

3.32 — nieliniowe fale w plazmie

Andrzej J. Turski

**WARSTWY PODWÓJNE
STREF PRZEJŚCIOWYCH
WIEŁOSKŁADNIKOWEJ
PLAZMY KOSMICZNEJ**

7/1985

P-269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpięta do Redakcji dnia 12 grudnia 1984 r.



56942



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,55 Ark.druk. 2,5

Oddano do drukarni w lutym 1985 r.

Nr zamówienia 119/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa
ul. Śniadeckich 8

Andrzej J. Turski
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów

WARSTWY PODWÓJNE STREF PRZEJŚCIOWYCH
WIELOSKŁADNIKOWEJ PLAZMY KOSMICZNEJ

1. Wstęp

Elektryczne warstwy podwójne /WP/ pojawiają się w plazmie w sytuacjach silnych pól i prądów elektrycznych. Reprezentują silnie nieliniowy stan i stanowią interesujący problem zarówno Fizyki Plazmy jak Fizyki Przestrzeni Kosmicznej. Sądzi się, że są one przyczyną przyspieszania cząstek wyładowań laboratoryjnych i zorzowych oraz mają związek z anomalną rezystywnością. WP należą do tych zjawisk, które były badane od chwili powstania Fizyki Plazmy /wyładowania w gazach/. Obserwowano tworzenie się WP już wiele lat temu w słabo-prądowych wyładowaniach prądu stałego. WP były również generowane przy pomocy silnych strumieni elektronów. Jednak zrozumienie istotnych zjawisk fizycznych związanych z WP było utrudnione przez wiele efektów maskujących, np. jonizację, straty, wpływ brzegów itp. Sytuacja ta uległa zasadniczej poprawie dzięki rozwojowi współczesnej diagnostyki plazmy, nowej aparaturze, sposobom generacji bezzderzeniowej plazmy i sposobom zmniejszania strat przy pomocy silnych pól magnetycznych. Gwałtowny rozwój badań nad zagadnieniami WP wyraża się wielką liczbą ukazujących się publikacji. Rozwijają się badania w zakresie metod analitycznych i symulacji numerycznej WP-ch. Z analitycznego punktu widzenia stało się zrozumiałym, że stacjonarny, jednowymiarowy i bezzderzeniowy charakter WP sugeruje opis przy pomocy odpowiednich rozwiązań równań Własowa-Poissona. Dotychczasowe trudności w analizie tych zjawisk polegały na przyjęciu zbyt skomplikowanego opisu matematycznego uwzględniającego wiele nieistotnych

efektów zaciemniających istotę zjawiska.

Zadaniem tej pracy będzie przedstawienie metod analizy prowadzących do postępu w poznaniu zjawisk WP i umożliwiających badanie przypadków wieloskładnikowej plazmy a w szczególności wpływu jonów ujemnych i elektronów o dwóch różnych rozkładach /gorących i zimniejszych/.

Warstwy Podwójne w przestrzeni kosmicznej występują w strefach przejściowych między obszarami plazmy o różnych parametrach, np. gęstości, temperaturze, składzie, potencjale, polu elektrycznym i magnetycznym. Plazmopauza jest stacjonarną WP typu jonowo-akustycznego i w okresie burz magnetycznych w obszarze plazmopauzy pojawiają się fale solitonowe z ogonem /przypuszczalnie jony o znacznych prędkościach od solitonu/. Eksperymenty i obserwacje w przestrzeni kosmicznej wskazują, że formowanie się WP-ych wiąże się z powstawaniem fali solitonowej. Satelita S3-3 umieszczony na orbicie polarnej wykrył wiele zjawisk, które świadczą o tworzeniu się WP-ch wzdłuż linii sił pola geomagnetycznego strefy polarnej. Promieniowanie kilometrowe znajduje jeszcze jedno wyjaśnienie oparte na wzbudzeniu modu - X /nadzwyczajny/ indukowanego hamowaniem zorzowych strumieni elektronów w warstwach podwójnych. Jak sądzi się, silny spadek potencjału wzdłuż linii sił pola geomagnetycznego w strefie zorzy polarnej związany jest z wieloma słabymi WP-ymi.

Wyniki pracy przedstawione są według następującego planu. W rozdziale 2 omawia się podstawowe typy WP i ich klasyfikację, natomiast rozdz.3 poświęcony jest zwięzłemu przeglądowi metod analizy WP-ch opracowanych przez B.G.K i H.Schamela. Zwraca się tu uwagę na przyjęcie stacjonarnych równań i nieanalitycznego łączenia funkcji rozkładów cząstek schwytych i swobodnych.

W rozdz.4 przedstawiono metodę hierarchizacji równań Własowa-Poissona z czasem w celu wyznaczenia stacjonarnego rozwiązania na funkcje rozkładu prędkości cząstek dla fali biegnącej. Wybrany rozkład równowagowy, który jest funkcją analityczną prędkości, zaburza się adiabaticznym włączeniem pola w nieskończoności. Rozdział 5 zajmuje się metodą analizy WP-ch opracowaną w oparciu o kwazi-stacjonarną odpowiedź wieloskładnikowej plazmy, której stany równowagowe zadane są przy pomocy

odpowiedniej kombinacji funkcji Heaviside'a opisującej składniki plazmy o prędkościach termicznych znacznie różniących się od prędkości fali.

2. Definicja, ogólny opis i klasyfikacja WP

Warstwa podwójna jest tu określona jako jednowymiarowa, bezzderzeniowa struktura potencjału elektrostatycznego, która

- i/ łączy dwa różne, asymptotycznie jednorodne potencjały plazmy, tj. $\Psi > 0$ gdzie

$$\Psi = |\phi(x \rightarrow +\infty) - \phi(x \rightarrow -\infty)|$$

jest spadkiem potencjału mierzonym w jednostkach bezwymiarowych, tzn.

$$\phi = \frac{|e| \varphi}{k T_e}$$

- ii/ stanowi rozdzielenie ładunku a rozmiar tej strefy przejściowej mierzony jest w jednostkach elektronowej długości Debye'a λ_e ,
- iii/ posiada energię elektrostatyczną i energię kinetyczną związaną z koherentną strukturą znacznie przewyższającą odpowiednie energie fluktuacji, które nakładają się na WP-ne.

Rozróżnia się słabe WP ($\Psi \ll 1$) i silne WP ($\Psi > 1$).

Warstwy podwójne mogą być związane z przepływem prądu elektrycznego ale nie jest to konieczny warunek ich istnienia.

W związku z istnieniem monotonicznego spadku potencjału

/Rys. 1 i 2/ możemy spodziewać się występowania cząstek schwytych /odbitych/. Strumień jonów zbliżający się od strony wyższego potencjału zostaje opóźniony w strefie niskiego potencjału elektrycznego. Część jonów o energii kinetycznej mniejszej od energii potencjalnej pola zostanie odbita i zatrzymana po stronie niskiego potencjału, natomiast jony o energiach większych przedostaną się w tę strefę. W nieskończoności suma jonów odbitych i swobodnych wyniesie tyle ile wynosi gęstość elektryczna stanu równowagi, osiąganego przez jony i elektrony wzajemnie się neutralizujące. Elektrony zachowują się antysymetrycznie, tzn. zostają schwyte po stronie wyższego potencjału.

Tak więc WP-e są zasadniczo zjawiskiem kinetycznym i można spodziewać się, że będą dobrze opisywane przy pomocy równań Własowa-Poissona. Uproszczony opis płynowy WP-ch jest też stosowany. Implikacją fizyczną istnienia elektrostatycznych WP-ych jest przyspieszanie pewnych grup cząstek i jednocześnie gromadzenie innych grup cząstek w odpowiednich obszarach. Aspekt przyspieszania cząstek znajduje znaczne zainteresowanie w fizyce kosmicznej, plazmie okołoziemskiej i plazmie laboratoryjnej, natomiast pułapkowanie cząstek stanowi ważny aspekt zainteresowania fizyki termojądrowej, np. w tandemowych maszynach zwierciadlanych utrzymujących barierę potencjału ograniczającą straty ucieczki końców kolumny plazmy.

Znanych jest wiele typów WP-ch, różnią się one kształtem i wielkością spadku potencjału, rozkładem gęstości składników plazmy, zawartością i rozkładem cząstek schwytych /odbitych/ i swobodnych, obecnością pola magnetycznego lub jego brakiem oraz sposobami ich pobudzania i podtrzymywania. Wyróżnia się warstwy stanu przejściowego i stacjonarne. W literaturze spotykamy wiele nazw i klasyfikacji tych warstw. Tu przedstawimy klasyfikację WP-ch opartą na kształcie i wielkości spadku potencjału. Do pierwszej grupy, dalej zwanej WP-I, zaliczamy warstwy o ściśle monotonicznym przebiegu potencjału. Rys. 1 przedstawia jakościowy przebieg potencjału tej warstwy oraz przebieg natężenia pola elektrycznego i gęstości elektrycznej plazmy. Natomiast na Rys. 2 pokazano trzy typy ściśle monotonicznej grupy warstw. Różnią się one rozkładem przestrzennym gęstości jonów i elektronów z podziałem na cząstki swobodne i całkowitą gęstość składnika. Gęstość cząstek schwytych jest równa różnicy tych ostatnich przebiegów. W pierwszej kolumnie Rys. 2 pokazano przebiegi dla silnych WP-I, dla których istnieje dolna granica dla potencjału, tzn. $\Psi > 1$, a nie ma granicy górnej. Warstwa ta charakteryzuje się tym, że oprócz strumienia cząstek swobodnych, istnieją strumienie cząstek odbitych /schwytych/. Po stronie wyższego potencjału znajdujemy strumień odbitych elektronów a po stronie niskiego potencjału strumień odbitych jonów. Koncentracje schwytych cząstek są symetryczne względem płaszczyzny symetrii warstwy. WP-I łączy obszary plazmy o tej samej koncen-

trącji składników i jest podtrzymywana silnym polem elektrycznym lub strumieniem cząstek i nazywa się też WP-strumieniową /beam type/. Następne dwa typy WP-I łączą obszary o różnych gęstościach plazmy. Pierwszy z nich, przedstawiony w drugiej kolumnie Rys. 2, charakteryzuje się dużą koncentracją jonów, schwytych po stronie niskiego potencjału i znacznie mniejszą koncentracją elektronów schwytych po stronie wysokiego potencjału. Nieliniowy związek dyspersyjny dla tej warstwy, to jest związek amplitudy potencjału i prędkości strumienia, jest tu analogiczny jak dla powolnej fali elektronowo-akustycznej i stąd warstwę tę nazywa się powolną elektronowo-akustyczną WP-a. W kolumnie trzeciej Rys. 2, przedstawiono powolną jonowo-akustyczną WP-a, której koncentracja jonów i elektronów schwytych jest odwrotna w stosunku do warstwy poprzedniej.

Druga grupa warstw - WP-II, przedstawiona jest na Rys. 3 i 4 i nosi nazwę asymetrycznej i symetrycznej WP jamy jonowej. Nazwa ta wynika z tego, że w przestrzeni fazowej jonów tworzy się jama jonów schwytych. Warstwy te nazywane są również warstwami potrójnymi - ponieważ występują tu trzy warstwy /Rys.3/ lub jonowo-akustycznymi - ponieważ ich nieliniowy związek dyspersyjny jest analogiczny do fali jonowo-akustycznej. Warstwy te charakteryzują się słabym skokiem potencjału, tzn. $0 \ll \Psi \ll 1$, i wzbudzone są przepływem prądowym.

Trzecia grupa warstw - WP-III pokazana jest na Rys. 5 i nazwana jest asymetryczną WP jamy elektronowej - ponieważ w elektronowej przestrzeni fazowej tworzy się jama elektronów schwytych.

3. Metoda B.G.K. i H.Schamela analizy plazmowych WP

Przedstawimy - na podstawie prac Bernstein-Greene-Kruskala i H.Schamela, [1] do [8], metodę analizy plazmowych warstw podwójnych opartych na stacjonarnych równaniach Własowa-Poissona.

Poszukuje się rozwiązań stacjonarnych równań Własowa dla jonów i elektronów wraz z równaniem Poissona dla monotonicznie zmieniającego się potencjału $\phi(x)$ między punktami $x_{min} \ll x \ll x_{max}$, dla których występują najmniejsza i największa wartość ϕ_{min} i ϕ_{max} . Prędkość elektronów i jonów, współrzędna przestrzenna

i potencjał elektryczny znormalizowane są odpowiednio względem termicznej prędkości elektronów $v_{Te} = (T_e/m_e)^{1/2}$, jonów $v_{Ti} = (T_i/m_i)^{1/2}$, długości elektronowej Debye'a $\lambda_{De} = (T_e \epsilon_0 / N_0 e^2)^{1/2}$ i T_e/e , gdzie $T_e (T_i)$ jest energią termiczną swobodnych elektronów /jonów/. Równania Własowa statyczne dla elektronów i jonów są

$$/1/ \quad \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \phi'(x) \frac{\partial}{\partial v} \right) f_e = 0$$

$$/2/ \quad \left(u \frac{\partial}{\partial x} - \theta \phi'(x) \frac{\partial}{\partial u} \right) f_i = 0$$

gdzie $\theta = T_e/T_i$. Dla wygody, oznaczono prędkość elektronów v a prędkość jonów u . Rozwiązanie równań /1/ i /2/ można wyrazić przy pomocy stałych ruchu, które są energiami cząstek z odpowiednim znakiem. U podstaw metody BGK leży wyróżnienie funkcji rozkładu dla cząstek swobodnych i schwytych.

Do plazmy składającej się z elektronów i jonów jednego rodzaju wyróżnia się cztery różne rozkłady

$$/3/ \quad \begin{array}{ll} f_{ef}(v^2/2 - \phi, v_0) & f_{if}(u^2/2 + \theta\phi, u_0, A) \\ f_{et}(v^2/2 - \phi, \beta) & f_{it}(u^2/2 + \theta\phi, \alpha, A) \end{array}$$

Rozróżnia się funkcję rozkładu dla cząstek swobodnych $f_{\alpha f}(\alpha = e, i)$ i schwytych $f_{\alpha t}(\alpha = e, i)$ na podstawie następujących nierówności

$$/4/ \quad \xi_e \equiv v^2/2 - \phi \begin{cases} \geq -\phi_{min} \\ \leq -\phi_{max} \end{cases}, \quad \xi_i \equiv u^2/2 + \theta\phi \begin{cases} \geq \theta\phi_{max} \\ \leq \theta\phi_{min} \end{cases}$$

gdzie $\xi_{\alpha} (\alpha = e, i)$ są znormalizowanymi energiami poszczególnych cząstek. Górny znak dotyczy cząstek swobodnych, środkowy znak dotyczy cząstek schwytych, a dolny znak odnosi się do separatrysy oddzielającej cząstki schwytane od swobodnych.

Energia cząstek swobodnych jest dostatecznie duża by zapewnić ich przejście przez barierę potencjału $-\phi_{min}$ dla elektronów i $\theta\phi_{max}$ dla jonów. Natomiast energia cząstek schwytych jest za mała dla przejścia przez barierę potencjału tak, że w pewnym punkcie przed barierą, zależnym od energii cząstki, nastąpi jej zatrzymanie i zwrot w kierunku przeciwnym /odbicie cząstki schwy-

tanej/. Nierówności /4/ służą do sporządzania wykresów prędkości jonów i elektronów w funkcji położenia, tzw. diagramy jonowej i elektronowej przestrzeni fazowej. Parametry v_0 i u_0 rozkładów cząstek swobodnych przedstawiają średnią prędkość dryfu odpowiednio elektronów i jonów. Prędkości te są niezbędne dla opisu odpowiednich prądów. Natomiast α i β występujące w rozkładach cząstek schwytych regulują konfigurację cząstek. "A" jest stałą normalizacji i może być wprowadzone do rozkładu jonów lub elektronów. H.Schamel [8] przyjmuje następujące założenia odnośnie funkcji rozkładu

1/ $f_{\alpha f} (\alpha = e, i)$ jest przesuniętym maxwellianem tam gdzie nie występują cząstki schwyte, tj. dla $\phi = \phi_{min}$ ($\phi = \phi_{max}$) w przypadku elektronów /jonów/. Na przykład dla elektronów lewa strona Rys.2. kolumny 1, 2 i 3-ej i prawa strona dla jonów.

2/ $f_{\alpha t} (\alpha = e, i)$ są symetrycznymi, nieprzesuniętymi maxwellianami, dla których temperatury mogą być różne od temperatury cząstek swobodnych, tj. $T_{et} = T_e / \beta$ i $T_{it} = T_i / \alpha$. Również dopuszcza się ujemne temperatury, tzn. $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

3/ Funkcje rozkładów są ciągłe w całej przestrzeni prędkości.

Całkując funkcje rozkładu względem u i v otrzymuje się gęstości cząstek, tj.

$$/5/ \quad n_e = n_e(\phi, v_0, \beta) \quad n_i = n_i(\phi, u_0, \theta, \alpha, A)$$

Pozostaje zatem rozwiązać równanie Poissona,

$$/6/ \quad \phi''(x) = n_e - n_i = -\frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi, \dots)$$

gdzie prawa strona jest funkcją znaną. W celu rozwiązania tego równania posługujemy się metodą przestrzeni fazowej stosowaną do równań oscylatora nieliniowego

$$\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x), \quad x = x(t)$$

Funkcję $V(\phi, \dots)$ wyznaczamy całkując gęstości względem ϕ , tj.

$$V = \int_{\phi_{\min}}^{\phi} [n_i(\phi', \dots) - n_e(\phi', \dots)] d\phi'$$

gdzie założono, że $V(\phi_{\min}, \dots) = 0$

lub w sposób równoważny

$$V = - \int_{\phi}^{\phi_{\max}} [n_i - n_e] d\phi'$$

gdzie $V(\phi_{\max}, \dots) = 0$.

Istnieje jednoznaczna relacja między potencjałem $\phi(x)$ i funkcją $V(\phi)$, która wyraża się następującym równaniem

$$/7/ \quad \frac{1}{2} [\phi'(x)]^2 + V(\phi, \dots) = 0$$

które otrzymano całkując równ. /6/ względem ϕ . Można zauważyć, że $\partial V / \partial \phi$ znika w tych punktach, w których gęstość elektryczna jest zero dla odpowiednich wartości ϕ . Zgodnie z metodą przestrzeni fazowej jednoznaczne rozwiązanie równ. /6/ istnieje i jest odpowiednio określone jeżeli $V(\phi)$ jest ujemne w przedziale $\phi_{\min} < \phi < \phi_{\max}$.

Relacje

$$/8/ \quad V(\phi_{\max}, \dots) = 0 \quad \text{lub} \quad V(\phi_{\min}, \dots) = 0$$

wiążące prędkość dryfu u_0 z amplitudą ϕ_{ex} nazwano nieliniowymi związkami dyspersyjnymi przyjmując, że u_0 jest ujemną prędkością fali w układzie nieruchomych jonów.

Przytoczymy przykłady funkcji rozkładu cząstek swobodnych i schwytych spełniających równanie /1/ lub /2/.

WP-I przedstawioną na Rys. 1 i w kolumnie drugiej Rys. 2, opisują następujące rozkłady:

$$a/ f_{ef} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(\sigma_e(2\epsilon_e)^{\frac{1}{2}} - v_0)^2] \quad \text{dla } \epsilon_e > 0$$

$$b/ f_{ef} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\beta\epsilon_e - v_0^2/2] \quad \text{dla } \epsilon_e \leq 0$$

/9/

$$c/ f_{if} = A(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(\sigma_i(2\epsilon_i)^{\frac{1}{2}} - u_0)^2] \quad \text{dla } \epsilon_i > 0$$

$$d/ f_{if} = A(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\alpha\epsilon_i - u_0^2/2) \quad \text{dla } \epsilon_i \leq 0$$

Indeks „ef” i „if” oznacza schwymane /trapped/ elektrony i jony, „ef” i „if” oznacza swobodne /free/ elektrony i jony. Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\sigma_e = \text{sgn } v, \quad \sigma_i = \text{sgn } u, \quad \epsilon_e = (v^2 - 2\phi)/2$$

$$\epsilon_i = (u^2 - 2\theta(\Psi - \phi))/2 \quad \text{oraz } \theta = T_e/T_i.$$

Prędkości v_0 i u_0 są prędkościami dryfu cząstek swobodnych w obszarze gdzie nie ma odpowiednich cząstek schwypanych. Parametry α i β kontrolują koncentrację cząstek schwypanych. Skok potencjału jest określony przez Ψ . Natomiast A jest stałą normalizacyjną. Funkcje rozkładu dla elektronów i jonów składają się z rozkładów dla cząstek swobodnych i schwypanych w sposób ciągły, co według autora tej metody [7] jest niezbędne dla fizycznej akceptacji tej teorii. Zajmiemy się tym aspektem bardziej szczegółowo.

Rozkłady f_e i f_i są tu potrzebne dla wyznaczenia koncentracji elektronów i jonów

$$/10/ \quad n_e = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(v, \dots) dv \quad \text{i} \quad n_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(u, \dots) du$$

które następnie podstawia się do równania Poissona /6/. Z tego ostatniego wyznacza się przebiegi potencjału $\phi(x)$ dla funkcji $V(\phi)$ kontrolowanej przez parametry v_0 , u_0 , α , β , Ψ i A . Rozwiązanie akceptowalne analitycznie i fizycznie to takie, które otrzymamy zaburzając plazmę w odpowiedni

sposób i w następstwie rozwoju czasu otrzymany stan stacjonarny tu wyznaczony. W celu uzyskania takiego wyniku należy zbadać czasowy rozwój zaburzenia początkowego dla równań Własowa-Maxwella zależnych od czasu. Zwraca się uwagę, że każdy z rozkładów /9/ jest maxwellianem w odpowiednim przedziale istnienia i jest funkcją analityczną zmiennych v i ϕ to znaczy rozwijalną w szereg potęgowy Taylora w tych przedziałach. Funkcja analityczna w całej przestrzeni, $v \in (-\infty, \infty)$, prędkości v i spełniająca stacjonarne równanie Własowa po scałkowaniu względem prędkości v w tej przestrzeni jest również funkcją analityczną ϕ . Tak więc koncentracje n_e i n_i winny być rozwijalne w szereg Taylora względem ϕ . Należy uznać, że analityczne rozkłady, np. maxwelliany prowadzą do fizycznie akceptowalnych rezultatów i podobnie rozkłady przedstawiane przy pomocy funkcji uogólnionych /dystrybucji/, np. Deltę Diraca i funkcji Heaviside'a stanowią zadawalające przybliżenia zimnych i gorących składników plazmy, Prowadzą one do momentów funkcji rozkładu /koncentracja, średnia prędkość, energia, .../, które są rozwijalne w szeregi potęg całkowitych względem ϕ i tym samym, przynajmniej dla $|\phi| < 1$, są zbieżne z wynikami otrzymywanymi przy pomocy opisu płynowego. Natomiast tu wyznaczone koncentracje rozwijalne są w szeregi potęg połówkowych dla $\phi < 1$. Dla przykładu przytoczymy rozwinięcie koncentracji elektronów wyznaczonej na podstawie /9a, b/, wg. H.Schamela [7]

$$/11/ \quad n_e(\phi) = 1 + b_1\phi + b_2\phi^{3/2} + b_3\phi^2 + b_4\phi^{5/2} + \dots$$

gdzie b_1, b_2, \dots są stałymi zależnymi od v_0 i β . Podobnie BGK [1] otrzymują dla koncentracji cząstek szeregi potęg połówkowych. W pracy [9] przedstawiono zmodyfikowane równanie KdV o silniejszy człon nieliniowy w potęgde połówkowej. Taka modyfikacja jest niezrozumiała w opisie płynowym. Połączenie dwóch funkcji analitycznych w sposób ciągły a nie metodą analitycznego przedłużenia niekoniecznie prowadzi do funkcji analitycznej w tym punkcie. Funkcja rozkładu f_{ef} /9a/ ma granicę skończoną dla $v \rightarrow \pm\sqrt{2\phi}$, ale jej pochodna

$$/11a/ \quad \left| \frac{\partial f_{ef}}{\partial v} \right| = \left| f'_{ef}(v, \phi, \dots) \left(\frac{-v}{2\sqrt{2}\epsilon_e} \right) \right| \xrightarrow{\epsilon_e \rightarrow 0} \infty$$

zmierza do nieskończoności. Rozkład stanu równowagowego dla jonów /9 c, d/, tj. gdy $\phi = 0$, nie jest funkcją analityczną, co może budzić szczególne zastrzeżenia. Nie oznacza to jednak, że wszystkie wyniki otrzymane metodą BGK i H.Schamela są niepoprawne. Wiele z nich stanowi dobre przybliżenie sytuacji fizycznej.

W następnym rozdziale rozpatrzmy metodę hierarchizacji równań Własowa-Poissona z czasem w celu wyznaczenia rozwiązania na funkcję rozkładu prędkości cząstek dla fali biegnącej. Wybrany rozkład równowagowy - będący funkcją analityczną w przestrzeni prędkości, zaburza się adiabatycznym włączeniem pola w nieskończoności.

4. Hierarchizacja równań Własowa-Poissona.

Rozważmy nieliniowy układ równań Własowa-Poissona

$$/a/ \quad [\partial/\partial t + u \partial/\partial x + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E(x,t) \partial/\partial u] f_\alpha(u, x, t) = 0 \quad /Własow/$$

/12/

$$/b/ \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha} du = 0 \quad /Amper/$$

$$/c/ \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} du \equiv \varrho, \quad E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad /Poisson/$$

gdzie $f_{\alpha} = f_{\alpha}(u, x, t)$, q_{α} i m_{α} są odpowiednio funkcją rozkładu prędkości, ładunkiem i masą składnika α plazmy. Równania /12b/ i /12c/ są wzajemnie zależne ze względu na równanie zachowania ładunku.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad J = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha} du,$$

które otrzymuje się całkując rów. /12a/ względem prędkości u .

Poszukuje się rozwiązania na funkcję rozkładu f_α w postaci

$$/13/ \quad f_\alpha = N_{\alpha\alpha} f_{\alpha\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n\alpha}$$

gdzie: $N_{\alpha\alpha}$, $f_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha}(u)$ są odpowiednio koncentracją składnika α i rozkładem równowagowym gdy $E = 0$

i $f_{n\alpha} = f_{n\alpha}(u, x, t)$ jest nieliniowym funkcjonałem rzędu n względem E , tzn.

$$/14/ \quad f_{n\alpha}(kE) = k^n f_{n\alpha}(E) \quad \text{i} \quad f_{n\alpha} \circ f_{m\alpha} = f_{n+m,\alpha}$$

Funkcja równowagowa $f_{\alpha\alpha}$ jest funkcją analityczną posiadającą wszystkie momenty względem u , np. maxwellian. Rozwinięcie /13/ oznacza poszukiwanie rozwiązania w odniesieniu do stanu równowagowego lub nieliniową odpowiedź równowagowej plazmy.

Podstawiając /13/ do /12a/ otrzymuje się następującą hierarchię równań liniowych:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{1\alpha} + \frac{N_{\alpha\alpha}}{m_\alpha} q_\alpha E \frac{\partial f_{\alpha\alpha}}{\partial u} = 0$$

/15/

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{n\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \frac{\partial f_{n-1,\alpha}}{\partial u} = 0$$

W pracach [10] i [11] rozpatrzono problem początkowy

$$E(x, t_0) = 0, \quad f_{1\alpha}(u, x, t_0) = q_\alpha(u, x)$$

$$f_{n\alpha}(u, x, t_0) = 0 \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

i problem adiabaticznego włączenia pola w nieskończoności dla równań /15/ i /12b/. Tu przedstawimy zwięzły opis ostatniego problemu. Dla wyznaczenia odpowiedzi plazmy, zależnej od stanu równowagowego a niezależnej od warunków początkowych przedsta-

wimy rozwiązanie rów. /15/ w następującej postaci

$$f_{1\alpha} = - \frac{N_{0\alpha}}{m_\alpha} q_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u} \int_{-\infty}^t E(1) du$$

/16/

$$f_{n\alpha} = (-1)^n N_{0\alpha} \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^n \int_{-\infty}^t E(1) \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{t_1} E(2) \frac{\partial}{\partial u} \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} E(n) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial u} dt_1 \dots dt_{n-1}$$

gdzie $E(1) = E(x-u(t-t_1), t_1) \dots E(n) = E(x-u(t-t_n), t_n)$

Rozwiązania na $f_{n\alpha}$ spełniają warunki /14/ i stanowią asymptotyczne rozwiązania, które nazywa się odpowiedzią plazmy na "adiabaticzne włączenie pola w nieskończoności". Rozwiązania te można interpretować jako "pole dalekie" będące ewolucją zaburzenia początkowego zadanego w odległej chwili czasowej i w odległej przestrzeni.

Wstawiając /16/ do rów. /12b/ otrzymujemy następujące równanie abstrakcyjnego szeregu potęgowego, opisujące pole elektryczne będące odpowiedzią wieloskładnikowej plazmy:

$$/17/ \quad \frac{\partial E}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, t)$$

gdzie

$$/18/ \quad P_n(x, t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_{n-1} u E(1) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ E(2) \dots \frac{\partial}{\partial u} [E(n) K_n] \right\}$$

oraz
$$K_n = \sum_{\alpha} \frac{N_{0\alpha}}{\epsilon_0} q_\alpha \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^n f'_{0\alpha}(u)$$

Dla wyznaczenia rozwiązań w postaci /16/ i /17/ skorzystano z analityczności funkcji $f_{0\alpha}$. W celu wyznaczenia niezerowego rozwiązania skorzystamy z następującej własności wyrazów abstrakcyjnego szeregu potęgowego /18/. Poszukujemy rozwiązania w postaci fali biegnącej, tj.

$$E(x, t) = E(x - Ut), \quad \xi = x - Ut$$

z prędkością U względem nieruchomego ośrodka plazmowego. Możemy wtedy napisać

$$f_{n\alpha} = c_{n\alpha} \int_{\xi}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

i ponieważ potencjał pola elektrycznego

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} E(\xi_1) d\xi_1$$

zatem

$$f_{n\alpha} = \frac{c_{n\alpha}}{n!} \varphi^n(\xi)$$

gdzie

$$/18a/ \quad c_{n\alpha}(u) = (-1)^n N_{\alpha\alpha} \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^n (u-U)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \dots \frac{\partial}{\partial u} [(u-U)^{-1} f'_{\alpha\alpha}(u)] \right\}$$

a więc

$$/19/ \quad f_{\alpha}(u, \xi) = N_{\alpha\alpha} f_{\alpha\alpha}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n\alpha}(u)}{n!} \varphi^n(\xi)$$

Natomiast równanie /17/ przyjmie postać

$$/20/ \quad E(\xi) = -\sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha} \int_{\xi}^{\infty} (\xi - \xi_1) \int_{\xi_1}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

gdzie

$$/21/ \quad A_n^{\alpha} = (-1)^n \frac{N_{\alpha\alpha}}{\varepsilon_0} \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^n q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial}{\partial u} (u-U)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \dots \frac{\partial}{\partial u} [(u-U)^{-1} f'_{\alpha\alpha}(u)] \right\}$$

Różniczkując jednokrotnie rów./20/ otrzymujemy równanie nieliniowego oscylatora

$$/22/ \quad \varphi_{\xi\xi} = \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n^{\alpha} \varphi^n(\xi) \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} g_{\alpha} \quad , \quad E(\xi) = -\varphi_{\xi}(\xi)$$

gdzie $\varphi(\xi)$ przyjmuje rolę współrzędnej cząstki. Gęstość elektryczną składnika α oznaczono g_{α} . Nie zajmując się zbieżnością szeregów występujących w równaniach /19/ i /20/ zauważymy, że są to szeregi potęg całkowitych względem φ . Szereg prawej strony równania /19/ można uporządkować względem $f_{\alpha\alpha}^{(n)}(u)$, tj. pochodnych funkcji równowagowej, otrzymując:

$$/23/ \quad f_{\alpha}(u, \xi) = N_{\alpha} \left\{ f_{\alpha\alpha}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\alpha\alpha}^{(n)}(u)}{n!} R^n \right\}$$

$$\text{gdzie} \quad R = (u-U) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n = (u-U) [(1+r)^{1/2} - 1]$$

oraz

$$\alpha_n = \frac{(2n-3)!}{(2n)!!} \quad , \quad r = \frac{2g_{\alpha}\varphi(\xi)}{m_{\alpha}(u-U)^2} \quad , \quad (-1)! = 1 \quad , \quad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$$

Szereg R jest zbieżny dla

$$/24/ \quad |r| = \left| \frac{2g_{\alpha}\varphi(\xi)}{m_{\alpha}(u-U)^2} \right| < 1$$

i wtedy jest zbieżny szereg prawej strony rów. /23/ do następującej funkcji analitycznej zmiennej $(u+R)$, tj.

$$/25/ \quad f_{\alpha}(u, \xi) = N_{\alpha} f_{\alpha\alpha} \left[U + (u-U) \left(1 + \frac{2g_{\alpha}\varphi(\xi)}{m_{\alpha}(u-U)^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\text{gdy} \quad \left| \frac{2g_{\alpha}\varphi}{m_{\alpha}(u-U)^2} \right| < 1$$

Podstawiając $u - U = v$, $U = -v_0$, oraz $g_{\alpha}\varphi/m_{\alpha} = -\phi$ i przyjmując, że $f_{\alpha\alpha}$ jest maxwellianem otrzymuje się funkcję rozkładu dla swobodnych elektronów /9a/, która spełnia stacjonarne rów. /1/. Jednak, szereg prawej strony rów. /19/ jest roz-

bieżny dla

$$/26/ \quad \left| \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha (u-U)^2} \right| \gg 1$$

w przypadku przyjęcia rozkładu równowagowego Maxwella, lub każdego innego analitycznego rozkładu równowagowego, dla którego pochodne $f_{\alpha\alpha}^{(n)}(u)$ w punkcie $u = U$ nie są równe zero $/n = 1, 3, 5, \dots./$. Nie można zatem, w ogólnym przypadku, doprowadzić rozwiązanie asymptotyczne $/t \rightarrow \infty/$ do rozwiązania stacjonarnego równania Własowa. Zwraca się uwagę, że dla $q_\alpha \varphi > 0$ funkcja rozkładu /25/ spełnia stacjonarne równanie Własowa

$$/27/ \quad (u-U) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \varphi \xi \frac{\partial f_\alpha}{\partial u} = 0$$

w całym przedziale $u(-\infty, \infty)$ również dla $u = U$. Natomiast szereg /19/ i /23/ jest rozbieżny. Równanie stacjonarne wyklucza oddziaływanie fala - cząstka. Dla

$$\frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha (u-U)^2} \gg 1$$

f_α dane wzorem /25/ można rozwinąć w szereg potęg połówkowych względem pola φ i funkcja ta nie jest analityczna względem φ i u . Szczególnym przykładem zbieżności szeregu /23/ w przedziale $u(-\infty, \infty)$ jest przypadek $v = u - U$ oraz

$$/28/ \quad f_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha}^\alpha(v^2)$$

gdzie $f_{\alpha\alpha}^\alpha$ jest funkcją analityczną względem v^2 i wtedy

$$/29/ \quad f_\alpha(v) = N_{\alpha\alpha} f_{\alpha\alpha}^\alpha [v^2 + 2q_\alpha \varphi(\xi)/m_\alpha]$$

tnz. fala jest nieruchoma względem składnika α plazmy a rozkład równowagowy dla cząstek α jest funkcją parzystą v . Taki przypadek oznaczałby brak oddziaływania między cząstkami

i polem. Bardziej ogólnym przypadkiem będzie taki rozkład równowagowy, dla którego funkcja rozkładu będzie analityczną funkcją parzystą względem prędkości fali, tzn. wszystkie nieparzyste pochodne

$$/30/ \quad f_{\alpha\alpha}^{(2n+1)}(U) = 0$$

Metoda przedstawiona w Rozdz. 3, polegała na podzieleniu przedziału prędkości na przedział cząstek schwytych - opisany rozkładem typu /29/ i przedział cząstek swobodnych typu /25/. Oba rozkłady są funkcjami analitycznymi połączonymi w sposób ciągły ale w otoczeniu punktów spojenia mają nieciągłe pochodne /nieskończony skok/. W otoczeniu tych punktów szereg /19/ i /23/ jest rozbieżny i stan stacjonarny nie jest osiągalny. Rozbieżność tego szeregu ma związek z nieliniowym tłumieniem lub niestabilnościami Landau'a.

Jeżeli w otoczeniu prędkości U , która jest prędkością fali względem składnika α plazmy lub składnik α porusza się z prędkością $v_0 = -U$ względem potencjału nieruchomej fali, funkcja rozkładu maleje ze wzrostem $|u|$, $\partial f / \partial u < 0$ dla $u = U > 0$, tzn. występuje większa ilość cząstek wolniejszych względem U niż cząstek szybszych i jeżeli wolniejsze cząstki są przyspieszane przez potencjał fali ($q_\alpha \varphi > 0$) to występuje nieliniowe tłumienie Landau'a. Wtedy warunek /26/ jest spełniony i szereg /19/ jest rozbieżny i jedyny stan stacjonarny tu osiągnąć to $\varphi = 0$. Jeżeli natomiast przyspieszane są cząstki szybsze, tzn.

$$q_\alpha \varphi < 0$$

np. $\alpha = i$ /jony/, wtedy należy spodziewać się rozpadu fali /wave breaking/ i pojawienia się jonów o prędkościach

$$/31/ \quad v_b = \left(\frac{2q_i \varphi_{max}}{m_i} \right)^{1/2}$$

dla których wystąpi rozbieżność szeregu /19/, oraz osobliwość pochodnej /11a/.

Zjawisko to obserwowano eksperymentalnie i zostało nazwane

pseudofalami związanymi z wybuchem jonowym /ion bursting/, [12] i [13]. Pobudzając plazmę ujemnym skokiem potencjału o czasie narastania rzędu $1/f_{pi}$ / f_{pi} - częst. plazmowa jonów/ przyłożonym do metalowej siatki umieszczonej w jednowymiarowej plazmie obserwowano wybuch jonów o prędkościach [31]. Natomiast fala solitonowa o prędkości U przyspieszała jony do prędkości $u_b = U + v_b$, dając oscylacje wyprzedzające soliton, tzw. war-kocz solitonu.

W metodzie opartej na stacjonarnych rozkładach przyjmowanych przez H.Schamela dla opisu fal nieliniowych i WP-ch nie występują tłumienie Landau'a lub niestabilności rozpadu fali spowodowane wybuchem jonowym i pseudofalami. W tych przypadkach, w miejsce przybliżenia stacjonarnego, należy raczej przyjąć opis czasowo zależny bez członu z polem samouzgodnionym, patrz [12], tj.

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + u \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} = 0$$

przy odpowiednim warunku początkowym.

W następnym rozdziale określimy przypadki, dla których należy spodziewać się rozwiązań kwazistacjonarnych, tzn. wpływ niestabilności będzie minimalizowany. Podamy rozkłady równowagowe w dziedzinie dystrybucji oraz metodę prowadzącą do rozwiązań stacjonarnych zgodnych z opisem płynowym dla małych lecz skończonych amplitud.

5. Kwazistacjonarna odpowiedź plazmy wieloskładnikowej

Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że nie można otrzymać stacjonarnej odpowiedzi plazmy wychodząc ze stanu równowagowego opisanego, np. maxwellianem, gdy fala porusza się względem składnika α lub ten składnik porusza się względem potencjału pola elektrycznego. W rozdziale 3 przedstawiono metodę podziału dystrybuanty prędkości dla każdego składnika na dwa maxwelliany, jeden dla cząstek schwytych i drugi dla cząstek swobodnych. Ten ostatni prowadzi do niestabilności w otoczeniu punktów przeszerzenia prędkości, w których łączą się te rozkłady. Dla elektronów, dwa takie punkty od strony elektronów swobodnych są określone przez granicę

$$\varepsilon_e \equiv \frac{(u-U)^2}{2} - \frac{|e|\varphi(\xi)}{m_e} \rightarrow 0$$

gdzie

$$/32/ \quad \frac{|e|\varphi(\xi)}{m_e} = \phi + \phi_{\min}$$

oraz dla jonów

$$\varepsilon_i \equiv \frac{(u-U)^2}{2} - \frac{|e|\varphi(\xi)}{m_i} \rightarrow 0$$

gdzie

$$/33/ \quad \frac{|e|\varphi(\xi)}{m_i} = \theta(\phi_{\max} - \phi) \quad , \quad \theta = \frac{m_e}{m_i}$$

a zatem

$$\left| \frac{2q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (u-U)^2} \right| \rightarrow 1$$

co prowadzi do rozbieżności szeregu /23/ i nieliniowego tłumienia lub niestabilności Landaua!

Rozważmy przykład oparty o wyrażenia /9/. Dla rozkładów elektronów /9a i b/ uzyskuje się stan równowagi gdy $\phi = 0$, a dla rozkładu jonów /9c i d/ gdy $\Psi - \phi = 0$ i wtedy rozkłady równowagowe elektronów i jonów są odpowiednimi maxwellianami w przestrzeni prędkości $(-\infty, \infty)$. Możemy więc wyznaczyć odpowiedź plazmy $f_\alpha(u, \phi)$ dla $t \rightarrow \infty$ w postaci szeregu potęg całkowitych ϕ .

Niestety, szeregi /19/ nie są zbieżne w tych przypadkach i odpowiedź plazmy nie zmierza do stacjonarnych rozwiązań /9/ ze względu na niestabilności omówione w rozdziale 4. Wpływ tych niestabilności będzie tym mniejszy im mniejsza będzie różnica prądów cząstek szybszych $(U + \Delta u)$ i wolniejszych $(U - \Delta u)$ w otoczeniu prędkości fali U w stosunku do całkowitego prądu składnika α , t.zn.

$$/34/ \quad |J_{\alpha t}| \ll |J_\alpha|$$

gdzie

$$/a/ \quad J_{\alpha t} = q_{\alpha} \int_{-\Delta u}^{+\Delta u} u [f_{\alpha}(u+U_{\alpha}) - f_{\alpha}(U, \dots)] du$$

$$/b/ \quad J_{\alpha} = q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, \dots) du$$

oraz $(\Delta u)^2 \ll \left| \frac{q_{\alpha} \varphi(\xi)}{m_{\alpha}} \right|$

Warunek /34/ oznacza pominięcie oddziaływania fali z prądem cząstek schwytyanych. Prąd ten jest równy zero, gdy $f_{\alpha}(u, \dots)$ jest symetryczną funkcją u względem $u=U$. W przypadku rozkładu równowagowego opisanego maxwellianem, warunek /34/ będzie spełniony gdy U znajduje się w możliwie płaskiej części funkcji rozkładu, t.zn. gdy prędkość termiczna a_{α} będzie znacznie większa od U ($a_{\alpha} \gg U$, składnik gorący/ lub znacznie mniejsza od U ($a_{\alpha} \ll U$, składnik zimny/. Rys.6. wyjaśnia te relacje. Rys./6a/ ilustruje przypadek rozkładów dla kwazistacjonarnych solitonów i WP-ch jonowo-akustycznych natomiast Rys./6b/ przypadek kwazistacjonarnych, silnych, monotonicznych WP-I. Zauważmy, że $u=a_{\alpha}$ jest punktem przegięcia maxwellianu $f_{\alpha}(u)$.

W rozdziale 4 rozpatrywaliśmy zaburzenie stanu równowagowego nieruchomego względem układu laboratoryjnego i poszukiwaliśmy odpowiedzi w postaci fali biegnącej z prędkością U względem tego układu. Możemy przyjąć, że składnik α dryfuje w stanie równowagi z prędkością U_{α} , t.zn.

$$f_{\alpha x} = f_{\alpha x}(u - U_{\alpha})$$

i poszukiwać rozwiązanie w postaci fali biegnącej z prędkością U . Wtedy, pomijając efekty niestabilnościowe, mamy

$$/35/ \quad f_{\alpha} = f_{\alpha} \left[U_{\alpha} + (v - U_{\alpha}) \left(1 + \frac{2q_{\alpha} \varphi(\xi)}{m_{\alpha}} \right)^{1/2} \right], \quad v = u - U_{\alpha}$$

gdzie $U_{\alpha} = U - U_{\alpha}$ jest prędkością fali względem składnika plazmy. W notacji rozdz.3, tj. nieruchomego potencjału warstwy

względem układu laboratoryjnego, np. dla elektronów należy przyjąć: $v_e = -U_e$ i $v = v - U_e$. Można również poszukiwać rozwinięcia funkcji odpowiedzi dla składnika α względem całkowitych potęg $[\varphi_\alpha - \varphi(\xi)]$, gdzie φ_α jest stałym potencjałem z daleka od WP-ej gdy $\varphi(\xi) = 0$.

Najprawdopodobniejszym stanem równowagowym plazmy Własowa-Poissona, t.zn. plazmy z prędkością dryfu lub niedryfującej i w stałym potencjale pola elektrycznego ($E \cdot 0$) jest rozkład Maxwellowski. Dla tych rozkładów, kwazistacjonarna odpowiedź plazmy w postaci fali biegnącej lub dryfujących składników względem nieruchomego potencjału pola WP-ej może istnieć gdy $U_\alpha \gg a_\alpha$ lub $U_\alpha \ll a_\alpha$. Wobec tego proponuje się następujące przybliżenie rozkładów równowagowych:

$$\begin{aligned} /36/ \quad f_{o\alpha}(u) &= \frac{N_{o\alpha}}{2a_\alpha} \left\{ H[(u - U_{o\alpha}) + a_\alpha] - H[(u - U_{o\alpha}) - a_\alpha] \right\} = \\ &= \frac{N_{o\alpha}}{2a_\alpha} H[a_\alpha^2 - (u - U_{o\alpha})^2] \end{aligned}$$

gdzie $H(u)$ jest funkcją Heaviside'a, a_α - jest prędkością termiczną składnika α i $U_{o\alpha}$ - jest prędkością dryfu. Funkcję /36/ traktujemy jako funkcję uogólnioną, która posiada wszystkie pochodne i szereg na funkcję odpowiedzi daną wzorem /19/ jest zbieżny w sensie uogólnionym /dystrybucyjnym/, t.zn. dla każdej funkcji $d(u)$ należącej do przestrzeni funkcji tworzących klasę dystrybucji, zbieżny jest następujący szereg:

$$/37/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} d(u) f_\alpha(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \varphi^n(\xi)$$

gdzie

$$D_0 = N_{o\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_{o\alpha}(u) d(u) du, \quad D_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} c_{n\alpha}(u) d(u) du$$

oraz $c_{n\alpha}(u)$ dane jest wzorem /18a/ i zamiast U występuje U_α . Szereg ten jest zbieżny do funkcji $f_\alpha(u, \xi)$, jeżeli zachodzi równość /37/. Wszystkie momenty

będą rozwijalne w szereg potęg całkowitych względem φ . Taki opis, jak wykazano w pracy [10], dla słabych nieliniowości prowadzi do zgodności z opisem płynowym opartym na równaniu Kortewega de Vriesa i Boussinesqa dla fal solitonowych. Warto zwrócić uwagę, że rozkład /36/ dla $a_\alpha \rightarrow 0$ staje się deltą Diraca, t.zn.

$$/36a/ \quad f_{o\alpha}(u) = N_{o\alpha} \delta(u - U_{o\alpha}) \quad \text{gdy } a_\alpha \rightarrow 0$$

a więc rozkładem "zimnych" cząstek α .

Stacjonarna odpowiedź dla rozkładu α - składnika plazmy wyznaczona na podstawie szeregu /19/, będzie

$$/38/ \quad f_\alpha(u, \xi) = \frac{N_{o\alpha}}{2a_\alpha} [H(v - U_\alpha - u_1) - H(v - U_\alpha - u_2)]$$

gdzie

$$\left| \frac{2q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (a_\alpha \pm U_\alpha)^2} \right| < 1$$

przy czym

$$/a/ \quad u_1 = -(a_\alpha + U_\alpha) \left[1 - \frac{2q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (a_\alpha + U_\alpha)^2} \right]^{1/2}$$

$$/b/ \quad u_2 = (a_\alpha - U_\alpha) \left[1 - \frac{2q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (a_\alpha - U_\alpha)^2} \right]^{1/2}$$

oraz $a_\alpha > 0$ i $U_\alpha > 0$. Rys.7 ilustruje funkcję odpowiedzi /38/ w przypadku gdy

$$a_\alpha \gg U_\alpha \quad \text{oraz} \quad a_\alpha \ll U_\alpha$$

Równania opisujące płaszczyznę fazową cząstki są tu takie same jak w rozdziale 3 i dla cząstek schwytych, mamy

$$/39/ \quad \varepsilon_\alpha \equiv \frac{1}{2} (v - U_\alpha)^2 - \frac{|e|\varphi(\xi)}{m_\alpha} \leq 0$$

Dla cząstek ujemnie naładowanych i elektronów spełniona jest relacja /32/ a dla cząstek dodatnio naładowanych relacja /33/. Elektrony schwyte mają prędkości w zakresie

$$- [2(\phi + \phi_{\min})]^{1/2} \langle (v - U_\alpha) \rangle [2(\phi + \phi_{\min})]^{1/2}$$

natomiast przedział prędkości schwytych jonów dodatnich, wynosi

$$- [2(\phi_{\max} - \phi)]^{1/2} \langle (v - U_\alpha) \rangle [2(\phi_{\max} - \phi)]^{1/2}$$

Możemy więc napisać, że funkcja rozkładu cząstek schwytych wynosi:

$$/40/ \quad f_{\alpha t} = \frac{N_{\alpha\alpha}}{2a_\alpha} \{ H[(v - U_\alpha) + u_t] - H[(v - U_\alpha) - u_t] \}$$

gdzie

$$u_t = \left[\frac{2|e|\varphi(\xi)}{m_\alpha} \right]^{1/2}, \quad \varphi(\xi) > 0$$

Rys. 7 przedstawia relacje rozkładu cząstek schwytych do rozkładu cząstek swobodnych. Cząstki schwyte występują tylko dla składników "gorących", tzn. gdy $a_\alpha \gg U_\alpha$. Zwraca się uwagę, że w przypadku $T_e = T_i$, tj.

$$\frac{1}{2} m_e a_e^2 = \frac{1}{2} m_i a_i^2$$

mamy

$$a_e/a_i = (m_i/m_e)^{1/2}$$

i dla znacznie cięższych jonów będzie $a_e \gg a_i$. Jeżeli jeszcze: $a_i \gg U_i$, $a_e \gg U_e$ wtedy występują schwyte jony i elektrony.

Całkując funkcję rozkładu $f_\alpha(u, \xi)$ daną szeregiem /19/ lub wzorem /38/ względem v otrzymuje się gęstość elektryczną cząstek

$$g_\alpha = \frac{N_{\alpha\alpha} q_\alpha}{2 a_\alpha} \left\{ (a_\alpha + U_\alpha) \left[1 - \frac{2 q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (a_\alpha + U_\alpha)^2} \right]^{1/2} + \right.$$

/40/

$$\left. + (a_\alpha - U_\alpha) \left[1 - \frac{2 q_\alpha \varphi(\xi)}{m_\alpha (a_\alpha - U_\alpha)^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Pozostaje zatem rozwiązać równanie Poissona

$$/41/ \quad \varphi_{\xi\xi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \equiv -\frac{\partial}{\partial \varphi} V(\varphi)$$

gdzie prawa strona jest funkcją znaną. W celu rozwiązania tego równania należy skorzystać z metody płaszczyzny fazowej. W przypadku gdy $\alpha_{\alpha} \rightarrow 0$, rozkład równowagowy jest wtedy deltą Diraca /składnik "zimny"/ /36a/ a gęstość elektryczna przyjmuje postać

$$q_{\alpha} = N_{\alpha} q_{\alpha} \left(1 - \frac{2q_{\alpha} \varphi(\xi)}{m_{\alpha} U_{\alpha}^2}\right)^{-1/2}$$

W pracy [10] zajmowano się wyznaczaniem rozwiązań solitonowych dla wieloskładnikowej plazmy i badaniem ich struktury i własności dla w pełni nieliniowej plazmy. W metodzie Schamela istnieje większa ilość parametrów, którymi można kontrolować kształt i wielkość samouzgodnionego potencjału. Parametry α i β regulują tu funkcję rozkładu elektronów i jonów schwytych. W tu proponowanej metodzie, nie można, np. dla dwuskładnikowej plazmy otrzymać antysolitonów, tzn. solitonów o ujemnym potencjale /jama jonowa - Rys.4/ jak również WP-ch tego typu. Zgodnie z wynikami rozdz.4 takie twory będą wysoce niestacjonarne, ponieważ prędkość fali jest zbyt bliska prędkości termicznej jonów - w szczególności dla dużych amplitud oraz schwyte jony mają "ujemną" temperaturę / $\alpha < 0$ /. Nie jest znany stan równowagowy / $E = 0$ /, dla którego stacjonarna odpowiedź funkcji rozkładu miałaby taką postać. Natomiast do takich rezultatów prowadzi plazma z trzecim składnikiem, np. ujemnymi jonami lub elektronami "zimniejszymi", tj. dwoma składnikami elektronowymi o różnych temperaturach. Właśnie zaletą metody opartej na rozkładach "skokowych" jest możliwość stosunkowo prostej analizy plazmy wieloskładnikowej. Taka właśnie plazma, tj. jony ujemne i dodatnie o różnych rozkładach i elektrony "gorące" i "zimniejsze", występuje w plazmie przestrzeni kosmicznej, w której powstają warstwy podwójne i wzbudzone są fale solitonowe. Wyniki numeryczne ilustrujące ciekawsze przypadki fal solitonowych i WP-ch będą przedstawione w oddzielnej pracy.

6. Wnioski końcowe.

Zasadniczym celem pracy jest:

- /i/ Przedstawienie metod analizy stacjonarnych warstw podwójnych i fal solitonowych w oparciu o równania Własowa-Poissona.
- /ii/ Zwrócenie uwagi na fakt, że jeżeli funkcja równowagowa $E = 0$ składnika plazmy jest maxwellianem /najbardziej prawdopodobny rozkład równowagowy/ to funkcja odpowiedzi rozkładu /dystrybuanty/ będzie rozwijalna w szereg całkowitych potęg potencjału elektrycznego. Szereg ten może być silnie rozbieżny ze względu na tłumienie i niestabilności Landau'a. Można więc spodziewać się zerowego rozwiązania na pole E lub rozpadu fali ze wzrostem czasu - brak stacjonarnego rozwiązania.
- /iii/ Wskazanie warunków jakie muszą być spełnione w celu otrzymania kwazistacjonarnych rozwiązań, tj. rozwiązań, które nie będą zbyt silnie tłumione lub nie ulegną rozpadowi, np. na pseudofale i wybuch jonowy.
- /iv/ Podanie metody wyznaczania kwazistacjonarnych rozwiązań dla wieloskładnikowej plazmy.

W przypadku stacjonarnych lub kwazistacjonarnych funkcji odpowiedzi rozkładu zauważa się, że zachowują one postać rozkładu równowagowego, np. /35/. Ciągłe złączenie dwóch rozkładów stacjonarnych dla cząstek swobodnych i schwytych jednego składnika nie jest funkcją analityczną i nie może być odpowiedzią na zaburzenie rozkładu równowagowego opisanego funkcją analityczną. Wyniki otrzymane przez BGK i H.Schamela są dobrymi przybliżeniami stacjonarnego rozwiązania wtedy gdy prędkość v_0 i u_0 są dalekie od prędkości termicznych odpowiednich składników plazmy w stanie równowagi. Ponieważ v_0 i u_0 są wielkościami bezwymiarowymi odniesionymi do prędkości termicznych elektronów i jonów więc winno być $-v_0 \gg 1$ lub $v_0 \ll 1$ i podobnie dla u_0 .

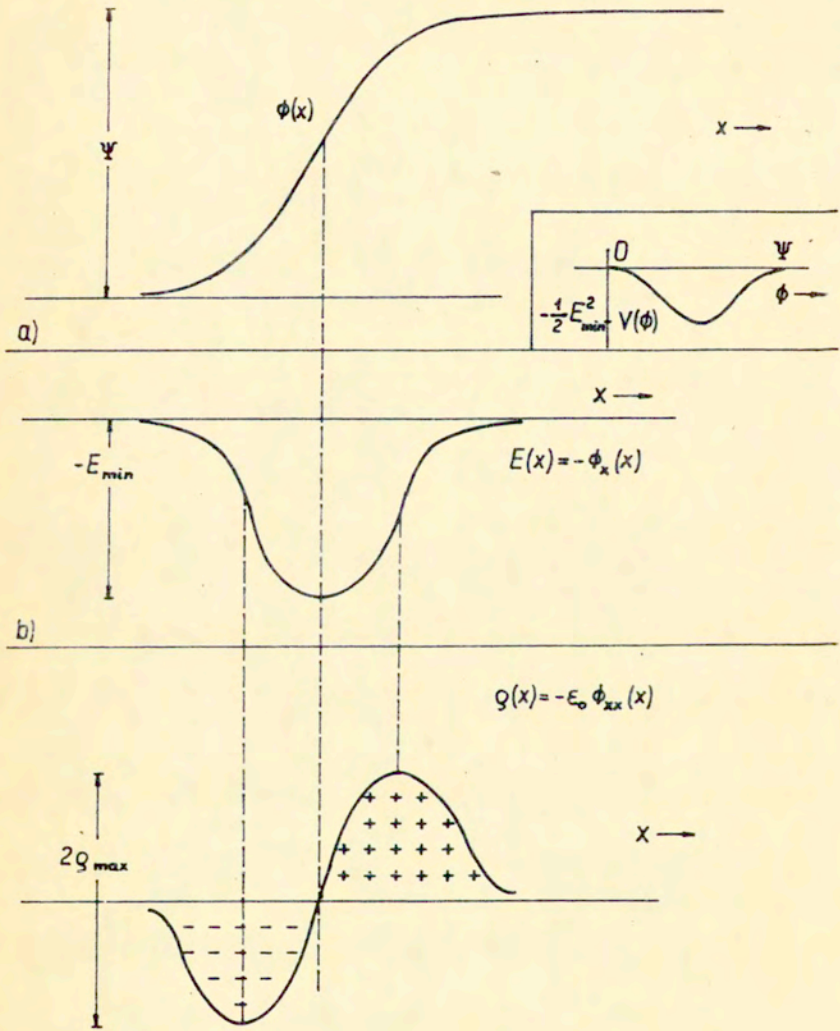
7. Literatura.

- [1] I.B.BERNSTEIN, J.M.GREENE, M.D.KRUSKAL - Phys.Rev., 108
546 /1957/ - Exact Nonlinear Plasma Oscillation.
- [2] R.E.DAVIDSON - Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic
Press, N.York and London, 1972.
- [3] H.SCHAMEL - J.Plasma Physics, 7 part 1, 1 /1972/ - Nonlinear
Electrostatic Plasma Waves.
- [4] H.SCHAMEL - Physica Scripta, 20, 306 /1979/ - Role of Trapped
Particles and Waves in Plasmas, Solitons - Theory and Appli-
cation.
- [5] H.SCHAMEL - Physica Scripta, T2/1, 228 /1982/ - Kinetic
Theory of Phase Space Vertices and Double Layers.
- [6] H.SCHAMEL and S.BUJARBARUA - Phys.Fluids, 26, 1, 190 /1983/
- Analytic Double Layers.
- [7] H.SCHAMEL - SFB Nr 162, Plasma Physik Bochum/Jülich /1983/
- Weak Double Layers: Existence, Stability, Evidence.
- [8] H.SCHAMEL - Invited lecture, Symposium on Plasma Double
Layers, Roskilde, Denmark /1982/ - The Theory of Double
Layers.
- [9] H.SCHAMEL - Plasma Physics, 14, 905 /1972/ - Stationary So-
litary, Snoidal and Sinusoidal Ion Acoustic Waves.
- [10] A.J.TURSKI - Prace IPPT, Nr 11/1982 - Solitonowe i antysoli-
tonowe fale ładunku przestrzennego wieloskładnikowej w pełni
nieliniowej plazmy wiasowa.
- [11] A.J.TURSKI - Prace IPPT, Nr 9/1983 - Wpływ gęstości cząstek
zjonizowanych na odpowiedź plazmową w Plazmosferze.
- [12] E.GABLE and K.LONNGREN - Plasma Physics and Controlled 26,
No 6, 799/1984/. Fusion,
- [13] I.ALEXEFF, W.D.JONES and K.E.LONNGREN - Phys.Rev.Lett. 21,
878/1968/.

8. Spis rysunków.

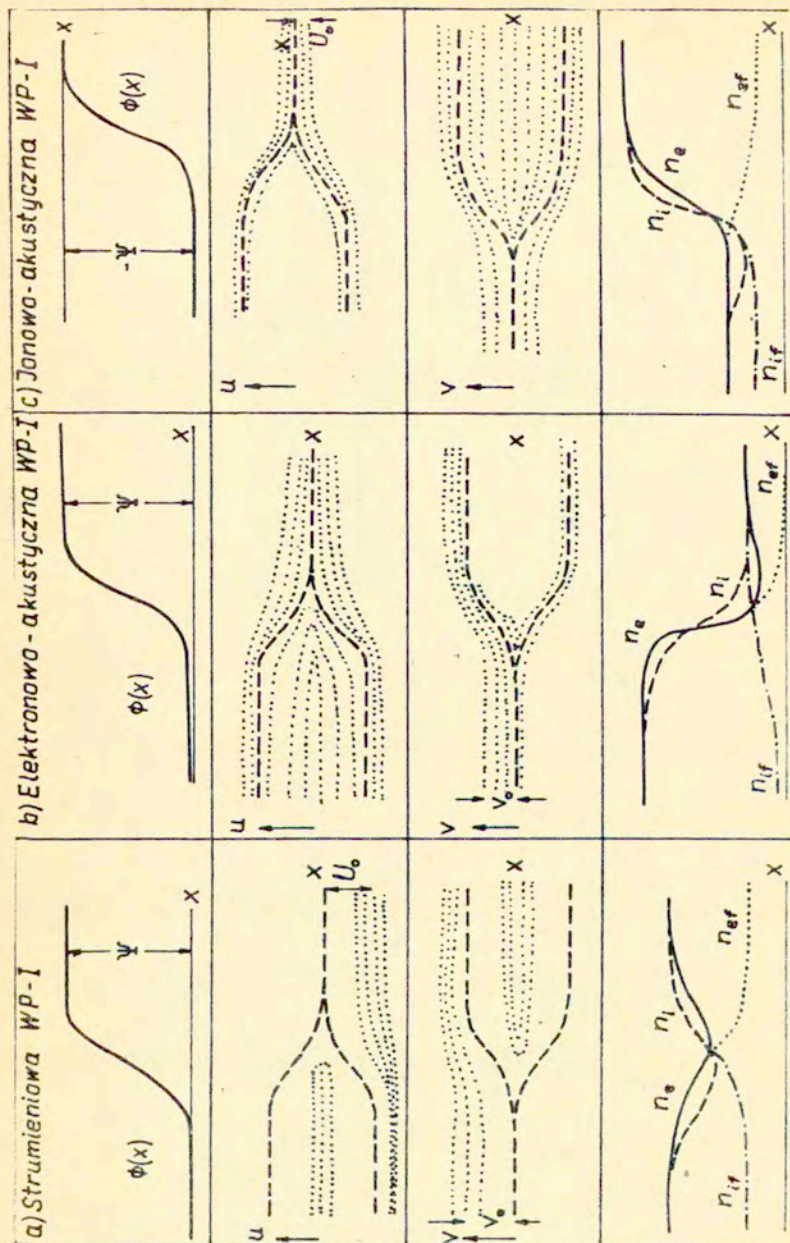
- Rys.1 a/ Jakościowy przebieg potencjału elektrycznego $\phi(x)$ monotomicznej WP-I z wstawką ilustrującą przebieg funkcji $V(\phi)$
b/ Przebieg pola elektrycznego $E(x) = -\phi_x(x)$
c/ Przebieg gęstości elektrycznej $\varrho(x) = -\epsilon_0 \phi_{xx}(x)$
- Rys.2 Schematyczny wykres trzech typów WP-I; pierwsza, druga i trzecia kolumna odnoszą się odpowiednio do typu strumieniowego, elektronowo-akustycznego i jonowo-akustycznego. Pierwszy wiersz pokazuje potencjał elektryczny, drugi i trzeci odpowiednio jonową i elektronową płaszczyzną fazową. Separatrysy oznaczono linią przerywaną. Ostatni wiersz prezentuje całkowitą gęstość elektronów - n_e/x /linia ciągła/, całkowitą gęstość jonów - n_i/x /linia przerywana/, gęstość swobodnych elektronów - n_{ef} /linia kropkowana/ i gęstość swobodnych jonów - n_{if} /linia kropkowo-kreskowa/.
- Rys.3 a/ Jakościowy przebieg potencjału elektrycznego $\phi(x)$ asymetrycznej jonowo-akustycznej WP-II. Wstawka ilustruje dwie części funkcji $V(\phi)$ odpowiadające monotonicznym częściom $\phi(x)$.
b/ Jonowa płaszczyzna fazowa. Linią przerywaną oznaczono separatryse.
c/ Elektronowa płaszczyzna fazowa.
- Rys.4 a/ Jakościowy przebieg potencjału elektrycznego $\phi(x)$ symetrycznej jonowo-akustycznej WP-II z wstawką ilustrującą odpowiedni przebieg funkcji $V(\phi)$
b/ Przebieg pola elektrycznego $E(x)$
c/ Przebieg gęstości elektrycznej $\varrho(x)$
- Rys.5 a/ Jakościowy przebieg potencjału elektrycznego $\phi(x)$ asymetrycznej elektronowo-akustycznej WP-III. Wstawka ilustruje odpowiedni przebieg funkcji $V(\phi)$.
b/ Przebieg pola elektrycznego $E(x)$
c/ Przebieg gęstości elektrycznej $\varrho(x)$
- Rys.6 Ilustracja aproksymacji rozkładów maxwellowskich rozkładami skokowymi, w celu minimalizacji efektów rezonansowych - tłumienia i niestabilności
a) $a_e \gg U$, $a_i \ll U$ b) $a_e > a_i \gg U$
- Rys.7 Funkcja rozkładu odpowiedzi plazmy składnika - f_α w relacji do cząstek schwytyanych - $f_{\alpha t}$, i swobodnych - $f_{\alpha f}$
a) $a_\alpha \gg U_\alpha$ b) $a_\alpha \ll U_\alpha$

MONOTONICZNA WP-I



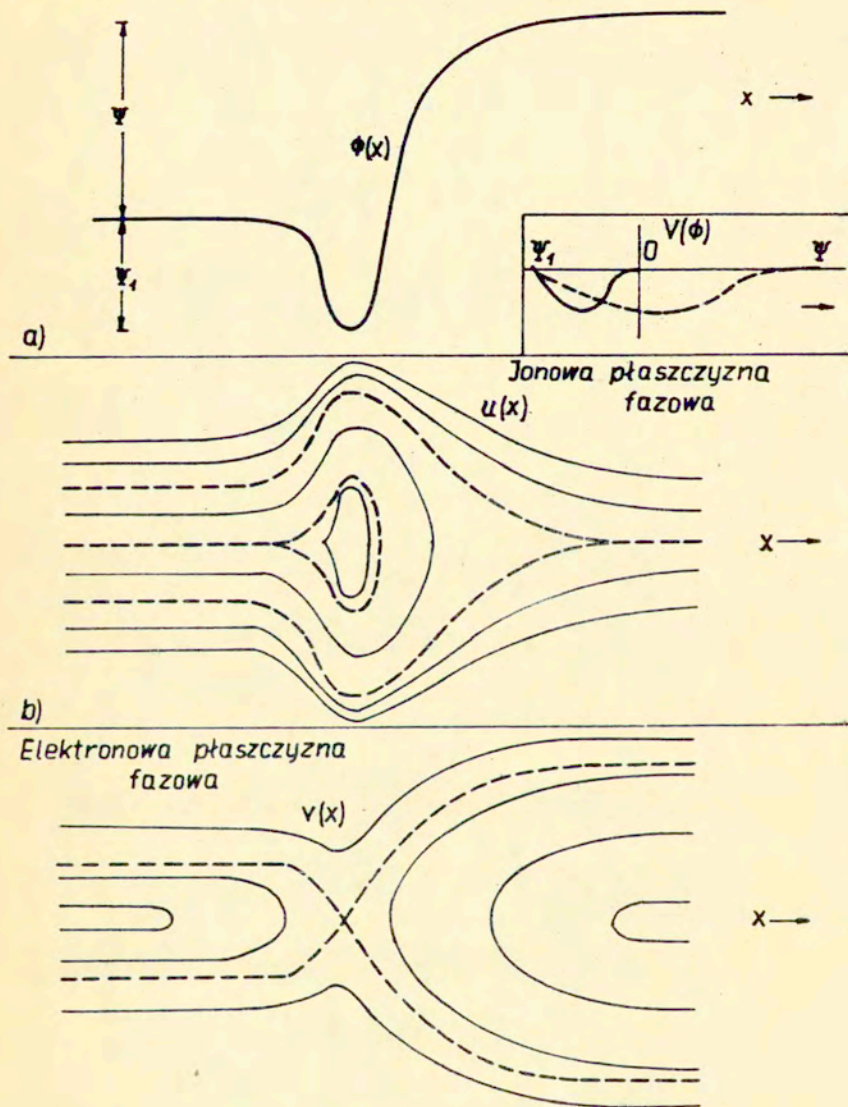
Rys. 1

c)



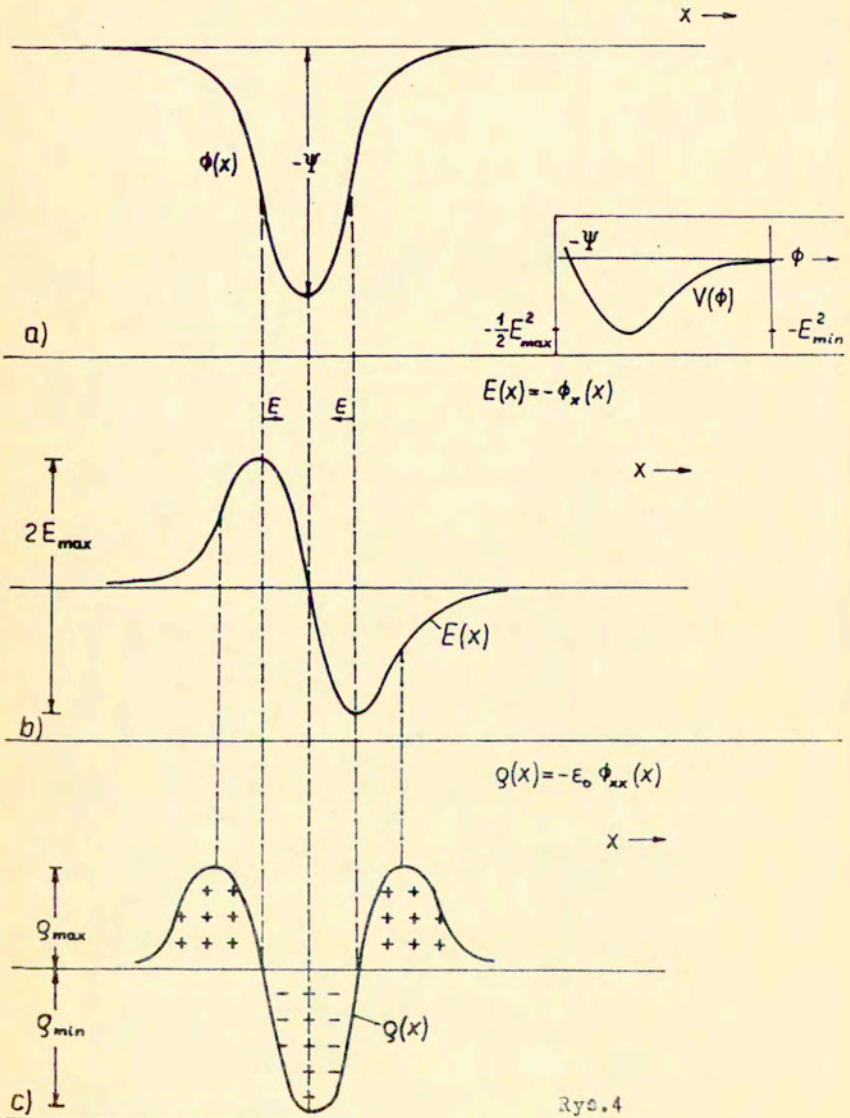
Rys. 2

Asymetryczna jonowo-akustyczna WP-II (jama jonowa)

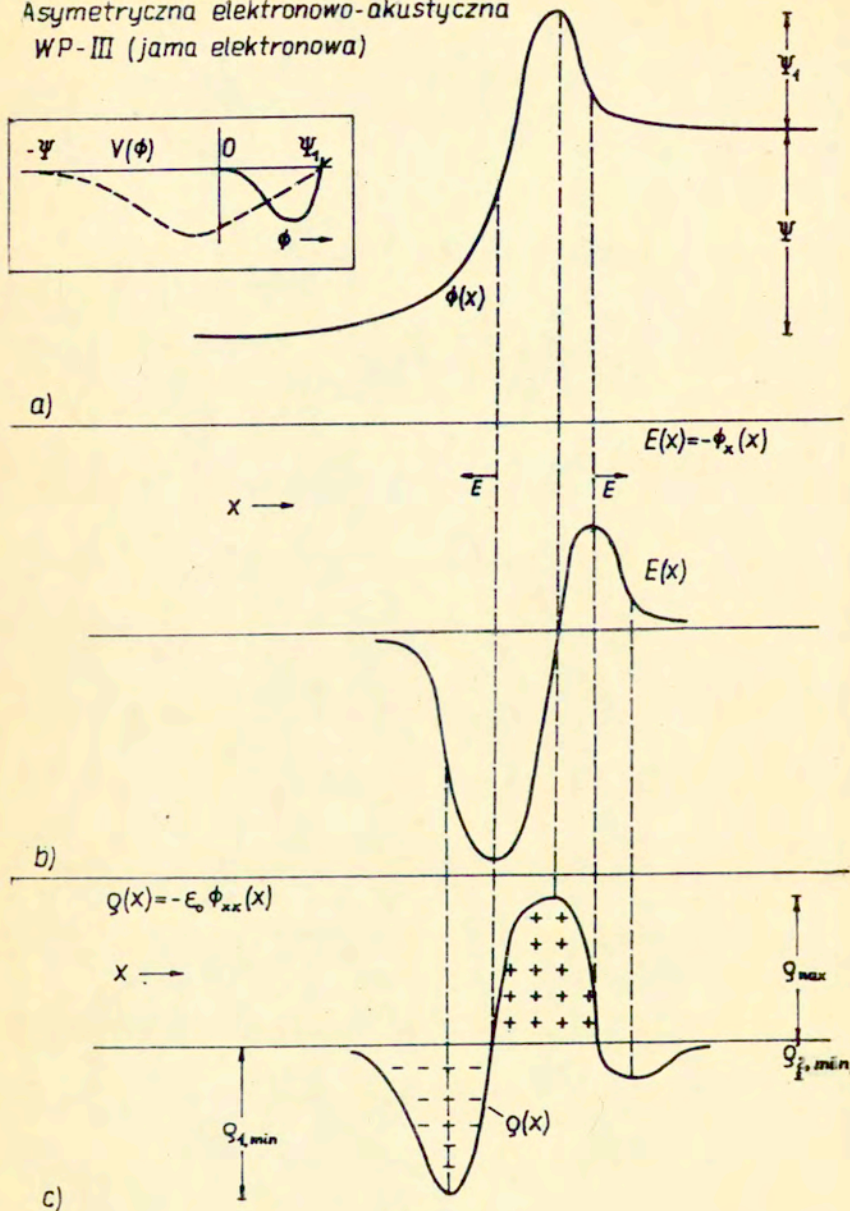


Rys. 3

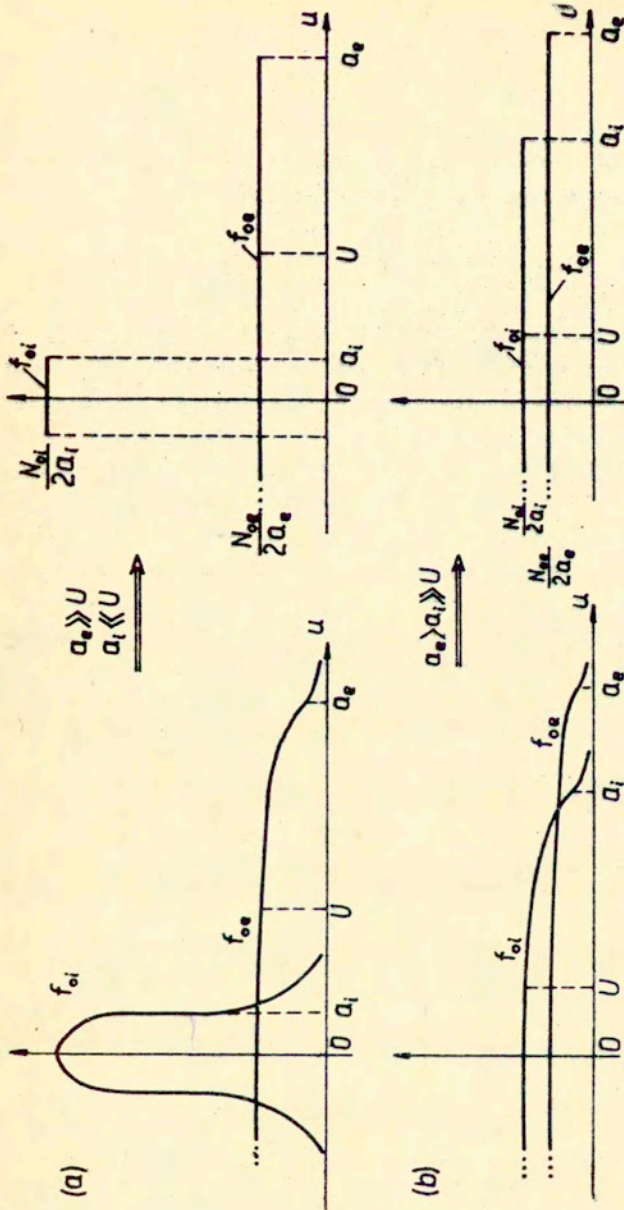
Symetryczna jonowo-akustyczna WP-II (jama jonowa)



Asymetryczna elektronowo-akustyczna
WP-III (jama elektronowa)



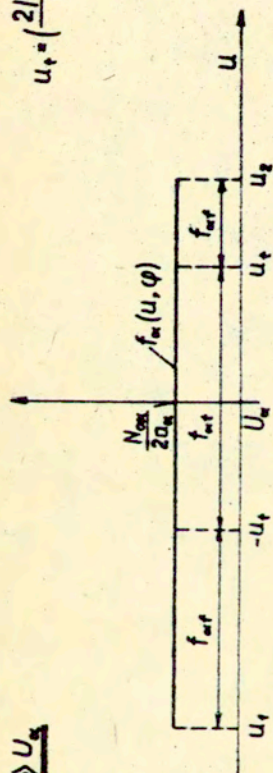
Rys. 5



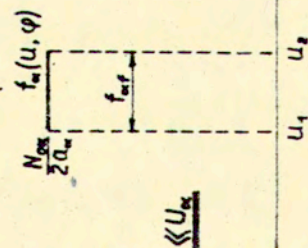
Rys.6

$$(a) \frac{a_m}{U_m} \gg 1$$

$$u_1 = \left(\frac{2|e|\varphi(\xi)}{m_m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(\xi) > 0$$



$$(b) \frac{a_m}{U_m} \ll 1$$



$$u_1 = -(a_m + U_m) \left[1 + \frac{2|e|\varphi(\xi)}{m_m(a_m + U_m)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$u_2 = -(a_m - U_m) \left[1 + \frac{2|e|\varphi(\xi)}{m_m(a_m - U_m)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Andrzej J. Turski
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów

WARSTWY PODWÓJNE STREF PRZEJŚCIOWYCH
WIELOSKŁADNIKOWEJ PLAZMY KOSMICZNEJ

Streszczenie

Przedstawiono metodę analizy stacjonarnych warstw podwójnych i fal solitonowych w oparciu o stacjonarne równania Własowa-Poissona. Na podstawie analizy odpowiedniego zagadnienia dynamicznego dla równań Własowa-Poissona stwierdzono, że jeżeli funkcja równowagowa składnika plazmy jest funkcją analityczną /np. maxwellianem/ to funkcja odpowiedzi dla dystrybuanty będzie rozwijalna w szereg całkowitych potęg potencjału elektrycznego. Szereg ten może być silnie rozbieżny ze względu na tłumienie i niestabilności Landau'a. Można więc spodziewać się: zerowego rozwiązania na natężenie pola lub rozpadu fali, tj. nie będzie rozwiązania stacjonarnego. Podaje się kryteria minimalizacji niestabilności Landau'a oraz metodę wyznaczania kwazistacjonarnych rozwiązań dla warstw podwójnych w wieloskładnikowej plazmie.