Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.

Nota di

Giuseppe Vitali a Padova.

Elenco dei lavori citati. (Essi vengono indicati colla lettera che li precede in questo elenco).

(A). G. Vitali. *Geometria nello spazio hilbertiano.* [Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti-Anno accademico 1927—28. Tomo LXXXVII. Parte seconda. pp. 349—428].

(B). G. Vitali. *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. VII, serie 6ª, 1º sem. fasc. 8. Roma, 1928, pp. 626 e seg.].

(C). Ernesto Pascal. *I determinanti.* [U. Hoepli, editore Milano Seconda edizione. 1923].

(D). G. Vitali. *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* [Giornale di Matematiche di Battaglini diretto da E. Pascal. Volume, LXI (1923) 14º della 3ª serie. pp. 1—46].

(E). G. Fubini — E. Čech. *Geometria proiettiva differenziale.* [Bologna. Nicola Zanichelli. editore, in 2 tomi, 1926 e 1927].

(F). K. Kommerell. *Riemannsche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen.* [Mathematische Annalen. LX. Band. 1905. pp. 548—596].

(G). E. Bompiani. *Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una V_m in V_n.* [Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti-Anno accademico 1920—21. Tomo LXXX. Parte seconda. pp. 1113—1145].

Prefazione.

È nota l'importanza che per le superficie dello spazio ordinario ha l'esistenza di una normale determinata. Questa normale interviene nella formazione della seconda forma differenziale quadratica associata alla superficie, e quindi nell' espressione della curvatura media, nella determinazione delle linee di curvatura, ecc.

Per le altre superficie esistono infinite normali, le quali hanno già subito una prima classificazione colla considerazione degli spazi r-tangenti, che io indico con σ_r [1]).

Le normali che prima si affacciano alla considerazione sono quelle che giacciono nel σ_2, ma anche queste, se si esclude il caso delle sviluppabili e quello delle superficie dello spazio ordinario, sono in numero infinito, ed in particolare possono essere tutte le direzioni di un piano, se il σ_2 ha 4 dimensioni, o possono essere tutte le direzioni di uno spazio a 3 dimensioni, se il σ_2 ha 5 dimensioni.

Si presenta allora la questione di riconoscere se fra dette normali vi sia un sistema ortogonale (di 2 o 3, a seconda che esse riempiono un piano od uno spazio a 3 dimensioni) che meriti di essere considerato come privilegiato.

Un tale sistema deve, secondo il mio parere, rispondere ad una definizione simmetrica rispetto al sistema delle sue rette. In generale non apparterrà ad un tale sistema la *normale di curvatura media* del Bompiani [2]), nè una di quelle da me segnalate recentemente [3]), e di cui la 2ª coincide colla precedente normale del Bompiani.

In questo lavoro presento una definizione di un tal sistema, la quale gode della proprietà desiderata (Cap. III. n°. 1 e Cap. IV. n°. 1), e che forse è l'unica del genere che si possa pensare.

Corrispondentemente dimostro che esistono sistemi reali che vi soddisfano e che chiamo *sistemi principali.* (Cap. III. n° 2 e Cap. IV. n°. 2).

Però non in tutti i casi vi è un solo sistema principale. In una superficie vi possono essere punti (che io chiamo *ciclici*) in cui

---

[1]) (A). pag. 395.

[2]) (G). pag. 1133.

[3]) (A). pag. 424

si ha una semplice infinità di sistemi principali (Cap. III. ni. 5, 6, 7 e Cap. IV. ni. 2, 3, 5).

Ho chiamato *cicliche* le superficie i cui punti sono tutti ciclici, ed ho trovato esempi di superficie cicliche tanto col σ_2 a *5* dimensioni (Cap. III. n⁰. 7), quanto col σ_2 a *4* dimensioni (Cap. IV. n⁰. 5).

Alla trattazione degli argomenti predetti (Cap. III e IV) ho premesso due capitoli in cui si passano in rassegna *8* invarianti di una qualunque varietà (Cap. I), uno dei quali, quello che ho indicato con J_2 si presenta, almeno analiticamente, come la più naturale estensione alle varietà a più dimensioni dell'invariante di Gauss (curvatura totale delle superficie), e che probabilmente apparirà tale anche dal punto di vista geometrico, e nel secondo dei quali (Cap. II) si procede, nel caso in cui il σ_2 abbia una dimensione di meno del massimo numero possibile, alla scomposizione di un controvariante a *4* apici, che conduce ad un cono quadrico dello spazio tangente, che deve avere un significato proiettivo. (Cap. II. n⁰ 4). Questo cono è definito uguagliando a zero una certa forma quadratica, che per la superficie dello spazio lineare a 4 dimensioni si riduce alla forma F_2 del Fubini[1]).

I risultati dei primi due capitoli hanno anche applicazione nei successivi.

CAPITOLO I

Gli invarianti $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8$ di una varietà qualunque.

1. — Sia

$$f = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

l'equazione di una varietà V_n ad n dimensioni dello spazio hilbertiano, ed indichiamo con g il campo di variabilità della t[2]). Indichiamo poi con f_i la derivata di f rispetto ad u_i, e poniamo

[1] $$a_{rs} = \int_g f_r f_s \, dt.$$

Il sistema a_{rs} è un covariante simmetrico a *2* indici del calcolo assoluto del Ricci, e quindi una sostituzione S di equazioni

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) (E). Tomo secondo. pp. 631—637.

[2]) Per questa rappresentazione delle varietà vedere (A) pag. 391 e seguenti.

che porta dalle variabili u alle variabili v, la muta colla legge

$$[2]\qquad a_{rs}[v] = \sum_{1}^{n}{}_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma}[u] \frac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \frac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} = \Sigma'_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma}[u] D_{\varrho\sigma, rs} \quad {}^{1}),$$

dove

$$D_{\varrho\sigma, rs} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s}, & se \ \sigma = \varrho \\[2ex] \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} + \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_s}, & se \ \sigma \neq \varrho, \end{cases}$$

e Σ' è estesa a tutte le combinazioni $\varrho\sigma$ con ripetizione a *2* a *2* dei numeri

$$[3]\qquad 1, 2, \ldots, n.$$

Il determinante di ordine $n(n+1):2$

$$D = | D_{\varrho\sigma, rs} |$$

ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie $\varrho\sigma$ ed rs tutte le combinazioni con ripetizione a *2* a *2* dei numeri (3), e mettendo in una medesima riga tutti gli elementi colla stessa coppia $\varrho\sigma$ e in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia rs, è un determinante di Scholtz-Hunyady[2]), e quindi vale Δ^{n+1}, dove

$$\Delta = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$$

è il determinante funzionale della sostituzione S.

Indichiamo poi con a il determinante di ordine n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . \quad . \quad . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si sa che $a \neq 0$, e che

$$a[v] = a[u] \, . \, \Delta^2.$$

---

1) Per la notazione $a_{rs}[u]$ vedere (B).

2) (C). pp. 156—160.

2. — Indichiamo con f_{rs} le derivate seconde covarianti di f rispetto al sistema a_{rs}, poniamo

[4] $$A_{rs,pq} = \int_g f_{rs} f_{pq}\, dt.$$

Il sistema (4) è un covariante a *4* indici nel calcolo assoluto di Ricci, simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, e rispetto agli indici di ciascuna di queste coppie.

Si ha evidentemente

$$A_{rs,pq}[v] = \Sigma'_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} A_{\varrho\sigma,\pi\varkappa}[u] \,.\, D_{\varrho\sigma,rs} \,.\, D_{\pi\varkappa,pq},$$

dove la Σ' è estesa a tutte le combinazioni $\varrho\sigma$ e $\pi\varkappa$ con ripetizione a *2* a *2* dei numeri (3).

Indichiamo con A il determinante formato cogli elementi $A_{\varrho\sigma,rs}$ come è stato formato D con i $D_{\varrho\sigma,rs}$.

Si ha subito per le regole di moltiplicazione dei determinanti

$$A[v] = A[u] \,.\, D^2 = A[u] \,.\, \Delta^{2(n+1)}.$$

Consegue che

$$J_1 = A : a^{n+1}$$

è un invariante.

3. — Il sistema

[5] $$R_{rs,pq} = A_{rp,sq} - A_{rq,sp}$$

è un covariante a *4* indici simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, ed emisimmetrico rispetto agli indici di ciascuna di queste coppie, e quindi ha nulli tutti gli elementi in cui una di queste coppie è formata di due numeri uguali.

Consegue che

$$R_{rs,pq}[v] = \Sigma''_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} R_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} \,.\, P_{\varrho\sigma,rs}[u] \,.\, P_{\pi\varkappa,pq}, \quad (r < s \text{ e } p < q)$$

dove

$$P_{\varrho\sigma,rs} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} & \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_r} & \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} \end{vmatrix}$$

e Σ'' è estesa a tutte le combinazioni semplici a *2* a *2* dei numeri (3).

Il determinante di ordine $n(n-1):2$

$$P = | P_{\varrho\sigma.rs} |$$

ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie $\varrho\sigma$ ed rs tutte le combinazioni semplici a 2 a 2 dei numeri [3] scritte con $\varrho < \sigma$, ed $r < s$, e mettendo in una medesima riga gli elementi colla stessa coppia $\varrho\sigma$ ed in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia rs, è un determinante di Spottiswoode[1]), formato coi minori di 2^0 ordine di Δ, e quindi vale Δ^{n-1}.

Indichiamo con R il determinante formato cogli elementi $R_{\varrho\sigma,rs}$ come è stato formato P con i $P_{\varrho\sigma,rs}$.

Si ha subito per le regole di moltiplicazione dei determinanti

$$R[v] = R[u] \,.\, P^2 = R[u] \,.\, \Delta^{2(n-1)}.$$

Consegue che

$$J_2 = R : a^{n-1}$$

è un invariante.

4. — Indichiamo con

$$A^{rs,pq} \tag{6}$$

il complemento algebrico di $A_{rs,pq}$ in A.

Si ha

$$\Sigma'_{hk} A_{hk,rs} \,.\, A^{hk,pq} = \varepsilon_{rs,pq} \,.\, A \tag{7}$$

dove Σ' ha il solito significato, ed $\varepsilon_{rs,pq}$ vale zero od uno secondo che le combinazioni rs e pq sono differenti od uguali. La [7] si può anche scrivere

$$\sum_1^n{}_{hk} A_{hk,rs} \,.\, (A^{hk,pq}) = \varepsilon_{rs,pq} \,.\, A \,.\, (2^{\varepsilon_{pq}} : 2), \tag{7'}$$

dove

$$(A^{hk,pq}) = A^{hk,pq} \,.\, (2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} : 4),$$

ed ε_{hk} vale zero od uno secondo che h e k sono differenti od uguali.

Se $A \neq 0$, e se la combinazione pq e' tenuta fissa le [7] individuano il sistema

$$A_{hk,pq} : A$$

---

[1]) (C) pp. 132—135.

con hk percorrente tutte le combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri (3), e quindi è individuato dalle (7') il sistema

$$\omega_{hk,pq} = (A^{hk,pq}) : A \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Consideriamo questo sistema per le variabili u, e costruiamo il controvariante a 4 apici $\Omega^{hk,pq}$ che per le variabili u coincide con $\omega^{hk,pq}(u)$ [1]).

Per il principio della saturazione il sistema

$$H_{rs}^{pq} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs}\, \Omega^{hk,pq}$$

è un sistema di Ricci a due indici di covarianza ed a due indici di controvarianza, il quale per le variabili u coincide con $\varepsilon_{rs.pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2)$, ma il sistema E_{rs}^{pq} che per qualunque sistema di variabili coincide con $\varepsilon_{rs,pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2)$, è pure un sistema assoluto di Ricci, come si può facilmente verificare, dunque per qualunque sistema di variabili

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs}.\, \Omega^{hk,pq} = \varepsilon_{rs,pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2),$$

e poichè [7'] ha una soluzione determinata, si ha per qualunque sistema di variabili

$$\omega^{hk,pq} = \Omega^{hk,pq},$$

e quindi si puo concludere che $\omega^{hk,pq}$ è un controvariante di Ricci a 4 apici.

Allora è pure un controvariante di Ricci a 4 apici anche il sistema

$$\alpha^{hk,pq} = \omega^{hk,pq}.\, J_1 = (A^{hk,pq}) : a^{n+1} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}}.\, A^{hk,pq} : (4a^{n+1}).$$

Io dico che il sistema

$$\alpha^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}}.\, A^{hk,pq} : (4a^{n+1})$$

è un controvariante a 4 apici di Ricci anche quando $A = 0$. Intanto la cosa è vera se la caratteristica K di A è $< n(n+1):2-1$, perchè allora $\alpha^{hk,pq} = 0$ qualunque siano gli apici.

Resta a vedere che cosa avviene se $K = n(n+1):2-1$. Intanto possiamo osservare che tutti i risultati precedenti si possono ripetere quando a_{rs} sia un covariante a 2 indici di Ricci col determinante a diverso da zero, ed $A_{rs,pq}$ sia un covariante di Ricci

[1]) (D). Cap. II. 2. pp. 12—13.

a *4* indici, simmetrico rispetto alle due coppie rs e pq e rispetto agli indici di ciascuna coppia. Ed allora supposto $A^{ij,mn}(u) \neq 0$, consideriamo il sistema $B_{rs,pq}$ covariante di R i c c i a *4* indici, che per le variabili u soddisfa alle uguaglianze

$$B_{mn,ij} = B_{ij,mn} = A_{ij,mn} + \lambda A^{ij,mn}$$

dove λ è una costante positiva, e per tutti gli altri sistemi di indici

$$B_{rs,mn} = A_{rs,mn}.$$

Allora il determinante B costruito colle $B_{rs,pq}$, come A è costruito colle $A_{rs,pq}$, è diverso da zero per $\lambda > 0$, sufficientemente piccolo, e diventa zero per $\lambda = 0$, perchè allora coincide con A.

Indichiamo con $B^{rs,pq}$ il complemento algebrico di $B_{rs,pq}$ in B. Le $B^{rs,pq}$ sono funzioni di λ, che col tendere di λ a z e r o tendono alle $A^{rs,pq}$. Inoltre per $\lambda \neq 0$, sufficientemente piccolo, essendo $B \neq 0$, il sistema

$$\beta^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . B^{hk,pq} : (4\, a^{n+1})$$

è un controvariante a *4* apici di R i c c i, ma la legge di controvarianza che vale per ogni $\lambda > 0$, e abbastanza piccolo, si conserverà a causa della continuità, anche al limite per $\lambda = 0$, e quindi

$$\alpha^{hk,pq} = \lim \beta^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4\, a^{n+1})$$

è un controvariante di R i c c i a 4 apici. c. d. d.

Si può dunque enunciare il

T e o r. Se le a_{rs}, a, $A_{rs,pq}$, A hanno il significato loro assegnato ai Ni 1 e 2, se $A^{rs,pq}$ è il complemento algebrico di $A_{rs,pq}$ in A, il sistema

[8] $$\alpha^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4\, a^{n+1}),$$

dove

$$\varepsilon_{rs} = \begin{cases} 1, \text{ se } r = s \\ 0, \text{ se } r \neq s \end{cases}$$

è un controvariante di R i c c i a *4* apici, qualunque sia la caratteristica della matrice di A.

Si vede poi facilmente che il sistema $\alpha^{rs,pq}$ è simmetrico rispetto alle coppie rs e pq e rispetto agli apici di ciascuna coppia.

5. — Il sistema

$$\varrho^{rs,pq} = a^{rp,sq} - a^{rq,sp}$$

è un controvariante a 4 apici simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, ed emisimmetrico rispetto agli apici di ciascuna di questo coppie.

6. — Si puo' anche notare che

$$R_{rs,pq} + R_{rp,qs} + R_{rq,sp} = 0$$
$$\varrho^{rs,pq} + \varrho^{rp,qs} + \varrho^{rq,sp} = 0,$$

e che le $R^{rs,pq}$ non sono altro che i noti simboli di **Riemann** (rs, pq) di prima specie[1]).

7. — La funzione

$$J_3 = \sum_1^n{}_{rs.pq} R_{rs,pq} \, \varrho_{rs,pq}$$

è un invariante.

8. — Indichiamo con ϱ il determinante formato coi $\varrho_{rs.pq}$, come R è stato formato cogli $R_{rs,pq}$, allora con ragionamenti simili ad altri precedenti, si può dimostrare che

$$\varrho(v) = \varrho(u) : \varDelta^{2(n-1)},$$

da cui consegue che

$$J_4 = \varrho \cdot a^{n-1}$$

è un invariante.

9. — Sono pure invarianti

$$J_5 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} A_{rs,pq} \cdot a^{rs} \cdot a^{pq}$$

$$J_6 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} A_{rs,pq} \cdot a^{rp} \cdot a^{sq}$$

$$J_7 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} a_{rs,pq} \cdot a_{rs} \cdot a_{pq}$$

$$J_8 = \sum{}_{rs\,pq} a_{rs,pq} \cdot a_{rp} \cdot a_{sq},$$

dove a^{rs} indica il reciproco di a_{rs} in a.

10. — Noto che se $A = 0$ è $J_1 = 0$, e che se la caratteristica K di A è $< n(n+1) : 2 - 1$, si ha

$$J_1 = J_3 = J_4 = J_7 = J_8 = 0.$$

---

[1]) (A). Pag. 394.

CAPITOLO II.

Caso di $K = n(n+1):2 - 1$. Scomposizione di $\alpha^{rs,pq}$. La forma F_2.

1. — Supponiamo che sia $K = n(n+1):2 - 1$. Sussistono intanto le relazioni

[9] $$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} \,.\, \alpha^{hk,pq} = 0,$$

qualunque siano le coppie rs e pq.

Le (9) considerate come equazioni nelle $\alpha^{hk,pq}$, formano un sistema di $K+1$ equazioni lineari in $K+1$ incognite, colla caratteristica della matrice dei coefficienti $= K$, e che quindi ha tutte le sue soluzioni proporzionali ad una medesima.

Poniamo

$$b^{hk} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} \alpha^{hk,pq} a_{pq},$$

il sistema b^{hk} e' un controvariante a 2 apici, e si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} \,.\, b^{hk} = 0,$$

dunque le b^{hk} formano una soluzione del sistema (9), e poichè tali sono le $\alpha^{hk,pq}$, dovra' essere

$$\alpha^{hk,pq} = b^{hk} \lambda^{pq},$$

dove le λ^{pq} sono delle funzioni convenienti, che per la simmetria di $\alpha^{hk,pq}$ rispetto alle coppie hk e pq dovranno essere proporzionali alle b^{pq}. Allora

$$\alpha^{rs,pq} = H \,.\, b^{rs} b^{pq},$$

e poichè $\alpha^{rs,pq}$ e $b^{rs} b^{pq}$ sono controvarianti, la H sarà un invariante, e

$$c^{rs} = \sqrt{|H|} \,.\, b^{rs}$$

sarà un controvariante a 2 apici e si avrà

[10] $$\alpha^{rs,pq} = \pm\, c^{rs} \,.\, c^{pq},$$

il segno che precede il secondo membro dovendosi prendere lo stesso per tutte le coppie rs e pq.

2. — Se si pone

$$d = \sqrt{|\alpha^{11,11}|},$$

si ha

$$c^{rs} = a^{11,rs} : d.$$

Resta così individuato un controvariante a *2* apici c^{rs}. L'invariante $|J_7|$ diventa il quadrato dell' invariante

$$\Sigma_{rs} c^{rs} a_{rs}.$$

3. — Le relazioni [9] danno subito a causa delle [10]

$$\sum_1^n {}_{hk} A_{hk,rs} c^{hk} = 0,$$

ossia

$$\int_g (\sum_1^n {}_{hk} c^{hk} f_{hk}) f_{rs} dt = 0,$$

qualunque sia la coppia rs, e quindi

[11] $$\sum_1^n {}_{hk} c^{hk} f_{hk} = 0.$$

Così è trovata l'unica relazione lineare fra i parametri f_{rs}. Dalle [11] consegue che il controvariante c^{rs} ha un carattere pro iettivo, e che quindi per una proiettività nello spazio ambiente esso verrà moltiplicato per un invariante.

4. — Se con c_{rs} si indica il complemento algebrico di c^{rs} in

$$\begin{vmatrix} c^{11} & c^{12} & \dots & c^{1n} \\ c^{21} & c^{22} & \dots & c^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{n1} & c^{n2} & \dots & c^{nn} \end{vmatrix},$$

il sistema

$$\gamma_{rs} = c_{rs} \, . \, a$$

è un covariante a *2* indici, e noi indicheremo con F_2 la forma

$$\sum_1^n {}_{hk} \gamma_{hk} du_h du_k.$$

L'equazione $F_2 = 0$ definisce un cono quadrico nello spazio tangente a V_n.

6. — Se $n = 2$, e la V_2 è una superficie generica in uno spazio lineare a *4* dimensioni, la F_2 è la forma indicata nello stesso modo dal Fubini[1]).

[1]) [E]. Tomo secondo pp. 631—637.

Infatti supposto che X ad Y siano parametri normali di 2 direzioni del σ_2 [1]) fra loro ortogonali e perpendicolari alla V_2 generica di uno spazio lineare a 4 dimensioni, si ha

$$f_{rs} = x_{rs} \,.\, X + y_{rs} \,.\, Y,$$

dove

$$x_{rs} = \int_g f_{rs} X dt, \quad y_{rs} = \int_g f_{rs} Y dt$$

sono due covarianti.

Se τ è il piano tangente alla V_2 e ν è il piano delle normale in σ_2, una direzione di τ è data da

$$f_1 \, du_1 + f_2 \, du_2,$$

la normale principale alla geodetica che ha per tangente questa direzione è data da

$$f_{11} \, du_1^2 + 2 f_{12} \, du_1 \, du_2 + f_{22} \, du_2^2,$$

ossia da

$$\begin{gathered}(x_{11} \, du_1^2 + 2 x_{12} \, du_1 \, du_2 + x_{22} \, du_2^2) X \\ + (y_{11} \, du_1^2 + 2 y_{12} \, du_1 \, du_2 + y_{22} \, du_2^2) \, Y.\end{gathered}$$

Ora se $\lambda X + \mu Y$ è una direzione di ν si hanno 2 direzioni corrispondenti in τ, che corrispondono ai 2 valori di $du_1 : du_2$ per cui

$$\begin{gathered}\mu (x_{11} \, du_1^2 + 2 x_{12} \, du_1 \, du_2 + x_{22} \, du_2^2) \\ - \lambda (y_{11} \, du_1^2 + 2 y_{12} \, du_1 \, du_2 + y_{22} \, du_2^2) = 0.\end{gathered}$$

Quando queste direzioni coincidono lo spazio lineare a 3 dimensioni tangente a V_2 e contenente la direzione $\lambda X + \mu Y$ è bitangente alla V_2. Si vede che ci sono 2 di tali spazi (eventualmente coincidenti) che corrispondono ai valori di λ e μ che soddisfano all' equazione

[12] $$\begin{vmatrix} \mu x_{11} - \lambda y_{11} & \mu x_{12} - \lambda y_{12} \\ \mu x_{12} - \lambda y_{12} & \mu x_{22} - \lambda y_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ad una di tali radici corrispondono dei du_2 e du_1 proporzionali ai termini di una riga del 1° membro di [12], ossia eliminando λ e μ dalle 2 relazioni:

$$\begin{gathered}(\mu x_{11} - \lambda y_{11}) du_1 + (\mu x_{12} - \lambda y_{12}) du_2 = 0 \\ (\mu x_{12} - \lambda y_{12}) du_1 + (\mu x_{22} - \lambda y_{22}) du_2 = 0,\end{gathered}$$

---

[1]) [A]. pag. 395.

dei du_1 e du_2 soddisfacenti all' equazione

$$[13] \qquad \begin{vmatrix} x_{11}\,du_1 + x_{12}\,du_2 & y_{11}\,du_1 + y_{12}\,du_2 \\ x_{12}\,du_1 + x_{22}\,du_2 & y_{12}\,du_1 + y_{22}\,du_2 \end{vmatrix} = 0$$

che si può scrivere

$$[13'] \qquad \begin{vmatrix} du_1^2 & -du_1\,du_2 & du_2^2 \\ x_{22} & x_{12} & x_{11} \\ y_{22} & y_{12} & y_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora dalle

$$f_{rs} = x_{rs}\,X + y_{rs}\,Y,$$

e dalla [11] risulta

$$(\sum_1^2{}_{rs}\,x_{rs}\,c^{rs})\,X + (\sum_1^2{}_{rs}\,y_{rs}\,c^{rs})\,Y = 0$$

e poichè X e Y sono liberi 1),

$$\sum_1^2{}_{rs}\,x_{rs}\,c^{rs} = 0, \quad \sum_1^2{}_{rs}\,y_{rs}\,c_{rs} = 0.$$

Per queste la [13′] diventa, all' infuori di un fattore

$$c^{22}\,du_1^2 - 2c^{12}\,du_1\,du_2 + c^{11}\,du_2^2 = 0$$

od anche

$$F_2 = 0$$

CAPITOLO III.

Superficie col σ_2 a 5 dimensioni, terne principali di normali. Superficie cicliche.

1. — Se x_{rs} ed y_{rs} sono due sistemi di funzioni a 2 indici, noi porremo

$$(x, y) = x_{11}\,y_{22} - 2x_{12}\,y_{12} + x_{22}\,y_{11},$$

e quindi anche

$$(x, x) = 2\,(x_{11}\,x_{22} - x_{12}^2)$$

1) [A]. pag. 360—361.

Def. — Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano il cui σ_2 abbia 5 dimensioni, e quindi tale per cui $A \neq 0$, noi diremo terna principale di normali di V_2 ogni insieme di tre parametri normali X, Y, Z di σ_2 ortogonali fra loro e perpendicolari a V_2, per cui sia

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = 0,$$

con

$$x_{rs} = \int_g X f_{rs} dt, \quad y_{rs} = \int_g Y f_{rs} dt, \quad z_{rs} = \int_g Z f_{rs} dt.$$

2. — Teor. — Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano col σ_2 a 5 dimensioni, esiste almeno una terna principale di normali di V_2.

Dim. — Consideriamo l' equazione

$$[14] \qquad \begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,12} & A_{11,22} - \theta \\ A_{12,11} & A_{12,12} + \theta : 2 & A_{12,22} \\ A_{22,11} - \theta & A_{22,12} & A_{22,22} \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata e divisa per $- a^3 : 2$, diventa

$$[14'] \qquad \varrho^3 + 2 J_2 \varrho^2 + 4 J_4 \varrho - 2 J_1 = 0,$$

dove $\varrho = \theta : a$.

La [14'] ha almeno una radice reale ϱ_1.

Il sistema

$$[15] \qquad \begin{aligned} &\lambda_{22} A_{11,11} - 2\lambda_{12} A_{11,12} + \lambda_{11} (A_{11,22} - \varrho_1 a) = 0 \\ &\lambda_{22} A_{12,11} - 2\lambda_{12} \left(A_{12,12} + \varrho_1 \frac{a}{2}\right) + \lambda_{11} A_{12,22} = 0 \\ &\lambda_{22} (A_{22,11} - \varrho_1 a) - 2\lambda_{12} A_{22,12} + \lambda_{11} A_{22,22} = 0 \end{aligned}$$

nelle λ_{rs} ha soluzione, e noi potremo trovare una sua soluzione reale λ_{rs} per la quale sia

$$(\lambda, \lambda) = \varrho_1 a.$$

Sia intanto λ_{rs} una qualunque soluzione reale di [15], e poniano

$$[16] \qquad L = (\lambda_{22} f_{11} - 2\lambda_{12} f_{12} + \lambda_{11} f_{22}) : (\varrho_1 a).$$

Moltiplicando i *2* membri di [16] per f_{rs} ed integrando e tenendo conto delle [15], si ha

$$[17] \qquad \int_g L f_{rs} dt = \lambda_{rs},$$

e moltiplicando i due membri di [16] per L ed integrando, e tenendo conto di [17], si ottiene

[18] $$\int_g L^2 dt = (\lambda, \lambda) : (\varrho_1 a)$$

e poichè il 1° membro di [18] è > 0, si potrà porre

[19] $$(\varrho_1 a) : (\lambda, \lambda) = \delta^2,$$

dove δ è un numero reale, ed il sistema $x_{rs} = \delta \lambda_{rs}$ è una soluzione reale di [15] che soddisfa la

[20] $$(x, x) = \varrho_1 a.$$

Ponendo inoltre

$$X = L\delta,$$

per le [17] e [18] si ha

[17′] $$\int_g X f_{rs} dt = x_{rs},$$

[18′] $$\int_g X^2 dt = 1,$$

la quale [18′] dice che X è un parametro normale di σ_2 perpendicolare a V_2.

Siano inoltre Y' e Z' due altri parametri normali di σ_2 perpendicolari a V_2 e tali che X, Y', Z' siano fra loro ortogonali. Sarà

[21] $$f_{rs} = x_{rs} X + y'_{rs} Y' + z'_{rs} Z',$$

dove, x_{rs} è dato dalle [17′] ed inoltre

$$y'_{rs} = \int_g Y' f_{rs} dt, \quad z'_{rs} = \int_g Z' f_{rs} dt.$$

Moltiplicando per δ le [16], si ha

[16′] $$X = (x_{22} f_{11} - 2x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22}) : (\varrho_1 a),$$

e sostituendo in [16′] alle f_{rs} i secondi membri di [21], si ottiene, tenendo conto delle [20],

$$(x, y') Y' + (x, z') Z' = 0,$$

e poichè le Y' e Z' sono libere sarà

[22] $$(x, y') = (x, z') = 0.$$

Se risultasse inoltre $(y', z') = 0$, le X, Y', Z' formerebbero una terna principale, e quindi sarebbe provata l'esistenza di una terna principale.

Se invece $(y', z') \neq 0$, poniano

$$Y = \cos\alpha\, Y' - \operatorname{sen}\alpha\, Z'$$
$$Z = \operatorname{sen}\alpha\, Y' + \cos\alpha\, Z'$$

ed allora X e Y sono 2 altri parametri normali di σ_2 ortogonali fra loro e a V_2 ed a X.

Si ha poi

$$Y' = \cos\alpha\, Y + \operatorname{sen}\alpha\, Z$$
$$Z' = -\operatorname{sen}\alpha\, Y + \cos\alpha\, Z,$$

e quindi

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y + z_{rs} Z,$$

dove

$$y_{rs} = y'_{rs} \cos\alpha - z'_{rs} \operatorname{sen}\alpha$$
$$z_{rs} = y'_{rs} \operatorname{sen}\alpha + z'_{rs} \cos\alpha.$$

A causa delle [22] si hanno le

[22′] $$(x, y) = (x, z) = 0.$$

Si ha inoltre

$$(y, z) = [(y', y') - (z', z')] \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + (y', z') \cos 2\alpha,$$

e, scegliendo α in modo che

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{(z', z') - (y', y')}{2(y', z')},$$

si ha

$$(y, z) = 0,$$

ed allora X, Y, Z sono una terna principale. Così è completamente dimostrato il teor.

3. — Supposto che il σ_2 di V_2 sia a 5 dimensioni, e che X, Y, Z sia una terna principale, sarà

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y + z_{rs} Z,$$

con

$$x_{rs} = \int_g X f_{rs}\, dt, \quad y_{rs} = \int_g Y f_{rs}\, dt, \quad z_{rs} = \int_g Z f_{rs}\, dt,$$

ed

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = 0,$$

ed, a causa di queste relazioni, si ha subito

$$x_{22} f_{11} - 2x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22} = (x, x) X \text{ e analoghe}$$

e moltiplicando per f_{rs} ed integrando

$$x_{22} A_{11,11} - 2x_{12} A_{12,11} + x_{11} [A_{11,22} - (x, x)] = 0$$

[15′] $$x_{22} A_{12,11} - 2x_{12} \left[A_{12,12} + \frac{(x, x)}{2}\right] + x_{11} A_{12,22} = 0$$

$$x_{22} [A_{22,11} - (x, x)] - 2x_{12} A_{12,22} + x_{11} A_{22,22} = 0$$

ed analoghe.

Risulta che

$$(x, x), \quad (y, y), \quad (z, z)$$

devono essere radici di [14]

Se le radici di [14] sono a *2* a *2* diverse, per ognuna di esse la matrice del 1º membro di [14] ha caratteristica *2*, e quindi le corrispondenti [15] hanno una sola soluzione. Si vede così che in tal caso si ha una sola terna principale.

Per determinarla, indichiamo con ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 le tre radici diverse di [14'], che sono degli invarianti. Osserviamo poi che

$$W_{rs,pq} = (a_{rp}\, a_{sq} + a_{rq}\, a_{sp} - 2\, a_{rs}\, a_{pq}) : 2$$

è un covariante che ha le stesse simmetrie di $A_{rs,pq}$, per cui

$$W_{11,11} = W_{22,22} = W_{11,12} = W_{12,22} = 0,\ W_{11,22} = -a,\ W_{12,12} = a:2,$$

ed allora anche

$$\underset{i}{\Delta}_{rs,pq} = A_{rs,pq} + \varrho_i\, W_{rs,pq}$$

è un covariante che ha le stesse simmetrie di $A_{rs,pq}$, e il determinante $\underset{i}{\Delta}$, formato cogli elementi $\underset{i}{\Delta}_{rs,pq}$ come è stato formato A cogli $A_{rs,pq}$, è nullo ed ha caratteristica *2*.

Indichiamo con $\underset{i}{\Delta}^{rs,pq}$ i complementi algebrici di $\underset{i}{\Delta}_{rs,pq}$ in $\underset{i}{\Delta}$, e poniano

$$\underset{i}{\delta}^{rs,pq} = 2^{\varepsilon_{rs}+\varepsilon_{pq}}\,.\,\underset{i}{\Delta}^{rs,pq} : (4a^{n+1}).$$

Questo è un controvariante a *4* apici, ed essendo $\underset{i}{\Delta} = 0$, posto

$$\underset{i}{d} = \sqrt{\,|\,\underset{i}{\delta}^{11,11}\,|\,}$$

e

$$\underset{i}{\gamma}^{rs} = \frac{\underset{i}{\delta}^{11,rs}}{\underset{i}{d}}$$

si ha [1])

$$\underset{i}{\delta}^{rs,pq} = \pm\, \underset{i}{\gamma}^{rs} \cdot \underset{i}{\gamma}^{pq}.$$

Il complemento algebrico di $\underset{i}{\gamma}^{rs}$ moltiplicato per a si indicherà con $\underset{i}{\gamma}_{rs}$, ed i sistemi x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} risulteranno proporzionali ai cova-

---

[1]) Poichè anche i risultati del Cap. II nº 2 valgono per qualunque sistema covariante $A_{rs,pq}$ avente le solite simmetrie, e quindi senza tenere conto dei legami colla varietà.

rianti $\gamma_{rs}^{}$, γ_{rs}, γ_{rs}, il fattore di proporzionalità dovendo essere de-
$\scriptstyle 1 \quad 2 \quad 3$
terminato in modo che

$$(x, x) = \varrho_1 a, \quad (y, y) = \varrho_2 a, \quad (z, z) = \varrho_3 a.$$

4. — Non può darsi che le radici di [14′] siano tutte uguali, perchè in tal caso le x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} sarebbero soluzioni del medesimo sistema [15], e quindi, o sono linearmente dipendenti, ed allora il σ_2 ha meno di 5 dimensioni, o non sono linearmenti dipendenti ed allora devono essere nulli tutti gli elementi del 1° membro di [14], e dalla relazione $A_{11,11} = 0$ che ne conseguirebbe si avrebbe ancora che il numero delle dimensioni del σ_2 sarebbe < 5.

5. — Resta a supporsi che le radici di [14′] siano una doppia ed una semplice. In tal caso due delle espressioni

$$(x, x), \quad (y, y), \quad (z, z)$$

saranno uguali, per esempio sarà

$$(x, x) = (y, y).$$

Allora il sistema [15] in cui ϱ_1 è una conveniente radice di [14′] è soddisfatto tanto da x_{rs}, quanto da y_{rs}, e poichè le x_{rs} e y_{rs} non possono essere proporzionali, perchè allora le f_{rs} risulterebbero vincolate, la matrice del 1° membro di [14] dovrà avere caratteristica 1, e ϱ_1 è radice doppia di [14′].

Dunque se [14′] ha una radice ϱ_1 doppia ed un' altra semplice ϱ_2, sarà

$$(x, x) = (y, y) = \varrho_1 a, \quad (z, z) = \varrho_2 a,$$

le x_{rs} e y_{rs} saranno 2 soluzioni del sistema [15], per cui $(x, y) = 0$, le z_{rs} soddisferanno le relazioni

$$\begin{aligned}
&z_{22} A_{11, 11} - 2 z_{12} A_{11, 12} + z_{11} (A_{11, 22} - \varrho_2 a) = 0 \\
&z_{22} A_{12, 11} - 2 z_{12} \left(A_{12, 12} + \varrho_2 \frac{a}{2}\right) + z_{11} A_{12, 22} = 0 \\
&z_{22} (A_{22, 11} - \varrho_2 a) - 2 z_{12} A_{22, 12} + z_{11} A_{22, 22} = 0.
\end{aligned}$$

È evidente in questo caso che facendo ruotare lo spazio a 3 dimensioni appartenente a σ_2 e perpendicolare a V_2 intorno alla retta uscente dal punto di V_2 ed avente per parametro Z, la terna X, Y, Z si porta in un altra terna principale, perchè detto α l'angolo di rotazione, ed X' e Y' i parametri normali delle nuove posizione di X e Y, e x'_{rs}, y'_{rs} i soliti covarianti associati, si ha

$$(x', y') = [(x, x) - (y, y)] \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + (x, y) \cos 2\alpha,$$

e si vede che

$$(x', y') = 0$$

perchè $(x, x) = (y, y)$ e $(x, y) = 0$.

È interessante osservare che essendo la caratteristica di $\underset{1}{\Delta}$ uguale ad *1*, risulterà

$$\underset{1}{\Delta}_{rs,pq} = \pm \omega_{rs} \omega_{pq},$$

dove ω_{rs} è un covariante, e per le [15] dovrà essere

$$(x, \omega) = (y, \omega) = 0,$$

il che prova che i sistemi ω_{rs} e z_{rs} devono essere proporzionali.

6. — Concludendo

Se una superficie V_2 ha un σ_2 di *5* dimensioni, o esiste una sola terna principale, o ne esistono infinite che si ottengono da una di esse facendola ruotare intorno ad una determinata delle sue rette.

Il 1° caso si presenta quando l'equazione [14′] ha il discriminante diverso da *zero*, ed il 2° quando questo discriminante è *zero*, pur non avendo la [14′] tutte e tre le sue radici uguali.

Def. Un punto di una V_2 col σ_2 a *5* dimensioni, in cui si ha una sola terna principale si dice generico, ed un punto con infinite terne principali si dice ciclico.

7. — Def. Una superficie V_2 col σ_2 a *5* dimensioni, la quale ha tutti i punti ciclici, si dice ciclica.

Esempio.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ *6* parametri normali fra loro ortogonali e consideriamo la superficie V_2 di equazione

$$f = \cos u_1 \varphi_1 + \operatorname{sen} u_1 \varphi_2 + \cos u_2 \varphi_3 + \operatorname{sen} u_2 \varphi_4 + \\ + \cos(u_1 + u_2) \varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \varphi_6.$$

Per essa si ha

$$f_1 = - \operatorname{sen} u_1 \varphi_1 + \cos u_1 \varphi_2 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2) \varphi_6$$
$$f_2 = - \operatorname{sen} u_2 \varphi_3 + \cos u_2 \varphi_4 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2) \varphi_6$$

ed inoltre, indicando con f'_{rs} le derivate seconde ordinarie di f,

$$f'_{11} = -\cos u_1\, \varphi_1 - \operatorname{sen} u_1\, \varphi_2 - \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_6$$
$$f'_{12} = -\cos(u_1 + u_2)\, \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_6$$
$$f'_{22} = -\cos_2\, \varphi_3 - \operatorname{sen} u_2\, \varphi_4 - \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_6$$

e poichè risulta dalle espressioni trovate che

$$\int_g f'_{rs} f_p\, dt = 0 \quad (r, s, p = 1, 2)$$

si ha anche

$$f_{rs} = f'_{rs}, \quad (r, s = 1, 2)$$

e quindi

$$A_{11,11} = A_{22,22} = 2,\ A_{11,12} = A_{11,22} = A_{12,22} = A_{12,22} = 1,$$

e l'equazione [14] diventa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-\theta \\ 1 & 1+\frac{\theta}{2} & 1 \\ 1-\theta & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

che è soddisfatta, come si verifica subito, da $\theta = -1$, e da $\theta = 2$. Infatti per $\theta = -1$ la prima e la terza colonna risultano uguali, e per $\theta = 2$ la prima colonna risulta uguale alla differenza della seconda e della terza colonna.

Si vede poi facilmente che $\theta = -1$ annulla tutti i minori di 2° ordine del 1° membro, e quindi la $\theta = -1$ è radice doppia. Dunque la superficie considerata è ciclica.

Ogni terna principale di normali conterrà il parametro $Z = f : \sqrt{3}$, ed altri due parametri X, Y ad esso ortogonali ed ortogonali fra loro, ed es,

$$X = (\psi_1 - \psi_2) : \sqrt{2}, \quad Y = (\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3) : \sqrt{6},$$

dove

$$\psi_1 = \cos u_1\, \varphi_1 + \operatorname{sen} u_1\, \varphi_2$$
$$\psi_2 = \cos u_2\, \varphi_3 + \operatorname{sen} u_2\, \varphi_4$$
$$\psi_3 = \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_6.$$

Con queste notazioni è anche

$$Z = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) : \sqrt{3}.$$

8. — Se V_2 ha il σ_2 a 5 dimensioni, le normali principali alle sue geodetiche formano un cono quadrico che diremo il c o n o

geodetico, e se X, Y, Z sono una terna principale, un punto di questo cono sarà dato da

$$f + \xi X + \eta Y + \zeta Z,$$

dove ξ, η, ζ sono le sue coordinate rispetto agli assi X, Y, Z, e poichè

$$X = (x_{22} f_{11} - 2 x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22}) : (x, x),$$

ed analoghe, detto punto sarà dato da

$$f + \lambda_{22} f_{11} - 2 \lambda_{12} f_{12} + \lambda_{11} f_{22},$$

dove

$$\lambda_{rs} = \xi \, . \, x_{rs} : (x, x) + \eta \cdot y_{rs} : (y, y) + \zeta \, . \, z_{rs} : (z, z),$$

e

$$(\lambda, \lambda) = 0,$$

poichè deve risultare

$$\lambda_{11} : - \lambda_{12} : \lambda_{22} = du_2^2 : du_1 \, du_2 : du_1^2$$

e quindi con

$$\xi^2 : (x, x) + \eta^2 : (y, y) + \zeta^2 : (z, z) = 0,$$

il che prova che una terna principale è un triedro trirettangolo autopolare rispetto al cono geodetico. Quando il punto è ciclico, ossia la terna principale non è determinata, il cono geodetico è un cono di rotazione.

CAPITOLO IV.

Superficie col σ_2 a 4 dimensioni. Coppie principali di normali. Superficie cicliche.

1. — Def. Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano il cui σ_2 abbia *4* dimensioni, e quindi tale per cui A ha caratteristica *2*, noi diremo coppia principale di normali di V_1 ogni coppia X, Y di parametri normali di σ_2 ortogonali fra loro e perpendicolari a V_2, per cui sia $(x, y) = 0$, con

$$x_{rs} = \int_g X f_{rs} \, dt, \quad y_{rs} = \int_g Y f_{rs} \, dt.$$

2. — Teor. Se V_2 è una superficie col σ_2 a *4* dimensioni, esiste almeno una coppia principale di normali a V_2.

Dim. — Indichiamo con τ il piano tangente a V_2 e con ν il piano perpendicolare a τ che giace in σ_2.

Siano X, Y due parametri normali di ν fra loro ortogonali, e x_{rs}, y_{rs} i soliti relativi covarianti. Sarà

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y.$$

Una direzione di τ è data da

$$f_1 \, du_1 + f_2 \, du_2,$$

la normale principale alla geodetica tangente a questa direzione sarà data da

$$f_{11} \, du_1^2 + 2 f_{12} \, du_1 \, du_2 + f_{22} \, du_2^2 = \lambda X + \mu Y,$$

dove

$$\lambda = \sum_1^2{}_{rs} \, x_{rs} \, du_r \, du_s, \qquad \mu = \sum_1^2{}_{rs} \, y_{rs} \, du_r \, du_s.$$

Si vede così che ad ogni valore di $du_1 : du_2$, cioè ad ogni direzione τ corrisponde un solo valore di $\lambda : \mu$, cioè una sola direzione di ν, e che ad ogni direzione di ν ne corrispondono due di τ (eventualmente coincidenti).

Le direzioni di ν che corrispondono a direzioni coincidenti di τ si diranno n o r m a l i d o p p i e. Esse corrispondono ai valori di $\lambda : \mu$ che annullano il discriminante dell' equazione

[23] $$\Sigma_{rs} (\mu x_{rs} - \lambda y_{rs}) \, du_r \, du_s = 0$$

ossia che soddisfano l'equazione

[24] $$\begin{vmatrix} \mu x_{11} - \lambda y_{11} & \mu x_{12} - \lambda y_{12} \\ \mu x_{12} - \lambda y_{12} & \mu x_{22} - \lambda y_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Si vede così che esistono due normali doppie che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti ed imaginarie coniugate, ed in particolare le due rette cicliche di ν.

Corrispondentemente noi diremo che il punto è i p e r b o l i c o, p a r a b o l i c o od e l l i t t i c o ed in particolare c i c l i c o.

Se il punto non è ciclico le due normali doppie dividono ν in due angoli, le cui bisettrici sono reali e fra loro perpendicolari. Dico che queste bisettrici formano una coppia principale. Supponiamo che i parametri X e Y siano quelli di queste 2 bisettrici, allora se $\lambda_1 X + \mu_1 Y$, $\lambda_2 X + \mu_2 Y$ sono i parametri delle 2 normali doppie, poichè X e Y devono risultare loro bisettrici, dovrà essere

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = 0$$

e poichè λ_1, μ_1 e λ_2, μ_2 soddisfano la [24] dovrà essere nullo il coefficiente di $\lambda . \mu$ in [24], e quindi essere $(x, y) = 0$ c. d. d.

Se il punto è ciclico, dovendo la [24] risultare equivalente alla $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, dovrà essere (qualunque sia il sistema di partenza X, Y)

$$(x, x) = (y, y), \quad (x, y) = 0,$$

il che prova che in questo caso ogni coppia di direzioni di ν fra loro ortogonali è una coppia principale.

Così è dimostrato completamente il teor.

3. — Se X e Y è una coppia principale, è al solito

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y,$$

con $(x, y) = 0$, da cui si ricava

$$x_{22} f_{11} - 2 x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22} = (x, x) X$$

ed analoga per y, e moltiplicando per f_{rs} ed integrando si hanno le [15'] e le analoghe per y.

Ciò prova che (x, x) e (y, y) sono radici di [14].

Ora la [14], essendo nel nostro caso $A = 0$ diventa, posto $\varrho = \theta : a$ e dividendo per ϱ,

$$\varrho^2 + 2 J_2 \varrho + 4 J_4 = 0. \qquad [14'']$$

Se le radici di [14''] sono uguali si avrà un punto ciclico.

4. — Se λ e μ soddisfano la [24], $\lambda X + \mu Y$ è parametro di una normale doppia. La perpendicolare in ν a questa normale doppia ha per parametro normale

$$z = \frac{\mu X - \lambda Y}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

e, se $z_{rs} = \int\limits_{\varrho} Z f_{rs} dt$, si ha per la [24] $(z, z) = 0$. Si ha così il

Teor. Le perpendicolari in ν alle normali doppie hanno uu covariante con determinante nullo.

5. — Def. — Una superficie V_2 col σ_2 a *4* dimensioni, la quale ha tutti i punti ciclici, si dice ciclica.

Esempio.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ *4* parametri normali fra loro ortogonali, ed U e V la parte reale ed il coefficiente dell' imaginario di una funzione analitica $U+iV$ della variabile complessa u_1+iu_2, e consideriamo la superficie di equazione

$$f=u_1\varphi_1+u_2\varphi_2+U\varphi_3+V\varphi_4.$$

Dico che essa è ciclica.

Intanto indicando con U_1, U_2, U'_{11}, U'_{12}, U'_{22} le derivate parziali prime e seconde ordinarie di U rispetto alle u_i, ed analogamente per V, si ha

$$U_1=V_2,\quad U_2=-V_1,\quad U_{22}=-U_{11},$$

e quindi

$$\begin{aligned} f_1&=\varphi_1+U_1\varphi_3+V_1\varphi_4=\varphi_1+U_1\varphi_3-U_2\varphi_4\\ f_2&=\varphi_2+U_2\varphi_3+V_2\varphi_4=\varphi_2+U_2\varphi_3+U_1\varphi_4\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$a_{11}=\int_g f_1^2\,dt=1+\varDelta,\quad a_{12}=\int_g f_1f_2\,dt=0,\quad a_{22}=\int_g f_2^2\,dt=1+\varDelta,$$

dove $\varDelta=U_1^2+U_2^2$.

Se poi indichiamo con f'_{rs} la derivata seconda ordinaria di f rispetto ad u_r e ad u_s, abbiamo

$$\begin{aligned} f'_{11}&=U_{11}\varphi_3-U_{12}\varphi_4\\ f'_{12}&=U_{12}\varphi_3+U_{11}\varphi_4\\ f'_{22}&=U_{22}\varphi_3+U_{12}\varphi_4=-U_{11}\varphi_3+U_{12}\varphi_4.\end{aligned}$$

Da queste espressioni risulta che $f'_{22}=-f'_{11}$ e che quindi dovrà essere

$$f_{22}=-f_{11}.$$

Inoltre sarà

$$f_{11}=f'_{11}-\alpha f_1-\beta f_2,$$

dove α e β devono essere scelte in modo che f_{11} risulti ortogonale ad f_1 e ad f_2, ossia in modo che

$$\begin{aligned} \int_g f_{11}f_1\,dt&=U_1U_{11}+U_2U_{12}-\alpha(1+\varDelta)=0\\ \int_g f_{11}f_2\,dt&=U_2U_{11}-U_1U_{12}-\beta(1+\varDelta)=0.\end{aligned}$$

Sarà dunque

$$f_{11}=U_{11}\varphi_3-U_{12}\varphi_4-\frac{U_{11}}{1+\varDelta}(U_1f_1+U_2f_2)-\frac{U_{12}}{1+\varDelta}(U_2f_1-U_1f_2).$$

Inoltre si avrà poi

$$f_{12}=f'_{12}-\gamma f_1-\delta f_2,$$

con γ e δ scelte in modo che f_{12} risulti ortogonale ad f_1 e f_2, ossia in modo che

$$\int_g f_{12} f_1 \, dt = U_1 U_{12} - U_2 U_{11} - \gamma(1+\Delta) = 0$$
$$\int_g f_{12} f_2 \, dt = U_2 U_{12} + U_1 U_{11} - \delta(1+\Delta) = 0.$$

Sarà dunque

$$f_{12} = U_{12}\varphi_3 + U_{11}\varphi_4 - \frac{U_{12}}{1+\Delta}(U_1 f_1 + U_2 f_2) + \frac{U_{11}}{1+\Delta}(U_2 f_1 - U_1 f_2).$$

E si verifica facilmente che

$$\int_g f_{11} f_{12} \, dt = 0.$$

Ed indicando con X e Y parametri normali delle direzioni che hanno per parametri f_{11} ed f_{12} si ha

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y,$$

con

$$y_{11} = y_{22} = x_{12} = 0$$

e

$$x_{11} = -x_{22} = \pm\sqrt{(U_{11}^2 + U_{12}^2) \cdot K}$$
$$y_{12} = \pm\sqrt{(U_{11}^2 + U_{12}^2) \cdot K}$$

dove

$$K = 1 + \frac{\Delta}{(1+\Delta)^2}.$$

Si ha così

$$(x, y) = 0, \quad (x, x) = (y, y),$$

e la superficie che si considera è ciclica.

Le superficie qui studiate furono già considerate col nome di *superficie riemanniane* dal Kommerell[1]).

[1]) (F).