

Wanda Paprocka-Garlicka

**PRZYSTOSOWANIE BELEK CIĄGLYCH
ORAZ METODA OPTIMALIZACJI
PODATNOŚCI SPRĘŻYSTYCH ICH PODPÓR
TWIERDZENIE O MAKSYMALNYM
OBCIĄŻENIU PRZYSTOSOWANIA**

10/1984

SUPLEMENT

do rozprawy habilitacyjnej pod tytułem

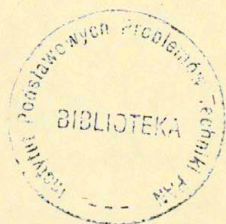
**ZAGADNIENIA UDŹWIGU
ŻELBETOWYCH I STALOWYCH KONSTRUKCJI
ZE WSTĘPNYMI NAPRĘŻENIAMI**

Prace IPPT nr 33/83

WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 lutego 1984 r.



56958



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 180 egz. Ark. wyd. 1. Ark. druk. 1,75
Oddano do drukarni w lutym 1984 r.
Nr zamówienia 150/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Wanda Paprocka-Garlicka
Zakład Teorii Konstrukcji

PRZYSTOSOWANIE BELEK CIĄGŁYCH
ORAZ METODA OPTIMALIZACJI PODATNOŚCI SPRĘŻYSTYCH ICH PODPÓR.
TWIERDZENIE O MAKSYMALNYM OBCIĄŻENIU PRZYSTOSOWANIA.

Niniejsze opracowanie stanowi suplement do mojej rozprawy habilitacyjnej [9]. Zawarte w nim tezy były treścią przedstawionej przeze mnie pracy^{x/} na 174-ym Koloquium Euromechu w październiku 1983 r. w Palermo.

1. WPROWADZENIE

Określeniem granic obciążeń nieniszczących dla konstrukcji wykonanych z materiałów o własnościach sprężysto-plastycznych poddanych działaniu obciążeń zmiennych zajmuje się teoria przystosowania. Twierdzenia tej teorii oraz wynikające z nich kryteria osiągnięcia tych granicznych obciążeń, zwanych obciążeniami przystosowania, jak również kryteria osiągnięcia nośności granicznej i nośności sprężystej konstrukcji, bazujące odpowiednio na twierdzeniach teorii nośności granicznej i założeniach teorii liniowo-sprężystej podałam w rozprawie habilitacyjnej [9].

(Celem niniejszego opracowania jest rozwiązanie problemu optymalizacji sprężystego podparcia belek ciągłych poddanych

^x"The inelastic analysis of a continuous beam on a flexible support under variable loads. Maximum incremental collapse load theorem."

działaniu obciążeń zmiennych ze względu na maksimum obciążenia przystosowania, jak również uzyskania odpowiedzi na pytanie, czy podatności sprężyste podpór mogą być przy projektowaniu na przystosowanie pomijane.

Belki ciągle pracują naogół jako belki na podporach sprężystych, jednak podatności sprężyste podpór /nie mające jedynie wpływu na nośność graniczną konstrukcji/ są przy projektowaniu zazwyczaj pomijane.

Wpływ podatności sprężystej podpór na wielkość obciążenia przystosowania był dla różnych typów obciążeń analizowany w pracach Eyre'go i Galambosa [2], Ciampiego i Gavariniego [1], Oppenheima [7] oraz mojej [8]. Ciampi i Gavarini wskazali ponadto na możliwość optymalizacji konstrukcji o własnościach sprężysto-plastycznych obciążonej w sposób zmienny w czasie poprzez odpowiedni dobór jej własności sprężystych.

W niniejszym opracowaniu przedstawiłam rozwiązania, przeprowadzone dla trzech wariantów obciążeń przyłożonych do sprężyste podpartej belki dwuprzęsłowej, dla której wpływ podatności sprężystej podpory na wielkość obciążenia przystosowania jest najbardziej widoczny. Analiza tych rozwiązań umożliwiła mi sformułowanie ogólnego twierdzenia o osiągnięciu maksymalnego obciążenia przystosowania. Twierdzenie to następnie udowodniłam. Zaproponowana, oparta na powyższym twierdzeniu, metoda wyznaczenia optymalnych podatności sprężystych podpór i odpowiadających im maksymalnych obciążeń przystosowania prowadzi wprost do wyników umożliwiających optymalne projektowanie.

Przedstawione rozwiązania wykazały, że niewielkie podatności sprężyste podpór, mające podstawowe aplikacyjne znaczenie, wpływają w przypadku występowania typowych dla praktyki inżynierskiej obciążeń zmiennych na podwyższenie wartości obciążenia przystosowania. Pominięcie tych podatności, jako korzystne dla bezpieczeństwa konstrukcji, jest zatem przy projektowaniu na przystosowanie dopuszczalne.

Wyprowadzone wzory na obciążenie przystosowania i nośność graniczną konstrukcji, są słuszne jedynie dla belek, których ugięcia są dostatecznie małe, aby można było stosować obowiązują-

jące w teorii przystosowania i teorii nośności granicznej założenie o małości przemieszczeń. Na wielkość ugięć ma między innymi wpływ podatność sprężysta podpory. Gdy jest ona nadmierna może powodować zbyt duże przemieszczenia belek. Dlatego też przedstawionych rozwiązań nie można stosować do belek na podporach o nadmiernej sprężystej podatności. Zastosowanie założenia o małości przemieszczeń prowadzi w przypadku dużych przemieszczeń do paradoksu przypominającego paradoks Stüssi-Kollbrunnera [11].

Również i model belki na podporach sprężystych nie zawsze jest odpowiedni ze względu na możliwość kruchego zniszczenia, uplastycznienia, bądź wybożenia podpór przed zniszczeniem samej belki. Jeśli przewiduje się zaistnienie takiej możliwości, należy dodatkowo przeprowadzić rozwiązania dla układu belka-podpora. Takie rozwiązania, dla przypadków gdy podporami sprężystymi belek są belki poprzeczne, tj. rozwiązania dla rusztów, w których pominięto jako bardzo mały wpływ momentów skręcających, zawiera rozprawa / [9], p.3.2.6 / oraz np. praca Grundy'ego [3].

Optymalizacja takich konstrukcji winna dotyczyć nie sprężystego podparcia belki ze względu na maksimum obciążenia przystosowania, a pewnych właściwości materiałowych i parametrów geometrycznych belki i podpór, wpływających na ich wytrzymałość i sztywność, a celem tej optymalizacji powinno być otrzymanie możliwie największego obciążenia przystosowania z jednocześnie możliwie najmniejszym ciężarem, bądź kosztem konstrukcji.

Na fakt istnienia omówionych wyżej przyczyn, ograniczających zakres stosowalności przedstawionych rozwiązań, zwracają uwagę prace - moja [8] i Polizzotta [10].

2. ZAŁOŻENIA I TEORETYCZNE PODSTAWY OBLICZEŃ

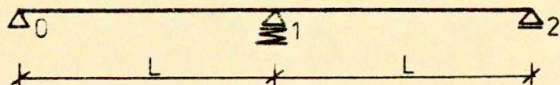
Przyjęto, że materiał z jakiego wykonana jest konstrukcja ma własności idealnie sprężysto-plastyczne oraz granicę plastyczności równą $\pm \sigma_0$ przy rozciąganiu i ściskaniu. Przyjęto założenie o małości przemieszczeń oraz założenie płaskich przekrojów. Przyjęto w analizie plastycznej konstrukcji hipotezę idealnych przegubów plastycznych. Pominięto wpływ działania sił poprzecz-

nych. Założono, że działanie obciążeń jest quasi-statyczne.

Obciążenia niszczące wyznaczono w oparciu o kryteria zniszczenia wynikające z twierdzeń teorii przystosowania i teorii nośności granicznej oraz z założeń teorii liniowo-sprężystej [6].

3. BEKI DWUPRZĘSŁOWE NA ŚRODKOWEJ PODPORZE SPRĘŻYSTEJ. ANALIZA WPŁYWU PODATNOŚCI SPRĘŻYSTEJ PODPÓR NA WIELKOŚĆ OBCIĄŻENIA PRZYSTOSOWANIA.

Rozwiązania przeprowadzono dla belek o stałym przekroju - idealnie sandwiczowym i dwuteowym walcowanym i o jednakowej rozpiętości przęseł L /rys.1/. Współczynnik k sprężystości środkowej podpory zastąpiono przez bezwymiarowy współczynnik d ,



Rys. 1

proporcjonalny do podatności sprężystej $\frac{1}{k}$ podpory /będącej przesunięciem podpory od ustawionej nad nią siły równej 1/ i równy:

$$d = \frac{6EI}{kL^3} \quad //1/$$

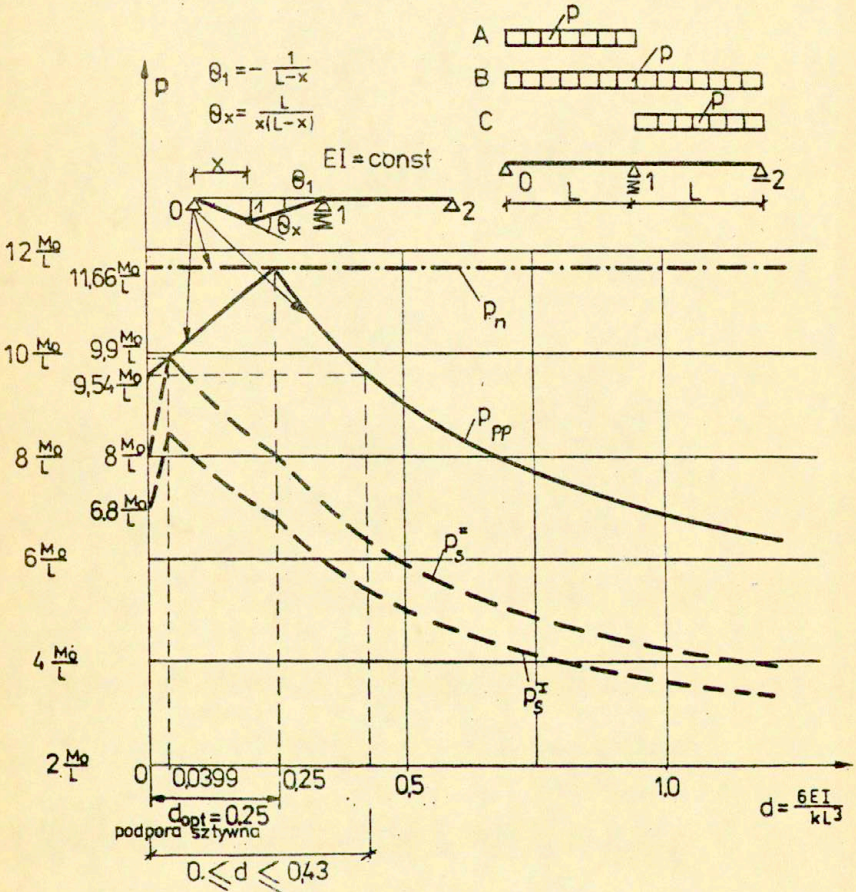
gdzie I jest momentem bezwładności przekroju belki, a E - modułem Younga.

Analizę przeprowadzono dla d zawartych w zakresie $0 \leq d \leq 1$, przy czym $d = 0$ / $k = \infty$ / odpowiada podporze sztywnej. Przyjęto, że występujące obciążenia zmieniają się w zakresach, których granice są wyrażone w wielkości jednego z obciążeń. Wyznaczone wartości momentów zginających i obciążeń

niszczących będą zatem funkcjami jedynie tego obciążenia.

3.1. Belka poddana działaniu obciążenia użytkowego p .

Obciążenie p może się zmieniać od zera do swej wartości granicznej. Na rys.2 przedstawiono wszystkie możliwe schematy obciążenia oraz miarodajny mechanizm zniszczenia belki.



Rys. 2

W rozpatrywanym przedziale zmienności d $/0 \leq d \leq 1 /$ o nieprzystosowaniu się konstrukcji do danego programu obciążeń decydowało zniszczenie przyrostowe.

Wyznaczono następujące wartości występujących w przegubach plastycznych przedstawionego na rys. 2 mechanizmu zniszczenia ekstremalnych sprężystych momentów zginających oraz momentu M_1 nad podporą 1 odpowiadającego $\max M_x$:

a/ dla $0 \leq d \leq 0.25$

$$\min M_1 = \frac{d - 0.25}{2 / 1 + d /} pL^2 \quad /B/ \quad /2/ ,$$

$$\max M_x = -0.5L^2 \alpha^2 p + \frac{0.4375 + 0.75d}{1 + d} \cdot L^2 \alpha p \quad /A/ \quad /3/ ,$$

$$M_1 = \frac{d - 0.25}{4 / 1 + d /} pL^2 \quad /A/ \quad /4/ ,$$

b/ dla $d \geq 0.25$

$$\min M_1 = 0 \quad /brak obciążenia/ \quad /5/ ,$$

$$\max M_x = -0.5L^2 \alpha^2 p + \frac{0.375 + d}{1 + d} L^2 \alpha p \quad /B/ \quad /6/ ,$$

$$M_1 = \frac{d - 0.25}{2 / 1 + d /} pL^2 \quad /B/ \quad /7/ ,$$

gdzie $\alpha = \frac{x}{L}$.

Umieszczone w nawiasach litery wskazują jakiemu schematowi obciążenia odpowiada wyznaczone wyrażenie na moment zginający.

Podstawiając /2/ i /3/ lub /5/ i /6/ oraz podane na rys. 2 wyrażenia na θ_1 i θ_x do wzoru /47/ pracy [9], będącego zapisem kinematycznego kryterium zniszczenia przyrostowego, otrzymano obciążenie przystosowania odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu $p_{pp}(\alpha)$ w funkcji nieznannej odległości przegubu przęsłowego od podpory 0. Ostatecznie, z minimalizacji $p_{pp}(\alpha)$ względem α otrzymano obciążenie

przystosowania p_{ppo} i położenie przegubu plastycznego w przęśle w postaci wzorów:

a/ dla $0 \leq d \leq 0.25$

$$p_{ppo} = (1 + \alpha_p) \left(-0.5 \alpha_p^2 + \frac{0.5625 + 0.25d}{1 + d} \alpha_p \right)^{-1} \frac{M_0}{I^2}, \quad /8/$$

$$\text{gdzie } \alpha_p = -1 + \left(\frac{1.5d + 2.125}{1 + d} \right)^{1/2}$$

b/ dla $d \geq 0.25$ /lecz niezbyt dużego/

$$p_{ppo} = (1 + \alpha_p) \left(-0.5 \alpha_p^2 + \frac{0.375 + d}{1 + d} \alpha_p \right)^{-1} \frac{M_0}{I^2}, \quad /9/$$

$$\text{gdzie } \alpha_p = -1 + \left(\frac{1.75 + 3d}{1 + d} \right)^{1/2}.$$

Występujący w /8/ i /9/ moment M_0 jest momentem granicznym przekroju belki.

Nośność graniczna belki p_{no} , otrzymana z minimalizacji względem α obciążenia $p_n(\alpha)$ wyznaczonego z kinematycznego kryterium zniszczenia teorii nośności granicznej / wzór (19) pracy [9] / oraz odpowiadające jej położenie α_n przegubu plastycznego wynoszą:

$$p_{no} = 11.6569 \frac{M_0}{I^2}, \quad \alpha_n = 0.4142. \quad /10/.$$

Nośność sprężystą wyznaczono podstawiając do wzoru (51) pracy [9], będącego zapisem kryterium zniszczenia teorii liniowo-sprężystej, maksymalne bezwzględne wartości występujących w belce ekstremalnych sprężystych momentów zginających.

Otrzymano:

a/ dla $0 \leq d \leq 0.0399$ /schemat B obciążenia/

$$p_s = \frac{c M_0}{|\min M_1, p=1|} = \frac{c}{|d - 0.25|} \frac{M_0}{I^2} \quad /11/.$$

b/ dla $0,0399 < d < 0,25$ /schemat A obciążenia/

$$P_s = \frac{c M_0}{\max_{x_0} M_{x_0}^{P=1}} = \frac{c}{0,5 \left(\frac{0,4375 + 0,75d}{1+d} \right)^2} \frac{M_0}{L^2} \quad /12/,$$

c/ dla $0,25 \leq d \leq \infty$ /schemat B obciążenia/

$$P_s = \frac{c M_0}{\max_{x_0} M_{x_0}^{P=1}} = \frac{c}{0,5 \left(\frac{0,375 + d}{1+d} \right)^2} \frac{M_0}{L^2} \quad /13/,$$

gdzie $c = \frac{\max M_s}{M_0} = \frac{W}{W_{pl}}$ jest współczynnikiem kształtu przekroju /równym 2/3 dla przekroju prostokątnego, około 0.85 dla dwuteowego walcowanego oraz 1 dla idealnego sandwiczowego/, $\max M_s$ jest maksymalnym sprężystym momentem zginającym, a W i W_{pl} są to wskaźniki: wytrzymałości i oporu plastycznego.

Wykresy obciążeń p_{ppo} , p_{no} i p_s w funkcji d przedstawiono na rys.2.

Dla d zawartych w przedziale $0 \leq d \leq 0,43$ podatność sprężysta podpory wpływa korzystnie na wielkość obciążenia przystosowania p_{ppo} .

Dla $d = d_{opt} = 0,25$ obciążenie przystosowania jest największe, równe nośności granicznej belki p_{no} . Maximum temu odpowiada tak dla schematu A, jak i B obciążenia:

$$\min M_1 = M_1 = 0 \quad /14/$$

oraz zgodnie z /8/ i /9/ :

$$\alpha_p = \alpha_n = 0,4142 \quad /15/$$

Efektom przyjęcia optymalnej podatności sprężystej podpory jest zatem jednakowy dla obu schematów obciążenia rozkład sprężystych momentów zginających w przęśle 0-1, decydującym o zniszczeniu belki, przy tym taki, że moment w przegubie przęśla 0-1 osiąga swą wartość maksymalną, a moment w przegubie nad podporą 1 - minimalną.

Dla belki o przekroju idealnie sandwiczowym przyjęcia $d = 0,0399$ może okazać się niebezpieczne, wtedy bowiem obciążenie przystosowania równe jest nośności sprężystej, co oznacza że pojawianie się pierwszych odkształceń plastycznych występuje jednocześnie z osiągnięciem granicy obciążeń nieniszczących.

3.2. Belka obciążona siłą ruchomą P.

Belka poddana jest działaniu siły skupionej P, która poza przesuwaniem się wzdłuż belki może również zmieniać się w granicach od zera do swej wartości końcowej /rys.3/.

Kompletne rozwiązanie dla tego typu obciążenia, zawierające optymalizację podatności sprężystej podpory ze względu na maksimum obciążenia przystosowania, wyznaczenie obciążeń granicznych oraz dyskusję dotyczącą ograniczonej stosowalności otrzymanych wyników przedstawiłam w pracy [8] oraz w p.3.2.5 rozprawy habilitacyjnej [9]. Przytoczę tu tylko te fragmenty rozwiązania, które przyczyniły się do sformułowania twierdzenia o osiągnięciu maksymalnego obciążenia przystosowania i do zaproponowania uproszczonej metody wyznaczania optymalnej podatności sprężystej podpory i odpowiadającego jej maksymalnego obciążenia przystosowania.

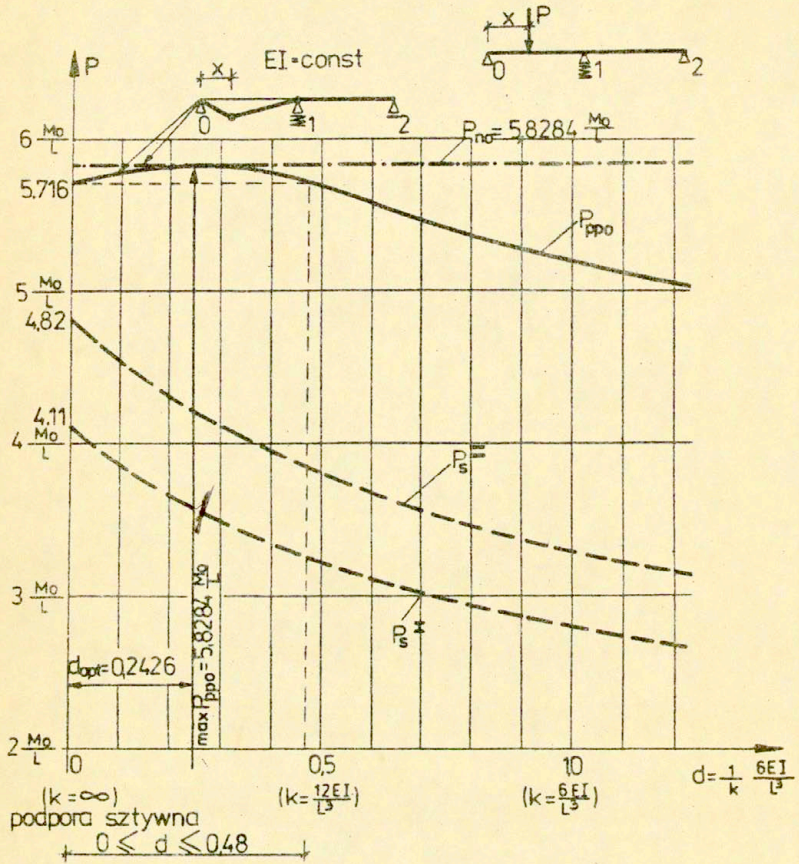
Tak jak w przypadku obciążenia użytkowego o nieprzystosowaniu się konstrukcji decydowało zniszczenie przyrostowe.

Wprowadzając $\alpha = \frac{x}{L}$ otrzymano następujące wartości sprężystych momentów zginających w przegubach plastycznych, wyznaczone dla siły P znajdującej się nad przegubem przesłowym, tj. w odległości x od podpory O:

$$\max M_x = \left[\alpha^4 - 1/5 + 2d/\alpha^2 + 4/(1+d/\alpha) \right] \frac{1}{4/(1+d)} PL \quad /16/$$

$$M_1 = \left[\alpha^3 + 1/2d - 1/\alpha \right] \frac{1}{4/(1+d)} PL \quad /17/$$

Minimalny moment w przegubie podporowym i odpowiadające mu ustawienie x_1 siły P wyniosły:



Rys. 3

$$\min M_1 = -\left(\frac{1-2d}{3}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+d} PL$$

/18/

$$x_1 = \left(\frac{1 - 2d}{3} \right)^{1/2} L \quad /19/.$$

Obciążenie przystosowania w funkcji podatności sprężystej podpory zostało określone przy pomocy wzorów /105/, /106/ i /107/ w pracy [9]. Z maksymalizacji tego obciążenia względem d otrzymano optymalną wartość d i położenie przegubu plastycznego, dla których obciążenie przystosowania P_{ppo} osiągnęło maksimum analityczne równe nośności granicznej P_{no} belki. Wielkości te wynoszą:

$$d_{opt} = 0.2426 \quad /20/,$$

$$\alpha_{opt} = \alpha_n = 0.4142 \quad /21/,$$

$$\max P_{ppo} = P_{no} = 5.8284 \frac{M_0}{L} \quad /22/.$$

Okazało się, że otrzymanej optymalnej wartości d odpowiada takie położenie x siły P , przy którym sprężyste momenty zginające w przegubach przęsłowym i podporowym osiągają swe wartości ekstremalne. Wynika to z równania /19/, z którego dla $d=0.2426$ otrzymuje się $x_1 = 0.4142 L$. Jednocześnie spełniona jest równość momentów zginających określonych wzorami /17/ i /18/, tzn.:

$$M_1 = \min M_1 \quad /23/.$$

W rozpatrywanym przypadku maksimum obciążenia przystosowania występuje dla wartości momentu zginającego nad podporą różnej od zera. Minimalnemu momentowi podporowemu równemu zeru odpowiada $d = 0.5$.

Dla d znajdującego się w zakresie $0 \leq d \leq 0.48$ związany z uwzględnieniem sprężystości podpory procentowy wzrost obciążenia przystosowania nie przekracza 2.2%. W tym zatem zakresie efekt uwzględnienia sprężystości podpory jest nieznaczny i obciążenie przystosowania mogło być oszacowane zakładając, że podpora jest sztywna, bądź stosując rozwiązanie otrzymane metodami teorii nośności granicznej.

3.3. Belka obciążona siłami skupionymi F o zmiennej intensywności. Rozwiązanie V.Ciampiego i C.Gavariniego [1].

O nieprzystosowaniu się konstrukcji do przedstawionych na rys.4 i rys.5 programów obciążeń zdecydowało zniszczenie przyrostowe.

Dla programu obciążeń przedstawionego na rys.4 otrzymano:

$$F_{pp} = \frac{96/1+d/}{19+8d} \frac{M_0}{L} \quad \text{gdy} \quad 0 \leq d \leq 0.375 \quad /24/$$

$$F_{pp} = \frac{96/1+d/}{10+32d} \frac{M_0}{L} \quad \text{gdy} \quad d \geq 0.375 \quad /25/$$

$$d_{opt} = 0.375, \quad \max F_{pp} = F_n = 6 \frac{M_0}{L} \quad /26/$$

a dla programu obciążeń przedstawionego na rys. 5

$$F_{pp} = \frac{6M_0}{L} = F_n \quad \text{gdy} \quad 0 \leq d \leq 0.375 \quad /27/$$

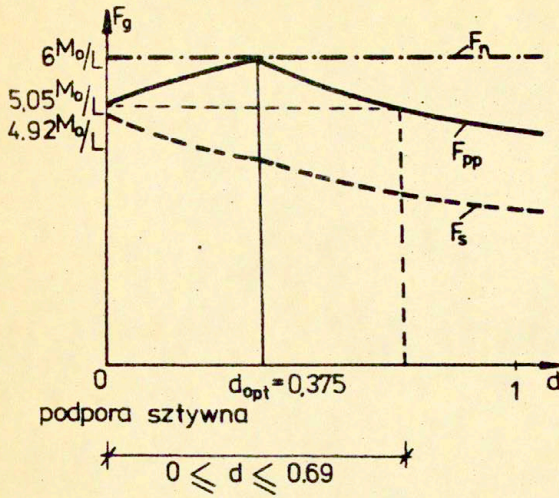
$$F_{pp} = \frac{96/1+d/}{13+24d} \quad \text{gdy} \quad d \geq 0.375 \quad /28/$$

W pierwszym przypadku /rys.4/ $\max F_{pp}$ wystąpiło dla $d_{opt} = 0.375$, a dla d znajdującego się w przedziale $0 \leq d \leq 0.69$ sprężystość podpory wpłynęła korzystnie na pracę konstrukcji poddanej działaniu obciążeń zmiennych.

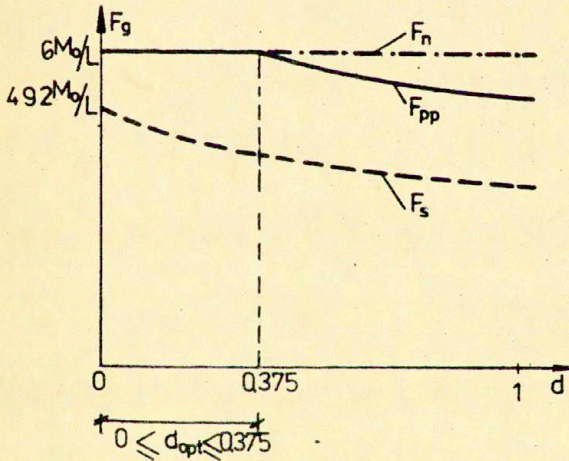
W drugim przypadku /rys.5/ obciążenie przystosowania osiągnęło maksimum równe nośności granicznej konstrukcji dla $0 \leq d \leq 0.375$.

W obu rozpatrywanych przypadkach wartości $d = 0.375$ odpowiadał :

$$M_1 = \min M_1 = 0 \quad /29/$$



Rys. 4



Rys. 5

4. PROBLEM OPTIMALIZACJI SPRĘŻYSTEGO PODPARCIA BELEK CIĄGŁYCH.

Problem ten polega na wyznaczeniu optymalnych podatności sprężystych $\frac{1}{k}$ podpór, odpowiadających maksymalnemu obciążeniu przystosowania. Nośność graniczna konstrukcji nie zależy od własności sprężystych podpór.

Założmy, że granice występujących obciążeń wyrażone są w wielkości jednego z obciążeń Q . Problem optymalizacji można wtedy zapisać w postaci:

$$\max Q_p = \max_k Q_p(k) \quad /30/$$

gdzie Q_p jest obciążeniem przystosowania.

Istnieją przypadki, w których:

$$\max Q_p = Q_n \quad /31/$$

dla co najmniej jednej wartości k . Q_n oznacza tu nośność graniczną konstrukcji.

5. TWIERDZENIE O MAKSYMALNYM OBCIĄŻENIU PRZYSTOSOWANIA.

Analiza przedstawionych w p.3 rozwiązań umożliwiła sformułowanie twierdzenia o osiąganiu maksymalnego obciążenia przystosowania, opartego na statycznym twierdzeniu teorii przystosowania i podanych w p.2 założeniach. Twierdzenie to jest ważne dla belek i ram, w których momenty zginające mają decydujący wpływ na zachowanie się konstrukcji.

Twierdzenie.

"Jeśli przez odpowiedni dobór sprężystych własności konstrukcji można dla schematu obciążeń i mechanizmu zniszczenia miarodajnych dla nośności granicznej Q_n zapewnić jednoczesne występowanie ekstremalnych sprężystych momentów zginających $\text{extr } M_1$ w przegubach plastycznych i tego mechanizmu, wtedy obciążenie Q_{pp} , właściwe dla zniszczenia przyrostowego, osiąga największą wartość $\max Q_{pp}$, równą nośności granicznej Q_n ."

Dowód.

Statyczne twierdzenie teorii przystosowania mówi, że jeśli na konstrukcję działają obciążenia odpowiadające obciążeniu Q_{pp} , właściwemu dla zniszczenia przyrostowego, to momenty zginające w przegubach plastycznych i mechanizmu miarodajnego dla zniszczenia przyrostowego osiągają - zazwyczaj nie we wszystkich przegubach jednocześnie - wartości momentów granicznych $\pm M_{oi}$. Momenty te są sumami ekstremalnych momentów sprężystych $\max M_i$, bądź $\min M_i$ i istniejących w chwili przystosowania się konstrukcji momentów reszkowych m_i :

$$m_i + \max M_i = M_{oi}, \text{ gdy } \theta_i > 0 \quad /32/.$$

$$m_i + \min M_i = -M_{oi}, \text{ gdy } \theta_i < 0$$

θ_i są przypisanymi temu mechanizmowi kątami obrotów przekrojów w przegubach plastycznych.

Jeśli dążymy do tego aby zachodziła równość:

$$\max Q_{pp} = Q_n \quad /33/,$$

to warunek jednoczesności występowania ekstremalnych sprężystych momentów zginających musi być spełniony w przegubach plastycznych mechanizmu miarodajnego dla nośności granicznej. Jest oczywiste, że jeżeli równość ta zachodzi, to mechanizm ten jest jednocześnie mechanizmem miarodajnym dla zniszczenia przyrostowego. Załóżmy teraz, że momenty zginające, odpowiadające jednemu, bądź kilku schematom obciążeń miarodajnym dla Q_n , osiągnęły jednocześnie w przegubach plastycznych tego mechanizmu swe ekstremalne sprężyste wartości $\max M_i$, bądź $\min M_i$. Z /32/ wynika, że gdy działające na konstrukcję i zmieniające się w ramach tych schematów obciążenia osiągną swe graniczne, odpowiadające Q_{pp} wartości, to momenty zginające w przegubach plastycznych osiągną - również jednocześnie - wartości momentów granicznych $+ M_{oi}$, bądź $- M_{oi}$.

Niech na mechanizm zniszczenia miarodajny dla Q_n działa schemat obciążeń, dla którego został spełniony warunek jednoczesności występowania $\text{extr } M_i$ i niech intensywności tych obciążeń odpowiadają raz Q_{pp} , drugi raz Q_n .

Z zasady prac wirtualnych wynika, że jeśli działające na tę samą konstrukcję z identycznie przypisanymi odkształceniami i przemieszczeniami, dwa jednakowe schematy obciążeń są w równowadze z jednakowymi rozkładami sił wewnętrznych /momentami granicznymi M_{0i} w przegubach plastycznych i/, to intensywności tych obciążeń muszą być jednakowe i

$$Q_{pp} = Q_n \quad /34/$$

W dodatku, ponieważ $Q_{pp} \nrightarrow Q_n$, można stwierdzić, że wartość obciążenia przystosowania Q_{pp} spełniająca równanie /34/ jest największym obciążeniem $\max Q_{pp}$, właściwym dla zniszczenia przyrostowego.

6. UPROSZCZONA METODA WYZNACZANIA OPTIMALNYCH PODATNOŚCI SPRĘŻYSTYCH PODPÓR BELEK CIĄGLYCH.

Sformułowane wyżej twierdzenie prowadzi do uproszczonej metody wyznaczania optymalnych podatności sprężystych podpór, ważnej dla przypadków, w których o nieprzystosowaniu się konstrukcji do zadanego programu obciążeń decyduje zniszczenie przyrostowe.

Jeżeli warunek jednoczesności występowania ekstremalnych sprężystych momentów zginających w przegubach plastycznych mechanizmu zniszczenia miarodajnego dla nośności granicznej można spełnić przez dobór odpowiednich podatności sprężystych podpór, podatności te będą optymalne, tj. takie, dla których równość /33/ będzie spełniona.

W przypadku rozpatrywanej konstrukcji i typów obciążeń równanie /33/ jest spełnione, gdy moment zginający M_1 nad podporą 1, wyznaczony dla schematu obciążenia odpowiadającego maksymalnemu momentowi zginającemu w przegubie przeszłowym, osiąga swą najmniejszą możliwą wartość. Odpowiadający optymalnej podatności sprężystej $\frac{1}{K}$ podpory 1 parametr d /1/ winien zatem spełnić równanie:

$$M_1 \Big|_{\alpha = \alpha_n} = \min M_1 \quad /35/$$

gdzie α_n określa położenie przegubu przeszłowego.

Ostatecznie, wyznaczając metodami teorii nośności granicznej nośność graniczną konstrukcji Q_n i położenie przegubu plastycznego α_n dochodzi się, przez rozwiązanie jedynie równania /35/, do kompletnego optymalnego rozwiązania na podatność sprężystą podpory i obciążenie przystosowania.

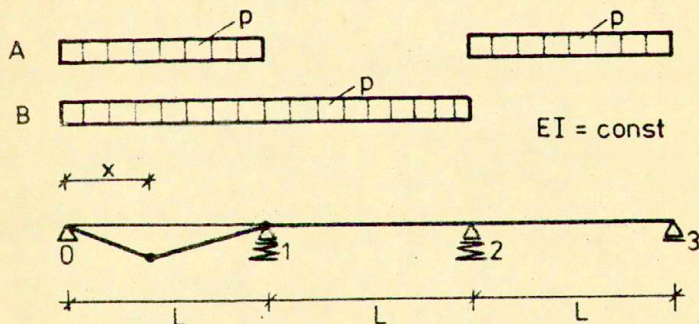
7. ZASTOSOWANIE PROPONOWANEJ METODY.

7.1 Belka trójprzęsłowa na podporach sprężystych poddana działaniu obciążenia użytkowego p .

Rysunek 6 przedstawia miarodajny dla nośności granicznej mechanizm zniszczenia skrajnego przeszła belki. Mechanizm ten odpowiada obciążeniu znajdującemu się na lewym skrajnym przeszle, na przeszłach lewym i środkowym, na przeszłach skrajnych, bądź na całej belce.

Założmy, że współczynniki k sprężystości podpór 1 i 2 są jednakowe i wprowadzmy tak jak poprzednio, parametr d określony przez /1/.

Gdy moment nad podporą 1 $M_1 \leq 0$, to przedstawionym na rys.6 dwom, z pośród wyżej wymienionych czterech miarodajnych dla nośności granicznej, schematom obciążenia odpowiadają: schematowi A - maksymalny sprężysty moment zginający $\max M_x$ w przegubie przeszłowym, schematowi B - minimalny sprężysty moment zginający $\min M_1$ nad podporą 1.



Rys. 6

Rozpatrzmy oba te schematy obciążeń. Dobierając podatność sprężystą podpór 1 i 2, tak aby odpowiadający schematowi A moment M_1 równy był odpowiadającemu schematowi B momentowi $\min M_1$, tzn. spełniając równanie /35/ osiągamy to, że rozkład sprężystych momentów zginających w przęśle 0-1, decydującym o zniszczeniu belki, jest dla obu tych schematów identyczny i taki, że moment w przegubie przęsłowym osiąga swoją wartość maksymalną, a w przegubie podporowym - minimalną.

Nośność graniczna belki P_{no} i położenie przegubu plastycznego α_n są równe:

$$P_{no} = 11.6569 \frac{M_0}{L}, \quad \alpha_n = 0.4142 \quad /36/$$

a momenty zginające M_1 i $\min M_1$, odpowiadające schematom A i B obciążenia mają postać:

$$M_1 = \frac{4.5 d^2 - 0.75 d - 0.75}{3/3 d^2 + 16 d + 5} pL^2 \quad /A/ \quad /37/$$

$$\min M_1 = \frac{30 d^2 + 10 d - 7}{12/3 d^2 + 16 d + 5} pL^2 \quad /B/ \quad /38/$$

Z przyrównania /37/ do /38/ otrzymujemy:

$$d_{opt} = 0.25 \quad /39/$$

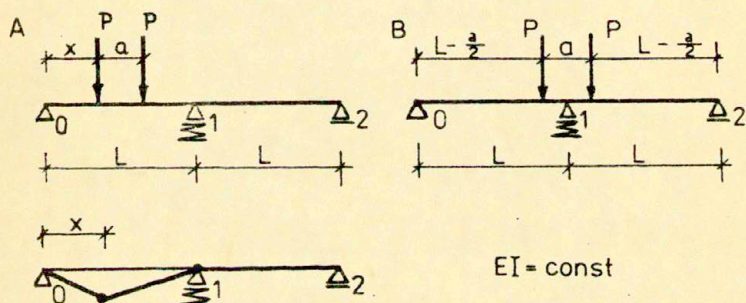
dla którego $\max P_{ppo} = P_{no} = 11.6569 \frac{M_0}{L}$

Na uwagę zasługuje tu fakt, że otrzymano to samo d_{opt} co dla analogicznie obciążonej belki dwuprzęsłowej, jednak przy różnej wartości momentu podporowego. Dla belki dwuprzęsłowej był to moment równy zero. Dla rozpatrywanej belki trójprzęsłowej moment podporowy równy był zero, gdy $d = 0.3443$.

7.2. Belka dwuprzęsłowa na środkowej podporze sprężystej obciążona dwiema siłami P przesuwanymi się wzdłuż belki.

Z wyników otrzymanych dla belki dwuprzęsłowej na środkowej podporze sprężystej, obciążonej siłą ruchomą i dla belki dwuprzęsłowej na podporach sztywnych obciążonej dwiema siłami ruchomymi /p.3.2.5 i 3.2.1 rozprawy [9] / można wnieść, że wpływ podatności sprężystej podpory na wielkość obciążenia przystosowania, jak również różnice między obciążeniem przystosowania a nośnością graniczną belki będą niewielkie, gdy rozstaw a sił P należy do zakresu $0 \leq a < 0.5 L$, a mogą posiadać istotne znaczenie, gdy $a \geq 0.5 L$.

Z dalszych rozważań okaże się, że dobór optymalnej podatności sprężystej podpory, dla której równanie /33/ będzie spełnione, jest możliwy jedynie dla a należących do pierwszego z wyżej wymienionych zakresów.



Rys. 7

Rozpatrzmy przedział zmienności określonego wzorem /1/ parametru d , odpowiadający momentowi podporowemu $M_1 \leq 0$. Dla d zawartych w tym przedziale istnieją dwa możliwe położenia sił P /rys.7/, przy których moment zginający M_1 nad

podpora 1 może osiągnąć wartość najmniejszą. W zależności od d i rozstawu a siła P minimum momentu podporowego $\min M_1$, odpowiada jednemu z tych położeń.

Maksymalnemu momentowi $\max M_x$ w przegubie przęsłowym odpowiada ustawienie lewej siły nad przekrojem, w którym utworzył się przegub, przy czym przegub tworzy się w odległości $x < 0,5L$ od podpory 0. Położeniu B siła P nie może zatem odpowiadać jednocześnie występowanie $\min M_1$ i $\max M_x$, bowiem lewa siła jest w tym położeniu ustawiona w odległości $L - \frac{a}{2}$ od podpory 0, a więc w odległości większej lub co najwyżej równej $0,5L$.

Zatem, gdy położenie B jest właściwe dla $\min M_1$, tj. gdy moment:

$$M_1(B) = \frac{0,25}{1+d} \frac{\alpha - 2}{\alpha} / -0,25 \alpha^2 + \alpha - 2d / PL \quad /40/$$

w którym $\alpha = \frac{a}{L}$, jest mniejszy od $\min M_1^{(A)}$, dobór podatności sprężystej podpory, dla której równość /33/ byłaby spełniona nie jest możliwy.

Gdy $\min M_1$ odpowiada położeniu A siła P wyznaczamy odległość $x_1 = \frac{x_1}{L}$ lewej siły od podpory 0, przy której minimum to występuje, minimalizując względem x wyrażenie na odpowiadający położeniu A moment zginający M_1 o postaci:

$$M_1 = \frac{0,25}{1+d} \left[2x^3 + 3\alpha x^2 - 2 - 3\alpha^2/x - \alpha + \alpha^3 + 2/2\alpha + \alpha/d \right] PL \quad /41/$$

Z minimalizacji tej otrzymujemy:

$$x_1 = -0,5\alpha + 0,5 / -\alpha^2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}d / \quad /42/$$

Dobierając następnie d tak, aby $\alpha_1 = \alpha_n$, otrzymujemy położenie lewej siły, przy którym w przegubach plastycznych mechanizmu miarodajnego dla P_n występują jednocześnie $\max M_x$ i $\min M_1$, a dobrana wartość parametru d jest optymalna, odpowiadająca $\max P_{ppo} = P_{no}$.

Z przyrównania α_n do /42/ otrzymano:

$$d_{opt} = -1.5 \alpha_n^2 - 1.5 \alpha \alpha_n - 0.75 \alpha^2 + 0.5 \quad /43/$$

Obliczając z wzorów /72/ rozprawy / [9] str.98/ α_n i P_{no} , a następnie wyznaczając z /43/ d_{opt} otrzymano następujące rozwiązania dla kilku rozstawów a sił P .

a	α_n	d_{opt}	$P_{ppo} = P_{no}$
0.0	0.414	0.243	2.928 M_0/L
0.1 L	0.396	0.198	3.162 „
0.2 L	0.378	0.142	3.492 „
0.3 L	0.360	0.076	3.855 „
0.4 L	0.342	~ 0	4.233 „

Wyznaczone dla $a=0.4 L$, $\alpha_n = 0.342$ i $d_{opt} = 0$ z wzorów /40/ i /41/ wartości momentów podporowych odpowiadające schematom B i A obciążenia wyniosły:

$$M_1^{(B)} = -0.144 PL, \quad \min M_1^{(A)} = -0.1588 PL$$

co, ze względu na to że $\min M_1^{(A)} < M_1^{(B)}$ potwierdziło zasadność wyznaczenia d_{opt} z wzoru /43/.

Dla $a = 0.5 L$ spełnienie warunku jednoczesności występowania $\max M_x$ i $\min M_1$ nie jest już możliwe, a zatem równanie /33/ nie ma rozwiązania.

8. WNIOSKI KOŃCOWE

Z przeprowadzonych dla belek ciągłych rozwiązań wynika, że pominięcie przy projektowaniu na przystosowanie niewielkich podatności sprężystych podpór, mających w praktyce inżynierskiej podstawowe aplikacyjne znaczenie, jest korzystne dla bezpieczeństwa tych konstrukcji, a zatem dopuszczalne.

Sformułowane i udowodnione twierdzenie o osiągnięciu maksymalnego obciążenia przystosowania stwarza szerokie możliwości optymalizacji konstrukcji poddanych działaniu obciążeń zmiennych.

Zaproponowana uproszczona metoda optymalizacji podatności sprężystej podpór belek ciągłych ze względu na maksimum obciążenia przystosowania umożliwia bezpośrednio otrzymanie wyników potrzebnych do optymalnego zaprojektowania tych konstrukcji.

W perspektywie - zastosowanie podpór o optymalnej podatności sprężystej może uczynić z konstrukcji zaprojektowanej optymalnie na przeniesienie obciążeń stałych /por. [5]/ konstrukcję optymalną również i na przeniesienie obciążeń zmiennych w czasie.

L i t e r a t u r a

1. Ciampi V., Gavarini C. Optimal choice of elastic parameters for systems in conditions of static or dynamic shakedown. Arch. Inż. Łąd. XXVII, 3/1981.
2. Eyre D.G., Galambos T.V. Shakedown of beams on flexible supports. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.102, No.ST5. Proc. Paper 12101, May, 1976.
3. Grundy P. Shakedown under Moving Loads. Civil Eng.Trans. CE 13, 1971.
4. Grundy P., Spencer W.J. Shakedown of elastoplastic grids. Fifth Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials. Melbourne, 1975.

5. Mróz Z., Lekszycki T. Optimal support reaction in elastic frame structures. Computers and Structures. Vol. 14, No 3-4, 1981. Pergamon Press.
6. Neal B.G. The plastic methods of structural analysis, 3rd ed. Chapman and Hall, London, 1977.
7. Oppenheim I.J. Shakedown under elastic support conditions. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST7, Proc. Paper 15536, July, 1980.
8. Paprocka-Garlicka W. Analiza wytrzymałościowa poddanej działaniu obciążenia ruchomego stalowej belki ciągłej na podporze sprężystej. Prace IPPT, 7/1982.
9. Paprocka-Garlicka W. Zagadnienia udźwigu żelbetowych i stalowych konstrukcji ze wstępnymi naprężeniami. Prace IPPT, 33/1983.
10. Polizzotto C. Discussion on: Shakedown under elastic support conditions. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, NO. ST6. Proc. Paper 17116, June, 1982.
11. Stüssi F., Kollbrunner C.F. Beitrag zu Traglastverfahren. Bautechnik, 13, 1935, 264.