

B. Boni, M. Kleiber, A. Sawczuk

WARUNEK STANU GRANICZNEGO  
PRZEKROJU BELKI DWUTEOWEJ  
PODDANEJ DZIAŁANIU  
MOMENTU ZGINAJĄCEGO  
SIŁY PODŁUŻNEJ I SIŁY POPRZECZNEJ

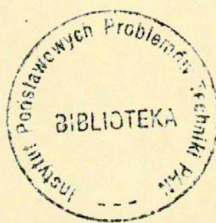
6/1982

WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 października 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 6/1982



57068



Na prawach rękopisu

-----  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd.1,4. Ark.druk.2,25.

Oddano do drukarni w lutym 1982 r.

Nr zamówienia 70/c/82 i. Z-97.  
-----

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

WARUNEK STANU GRANICZNEGO PRZEKROJU BELKI DWUTEOWEJ, PODDANEJ  
DZIAŁANIU MOMENTU ZGINAJĄCEGO, SIŁY PODŁUŻNEJ I SIŁY POPRZECZNEJ

1. Wprowadzenie

Do wyznaczenia nośności granicznej belek i ram tzn. do wyznaczenia intensywności proporcjonalnie narastających obciążeń, przy której konstrukcje sprężysto-idealnie plastyczne lub sztywno-plastyczne przekształcają się w mechanizmy, potrzebna jest znajomość położenia tzw. przegubów plastycznych. Są to miejsca, w których plastyczność jest osiągnięta w całym przekroju poprzecznym i może w tych miejscach następować nieograniczone plastyczne płynięcie.

W przypadku belki poddanej działaniu sił poprzecznych  $T$ , sił podłużnych  $N$  i momentów zginających  $M$  należy więc znaleźć transformacje warunku plastyczności danego w naprężeniach  $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$  do warunku plastyczności zapisanego w zależności od sił przekrojowych, a więc otrzymać tzw. warunek stanu granicznego przekroju.

$$(1.1) \quad F(\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}) = 0 \rightarrow \phi(M, N, T) = 0$$

Warunek stanu granicznego wyrażony w siłach przekrojowych albo jak nazywamy często: uogólniony warunek plastyczności potrzebny jest nam dlatego, że wszystkie inne równania teorii belek i ram jak np. równania równowagi i związki przemieszczeniowe oraz warunki brzegowe uzależniane są od wielkości wypadkowych w przekroju, a nie od samych naprężeń [1].

Do określenia powierzchni plastyczności  $\phi = 0$  dla przekroju stosowane są w zasadzie dwa podejścia: kinematyczne lub statyczne. Podejście kinematyczne zakłada rozkład deformacji w przegubie, a poprzez stowarzyszone prawo płynięcia wiąże z tym kinematycznie dopuszczalnym mechanizmem odkształcania się przekroju naprężenia spełniające warunek plastyczności. Całkując te naprężenia dochodzi się do odpowiednich sił przekrojowych, a w rezultacie do powierzchni granicznej  $\phi_k = 0$ . Podejście statyczne natomiast zakłada spełniający równanie równowagi w każdym punkcie przekroju uplastycznionego stan naprężeń i na drodze całkowania wyznacza odpowiednią postać warunku granicznego  $\phi_s = 0$  dla przekroju. Z twierdzeń teorii nośności granicznej, statycznego i kinematycznego, wynika również, że rzeczywista powierzchnia graniczna  $\bar{\phi}$  zawarta jest w następujących granicach:

$$(1.2) \quad \phi_s \leq \phi \leq \phi_k$$

Metody te dla nieskomplikowanych, bisymetrycznych przekrojów pełnościennych i dwuteowników przedstawione są w monografiach P.G.HODGE'A [3], J.HEYMANA [2], M.ŻYCZKOWSKIEGO [4]. Konkretnie rozwiązania odnoszą się jednak głównie do przypadku zginania, zginania z rozciąganiem i zginania ze ścinaniem.

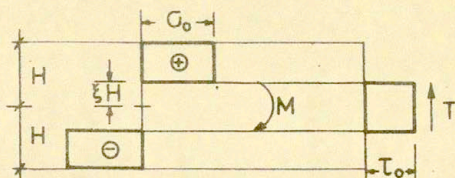
Istnieje też podejście przybliżone, stosowane przy rozpatrywaniu równoczesnego zginania i ścinania, które ma pozory podejścia statycznego. W przypadku np. zginania ze ścinaniem przyjmuje się, że część przekroju przenosi wyłącznie naprężenia wywołane zginaniem, część zaś naprężenia spowodowane ścinaniem jak to przedstawia rys. 1, gdzie  $\zeta_0$  oznacza granicę plastyczności na rozciąganie i ściskanie.

Znając na podstawie przyjętego warunku plastyczności, że  $\zeta_0 = k \zeta_0$ ,  $k = \frac{1}{2}$  dla warunku Treski,  $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$  dla warunku Hubera-Misesa można wyznaczyć równania krzywej granicznej

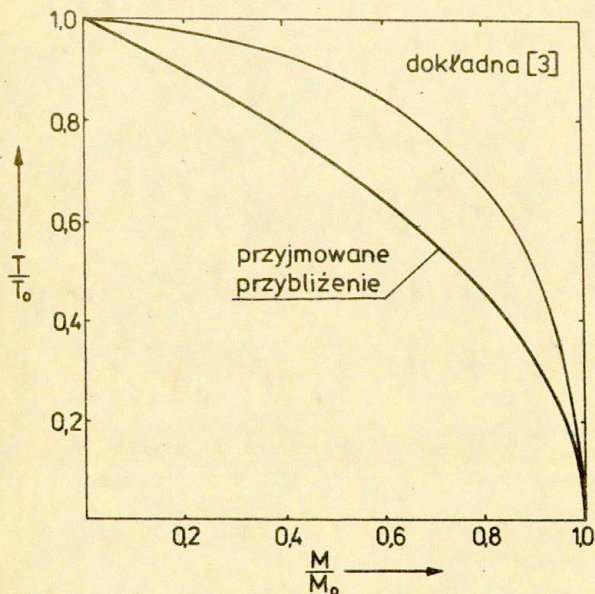
$$(1.3) \quad \frac{M}{M_0} + \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1$$

gdzie  $M_0$  i  $T_0$  oznaczają odpowiednio graniczne wielkości momentu granicznego i granicznej siły poprzecznej dla przekroju prostokątnego.

kątnego. Na podobnych przesłankach oparte są wzory podane przez MASSONNETA i SAVE'A [5].



Rys. 1. Przybliżony rozkład naprężeń w przekroju poddanym zginaniu i ścinaniu



Rys. 2. Dokładna i przyjmowane przybliżenie krzywe graniczne dla przekroju prostokątnego poddanego zginaniu ze ścinaniem

Warunek (1.3) ma jedną istotną nieścisłość, polegającą na tym, że dla  $\pm \xi H$  nie są spełnione warunki równowagi

wewnętrznej. Skoki w naprężeniach stycznych nie są dopuszczalne na liniach nieciągłości naprężeń w sztywno-plastycznym ciełe. Z porównania z wynikami dość algebraicznie złożonych obliczeń omówionymi np. przez ŻYCKOWSKIEGO [4] można wyciągnąć wniosek, że podejście zaprezentowane na rys. 1 dobrze przybliżyła inne rozwiązania, od strony bezpiecznej. Dla przykładu na rys. 2 porównano rozwiązanie zupełne podane przez HODGE'A [3] z rozwiązaniem (1.3). Widać, że dla dużych ścinai i dla dużych zginai, które najczęściej występują w przekrojach krytycznych ram będących przedmiotem tej analizy, różnice są po stronie bezpiecznej. Dla przekrojów dwuteowych różnice byłyby mniejsze.

Obliczenie stanu granicznego przekroju poddanego ścinaniu, zginaniu i siłom podłużnym wymaga uproszczeń, szczególnie jeśli idzie o opracowanie racjonalnych, ale możliwie prostych, metod oceny nośności granicznej ram o niesymetrycznych przekrojach prętów.

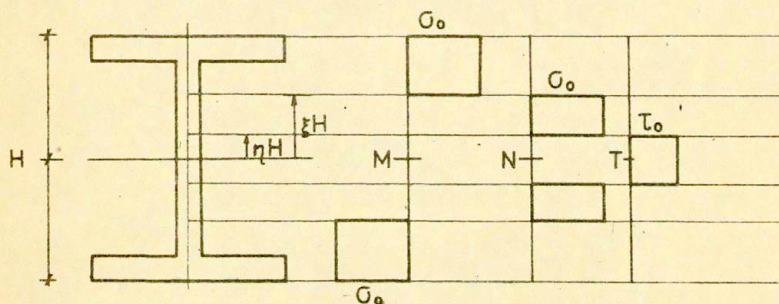
## 2. Cel pracy. Założenia

Przedmiotem rozważań jest nośność graniczna przekrojów dwuteowych, zarówno o dwóch jak i o jednej osi symetrii. W tym drugim przypadku półki są więc różnej grubości i szerokości. Przekroje poddane są działaniu siły podłużnej, siły poprzecznej i momentu zginającego o wektorze prostopadłym do zawsze istniejącej płaszczyzny symetrii. Celem pracy jest określenie równań powierzchni granicznej dla takich przekrojów. Powierzchnia graniczna w rozpatrywanych przypadkach nie będzie dana jednym związkiem analitycznym, lecz składać się będzie z kilku płatów.

Istotnym założeniem niniejszego opracowania jest przyjęcie rozkładu naprężeń w przekroju całkowicie uplastycznionym. Naprężenia te rozdzielimy na części odpowiadające zginaniu, sile osiowej i ścinaniu, dopuszczając niespełnienie warunków statycznej dopuszczalności na linii podziału, tak jak to zilustrowano na rys. 1 dla przypadku zginania połączonego ze ścinaniem.

Przykładowo na rys. 3 pokazany jest przyjmowany do

dalszych obliczeń rozkład naprężeń. W zależności od położenia linii oddzielającej myślowo wyodrębnione obszary przenoszące siły podłużne, ścinania i momenty /czyli od chwilowego rozkładu pól naprężeń/ otrzymywać będziemy różne wyrażenia analityczne. Dla różnych stosunków grubości pól do grubości środka, dla różnej asymetrii pól, a więc dla różnych własności geometrycznych przekroju otrzymywane będą odmienne wyrażenia analityczne. Następnie zostaną opracowane odpowiednie algorytmy i programy wyznaczania powierzchni granicznych dla określonych bądź żądanych bądź też poszukiwanych geometrii przekrojów plastycznych zdolnych przenieść wymagane oddziaływania.



Rys. 3. Schematyczny rozkład naprężeń w stanie granicznym przekroju dwuteowego, bisymetrycznego poddanego działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej

W pracy rozpatrujemy konstrukcje sztywno plastyczne lub sprężysto-plastyczne takie, których zmiany geometrii są pomijalnie małe w rezultacie odkształceń. Odnosi się więc to do odpowiednio sztywnych belek i ram jak np. ramy karoserii autobusów, konstrukcji szkieletowych okrętów oraz usztywnionych ram występujących w budownictwie.

W omawianych konstrukcjach stosowane są cienkościennie lub średniocienkościennie przekroje dwuteowe, w wielu przypadkach o jednej tylko osi symetrii.

W związku z potrzebą określenia wielkości obciążenia niszczącego i współczynnika bezpieczeństwa dla wymienionych

wyżej konstrukcji, obliczenia sprężysto - plastyczne stają się koniecznością. W obliczeniach tych podstawową rolę odgrywają kryteria uplastycznienia poszczególnych przekrojów belek czyli tzw. warunki stanu granicznego. Znajomość ich umożliwia budowanie macierzy sztywności sprężysto-plastycznej elementów belkowych, w których pojawiły się odkształcenia plastyczne. Analiza stanów granicznych przekrojów elementów dostarczyć może również odpowiednie ograniczenia dla analizy tego typu konstrukcji nie uwzględniającej zjawiska plastyczności.

Celem pracy jest więc analiza pełnego uplastycznienia przekroju pod działaniem zginania, ścinania i sił podłużnych oraz otrzymania powierzchni granicznych stosownie do założeń upraszczających przedstawionych na rys. 3. Na obecnym etapie pomijane są zmiany geometrii wywołane wyboczeniem i zwichrzeniem środnika. Stosowane jest podejście analityczno-numeryczne. Wyrażenia na siły przekrojowe zostaną wyprowadzone analitycznie, dla uzyskania wyników szczegółowych zostaną opracowane odpowiednie algorytmy i programy. Dotychczasowa literatura dotycząca nośności granicznej przekrojów dwuteowych jest mało przydatna do numerycznej, sprężysto-plastycznej analizy konstrukcji prętowych poddanych złożonym oddziaływaniom. Ogranicza się ona do rozważań bądź jedynie w ramach teorii prętów cienkościennych, prowadząc w efekcie do skomplikowanych wyrażeń, bądź do przypadku działania jedynie dwóch sił przekrojowych. Najczęściej ponadto rozważane są przekroje bisymetryczne [6], [7], [8]. Wyjątkiem jest praca [10], która dotyczy przekrojów belek konstrukcji okrętowych i której wyniki omówimy w dalszej części pracy.

### 3. Warunek stanu granicznego dla dwuteownika bisymetrycznego

Dla wyjaśnienia sposobu przyjmowania pól naprężeń w niniejszym opracowaniu rozwiążmy najpierw prosty przykład przekroju dwuteowego bisymetrycznego. Przyjmijmy, że siła poprzeczna przenoszona jest wyłącznie przez środnik profilu, siła podłużna przez cały przekrój, moment zginający natomiast przez półki lub przez cały przekrój. Odpowiednie wielkości graniczne, przy założeniu niezależnego ich działania, oznaczmy, w obu rozważanych przypadkach, symbolami:  $T_0, N_0, M_0^P$  oraz  $T_0, N_0, M_0^C$ . Wielkości te wyra-

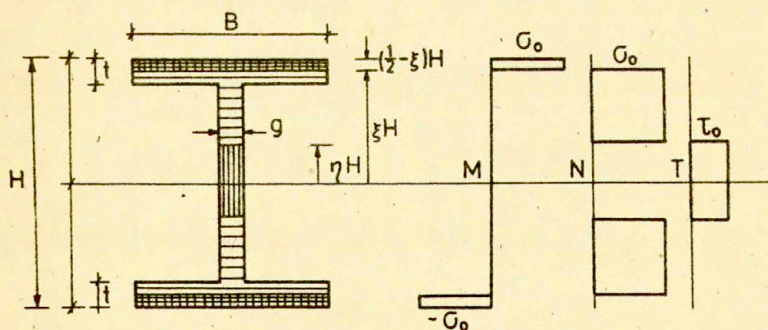


zić można w funkcji geometrii przekroju i naprężeń granicznych w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= (H - 2t)g\tau_0, \\
 N_0 &= 2Bt + (H - 2t)g, \\
 M_0^P &= Bt(H - t)\sigma_0, \\
 M_0^C &= \left\{ Bt(H - t) + g\left(\frac{H}{2} - t\right)^2 \right\} \sigma_0,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

gdzie H wysokość dwuteownika,  
 B szerokość półki,  
 t grubość półki,  
 g grubość środnika,  
 $\tau_0$  granica plastyczności przy czystym ścinaniu,  
 $\sigma_0$  granica plastyczności przy czystym rozciąganiu /ściskaniu/.

Rys. 4 określa wymiary i precyzuje używaną notację oraz specyfikuje przyjmowany rozkład naprężeń, którego idea była wyłożona na rys. 3.



Rys. 4. Oznaczenia stosowanych wielkości

Chwilowy stan uogólnionych naprężeń, spełniający warunek stanu granicznego, zgodnie z tym co pokazano na rys. 4, przedstawić można w następującej postaci:

$$T = 2Hg \tau_0 \eta ,$$

$$3.2 \quad N = 2\sigma_0 H \left[ \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) (B - g) - g\eta + B\xi \right]$$

$$M = BH^2 \sigma_0 \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right)$$

gdzie  $\xi = \frac{x}{H}$ ,  $\eta = \frac{y}{H}$ ,  $\alpha = \frac{t}{H}$ .

Eliminując stąd parametry geometryczne  $\xi$  i  $\eta$  otrzymujemy równanie powierzchni granicznej w przestrzeni sił wewnętrznych, a więc dokonujemy transformacji symbolicznie oznaczonej przez (1.1).

Jak to już zaznaczono, przyjęty rozkład naprężeń w pewnych obszarach nie spełnia warunków statycznej dopuszczalności. Są to linie nieciągłości naprężeń /o współrzędnej bezwymiarowej  $\eta$ /, gdzie lokalnie niespełniony jest różniczkowy warunek równowagi wewnętrznej. W dalszych rozważaniach stosowana będzie jednak ta sama procedura jak w podejściu statycznym teorii nośności granicznej. Otrzymujemy wówczas powierzchnię graniczną, która co prawda nie jest oszacowaniem dolnym wg wzoru (2.2), jest jednak na pewno bliska dolnego oszacowania "z nadmiarem".

Wielkości bezwymiarowe sił wewnętrznych odpowiadające wzorom (3.2) wynoszą:

$$v = \frac{T}{T_0} = c_1 \eta ,$$

$$n = \frac{N}{N_0} = c_2 + c_3 \xi + c_4 \eta ,$$

(3.3)

$$m = \frac{M}{M_0} = c_5 \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) ,$$

gdzie

$$\frac{1}{2} - \alpha \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} - \alpha,$$

$$c_1 = \frac{2}{1-2\alpha}, \quad c_2 = \frac{2\sigma_0 H(\alpha - \frac{1}{2})(B-g)}{N_0},$$

$$c_4 = -\frac{2\sigma_0 Hg}{N_0}, \quad c_3 = \frac{2\sigma_0 HB}{N_0},$$

$$c_5 = \frac{BH^2\sigma_0}{M_0^c}$$

Powyższe zależności, które zapisać można symbolicznie jako

$$v = v(\eta), \quad n = n(\xi, \eta), \quad m = m(\xi)$$

(3.4)

$$\frac{1}{2} - \alpha \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} - \alpha,$$

potraktujemy jako parametryczne równanie poszukiwanej powierzchni. Eliminując z powyższych zależności  $\xi$  i  $\eta$  otrzymujemy:

$$(3.5) \quad \phi = \frac{4m}{c_5} + \frac{4}{c_4^2} \left[ n - \left( \frac{c_3}{c_1} v + c_2 \right) \right]^2 - 1 = 0$$

Dla dodatnich wartości sił wewnętrznych tzn. dla  $M \geq 0$ ,  $N \geq 0$ ,  $T \geq 0$  i wartości momentu granicznego  $M_0 = M_0^p$  oraz przekroju o następującej charakterystyce:

$H = 40\text{cm}$ ,  $B = 25\text{cm}$ ,  $t = 1\text{cm}$  wykres funkcji  $\phi$  /powierzchnia ABCD/ pokazany zostanie na rys. 6.

Wyprowadzając powierzchnię graniczną dla przekroju, w którym środnik przenosi część momentu zginającego, rozważmy dwie fazy zachowania się przekroju, jak to pokazano na rys. 5. Przypadek z rys. 5a został już omówiony poprzednio i ujęty wzorem (3.5). Pole naprężeń dla przypadku  $M > M_0^p$  pokazane zostało poprzednio na rys. 3, a odpowiednia powierzchnia graniczna zapisana jest wzorem (3.7).

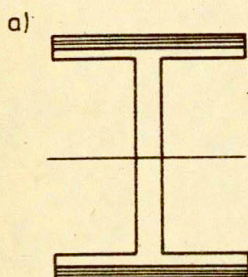
Chwilowy stan uogólnionych naprężeń opisać można układem

następujących równań:

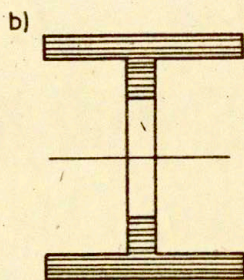
$$(3.6) \quad V = c_1 \eta, \quad n = -c_3 (\xi - \eta), \quad m = 1 + c_6 \xi^2$$

gdzie  $c_6 = -\frac{g H^2 \sigma_0}{M_0^C}$

$$\eta \leq \xi \leq \frac{1}{2} - \alpha, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} - \alpha$$



I faza:  $M < M_0^P$



II faza:  $M_0^P < M < M_0^C$

Rys. 5. Możliwe stany przenoszenia momentów zginających

Doprowadza to do powierzchni granicznej następującej postaci:

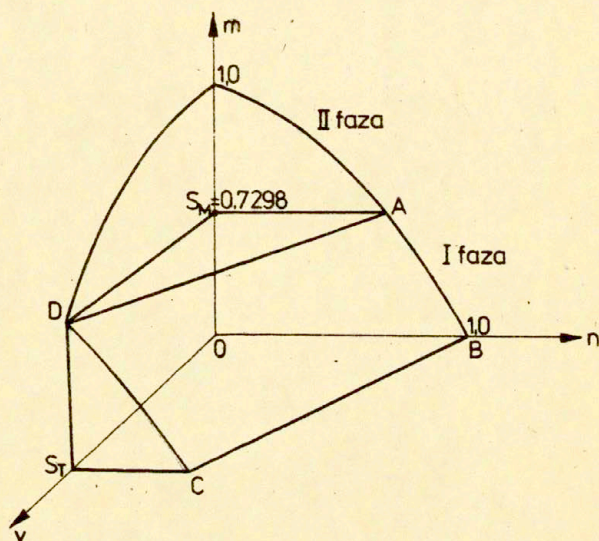
$$(3.7) \quad \phi = m - c_6 \left( \frac{n}{c_3} + \frac{V}{c_1} \right)^2 - 1 = 0$$

Dla dodatnich wartości sił wewnętrznych i wymiarów przekroju jak dla poprzedniego przypadku powierzchnia graniczna pokazana jest na rys. 6.

Równanie parametryczne krzywej A-D rozgraniczające fazę I /rys. 5a/ od fazy II /rys. 5b/ ma postać:

$$(3.8) \quad V = \frac{2Hg\tau_0}{T_0} \eta, \quad n = \frac{2Hg\sigma_0}{N_0} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) - \frac{2Hg\sigma_0}{N_0} \eta$$

Równania te otrzymano dla wartości  $\xi = \frac{1}{2} - \alpha$  czyli dla wartości momentu granicznego pólki tylko, stosunek momentu pólki do momentu granicznego całego przekroju oznaczono na rys. 6 przez  $S_m$ .  $S_T$  oznacza stosunek nośności samego środka na ścinanie całego przekroju.



Rys. 6. Powierzchnia graniczna w przypadku uwzględnienia środka w przenoszeniu momentów

Po wyeliminowaniu współrzędnej  $\eta$  z równań (3.8) otrzymujemy dla odcinka AD równanie prostej w postaci:

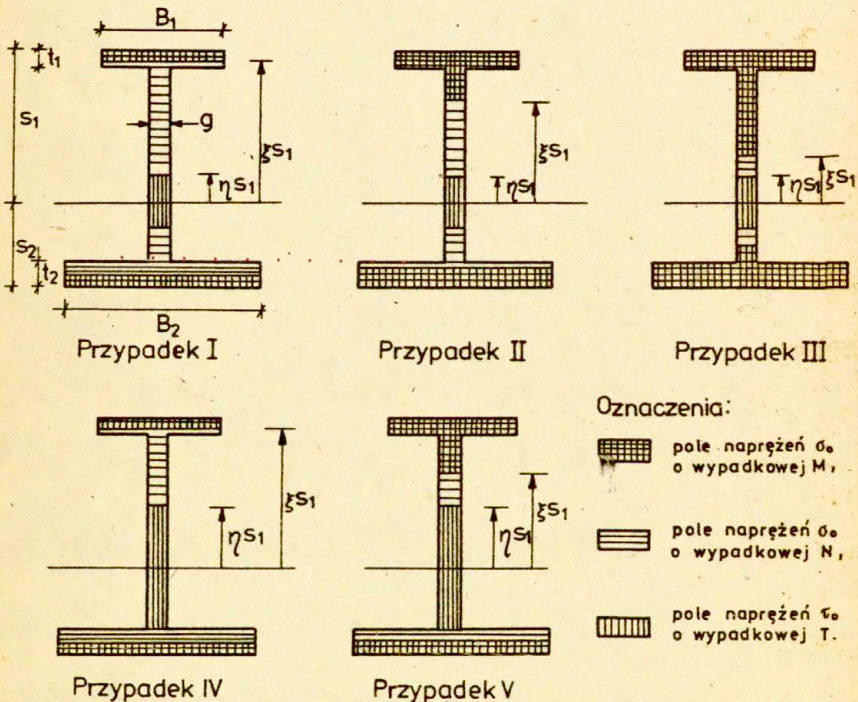
$$n = \frac{2H_9 \bar{\sigma}_0}{N_0} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) - \frac{\bar{\tau}_0 \bar{\sigma}_0}{N_0 \bar{\tau}_0} v$$

Na podobnej zasadzie otrzymujemy równania pozostałych odcinków, krzywych AB i DC oraz prostej BC.

#### 4. Warunek stanu granicznego dla dwuteownika niesymetrycznego

Nieco bardziej skomplikowanym przypadkiem jest dwuteownik niesymetryczny o różnej szerokości pólki. Problemem jaki tu się

pojawia jest prawidłowe przyjęcie osi przekroju, względem której liczone będą momenty od założonych statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Oś ta w trakcie uplastyczniania się kolejnych warstw przekroju poddanego np. czystemu zginaniu zmienia swoje położenie przesuwając się od tzw. osi obojętnej /sprężystość/ aż do osi plastycznej przekroju, dzielącej go na dwa równe pola. Największą wartość momentu granicznego dla czystego zginania otrzymamy właśnie dla osi plastycznej przekroju. Ze względu na sprężysto-idealnie plastyczny model pracy przekroju oś ta wydaje się najbardziej uzasadniona przy wprowadzaniu powierzchni granicznej.

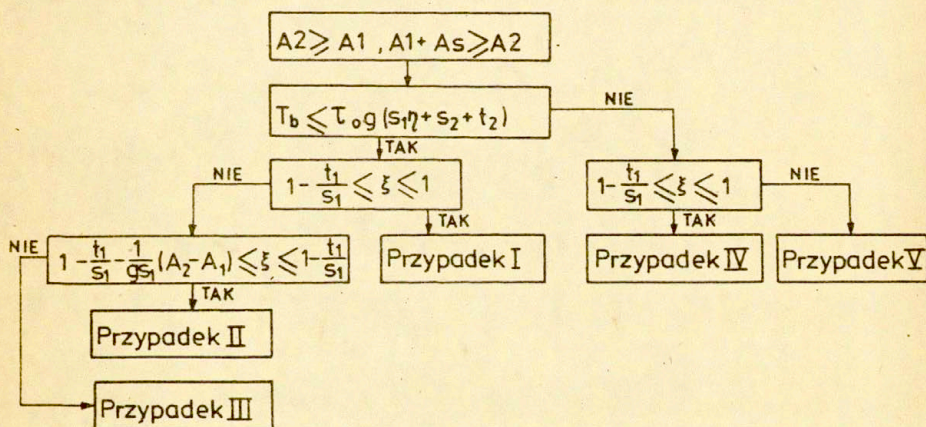


Rys. 7. Możliwe stany rozkładu naprężeń w przypadku przekroju o jednej osi symetrii. Oś pełnego zgięcia plastycznego przekroju stanowi oś odniesienia

Niniejsza praca służyć ma wyprowadzaniu powierzchni granicznej dla przekrojów belki dwuteowej stosowanej w elementach konstrukcji statków /uszywnienia kadłubów/. W związku z typowymi wymiarami przekrojów poprzecznych belek ram stosowanych w budownictwie okrętowym przyjęto następujące oznaczenia:

- $A_1$  pole półki o mniejszej powierzchni,
- $A_2$  pole półki o większej powierzchni,
- $A_s$  pole środника

oraz założenie, że  $A_1 + A_s \geq A_2$ . Założenie to oznacza, że oś zgięcia plastycznego przechodzi przez środek przekroju lub, w przypadku granicznym, oddziela dolną półkę i środek. W zależności więc od wymiarów przekroju i wzajemnego stosunku sił obciążających przekrój założono pięć różnych konfiguracji pól naprężeń. Wszystkie one pokazane są na rys. 7.



Rys. 8. Schemat blokowy obliczeń powierzchni granicznych dla przekrojów o jednej osi symetrii

Rys. 8 przedstawia schemat blokowy, zgodnie z którym wyprowadzono wzory analityczne na powierzchni graniczne stowarzyszone z każdym z pięciu przypadków konfiguracji naprężeń pokazanych na rys. 7. Przy rozpatrywaniu naprężeń powodujących zginanie i siłę osiową zachowane być muszą warunki równowagi względem osi

zgięcia plastycznego, gdzie  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $t_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $g$  oznaczone są na rys. 8 a  $T_b$  oznacza bieżącą siłę poprzeczną.

Wyprowadzone poniżej wycinki powierzchni granicznej dla wyróżnionych pięciu przypadków będą obowiązywały dla dodatnich wartości sił wewnętrznych.

Dla przypadku I wyrażenia na siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym belki w funkcji parametrów  $\xi$  i  $\eta$  przyjmują następującą postać:

$$v = a_1 \eta,$$

$$(4.1) \quad n = a_2 + a_3 \xi + a_4 \eta,$$

$$m = a_5 + a_6 \xi + a_7 \xi^2,$$

gdzie małe litery  $v$ ,  $n$ ,  $m$  oznaczają jak poprzednio bezwymiarowe siły wewnętrzne równe:

$$v = \frac{T}{T_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}, \quad m = \frac{M}{M_0^c},$$

zaś współczynniki przy parametrach  $\xi$  i  $\eta$  wynoszą:

$$a_1 = \frac{2g s_1 t_0}{T_0}, \quad a_3 = \frac{2B_1 s_1 \sigma_0}{N_0},$$

$$a_2 = \frac{(AR - 2B_1 s_1) \sigma_0}{N_0}, \quad a_4 = -\frac{2g s_1 \sigma_0}{N_0},$$

$$a_5 = \frac{\sigma_0}{M_0^c} \left\{ 2B_1 s_1 s_2 - \frac{B_1^2 s_1^2}{B_2} + A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) - A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) + \frac{1}{2} g \left( s_1 - t_1 \right) - \frac{1}{2} g \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right)^2 \right\},$$

$$a_6 = \left\{ \frac{2B_1^2 s_1^2}{B_2} - 2B_1 s_1 s_2 \right\} \frac{\sigma_0}{M_0^c}, \quad a_7 = -\frac{B_1^2 s_1^2 \sigma_0}{B_2 M_0^c},$$

AR oznacza powierzchnię przekroju dwuteownika tzn.:



$$AR = B_1 t_1 + B_2 t_2 + (H - t_1 - t_2)g$$

Powierzchnia graniczna dla tego przypadku tzn. dla obszaru zmienności  $\xi$  i  $\eta$  w granicach:

$$1 - \frac{t_1}{s_1} \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{s_1}$$

przyjmuje postać:

$$(4.2) \quad \phi = a_5 + a_6 \left( \frac{n}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right) + a_7 \left( \frac{n}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right)^2 - m = 0$$

W przypadku II obowiązują te same ogólne zależności zapisane wzorem (4.1) i powierzchnia graniczna (4.2) z następującymi wyrażeniami na współczynniki  $a_1$ - $a_7$

$$a_1 = \frac{2g s_1 \tilde{t}_0}{T_0},$$

$$a_2 = \left\{ A_2 - A_1 - g(s_1 - t_1) + g(s_2 - t_2) \right\} \frac{\sigma_0}{N_0},$$

$$a_3 = \frac{2s_1 g \sigma_0}{N_0}, \quad a_4 = -a_3,$$

$$a_5 = \frac{\sigma_0}{M_0^c} \left\{ 2A_1 s_2 - \frac{A_1^2}{B_2} - A_2(s_2 - \frac{t_2}{2}) + A_1(s_1 - \frac{t_1}{2}) - \frac{g}{2}(s_2 - t_2)^2 + \frac{g^2}{B_2}(s_1 - t_1)^2 + \frac{g}{2}(s_1 - t_1)^2 - \frac{2A_1 g}{B_2}(s_1 - t_1) + 2g s_2 (s_1 - t_1) \right\},$$

$$a_6 = \frac{\sigma_0}{M_0^c} \left\{ -2g s_1 s_2 + \frac{2A_1 s_1 g}{B_2} + \frac{2g^2 s_1}{B_2} (s_1 - t_1) \right\},$$

$$a_7 = -\frac{\sigma_0}{M_0^c} \left( \frac{g^2 s_1^2}{B_2} \right)$$

Obszar zmienności parametrów  $\xi$  i  $\eta$  wynosi:

$$1 - \frac{t_1}{s_1} - \frac{A_2 - A_1}{g s_1} \leq \xi \leq 1 - \frac{t_1}{s_1} \quad , \quad 0 \leq \eta \leq \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{s_1}$$

Przypadek III również charakteryzują zależności (4.1) i po-  
wierzchnia graniczna dana wzorem (4.2) z następującymi wzorami  
na współczynniki  $a_1$ - $a_7$ :

$$a_1 = \frac{2g \zeta_0 s_1}{T_0} \quad , \quad a_2 = 0 \quad ,$$

$$a_3 = \frac{2g \zeta_0 s_1}{N_0} \quad , \quad a_4 = - \frac{2g \zeta_0 s_1}{N_0} \quad ,$$

$$a_5 = \left\{ A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) + \frac{1}{2} g (s_1 - t_1)^2 - \frac{1}{2} g (s_2 - t_2)^2 + A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) \right\} \frac{\zeta_0}{M_0}$$

$$a_6 = 0 \quad , \quad a_7 = - \frac{g \zeta_0 s_1^2}{M_0}$$

Parametry  $\xi$  i  $\eta$  zmieniają się dla tego przypadku w następują-  
cych granicach:

$$\eta \leq \xi \leq 1 - \frac{t_1}{s_1} - \frac{1}{g s_1} (A_2 - A_1)$$

$$0 \leq \eta \leq \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{s_1}$$

Przypadki IV i V opisane być mogą układem następujących za-  
leżności na bezwymiarowe siły wewnętrzne:

$$v = a_0 + a_1 \eta \quad ,$$

$$(4.3) \quad n = a_2 + a_3 \xi + a_4 \eta \quad ,$$

$$m = a_5 + a_6 \xi + a_7 \xi^2 + a_8 \eta + a_9 \eta^2 \quad .$$

Zależności te, jak poprzednio, wynikają z założonych pól naprężeń.  
Odpowiednia powierzchnia graniczna przyjmuje postać:

$$\Phi = a_5 + a_6 \left[ \frac{\alpha}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - (V - a_0) \frac{a_4}{a_1 a_3} \right] + a_7 \left[ \frac{\alpha}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - (V - a_0) \frac{a_4}{a_1 a_3} \right]^2 + a_8 (V - a_0) \frac{1}{a_1} + \frac{a_9}{a_1} (V - a_0)^2 - m = 0.$$

Dla przypadku IV współczynniki  $a_0 - a_9$  liczone są zgodnie z następującymi zależnościami:

$$a_0 = \frac{g \tilde{\tau}_0}{T_0} (s_2 - t_2) \quad , \quad a_1 = \frac{g \tilde{\tau}_0 s_1}{T_0} \quad ,$$

$$a_2 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{N_0} \left\{ 2B_1 (t_1 - s_1) + 2g (s_1 - t_1) \right\} \quad ,$$

$$a_3 = \frac{2B_1 s_1 \tilde{\sigma}_0}{N_0} \quad , \quad a_4 = \frac{-2g s_1 \tilde{\sigma}_0}{N_0} \quad ,$$

$$a_5 = \left\{ 2B_1 s_1 s_2 - \frac{B_1^2 s_1^2}{2B_2} + A_1 s_1 - \frac{1}{2} B_1 t_1^2 + \frac{1}{2} g (s_1 - t_1)^2 - g s_2 (s_1 - t_1) + \frac{g A_1 s_1}{2B_2} + \frac{A_1 g}{2B_2} (s_1 - t_1) + \frac{g^2}{2B_2} (s_1 - t_1)^2 - A_1 s_2 + \frac{A_1^2}{2B_2} - \frac{g A_1 t_1}{2B_2} \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0^c} \quad ;$$

$$a_6 = \left\{ \frac{2B_1^2 s_1^2}{B_2} - 2B_1 s_1 s_2 \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0^c} \quad ,$$

$$a_7 = \left\{ -\frac{s_1^2 B_1^2}{B_2} \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0^c} \quad ,$$

$$a_8 = \left\{ g s_1 s_2 - \frac{A_1 g s_1}{B_2} - \frac{g^2 s_1}{B_2} (s_1 - t_1) \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0^c} \quad ,$$

$$a_9 = \left\{ -g s_1^2 + \frac{s_1^2 g^2}{2B_2} \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0^c}$$

a odpowiednie pole zmienności parametrów  $\xi$  i  $\eta$  wynosi:

$$1 - \frac{t_1}{s_1} \leq \xi \leq 1 \quad , \quad \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{s_1} \leq \eta \leq 1 - \frac{t_1}{s_1}$$

Dla przypadku V współczynniki  $a_0$ - $a_9$  liczone są zgodnie z następującymi zależnościami:

$$a_0 = \frac{g \tilde{\sigma}_0}{T_0} (s_2 - t_2) \quad , \quad a_1 = \frac{g \tilde{\sigma}_0}{T_0} s_1 \quad ,$$

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \frac{2g s_1 \tilde{\sigma}_0}{N_0} \quad , \quad a_4 = -a_3 \quad ,$$

$$a_5 = \left\{ A_1 s_2 - \frac{A_1^2}{2B_2} - \frac{g A_1 (s_1 - t_1)}{B_2} + g s_2 (s_1 - t_1) - \frac{g^2 (s_1 - t_1)^2}{2B_2} + \frac{g (s_1 - t_1)^2}{2} + A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0} \quad ,$$

$$a_6 = \left\{ -2g s_1 \left[ s_2 - \frac{A_1}{B_2} - \frac{g}{B_2} (s_1 - t_1) \right] \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0} \quad , \quad a_7 = \left\{ -\frac{g^2 s_1^2}{B_2} \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0} \quad ,$$

$$a_8 = \left\{ g s_1 \left[ s_2 - \frac{A_1}{B_2} - \frac{g}{B_2} (s_1 - t_1) \right] \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0} \quad ,$$

$$a_9 = \left\{ -\frac{1}{2} g s_1^2 + \frac{g^2 s_1^2}{2B_2} \right\} \frac{\tilde{\sigma}_0}{M_0} \quad .$$

a odpowiednie pole zmienności parametrów  $\xi$  i  $\eta$  wynosi:

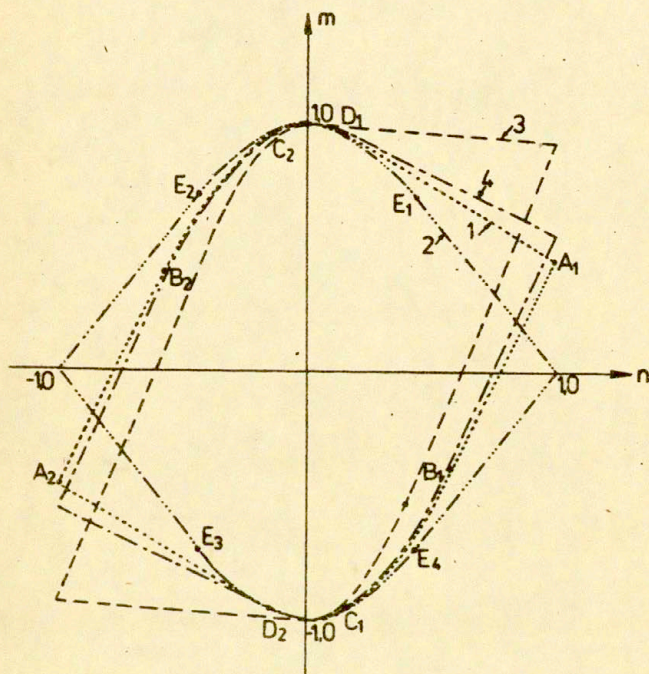
$$\eta \leq \xi \leq 1 - \frac{t_1}{s_1} \quad , \quad \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_2}{s_1} \leq \eta \leq 1 - \frac{t_1}{s_1}$$

Powtarzając analogiczny schemat rozumowania należy zbudować wycinki powierzchni granicznej dla wszystkich kombinacji znaków naprężeń założonych schematów.

Aby uniknąć uciążliwych obliczeń współczynników powierzchni granicznej napisany został program numeryczny w języku FORTRAN.

Program ten o nazwie ISECT, którego tabulogram znajduje się w załączniku I, oblicza współrzędne krzywej granicznej w osiach  $m$ ,  $n$  dla założonych wartości bezwymiarowej siły poprzecznej  $V$ , czyli w wyniku obliczeń programu otrzymujemy warstwicę powierzchni granicznej  $\phi(m, n, V) = 0$  powstałe z przecięcia powierzchni  $\phi = 0$  płaszczyznami  $V = a$ .

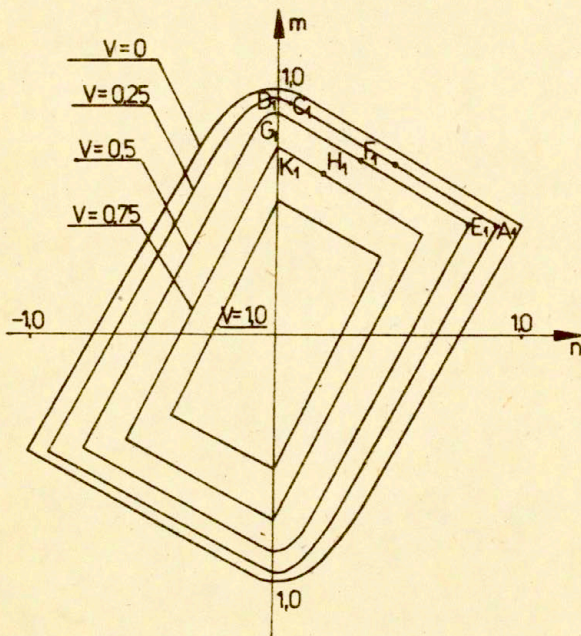
W programie ISECT a przyjęto równe 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0.



Rys. 9. Powierzchnie graniczne dla czterech różnych profili dwuteowych /dane patrz Załącznik I/.

Warstwicę  $V=0$  dla czterech różnych profili dwuteowych pokazano na rys. 9. Dane geometryczne dotyczące tych profili znajdują się w załączniku I, gdzie również pokazano część wydruku z programu ISECT dla jednego z przykładów.

Rys. 10 pokazuje warstwicę powierzchni granicznej dla profilu dwuteowego niesymetrycznego o wymiarach jak dla przykładu Nr 1 z załącznika.



Rys. 10. Warstwicę powierzchni granicznej /dla profilu Nr 1/ płaszczyznami  $V=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$

Powierzchnia ta w niesprężystej analizie konstrukcji ramowej ma analogiczne znaczenie do warunków plastycznego płynięcia w klasycznej teorii plastyczności. Innymi słowy, dla danego stanu naprężeń uogólnionych  $v, n, m$ , w rozpatrywanym przekroju belki fakt, że punkt  $v, n, m$  w przestrzeni naprężeń uogólnionych znajduje się wewnątrz powierzchni granicznej /t.j. po tej stronie, po której znajduje się początek układu/ oznacza, że przekrój może być traktowany jako sprężysty /choć mogą w nim już występować odkształcenia niesprężyste/. Osiągnięcie przez punkt  $v, n, m$ , powierzchni granicznej oznacza natomiast, że w rozpatrywanym

przekroju powstał uogólniony przegub plastyczny. Aby dokonać efektywnego sprawdzenia, czy dla konkretnego stanu naprężeń uogólnionych  $v$ ,  $n$ ,  $m$  spełniony jest warunek stanu granicznego, zwrócić należy uwagę na fakt, że powierzchnia graniczna dana jest w różnych obszarach za pomocą różnych wyrażeń analitycznych. I tak dla bieżącej siły poprzecznej  $T_b \leq T_0 g(s_1, \eta) + s_2 - t_2$  obowiązuje, dla dodatniej ćwiartki układu  $n$ ,  $m$  w zależności od wartości  $m$  i  $n$ , jeden z następujących trzech warunków granicznych:

$$1. \text{ dla } m_{A_1} \leq m \leq m_{B_1} \quad \text{ i } \quad n_{B_1} \leq n \leq n_{A_1}$$

obowiązuje powierzchnia graniczna dana wzorem (4.2), przypadek I, gdzie

$$m_{A_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{H_0} \left\{ A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) + \frac{1}{2} g(s_1, t_1)^2 - \frac{1}{2} g(s_2, t_2)^2 - A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) \right\},$$

$$n_{A_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{N_0} \left\{ A_1 + A_2 + g(H - t_1 - t_2 - 2s_1, \eta) \right\} = \frac{\bar{\sigma}_0}{N_0} (AR - 2g s_1, \eta),$$

$$m_{B_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{H_0} \left\{ 2A_1 s_2 - \frac{A_1^2}{B_2} + A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) - A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) + \frac{1}{2} g(s_1, t_1)^2 - \frac{1}{2} g(s_2, t_2)^2 \right\},$$

$$n_{B_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{N_0} (AR - 2A_1 - 2g s_1, \eta).$$

$$2. \text{ dla } m_{B_1} \leq m \leq m_{C_1} \quad \text{ i } \quad n_{B_1} \leq n \leq n_{C_1}$$

obowiązuje powierzchnia graniczna dana wzorem (4.2), przypadek II, gdzie

$$m_{C_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{H_0} \left\{ A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) + \frac{1}{2} g(s_1, t_1)^2 + A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) - \frac{1}{2} g(s_2, t_2)^2 \right\},$$

$$n_{C_1} = \frac{\bar{\sigma}_0}{N_0} (AR - 2A_2 - 2g s_1, \eta).$$

$$3. \text{ dla } m_{C_1} \leq m \leq m_{D_1} \quad \text{ i } \quad 0 \leq n \leq n_{C_1}$$

obowiązuje powierzchnia graniczna dana wzorem (4.2), przypadek III,

gdzie

$$m_{D_1} = \frac{\tilde{G}_0}{H_0^c} \left\{ A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) + A_2 \left( s_2 - \frac{t_2}{2} \right) + \frac{1}{2} g (s_1 - t_1)^2 + \frac{1}{2} g (s_2 - t_2)^2 - g s_1^2 \eta^2 \right\}$$

Dla bieżącej siły poprzecznej  $T_b > T_0 g (s_1 \eta + s_2 - t_2)$  obowiązują warunki stanu granicznego opisane następującymi zależnościami:

$$4. \text{ dla } m_{E_1} \leq m \leq m_{F_1}, \quad \text{ i } \quad n_{E_1} \leq n \leq n_{F_1}$$

obowiązuje zależność dana wzorem 3.4, przypadek IV, gdzie:

$$n_{E_1} = \frac{\tilde{G}_0}{N_0^c} \left\{ 2A_1 + 2g(s_1 - t_1) - 2g s_1 \eta \right\},$$

$$n_{F_1} = \frac{\tilde{G}_0}{N_0^c} \left\{ 2g(s_1 - t_1) - 2g s_1 \eta \right\},$$

$$m_{E_1} = \frac{\tilde{G}_0}{H_0^c} \left\{ \frac{1}{2} A_1 (2s_1 - t_1) + \frac{1}{2} g (s_1 - t_1 - s_1 \eta) (s_1 \eta - s_1 - t_1) + \right. \\ \left. [A_1 + g(s_1 - t_1 - s_1 \eta)] \left[ s_2 - \frac{A_1}{2B_2} - \frac{g}{2B_2} (s_1 - t_1 - s_1 \eta) \right] \right\},$$

$$m_{F_1} = \frac{\tilde{G}_0}{H_0^c} \left\{ A_1 s_2 - \frac{A_1^2}{2B_2} + \frac{g A_1}{B_2} (s_1 - t_1) - g s_2 (s_1 - t_1) + \frac{g^2}{2B_2} (s_1 - t_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{g}{2} (s_1 - t_1)^2 + g s_1 \left[ s_2 - \frac{A_1}{B_2} - \frac{g}{B_2} (s_1 - t_1) \right] \eta + \left( \frac{g^2 s_1^2}{2B_2} - \frac{1}{2} g s_1^2 \right) \eta^2 + A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) \right\}.$$

$$5. \text{ dla } m_{G_1} \leq m \leq m_{F_1}, \quad \text{ i } \quad 0 \leq n \leq n_{F_1}$$

obowiązuje zależność dana wzorem (4.4), przypadek V, gdzie

$$m_{G_1} = \frac{\tilde{G}_0}{H_0^c} \left\{ [A_1 + (s_1 - t_1 - s_1 \eta) g] \left[ s_2 - \frac{A_1}{2B_2} - \frac{g}{2B_2} (s_1 - t_1 - s_1 \eta) \right] + \right. \\ \left. + A_1 \left( s_1 - \frac{t_1}{2} \right) + \frac{g}{2} (s_1 - t_1 - s_1 \eta) (s_1 - t_1 + s_1 \eta) \right\}.$$



Na zakończenie porównujemy otrzymane powierzchnie z wynikami prac [6] i [10].

Analizując bisymetryczne przekroje dwuteowe autor [6] otrzymał następujące równanie powierzchni granicznej:

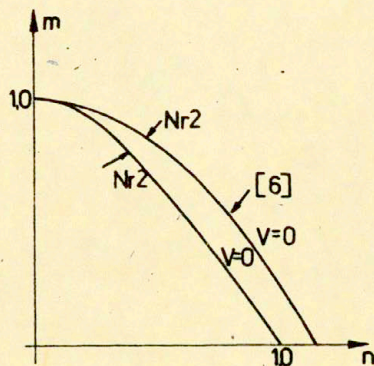
$$\frac{1}{2} \left[ m^2 + m \sqrt{m^2 + \frac{(2A - A_p)^2}{A^2 - A_p^2} n^2} \right] + \frac{(2A - A_p)^2}{4(A^2 - A_p^2)} n^2 + v^2 - 1 = 0,$$

gdzie  $A$  oznacza powierzchnię całego przekroju,

$A_p$  oznacza powierzchnię obu półek.

Na rys. 11 porównano krzywą otrzymaną w obecnej pracy i w [6] dla profilu Nr 2, przy założeniu  $v=0$ . Z rysunku widać, że dla  $m = v = 0$  krzywa otrzymana w [6] daje nieuzasadnienie wartość

$$n > 1.0$$



Rys. 11. Porównanie krzywych granicznych

Bardzo szczegółową analizę przekrojów dwuteowych niesymetrycznych przeprowadzono w pracy [10].

Wyprowadzono tam powierzchnie graniczne dla zakresu sprężystego i plastycznego z uwzględnieniem miejscowej utraty stateczności środnika /stateczność sprężysta i plastyczna/, jak również powierzchnie graniczne przy założeniu sztywnych i gęsto rozstawionych przepon /wyeliminowanie wyboczenia/.

W pracy [10] autorzy korzystali z tzw. naprężenia normalnego efektywnego /zastępczego/, które uwzględnia wpływ naprężeń stycznych. Pomimo różnic w podejściu prezentowanym w obecnej pracy i w [10] charakter powierzchni granicznych otrzymanych w obu przypadkach jest zbliżony, porównaj rys. 11 w [10]. Obie powierzchnie jednak mają krawędzie i naroża, nie są więc powierzchniami gładkimi. Charakter jednak obu powierzchni wskazuje na możliwość linearyzacji otrzymanych związków tzn. zastąpienia wycinków powierzchni płaszczyznami, co może uprościć otrzymane wyrażenia analityczne i okazać się korzystne w obliczeniach numerycznych. Sposób linearyzacji zależęć jednak będzie od geometrii przekroju poprzecznego lub dokładniej od stosunku powierzchni obu półek.

Odpowiednie decyzje co do charakteru tych uproszczeń podejmować należy w trakcie opracowywania programów dla konkretnego zagadnienia mechanicznego.

## 5. Zakończenie

Przedstawiony etap pracy skupiał się na wyprowadzeniu powierzchni granicznych dla przekrojów dwuteowych. Głównym przedmiotem zainteresowania są dwuteowniki o przekroju z jedną osią symetrii. Uwaga była skupiona na algebraicznej stronie zagadnienia. Celem jest takie zalgorytmizowanie procesu określania powierzchni granicznych i opracowanie programów generujących powierzchnie graniczne dla zadanych wielkości geometrycznych przekroju. Przewiduje się kilka testów, których celem jest umożliwienie podjęcia decyzji, czy do obliczeń ram stosować się będzie odpowiednio uzasadnioną oceną błędów powierzchnię graniczną daną jednym wyrażeniem analitycznym dla różnych kombinacji obciążeń, czy do programu liczącego konstrukcje wprowadzać się będzie równania powierzchni granicznej odpowiadające różnym proporcjom momentu zginającego, siły poprzecznej i siły podłużnej.

Opracowana metoda pozwala stwierdzić, że program obliczający ramy poddane działaniom znacznych sił podłużnych i poprzecznych może być opracowany. Dalszy etap działań poświęcony będzie obliczeniu przykładów powierzchni granicznych złożonych z płatów, ewentualnej generacji powierzchni jednopółkowej oraz opracowaniu roboczej wersji programu generowania powierzchni uzasadnionych do stosowania w praktyce projektowania i kontroli obliczeń.

Literatura

1. A.SAWCZUK, Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych, Wyd. Pol.Wrocł. Wrocław 1978
2. J.BAKER, J.HEYMAN, Plastic Design of Frames, 1. Fundamentals, Cambridge University Press, Cambridge 1969
3. P.G.HODGE, Jr., Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York 1959
4. M.ŻYCZKOWSKI, Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN Warszawa 1973
5. Ch.MASSONNET, M.SAVE, Calcul Plastique des Constructions, Nelissen, Liege 1976
6. A.J.STRELBICKAJA, Issledowanije procznosti tonkostiennych stierzhniej za predielom uprugosti, Izd.Ak.Nauk Ukr. SSR, Kiew 1958
7. A.J.STRELBICKAJA, Predielno sostojanie ram iz tonkostiennych stierzhniej pri izgibie z kruczeniem, Naukowa Dumka, Kiew 1964
8. B.M.BROUDE, Rascziot bałok po priedielnomu sostojaniju a ucziotom kasatielnych napriażenij, Gosstrojizdat, Moskwa-Leningrad, 1951
9. B.M.BROUDE, Rascziot bałok po priedielnomu sostojaniju pri ucziotie kasatielnych napriażenij, Gosstrojizdat., Moskwa-Leningrad, 1953
10. Y.UEDA, Sherif M.H.RASHED, An ultimate transverse strength analysis of ship structures, J.S.N.A., Japan, vol. 136, Dec. 1974

Jeden z autorów /Barbara Bońi/ wykonywał pracę w czasie pobytu w Instytucie Statyki i Dynamiki Uniwersytetu w Stuttgarcie na stypendium Fundacji im. A. von Humboldta. Całość badań związana jest z projektem badawczym opracowywanym na potrzeby Polskiego Rejestru Statków.

Załącznik I

Danymi do programu ISECT są:  
gęstość podziału przekroju poprzecznego, jego własności materiałowe oraz wymiary geometryczne. Dane te powinny być podane w następującej kolejności:

- $N_1$  - gęstość podziału,
- $\sigma_0$  - granica plastyczności na rozciąganie i ściskanie,
- $\tau_0$  - granica plastyczności na ścinanie,
- $B_1$  - szerokość półki o mniejszym przekroju,
- $B_2$  - szerokość półki o większym przekroju,
- $H$  - wysokość przekroju,
- $t_1$  - grubość półki o mniejszym przekroju,
- $t_2$  - grubość półki o większym przekroju,
- $g$  - grubość środka.

Format wczytywanych danych podany jest każdorazowo w odpowiedniej dyrektywie FORMAT /patrz tabulogram programu/.

Dane geometryczne liczonych przykładów:

| Nr profilu pręta | $B_1$<br>/cm/ | $B_2$<br>/cm/ | H<br>/cm/ | g<br>/cm/ | $t_1$<br>/cm/ | $t_2$<br>/cm/ |
|------------------|---------------|---------------|-----------|-----------|---------------|---------------|
| 1                | 25.0          | 50.0          | 45.0      | 1.0       | 1.0           | 1.0           |
| 2                | 25.0          | 25.0          | 40.0      | 1.0       | 1.0           | 1.0           |
| 3                | 30.0          | 50.0          | 44.0      | 1.0       | 2.0           | 2.0           |
| 4                | 25.0          | 65.0          | 60.0      | 1.0       | 1.0           | 1.0           |

```

PROGRAM ISECT(INPUT,OUTPUT,TAPE)=INPUT,TAPE2=OUTPUT)
REAL XX(10),N(1),M(10)
C**PROGRAM FOR PLOTTING YIELD SURFACE FOR NON SYMMETRIC I-CROSS SECTION
C****PROGRAM WRITTEN BY B.BUNI,ISI,DECEMBER 1980
C N1=PARTITION ALONG SECTION DPTH
C B1=WIDTH OF THE FLANGE WITH SMALLER AREA
C B2=WIDTH OF THE FLANGE WITH BIGGER AREA I.E.A] LE A2
C H=CROSS SECTION DEPTH
C T1 AND T2= THICKNESSES OF FLANGES CORRESPONDING TO B1 AND B2
C G=WEB THICKNESS
C SIGC=PLASTIC NORMAL STRESS
C TAU=PLASTIC SHEAR STRESS
C S1 AND S2=LOCATION OF PLASTIC AXIS
C RMO=ULTIMATE AXIAL FORCE
C RMO=ULTIMATE MOMENT FOR PURE BENDING
C XMF=ULTIMATE BENDING MOMENT FOR FLANGES ONLY/SANDWICH CROSS SEC./
C T=ULTIMATE SHEAR FORCE
C RT=ULTIMATE SHEAR FORCE FOR WEB ONLY
READ(1,5) N1
5 FORMAT(1I2)
READ(1,6) SIGC,TAU
6 FORMAT(2F7.2)
READ(1,10) B1,B2,H,T1,T2,G
10 FORMAT(6F8.2)
WRITE(2,100)
100 FORMAT(1X,36H(CROSS-SECTION GEOMETRICAL PROPERTIES)
WRITE(2,104) B1,B2,H,T1,T2,G
104 FORMAT(7X,1X,3HH)=,F6.2,2X,3HH2=,F6.2,2X,3HT1=,F6.2,
*2X,3HT2=,F6.2,2X,2HD=,F6.2)
A1=B1*T1
A2=B2*T2
G2=B1/H2
M1=N1*1
I1=(A2-A1)/99,12,12
12 A3=A1+(H-T1-T2)*G
I1=(A3-A2)/98,13,13
13 S1=(A2-A1+(H+T1-T2)*G)/(2*G)
S2=H-S1
XMO=A1*(S1-T1/2)+A2*(S2-T2/2)+((S1-T1)*(S1-T1)/2+G*(S2-T2)
***(S2-T2)/2
RMO=SIGC*XMO
TAU=(H-T1-T2)*G
RT=TAU/TW
XMO=A1+A2*(H-T1-T2)*G
RMO=SIGC*XMO
T1=T1+A1*A2
XMF=11*(S1-T1/2)+A2*(S2-T2/2)
SM=XMF/XMO
ST=T1/XMO
WRITE(2,110) SIGC,TAU
110 FORMAT(1X,22HPLASTIC NORMAL STRESS=,F7.2,5X,21HPLASTIC SHEAR STRES
*S=,F7.2)
WRITE(2,111) RMO,RMO,RMO,SM,ST
111 FORMAT(1X,4HRMO=,E10.8,2X,4HRMO=,E10.8,2X,3HSM=,
*F6.4,2X,3HST=,F6.4)
WRITE(2,114) S1,S2
114 FORMAT(1X,29HLOCATION OF PLASTIC AXIS* S1=,F6.2,2X,3HS2=,F6.2)

```

```

DO 2, ( J=1,4
  IF (J.EQ.1) WRITE(2,115)
  IF (J.EQ.2) WRITE(2,116)
  IF (J.EQ.3) WRITE(2,117)
  IF (J.EQ.4) WRITE(2,118)
115 FORMAT(/,20X,36H***MOMENT POSITIVE FORCE POSITIVE***)
116 FORMAT(/,20X,36H***MOMENT POSITIVE FORCE NEGATIVE***)
117 FORMAT(/,20X,36H***MOMENT NEGATIVE FORCE NEGATIVE***)
118 FORMAT(/,20X,36H***MOMENT NEGATIVE FORCE POSITIVE***)
DO 8, I=1,5
  S=(K-1)*G*Z5
  15 Y=S*(H-T1-T2)/Z
  IF ((S2-T2).GE.Y) GO TO 51
  CASE=4 *PKZYPADEK=4*
  IP=4
  Y=S*(H-T1-T2)-S2*T2
  T=(S2-T2+Y)*G/TW
  DO 20, I=1,M1
  XX(I)=S1-I1*(I-1)/M1
  X=XX(I)
  N(I)=(2*(I1-S1+X)*B1+(S1-T1-Y)*G*2)/XN0
  XM = .5*B1*(T1-S1+X)**2*(A-I1+S1)+.5*G*(S1-T1-Y)*(Y+S1-T1)
  *- (B1*(T1-S1+X)+G*(S1-T1-Y))*(S2-GA*(S1-X)-B1*(T1-S1+X)/(2*B2)
  *-G*(S1-T1-Y)/(2*B2))
  XM = L1*(S1*S1-X*X)/2+B1*(S1-X)*S2-B1*B1/(2*B2)*(S1-X)*(S1-X)
  CALL FLHS(J,A,P)
  N(I)=F*N(I)
  M(I)=(A*X+P*XN)/XM
20 CONTINUE
  GO TO 90
25 CONTINUE
  CASE=5 *PKZYPADEK=5
  IP=5
  DO 3, I=1,M1
  XX(I)=S1-I1-(S1-T1-Y)*(I-1)/M1
  X=XX(I)
  N(I)=2*G*(X-Y)/XN0
  XM = .5*G*(X*X-Y*Y)-G*(X-Y)*(S2-G1*T1/B2-G*(S1-T1-X)/B2-G*(X-Y)
  */(2*B2))
  XM = (A1*(S1-T1-X)*G)*(S2-G1*T1/2-G*(S1-T1-X)/(2*B2))+B1
  *T1*(S1
  *-T1/Z)+(S1-T1-X)*G*(X+S1-T1)/2
  CALL FLHS(J,A,R)
  N(I)=F*N(I)
  M(I)=(A*X+P*XN)/XM
30 CONTINUE
  GO TO 90
50 CONTINUE
  CASE=1 *PKZYPADEK=1*
  IP=1
  Z=(AC-A1)/G
  T=2*Y*G/TW
  DO 55, I=1,M1
  XX(I)=S1-I1*(I-1)/M1
  X=XX(I)
  N(I)=(F1*(I1-S1+X)+G*(H-T1-T2-Z*Y)*(A2-B1*(S1-X)))/XN0
  XM = F1*(S1*S1-X*X)/2+B1*(S1-X)*(S2-GA*(S1-X)/Z)

```

```

XN = .5*B1*(X*X-(S1-I1)*(S1-T1)) + .5*G*(S1-T1)*(S1-T1) - (.5*G*
*(S2-T2)*(S2-T2) - (A2-B1*(S1-X))*(S2-T2/2 - B1*(S1-X)/(2*B2))
CALL PLUS(J,A,B)
N(I)=P*N(I)
M(I)=(A*XM+B*XN)/XMO
55 CONTINUE
GO TO 90
60 CONTINUE
CASE=2 *PRZYPADEK=2*
IP=2
DO 65 I=1,MI
XX(I)=S1-T1-Z*(I-1)/NI
X=XX(I)
N(I)=((X-Z*Y-T2+S2)*G+A2-A1-G*(S1-T1-X))/XNO
XM=(A1*(S1-T1-X)*G1*(S2-G2*T1/2-G*(S1-T1-X)/(2*B2))+B1*T1*
*(S1-T1/2)+(S1-T1-X)*(X*S1-T1)*G/2
XN=G*X*X/2-G*(S2-T2)*(S2-T2)/2-(A2-A1-(S1-T1-X)*G)*
*(S2-G2*T1/2-T2/2-G*(S1-T1-X)/(2*B2))
CALL PLUS(J,A,B)
N(I)=P*N(I)
M(I)=(A*XM+B*XN)/XMO
65 CONTINUE
GO TO 90
70 CONTINUE
CASE=3 *PRZYPADEK=3*
IP=3
DO 75 I=1,MI
XX(I)=S1-T1-Z-(S1-T1-Z-Y)*(I-1)/NI
X=XX(I)
N(I)=(2*(A-Y)*G)/XNO
XN=0.0
XM=A1*(S1-T1/2)+.5*G*(S1-T1-X)*(S1-T1+X)+.5*G*(S2-T2-X)*
*(S2-T2+X)+A2*(S2-T2/2)
CALL PLUS(J,A,B)
N(I)=P*N(I)
M(I)=(A*XM+B*XN)/XMO
75 CONTINUE
90 WRITE(2,91) IP
91 FORMAT(/,5A,9HCASE IP=,I2,/)
WRITE(2,92)
92 FORMAT(/,6A,1HT,9X,1HY,10X,1HX,7X,11HN-DIM FORCE,5X,14HN-DIM BEM M
*OM,.)
WRITE(2,93) (T,Y,XX(I),N(I),M(I),I=1,MI)
93 FORMAT(4X,F7.4,3X,F7.2,4X,F7.2,6X,F7.4,10X,F7.4)
IF(IP.EQ.1) GO TO 60
IF(IP.EQ.2) GO TO 70
IF(IP.EQ.4) GO TO 25
90 CONTINUE
900 CONTINUE
GO TO 100
98 WRITE(2,102)
102 FORMAT(1H ,1X,37H**PLASTIC AXIS CROSSES THE FLANGE***)
GO TO 100
99 WRITE(2,101)
101 FORMAT(1X,33H***EXCHANGE DATA FOR B1 AND B2***)
100 CONTINUE
STOP

```



```
ROUTINE PLUS(J,A,B)
  INTEGER J
  REAL A,B
  A=1.0
  B=1.0
  IF (J.EQ.3.OR.J.EQ.4) A=-1.0
  IF (J.EQ.2.OR.J.EQ.3) B=-1.0
  RETURN
END
```

.549 CP SECONDS

310008 CM STORAGE USED

81

## CROSS-SECTION GEOMETRICAL PROPERTIES

B1= 25.00 B2= 50.00 H= 45.00 T1= 1.00 T2= 1.00 G= 1.00  
 PLASTIC NORMAL STRESS= 1.00 PLASTIC SHEAR STRESS= .50  
 RMO= .195600E+04 PNO= .1180000E+03 MTC= .2150000E+02 SM= .6838 ST= .3644  
 LOCATION OF PLASTIC AXIS\* S1= 35.00 S2= 10.00

\*\*\*MOMENT POSITIVE FORCE POSITIVE\*\*\*

CASE IP= 1

| T      | Y    | X     | N-DIM FORCE | N-DIM BEN MOM. |
|--------|------|-------|-------------|----------------|
| 0.0000 | 0.00 | 35.00 | 1.0000      | .4729          |
| 0.0000 | 0.00 | 34.00 | .9153       | .5238          |
| 0.0000 | 0.00 | 34.00 | .8305       | .5741          |
| 0.0000 | 0.00 | 34.40 | .7458       | .6240          |
| 0.0000 | 0.00 | 34.20 | .6610       | .6733          |
| 0.0000 | 0.00 | 34.00 | .5763       | .7221          |

CASE IP= 2

| T      | Y    | X     | N-DIM FORCE | N-DIM BEN MOM. |
|--------|------|-------|-------------|----------------|
| 0.0000 | 0.00 | 34.00 | .5763       | .7221          |
| 0.0000 | 0.00 | 24.00 | .4915       | .7704          |
| 0.0000 | 0.00 | 24.00 | .4068       | .8183          |
| 0.0000 | 0.00 | 14.00 | .3220       | .8655          |
| 0.0000 | 0.00 | 14.00 | .2373       | .9123          |
| 0.0000 | 0.00 | 9.00  | .1525       | .9586          |

CASE IP= 3

| T      | Y    | X    | N-DIM FORCE | N-DIM BEN MOM. |
|--------|------|------|-------------|----------------|
| 0.0000 | 0.00 | 9.00 | .1525       | .9586          |
| 0.0000 | 0.00 | 7.20 | .1220       | .9735          |
| 0.0000 | 0.00 | 5.40 | .0915       | .9851          |
| 0.0000 | 0.00 | 3.60 | .0610       | .9934          |
| 0.0000 | 0.00 | 1.80 | .0305       | .9983          |
| 0.0000 | 0.00 | 0.00 | 0.0000      | 1.0000         |

CASE IP= 1

| T     | Y    | X     | N-DIM FORCE | N-DIM BEN MOM. |
|-------|------|-------|-------------|----------------|
| .2500 | 5.38 | 35.00 | .9089       | .4729          |
| .2500 | 5.38 | 34.00 | .8242       | .5238          |
| .2500 | 5.38 | 34.00 | .7394       | .5741          |
| .2500 | 5.38 | 34.40 | .6547       | .6240          |
| .2500 | 5.38 | 34.20 | .5699       | .6733          |
| .2500 | 5.38 | 34.00 | .4852       | .7221          |