

Adam Ciarkowski

JEDNOLITE
ROZWINIĘCIE ASYMPTOTYCZNE
NIEPEŁNEJ CAŁKI DYFRAKCYJNEJ

10/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1984 r.



56939



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,75 Ark.druk. 1

Oddano do drukarni w marcu 1985 r.

Nr zamówienia 164/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

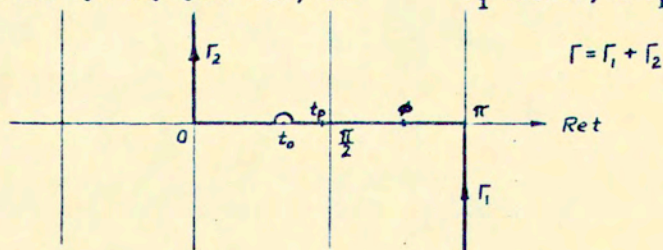
JEDNOLITE ROZWIWIĘCIE ASYMPTOTYCZNE NIEPEŁNEJ
CAŁKI DYFRAKCYJNEJ

Streszczenie

W pracy rozpatrzono klasę niepełnych całek dyfrakcyjnych, mających trzy punkty krytyczne: punkt siodłowy, biegun i punkt końcowy /początkowy/ całkowania. Dla tych całek skonstruowano jednolite rozwinięcie asymptotyczne, obowiązujące niezależnie od tego, czy punkt siodłowy leży z dala, czy też pokrywa się z którymś z pozostałych punktów krytycznych. W przypadku gdy wszystkie punkty krytyczne leżą z dala od siebie, rozwinięcie jednolite zredukowano do znacznie prostszego rozwinięcia niejednolitego.

Wstęp

W płaszczyźnie zmiennej zespolonej $t (=t_r + it_i)$ rozpatrzmy kontur Γ składający się z trzech odcinków: pionowego $-\infty < t_i < 0$, $t_r = \pi$, poziomego $t_i = 0$, $-\pi \leq t_r \leq 0$ z małym łukiem wokół punktu $t = t_0$ i pionowego $0 < t_i < \infty$, $t_r = 0$, /Rys.1/. Obieg konturu wybrany jest tak, że t_1 rośnie, a t_r



Rys.1

maleje. Kontur taki często występuje w rozwiązaniach problemów dyfrakcyjnych. W szczególności klasyczne rozwiązanie problemu dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie, po raz pierwszy otrzymane przez Sommerfelda, wyraża się przez całki określone na tym konturze.

Weźmy pod uwagę klasę całek postaci

$$F(\varrho, \phi; t_0, k) = \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{ik\varrho \cos(t-\phi)} dt \quad /1/$$

Całki tego typu pojawiają się w zagadnieniach dyfrakcji elektromagnetycznych fal płaskich, stąd nazywane są w literaturze całkami dyfrakcyjnymi [1]. W tych całkach ϱ i ϕ są współrzędnymi biegunowymi punktu obserwacji, t_0 opisuje kąt pod jakim propaguje się fala płaska występująca w zagadnieniu, wreszcie k jest liczbą falową. W praktycznych zagadnieniach $0 < \phi < \pi$, $0 < t_0 < 2\pi$. /Rys.1/.

W przypadku gdy iloczyn $k\varrho$ jest znacznie większy od jedności, tj. w obszarze odległym od początku układu co najmniej o kilka długości fal, a ponadto gdy funkcja $g(t)$ jest odpowiednio regularna, wówczas całkę F możemy oproksymować prostymi formułami, rozwijając ją asymptotycznie względem dużego parametru $k\varrho$. Można użyć do tego celu jednej z klasycznych metod rozwijania asymptotycznego całek, np. metody punktu siodłowego lub metody fazy stacjonarnej. Łatwo się wtedy przekonać, że uzyskane rozwinięcie asymptotyczne zawodzi, gdy $\phi = t_0$, tj. gdy dwa punkty krytyczne tej całki: punkt siodłowy $t = \phi$ i biegun $t = t_0$ pokrywają się. Fizycznie sytuacja ta odpowiada znalezieniu się punktu obserwacji na granicy cienia fali płaskiej $e^{ik\varrho \cos(t_0 - \phi)}$. Tego typu rozwinięcia asymptotyczne nazywamy niejednolitymi, bowiem nie stosują się one w pewnych obszarach.

Innym rodzajem rozwinięć asymptotycznych są tzw. rozwinięcia jednolite. Rozwinięcia te obowiązują przy dowolnych położeniach punktu obserwacji jeśli tylko parametr $k\varrho$ jest duży.

ceną za uzyskanie jednolitości jest bardziej złożona postać rozwinięcia jednolitego w porównaniu z rozwinięciem niejednolitym. Z reguły funkcje względem których dokonujemy rozwinięcia jednolitego całki wyjściowej mają również postać całek branych wzdłuż tego samego konturu, ale za to ze znacznie prostszymi funkcjami podcałkowymi.

W pewnych zagadnieniach dyfrakcyjnych zdarza się, że funkcja $g(t)$ jest regularna tylko na części konturu Γ - oznaczmy ją przez C - a na pozostałej części /lub w jej otoczeniu/ na punkty osobliwe.

Wówczas dla całki wzdłuż konturu C możemy konstruować rozwinięcie jednolite względem relatywnie prostych funkcji, a dla całki wzdłuż pozostałej części konturu Γ musimy zastosować bardziej skomplikowany aparat asymptotyczny [2]. W ten sposób dochodzimy do zagadnienia konstrukcji jednolitego rozwinięcia asymptotycznego dla niepełnej całki dyfrakcyjnej, która ma postać /1/ z tą różnicą, że kontur Γ jest zastąpiony przez jego część C . Całka ta ma trzy punkty krytyczne: punkt siodłowy, biegun i punkt końcowy całkowania /zakładamy, że drugi punkt końcowy jest taki jak w konturze Γ /. W niniejszej pracy przyjmujemy, że konturem C jest kontur Γ_1 albo Γ_2 , jak na rys.1. W dalszej części pracy skonstruujemy rozwinięcia jednolite dla niepełnych całek dyfrakcyjnych wzdłuż Γ_1 i Γ_2 , a następnie zredukujemy je do rozwinięć niejednolitych.

Rozwinięcie jednolite niepełnej całki dyfrakcyjnej F_2

Weźmy pod uwagę całkę

$$F_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \quad /2/$$

Jest ona funkcją swoich parametrów: ϕ, λ, t_0 i t_p . Ostatni parametr jest punktem początkowym całkowania, o którym zakładamy, że leży na poziomej części konturu Γ , a poza tym jest dowolny. Parametr $\lambda = kq$ traktujemy jako duży i względem niego

Konstruujemy rozwinięcie jednolite i niejednolite funkcji F_2 .
Do konstrukcji rozwinięcia jednolitego użyjemy metody
Bleisteina [3].

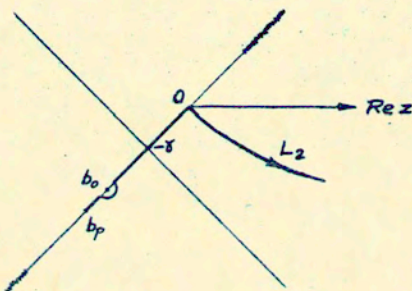
Zgodnie z tą metodą zamienimy zmienną całkowania kładąc

$$z(t) = -\delta - 2e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{t-\phi}{2}, \quad \delta = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\phi}{2} \quad /3/$$

W wyniku tej zamiany zmiennych argument funkcji wykładniczej
w /2/ transformuje się w wielomian drugiego stopnia, przy
czym prosty punkt siodłowy $t = \phi$ na płaszczyźnie t przechodzi
w prosty punkt siodłowy $z = -\delta$ na płaszczyźnie z [2].
Całka F_2 przyjmuje postać

$$F_2 = \int_{L_2} \frac{G(z)}{z-b_0} e^{-\lambda p(z;\delta)} dz \quad /4/$$

gdzie kontur L_2 przedstawiony na rys.2 jest obrazem konturu
 Γ_2 ,



Rys.2

$b_0 = z(t_0)$, $b_p = z(t_p)$, funkcja

$$G(z) = \frac{z-b_0}{t-t_0} g[t(z)] \frac{dt}{dz} \quad /5/$$

jest regularna w otoczeniu L_2 i

$$p(z;\delta) = \frac{(z+\delta)^2}{2} - i$$

W kolejnym kroku rozbijamy funkcję $G(z)$ na sumę

$$G(z) = c_0 + c_1(z-b_0) + c_2(z-b_0)(z+\delta) + (z-b_p)(z-b_0)(z+\delta)H(z) \quad /6/$$

gdzie funkcja $H(z)$ jest także regularna w otoczeniu L_2 .
Wstawiając do tej sumy kolejno $z = b_0$, $z = b_p$ i $z = -\delta$
wyznaczamy współczynniki

$$c_0 = G(b_0) \quad /7a/$$

$$c_1 = \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \quad /7b/$$

$$c_2 = \frac{1}{b_0 + \delta} \left[\frac{G(b_p) - G(b_0)}{b_p - b_0} - \frac{G(b_0) - G(-\delta)}{b_0 + \delta} \right] \quad /7c/$$

Podstawimy teraz /6/ do /4/. Po scałkowaniu przez części dostajemy

$$F_2 = c_0 \int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz + c_1 \int_{L_2} e^{-\lambda p} dz + c_2 \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_2} [H + (z-b_p)H'] e^{-\lambda p} dz \quad /8/$$

Powyższe wyrażenie jest szukanym jednolitym rozwinięciem asymptotycznym całki F_2 z dokładnością do członów rzędu λ^{-1} . Jednolitość rozwinięcia wynika z faktu, że zarówno współczynniki, jak i funkcje względem których dokonaliśmy rozwinięcia, są regularnymi funkcjami δ , a więc i kąta obserwacji ϕ .

Przekształcimy teraz całki konturowe stojące przy współczynnikach c_0 i c_1 do całek po osiach rzeczywistych. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$q = \sqrt{\lambda}(b_p - b_0) \quad v = \sqrt{\lambda}(\delta + b_0)$$

i nową zmienną całkowania

$$\xi = \sqrt{\lambda}(z - b_0) \quad /9/$$

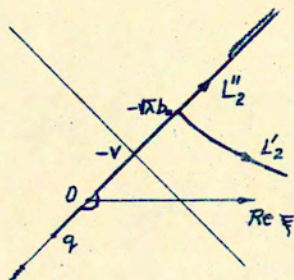
Wówczas

$$\int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz = e^{-\lambda p(b_0; \delta)} I(v) \quad /10/$$

gdzie

$$I(v) = \int_{L_2} \frac{e^{-(\frac{\xi^2}{2} + \xi v)} d\xi}{\xi} \quad /11/$$

Kontur L_2' jest obrazem konturu L_2 w wyniku zamiany zmiennej /9/, rys.3.



Rys.3

Pochodna funkcji $I(v)$ - oznaczmy ją przez $J(v)$ - jest równa

$$J(v) = I'(v) = - \int_{L_2} e^{-(\frac{\xi^2}{2} + \xi v)} d\xi$$

Założmy, że od tego momentu w dalszej części pracy $q \neq 0$. Zdeformujemy kontur L_2 do półprostej L_2'' , wychodzącej z punktu $\xi = q$ i biegnącej pod kątem $\arg \xi = \frac{\pi}{4}$ do nieskończoności /rys.3/. Wówczas

$$J(v) = -e^{\frac{v^2}{2}} \int_q^{\infty e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-\frac{(\xi+v)^2}{2}} d\xi = -\sqrt{2}i e^{\frac{v^2}{2}} \int_{\frac{q+v}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-i\xi^2} d\xi \quad /12/$$

Z drugiej strony /11/ możemy sprowadzić do postaci

$$I(v) = e^{-\frac{q^2}{2} - qv} \int_0^{\infty} \frac{e^{-[\frac{\eta^2}{2} + \eta(q+v)]}}{\eta + q} d\eta$$

zastępując kontur L_2' półprostą równoległą do osi rzeczywistej, wychodzącą z punktu $\xi = q$ i kończącą się w prawej ćwiartce. Na mocy założenia o q istnieje κ takie, że

$|q| \gg x > 0$. Ponieważ $\text{Im}\left(\frac{q^2}{2} + qv\right) = 0$, ma miejsce oszacowanie

$$|I(v)| < \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-\eta \text{Re}(q+v)} d\eta = \frac{1}{x \text{Re}(q+v)}$$

Podążmy teraz z v do nieskończoności wzdłuż promienia $\arg v = \frac{\pi}{4}$. Formalnie oznacza to, że ϕ przyjmuje wartości urojone i z wartościami tymi zmierzamy do nieskończoności. Wówczas powyższe oszacowanie daje

$$I(\infty e^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$$

Traktując tę równość jako warunek początkowy dla równania $J(v) = I'(v)$ znajdujemy z /12/

$$I(v) = \int_{-\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}^v J(t) dt = 2i \int_{\frac{\sqrt{2}i}{2}}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \int_{\eta + \frac{\sqrt{2}i}{2}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu$$

Ten wynik wraz z /10/ pokazuje, że całkę konturową $\int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz$ można przedstawić przy pomocy całki podwójnej

$$\int_{L_2} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz = 2i e^{i\lambda - \frac{v^2}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}i}{2}}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \int_{\eta + \frac{\sqrt{2}i}{2}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu \quad /13/$$

Zauważmy, że gdy punkt $z = b_p$ zmierza do nieskończoności wzdłuż promienia $\arg z = \frac{\pi}{4}$ wówczas prawa strona powyższej równości dąży do $2\sqrt{2}i e^{i\lambda - \frac{v^2}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}i}{2}}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta$. Wynik ten pokrywa się ze znanym rezultatem, gdy kontur całkowania po lewej stronie /13/ jest obrazem pełnego konturu Γ [4].

W przypadku drugiej całki natychmiast dostajemy

$$\int_{L_2} e^{-\lambda p} dz = \frac{e^{i\lambda - \frac{v^2}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \int_{L_2} e^{-(\frac{\xi^2}{2} + \xi v)} d\xi = \frac{e^{i\lambda - \frac{v^2}{2}}}{\sqrt{\lambda}} J(v)$$

lub

$$\int_{L_2} e^{-\lambda p} dz = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} \int_{\frac{q+v}{\sqrt{2}i}}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu \quad /14/$$

Znowu widzimy, że gdy $z = b_p$ dąży do nieskończoności wzdłuż promienia $\arg z = \frac{\pi}{4}$, wówczas prawa strona tej równości

redukuje się do znanego wyniku $\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{i\lambda}$.

W ten sposób zastąpiliśmy niewygodne do obliczeń całki konturowe całkami po osi rzeczywistej. Przejdziemy teraz do konstrukcji rozwinięcia niejednolitego całki F_2 .

Rozwinięcie niejednolite niepełnej całki dyfrakcyjnej F_2

Rozpatrzmy całki

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu$$

oraz

$$\hat{I} = \int_a^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \int_{\eta+b}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu \quad /15/$$

występujące w /14/ i /13/, gdzie $a = \frac{\sqrt{2i}}{\sqrt{2i}}$, $b = \frac{0}{\sqrt{2i}}$.

Rozwinięcie asymptotyczne pierwszej z tych całek, gdy $a + b \rightarrow \pm\infty$ otrzymujemy na drodze całkowania przez części

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu = \sqrt{-i\pi} \theta[-(a+b)] + e^{-i(a+b)^2} \left[\frac{1}{2i(a+b)} + O[(a+b)^{-3}] \right] \quad /16/$$

gdzie $\theta(x)$ jest funkcją skokową Heavisidea.

Przy rozwijaniu asymptotycznym drugiej całki gdy $a \rightarrow \pm\infty$ i $a + b \rightarrow \pm\infty$ nasuwa się pomysł podstawienia /16/ do /15/ i rozwinięcia tak otrzymanej całki znowu poprzez całkowanie przez części. Takie postępowanie jest poprawne, jeśli $a + b \gg 1$. Jeśli jednak $a + b < 0$, wówczas rozwinięcie /16/ byłoby całkowane w przedziale, w którym nie jest ono słuszne. Aby tej trudności zaradzić postąpimy w inny sposób. Najpierw całkując przez części w /15/ przedstawiamy całkę \hat{I} w równoważnej postaci

$$\hat{I} = \int_a^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau \int_{\tau+b}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu - e^{-ib^2} \int_a^{\infty} f(\eta) e^{-i2b\eta} d\eta \quad /17/$$

gdzie

$$f(\eta) = e^{-i\eta^2} \int_{\eta}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau$$

Ostatnią całkę w /17/ możemy napisać w następujący sposób

$$\int_a^{\infty} f(\eta) e^{-i2b\eta} d\eta = \theta(-a) \left[\int_{-|a|}^0 + \int_0^{|a|} \right] + \int_{|a|}^{\infty}$$

Ponieważ

$$f(-\eta) + f(\eta) = \sqrt{i\pi} e^{-i\eta^2}$$

człon w nawiasie kwadratowym może być równoważnie napisany w postaci

$$\sqrt{i\pi} \int_0^{|a|} e^{-i\eta^2 + i2b\eta} d\eta - 2i \int_0^{|a|} f(\eta) \sin 2b\eta d\eta$$

Uwzględniając ten wynik w /17/ dostajemy

$$\hat{I} = \int_a^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau \int_{a+b}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu - \theta(-a) \left[\sqrt{i\pi} \int_0^{|a|} e^{-i(\eta-b)^2} d\eta + \right. \\ \left. - 2i e^{-ib^2} \int_0^{|a|} f(\eta) \sin 2b\eta d\eta \right] - e^{-ib^2} \int_{|a|}^{\infty} f(\eta) e^{-i2b\eta} d\eta \quad /18/$$

Tę postać całki \hat{I} wykorzystamy do znalezienia jej rozwinięcia niejednolitego. Rozwinięcie drugiej całki po prawej stronie już znamy - jest ono dane przez /16/. W podobny sposób znajdujemy rozwinięcie pierwszej całki

$$\int_a^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \sqrt{i\pi} \theta(-a) - e^{ia^2} \left[\frac{1}{2ia} + O(a^{-3}) \right]$$

Gdy $a < 0$ - a tylko w tym kontekście interesuje nas trzecia i czwarta całka, występujące w nawiasie kwadratowym - dostajemy na drodze całkowania przez części

$$-\sqrt{i\pi} \int_0^{|a|} e^{-i(\eta-b)^2} d\eta = \sqrt{i\pi} \left(\int_{-(a+b)}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma - \int_{-b}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \right) = \pi [\theta(a+b) - \theta(b)] + \\ + \frac{\sqrt{i\pi} e^{-ib^2}}{i2b} - \frac{\sqrt{i\pi} e^{-i(a+b)^2}}{i2(a+b)} + O[(a+b)^{-3}] + O(b^{-3})$$

oraz

$$2ie^{-ib^2} \int_0^{|a|} f(\eta) \sin 2b\eta d\eta = -\frac{\sqrt{i\pi} e^{-ib^2}}{i2b} - \frac{e^{-ib^2+2iba}}{4ba} - \frac{e^{-ib^2-2iba}}{4ba} +$$

$$+ O(b^{-3}) + O(b^{-2}a^{-2})$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że $f(0) = \frac{\sqrt{i\pi}}{2}$ oraz $f(-a) = \frac{1}{2a} [1 + O(a^{-2})]$.
Wreszcie stosując podobną technikę do ostatniej całki w /18/ dostajemy

$$e^{-ib^2} \int_{|a|}^{\infty} f(\eta) e^{-i2b\eta} d\eta = \frac{e^{-ib^2-2b|a|}}{4|a|b} + O(a^{-3})$$

Podstawmy te rozwinięcia do /18/. W rezultacie dostajemy prosty wynik

$$\hat{I} = \pi \theta(-a) \theta(-b) - \frac{\sqrt{-i\pi} e^{ia^2} \theta[-(a+b)]}{2ia} - \frac{e^{ia^2-i(a+b)^2}}{4b(a+b)} +$$

$$+ O(a^{-3}) + O[(a+b)^{-3}] \quad /19/$$

Podstawiając to wyrażenie do /13/ oraz /16/ do /14/ dostajemy szukane niejednolite rozwinięcia asymptotyczne całek konturowych występujących w /8/.

Powróćmy teraz do zmiennych kątowych i odnotujmy następujące zależności

$$a = \sqrt{2\lambda} \sin \frac{\phi - t_0}{2}$$

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1 & \phi > t_0 \\ -1 & \phi < t_0 \end{cases}$$

$$b = \sqrt{2\lambda} \left(\sin \frac{\phi - t_p}{2} - \sin \frac{\phi - t_0}{2} \right)$$

$$\operatorname{sgn} b = \begin{cases} +1 & t_0 > t_p \\ -1 & t_0 < t_p \end{cases}$$

$$a+b = \sqrt{2\lambda} \sin \frac{\phi - t_p}{2}$$

$$\operatorname{sgn}(a+b) = \begin{cases} +1 & \phi > t_p \\ -1 & \phi < t_p \end{cases}$$

Widać stąd, że żądanie dużych $|a|$ i $|a+b|$ występujące w /19/ i w /16/ jest równoważne żądaniu, aby λ było duże oraz aby biegun $t = t_0$ i punkt początkowy całkowania $t = t_p$ były dostatecznie odległe od punktu $t = \phi$.

Uwzględnijmy ponadto zależności

$$G(b_0) = g(t_0)$$

$$G(-\delta) = -\frac{b_p - b_0}{\phi - t_0} g(\phi) e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$G(b_p) = \frac{b_p - b_0}{t_p - t_0} g(t_p) \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\cos \frac{t_p - \phi}{2}}$$

$$b_0 + \delta = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\phi - t_0}{2}$$

$$b_p - b_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\sin \frac{\phi - t_p}{2} - \sin \frac{\phi - t_0}{2} \right)$$

wynikające z /7/ i /3/ i wreszcie

$$\lambda - (a+b)^2 = \lambda \cos(\phi - t_p)$$

$$\lambda - a^2 = \lambda \cos(\phi - t_0)$$

Korzystając z tych wzorów, a także z /18/, /13/, /16/, /14/ i /7/ dostajemy z /8/ następujące niejednolite rozwinięcie asymptotyczne całki F_2

$$F_2 = 2\pi i g(t_0) e^{ik\eta \cos(\phi - t_0)} \Theta(t_0 - \phi) \Theta(t_p - t_0) - \sqrt{\frac{2\pi}{k\eta}} e^{ik\eta - i\frac{\pi}{4}} \frac{g(\phi)}{\phi - t_0} \Theta(t_p - \phi) + \frac{ie^{ik\eta \cos(\phi - t_p)}}{k\eta(t_p - t_0)} \frac{g(t_p)}{\sin(\phi - t_p)} + O(\lambda^{-3/2}) \quad /20/$$

Pierwszy człon w tym rozwinięciu reprezentuje falę płaską propagującą się w kierunku $\phi = t_0$ i znika gdy biegun t_0 leży bądź na prawo od konturu Γ_2 , bądź na lewo od punktu siodłowego ϕ /rys.1/. Drugi człon opisuje falę cylindryczną, emitowaną z początku układu współrzędnych i znika, gdy punkt siodłowy ϕ leży na prawo od konturu Γ_2 . Ostatni człon przedstawia niejednorodną falę płaską propagującą się w

kierunku $\phi = t_p$.

Rozwinięcia asymptotyczne niepełnej całki dyfrakcyjnej F_1

Rozpatrzmy teraz całkę

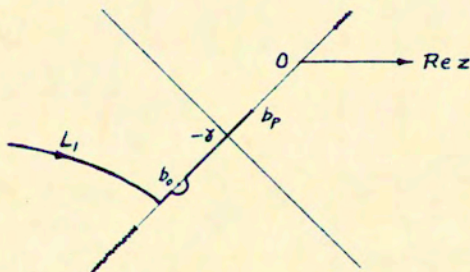
$$F_1 = \int_{r_1}^{\infty} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt$$

Podobnie jak poprzednio całka ta ma trzy punkty krytyczne: $t = \phi$, $t = t_0$ i $t = t_p$. W związku z tym analiza asymptotyczna tej całki przebiega prawie tak samo, jak w przypadku całki F_2 .

Dokonyując zamiany zmiennej całkowania wg /3/ i rozbijając funkcję $G(z)$ jak w /6/ dochodzimy do rozwinięcia jednolitego tej całki

$$F_1 = c_0 \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz + c_1 \int_{L_1} e^{-\lambda p} dz - c_2 \frac{e^{-\lambda p(b_p; \delta)}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_1} [H+(z-b_p)H'] e^{-\lambda p} dz \quad /21/$$

gdzie kontur L_1 przedstawiony jest na rys.4, a współczynniki rozwinięcia dane są wzorami /7/. Ostatnia całka reprezentująca resztę rozwinięcia jest $O(\lambda^{-3/2})$.



Rys.4

Sprowadzenie całek konturowych stojących przy współczynnikach c_0 i c_1 w /21/ do całek po osiach rzeczywistych przebiega w podobny sposób jak w poprzednim przypadku, z pewnymi modyfikacjami wynikającymi z odmiennej konfiguracji konturu L_1 ,

i bieguna t_0 . W wyniku tego postępowania dostajemy

$$\int_{L_1} \frac{e^{-\lambda p}}{z-b_0} dz = 2i e^{i\lambda - \frac{v^2}{2}} \left[\pi \theta\left(\frac{q}{\pi}\right) - \int_{-\frac{q}{2\pi}}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \int_{\eta - \frac{q}{2\pi}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \right]$$

oraz

$$\int_{L_1} e^{-\lambda p} dz = \sqrt{\frac{2i}{\lambda}} e^{i\lambda} \int_{-\frac{q+v}{\sqrt{2i}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu$$

W celu znalezienia rozwinięć niejednorodnych tych całek skorzystamy z /19/ i /16/, zastępując w nich a przez $-a$ i b przez $-b$. W rezultacie rozwinięcie niejednorodnej całki F_1 przyjmuje następującą postać w zmiennych kątowych

$$F_1 = 2\pi i g(t_0) e^{ikq \cos(\phi - t_0)} \theta(t_0 - \phi) \theta(t_0 - t_p) - \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \frac{e^{ikq - i\frac{\pi}{4}} g(\phi)}{\phi - t_0} \theta(\phi - t_p) +$$

$$- \frac{i e^{ikq \cos(\phi - t_p)} g(t_p)}{kq (t_p - t_0) \sin(\phi - t_p)} + O(\lambda^{-3/2}).$$

Na zakończenie skonstruujemy rozwinięcie niejednorodne sumy obu całek $F_1 + F_2$, tj. pełnej całki dyfrakcyjnej. Korzystając z powyższego wyniku i /20/ otrzymujemy znany rezultat

$$F_1 + F_2 = 2\pi i g(t_0) e^{ikq \cos(\phi - t_0)} \theta(t_0 - \phi) - \sqrt{\frac{2\pi}{kq}} \frac{e^{ikq - i\frac{\pi}{4}} g(\phi)}{\phi - t_0} + O(\lambda^{-3/2}),$$

w którym przyczynki od końcowego punktu całkowania $t = t_p$ wzajemnie się upraszczają.

Literatura

- [1] L.B.Felsen i N.Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Englewood Cliffs, N.J.; Prentice-Hall, 1973
- [2] A.Ciarkowski. Jednolite i niejednolite rozwiązania asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej typu E na granicy dwóch ośrodków. *Prace IPPT*, w druku
- [3] N.Bleistein, Uniform asymptotic evaluation of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities, *J.Math. Mech.*, 17, 533, 1967.
- [4] A.Ciarkowski, Uniform Asymptotic Expression for the Scattered Field in the Problem of Plane Wave Diffraction by a Half-Plane, *Bull i Acad. Polon. Ser.sci. techn.*, XXVIII, no. 9-10, 397, 1980.