 1984 r.  
Nr zamówienia 212/84.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8



Józef Bajkowski  
Zakład Układów Mechanicznych  
IPPT PAN

REZONANSE WEWNĘTRZNE  
W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH  
CZĘŚĆ I

1. Wstęp.

Terminem "rezonans wewnętrzny" przyjęto określać te szczególne zjawiska, które pojawiają się w drgających układach nieliniowych o  $n$  stopniach swobody, wtedy gdy istnieją liczby całkowite  $k_s$ ,  $s=1,2,\dots,p$ , nie wszystkie równe zero takie, że między częstościami własnymi układu  $\omega_1, \dots, \omega_p$  zachodzi związek typu:

$$/1.1/ \quad \sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0, \quad p \leq n,$$

tzn. gdy są one współmierne. W teorii pierwszego przybliżenia częstości  $\omega_s$  są częstościami własnymi układu liniowego.

Szczególnie interesującym jest przypadek kiedy w układzie występuje jednocześnie rezonans zewnętrzny, tj. gdy istnieją liczby całkowite  $m_1, \dots, m_p$  nie wszystkie równe zero i liczba  $m_j$ , takie że spełniony jest warunek:

$$/1.2/ \quad \sum_{s=1}^p m_s \omega_s + m_j \gamma = 0, \quad p \leq n,$$

gdzie  $\gamma$  - częstość siły wzbudzającej,  $m_j = 1, 2, 3, \dots$

oraz gdy wśród częstości  $\omega_1, \dots, \omega_p$  są częstości współmierne, tzn. spełniony jest warunek /1.1/.

W przypadku gdy rezonansem zewnętrznym jest rezonans główny, tj. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych:

$$/1.3/ \quad \gamma \approx \omega_k,$$

efektem współmierności częstości własnych jest "wciąganie" do rezonansu oprócz współrzędnej normalnej rezonansowej  $\xi_k$ , również innych współrzędnych  $\xi_s$  odpowiadających częstościom własnym  $\omega_s$ , współmiernym z  $\xi_k$ .

Badanie ustalonej odpowiedzi układu będącego w stanie rezonansu zewnętrznego i wewnętrznego można znaleźć w pracach [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Charakterystyczną dla omawianych przykładów była nieliniowość typu kwadratowego, a tym samym i rezonans wewnętrzny typu  $\omega_i \approx 2 \omega_j$ .

Typową dla układów mechanicznych jest nieliniowość typu sześciennego, która pociąga za sobą możliwość wystąpienia rezonansu wewnętrznego typu  $\omega_i \approx 3 \omega_j$ . Niewiele jest przykładów, w których analizowany jest ten typ rezonansu, chociaż możemy przy tym uzyskać wiele interesujących wyników. Wymienić tu możemy prace: Nayfeh, Mook i Sridhar [2], Nayfeh, Mook i Lobitz [3], wspominają o nim także Sethna [4] i Tondl [7].

Z analizy tych prac wynika, że gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, w rezonans wewnętrznym "wciągana" jest druga współrzędna, której odpowiada wyższa częstość własna i jedynym jest rozwiązanie nietrywialne  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ . W przypadku kiedy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej możliwe są dwa typy rozwiązań: a/ półtrywialne  $a_1 = 0$  i  $a_2 \neq 0$ , a więc takie jak bez rezonansu wewnętrznego, b/ nietrywialne  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ .

Bardziej interesującym wydaje się być przypadek /b/, a więc rozwiązanie nietrywialne  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ , które nie ma miejsca w układzie bez rezonansu wewnętrznego. W szczególności godnym uwagi jest:



- określenie przedziałów częstości wymuszenia, w których takie rozwiązanie może wystąpić,
- określenie obszarów przyciągania tego typu rozwiązania,
- zbadanie jakie parametry układu mogą mieć wpływ na wystąpienie tego rozwiązania,
- zbadanie zagadnienia rezonansu wewnętrznego w przypadku rezonansów zewnętrznych pobocznych /subharmonicznych, superharmonicznych i prawie-okresowych/,
- zbadanie przydatności znanych przybliżonych metod badania nieliniowych układów drgających w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego.

Na niektóre z tych pytań postaramy się odpowiedzieć w tym opracowaniu, poddając analizie nieliniowy układ drgający o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu sześciennego i przy rezonansie wewnętrznym  $\omega_2 \times 3 \omega_1$ , w przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej.

## 2. Równania ruchu i badanie rezonansu wewnętrznego metodą uśredniania.

Teoretyczne obliczenia stanów ustalonych wykonano przy pomocy metody uśredniania. Wygodnie jest w tym celu zapisać równania ruchu we współrzędnych normalnych:

$$/2.1/ \quad M \ddot{\zeta} + \Omega \zeta + F/\zeta, \dot{\zeta} - Q \cos \zeta t = 0,$$

$$\text{gdzie } M = \text{diag} [M_{0j}], \quad \Omega = \text{diag} [M_{0j} \omega_{0j}^2],$$

$$M_{0j} = \sum_{i=1}^n m_i b_{0ij}^2 \quad - \text{ dla układów dyskretnych,}$$

$$M_{0j} = \int_0^1 m/x/ \psi_j^2/x/ dx \quad - \text{ dla układów ciągłych.}$$

$$F = F/\zeta_1, \dots, \zeta_n, \dots, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_n, \dots/.$$

W przypadku gdy częstości własne układu nie są współmierne, rozwiązanie układu /2.1/ w pierwszym przybliżeniu zakładamy w postaci:

$$\begin{aligned} /2.2/ \quad \zeta_k &= a_k \cos \omega_k t + \Psi_k / \\ \zeta_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Efekt rezonansu wewnętrznego uzyskuje się zakładając, że nie tylko współrzędna rezonansowa  $\zeta_k$ , lecz i współrzędne  $\zeta_1$  odpowiadające częstościom współmiernym z  $\omega_k$  są różne od zera:

$$\begin{aligned} /2.3/ \quad \zeta_k &= a_k \cos \omega_k t + \Psi_k / \\ \zeta_1 &= a_1 \cos (s_{k1} \omega_k t) + \Psi_1 /, \quad i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \zeta_j &= 0, \quad j \neq 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

gdzie  $s_{ki} = \omega_i / \omega_k = \omega_i / \omega_k$ ,  $s_1, s_k = 1, 2, 3, \dots$ .

Dla wyznaczenia amplitud  $a_1, \dots, a_r$  i kątów fazowych  $\Psi_1, \dots, \Psi_r$  zastosujemy metodę uśredniania.

Szczegółowe obliczenia teoretyczne wykonano dla pewnego typu układu nieliniowego o dwóch stopniach swobody, złożonego z dwóch mas połączonych więziami sprężystą typu Duffinga, w przypadku występowania liniowego tłumienia, wzbudzanego siłą harmoniczną o stałej amplitudzie. Równania ruchu we współrzędnych bezwymiarowych przybierają postać:

$$\begin{aligned} /2.4/ \quad \ddot{q}_1 + \mu^2 q_1 + \gamma / q_1 - q_2 / + \mu \dot{q}_1 / \dot{q}_1 - \dot{q}_2 / + \mu / q_1 - q_2 /^3 &= P \cos \omega t, \\ \ddot{q}_2 + q_2 - q_1 + \mu \dot{q}_2 - \dot{q}_1 / + \mu / q_2 - q_1 /^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając współrzędne normalne  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  tak że

$$\begin{aligned} /2.5/ \quad q_1 &= \zeta_1 + \zeta_2, \\ q_2 &= b_{021} \zeta_1 + b_{022} \zeta_2, \end{aligned}$$



równania /2.4/ przekształcimy do postaci:

$$\ddot{\zeta}_1 + \omega_{01}^2 \zeta_1 = \frac{-\gamma(1-b_{021})}{1 + \gamma b_{021}^2} \left\{ \mu \left[ (1-b_{021}) \dot{\zeta}_1 + (1-b_{022}) \dot{\zeta}_2 \right] + \right. \\ \left. + \mu \left[ (1-b_{021}) \zeta_1 + (1-b_{022}) \zeta_2 \right]^3 \right\} + \frac{P}{1 + \gamma b_{021}^2} \cos \tilde{t},$$

/2.6/

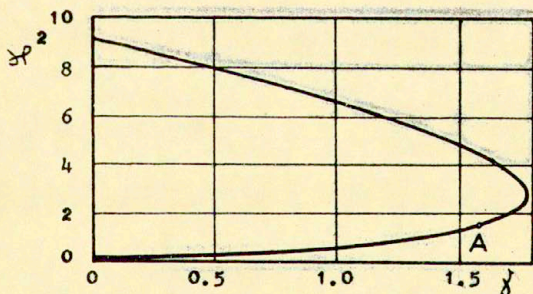
$$\ddot{\zeta}_2 + \omega_{02}^2 \zeta_2 = \frac{-\delta(1-b_{022})}{1 + \gamma b_{022}^2} \left\{ \mu \left[ (1-b_{021}) \dot{\zeta}_1 + (1-b_{022}) \dot{\zeta}_2 \right] + \right. \\ \left. + \mu \left[ (1-b_{021}) \zeta_1 + (1-b_{022}) \zeta_2 \right]^3 \right\} + \frac{P}{1 + \gamma b_{022}^2} \cos \tilde{t}.$$

Częstości własne układu liniowego wyznaczmy z zależności:

$$/2.7/ \quad \omega_{01,2}^2 = \frac{1}{2} / 1 + \gamma \rho^2 + \gamma / \mp \sqrt{\frac{1}{4} / 1 + \gamma \rho^2 + \gamma / ^2 - \gamma \rho^2},$$

$$/2.8/ \quad b_{021,2} = \frac{1}{1 - \omega_{01,2}^2}.$$

Na rys. 2.1. pokazano zależność  $\gamma \rho^2 = \gamma \rho^2 / \gamma$ , dla której spełniony jest warunek  $\omega_{02} = 3\omega_{01}$ .



Rys. 2.1. Zależność  $\gamma \rho^2 = \gamma \rho^2 / \gamma$ , dla której spełniony jest warunek  $\omega_{02} = 3\omega_{01}$ .

W dalszych rozważaniach przyjmiemy następujące dane liczbowe:  $\mu^2 = 1.5$  i  $\gamma = 1.582$  /punkt A na rys.2.1/. Dla tych danych na częstotliwości i postaci własne układu liniowego otrzymujemy następujące wartości:

$$/2.9/ \quad \omega_{01} = 0.639, \quad \omega_{02} = 1.917, \quad b_{021} = 1.6898, \quad b_{022} = -0.3739.$$

Jak już wspomniano we wstępie będziemy badali zachowanie się układu w przypadku kiedy częstość wymuszenia  $\nu$  jest w pobliżu wyższej częstości własnej. Tak więc dla  $\nu \approx \omega_2$  rozwiązanie układu /2.6/ zakładamy w postaci:

$$/2.10/ \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= a_1 \cos \frac{1}{3} \nu t + \psi_1 /, \\ \zeta_2 &= a_2 \cos \nu t + \psi_2 /. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia amplitud  $a_1$  i  $a_2$  oraz kątów fazowych  $\psi_1$  i  $\psi_2$  zastosujemy metodę uśredniania. Przekształcimy w tym celu równania /2.6/ do postaci:

$$/2.11/ \quad \begin{aligned} \ddot{\zeta}_1 + \frac{1}{3} \nu^2 \zeta_1 &= \frac{1}{9} \nu^2 - \omega_{02}^2 \zeta_1 + q_1 \cos \nu t - \\ &\quad - \mu f_1 / \zeta_1, \zeta_2, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2 /, \\ \ddot{\zeta}_2 + \nu^2 \zeta_2 &= \nu^2 - \omega_{02}^2 \zeta_2 + q_2 \cos \nu t - \mu f_2 / \zeta_1, \zeta_2, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2 /, \end{aligned}$$

gdzie

$$q_i = \frac{p}{1 + \gamma^2 b_{02i}^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$f_i = \frac{1 - b_{02i}}{1 + \gamma^2 b_{02i}^2} \left\{ 1 \left[ \frac{1 - b_{021}}{\zeta_1} + \frac{1 - b_{022}}{\zeta_2} \right] + \left[ \frac{1 - b_{021}}{\zeta_1} + \frac{1 - b_{022}}{\zeta_2} \right]^3 \right\}.$$

Traktujemy następnie  $a_1, a_2, \psi_1$  i  $\psi_2$  jako nowe zmienne w czasie  $a_i \equiv a_i / \nu$ ,  $\psi_i \equiv \psi_i / \nu$ ,  $i = 1, 2$  i przekształcimy równania /2.11/ do postaci:



$$\frac{da_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{9} (\dot{\nu}^2 - \omega_{o2}^2) a_1 \cos \theta_1 - Q_1 \cos \dot{\nu} \tau + \mu \bar{f}_1(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \right] \sin \theta_1 d\tau,$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{1}{a_1 \sqrt{3}} \left[ \frac{1}{9} (\dot{\nu}^2 - \omega_{o2}^2) a_1 \cos \theta_1 - Q_1 \cos \dot{\nu} \tau + \mu \bar{f}_1(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \right] \cos \theta_1 d\tau,$$

/2.12/

$$\frac{da_2}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -(\dot{\nu}^2 - \omega_{o2}^2) a_2 \cos \theta_2 - Q_2 \cos \dot{\nu} \tau + \mu \bar{f}_2(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \right] \sin \theta_2 d\tau,$$

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = \frac{1}{a_2 \sqrt{3}} \left[ -(\dot{\nu}^2 - \omega_{o2}^2) a_2 \cos \theta_2 - Q_2 \cos \dot{\nu} \tau + \mu \bar{f}_2(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \right] \cos \theta_2 d\tau,$$

gdzie:

$$\theta_1 = \sqrt{3} \tau + \psi_1, \quad \theta_2 = \sqrt{3} \tau + \psi_2,$$

$$\bar{f}_i = \frac{\gamma(1-b_{o2i})}{1+\gamma b_{o2i}} \left\{ -l \left[ \sqrt{3} (1-b_{o21}) a_1 \sin \theta_1 + \sqrt{3} (1-b_{o22}) a_2 \sin \theta_2 \right] + \left[ (1-b_{o21}) a_1 \cos \theta_1 + (1-b_{o22}) a_2 \cos \theta_2 \right]^3 \right\},$$

$$i = 1, 2.$$

Wykorzystując zależności:

$$\cos \dot{\nu} \tau = \cos \theta_2 \cos \psi_2 + \sin \theta_2 \sin \psi_2,$$

$$/2.13/ \quad \cos 3\theta_1 = \cos \theta_2 \cos 3\psi_1 - \psi_2 / - \sin \theta_2 \sin 3\psi_1 - \psi_2 /,$$

$$\cos \theta_2 - 2\theta_1 / = \cos \theta_1 \cos 3\psi_1 - \psi_2 / + \sin \theta_1 \sin 3\psi_1 - \psi_2 /,$$

oraz uśredniając w czasie prawe strony równań /2.12/ i wykonując operację całkowania otrzymamy:

$$2) \dot{a}_1 = -c_{11} \dot{\nu} a_1 + \varepsilon_1 a_1^2 a_2 \sin(3\psi_1 - \psi_2),$$

$$2) \dot{a}_1 \dot{\psi}_1 = -\frac{1}{3}(\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) a_1 + \beta_{11} a_1^3 + \beta_{12} a_1 a_2^2 + \varepsilon_1 a_1^2 a_2 \cos(3\psi_1 - \psi_2),$$

/2.14/

$$2) \dot{a}_2 = -c_{22} \dot{\nu} a_2 - Q_2 \sin \psi_2 - \varepsilon_2 a_1^3 \sin(3\psi_1 - \psi_2),$$

$$2) \dot{a}_2 \dot{\psi}_2 = -(\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) a_2 - Q_2 \cos \psi_2 + \beta_{21} a_2^3 + \beta_{22} a_1^2 a_2 + \varepsilon_2 a_1^3 \cos(3\psi_1 - \psi_2),$$

gdzie:

$$c_{11} = \frac{\mu \gamma l (1 - b_{021})^2}{1 + \gamma b_{021}^2},$$

$$c_{22} = \frac{\mu \gamma l (1 - b_{022})^2}{1 + \gamma b_{022}^2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{9}{4} \mu \gamma \frac{(1 - b_{021})^3 (1 - b_{022})}{1 + \gamma b_{021}^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \mu \gamma \frac{(1 - b_{021})^3 (1 - b_{022})}{1 + \gamma b_{022}^2},$$

$$\beta_{11} = \frac{9}{4} \mu \gamma \frac{(1 - b_{021})^4}{1 + \gamma b_{021}^2},$$

$$\beta_{12} = \frac{3}{4} \mu \gamma \frac{(1 - b_{022})^4}{1 + \gamma b_{022}^2},$$

$$\beta_{12} = \frac{9}{2} \mu \gamma \frac{(1 - b_{021})^2 (1 - b_{022})^2}{1 + \gamma b_{021}^2},$$

$$\beta_{22} = \frac{3}{2} \mu \gamma \frac{(1 - b_{021})^2 (1 - b_{022})^2}{1 + \gamma b_{022}^2}.$$

Przechodząc do badania stateczności rozwiązań równań /2.14/ wygodniej będzie wprowadzić zamiast  $a_1, a_2, \psi_1$  i  $\psi_2$  nowe zmienne  $x_1, y_1, x_2$  i  $y_2$  określone jak niżej:

$$x_1 = a_1 \cos \psi_1, \quad y_1 = a_1 \sin \psi_1,$$

/2.15/

$$x_2 = a_2 \cos \psi_2, \quad y_2 = a_2 \sin \psi_2,$$

Równania /2.14/ w nowych zmiennych przyjmują postać:

$$-2) \dot{x}_1 = c_{11} \dot{\nu} x_1 - \frac{1}{3}(\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) y_1 + [\beta_{11}(x_1^2 + y_1^2) + \beta_{12}(x_2^2 + y_2^2)] y_1 + \varepsilon_1 [y_2(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1 x_2 y_1],$$

$$-2) \dot{y}_1 = c_{11} \dot{\nu} y_1 + \frac{1}{3}(\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) x_1 - [\beta_{11}(x_1^2 + y_1^2) + \beta_{12}(x_2^2 + y_2^2)] x_1 - \varepsilon_1 [2x_1 y_1 y_2 + x_2(x_1^2 - y_1^2)],$$

/2.16/

$$-2) \dot{x}_2 = c_{22} \dot{\nu} x_2 - (\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) y_2 + [\beta_{21}(x_2^2 + y_2^2) + \beta_{22}(x_1^2 + y_1^2)] y_2 + \varepsilon_2 [3x_1^2 y_1 - y_1^3],$$

$$-2) \dot{y}_2 = c_{22} \dot{\nu} y_2 + (\dot{\nu}^2 - \omega_{02}^2) x_2 - [\beta_{21}(x_2^2 + y_2^2) + \beta_{22}(x_1^2 + y_1^2)] x_2 - \varepsilon_2 [x_1^3 - 3x_1 y_1^2] + Q_2.$$



Równania /2.14/ i /2.16/ są równoważne. Aby zbadać zachowanie się krzywych całkowych równań /2.16/ w czterowymiarowej przestrzeni  $x_1, y_1, x_2, y_2$  wprowadzimy dodatnio określoną funkcję

$$/2.17/ \quad V = \alpha/x_1^2 + y_1^2/ + \beta/x_2^2 + y_2^2/,$$

zmiennych  $x_1, y_1, x_2$  i  $y_2$ . Wykorzystując równania /2.16/ znajdziemy jej pochodną, która ma postać:

$$/2.18/ \quad \dot{V} = -\alpha c_{11}/x_1^2 + y_1^2/ - \beta c_{22}/x_2^2 + y_2^2/ - \frac{c_2 \beta y_2}{y},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1 + \beta b_{021}^2}{9}, \quad \beta = 1 + \beta b_{022}^2, \quad c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0.$$

Tak więc jeśli tylko  $\Lambda^2$  przyjmuje dostatecznie duże wartości w wyrażeniu:

$$/2.19/ \quad V = \alpha/x_1^2 + y_1^2/ + \beta/x_2^2 + y_2^2/ = \Lambda^2,$$

a co ma miejsce w pobliżu rezonansu głównego, wtedy mamy

$$/2.20/ \quad \dot{V} < 0.$$

A zatem krzywe całkowe równań /2.16/ nie opuszczają przestrzeni /2.16/ w miarę upływu czasu, co pociąga za sobą istnienie statecznego punktu równowagi bądź statecznego cyklu granicznego w ograniczonym obszarze.

Zbadajmy następnie stateczność punktów równowagi. Niech w stanie ustalonym przybierają one następujące wartości:  $x_{10}, y_{10}, x_{20}$  i  $y_{20}$ . Za dostatecznie małe zaburzenia od stanu równowagi przyjmijmy  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  i  $\eta_4$ . Możemy więc zapisać:

$$/2.21/ \quad \begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \eta_1, \\ y_1 &= y_{10} + \eta_2, \\ x_2 &= x_{20} + \eta_3, \\ y_2 &= y_{20} + \eta_4. \end{aligned}$$

Podstawiając prawe strony równań /2.21/ do równań /2.16/ i odrzucając wyrazy stopnia wyższego niż pierwszy względem

$\eta_1, \eta_2, \eta_3$  i  $\eta_4$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} -2\lambda\eta_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 + a_{14}\eta_4 \\ -2\lambda\eta_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 + a_{24}\eta_4 \\ -2\lambda\eta_3 &= a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{34}\eta_4 \\ -2\lambda\eta_4 &= a_{41}\eta_1 + a_{42}\eta_2 + a_{43}\eta_3 + a_{44}\eta_4, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11}\lambda + 2\beta_{11}x_{10}y_{10} + 2\varepsilon_1x_{10}y_{20} - 2\varepsilon_1x_{20}y_{10}, \\ a_{12} &= -\frac{1}{3}\lambda^2 - \omega_{02}^2 + \beta_{11}/x_{10}^2 + 3y_{10}^2 + \beta_{12}/x_{20}^2 + y_{20}^2 - \\ &\quad - 2\varepsilon_1/y_{10}y_{20} - x_{10}x_{20}, \\ a_{13} &= 2\beta_{12}x_{20}y_{10} - 2\varepsilon_1x_{10}y_{10}, \\ a_{14} &= 2\beta_{12}y_{10}y_{20} + \varepsilon_1/x_{10}^2 - y_{10}^2, \\ a_{21} &= \frac{1}{3}\lambda^2 - \omega_{02}^2 - \beta_{11}/3x_{10}^2 + y_{10}^2 - \beta_{12}/x_{20}^2 + y_{20}^2 - \\ &\quad - 2\varepsilon_1/y_{10}y_{20} + x_{10}x_{20}, \\ a_{22} &= c_{11}\lambda - 2\beta_{11}x_{10}y_{10} - 2\varepsilon_1/x_{10}y_{20} - x_{20}y_{10}, \\ a_{23} &= -2\beta_{12}x_{10}x_{20} - \varepsilon_1/x_{10}^2 - y_{10}^2, \\ a_{24} &= -2\beta_{12}x_{10}y_{20} - 2\varepsilon_1x_{10}y_{10}, \\ a_{31} &= 2\beta_{22}x_{10}y_{20} + 6\varepsilon_2x_{10}y_{10}, \\ a_{32} &= 2\beta_{22}y_{10}y_{20} + 3\varepsilon_2/x_{10}^2 - y_{10}^2, \\ a_{33} &= c_{22}\lambda + 2\beta_{21}x_{20}y_{20}, \\ a_{34} &= -\lambda^2 - \omega_{02}^2 + \beta_{21}/x_{20}^2 + 3y_{20}^2 + \beta_{22}/x_{10}^2 + y_{10}^2, \\ a_{41} &= -2\beta_{22}x_{10}x_{20} - 3\varepsilon_2/x_{10}^2 - y_{10}^2, \\ a_{42} &= -2\beta_{22}y_{10}x_{20} + 6\varepsilon_2x_{10}y_{10}, \\ a_{43} &= \lambda^2 - \omega_{02}^2 - \beta_{21}/3x_{20}^2 + y_{20}^2 - \beta_{22}/x_{10}^2 + y_{10}^2, \\ a_{44} &= c_{22}\lambda - 2\beta_{21}x_{20}y_{20}. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne można zapisać w następującej postaci:



$$/2.23/ \quad \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Po rozwinięciu otrzymujemy równanie czwartego stopnia o postaci

$$/2.24/ \quad \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0.$$

Zgodnie z kryterium Routha-Hurwitza otrzymujemy następujące warunki stateczności:

$$/2.25a/ \quad A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0,$$

$$/2.25b/ \quad A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 > 0.$$

Z warunków tych

$$/2.26/ \quad A_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 2 \gamma / c_{11} + c_{22} / > 0,$$

jest spełniony zawsze .

Warunek  $A_0 > 0$  ma następującą interpretację. Traktujemy  $x_{10}, y_{10}, x_{20}$  i  $y_{20}$  jako funkcje częstości  $\gamma$ , a następnie różniczkujemy względem  $\gamma$  prawe strony równań /2.22/. W wyniku otrzymujemy układ równań:

$$/2.27/ \quad \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma} + a_{12} \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma} + a_{13} \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma} + a_{14} \frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma} &= -c_{11} x_{10} + \frac{2}{3} \gamma y_{10} \\ a_{21} \frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma} + a_{22} \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma} + a_{23} \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma} + a_{24} \frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma} &= -c_{11} y_{10} - \frac{2}{3} \gamma x_{10} \\ a_{31} \frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma} + a_{32} \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma} + a_{33} \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma} + a_{34} \frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma} &= -c_{22} x_{20} + 2 \gamma y_{20} \\ a_{41} \frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma} + a_{42} \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma} + a_{43} \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma} + a_{44} \frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma} &= -c_{22} y_{20} - 2 \gamma x_{20}. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ względem  $\frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma}, \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma}, \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma}$

i  $\frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma}$  otrzymamy:

$$/2.28/ \quad \frac{\partial x_{10}}{\partial \gamma} = \frac{D_{10}}{A_0}, \quad \frac{\partial y_{10}}{\partial \gamma} = \frac{D_{20}}{A_0}, \quad \frac{\partial x_{20}}{\partial \gamma} = \frac{D_{30}}{A_0} \quad \text{i} \quad \frac{\partial y_{20}}{\partial \gamma} = \frac{D_{40}}{A_0}.$$

gdzie  $D_{i0}$  / $i=1,2,3,4$ / są wyznacznikami otrzymanymi przez zastąpienie  $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}$  i  $a_{4i}$  w wyznaczniku  $A_0$  przez:

$$-c_{11}x_{10} + \frac{2}{3}y_{10}, \quad -c_{11}y_{10} - \frac{2}{3}x_{10}, \quad -c_{22}x_{20} + 2y_{20}, \quad -c_{22}y_{20} - 2x_{20}.$$

Ponadto mamy

$$\frac{\partial a_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \sqrt{x_{10}^2 + y_{10}^2}}{\partial \nu} = \frac{1}{a_1 A_0} /x_{10} D_{10} + y_{10} D_{20}/,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \nu} = \frac{\partial \sqrt{x_{20}^2 + y_{20}^2}}{\partial \nu} = \frac{1}{a_2 A_0} /x_{20} D_{30} + y_{20} D_{40}/.$$

Stąd dla warunku  $A_0 = 0$  granica stateczności zbiega się z punktami, dla których styczna do krzywych rezonansowych  $a_1$  i  $a_2$  w funkcji częstości wymuszenia  $\nu$  jest pionowa.

### 3. Obliczenia numeryczne.

Dla otrzymania okresowych rozwiązań równań /2.4/, a w konsekwencji i punktów równowagi równań /2.14/ albo /2.16/, prawe strony równań /2.14/ przyrównamy do zera,

$$\begin{aligned} & -c_{11}\nu a_1 + \epsilon_1 a_1^2 a_2 \sin/3\psi_1 - \psi_2/ = 0 \\ /3.1/ & -\frac{1}{3}\nu^2 - \omega_{02}^2/a_1 + \beta_{11}a_1^3 + \beta_{12}a_1 a_2^2 + \epsilon_1 a_1^2 a_2 \cos/3\psi_1 - \psi_2/ = 0 \\ & -c_{22}\nu a_2 - Q_2 \sin\psi_2 - \epsilon_2 a_1^3 \sin/3\psi_1 - \psi_2/ = 0 \\ & -\nu^2 - \omega_{02}^2/a_2 - Q_2 \cos\psi_2 + \beta_{21}a_2^3 + \beta_{22}a_1^2 a_2 + \\ & \quad + \epsilon_2 a_1^3 \cos/3\psi_1 - \psi_2/ = 0. \end{aligned}$$

Jak widzimy w tym przypadku teoretycznie możliwe są dwa typy rozwiązań:

$$/3.2a/ \quad a_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_2 \neq 0,$$

$$/3.2b/ \quad a_1 \neq 0 \quad \text{i} \quad a_2 \neq 0.$$

Szczegółowe obliczenia wykonano dla następujących parametrów układu:  $P = 2$ ,  $l = 2$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\mathcal{H}^2 = 1.5$ ,  $\mathcal{J} = 1.582$ .



3.1. Rozwiązanie jednoczęstotliwościowe -  $a_2 \neq 0$  i  $a_1 = 0$ .

W pierwszej kolejności rozważymy rozwiązanie /3.2a/. Podstawiając  $a_1 = 0$  do trzeciego i czwartego równania w /3.1/ otrzymamy:

$$\begin{aligned} & -c_{22}\sqrt{a_2} - Q_2 \sin \psi_2 = 0 \\ /3.3/ \quad & -\sqrt{a_2}^2 - \omega_{02}^2/a_2 - Q_2 \cos \psi_2 + \beta_{21} a_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Równania te są podobne do tych, które wyznaczają amplitudę i kąt fazowy w układzie o jednym stopniu swobody, a stąd i drgania zawierają tylko składową o częstotliwości wymuszenia.

Badając stateczność tego rozwiązania/przy  $a_1 = 0$  a także  $x_{10} = y_{10} = 0$ , stwierdzamy, że równanie charakterystyczne /2.23/ przybiera następującą postać:

$$/3.4/ \quad (\lambda^2 + \Lambda_1^{(1)}\lambda + \Lambda_0^{(1)})(\lambda^2 + \Lambda_1^{(2)}\lambda + \Lambda_0^{(2)}) = 0,$$

gdzie

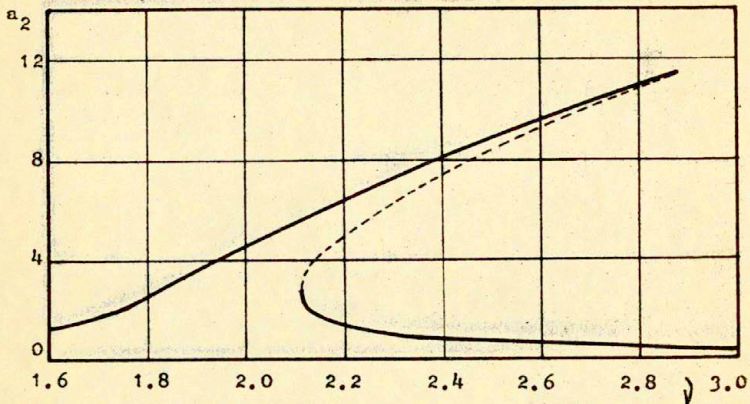
$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(1)} &= 2\sqrt{c_{11}} = a_{11} + a_{22}, \\ \Lambda_0^{(1)} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = c_{11}^2 + \left[ \frac{1}{3}\sqrt{a_2}^2 - \omega_{02}^2 - \beta_{12}a_{20}^2 \right]^2, \\ \Lambda_1^{(2)} &= a_{33} + a_{44} = 2\sqrt{c_{22}}, \\ \Lambda_0^{(2)} &= a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} = c_{22}^2 + \left[ \sqrt{a_2}^2 - \omega_{02}^2 \right]^2 - \\ & \quad - 4\beta_{21}a_{20}^2 \left[ \sqrt{a_2}^2 - \omega_{02}^2 - \frac{3}{4}\beta_{21}a_{20}^2 \right]. \end{aligned}$$

Warunki stateczności są w tym przypadku następujące:

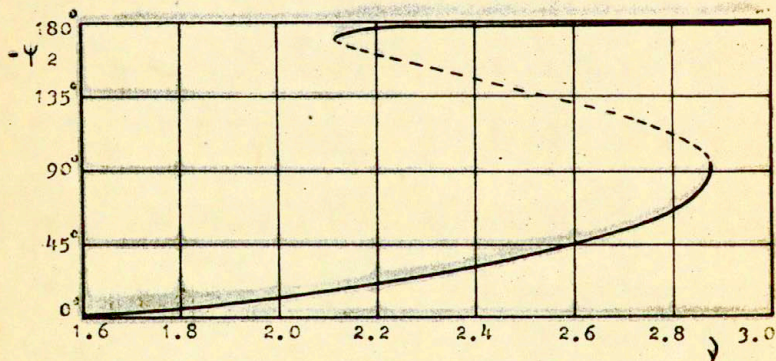
$$/3.5/ \quad \Lambda_1^{(1)} > 0, \quad \Lambda_0^{(1)} > 0, \quad \Lambda_1^{(2)} > 0, \quad \Lambda_0^{(2)} > 0,$$

z których  $\Lambda_1^{(1)} > 0$ ,  $\Lambda_1^{(2)} > 0$  i  $\Lambda_0^{(1)} > 0$  są spełnione zawsze.

Tak więc o stateczności równania decyduje tylko  $\Lambda_0^{(2)}$ . Jak już pokazano wcześniej /p. 2/ punkty graniczne  $\Lambda_0^{(2)} = 0$  pokrywają się z punktami, w których styczna do krzywej rezonansowej  $a_2$  w funkcji częstotliwości  $\sqrt{a_2}$  jest pionowa. Przedziały częstotliwości  $\sqrt{a_2}$ , w których  $\Lambda_0^{(2)} < 0$  znaleziono numerycznie. Na rys. 3.1-2 pokazano krzywą rezonansową  $a_2 = a_2(\sqrt{a_2})$  oraz zmianę kąta fazowego  $-\psi_2$  w funkcji częstotliwości  $\sqrt{a_2}$  w przypadku kiedy  $a_1 = 0$ .



Rys. 3.1. Krzywa rezonansowa  $a_2 = a_2/\sqrt{\delta}$  w przypadku rozwiązania jednoczęstotliwościowego  $/a_1 = 0/$ ,  
————— stateczna, - - - - - niestateczna.



Rys. 3.2. Zmiana kąta fazowego  $\psi_2 = \psi_2/\sqrt{\delta}$  dla rozwiązania jednoczęstotliwościowego  $/a_1 = 0/$ ,  
————— stateczna, - - - - - niestateczna.



### 3.2. Rozwiązanie dwuczęstościowe - $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ .

Jak już pokazano w punkcie 3.1 jednym z możliwych rozwiązań jest rozwiązanie jednoczęstościowe /3.2a/. Zajmiemy się obecnie drugim z możliwych rozwiązań tj. /3.2b/, bądź też rozwiązaniem /2.10/ dla  $a_1 \neq 0$  i  $a_2 \neq 0$ , które jest efektem rezonansu wewnętrznego.

W celu wyznaczenia stanów ustalonych rozwiążemy równania /3.1/. Rozwiązanie możliwe na drodze numerycznej pozwoliło określić wartości na  $a_1, a_2, \psi_1$  i  $\psi_2$  w stanie ustalonym. Na rys. 3.3a i 3.3b pokazano zależność amplitud  $a_1$  i  $a_2$  w funkcji częstotliwości  $\nu$  w przypadku rozwiązania dwuczęstościowego.

Mając określone parametry stanów ustalonych zbadamy ich stateczność. Wykorzystamy w tym celu warunki /2.25a/ i /2.25b/ określone przez kryterium Routha-Hurwitza. W warunku /2.25a/  $A_3 > 0$  jest spełnione zawsze zgodnie z /2.26/. Interpretacją geometryczną warunku  $A_0 = 0$  jest styczna pionowa do krzywych rezonansowych  $a_1$  i  $a_2$  w funkcji częstotliwości  $\nu$ . Pozostałe warunki sprawdzono na drodze obliczeń numerycznych, na podstawie których stwierdzono, że w przedziałach:

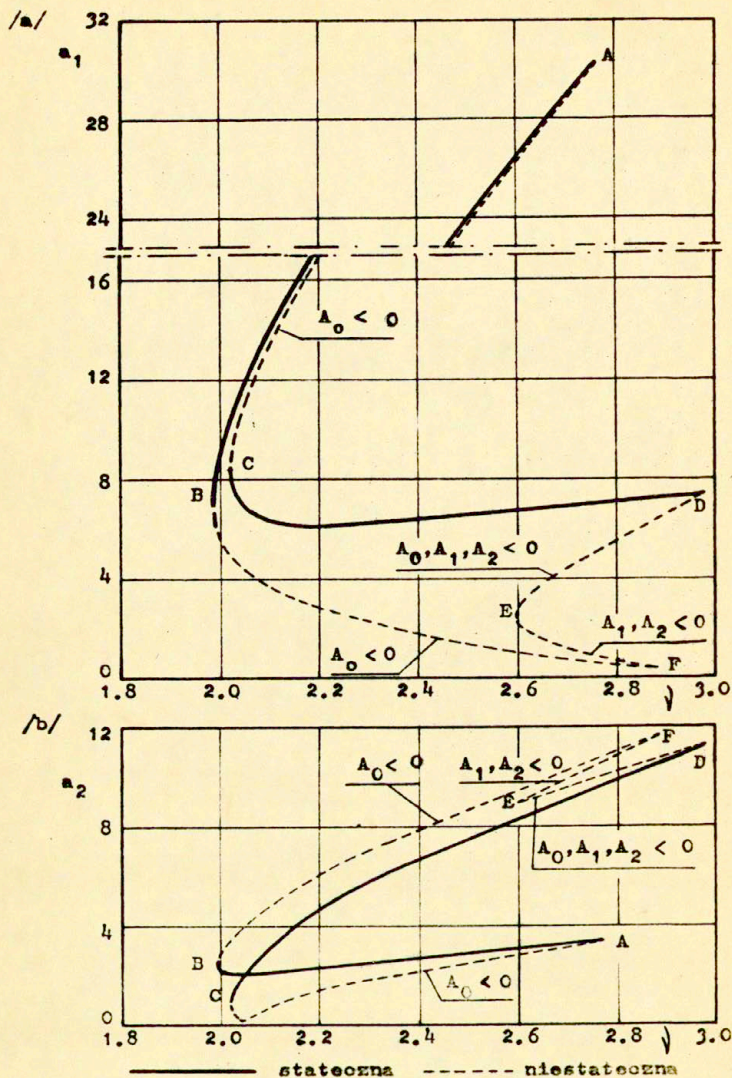
$$A - C \text{ i } B - F - A_0 < 0,$$

$$/3.6/ \quad E - F - A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0,$$

$$E - D - A_0 < 0, A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0,$$

warunki stateczności nie są spełnione. Warunek /2.25b/ w omawianym przykładzie spełniony jest w całym zakresie częstotliwości  $\nu$ , w którym istnieje rozwiązanie dwuczęstościowe.

W pozostałych przedziałach istnieją stateczne rozwiązania dwuczęstościowe. I tak w przedziale  $A - B$ , w zakresie częstotliwości  $\nu = 1.99 - 2.75$  istnieje stateczne rozwiązanie dwuczęstościowe, i pomimo że częstotliwość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstotliwości własnej w odpowiedzi jest "wciągana" pierwsza postać, która jest dominującą i osiąga amplitudę nawet dziewięciokrotnie większą od amplitudy  $a_2$ . Jej maksymalna wartość jest  $\approx 12$  podczas gdy  $a_2$  osiąga  $\approx 3.75$  /dla rozwiązania jednoczęstościowego  $a_{2max} \approx 11/$ .



Rys. 3.3. Krzywe rezonansowe : a/  $a_1 = a_1/\gamma$ , b/  $a_2 = a_2/\gamma$  w przypadku rozwiązania dwuczęściowego.



W przedziale C - D i zakresie częstości  $\lambda = 2.02 - 2.98$  istnieje także stateczne rozwiązanie dwuczęstościowe. W odróżnieniu od poprzedniego amplitudy  $a_1$  i  $a_2$  są w tym przypadku porównywalne. Wielkość amplitudy  $a_1$  w całym zakresie częstości, w którym występuje, nie ulega większym zmianom i przyjmuje wartość  $\sim 7$ , podczas gdy  $a_{2min} = 0.8$  a  $a_{2max} = 11.75$ . O tym które z tych rozwiązań otrzymane decydują ogólnie pojęte warunki początkowe i związany z tym problem obszarów przyciągania.

#### 4. Uwagi końcowe.

W niniejszej pracy analizowano odpowiedź nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody, w przypadku istnienia rezonansu wewnętrznego  $\omega_2 \approx 3\omega_1$ , gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższego rezonansu głównego. Analizę przeprowadzono wykorzystując jedną z ogólnie znanych metod badania nieliniowych układów drgających - tj. metodę uśredniania.

Stwierdzono możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań: a/ jednoczęstościowe o częstości wymuszenia  $\lambda$ , b/ dwuczęstościowe o częstościach  $\lambda/3$  i  $\lambda$ .

Pierwszy typ rozwiązania jest dobrze znany i jest taki jak w układzie bez rezonansu wewnętrznego.

Efektom rezonansu wewnętrznego jest rozwiązanie dwuczęstościowe, jakościowo i ilościowo odmienne od poprzedniego.

Zależnie od warunków początkowych możemy uzyskać dwa typy rozwiązań dwuczęstościowych. Pierwszy z nich reprezentowany jest przez odcinek C - D na rys.3.3, a wielkość amplitudy  $a_2$  jest zbliżona do tej kiedy  $a_1 = 0$ . W drugim przypadku, bardziej interesującym, dominującą w rozwiązaniu jest pierwsza postać z amplitudą  $a_1$  nawet dziewięciokrotnie większą niż amplituda  $a_2$  /odcinek A - B na rys.3.3/.

W pracy tej przeprowadzono tylko analizę teoretyczną wykorzystując metodę uśredniania, w której jak wiadomo zakładamy częstości i postaci własne stałe i takie jak dla układu liniowego.

Metoda uśredniania chociaż pozwala na badanie stanów ustalonych jak i nieustalonych może jednak dawać poważne rozbieżności z wynikami eksperymentalnymi bądź uzyskanymi na maszynie analogowej, a głównym powodem tych rozbieżności jest przyjęcie postaci drgań układu nieliniowego takich jak dla układu liniowego.

Dlatego też celowym wydaje się przeprowadzić analizę badanego układu wykorzystując metodę Ritz'a - jeśli badamy tylko stany ustalone, bądź kombinowaną metodę Ritz-uśredniania - nadając się do badania stanów ustalonych i nieustalonych. Następnie przeprowadzić analizę układu na maszynie analogowej /modelując równania /2.4/ bądź /2.6//, porównać wyniki osiągnięte trzema metodami i określić przydatność poszczególnych metod przy badaniu nieliniowych układów drgających w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego.

Zasygnalizowane zagadnienie zostanie zbadane w części II pracy.

Obliczenia numeryczne i ich wyniki przedstawione w tej pracy wykonano przy pomocy maszyny cyfrowej SM-4.



L I T E R A T U R A

- [1] J. Bajkowski, W. Szemplińska-Stupnicka: Zagadnienie rezonansów wewnętrznych w nieliniowych układach drgających, Prace IPPT PAN 19/1982, str. 1-44.
- [2] Ali H. Nayfeh, Dean T. Mook, S. Sridhar: Nonlinear analysis of the forced response of structural elements, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 55, No. 2, February 1974.
- [3] Ali H. Nayfeh, Dean T. Mook, D. W. Lobitz: Numerical-Perturbation for the Nonlinear Analysis of Structural Vibrations, AIAA Journal, Vol. 12, No. 9, Sept. 1974, pp. 1222-1228.
- [4] P. R. Sethna: Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems, J. of Appl. Mech., March 1960, pp. 187-195.
- [5] A. Tondl: Some Problems of Rotor Dynamics, Publishing House of the CAS, Prague 1965.
- [6] T. Yamamoto, K. Yasuda, I. Nagasaka: On the Internal Resonance in Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System, Bull. of the JSME, Vol. 20, No. 147, Sept. 1977, pp. 1093-1100.
- [7] А. Тондл: Автоколебания механических систем, Изд. МИР, Москва 1979.

S P I S T R E Ś C I

	str.
1. Wstęp . . . . .	3
2. Równania ruchu i badanie rezonansu wewnętrznego . . . metodą усредniania . . . . .	5
3. Obliczenia numeryczne . . . . .	14
3.1. Rozwiązanie jednoczęstościowe - $a_2 \neq 0$ i $a_1 = 0$ . . .	15
3.2. Rozwiązanie dwuczęstościowe - $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ . . .	17
4. Uwagi końcowe . . . . .	19
5. Literatura . . . . .	21