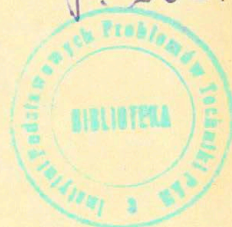


3.31 — propagacja fal elektromagnetycznych, ośrodki anizotropowe

Jacek Zawistowski

WARUNEK OSTRZA DLA JEDNOLITEGO
ASYMPTOTYCZNEGO ROZWIĄZANIA
PROBLEMU DYFRAKCJI POLA
LINIOWEGO ŹRÓDŁA NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE
W OŚRODKU JEDNOOSIOWYM

12 / 1982



WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 190

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 marca 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 12/1982



57062



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. o,75. Ark.druk.1,5

Oddano do drukarni w kwietniu 1982 r.

Nr zamówienia 137/0/82

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

WARUNEK OSTRZA DLA JEDNOLITEGO ASYMPTOTYCZNEGO ROZWIĄZANIA
PROBLEMU DYFRAKЦИИ POLA LINIOWEGO ŹRÓDŁA
NA PÓŁPŁASZCZYZNIE W OŚRODKU JEDNOOSIOWYM

Jacek Zawistowski

Streszczenie

Zbadany został warunek ostrza dla jednolitego asymptotycznego rozwiązania istotnie wektorowego problemu dyfrakcji w języku potencjałów Hertza. Użyta została metoda potencjałów pomocniczych i rozkładu pola na składowe TE i TM.

1. Wstęp

W pracy [1] zostało przedstawione na konkretnym przykładzie rozszerzenie jednolitej asymptotycznej teorii dyfrakcji [2] (UAT - Uniform Asymptotic Theory) na przypadek wektorowy. Posłużono się twierdzeniem [3] o rozkładzie pola elektromagnetycznego na składowe TE i TM oraz potencjałami Hertza, dla których stosuje się skalarne sformułowanie UAT [2]. Istotną trudność w tej konstrukcji stanowi spełnienie warunków brzegowych, a w szczególności warunku ostrza. Pokonaniu jej służy metoda S. Przeździeckiego [4] syntezy wektorowego rozwiązania z pomocniczych rozwiązań skalarnych. Przypadek badany w [1], którego analizę kontynuujemy niżej, jest na tyle prosty, że potrafimy znaleźć ściśle rozwiązanie. Z drugiej strony jest wystarczająco skomplikowany. Anizotropia ośrodka pozwala lepiej unaocznic strukturę rozwiązania, gdyż unikamy degeneracji typowej dla ośrodka izotropowego. Trójwymiarowość problemu (sfazowane źródło) powoduje, że problem jest istotnie wektorowy, tzn. nie daje się zredukować do niesprzężonych problemów skalarnych.

2. Sformułowanie problemu

Rozważamy ośrodek anizotropowy jednoosiowy opisany tensorami przenikalności, które w odpowiednim układzie współrzędnych kartezjańskich przyjmują postać

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon_a \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \mu & \\ & & \mu_a \end{pmatrix} \quad (1)$$

gdzie $\epsilon_a \neq \epsilon$, $\mu_a \neq \mu$. Przez \vec{n} oznaczymy wektor jednostkowy skierowany wzdłuż wyróżnionej osi x_3 . Obiektem rozpraszającym jest doskonale przewodząca półpłaszczyzna umieszczona prostopadle do wyróżnionej osi, określona przez związki $x_3 = 0$, $x_2 \leq 0$.

Dowolne pole elektromagnetyczne, spełniające jednorodne równania Maxwella (zależność od czasu harmoniczna $e^{-i\omega t}$)

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \vec{E}, \quad \nabla \times \vec{E} = i\omega \hat{\mu} \vec{H} \quad (2)$$

w jednoosiowym ośrodku, może być rozłożone na składowe \vec{E}^{TE} , \vec{H}^{TE} oraz \vec{E}^{TM} , \vec{H}^{TM} spełniające (2), przy czym składowe typu TE spełniają warunek $\vec{E}^{TE} \cdot \vec{n} = 0$, składowe zaś typu TM warunek $\vec{H}^{TM} \cdot \vec{n} = 0$. Każda z tych składowych może być wyrażona przez jedną z dwóch funkcji spełniających równanie drugiego rzędu typu równania Helmholtza [3,4]. Dla składowej TE

$$\vec{E}^{TE} = -i\omega \mu \nabla \times u \vec{n}, \quad \vec{H}^{TE} = \mu \hat{\mu}^{-1} \nabla \times \nabla \times u \vec{n} \quad (3)$$

gdzie magnetyczny potencjał Hertza spełnia

$$\Delta_m u + k_m^2 u = 0, \quad \text{gdzie } k_m^2 = \omega^2 \epsilon \mu_a, \quad \Delta_m = \mu^{-1} \nabla \cdot \hat{\mu} \cdot \nabla \quad (4)$$

Dla składowej TM

$$\vec{H}^{TM} = -i\omega \epsilon \nabla \times u \vec{n}, \quad \vec{E}^{TM} = \epsilon \hat{\epsilon}^{-1} \nabla \times \nabla \times u \vec{n} \quad (5)$$

gdzie elektryczny potencjał Hertza spełnia

$$\Delta_e v + k_e^2 v = 0 \quad (6)$$

gdzie $k_e^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu$, $\Delta_e = \epsilon^{-1} \nabla \cdot \hat{\epsilon} \cdot \nabla$

Powyższy rozkład na składowe TE i TM jest niejednoznaczny. Można go zmienić odejmując od jednego typu (np. TM) i dodając do drugiego (np. TE) pole typu TEM, które jest jednocześnie typu TE oraz TM. Właśnie ta dowolność rozkładu leży u podstaw metody potencjałów pomocniczych S. Przeździeckiego.

Pole padające zadajemy jako pole typu TE promieniowane przez liniowe źródło zbudowane z sfazowanych dipoli magnetycznych o gęstości momentu dipolowego

$$\vec{p}_m = p_m \cdot \vec{n} \cdot e^{ik_m \alpha x_1} \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}) \quad (7)$$

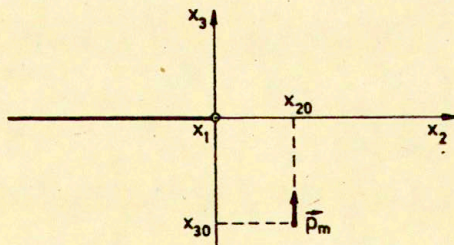
gdzie zakładamy $|\alpha| < 1$ oraz $x_{30} < 0$. Takie pole spełnia niejednorodne równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = i\omega \hat{\mu} \vec{H} + i\omega p_m \quad (8)$$

a odpowiedni magnetyczny potencjał Hertza

$$\Delta_m u + k_m^2 u = p_m \mu^{-1} e^{ik_m \alpha x_1} \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}) \quad (9)$$

Sytuację fizyczną przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Przekrój w płaszczyźnie $x_1 = \text{const}$

Zmienne x , oraz x_2 i x_3 w równaniu (9) separują się i możemy natychmiast napisać rozwiązanie tego równania, które traktujemy jako zadaną falę padającą

$$u_{ei} = -\frac{i}{4} P e^{ik_m \alpha x_1} H_0^{(1)}(k_m \chi g_{ms}) \quad (10)$$

gdzie

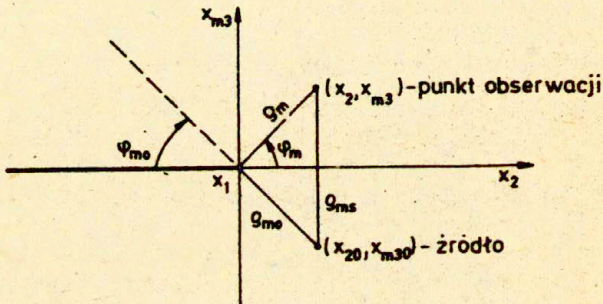
$$P = p_m (\mu \mu_a)^{-1/2}, \quad \chi = (1 - \alpha^2)^{1/2}$$

$$g_{ms} = [(x_2 - x_{20})^2 + \mu \mu_a^{-1} (x_3 - x_{30})^2]^{1/2}$$

Zamiana zmiennych

$$x_{m3} = \mu^{1/2} \mu_a^{-1/2} x_3 \quad (11)$$

sprowadza formalnie nasz problem anizotropowy do izotropowego przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2. Przekrój w płaszczyźnie $x_1 = \text{const}$

gdzie

$$g_m = (x_2^2 + x_{m3}^2)^{1/2}, \quad g_{m0} = (x_{20}^2 + x_{m30}^2)^{1/2}, \quad x_{m30} = \mu^{1/2} \mu_a^{-1/2} x_{30} \quad (12)$$

oraz

$$x_2 = g_m \cos \varphi_m, \quad x_{m3} = g_m \sin \varphi_m$$

$$x_{20} = g_{m0} \cos \varphi_{m0}, \quad x_{m30} = -g_{m0} \sin \varphi_{m0} \quad (13)$$

Zatem

$$g_{ms} = [g_m^2 + g_{m0}^2 - 2g_m g_{m0} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0})]^{1/2} \quad (14)$$

Aby problem wyznaczenia całkowitego pola posiadał jednoznaczne rozwiązanie, niezbędne jest przyjęcie następujących warunków. Rozwiązanie musi spełniać:

1. Równanie Maxwella (8).

2. Warunek brzegowy $\vec{E} \times \vec{n} = 0$ dla $x_3 = 0$, $x_2 \leq 0$

3. Warunek ostrza $|\vec{H}|, |\vec{E}| = O(q^{-1})$ dla $q = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0$

4. Warunek wypromieniowania: pola \vec{E}, \vec{H} zależą analitycznie od k_e i k_m w pewnym otoczeniu interesujących nas wartości k_e i k_m oraz dla $J_m k_e > 0$, $J_m k_m > 0$ zachodzi $\vec{E}, \vec{H} \rightarrow 0$, gdy $\zeta \rightarrow \infty$

W przypadku półpłaszczyzny $|\vec{E}|, |\vec{H}| = O(q^{-1})$, czyli $|\vec{E}|, |\vec{H}| \sim \text{const} \cdot q^{-1+\varepsilon}$, gdzie $\varepsilon > 0$ można dokładniej sprecyzować. Zgodnie z [5] $\varepsilon = 1/2$, tzn. $|\vec{E}|, |\vec{H}| \sim q^{-1/2}$. Ze względu na związki (3) i (5) warunek powyższy oznacza, że

$$u, v \sim q^{3/2} \quad \text{dla } q \rightarrow 0 \quad (15)$$

Ponieważ UAT sformułowana w [2] zapewnia tylko, że $u = O(1)$ (skalarny warunek ostrza), czyli $u \sim q^\varepsilon$, gdzie $\varepsilon \geq 0$, więc spełnienie warunku ostrza stanowi największą trudność w naszej konstrukcji.

3. Rozwiązanie ścisłe

Naszkiecujemy krótko konstrukcję ścisłego rozwiązania przedstawioną w [1]. Idea jest ta sama zarówno dla rozwiązania ścisłego jak i asymptotycznego.

Pole padające u_0 (10) jest typu TE, zatem i w pełnym polu musi wystąpić składowa TE. Bardzo łatwo jest znaleźć rozwiązanie u_0 typu TE następującego problemu pomocniczego:

1*. Pole padające u_0 (10).

2*. u_0 spełnia równanie (9).

3*. u_0 spełnia warunek Dirichleta $u_0 = 0$ dla $x_3 = 0$, $x_2 \leq 0$

4*. $u_0 = O(1)$ dla $q \rightarrow 0$.

5*. $u_0(k_m)$ jest analityczne oraz $u_0 \rightarrow 0$ dla $J_m k_m > 0$, $\epsilon \rightarrow \infty$

W tym celu dokonamy zamiany zmiennych (11), która redukuje nasz problem do przypadku izotropowego (problem rozpraszania dla równania Helmholtza). Korzystając z [6] można napisać rozwiązanie w postaci szeregu:

$$u_0 = -\frac{i}{2} P e^{i k_m \alpha x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu/2}^{(1)}(k_m \chi g_{m0}) J_{\nu/2}(k_m \chi g_m) \sin^{\nu/2}(\varphi_{m0} - \pi) \sin^{\nu/2}(\varphi_m - \pi) \quad (16a)$$

$$\text{dla } g_m < g_{m0}$$

oraz

$$u_0 = -\frac{i}{2} P e^{i k_m \alpha x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu/2}(k_m \chi g_{m0}) H_{\nu/2}^{(1)}(k_m \chi g_m) \sin^{\nu/2}(\varphi_{m0} - \pi) \sin^{\nu/2}(\varphi_m - \pi) \quad (16b)$$

$$\text{dla } g_m \geq g_{m0}$$

Powyższe rozwiązanie u_0 typu TE spełnia warunki 1*, 2*, 3*, 4*, zatem pole generowane przez u_0 spełnia warunki 1, 2, 4, ale nie spełnia warunku 3, gdyż nie zachodzi (15). Zatem u_0 nie jest dobrym rozwiązaniem problemu wyjściowego. Niemniej jednak posłuży nam do konstrukcji tego rozwiązania. W tym celu zbadajmy zachowanie u_0 w otoczeniu ostrza. Dla $g_m \rightarrow 0$ wkład do u_0 daje w (16a) tylko wyraz $\nu = 1$. Ponieważ

$$H_{1/2}^{(1)}(k_m \chi g_{m0}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \frac{e^{i k_m \chi g_{m0}}}{\sqrt{k_m \chi g_{m0}}}$$

więc

$$u_0 = -\pi^{-1} g_{m0}^{-1/2} e^{i k_m \chi g_{m0}} e^{i k_m \alpha x_1} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \cdot g_m^{1/2} + O(g_m) \quad (17)$$

Otrzymaliśmy zachowanie się $\sim g_m^{1/2}$ niezgodne z (15). Aby ominąć tę trudność, wykorzystamy wspomnianą wyżej niejednoznaczność rozkładu pola na składowe TE i TM.

Do pola padającego typu TE generowanego przez n_{oi} (10) doda-

my pole TEM generowane przez u_n , tak je dobierając, by otrzymane dla u_n rozwiązanie u_n zniósło złe zachowanie $\sim g_m^{1/2}$ w u_0 . Jednocześnie trzeba to samo pole TEM odjąć od składowej IM pola padającego, która była równa zero. Pojawia się w ten sposób składowa IM opisana potencjałem v_n będąca rozwiązaniem problemu dyfrakcyjnego z falą padającą v_n . Zgodnie z [4] wprowadzamy pomocnicze fale padające TEM generowane (jako składowa TE) potencjałami Hertza

$$u_{ni} = A_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{-ik_m [(-1)^n i \alpha x_2 - \gamma m_3]} = A_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{-ik_m g_m \cos(\varphi_m + \varphi_{mn})} \quad (18)$$

gdzie $n = 1, 2$, $(-1)^n i \alpha = \kappa \cos \varphi_{mn}$, $1 = \kappa \sin \varphi_{mn}$

Równanie (18) przedstawia niejednorodną falę płaską, φ_{mn} zaś zespolone kąty padania. Amplitudy A_n są dowolne, możemy je tak dobrać, by skasować złe zachowanie $\sim g_m^{1/2}$. Potrzebne są dwie fale (18), aby również w składowej IM można było skasować zachowanie $\sim g_m^{1/2}$ (tzn. między składowymi v_1 i v_2 , gdyż $v_{0i} = 0$).

Trzeba znaleźć rozwiązanie u_n problemu dyfrakcyjnego (4) dla fal padających (18) z warunkiem brzegowym Dirichleta $u_n = 0$ dla $x_3 = 0$, $x_2 \leq 0$. Rozwiązania te otrzymujemy przez przedłużenie analityczne w dziedzinę zespolonych kątów padania (porównaj [7]) rozwiązania problemu z rzeczywistymi kątami padania równymi $\text{Re } \varphi_{mn}$. Zgodnie z [6]

$$u_n = A_n 2 e^{ik_m \alpha x_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-i\nu\pi/4} J_{\nu/2}(k_m \kappa g_m) \sin^{\nu/2}(\varphi_{mn} + \pi) \sin^{\nu/2}(\pi - \varphi_m) \quad (19)$$

Zachowanie asymptotyczne (19) dla $g_m \rightarrow 0$ jest dane przez [8]

$$u_n = A_n 2^{3/2} \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (k_m \kappa)^{1/2} e^{ik_m \alpha x_1} \cos \frac{\varphi_{mn}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2} g_m^{1/2} + O(g_m) \quad (20)$$

Zatem dobierając amplitudy A_n , żeby

$$A_1 \cos \frac{\varphi_{m1}}{2} + A_2 \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{i\pi/4} (k_m \kappa g_{m0})^{-1/2} e^{ik_m \kappa g_{m0}} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \quad (21)$$

otrzymujemy pole TE odpowiadające

$$u = u_0 + u_1 + u_2 \quad (22)$$

spełniająca warunek ostrza 3, gdyż u spełnia (15). Spełniony jest również warunek brzegowy 2. Natomiast u nie spełnia warunku wypromieniowania, gdyż dodaliśmy pomocniczą falę padającą u_{ni} (niejednorodna fala płaska - źródła w ∞). To, co dodaliśmy, trzeba odjąć, aby nie zmienić wyjściowego problemu - spełniony jest wówczas warunek wypromieniowania. Pola TEM traktowane jako składowe TE generowane potencjałami u_{ni} (18) można potraktować jako składowe TM (z przeciwnym znakiem) zadane potencjałami Hertza

$$\begin{aligned} u_{ni} &= A_n i(-1)^n Z e^{ik_e Y Z_a \alpha x_1} e^{-ik_e [(-1)^n i Y Z_a \alpha x_2 - x_{e3}]}, \\ &= A_n i(-1)^n Z e^{ik_e Y Z_a \alpha x_1} e^{-ik_e g_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en})} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie $n=1,2$, $x_{e3} = \varepsilon^{1/2} \varepsilon_a^{-1/2}$, $g_e = (x_2^2 + x_{e3}^2)^{1/2}$, $Z = Y^{-1} = \mu^{1/2} \varepsilon^{1/2}$,
 $Z_a = \mu_a^{1/2} \varepsilon_a^{1/2}$, kąty φ_e i φ_{en} są określone przez $x_2 = g_e \cos \varphi_e$, $x_{e3} = g_e \sin \varphi_e$,
 $(-1)^n i Y Z_a \alpha = \gamma \cos \varphi_{en}$, $1 = \gamma \sin \varphi_{en}$, $\gamma = (1 - Y^2 Z_a^2 \alpha^2)^{1/2}$
 gdy $Y^2 Z_a^2 \alpha^2 < 1$ oraz $\gamma = i(Y^2 Z_a^2 \alpha^2 - 1)^{1/2}$ gdy $Y^2 Z_a^2 \alpha^2 > 1$

Pola TEM opisane potencjałami (23) odejmują się od pól TEM opisanych potencjałami (28). Zatem spełniony jest warunek wypromieniowania i zagadnienie jest równoważne naszemu wyjściowemu problemowi, gdyż nie zmieniamy zadanego pola padającego wytworzonego przez (7).

Tak jak poprzednio znajdujemy rozwiązanie problemu dyfrakcyjnego dla równania (6) dla fal padających (23) z warunkiem brzegowym Neumanna dla $x_3 = 0$, $x_2 \leq 0$.

$$\begin{aligned} u_n &= A_n i(-1)^n 2 Z e^{ik_e Y Z_a \alpha x_1} \left[\frac{1}{2} J_0(k_e \gamma g_e) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\nu\pi/4} J_{\nu/2}(k_e \gamma g_e) \cos \frac{\nu}{2}(\varphi_{en} - \pi) \cos \frac{\nu}{2}(\varphi_e - \pi) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Zachowanie asymptotyczne dla $g_e \rightarrow 0$

$$v_n = A_n i(-1)^n 2^{3/2} Z e^{-i\pi/4} (k_e \gamma)^{1/2} e^{ik_e Y Z_e \alpha X_1} \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} \left(\frac{1}{2} + g_e^{1/2} \right) + 0(g_e) \quad (25)$$

zatem żądając

$$-A_1 \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} + A_2 \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} = 0 \quad (26)$$

zapewniamy spełnienie warunku ostrza (15) przez

$$v = v_1 + v_2 \quad (27)$$

Równania (21) i (26) można spełnić dobierając amplitudy A_n . Rozwiązując układ równań (21) i (26) otrzymujemy

$$A_1 = \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} A, \quad A_2 = \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} A \quad (28)$$

$$A = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} P e^{i\pi/4} e^{ik_m \kappa g_{m0}} (k_m \kappa g_{m0})^{-1/2} \frac{\cos \frac{\varphi_{e2}}{2}}{\cos \frac{\varphi_{e1}}{2} \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} + \cos \frac{\varphi_{e2}}{2} \sin \frac{\varphi_{e1}}{2}}$$

Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie ściśle naszego problemu rozłożone na składowe TE i TM opisane potencjałami $u = u_0 + u_1 + u_2$ oraz $v = v_1 + v_2$.

4. Rozwiązanie UAT

Skonstruujmy teraz jednolite asymptotyczne rozwiązanie naszego problemu dyfrakcyjnego zgodnie z [2]. Trzeba zacząć od rozwinięcia asymptotycznego fali padającej u_{oi} (10).

Dla $k_m \rightarrow \infty$ zachodzi [8]

$$u_{oi} \sim -\frac{i}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m S_{m0}} k_m^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (ik_m)^{-\nu} \quad (29)$$

gdzie eikonali fali padającej

$$S_{m0} = \alpha X_1 + \kappa g_{m0} \quad (30)$$

oraz współczynniki

$$a_\nu = (-1)^\nu (2\kappa q_{ms})^{-\nu-1/2} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\nu! \Gamma(-\nu+1/2)} \quad (31)$$

w szczególności

$$a_0 = (2\kappa q_{ms})^{-1/2}, \quad a_1 = \frac{1}{4} (2\kappa q_{ms})^{-3/2}, \quad a_2 = \frac{9}{32} (2\kappa q_{ms})^{-5/2} \quad (32)$$

Rozwiązanie $u = u_0 + u_1 + u_2$ budujemy z dwuwartościowych funkcji $U[2]$:

$$u = U(q_m, x_1, \varphi_m) = U(q_m, x_1, 2\pi - \varphi_m), \quad (33)$$

gdzie

$$U = U_0 + U_1 + U_2 \quad (34)$$

dane jest przez ansatz UAT [2] dla fali padającej (29)

$$U_0 \sim -\frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m \hat{S}_{m0}} k_m^{-1/2} \left[f(k_m^{1/2} \theta_{m0}) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (ik_m)^{-\nu} + ck_m^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (ik_m)^\nu \right] \quad (35)$$

gdzie eikonał fali dyfrakcyjnej $\hat{S}_{m0} = \alpha x_1 + \kappa q_{m0} + \kappa q_m$, natomiast $\theta_{m0} = (\hat{S}_{m0} - S_{m0})^{1/2} = (\kappa q_{m0} + \kappa q_m - \kappa q_{ms})^{1/2}$ - gałąź pierwiastka wybieramy tak, by $\text{sgn } \theta_{m0} = \text{sgn } \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}$,

$c = \pi^{-1/2} e^{i\pi/4}$, całka Fresnela

$$f(x) = -ice^{-ix^2} \int_{-\infty}^x e^{it^2} dt$$

Współczynniki B_ν wyznaczamy [2] z

$$B_\nu = \frac{1}{2y} \int_0^6 y [-\Delta B_{\nu-1} + \frac{\Delta a_{\nu-1}}{2\theta_{m0}}] d\delta' + \frac{a_\nu}{2\theta_{m0}} - \frac{a_\nu(0)}{2^{3/2} y \sin \zeta/2 \sin \beta} \quad (36)$$

Związek oznaczeń z pracy [2] z naszymi jest następujący:

Współrzędne cylindryczne (q_m, φ_m, x_1) wiążą się z współrzędnymi promieniowymi $(\delta, \varphi_m, \eta)$

$$\delta = \frac{g_m}{\kappa}, \quad \eta = x_1 - \frac{g_m}{\kappa} \alpha, \quad \alpha = \cos \beta, \quad \kappa = \sin \beta \quad (37)$$

Dalej

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_{m0}, \quad \zeta = \pi - \varphi_m - \varphi_{m0}, \quad \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} = \sin \zeta / 2, \\ Z_y &= -\frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} a_y, \quad v_y = -\frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} B_y \end{aligned} \quad (38)$$

oraz

$$y = \delta^{1/2} = \left(\frac{g_m}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (39)$$

Tak zbudowane pomocnicze rozwiązanie asymptotyczne u_0 nie spełnia warunku ostrza tak jak w przypadku ścisłym. Przekonujemy się o tym badając zachowanie asymptotyczne U_0 dla $g_m \rightarrow 0$. W tym celu należy rozwinąć w szereg Taylora B_y i $f(k_m^{1/2} \Theta_{m0})$ wokół $g_m = 0$. Najpierw znajdziemy rozwinięcia wielkości pomocniczych występujących w powyższych wzorach. Posłużymy się rozwinięciem [8]

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} x^k + \dots \quad (40)$$

Zgodnie z (14)

$$\begin{aligned} g_{ms} &= [g_m^2 + g_{m0}^2 - 2g_m g_{m0} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0})]^{1/2} = g_{m0} \left[1 - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) 2 \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= g_{m0} \left[1 - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{2} \sin^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^3 \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) \sin^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} g_{ms}^{-1/2} &= g_{m0}^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) 2 \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \right]^{-1/4} = \\ &= g_{m0}^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{8} (5 \cos^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) - 2) + \dots \right] \end{aligned} \quad (42)$$

oraz

$$\begin{aligned} g_{ms}^{-3/2} &= g_{m0}^{-3/2} \left[1 - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) 2 \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \right]^{-3/4} = \\ &= g_{m0}^{-3/2} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{3}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{8} (21 \cos^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) - 6) + \dots \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Natomiast

$$\theta_{m0}^{-1} = [\kappa g_m + \kappa g_{m0} - \kappa g_{ms}]^{-1/2} = (\kappa g_{m0})^{-1/2} \left[1 + \frac{g_m}{g_{m0}} - \frac{g_{ms}}{g_{m0}} \right]^{-1/2} =$$

używając (41)

$$\begin{aligned} &= (\kappa g_{m0})^{-1/2} \left[\chi + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) - \chi + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{2} \sin^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^3 \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) \sin^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \dots \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\frac{g_m}{g_{m0}} [1 + \cos(\varphi_m + \varphi_{m0})]$, korzystając z (40) i porządkując potęgi g_m/g_{m0} otrzymujemy

$$\begin{aligned} \theta_{m0}^{-1} &= \frac{(2\kappa g_m)^{-1/2}}{\cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} (5 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 1) + \dots \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \theta_{m0} &= [\kappa g_m + \kappa g_{m0} - \kappa g_{ms}]^{1/2} = (\kappa g_{m0})^{1/2} \left[1 + \frac{g_m}{g_{m0}} - \frac{g_{ms}}{g_{m0}} \right]^{1/2} = \\ &= (2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{2} - icx + \dots$$

więc korzystając z (45) mamy

$$f(k_m^{1/2} \theta_{m0}) = \frac{1}{2} + \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (2k_m \kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \quad (46)$$

Widać z tego, że we wszystkich rzędach rozwinięcia w $(ik_m)^{-1}$ pochodzących z pierwszego wyrazu (35) wystąpi w u. niedopuszczalne zachowanie $\sim g_m^{1/2}$. Wyraz stały w (46) równy 1/2 nie daje

wkładu do u_0 , ze względu na (33). W wyższych rzędach, tzn. począwszy od $(ik_m)^{-1}$, trzeba uwzględnić jeszcze wkład z B_p w najniższym rzędzie, tzn. $(ik_m)^0$, mamy

$$U_0|_{(ik_m)^0} \sim -\frac{P}{2} \pi^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa g_{m0})} (2\kappa g_{m0})^{-1/2} (2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \quad (47)$$

dla $g_m \rightarrow 0$

gdzie użyliśmy z potrzebną dokładnością

$$e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa g_{m0} + \kappa g_m)} = e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa g_{m0})} + \dots$$

oraz

$$a_0 = (2\kappa g_{m0})^{-1/2} = (2\kappa g_m)^{-1/2} + \dots$$

Potencjały pomocnicze U_1 i U_2 powinny być jednolitymi asymptotycznymi rozwinięciami potencjałów (19) z przypadku ścisłego. Dla padającej fali płaskiej (18) rozwiązanie ściśle (19) pokrywa się z jednolitym asymptotycznym rozwinięciem - problem Sommerfelda przedłużony w dziedzinę zespolonych kątów padania. Zatem

$$U_n = A_n e^{ik_m \hat{S}_m} f(k_m^{1/2} \Theta_{mn}) \quad (48)$$

gdzie $n=1,2$, $\hat{S}_m = \alpha x_1 + \kappa g_m$, $S_{mn} = \alpha x_1 - \kappa g_m \cos(\varphi_m + \varphi_{mn})$,
 $\Theta_{mn} = (\hat{S}_m - S_{mn})^{1/2} = [\kappa g_m + \kappa g_m \cos(\varphi_m + \varphi_{m0})]^{1/2} = (2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2}$
 $\arg \Theta_{mn} = \arg \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2}$

Amplitudy A_n dane są przez (28). Podobnie

$$v_n = V_n(\varphi_e) - V_n(2\pi - \varphi_e), \quad (49)$$

gdzie

$$V_n = A_n i (-1)^n e^{ik_e \hat{S}_e} f(k_e^{1/2} \Theta_{en}), \quad (50)$$

oraz

$$\hat{S}_e = YZ_a \alpha x_1 + \gamma g_e, \quad S_{en} = YZ_a \alpha x_1 - \gamma g_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en}),$$

$$\Theta_{en} = (\hat{S}_e - S_{en})^{1/2} = [\gamma g_e + \gamma g_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en})]^{1/2} = (2\gamma g_e)^{1/2} \cos \frac{\varphi_e + \varphi_{en}}{2}$$

$$\arg \Theta_{en} = \arg \cos \frac{\varphi_e + \varphi_{en}}{2}$$

Zgodnie z (28) $V_1 + V_2$ spełnia warunek ostrza.

Posługując się wzorem (8.511.5) ze str. 987 tablic [8] przekonujemy się, że $u_n = U_n(\varphi_m) - U_n(2\pi - \varphi_m)$, gdzie U_n jest dane przez (48), pokrywa się z (19).

Ponieważ

$$f(k_m^{1/2} \Theta_{mn}) = \frac{1}{2} + \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (2k_m \chi g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} + \dots \quad (51)$$

więc asymptotyczna postać U_n dająca wkład zgodnie z (33) do u_n wynosi

$$U_n \sim A_n \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m \alpha x_1} (2k_m \chi g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} + \dots \quad (52)$$

dla $g_m \rightarrow 0$

Do wykonania (33) potrzebne jest

$$\cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} - \cos \frac{2\pi - \varphi_m + \varphi_{mn}}{2} = \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} + \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{\varphi_{mn}}{2} \quad (53)$$

gdzie $n = 0, 1, 2$.

Wykorzystując wzory (28) na amplitudy A_n znajdujemy asymptotykę dla

$$u_1 + u_2 \sim P \pi^{-1} (2\chi g_{m0})^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \chi g_{m0})} (2\chi g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{\varphi_{e2}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{\varphi_{m1}}{2} + \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{\varphi_{m2}}{2}}{\cos \frac{\varphi_{m1}}{2} \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} + \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} \sin \frac{\varphi_{e1}}{2}}$$

czyli

$$u_1 + u_2 \sim P \pi^{-1} (2\chi g_{m0})^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \chi g_{m0})} (2\chi g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \quad (54)$$

dla $g_m \rightarrow 0$

Zatem potencjały pomocnicze dają wkład $\sim g_m^{1/2}$ dla $g_m \rightarrow 0$ tylko w najniższym rzędzie $(ik_m)^0$.

Korzystając z (53) otrzymujemy z (47)

$$u_0 \Big|_{(ik_m)^0} \sim -\pi^{-1} (2 \kappa g_{m0})^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa g_{m0})} (2 \kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \quad (55)$$

dla $g_m \rightarrow 0$

co znosi się z (54). Zatem w najniższym rzędzie $(ik_m)^0$ warunek ostrza jest spełniony.

Zbadanie warunku ostrza w wyższych rzędach $(ik_m)^{\nu}$ wymaga znalezienia asymptotyki $B_{\nu-1}$ dla $g_m \rightarrow 0$. Ponieważ potencjały pomocnicze nie dają wkładu w wyższych rzędach, więc spełnienie warunku ostrza jest możliwe tylko wówczas, gdy wkłady $\sim g_m^{1/2}$ z wyrazów rzędu $(ik_m)^{\nu-1}$ zawierających B_ν zniósł się z wkładami $\sim g_m^{1/2}$ z wyrazów tego samego rzędu $(ik_m)^{\nu-1}$ zawierających $a_{\nu,i}$. Zatem warunek ostrza w wyższych rzędach musi być spełniony już na poziomie skalarnego rozwiązania UAT.

Sprawdzimy tę hipotezę w kolejnych dwu rzędach $(ik_m)^{-1}$ oraz $(ik_m)^{-2}$. W tym celu potrzebna jest znajomość asymptotyki B_0 oraz B_1 dla $g_m \rightarrow 0$.

Zgodnie z (36)

$$B_0 = \frac{a_0(\beta)}{2\theta_{m0}(\beta)} - \frac{a_0(0)}{2^{3/2} y(\beta) \sin \zeta / 2 \sin \beta} \quad (56)$$

Korzystając z (32), (39), (42) i (44) otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{(2 \kappa g_{m0})^{-1/2}}{2\theta_{m0}} - \frac{(2 \kappa g_m)^{-1/2}}{2(2 \kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} = \\ &= \frac{(2 \kappa g_{m0})^{-1} (2 \kappa g_m)^{1/2}}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{8} (5 \cos^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) - 2) + \dots \right] \\ &\cdot \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} (5 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 1) + \dots \right] - \frac{(2 \kappa g_{m0})^{-1/2} (2 \kappa g_m)^{1/2}}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \\ &= \frac{(2 \kappa g_{m0})^{-1/2} (2 \kappa g_m)^{-1/2}}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \left[\chi - \chi + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \left(\frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right)^2 \left(\frac{1}{8} (5 \cos^2(\varphi_m + \varphi_{m0}) - 2) + \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} (5 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 1) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Porządkując wyrazy otrzymujemy

$$B_0 = (2\kappa g_{m0})^{-3/2} (2\kappa g_m)^{1/2} \frac{1}{4} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \\ + (2\kappa g_{m0})^{-5/2} (2\kappa g_m)^{3/2} \frac{1}{16} (11 \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 8 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}) + \dots \quad (57)$$

Dokładność B_0 do $g_m^{3/2}$ jest niezbędna do obliczenia B_1 z dokładnością do $g_m^{1/2}$.

Z (36) mamy

$$B_1 = \frac{1}{2y(\zeta)} \int_0^\zeta y(\zeta') \left[-\Delta B_0(\zeta') - \frac{\Delta a_0(\zeta')}{2\theta_{m0}(\zeta')} \right] d\zeta' + \frac{a_1(\zeta)}{2\theta_{m0}(\zeta)} + \\ - \frac{a_1(0)}{2^{3/2} y(\zeta) \sin \zeta / 2 \sin \beta} \quad (58)$$

Poszczególne wkłady do (58) wynoszą (z odpowiednią dokładnością):

$$\frac{a_1(\zeta)}{2\theta_{m0}(\zeta)} - \frac{a_1(0)}{2^{3/2} y(\zeta) \sin \zeta / 2 \sin \beta} = \frac{\frac{1}{4} (2\kappa g_{m0})^{-3/2}}{2\theta_{m0}} - \frac{\frac{1}{4} (2\kappa g_{m0})^{-3/2}}{2(2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} =$$

podstawiając (43) i (44)

$$= \frac{(2\kappa g_{m0})^{-3/2} (2\kappa g_m)^{-1/2}}{8 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{3}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{m0}) + \dots \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{g_m}{g_{m0}} \right) \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \right] =$$

wymnażając szeregi i grupując wyrazy

$$= (2\kappa g_{m0})^{-5/2} (2\kappa g_m)^{1/2} \frac{1}{16} (5 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 2 \cos^{-1} \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}) + \dots \quad (59)$$

Korzystając z (57)

$$\Delta B_0 = \left[\frac{1}{g_m} \frac{\partial}{\partial g_m} \left(g_m \frac{\partial}{\partial g_m} \right) + \frac{1}{g_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_m^2} + \frac{\partial}{\partial \chi_1^2} \right] B_0 = (2\kappa g_{m0})^{-3/2} (2\kappa g_m)^{-1/2} \cdot \\ \cdot \frac{\chi^2}{8} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \quad (60)$$

Podobnie korzystając z (42)

$$\Delta a_0 = (2\kappa g_{m0})^{-5/2} \chi^2 + \dots$$

skąd na podstawie (44)

$$\frac{\Delta a_0}{2\theta_{m0}} = (2\kappa g_{m0})^{-5/2} (2\kappa g_m)^{-1/2} \frac{\chi^2}{2} \cos^{-1} \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \dots \quad (61)$$

Ponieważ $y = \sigma^{1/2} = \left(\frac{g_m}{\chi} \right)^{1/2}$, zatem funkcja podcałkowa w (58) wynosi

$$(2\kappa g_{m0})^{-5/2} \chi^{-1/2} \left[-\frac{1}{8} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \right]$$

miara zaś $d\delta = \frac{d\varrho_m}{\kappa}$. Zatem

$$\frac{1}{2\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\Delta B_0 + \frac{\Delta a_0}{2\Theta_{m_0}} \right] d\delta = (2\kappa \varrho_{m_0})^{-5/2} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} \cdot \left[-\frac{1}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} + \frac{1}{8} \cos^{-1} \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} \right] + \dots \quad (62)$$

Z (62) oraz (59) mamy ostatecznie

$$B_1 = (2\kappa \varrho_{m_0})^{-5/2} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} \frac{9}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} + \dots \quad (63)$$

Na podstawie (57) i (63) można odgadnąć

$$B_\nu = (2\kappa \varrho_{m_0})^{-\nu-3/2} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} W \cdot \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} + \dots \quad (64)$$

gdzie

$$W = (-1)^{\nu+1} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{(\nu+1)! \Gamma(-\nu-1/2)} = (-1)^\nu \frac{(\nu+1/2)^2}{(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\nu! \Gamma(-\nu+1/2)}$$

Nie można jednak udowodnić (64) przez indukcję ze względu na rekurencyjny charakter wzoru (36) wymagający znajomości B_ν z dokładnością do $\varrho_m^{3/2}$ dla obliczenia $B_{\nu+1}$ z dokładnością do $\varrho_m^{1/2}$.

Znajomość B_0 i B_1 z (57) i (63) pozwala sprawdzić warunek ostrza w rzędach $(ik_m)^{-1}$ oraz $(ik_m)^{-2}$. W rzędzie $(ik_m)^{-1}$ wkład typu $\varrho_m^{1/2}$ (pomijamy wyraz niezależny od φ_m , który nie daje wkładu do (33))

$$\begin{aligned} U_0 \Big|_{(ik_m)^{-1}, \varrho_m^{1/2}} &= -\frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa \varrho_{m_0})} \cdot \\ &\cdot \underbrace{\left[\pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} \cdot \frac{1}{4} (2\kappa \varrho_{m_0})^{-3/2} (ik_m)^{-1} + \right.}_{f(k_m^{1/2} \Theta_{m_0})} \underbrace{\left. a_1(0) \right]}_{B_0} \\ &+ \pi^{-1/2} e^{i\pi/4} k_m^{-1} (2\kappa \varrho_{m_0})^{-3/2} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} \frac{1}{4} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} \Big] = \\ &= -\frac{1}{8} P \pi^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa \varrho_{m_0})} (2\kappa \varrho_{m_0})^{-3/2} (2\kappa \varrho_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m_0}}{2} \left[(ik_m)^{-1} - (ik_m)^{-1} \right] = 0 \end{aligned}$$

Podobnie w rzędzie $(ik_m)^{-2}$

$$U_0 \Big|_{(ik_m)^{-2}, \varrho_m^{1/2}} = -\frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa \varrho_m)}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\underbrace{\pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}}_{f(k_m^{1/2} \theta_{m0})} \cdot \underbrace{\frac{9}{32} (2\kappa g_{m0})^{-5/2} \cdot (ik_m)^{-2}}_{a_2(0)} + \right. \\
 & \left. + \pi^{-1/2} e^{i\pi/4} k_m^{-1} (2\kappa g_m)^{-5/2} (2\kappa g_m)^{1/2} \frac{9}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} (ik_m)^{-1} \right] = \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{B_1} \\
 & = -\frac{9}{64} P\pi^{-1} e^{ik_m(\alpha x_1 + \kappa g_{m0})} (2\kappa g_{m0})^{-5/2} (2\kappa g_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} [(ik_m)^{-2} - (ik_m)^{-1}] = 0
 \end{aligned}$$

czyli warunek ostrza jest spełniony w rzędzie $(ik_m)^{-1}$ i $(ik_m)^{-2}$.
 Na podstawie tych przykładów oczywiste jest, że warunek ostrza jest spełniony we wszystkich rzędach $(ik_m)^{-y}$ wbrew obawom wyrażonym w [1], gdyż

$$U_0 \Big|_{(ik_m)^{-y}, g_m^{1/2}} = 0 \quad (65)$$

Jednak formalny dowód wymaga pokazania (64), co jest trudne. Niemniej jednak doświadczenie zdobyte wyżej pozwoliło wykazać [9] spełnienie warunku ostrza w wyższych rzędach rozwinięcia UAT na poziomie ogólności pracy [2] (tzn. dla płaskich ekranów i dowolnych fal padających) dzięki przekształceniu wzoru (36) na B_y grupującemu B_y z a_{y+1} .

Literatura

1. S. Przeździecki, Proceedings of the Fifth Colloquium on Microwave Commutation, Vol. III ET-293, Akademiai Kiadó, Budapest 1974.
2. D.S. Ahluwalia, R.M. Lewis, J. Boersma, SIAM J. Appl. Math. 16 (1968) 783.
3. K. Bochenek, Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN Warszawa-Wrocław 1961.
4. S. Przeździecki, J. Appl. Phys. 37 (1966) 2768.
5. R. Mittra, S.W. Lee, Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan Comp. New York 1971.

6. J.J. Bowman, T.B.A. Senior, P.L.E. Uslenghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, Amsterdam 1969.
7. G.A. Deschamps, S.W. Lee, E. Gowan III, T. Fontana, Wave Motion 1 (1979) 25 North-Holland Publ. Co.
8. I.S. Gradshteyn, I.W. Ryzhik, Tablicy integralov, sum, riadov i proizvedeniy, Moskwa 1971.
9. J. Zawistowski, Warunek ostrza w wyższych rzędach UAT dla płaskich ekranów, Prace IPPT Warszawa 1982 (w przygotowaniu).